Classificação de Campos Vetoriais Homogêneos que Comutam em $\mathbb{C}^2$

Gustavo Franco Marra Domingues

Dissertação de Mestrado apresentada como pré-requisito para a obtenção do grau de Mestre junto ao Programa de Pós-graduação em Matemática da UFMG.

Data da defesa:

Banca Examinadora:

À minha família,
Mércia, Willian e Guilherme

Agradecimentos

Gostaria de dedicar algumas palavras aos homens e mulheres que tanto colaboraram para a elaboração deste trabalho, que encerra mais uma significativa etapa da minha vida.

Aos meus pais, Mércia e Willian, por ensinarem a mim a mais importante das virtudes: Coragem. Ao meu irmão Guilherme (*in memoriam*), cuja luz sempre indicará a direção a seguir. A todos os familiares que, direta ou indiretamente, estiveram ao meu lado, com atenção especial à minha tia Armênia.

À minha namorada e amiga, Amanda, por toda a compreensão, por todos os momentos fantásticos e por todas as dificuldades enfrentadas juntos.

Aos meus amigos próximos ou distantes, por entenderem que mesmo estando ausente, eu nunca os esqueço.

Aos professores e funcionários do Instituto de Ciências Exatas, por todos os inestimáveis ensinamentos, bem como aos meus professores da Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia e da Universidade do Porto.

Ao professor Arturo Ulises Fernandez Perez, pela orientação, dedicação e principalmente, pela paciência, sem as quais este trabalho jamais teria se concretizado.

Aos membros da banca examinadora, Professores Maurício Corrêa Júnior e Márcio Gomes Soares, por todas as sugestões e observações feitas para o aperfeiçoamento deste trabalho.

Incluo nos agradecimentos a CAPES pelo apoio financeiro durante toda a duração do Mestrado.

Sumário

Introdução

Um campo de vetores homogêneo X em $\mathbb{C}^n$ é dado por

$$X = \sum_{j=1}^{n} P_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

onde cada P_j, $1 \leq j \leq n$, é um polinômio homogêneo. Tal campo vetorial X define uma folheação holomorfa por curvas $\mathcal{F}_X$ em $\mathbb{C}^n$, onde as folhas de $\mathcal{F}_X$ são as componentes conexas das órbitas de X. Diremos que dois campos de vetores X e Y comutam se o colchete de Lie $[X, Y] = XY - YX$ é identicamente zero.

Nos trabalhos [14] e [15], Henri Poincaré dedicou-se a responder o seguinte problema:

"É possível decidir se uma equação diferencial algébrica em duas variáveis, admite uma integral primeira racional?"

Recentemente, Alcides Lins Neto, no artigo *"Some examples for the Poincaré and Painlevé problems"* (ver [11]), dá uma resposta negativa ao problema acima, usando ferramentas da Teoria de Folheações. Lins Neto exibiu uma família a um parâmetro de folheações tal que, somente num subconjunto denso desta família de parâmetros, as folheações possuem integral primeira racional de graus arbitrariamente altos. Em [4], Adolfo Guillot fornece outro contra exemplo para o Problema de Poincaré, construindo um *pencil* de campos vetoriais homogêneos em $\mathbb{C}^3$ que comutam (no sentido de Lie), o que também serve como contra-exemplo para a seguinte Conjectura de Painlevé ([**?**]):

"Campos polinomiais em $\mathbb{C}^n$ com soluções meromorfas globais são completamente integráveis?"

O exemplo de Guillot sugeriu a Lins Neto o seguinte problema:

"É possível descrever todos os pencils de campos vetoriais homogêneos que comutam, no sentido de Lie, em $\mathbb{C}^n$?"

Em [7], Lins Neto, dá uma classificação completa para pencils de campos vetoriais homogêneos e quasi-homogêneos que comutam em $\mathbb{C}^2$; o problema permanece em aberto para campos polinomiais não homogêneos em $\mathbb{C}^2$ e para campos, homogêneos ou não, em $\mathbb{C}^n$, com n maior ou igual a 3 e grau maior ou igual a 2.

O principal objeto de estudo desta dissertação é a descrição completa da classificação dos pencils de campos vetoriais homogêneos que comutam em $\mathbb{C}^2$, baseado principalmente nos resultados obtidos por A. Lins Neto em [7]. Mais especificamente, serão mostrados os seguintes teoremas:

Teorema 1 *Sejam X, Y campos vetoriais não nulos que comutam em $\mathbb{C}^2$, quasi-homogêneos em relação a $S = px.\partial_x + qy.\partial_y$, onde $p, q \in \mathbb{N}$ e $mdc(p,q) = 1$. Escreva $[S,X] = mX$, $[S,Y] = nY$, $X \wedge Y = f\partial_x \wedge \partial_y$, $S \wedge Y = g\partial_x \wedge \partial_y$ e $S \wedge Y = h\partial_x \wedge \partial_y$. Suponha ainda que $f \not\equiv 0$, $h \not\equiv 0$ e $n \neq 0$. Então:*

(a) $g \not\equiv 0$ e $\dfrac{f}{g}$ é uma integral primeira meromorfa para X.

(b) Se $m \neq 0$, então f, g e h satisfazem

$$mn.f^2.dx \wedge dy = f.dg \wedge dh + g.dh \wedge df + h.df \wedge dg \tag{1}$$

e

$$(m-n).\frac{df}{f} + n.\frac{dh}{h} - m.\frac{dg}{g} = \frac{mn.f}{gh}(qy.dx - px.dy) \tag{2}$$

e estas expressões são equivalentes.

(c) Se $m \neq 0$, então todos os fatores irredutíveis de f dividem g e h. Reciprocamente, se $p = mdc(g,h)$, então todo fator irredutível de p divide f. Além disso, podemos escrever f, g e h em fatores irredutíveis na seguinte forma:

$$\begin{cases} f = \Pi_{j=1}^r f_j^{l_j} \\ g = \Pi_{j=1}^r f_j^{m_j} \cdot \Pi_{i=1}^s g_i^{a_i} \\ h = \Pi_{j=1}^r f_j^{n_j} \cdot \Pi_{i=1}^t h_i^{b_i} \end{cases} \tag{3}$$

onde $r > 0$, $m_j, n_j > 0$, $l_j \geq m_j + n_j - 1$ para todo $j = 1, ..., r$, e quaisquer dois polinômios em $\{f_1, ..., f_r, g_1, ..., g_s, ..., h_1, ..., h_t\}$ são relativamento primos.

(d) Supondo que f, g e h escrevem-se como (3), então os campos X, Y escrevem-se como

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{n}.g\left[\displaystyle\sum_{j=1}^r (l_j - m_j)\frac{1}{f_j}(f_{j_x}\partial_y - f_{j_y}\partial_x) - \sum_{i=1}^s a_i \frac{1}{g_i}(g_{i_x}\partial_y - g_{i_y}\partial_x)\right] \\ Y = \dfrac{1}{m}.h\left[\displaystyle\sum_{j=1}^r (l_j - n_j)\frac{1}{f_j}(f_{j_x}\partial_y - f_{j_y}\partial_y) - \sum_{i=1}^t b_i \frac{1}{h_i}(h_{i_x}\partial_y - h_{i_y}\partial_x)\right] \end{cases} \tag{4}$$

Um **pencil** ou **sistema linear a um parâmetro** Z_λ é uma família de polinômios descrita por um parâmetro $\lambda = [a : b] \in \mathbb{P}^1$ por

$$Z_\lambda = X + \lambda Y = aX + bY.$$

Ele é dito colinear se $X \wedge Y = 0$.

Teorema 2 *Sejam* (Z_λ), $\lambda \in \mathbb{P}^1$ *um pencil não-trivial de campos vetoriais homogêneos de grau* $d \geq 2$ *que comutam em* $\mathbb{C}^2$, *e* X, Y *geradores de* Z_λ *conforme descritos acima. Se o pencil for colinear, então* $X = \alpha.R$, $Y = \beta.R$, *para* α, β *polinômios homogêneos de grau* $d-1$. *Se o pencil for não-colinear, então*

(a) $f, g, h \not\equiv 0$.

(b) $\dfrac{f}{g}$ *(respectivamente* $\dfrac{f}{h}$*) é integral primeira não constante de* X *(respectivamente, de* Y*).*

(c) Se $s = deg(\phi)$, *então* $1 \leq s \leq d-1$.

(d) A decomposição de f, g *e* h *em fatores irredutíveis é da forma*

$$\begin{cases} f = \Pi_{j=1}^r f_j^{2k_j+t_j} \\ g = \Pi_{j=1}^r f_j^{k_j} \cdot \Pi_{i=1}^s g_i \\ h = \Pi_{j=1}^r f_j^{k_j} \cdot \Pi_{i=1}^s h_i \end{cases}$$

onde $s + \sum_{j=1}^r k_j = d+1$ *e* $\sum_{j=1}^r t_j = 2s-2$. *Os geradores* X *e* Y *podem ser escolhidos de forma que quaisquer dois elementos de* $\{g_1, ..., g_s, h_1, ..., h_s\}$ *são relativamente primos.*

(e) Para um elemento $p_j = \{f_j = 0\}$ *de* $\mathbb{P}^1$, *temos* $t_j = mult_\phi(p_j) - 1$, $j = 1, ..., r$.

(f) Os geradores de X *e* Y *podem ser tomados da forma*

$$\begin{cases} X = g\left[\sum_{j=1}^r (k_j+t_j)\dfrac{1}{f_j}\left(\dfrac{\partial f_j}{\partial x}.\partial_y - \dfrac{\partial f_j}{\partial y}.\partial_x\right) - \sum_{i=1}^s \dfrac{1}{g_i}\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial x}.\partial_y - \dfrac{\partial g_i}{\partial y}.\partial_x\right)\right] \\ Y = h\left[\sum_{j=1}^r (k_j+t_j)\dfrac{1}{f_j}\left(\dfrac{\partial f_j}{\partial x}.\partial_y - \dfrac{\partial f_j}{\partial y}.\partial_x\right) - \sum_{i=1}^t \dfrac{1}{h_i}\left(\dfrac{\partial h_i}{\partial x}.\partial_y - \dfrac{\partial h_i}{\partial y}.\partial_x\right)\right] \end{cases} \tag{5}$$

Reciprocamente, se $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ *é um mapa não constante com grau igual a* $s \geq 1$, *e* D *um divisor em* $\mathbb{P}^1$ *da forma*

$$D = \sum_{p \in \mathbb{P}^1} (2k(p) + mult_p(\phi) - 1) \cdot p$$

onde $k(p) \geq (1, mult_p(\phi) - 1)$ e $\sum_{p \in \mathbb{P}^1} k(p) < \infty$, então existe um único pencil (Z_λ) de campos vetoriais homogêneos de grau $d = \sum_p K(p) + s - 1$, com geradores X e Y dados como em (5), onde os termos f_i, g_i, h_i são dados da seguinte forma: considere $\{p_1 = [a_1, b_1], ..., r_r = [a_r, b_r]\} = \{p \in \mathbb{P}^1$ tais que $2k(p) + mult_p(\phi) - 1 > 0\}$, $k_j = k(p_j)$, $t_j = mult_{p_j}(\phi) - 1$ e $f_j(x, y) = a_j y - b_j x$. Escrevendo $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, $\phi([x : y]) = [G_1(x, y) : H_1(x, y)]$, onde G_1 e H_1 são polinômios homogêneos de grau s, temos que os termos g_i e h_i são os fatores lineares de G_1 e H_1.

As principais ferramentas necessárias para a compreensão da dissertação e obtenção dos resultados abrangem cálculo diferencial exterior, derivada de Lie, Teorema de Divisão de De Rham e Teorema de Riemann-Hurwitz. Também são apresentados resultados concernentes a classificação de pencils de campos quasi-homogêneos e a descrição de todos os pencils homogêneos cujo grau é igual a dois ou três.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

As discussões neste capítulo são de caráter contextualizador, cujo formalismo completo pode ser consultado em [1] ou em [9].

1.1 Campos vetoriais em Variedades

Seja M uma variedade diferenciável (ver [9]) sobre $\mathbb{K}$ (diferenciável de classe C^r ou analítica se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, holomorfa se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) com dimensão n. O conjunto das funções $f : M \to \mathbb{K}$ de classe C^r, analíticas ou holomorfas será denotado por $\mathfrak{F}^j(M)$, onde $j = r, A, H$, respectivamente, para os casos em que estas funções são diferenciáveis de classe C^r, analíticas ou holomorfas, ou simplesmente $\mathfrak{F}(M)$ quando independer do contexto. Em cada $p \in M$, considere o espaço tangente a M em p, denotado por T_pM. Definimos o fibrado tangente de M como o conjunto

$$TM = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^n | v \in T_pM\}.$$

O fibrado tangente de M tem estrutura de variedade (diferenciável de classe C^r, analítica ou holomorfa) de dimensão $2n$. A este conjunto está associado uma projeção natural

$$\begin{array}{rccc} \pi : & TM & \to & M \\ & (p, v) & \mapsto & p. \end{array}$$

Considere uma carta local $\phi : U \to \mathbb{K}^n$, onde $U \subset M$ é aberto em M (e neste caso, escreveremos também $U \underset{ab}{\subset} M$ para denotar U aberto em M). À carta ϕ está associada uma base para o espaço T_pM em cada $p \in U$, que é formada pelos vetores tangentes $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial_{x_i}}(p) | 1 \leq i \leq n \right\}$. Para simplificar a notação, escreveremos $\dfrac{\partial}{\partial_{x_i}}(p)$ como $\partial_{x_i}(p)$ ou apenas ∂_{x_i}.

Um campo de vetores X é uma aplicação $X : M \to TM$ tal que $\pi \circ X : M \to M$ é igual à identidade em M. X é diferenciável de classe C^r, analítico ou holomorfo se o for como aplicação entre as variedades M e TM. Para cada $p \in M$, $X(p)$ é um vetor de T_pM cuja expressão na base induzida pela carta local ϕ será escrita como

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} X_i(p)\partial_{x_i}$$

onde X é de classe C^r, analítico ou holomorfo se e somente se cada X_i também o for. É fácil verificar que $\mathfrak{X}^j(M)$, $j = r, A, H$, o conjunto de todos os campos vetoriais sobre M, respectivamente de classe C^r, analíticos ou holomorfos, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Perceba que cada ∂_{x_i} é um campo vetorial, conforme a definição dada, para $i = 1, ..., n$. A estes campos chamaremos **campos vetoriais coordenados**.

Definição 1.1 *Considere um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}^j(M)$, $j = r, A, H$, Uma função não constante $f \in \mathfrak{F}^j(M)$ é uma **integral primeira** (C^k, analítica ou holomorfa) de X se $X(f) \equiv 0$. Neste caso, se $X = \sum_{i=1}^{n} X_i\partial_{x_i}$, então*

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} X_i(f)\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0.$$

1.2 Formas Diferenciais, Produto Interior e Exterior e Derivada Exterior

Uma 1-forma (de classe C^r, analítica ou holomorfa) ω em M é uma aplicação holomorfa

$$\omega : TM \to \mathbb{C}$$

tal que, para todo $p \in M$, a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \omega_p : & T_pM & \to & \mathbb{C} \\ & v & \mapsto & \omega_p(v) = \omega(p, v) \end{array}$$

é $\mathbb{K}$-linear. O conjunto de 1-formas de classe C^r, analíticas ou holomorfas sobre M será denotado por $\Omega^1_j(M)$, $j = r, A, H$.

É fácil ver que, fixado um ponto $p \in M$, ω_p é um elemento de T_pM^*, o espaço dual de T_pM. Como consequência disso, obtemos uma base local para o espaço das 1-formas sobre M a partir das bases locais $\{\partial x_i | i = 1, ..., n\}$ da seguinte forma: considere 1-formas dx_i, $i = 1, ..., n$, tais que

$$dx_i(p)(\partial x_j(p)) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ para } i \neq j \\ 1, \text{ para } i = j. \end{cases}$$

Segue-se que o conjunto $\{dx_1, ..., dx_n\}$ é uma base para T_pM^*. Portanto, uma 1-forma definida em um conjunto aberto $V \subset M$ onde temos uma carta local Φ, escreve-se de forma única como $\omega = \sum_{i=1}^{\overset{ab}{n}} \omega_i dx_i$, onde $\omega_i \in \mathfrak{F}^j(V)$, $i = 1, ..., n$. Esta construção nos permite concluir que o espaço dual do espaço das 1-formas é o conjunto de campos vetoriais holomorfos em M, isto é, $\Omega_j^1(M)^* = \mathfrak{X}^j(M)$, $j = r, A, H$.

Exemplo 1.1 *: Como caso particular do que foi feito acima, admita que* $\omega \in \Omega_H^1(\mathbb{C}^2)$*. Então* $\omega = Pdx + Qdy$*. Podemos calcular o campo* X *dual a* ω *através do "determinante"*

$$X = det \begin{pmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{pmatrix} = Q\partial_x - P\partial_y.$$

De forma análoga, dado um campo vetorial holomorfo $X = A\partial_x + B\partial_y$ *em* $\mathbb{C}^2$*, o seu dual é uma 1-forma holomorfa* ω *dada por*

$$\omega = det \begin{pmatrix} A & B \\ dx & dy \end{pmatrix} = -Bdx + Ady.$$

Defina o conjunto

$$(TM)^k = \{(p, v_1, ..., v_k) | p \in M, v_i \in T_pM, i = 1, ..., k\}, k \in \mathbb{Z}_+^*.$$

Este conjunto admite uma estrutura de variedade de dimensão n^{k+1}. Uma k-forma holomorfa η em M é uma aplicação holomorfa $\eta : (TM)^k \to \mathbb{C}$ tal que, para qualquer $p \in M$, a aplicação $\eta_p : (T_pM)^k \to \mathbb{C}$ dada por $\eta_p(v_1, ..., v_k) = \eta(p, v_1, ..., v_k)$ é k-multilinear (linear em todos os seus k argumentos) e alternada, isto é, para todo $i = 1, ..., n$, vale:

$$\eta_p(v_1, ..., v_i, v_{i+1}, ..., v_k) = -\eta_p(v_1, ...v_{i+1}, v_i, ..., v_k).$$

O conjunto de todas as k-formas suaves de classe C^r, analíticas ou holomorfas em M será denotado por $\Omega_j^k(M)$, $j = r, A, H$ ou apenas por Λ^k quando o contexto estiver bem definido. Note que $\Omega_j^0(M) = \mathfrak{F}^j(M)$.

Definição 1.2 *Sejam* $\alpha \in \Omega_j^k(M)$ *e* $\beta \in \Omega_j^l(M)$*. O* ***produto exterior*** *de* α *e* β *é a* $(k+l)$*-forma em* $\Omega_j^{k+l}M$ *dada por*

$$\begin{aligned}
&\alpha \wedge \beta(p, v_1, ..., v_{k+l}) = \alpha_p \wedge \beta_p(v_1, ..., v_{k+l}) = \\
&= \frac{1}{k!l!} \sum_{\delta \in S_{k+l}} \varepsilon(\delta)\alpha_p(v_{\delta(1)}, ..., v_{\delta(k)})\beta_p(v_{\delta(k+1)}, ..., v_{\delta(k+l)})
\end{aligned}$$

onde S_{k+l} *é o conjunto de todas as permutações* δ *dos índices* $\{1, 2, ..., k+l\}$ *e* $\varepsilon(\delta)$ *é o sinal da permutação.*

Proposição 1.1 *[1, pg.5] Sejam* $\alpha \in \Omega_j^k(M)$ *e* $\beta \in \Omega_j^l(M)$*. O produto exterior goza das seguintes propriedades:*

(a) $\alpha \wedge \beta \in \Omega_j^{k+l}(M)$

(b) *Se* $k = l$ *e* $f \in \mathfrak{F}(M)$*, então*

$$\alpha \wedge (f\beta + \gamma) = f(\alpha \wedge \beta) + \alpha \wedge \gamma$$

e

$$(f\beta + \gamma) \wedge \alpha = f(\beta \wedge \alpha) + \gamma \wedge \alpha$$

(c) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{k+l}\beta \wedge \alpha.$

Exemplo 1.2 *Trabalharemos essencialmente com 1-formas e 2-formas holomorfas em* $\mathbb{C}^2$*. Admita que* ω_1 *e* ω_2 *sejam duas 1-formas holomorfas em* $\mathbb{C}^2$ *cujas representações em coordenadas sejam*

$$\omega_1 = a_1dx + b_1dy$$

e

$$\omega_2 = a_2dx + b_2dy.$$

Nestas condições, temos que

$$\begin{aligned}
\omega_1 \wedge \omega_2 &= (a_1dx + b_1dy) \wedge (a_2dx + b_2dy) \\
&= a_1a_2dx \wedge dx + (a_1b_2 - b_1a_2)dx \wedge dy + (b_1b_2)dy \wedge dy.
\end{aligned}$$

Da Proposição 1.1, temos que $dx \wedge dx = -dx \wedge dx$*, o que implica que* $dx \wedge dx = 0$ *e* $dy \wedge dy = 0$*. Portanto*

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (a_1b_2 - b_1a_2)dx \wedge dy.$$

Definição 1.3 *Sejam $\alpha \in \Omega_j^k(M)$ e $X \in \mathfrak{X}^j(M)$, com $k \geq 1$. O* ***produto interior*** *de X por ω é a $(k-1)$-forma $i_x(\omega) \in \Omega_j^{k-1}(M)$ definida por*

$$(i_x(\omega))_p(v_1, ..., v_{k-1}) = \omega_p(X(p), v_1, ..., v_{k-1}).$$

Proposição 1.2 *[9, pg.26] Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\alpha \in \Lambda^k$, $\beta \in \Lambda^l$ e $f \in H(M)$. Então valem:*

(a) $i_{fX+Y}(\alpha) = f \cdot i_X(\alpha) + i_Y(\alpha)$,

(b) $i_X(f\alpha + \beta) = f \cdot i_X(\alpha) + i_X(\beta)$,

(c) $i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X(\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge i_X(\beta)$,

(d) $i_X(i_Y(\alpha)) = -i_Y(i_X(\alpha)), k \geq 2$.

Exemplo 1.3 *Suponha que $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^2)$ e $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{C}^2)$. Admita que ambos sejam representados por $X = X_1\partial_x + X_2\partial_y$ e $\omega = f dx \wedge dy$. Então*

$$\begin{aligned} i_X(\omega) &= i_X(f dx \wedge dy) = f i_X(dx \wedge dy) \\ &= f(i_X(dx) + (-1)^1 i_X(dy)) = f(X_1 dy - X_2 dx) \\ &= -X_2 f dx + X_1 f dy. \end{aligned}$$

Nossa seguinte definição será introduzida para as k-formas (de classe C^r, analítica ou holomorfa) ω definidas globalmente em $\mathbb{K}^n$, isto é, ω admite uma representação $\displaystyle\sum_I \alpha_I dx_I$ válida em todos os seus pontos, onde $\alpha_I : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ (C^r, analítica ou holomorfa), cada índice I é uma sequência $(i_1, ..., i_k)$ de k elementos de $\{1, ..., n\}$ com $i_1 < i_2 < ... < i_k$, e $dx_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$.

Definição 1.4 *Seja $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ de classe C^r, analítica ou holomorfa. A* ***derivada exterior*** *de f é a 1-forma*

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Se ω é uma k-forma (de classe C^r, analítica ou holomorfa) cuja expressão em coordenadas $\omega = \sum_I \alpha_I dx_I$, a ***derivada exterior*** *de ω é a $(k+1)$-forma*

$$d\omega = \sum_I d\alpha_I \wedge dx_I$$

Proposição 1.3 *[1, pg.9] Considere $\omega_1 \in \Lambda^r(\mathbb{K}^n)$, $\omega_2 \in \Lambda^k(\mathbb{K}^n)$ A derivada exterior goza das seguintes propriedades:*

(a) Se $r = k$, *então* $d(\omega_1 + \omega_2) = d(\omega_1) + d(\omega_2)$,

(b) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{k+r}\omega_1 \wedge d\omega_2$,

(c) $d(d\omega_1) = 0$.

Definição 1.5 *Uma* k*-forma* $\omega \in \Omega_j^k(M)$ *é* ***fechada*** *se* $d\omega = 0$ *e* ***exata*** *se existir* $\eta \in \Omega_j^{(k-1)}(M)$ *tal que* $\omega = d\eta$.

1.3 Derivada de Lie para Campos e Formas

Suponha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e seja $H(M) = \{f : M \to \mathbb{C} | f \text{ é holomorfa}\}$. Considere $X \in \mathfrak{X}(M)$ holomorfo. O campo X induz uma aplicação linear

$$\begin{array}{rlll} X: & H(M) & \to & H(M) \\ & f & \mapsto & X(f) \end{array}$$

onde

$$\begin{array}{rlll} X(f): & M & \to & \mathbb{C} \\ & f & \mapsto & (X(f))(p) = df_p(X(p)) \end{array}$$

que, em coordenadas locais, $(X(p)) \cdot f = \sum_{i=1}^{n} X(p)\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p)$. Esta aplicação satisfaz a Regra de Leibniz

$$X(fg) = X(f)g + fX(g).$$

e nesse sentido podem ser entendidas como *derivações*. A seguir, definiremos a Derivada de Lie (de um campo ou de uma forma) em relação a um campo vetorial. A abordagem utilizada para introduzir estes conceitos será menos profunda e mais direta; a construção minuciosa e a constatação das propriedades que aqui serão citadas pode ser consultada em [9] e faz uso do **fluxo** de um campo vetorial.

Definição 1.6 *Suponha* X, Y *derivações em* $\mathfrak{F}^j(M)$, $j = r, A, H$. *O* ***colchete de Lie*** *ou* ***comutador*** *de* X *e* Y, *é derivação* $[X, Y]$ *definida por*

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Em se tratando de campos vetoriais como derivações, esta é a ***Derivada de Lie*** *de* Y *em relação a* X, *e também pode ser denotada por*

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y].$$

Dizemos que duas derivações (em particular, dois campos vetoriais) ***comutam*** *quando seu comutador é identicamente igual a zero.*

Proposição 1.4 *[1, pg. 48] Sejam $A, B, C \in \mathfrak{X}(M)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. O comutador de campos vetoriais possui a seguintes propriedades:*

(a) *O comutador é bilinear, isto é,*
$[A+B, C] = [A, C] + [B, C]$,
$[C, A+B] = [C, A] + [C, B]$ *e*
$[\lambda A, B] = [A, \lambda B] = \lambda[A, B]$,

(b) $[A, B] = -[B, A]$,

(c) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ *(Identidade de Jacobi).*

Proposição 1.5 *[1, pg. 49] Considere um sistema de coordenadas locais $(x_1, ..., x_n)$ em M e $\{\partial x_1, ..., \partial x_n\}$ os campos vetoriais coordenados. Sejam $f, g \in \mathfrak{F}^j(M)$ e $X, Y \in \mathfrak{X}^j(M)$. Temos:*

(a) $[\partial x_i, \partial x_j] = 0$, *para todo* $i, j \in \{1, ..., n\}$ *(Teorema de Schwarz),*

(b) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$,

(c) *Se* $X = \sum_{i=1}^n X_i \partial x_i$ *e* $Y = \sum_{i=1}^n Y_i \partial x_i$, *então*

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^n (X(g_i) - Y(f_i))\partial x_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - g_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \partial x_i.$$

A seguinte proposição apresenta propriedades da Derivada de Lie em relação a formas diferenciais.

Proposição 1.6 *[9, pg. 33] Nas condições da proposição anterior, considere $\omega_1 \in \Lambda^r(\mathbb{K}^n)$, $\omega_2 \in \Lambda^k(\mathbb{K}^n)$. Valem as seguintes propriedades:*

(a) $\mathcal{L}_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = \mathcal{L}_X(\omega_1) \wedge \omega_2 + \omega_2 \wedge \mathcal{L}_X(\omega_2)$;

(b) $\mathcal{L}_X(\omega_1) = i_X(d\omega_1) + d(i_X(\omega_1))$;

(c) *Se* $f \in \mathfrak{F}^j(M)$, *então* $\mathcal{L}_{fX}(\omega_1) = f\mathcal{L}_X(\omega_1) + df \wedge i_X(\omega_1)$;

(d) $\mathcal{L}_X(d\omega_1) = d(\mathcal{L}_X(\omega_1))$;

1.4 Germes de Funções Holomorfas

Nesta seção, bem como nas seções posteriores, estaremos supondo $M = \mathbb{C}^n$, n inteiro positivo, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, e $j = H$.

Definição 1.7 *Considere um ponto $w \in \mathbb{C}^n$, e $f \in \mathfrak{F}(U_f)$, $g \in \mathfrak{F}(U_g)$, onde U_f, U_g são abertos de $\mathbb{C}^n$ contendo w. Dizemos que f e g são equivalentes se existir um aberto $V \subset U_f \cap U_g$ tal que $f|_V = g|_V$. A classe de equivalência de uma função f em torno de w é chamado o **germe de f em** w e denotado $\boldsymbol{f}_w$.*

Usando representantes de dois germes $\mathbf{f}_w$ e $\mathbf{g}_w$ no mesmo ponto, podemos definir uma estrutura de anel (comutativo) para o conjunto de germes de funções holomorfas em w. Este anel é denotado por $\mathcal{O}_w$, ou ${}_n\mathcal{O}_w$ quando for necessário explicitar a dimensão do espaço ao qual w pertence.

Proposição 1.7 *[5, pg.66] O anel de germes de funções holomorfas $\mathcal{O}_w$ é isomorfo ao anel de séries de potências convergentes com centro em w.*

A partir desta definição de germes, podemos definir, de maneira análoga, germes de k-formas e de campos vetoriais em um ponto $w \in \mathbb{C}^n$.

1.5 Teorema de Divisão de De Rham

Definição 1.8 *Uma 1-forma ω definida num aberto $V \underset{ab}{\subset} \mathbb{C}^n, n \geq 2$, tem uma singularidade isolada em 0 se $w(0) = 0$ e $w(z) \neq 0$ para todo $z \neq 0$ numa vizinhança $U \underset{ab}{\subset} V$ com $0 \in U$.*

Proposição 1.8 (Teorema da Divisão de De Rham) *Seja ω uma 1-forma holomorfa num aberto V de $\mathbb{C}^n$, com singularidade isolada em $0 \in V$. Suponha que exista uma p-forma holomorfa η definida em V, com $1 \leq p \leq n-1$ tal que*

$$\omega \wedge \eta = 0$$

então existe uma $(p-1)$-forma holomorfa β em V tal que

$$\eta = \omega \wedge \beta.$$

Demonstração: Ver [8, pg.150] ou [13, pg.177]. $\square$

1.6 Espaços Projetivos Complexos

Sejam $z = (z_0, z_1, ..., z_n)$ e $w = (w_0, w_1, ..., w_n)$ em $\mathbb{C}^{n+1} - 0$. Considere a seguinte relação de equivalência em $\mathbb{C}^{n+1} - 0$:

$$z \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ tal que } z = \lambda w$$

Denote por $[z_0 : z_1 : ... : z_n]$ a classe de equivalência de $z \in {}^{\mathbb{C}^{n+1}}\!/\!\sim$. Esta classe de equivalência representa todos os pontos colineares a z e à origem de $\mathbb{C}^{n+1}$, excluindo-se esta. Denotamos o conjunto das classes de equivalência desta relação por $\mathbb{P}^n$, chamada o **espaço projetivo complexo de dimensão n**. Quando $n = 1$, dá-se o nome de **reta projetiva** ou **linha projetiva**.

O espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ pode ser munido com uma estrutura de variedade complexa holomorfa de dimensão n. Considere os conjuntos

$$U_j = \{[z_0 : z_1 : ... : z_n] \in \mathbb{P}^n \text{ tal que } z_j \neq 0\}, j = 0, ..., n$$

Temos: $\mathbb{P}^n = \cup_{j=0}^n U_j$. Além disso, U_j é aberto em $\mathbb{P}^n$, para todo $j \in \{0, ..., n\}$. Considere as aplicações

$$\begin{array}{lll} \Phi_j : & U_j & \rightarrow & \mathbb{C}^n \\ & [z_0 : ... : z_n] & \mapsto & \left(\dfrac{z_0}{z_j}, ..., \dfrac{\widehat{z_j}}{z_j}, ..., \dfrac{z_n}{z_j}\right) \end{array}$$

onde o termo $\frac{\widehat{z_j}}{z_j}$ é omitido da expressão. É fácil constatar que estas aplicações são bijeções que fazem de $\mathbb{P}^n$ uma variedade complexa de dimensão n. Espaços projetivos ainda possuem algumas propriedades úteis: são conexos (pois são a união de abertos conexos com interseção não vazia), são espaços topológicos Hausdorff e são compactos. A construção acima é feita com maiores detalhes em [12].

Em $\mathbb{P}^1$, a linha projetiva, é útil calcular a aplicação mudança de variável através das inversas das cartas coordenadas supracitadas. Por exemplo, se

$$\Phi_0^{-1}(z) = [z : 1]$$

a mudança de cartas é:

$$\begin{array}{llll} \Phi_1 \circ \Phi_0^{-1} : & \mathbb{C} - \{(0,0)\} & \rightarrow & \mathbb{C} - \{(0,0)\} \\ & s & \mapsto & \dfrac{1}{s}. \end{array}$$

1.7 Superfícies de Riemann

A Linha Projetiva é um exemplo de uma Superfície de Riemann. De modo geral, Superfícies de Riemann são variedades conexas de dimensão complexa 1. Toda Superfície de Riemann compacta (como $\mathbb{P}^1$) é homeomorfa a um g-toro, para algum g inteiro não negativo. A este g chamamos o *gênero* de uma Superfície de Riemann. Como $\mathbb{P}^1$ é biholomorfa à Esfera de Riemann $\mathbb{S}^1$ (ver [12]), temos que o gênero de $\mathbb{P}^1$ é igual a 0 (o gênero é invariante por isomorfismos), isto é, $g(\mathbb{P}^1) = 0$.

Define-se funções (holomorfas) de uma Superfície de Riemann X em $\mathbb{C}$ ou entre Superfícies de Riemann como em [9] ou [12].

Dada uma Superfície de Riemann X, uma função $D : X \to \mathbb{Z}$ cujo **suporte** $Supp(D) = \{p \in X | D(p) \neq 0\}$ é discreto é chamada um **divisor** em X. Quando X é compacta, o suporte de qualquer divisor D de X é finito.

Proposição 1.9 (Forma Normal Local) *[12, pg.44] Seja $F : X \to Y$ uma aplicação holomorfa em $p \in X$, onde X e Y são Superfícies de Riemann. Suponha F não constante. Então existe um único inteiro $m \geq 1$ tal que, para qualquer carta local ϕ_Y **centrada** em $F(p)$ (isto é, $\phi_Y(F(p)) = 0$), existe uma carta local ϕ_X centrada em p tal que*

$$\phi_Y \circ F \circ \phi_X^{-1}(z) = z^m$$

Definição 1.9 *Nas condições da Proposição anterior, o número m é a **multiplicidade de F em P**, ou $mult_p(F) = m$.*

Quando $mult_p(F) \geq 2$, dizemos que p é um **ponto de ramificação** de F, e $F(p)$ um ponto ramo.

O **grau** de F é o número $deg(F) = deg_y(F) = \sum_{p \in F^{-1}(y)} mult_p(F)$, e independe do ponto y considerado (ver [12]). O grau é uma forma de se contar a quantidade de pré-imagens dos pontos da imagem de F, considerando multiplicidades.

Teorema 1.1 ***(Fórmula de Riemann-Hurwitz)****[12, pg. 52] Se $F : X \to Y$ é uma aplicação holomorfa e não constante entre Superfícies de Riemann compactas, então*

$$2g(X) - 2 = deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} [mult_p(F) - 1].$$

1.8 Transformações de Möbius na Linha Projetiva

Definição 1.10 *Uma **Transformação de Möbius** é uma função do tipo*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{P}^1 & \to & \mathbb{P}^1 \\ & z & \mapsto & \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $ac - bd \neq 0$.

Se $\phi_1([1:z]) = \frac{z}{1} = z$ é uma carta loca em $\mathbb{P}^1$ conforme definido anteriormente, uma Transformação de Möbius pode então ser representada da sua maneira mais usual como

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

sobre o "plano complexo estendido"$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (uma Esfera de Riemann), onde é definido

$$f(\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c}, & \text{se } c \neq 0; \\ \infty, & \text{se } c = 0 \end{cases}$$

e

$$f\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty \text{ se } c \neq 0.$$

Transformações de Möbius são particularmente interessantes pelas propriedades que enunciaremos a seguir.

Proposição 1.10 *[10] O conjunto das Transformações de Möbius coincide com o grupo de transformações de $\bar{\mathbb{C}}$ em $\bar{\mathbb{C}}$ gerado por composições de*

(a) translações $z \mapsto z + k$, $k \in \mathbb{C}$;

(b) homotetias $z \mapsto kz$, $k \in \mathbb{C}$;

(c) inversão $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Como consequência desta proposição, segue que toda Transformação de Möbius é bijetiva sobre $\bar{\mathbb{C}}$.

Proposição 1.11 *[10] Considere três pontos distintos, z_1, z_2, z_3, em $\bar{\mathbb{C}}$, e outros três pontos distintos $w_1, w_2, w_3 \in \bar{\mathbb{C}}$. Então existe uma única transformação de Möbius f tal que $f(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$.*

1.9 O Teorema de Bertini

Considere dois polinômios complexos homogêneos em $\mathbb{C}^n$, de mesmo grau, X e Y. Um **pencil** ou **sistema linear a um parâmetro** Z_λ é uma família de polinômios descrita por um parâmetro $\lambda = [a : b] \in \mathbb{P}^1$ por

$$Z_\lambda = X + \lambda Y := aX + bY.$$

Em particular, temos que $Z_0 = Z_{[1:0]} = X$ e que $Z_\infty = Z_{[0:1]} = Y$.

Seja Z_λ um pencil de polinômios. Suponha que, para todo $\lambda \in \mathbb{P}^1$, $Z_\lambda = u\tilde{Z}_\lambda$, onde u é um polinômio homogêneo. Neste caso, dizemos que o conjunto $\{u = 0\}$ é a **componente fixa** do pencil, e o pencil $\tilde{Z}_\lambda$ é o **sistema residual** ou **pencil residual**. Se tomarmos $u = mdc(X, Y)$, então o sistema residual é o menor possível. Neste caso, o conjunto $\{\frac{X}{u}\} \cap \{\frac{Y}{u}\}$ é chamado o **lugar base** do pencil, ou apenas **ponto base** quando se reduz a 0 apenas.

Teorema 1.2 (Teorema de Bertini) *[6, pg.137] Se $Z_\lambda = X + \lambda Y$ não possui componente fixa (isto é, $u = mdc(X, Y) = 1$), então, o elemento genérico de Z_λ obtido fixando-se o parâmetro λ não possui pontos singulares fora de seu lugar base, isto é,*

$$D(X + \lambda Y)(p) = \left(\frac{\partial(X + \lambda Y)}{\partial x_1}(p), ..., \frac{\partial(X + \lambda Y)}{\partial x_n}(p) \right) = 0$$

$$\iff p \in \{X = 0\} \cap \{Y = 0\}.$$

Esta definição pode ser estendida para outros contextos. Em particular, considere X e Y campos vetoriais sobre $\mathbb{C}^n$, polinomiais homogêneos de mesmo grau em qualquer sistema de coordenadas (como a mudança de coordenadas é uma transformação linear, basta que X e Y sejam polinomiais homogêneos de mesmo grau em um único sistema de coordenadas, para que também o sejam em todos os outros). Então o *pencil Z_λ gerado por X e Y a um parâmetro $\lambda = [a : b]$ em $\mathbb{P}^1$* é a família de campos vetoriais descrita por

$$Z_\lambda = X + \lambda Y = \sum_{i=1}^{n} (X_i + \lambda Y_i)\partial x_i = \sum_{i=1}^{n} (aX_i + bY_i)\partial x_i$$

Pela definição anterior, dados n pencils polinomiais homogêneos Z_λ^i, $i = 1, ..., n$, podemos definir um pencil de campos vetoriais polinomial pela expressão acima (bastando que o parâmetro de todos os pencils polinomiais coincidam em cada coordenada).

Capítulo 2

Campos Homogêneos e Quasi-Homogêneos

Os seguintes resultados apresentados neste capítulo serão de vital importância na demonstração dos teoremas principais, no próximo capítulo. Os resultados podem ser adaptados para campos vetoriais quasi-homogêneos. Apresentaremos algumas propriedades sobre este tipo de campos.

Definição 2.1 *Um campo vetorial S definido em $\mathbb{C}^n$ é* ***linearmente diagonalizável*** *se existe uma mudança de coordenadas $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ (isto é, um biholomorfismo) tal que $\phi^* S$ escreve-se como*

$$\phi^* S(z) = \sum_{i-1}^{n} \lambda_i z_i \partial z_i$$

onde $\lambda_i \in \mathbb{C}$, para $i = 1, ..., n$, $z = (z_1, ..., z_n)$. Os elementos λ_i são os autovalores de S. Se S é um campo vetorial linearmente diagonalizável nas condições acima, um campo vetorial holomorfo X é ***quasi-homogêneo*** *em relação a S se existir $m \in \mathbb{C}$ tal que $[S, X] = mX$*

Proposição 2.1 *Seja S um campo linearmente diagonalizável em $\mathbb{C}^2$ cujos autovalores são os números inteiros p_1, p_2 tais que $mdc(p_1, p_2) = 1$. Suponha X um campo vetorial quasi-homogêneo em relação a S, com $[S, X] = mX$. Então:*

(a) $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

(b) X é polinomial.

Demonstração: Escreva $X = X_1\partial_x + X_2\partial_y$, e $\delta = (n_1, n_2)$, $z = (x, y)$, $z^\delta = x^{n_1}y^{n_2}$ e

$$a_{i\delta} = \frac{1}{n_1!n_2!}\frac{\partial^{(n_1+n_2)}X_i}{\partial x^{n_1}\partial y^{n_2}}(0,0).$$

Isso nos permite escrever X em série de Taylor como $X(x, y) = \sum_\delta^\infty a_{i\delta}z^\delta\partial_{x_i}$. Se $p = (p_1, p_2)$ são os autovalores de S, então $< p, \delta >= p_1n_1 + p_2n_2 \in \mathbb{Z}^+$.

Por hipótese, $[S, X] = mX$, o que implica $a_{i\delta}(< p, \delta > -p_i - m) = 0$, $j = 1, 2$. Necessariamente algum $a_{i\delta}$ é não nulo (caso contrário, o campo seria trivial), donde teremos $m =< p, \delta > -p_j \in \mathbb{Z}$, o que prova a primeira parte da proposição.

Agora, considere os conjuntos

$$A_j = \{\delta = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ :< p, \delta >= m + p_j\}, j = 1, 2.$$

Ambos são finitos, o que implica que as séries de Taylor para X_1 e X_2 são somas de finitos termos. Como consequência, X é polinomial. $\square$

Proposição 2.2 *Sejam X, Y, S campos vetoriais em $\mathbb{C}^2$. Assuma que S é linearmente diagonalizável com autovalores p, q satisfazendo $mdc(p, q) = 1$, e X, Y quasi-homogêneos em relação a S, isto é, $[S, X] = mX$, $[S, Y] = nY$. Mais ainda, suponha X, Y não identicamente nulos e $[X, Y] = 0$. Defina $X \wedge Y = f\partial_x \wedge \partial_y$, $S \wedge X = g\partial_x \wedge \partial_y$ e $S \wedge Y = h\partial_x \wedge \partial_y$. Então:*

(a) $S(g) = (m + p + q)g$, $S(h) = (n + p + q)h$ e $S(f) = (m + n + p + q)f$.

(b) Qualquer fator irredutível de f, g ou h é a equação de uma órbita de S.

Demonstração: Faremos a prova para $S(g)$; as demais são obtidas com computações similares. Sabemos que

$$[S, X] = mX \Rightarrow \begin{cases} pxX_{1_x} + qyX_{1_y} = (p + m)X_1 \\ pxX_{2_x} + qyX_{2_y} = (q + m)X_2. \end{cases}$$

onde denotamos a derivada parcial de X_i em relação a x_j por $X_{i_{x_j}}$.

Como

$$\begin{aligned} S \wedge X &= (px\partial_x + qy\partial_y) \wedge (X_1\partial_x + X_2\partial_y) \\ &= (pxX_2 - qyX_1)\partial_x \wedge \partial_y \\ &\Rightarrow g = pxX_2 - qyX_1 \end{aligned}$$

temos:

$$\begin{aligned}
S(g) &= px\partial_x(pxX_2 - qyX_1) + qy\partial_y(pxX_2 - qyX_1)\\
&= px(pX_2 + pxX_{2_x} - qyX_{1_x}) + qy(pxX_{2_y} - qX_1 - qyX_{1_y})\\
&= p^2xX_2 + p^2x^2X_{2_x} - pqxyX_{2_x} + pqxyX_{2_y} - q^2yX_1 - q^2y^2X_{1_y}\\
&= px(pxX_{2_x} + qyX_{2_y}) + p^2xX_2 - qy(pxX_{1_x} + qyX_{1_y}) - q^2yX_1\\
&= px(q+m)X_2 + p^2xX_2 - qy(p+m)X_1 - q^2yX_1\\
&= pqxX_2 + pxmX_2 + p^2xX_2 - qpyX_1 - qymX_1 - q^2yX_1\\
&= pxX_2(q+m+p) - qyX_1(p+m+q)\\
&= (m+p+q)g
\end{aligned}$$

o que prova a identidade, sendo os demais similares. O item *(b)* é consequência imediata desta proposição. □

2.1 Critério para existência de integral primeira meromorfa para Campos Vetoriais Homogêneos

Considere $R = x\partial_x + y\partial_y$, o *campo vetorial radial* em $\mathbb{C}^2$. Este campo admite a função meromorfa $\dfrac{y}{x}$ como integral primeira, pois $R(y/x) = 0$. Assuma que X_d é um campo vetorial polinomial homogêneo de grau d em $\mathbb{C}^2$, e escreva $R \wedge X_d = g\partial_x \wedge \partial_y$. Seja $\omega = i_{X_d}(dx \wedge dy)$. Então $\omega_1 = \frac{\omega}{g}$ é uma 1-foram meromorfa fechada. Nesse caso, se a decomposição de g em fatores irredutíveis é $g = \Pi_{j=1}^{r} g_j^{k_j}$, então segue de [2, pg.5] que

$$\omega_1 = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \frac{dg_j}{g_j} + d\left(\frac{h}{g_1^{k_1-1}\cdot \ldots \cdot g_r^{k_r-1}}\right)$$

onde $\lambda_j \in \mathbb{C}$, para $j \in \{1, ..., r\}$, e h um polinômio homogêneo cujo grau é

$$d + 1 - r = deg(X_d) + 1 - r = deg\left(\frac{g}{g_1 \cdots g_r}\right).$$

Então X_d possui uma integral primeira meromorfa se, e somente se, vale um dos casos:

(a) $\lambda_1 = ... = \lambda_r = 0$, ou

(b) $\lambda_j \neq 0$ para algum $j \in \{1, ..., r\}$, $h \equiv 0$ e $[\lambda_1 : ... : \lambda_r] = [m_1 : ... : m_r]$ (como elementos de um espaço projetivo), onde $m_1, ..., m_r \in \mathbb{Z}$.

2.2 Caracterização das Integrais Primeiras Meromorfas

Doravante trabalharemos com as seguintes condições: X, Y, S são campos vetoriais holomorfos definidos num aberto $U \in \mathbb{C}^2$, tais que

(a) $[S,X] = mX$, $[S,Y] = nY$, $[X,Y] = 0$, com m, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(b) $X \wedge Y = f \cdot \partial_x \wedge \partial_y$, $S \wedge X = g \cdot \partial_x \wedge \partial_y$, $S \wedge Y = h \cdot \partial_x \wedge \partial_y$, com f, g, h não identicamente nulas.

(c) $\omega = i_X(dx \wedge dy)$, $\eta = i_Y(dx \wedge dy)$.

Lema 2.1 *As funções $\frac{f}{g}$ e $\frac{f}{h}$ são integrais primeiras de X e Y, respectivamente. Além disso, temos*

$$\frac{f}{g} \text{ constante } \iff n = 0 \text{ e } \frac{f}{h} \text{ constante } \iff m = 0.$$

Demonstração: Suponha que $n \neq 0$. Temos

$$\mathcal{L}_X(S \wedge X) = [X, S \wedge X] = [X,S] \wedge X + S \wedge [X,X] = -mX \wedge X = 0$$

e

$$\mathcal{L}_X(X \wedge Y) = [X, X \wedge Y] = X \wedge [X,Y] - [X,X] \wedge Y = 0.$$

Como $X \wedge Y = f\partial_x \wedge \partial_y = \dfrac{f}{g} g\partial_x \wedge \partial_y = \dfrac{f}{g} S \wedge X$, temos:

$$\mathcal{L}_X(X \wedge Y) = \mathcal{L}_X\left(\frac{f}{g} S \wedge X\right) = X\left(\frac{f}{g}\right) S \wedge X + \frac{f}{g}\mathcal{L}_X(S \wedge X) = X\left(\frac{f}{g}\right) g\partial_x \wedge \partial_y.$$

Como $g \not\equiv 0$, conclui-se que $X\left(f/g\right) = 0$ em U, e disso decorre que $\frac{f}{g}$ é integral primeira de X. Agora, como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_S(X \wedge Y) &= [S, X \wedge Y] = [S,X] \wedge Y + X \wedge [S,Y] \\
&= mX \wedge Y + nX \wedge Y \\
&= (m+n)X \wedge Y \\
&= (m+n)f\partial_x \wedge \partial_y \\
&= (m+n)(f/g)g\partial_x \wedge \partial_y \\
&= (m+n)(f/g)S \wedge X
\end{aligned}$$

e $\mathcal{L}_S(S \wedge X) = [S, S \wedge Y] = S \wedge [S, X] + [S, S] \wedge X = mS \wedge X$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(m+n)X \wedge Y &= \mathcal{L}_S(X \wedge Y) \\
&= \mathcal{L}_S(f\partial_x \wedge \partial_y) \\
&= \mathcal{L}_S((f/g)g\partial_x \wedge \partial_y) \\
&= \mathcal{L}_S((f/g)S \wedge X) \\
&= S(f/g)S \wedge X + \tfrac{f}{g}\mathcal{L}_S(S \wedge X) \\
&= \left(S(f/g) + m\tfrac{f}{g}\right) S \wedge X
\end{aligned}$$

o que nos permite concluir que

$$\left(S(f/g) + m\frac{f}{g}\right) = (m+n)\frac{f}{g} \Rightarrow S\left(\frac{f}{g}\right) = n\left(\frac{f}{g}\right).$$

Portanto, se f/g é constante, $n = 0$.

Para demonstrar a recíproca, suponha $n = 0$. Pelo feito, temos que $S(f/g) = 0$ e $\frac{f}{g}$ é integral primeira de S. Já sabemos que que $\frac{f}{g}$ é integral primeira de X. Suponha que $\frac{f}{g}$ seja não constante. Então, em $U \cap \{z \in \mathbb{C}^2 : d(f/g)(z) \neq 0\}$, a unicidade da integral primeira implica que $X = \lambda S$, para algum λ complexo não nulo. Então $X \wedge S \equiv 0 \Rightarrow g \equiv 0$, uma contradição. $\square$

Lema 2.2 *Nas mesmas condições do Lema anterior, suponha $n \neq 0$ (respectivamente, $m \neq 0$). Então*

$$\omega = \frac{g}{n}\left[\frac{dg}{g} - \frac{df}{f}\right]$$

e, respectivamente,

$$\eta = \frac{h}{m}\left[\frac{dh}{h} - \frac{df}{f}\right].$$

Demonstração: Como $n \neq 0$, do lema anterior temos f/g não constante e $X(f/g) = 0$. Temos:

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df}{g} - \frac{f}{g^2}dg = \left(\frac{f_x}{g} - \frac{f}{g^2}g_x\right)dx + \left(\frac{f_y}{g} - \frac{f}{g^2}g_y\right)dy.$$

Como $\omega = i_X(dx \wedge dy) = X_1 dy - X_2 dx$, temos que

$$\begin{aligned}
\omega \wedge d\left(\tfrac{f}{g}\right) &= -\left[\left(\frac{f_x}{g} - \frac{f}{g^2}g_x\right)X_1 + \left(\frac{f_y}{g} - \frac{f}{g^2}g_y\right)X_2\right] dx \wedge dy \\
&= -X\left(\frac{f}{g}\right) dx \wedge dy \equiv 0.
\end{aligned}$$

Isso significa que existe uma função k meromorfa em U tal que $\omega = kd(f/g)$, pelo Teorema de Divisão de De Rham (k é uma 0-forma).

Por outro lado, se $S = S_1\partial_x + S_2\partial_y$, então

$$-i_S(i_X(dx \wedge dy)) = -i_S(X_1dy - X_2dx) = -X_1S_2 + X_2S_1 = g$$

e portanto

$$\begin{aligned} g &= -i_S(\omega) \\ &= -ki_S\left(\frac{dg}{g} - \frac{df}{f}\right) \\ &= -\frac{k}{g}i_S(dg) + \frac{k}{f}i_S(df) \\ &= -\frac{k}{g}(g_xS_1 + g_yS_2) + \frac{k}{f}(f_xS_1 + f_yS_2) \\ &= k\left(\frac{S(f)}{f} - \frac{S(g)}{g}\right). \end{aligned}$$

Como

$$\frac{S(f)}{f} - \frac{S(g)}{g} = \frac{S(f)}{f} + gS\left(\frac{1}{g}\right) = \frac{g}{f}\left(\frac{S(f)}{g} + fS\left(\frac{1}{g}\right)\right) = \frac{g}{f}S\left(\frac{f}{g}\right)$$

e, uma vez que $n \neq 0$, temos:

$$g = k\frac{g}{f}S\left(\frac{f}{g}\right) = kn\frac{g}{f}\frac{f}{g} \Rightarrow k = \frac{g}{n}.$$

Então $\omega = \dfrac{g}{n}\left[\dfrac{dg}{g} - \dfrac{df}{f}\right]$, conforme desejado. A demonstração para η é análoga. $\square$

Lema 2.3 *Nas condições já citadas, os polinômios f, g e h satisfazem a relação:*

$$mnf^2dx \wedge dy = fdg \wedge dh + gdh \wedge df + hdf \wedge dg$$

Demonstração: Note primeiramente que

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta &= \frac{g}{n}\left[\frac{dg}{g} - \frac{df}{f}\right] \wedge \frac{h}{m}\left[\frac{dh}{h} - \frac{df}{f}\right] \\ &= \frac{gh}{mn}\left[\frac{dg \wedge dh}{gh} + \frac{df \wedge dg}{gf} + \frac{dh \wedge df}{fh}\right] \\ &= \frac{1}{fmn}\left[fdg \wedge dh + hdf \wedge dg + gdh \wedge df\right]. \end{aligned}$$

Portanto

$$mnf\omega \wedge \eta = fdg \wedge dh + hdf \wedge dg + gdh \wedge df.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta = & \ (X_1 dy - X_2 dx) \wedge (Y_1 dy - Y_2 dx) \\ & = (-X_2 Y_1 + Y_2 X_1) dx \wedge dy \\ & = f dx \wedge dy \end{aligned}$$

donde conclui-se que

$$mnf^2 dx \wedge dy = fdg \wedge dh + hdf \wedge dg + gdh \wedge df.$$

□

Definição 2.2 *Suponha que* $f_i : U \underset{ab}{\subset} \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $i = 1, ..., k$, $k \neq n$ *são funções meromorfas num aberto conexo* U *de* $\mathbb{C}^n$*. Dizemos que estas funções são* ***funcionalmente independendes*** *(ou apenas* ***independentes****) se, para qualquer* $z = (z_1, ..., z_n) \in U$*, temos*

$$rank \left[\frac{\partial f_i}{\partial z_j} \right]_{ij} = k$$

onde $i = 1, ..., k$, $j = 1, ..., n$.

Lema 2.4 *Se* X *é um campo vetorial holomorfo em* $U \underset{ab}{\subset} \mathbb{C}^n$, $n > 1$, *que admite* n *integrais primeiras* $f_j, j = 1, ..., n$ *funcionalmente independentes em* U*, então* $X \equiv 0$ *em* U.

Demonstração: Escrevendo X em coordenadas locais $\{\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_n}\}$, temos $X = \sum_{i=1}^n X_i \dfrac{\partial f_j}{\partial z_i}$. Então, para cada f_j, vale

$$X(f_j) = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f_j}{\partial z_i} = 0$$

para $j = 1, ..., n$ e para todo $z \in U$. Isto significa que

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial z_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial z_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial z_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow X \equiv 0$$

uma vez que as funções f_j são funcionalmente independentes. $\square$

O próximo lema fornece uma maneira de obter campos X e Y que comutam a partir e condições sobre as funções f, g e h, e será usado diversas vezes nas demonstrações dos resultados principais.

Lema 2.5 *Sejam f, g e h funções holomorfas num aberto conexo $U \subset \mathbb{C}^2$. Suponha f/g e f/h meromorfas e não constantes, linearmente independentes em U. Defina campos X e Y como os duais das 1-formas $i_X(dx \wedge dy) = g\left[\frac{dg}{g} - \frac{df}{f}\right]$ e $i_Y(dx \wedge dy) = h\left[\frac{dh}{h} - \frac{df}{f}\right]$. Suponha que*

$$fdg \wedge dh + gdh \wedge df + hdf \wedge dg = \lambda f^2 dx \wedge dy$$

para algum $\lambda \neq 0$ complexo. Então $[X, Y] = 0$.

Demonstração: Inicialmente, temos que

$$\begin{aligned} d(f/g) \wedge d(f/h) &= \left(\frac{df}{g} - \frac{f}{g^2}dg\right) \wedge \left(\frac{df}{h} - \frac{f}{h^2}dh\right) \\ &= \frac{1}{g^2h^2}(gdf - fdg) \wedge (hdf - fdh) \\ &= \frac{f}{g^2h^2}(fdg \wedge dh + gdh \wedge df + hdf \wedge dg) \\ &= \frac{\lambda f^3}{g^2h^2} dx \wedge dy \not\equiv 0 \end{aligned}$$

donde concluímos $d(f/g) \wedge d(f/h) \not\equiv 0$. Desenvolvendo esta expressão, temos

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}(f/g)dx + \frac{\partial}{\partial y}(f/g)dy\right) \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x}(f/h)dx + \frac{\partial}{\partial y}(f/h)dy\right) \not\equiv 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x}(f/g)\frac{\partial}{\partial y}(f/h) - \frac{\partial}{\partial x}(f/h)\frac{\partial}{\partial y}(f/g)\right) dx \wedge dy \not\equiv 0.$$

Isto implica que a matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(f/g) & \frac{\partial}{\partial y}(f/g) \\ \frac{\partial}{\partial x}(f/h) & \frac{\partial}{\partial y}(f/h) \end{bmatrix}$$

tem determinante não nulo em todos os pontos de U, e portanto as funções f/g e f/h são funcionalmente independentes.

Agora, como

$$\begin{aligned} i_X(dx\wedge dy)\wedge d(f/g) &= g\left[\frac{dg}{g}-\frac{df}{f}\right]\wedge\left[\frac{df}{g}-\frac{f}{g^2}dg\right] \\ &= \frac{dg\wedge df}{g}-\frac{fdg\wedge df}{fg} \\ &= 0 \end{aligned}$$

temos que $X(f/g)=0$. Por outro lado,

$$Y(f/g)dx\wedge dy = i_Y(dx\wedge dy)\wedge d(f/g).$$

Mas $i_Y(dx\wedge dY)=h\left[\frac{dh}{h}-\frac{df}{f}\right]$, donde obtemos

$$i_Y(dx\wedge dy)\wedge d(f/g)=h\left[\frac{dh}{h}-\frac{df}{f}\right]\wedge d(f/g)=-\frac{h^2}{f}d(f/h)\wedge d(f/g).$$

Escreva

$$\begin{aligned} d(f/h)\wedge d(f/g) &= \left(\frac{df}{h}-\frac{f}{h^2}dh\right)\wedge\left(\frac{df}{g}-\frac{f}{g^2}dg\right) \\ &= \frac{f}{g^2h}dg\wedge df+\frac{f}{h^2g}df\wedge dh+\frac{f^2}{g^2h^2}dh\wedge dg \\ &= \frac{f}{g^2h^2}\left[hdg\wedge df+gdf\wedge dh+fdh\wedge dg\right] \\ &= \frac{\lambda f^3}{g^2h^2}dx\wedge dy. \end{aligned}$$

A partir disso, tem-se que $Y(f/g)dx\wedge dy=-\frac{\lambda f^2}{g^2}dx\wedge dy\Rightarrow Y(f/g)=-\lambda\frac{f^2}{g^2}$ e logo $X(Y(f/g))=0$.

Conclui-se que

$$[X,Y](f/g)=X(Y(f/g))-Y(X(f/g))=0$$

isto é, f/g é integral primeira do campo $[X,Y]$. Computações análogas permitem concluir que f/h também é integral primeira do campo $[X,Y]$ e, como elas são funcionalmente independentes, pelo Lema anterior segue que $[X,Y]=0$. □

Capítulo 3

Classificação de campos homogêneos e quasi-homogêneos que comutam em $\mathbb{C}^2$

Usaremos os resultados dos capítulos anteriores para descrever os campos vetoriais quasi-homogêneos X, Y em relação a um campo linearmente diagonalizável S, que satisfazem $[X, Y] = 0$ em $\mathbb{C}^2$.

Definição 3.1 *Em $\mathbb{C}^2$, dois campos vetoriais X e Y são chamados colineares se $X \wedge Y = 0$. Se X e Y são de mesmo grau, então o pencil $(Z_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{P}^1}$, $Z_\lambda = X + \lambda Y$ gerado por X e Y é chamado trivial se $X = \gamma.Y$, para algum $\gamma \in \mathbb{C}$.*

Enunciamos o seguinte Teorema de classificação de campos quasi-homogêneos que comutam em $\mathbb{C}^2$, provado por Alcides Lins Neto em [7].

Teorema 3.1 *Sejam X, Y campos vetoriais não nulos em $\mathbb{C}^2$, quasi-homogêneos em relação a $S = px.\partial_x + qy.\partial_y$, onde $p, q \in \mathbb{N}$ e $mdc(p, q) = 1$. Suponha $[X, Y] = 0$. Escreva $[S, X] = mX$, $[S, Y] = nY$, $X \wedge Y = f\partial_x \wedge \partial_y$, $S \wedge X = g\partial_x \wedge \partial_y$ e $S \wedge Y = h\partial_x \wedge \partial_y$. Suponha ainda que $f \not\equiv 0$, $h \not\equiv 0$ e $n \neq 0$. Então:*

(a) $g \not\equiv 0$ e $\dfrac{f}{g}$ é uma integral primeira meromorfa de X, não constante.

(b) Se $m \neq 0$, então f, g e h satisfazem

$$mn.f^2.dx \wedge dy = f.dg \wedge dh + g.dh \wedge df + h.df \wedge dg \qquad (3.1)$$

e

$$(m-n).\frac{df}{f}+n.\frac{dh}{h}-m.\frac{dg}{g}=\frac{mn.f}{gh}(qy.dx-px.dy) \tag{3.2}$$

e estas expressões são equivalentes.

(c) *Se $m \neq 0$, então todos os fatores irredutíveis de f dividem g e h. Reciprocamente, se $p = mdc(g,h)$, então todo fator irredutível de p divide f. A partir disso, podemos escrever f, g e h em fatores irredutíveis na seguinte forma:*

$$\begin{cases} f = \Pi_{j=1}^{r} f_j^{l_j} \\ g = \Pi_{j=1}^{r} f_j^{m_j} \cdot \Pi_{i=1}^{s} g_i^{a_i} \\ h = \Pi_{j=1}^{r} f_j^{n_j} \cdot \Pi_{i=1}^{t} h_i^{b_i} \end{cases} \tag{3.3}$$

onde $r > 0$, $m_j, n_j > 0$, $l_j \geq m_j + n_j - 1$ para todo $j = 1, ..., r$, e quaisquer dois polinômios em $\{f_1, ..., f_r, g_1, ..., g_s, ..., h_1, ..., h_t\}$ são relativamento primos.

(d) *Supondo que f, g e h escrevem-se como (3.3), então os campos X, Y escrevem-se como*

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{n}.g\left[\displaystyle\sum_{j=1}^{r}(l_j - m_j)\frac{1}{f_j}(f_{j_x}\partial_y - f_{j_y}\partial_x) - \sum_{i=1}^{s} a_i \frac{1}{g_i}(g_{i_x}\partial_y - g_{i_y}\partial_x)\right] \\ Y = \dfrac{1}{m}.h\left[\displaystyle\sum_{j=1}^{r}(l_j - n_j)\frac{1}{f_j}(f_{j_x}\partial_y - f_{j_y}\partial_y) - \sum_{i=1}^{t} b_i \frac{1}{h_i}(h_{i_x}\partial_y - h_{i_y}\partial_x)\right] \end{cases} \tag{3.4}$$

Demonstração:

(a) Inicialmente, suponha $g \equiv 0$. Como $S(x,y) = 0 \iff (x,y) = (0,0)$, a origem é uma singularidade isolada de S. Além disso, $S \wedge X = g\partial_x \wedge \partial_y = 0$, pelo Teorema de Divisão de De Rham, podemos escrever $X = \phi S$, para alguma função holomorfa $\phi \not\equiv 0$. Pela Proposição 2.1, X é polinomial. Como S também é, por definição, ψ é um polinômio. Temos:

$$0 = [X,Y] = [\psi.S, Y] = \psi[S,Y] - Y(\psi).S = \Psi.n.Y - Y(\psi) \Rightarrow \psi.n.Y = Y(\psi)S$$

Como $\psi \not\equiv 0$, $n \neq 0$ e $Y \not\equiv 0$, conclui-se que $Y(\psi) \not\equiv 0$. Além disso, $S \wedge Y = 0$, pois

$$Y(\psi).S \wedge Y = \psi.n.Y \wedge Y = 0$$

Portanto, $h \equiv 0$, o que contradiz a nossa hipótese. Então $g \not\equiv 0$. Pelo lema (2.1), f/g é integral primeira meromorfa e não constante de X.

(b) Do lema 2.3 segue (3.1). Vamos então provar que (3.1) $\iff$ (3.2). Inicialmente, observe que se μ é uma 2-forma holomorfa em $\mathbb{C}^2$ tal que $Ł_S(\mu) = \lambda\mu$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$, então

$$\mathcal{L}_S(\mu) = i_S(d\mu) + d(i_S(\mu))$$

e como $d\mu = 0$, temos

$$d(i_s(\mu)) = \mathcal{L}_S(\mu) = \lambda\mu.$$

Seja, então, $\mu = f.dg \wedge dh + g.dh \wedge df + h.df \wedge dg$ e $\eta = mnf^2.dx \wedge dy$. Pela 2.2, temos que $S(f) = (m+n+p+q)f$, $S(g) = (m+p+q)g$ e $S(h) = (n+p+q)h$. Afirmamos que $\mathcal{L}_S(\mu) = (2m+2n+3(p+q))\mu$. De fato, temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_S(\mu) = \;& \mathcal{L}_S(f.dg \wedge dh + g.dh \wedge df + h.df \wedge dg)\\
= \;& \mathcal{L}_S(f)dg \wedge dh + f.\mathcal{L}_S(dg) \wedge dh + f.dg \wedge \mathcal{L}_S(dg) +\\
+ \;& \mathcal{L}_S(g)dh \wedge df + g.\mathcal{L}_S(dh) \wedge df + g.dh \wedge \mathcal{L}_S(df) +\\
+ \;& \mathcal{L}_S(h)df \wedge dg + h.\mathcal{L}_S(df) \wedge dg + h.df \wedge \mathcal{L}_S(dg)
\end{aligned}$$

onde

- $\mathcal{L}_S(f) = i_S(df) = S(f) = (m+n+p+q)f$;
- $\mathcal{L}_S(g) = i_S(dg) = S(g) = (m+p+q)g$;
- $\mathcal{L}_S(h) = i_S(dh) = S(h) = (n+p+q)h$;
- $\mathcal{L}_S(dg) = d(\mathcal{L}_S(g)) = d(i_S(dg)) = d(S(g)) = d((m+p+q)g) = (m+p+q)dg$;
- $\mathcal{L}_S(dh) = d(\mathcal{L}_S(h)) = d(i_S(dh)) = d(S(h)) = (n+p+q)dh$;
- $\mathcal{L}_S(df) = ... = (m+n+p+q)df$;

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_S(\mu) &= (2m+2n+3(p+q))(f.dg \wedge dh + g.dh \wedge df + h.df \wedge dg)\\
&= (2m+2n+3(p+q))\mu = \lambda\mu
\end{aligned}$$

Agora, considere em $\mathbb{C}^2$ a 2-forma $\eta = n.m.f^2.dx \wedge dy$. Vamos mostrar que $\mathcal{L}_S(\eta) = \lambda\eta$. Temos que $d\eta = 0$, e então

$$\mathcal{L}_S(\eta) = i_S(d\eta) + d(i_S(\eta)) = d(i_S(\eta))$$

De posse disso, e sabendo que $\lambda = (2m + 2n + 3(p + q))$, temos

$$\begin{aligned} d(i_S(\eta)) &= mn.d(i_S(f^2.dx \wedge dy)) \\ &= mn.d(f^2.i_S(dx \wedge dy)) \\ &= mn.d(f^2.(px.dy - qy - dx)) \\ &= mn(2f.f_x.px + f^2.p) + (2f.f_y.qy + f^2q)dx \wedge dy \\ &= mn(2f.S(f) + f^2(p+q))dx \wedge dy \\ &= mn.f^2(2(m+n+p+q) + p + q)dx \wedge dy \\ &= \lambda\eta \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$i_S(\eta) = mn.f^2(px.dy - qy.dx)$$

e

$$i_S(\mu) = -n.f.g.dh + m.f.h.dg + (n - m)g.h.df$$

De fato, como $S = px.\partial_x + qy.\partial_y$, então

$$i_S(\eta) = i_S(mn.f^2.dx \wedge dy) = mn.f^2.i_S(dx \wedge dy) = mn.f^2(px.dy - qy.dx)$$

e

$$\begin{aligned} i_S(\mu) &= i_S(f.dg \wedge dh + gdh \wedge df + h.df \wedge dg) \\ &= f.i_S(dg \wedge dh) + g.i_S(dh \wedge df) + h.i_S(df \wedge dg) \\ &= f.(S(g).dh - S(h).dg) + g(S(h).df - S(f).dh) + h.(S(f).dg - S(g).df) \\ &= (f.S(g) - g.S(f)).dh + (h.S(f) - f.S(h)).dg + (g.S(h) - h.S(g)).df. \end{aligned}$$

Como $S(g) = (m + p + q).g$, $S(h) = (n + p + q).h$ e $S(f) = (m + n + p + q).f$, temos:

$$i_S(\mu) = -fg.n.dh + fh.m.dg + gh.(n - m).df.$$

Provemos agora a equivalência entre (3.1) e (3.2). Admita que (3.1) seja verdadeira. Imediatamente obtemos $\eta = \mu$, e portanto $i_S(\eta) = i_S(\mu)$, o que significa que

$$\begin{aligned} & mn.f^2(px.dy - qy.dx) = -n.fg.dh + m.fh.dg + (n - m)gh.df \iff \\ & \frac{mn.f}{gh}(qy.dx - px.dy) = n\frac{dh}{h} - m\frac{dg}{g} + (m - n)\frac{df}{f} \end{aligned}$$

o que prova que (3.1) $\Rightarrow$ (3.2).

Agora, admitindo que (3.2) seja verdadeira, então

$$\begin{aligned}
(3.2) \quad & \Rightarrow i_S(\eta) - i_S(\mu) = 0 \\
& \Rightarrow i_S(\eta - \mu) = 0 \\
& \Rightarrow d(i_S(\eta - \mu) = 0 \\
& \Rightarrow \mathcal{L}_S(\eta - \mu) = 0 \\
& \Rightarrow \lambda(\eta - \mu) \\
& \Rightarrow \eta = \mu \Rightarrow (3.1)
\end{aligned}$$

o que encerra a prova deste item.

(c) A equação (3.2) implica que

$$(m-n)gh.df + n.fg.dh - m.fh.dg = mn.f^2(qy.dx - px.dy) \qquad (3.5)$$

De (3.5), se k é um fator irredutível de g e de h, então k também é fator irredutível de f^2 e portanto de f.

Agora, provemos que todo fator de f é fator de g e h simultaneamente. Do item *(a)*, $g \not\equiv 0$ e ${}^f\!/\!_g$ é integral primeira de X, isto é, $X({}^f\!/\!_g) = 0$. Disso decorre que

$$X({}^f\!/\!_g) = \frac{X(f)}{g} + f.X({}^1\!/\!_g) = \frac{X(f)}{g} - f.\frac{X(g)}{g^2} = 0 \qquad (3.6)$$

e portanto

$$g.X(f) = f.X(g) \qquad (3.7)$$

Escreva f em fatores irredutíveis como $f = \Pi_{j=1} f_j^{l_j}$, com $r, l_j > 0$. Defina $F = \Pi_{j=1}^r f_j$. Da equação (3.6) segue que

$$F.X(g) = F.\frac{X(f)}{f}.g = g.\sum_{j=1}^{r} l_j f_1 \cdot \dots \cdot f_{j-1} \cdot X(f_j) \cdot f_{j+1} \cdot \dots \cdot f_r. \qquad (3.8)$$

A equação (3.8) implica que f_j divide g (e, neste caso, a demonstração de *(c)* está concluída) ou f_j divide $X(f_j)$, para $j = 1, ..., r$. Neste caso, temos que $X(f_j) = k.f)j$, para algum polinômio k, e portanto o conjunto $\{f_j = 0\}$ é invariante sob X. Mas, do item *(b)* da Proposição 2.2, o que faz desse conjunto uma órbita comum aos campos X e S. Neste caso, f_j divide $S \wedge X = g.\partial_x \wedge \partial_y$, donde f_j divide g, para todo $j = 1, ..., r$.

Por hipótese, $h \not\equiv 0$ e, do Lema 2.1, f/h é integral primeira de Y. Um argumento semelhante ao apresentado acima mostra que todo fator irredutível de f divide h.

Escreva a decomposição em fatores irredutíveis de f, g e h como

$$\begin{cases} f = \Pi_{j=1}^{r} f_j^{l_j} \\ g = \Pi_{j=1}^{r} f_j^{m_j} \cdot \Pi_{i=1}^{s} g_i^{a_1} \\ h = \Pi_{j=1}^{r} f_j^{n_j} \cdot \Pi_{i=1}^{t} h_i^{b_i} \end{cases}$$

onde $l_j, m_j, n_j > 0$ e quaisquer dois polinômios em $\{f_1, ..., f_r, g_1, ..., g_s, ..., h_1, ..., h_t\}$ são relativamente primos.

Da equação (3.5), notando os fatores $gh.df$ e f^2 que figuram nesta, conclui-se que $f_j^{m_j+n_j+l_j-1}$ divide f^2. Isto implica que, para todo j, $m_j + n_j + l_j - 1 \leq 2l_j$, e portanto $m_j + n_j - 1 \leq l_j$, conforme desejado.

(d) Se $\omega = i_X(dx \wedge dy)$, segue, do Lema 2.2, que

$$\omega = \frac{g}{n}\left[\frac{dg}{g} - \frac{df}{f}\right] = \frac{g}{n}\left[\sum_{i=1}^{s} a_i \frac{dg_i}{g_i} - \sum_{j=1}^{r} (l_j - m_j)\frac{df_j}{f_j}\right].$$

Por outro lado, como $i_X(dx \wedge dy) = X_1.dy = X_2.dx$, ω é a forma dual ao campo X. Portanto,

$$\begin{aligned} X = \omega^* \quad &= \left[\textstyle\sum_{i=1}^{s} a_i \dfrac{dg_i}{g_i} + \sum_{j=1}^{r} \dfrac{(m_j - l_j)}{f_j} df_j\right]^* \\ &= \left[\textstyle\sum_{i=1}^{2} \dfrac{a_i}{g_i}\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial x}.dx + \dfrac{\partial g_i}{\partial y}.dy\right)\right. \\ &\quad \left. + \textstyle\sum_{j=1}^{r} \dfrac{(m_j - l_j)}{f_j}\left(\dfrac{\partial f_j}{\partial x}.dx + \dfrac{\partial f_j}{\partial y}.dy\right)\right]^* \\ &= \left[\textstyle\sum_{i=1}^{s} \dfrac{a_i}{g_i}\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial y}\partial_x - \dfrac{\partial g_i}{\partial x}\partial_y\right)\right. \\ &\quad \left. + \textstyle\sum_{j=1}^{r} \dfrac{(m_j - l_j)}{f_j}\left(\dfrac{\partial f_j}{\partial x}\partial_x - \dfrac{\partial f_j}{\partial x}\partial_y\right)\right] \end{aligned}$$

que está na forma desejada. Computações similares obtêm o desejado para o campo Y.

$\square$

Este é um momento oportuno para apresentar uma consequência dos resultados vistos acima, embora não necessariamente relacionado com o objetivo principal do trabalho.

Corolário 3.1 *Sejam X e Y germes de campos vetoriais holomorfos comutativos em $0 \in \mathbb{C}^2$. Escreva X em série de potências em torno de 0 como $X = \sum_{j=d}^{\infty} X_j$, onde cada X_j é polinomial homogêneo de grau $j \geq d$. Suponha ainda que $d \geq 2$ e que X_d não possua integral primeira em 0 e que 0 seja singularidade isolada de X_d. Então $Y = \lambda.X$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$*

Demonstração: Escreva Y em série de potências como $Y = \sum_{j=r}^{\infty} Y_j$, onde Y_j é homogêneo de grau j, $r \geq 0$ e $Y_r \neq 0$. Se R for o campo radial, temos que $[R, X_d] = m.X_d$ e $[R, Y_r] = n.Y_r$, onde $m = d - 1 \neq 0$ e $n = r - 1$. Note que $[X_d, Y_r] = 0$.

Afirmativa 1 *Nas condições acima, $r = d$ e $Y_d = \lambda X_d$, para algum $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$.*

Demonstração: Escreva $X_d \wedge Y_r = f.\partial_x \wedge \partial_y$, $R \wedge X_d = g.\partial_X \wedge \partial_y$ e $R \wedge Y_r = h.\partial_x \wedge \partial_y$, onde f, g, h são germes de funções holomorfas.

Inicialmente, temos necessariamente $g \not\equiv 0$. De fato, se $g \equiv 0$, então $R \wedge X_d \equiv 0$ e, como 0 é singularidade isolada de R, segue da Proposição (1.8) que $X_d = \phi.R$, onde ϕ é um polinômio homogêneo de grau $d - 1 > 0$. Neste caso, o conjunto $\{\phi = 0\}$ está contido no conjunto de singularidades de X_d, e portanto 0 não é singularidade isolada de X_d, uma contradição. Então $g \not\equiv 0$.

Agora, suponha $r \neq d$. Neste caso, vamos provar que f e h são não identicamente nulas. Se $f \equiv 0$, então $X_d \wedge Y_r \equiv 0$. Uma vez que X_d tem uma singularidade isolada em $0 \in \mathbb{C}^2$, segue da Proposição (1.8) que $Y_r = \psi.X_d$, onde ψ é um polinômio homogêneo de grau $r - d > 0$. Portanto

$$0 = [X_d, Y_r] = [X_d, \psi.X_d] = X_d(\psi).X_d + \psi.[X_d, X_d] \Rightarrow X_d(\psi) \equiv 0$$

e disso, concluímos que ψ é uma integral primeira não constante de X_d, uma contradição com a hipótese. Então, $f \not\equiv 0$.

Por fim, se $h \equiv 0$, então $R \wedge Y_r \equiv 0 \Rightarrow Y_r = \Phi.R$, novamente pela Proposição (1.8), onde Φ é polinomial homogêneo de grau $r - 1$ e não equivalentemente nulo. Temos:

$$0 = [X_d, Y_r] = [X_d, \Phi.R] = X_d(\Phi).R + \Phi.[X_d, R] = X_d(\Phi).R - \Psi.(d-1).X_d$$

e portanto $X_d(\Phi).R = (d - 1).\Phi.X_d$. De Φ é constante, então $X_d(\Phi) = 0$ e $d = 1$, uma contradição (por hipótese, $d \geq 2$). Se Φ é não constante, como X_d não possui integral primeira, temos $X_d(\Phi) \not\equiv 0$. Neste caso, utilizando a igualdade $0 = X_d(\Phi).R - \Psi.(d - 1).X_d$, temos

$$\begin{aligned} 0 = R \wedge (X_d(\Phi).R - \Psi.(d-1).X_d) &= X_d(\Phi).R \wedge R - \Psi.(d-1).R \wedge X_d \\ &= -\Psi.(d-1).R \wedge X_d \end{aligned}$$

e portanto $R \wedge X_d \equiv 0$, o que implica $g \equiv 0$, uma contradição com a hipótese.

Como temos provado que f, g e h são não equivalentemente nulas, podemos então aplicar o Lema (2.1) Como, por hipótese, X_d não possui integral primeira meromorfa não constante, necessariamente temos $r = 1$. Caso contrário, ${}^{f}/_{g}$ é integral primeira meromorfa e não constante de X_d, uma contradição. Então $r = 1$ e $n = 0$ e, portanto, ${}^{f}/_{g} = c$ constante, isto é, $f = c.g$, para algum $c \in \mathbb{C}$. Logo,

$$0 = (f - c.g)\partial_x \wedge \partial_y = X_d \wedge (Y_1 + c.R) \Rightarrow Y_1 = -c.R \neq 0$$

como consequência da Proposição (1.8) e do fato de que $d = dg(X_d) > 1$.

Em decorrência disso,

$$0 = [X_d, Y_1] = [X_d, -c.R] = -c.(d-1).X_d \neq 0$$

o que é um absurdo. Portanto, $r = d$.

Mas, $r = d \Rightarrow n = m = d - 1 > 0$ e $f \equiv 0$, pois, se $f \not\equiv 0$, o Lema (2.1) implicaria que ${}^{f}/_{g}$ é integral primeira de X_d, o que é impossível. Portanto, $X_d \wedge Y_d = 0$ implica, pela Proposição (1.8) que $X_d = \lambda.Y_d$, para algum $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$. $\square$

Para concluir a prova do corolário, defina o campo $Z = Y - \lambda.X$, para $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$. Então $[X, Z] = 0$. Se $Z \not\equiv 0$, escreva a série de Taylor de Z como $Z = \sum_{j=r}^{\infty} Z_j$, onde $r > d$ e Z_j é um polinômio homogêneo de grau j, com $Z_r \neq 0$. Mas, aplicando os resultados da Afirmativa acima demonstrada para X e Z, temos que $r = d$, o que contradiz a hipótese $r > d$; portanto $Z \equiv 0 \Rightarrow X = \lambda.Y$. $\square$

Capítulo 4

Classificação dos pencils de campos vetoriais homogêneos que comutam em $\mathbb{C}^2$

Apresentamos uma classificação completa de pencils de campos vetoriais homogêneos de mesmo grau que comutam em $\mathbb{C}^2$. Conforme veremos, um pencil de campos fica completamente determinado a partir das funções f, g e h e do grau do mapa $\phi[x:y] = {}^{g(x,y)}/_{h(x,y)}$.

Vamos determinar nossas condições preliminares. Muitas delas já foram utilizadas nos capítulos anteriores. Estamos trabalhando com campos vetoriais polinomiais homogêneos X e Y em $\mathbb{C}^2$ tais que:

(a) $[X, Y] = 0$

(b) $deg(X) = deg(Y) = l \geq 2$;

(c) $R = x.\partial_x + y.\partial_y$ é o campo radial em $\mathbb{C}^2$

(d)
$$\begin{cases} X \wedge Y = f.\partial_x \wedge \partial_y \\ R \wedge X = g.\partial_x \wedge \partial_y \\ R \wedge Y = h.\partial_x \wedge \partial_y \end{cases}$$

(e)
$$\begin{array}{rccl} \phi: & \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ & [x:y] & \longmapsto & [g(x,y) : h(x,y)]. \end{array}$$

Esta função é meromorfa.

Teorema 4.1 *Seja (Z_λ), $\lambda \in \mathbb{P}^1$ um pencil não-trivial de campos vetoriais homogêneos de grau $d \geq 2$ que comutam em $\mathbb{C}^2$, e X, Y geradores de Z_λ conforme descritos acima. Se o pencil for colinear, então $X = \alpha.R$, $Y = \beta.R$, para α, β polinômios homogêneos de grau $d-1$. Se o pencil for não-colinear, então*

(a) $f, g, h \not\equiv 0$.

(b) $\dfrac{f}{g}$ $\left(\text{respectivamente } \dfrac{f}{h}\right)$ *é integral primeira não constante de X (respectivamente, de Y).*

(c) Se $s = deg(\phi)$, então $1 \leq s \leq d-1$.

(d) A decomposição de f, g e h em fatores irredutíveis é da forma

$$\begin{cases} f = \Pi_{j=1}^r f_j^{2k_j+t_j} \\ g = \Pi_{j=1}^r f_j^{k_j} \cdot \Pi_{i=1}^s g_i \\ h = \Pi_{j=1}^r f_j^{k_j} \cdot \Pi_{i=1}^s h_i \end{cases}$$

onde $s + \sum_{j=1}^r k_j = d+1$ e $\sum_{j=1}^r t_j = 2s-2$. Os geradores X e Y podem ser escolhidos de forma que quaisquer dois elementos de $\{g_1, ..., g_s, h_1, ..., h_s\}$ são relativamente primos.

(e) Para um elemento $p_j = \{f_j = 0\}$ de $\mathbb{P}^1$, temos $t_j = mult_\phi(p_j) - 1$, $j = 1, ..., r$.

(f) Os geradores de X e Y podem ser tomados da forma

$$\begin{cases} X = g\left[\sum_{j=1}^r (k_j+t_j)\dfrac{1}{f_j}\left(\dfrac{\partial f_j}{\partial x}.\partial_y - \dfrac{\partial f_j}{\partial y}.\partial_x\right) - \sum_{i=1}^s \dfrac{1}{g_i}\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial x}.\partial_y - \dfrac{\partial g_i}{\partial y}.\partial_x\right)\right] \\ Y = h\left[\sum_{j=1}^r (k_j+t_j)\dfrac{1}{f_j}\left(\dfrac{\partial f_j}{\partial x}.\partial_y - \dfrac{\partial f_j}{\partial y}.\partial_x\right) - \sum_{i=1}^t \dfrac{1}{h_i}\left(\dfrac{\partial h_i}{\partial x}.\partial_y - \dfrac{\partial h_i}{\partial y}.\partial_x\right)\right] \end{cases} \tag{4.1}$$

Reciprocamente, se $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ é um mapa não constante com grau igual a $s \geq 1$, e D um divisor em $\mathbb{P}^1$ da forma

$$D = \sum_{p \in \mathbb{P}^1} (2k(p) + mult_p(\phi) - 1) \cdot p$$

onde $k(p) \geq (1, mult_p(\phi) - 1)$ e $\sum_{p \in \mathbb{P}^1} k(p) < \infty$, então existe um único pencil (Z_λ) de campos vetoriais homogêneos de grau $d = \sum_p K(p) + s - 1$, com geradores X e Y dados como em (4.1), onde os termos f_i, g_i, h_i são dados da seguinte forma: considere $\{p_1 = [a_1, b_1], ..., r_r = [a_r, b_r]\} = \{p \in$

$\mathbb{P}^1$ *tais que* $2k(p) + mult_p(\phi) - 1 > 0\}$, $k_j = k(p_j)$, $t_j = mult_{p_j}(\phi) - 1$ *e* $f_j(x,y) = a_j y - b_j x$. *Escrevendo* $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, $\phi([x:y]) = [G_1(x,y) : H_1(x,y)]$, *onde* G_1 *e* H_1 *são polinômios homogêneos de grau* s*, temos que os termos* g_i *e* h_i *são os fatores lineares de* G_1 *e* H_1.

Demonstração: Considere $(Z_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{P}^1}$ um pencil de campos vetoriais homogêneos comutativos não trivial com grau igual a $d \geq 2$ em $\mathbb{C}^2$, e dois geradores X e Y de (Z_λ). Considere as funções f, g e h conforme descrito anteriormente.

Suponha inicialmente que o pencil seja colinear, isto é, $X \wedge Y = 0$. Isso implica que $X = \gamma.Y$, para alguma constante γ, pois X e Y são de mesmo grau. Então $f \equiv 0$ em $\mathbb{C}^2$. Considere α o máximo divisor comum dos componentes de X (isto é, $\alpha = mdc(X_1, X_2)$, onde $X = X_1\partial_x + X_2\partial_y$). Note que α é um polinômio homogêneo. Podemos escrever $X = \alpha.Z$, para algum campo vetorial Z em $\mathbb{C}^2$.

Como X é homogêneo, $X(0) = 0$ e portanto $\alpha(0).Z(0) = 0$. Se $Z(0) \neq 0$, então $\alpha(0) = 0$. Como $Z = \dfrac{X}{\alpha}$ é holomorfo, teríamos $X(0) \neq 0$, uma contradição. Disso, temos necessariamente que $Z(0) = 0$ e esta singularidade é isolada (Z não pode ser constante igual a zero, e se houvesse conjunto $\{f = 0\}$ al que $Z(f) = 0$, com $f(0) = 0$, então α não seria o m.d.c das componentes de X). Como $Y \wedge X = 0$, temos $\alpha.Y \wedge Z = 0 \Rightarrow Y \wedge Z = 0$ e da Proposição (1.8) temos que $Y = \beta.Z$, onde β é um polinômio homogêneo em $\mathbb{C}^2$. Como X e Y são de mesmo grau, $X = \alpha.Z$ e $Y = \beta.Z$, conclui-se que α e β são de mesmo grau.

Temos:

$$0 = [X,Y] = [\alpha.Z, \beta.Z] = (\alpha.Z(\beta) - \beta.Z(\alpha)).Z = Z\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).Z \Rightarrow Z\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = 0$$

Como o pencil é não trivial, não existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $X = \lambda.Y$. Então $\alpha.Z \neq \lambda.\beta.Z$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, e portanto $\alpha \neq \lambda\beta$, donde $\dfrac{\beta}{\alpha}$ é não constante.

Considere

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ & [x:y] & \longrightarrow & [\beta(x,y):\alpha(x,y)]. \end{array}$$

Como os polinômios α e β são homogêneos de mesmo grau, a aplicação ϕ está bem definida. Portanto, tomando coordenadas locais em $\mathbb{P}^1$, temos

$$\phi({}^{y}\!/\!_{x}) = \frac{\beta(x,y)}{\alpha(x,y)}$$

e então

$$0 = Z(\phi({}^{y}\!/\!_{x})) = \phi'({}^{y}\!/\!_{x}) \cdot Z({}^{y}\!/\!_{x}) \Rightarrow Z({}^{y}\!/\!_{x}) = 0$$

pois $\phi' \not\equiv 0$. Isto significa que $x.Z(y) - y.Z(x) = 0 \Rightarrow x.Z(y) = y.Z(x)$. Escrevendo $Z = A.\partial_x + B.\partial_y$, a igualdade acima nos dá

$$x\left(A\frac{\partial}{\partial x}(y) + B\frac{\partial}{\partial y}(x)\right) = y\left(A\frac{\partial}{\partial x}(x) + B\frac{\partial}{\partial y}(x)\right) \Rightarrow x.B = y.A.$$

Podemos então escrever $A = x.\lambda$, $B = y.\lambda$, para algum polinômio homogêneo λ. Então $Z = x.\lambda.\partial_x + y.\lambda.\partial_y = \lambda.R$. Neste caso, se λ_i é um fator irredutível de λ, então o conjunto $\{\lambda_i = 0\}$ é a equação de uma órbita de Z, e, da homogeneidade de λ, a origem 0 está nesta órbita. Mas Z tem singularidade isolada em 0. Portanto, necessariamente, λ é constante. Então $X = \alpha_1.R$, $Y = \beta_1.R$, onde $\alpha_1 = \lambda.\alpha$ e $\beta_1 = \lambda.\beta$, ambos homogêneos de grau $d-1$. Isso encerra a prova para o caso em que o pencil é colinear.

Suponha agora que o pencil seja não-colinear. Por definição, $f \not\equiv 0$. Vamos provar que isso implica que $g \not\equiv 0$. Se tivermos $g \equiv 0$, então $R \wedge X = 0 \Rightarrow X = \alpha.R$, para algum polinômio homogêneo α de grau $d-1$. Portanto,

$$0 = [Y, X] = [Y, \alpha.R] = Y(\alpha).R - (d-1).\alpha.Y$$

pois $R(\alpha) = (d-1).\alpha$. Mas $(d-1)\alpha.Y \not\equiv 0$, donde $Y(\alpha).R = (d-1)\alpha.Y$. Isso significa que R e Y são colineares, isto é, $X \wedge Y = 0 \Rightarrow f \equiv 0$, um absurdo. Portanto, $g \not\equiv 0$. Este argumento também nos permite concluir que $h \not\equiv 0$.

Já sabemos que $deg(f) = 2d$, $deg(g) = def(h) = d+1$, onde $d = deg(X) = deg(Y)$, com f, g e h polinômios homogêneos. Note que $R = x.\partial_x + y.\partial_y$ é linearmente diagonalizável, cujos autovalores são $p = q = 1$. Usando a expressão em coordenadas para o Colchete de Lie (ver a Proposição (1.5)) e o fato de serem X e Y homogêneos de mesmo grau, temos $[R, X] = m.X$, $[R, Y] = m.Y$, onde $m = d-1$. Portanto, podemos aplicar o Teorema (3.1) para concluir que f/g (respectivamente f/h) é integral primeira meromorfa e não constante de X (respectivamente Y). Isso prova (b).

Por (c) do Teorema (3.1), obtemos fatorações em irredutíveis de f, g e h conforme a espressão (3.3):

$$\begin{cases} f = \Pi_{j=1}^{r} f_j^{l_j} \\ g = \Pi_{j=1}^{r} f_j^{m_j} \cdot \Pi_{i=1}^{s} g_i^{a_i} \\ h = \Pi_{j=1}^{r} f_j^{n_j} \cdot \Pi_{i=1}^{t} h_i^{b_i} \end{cases} \tag{4.2}$$

onde $r > 0$, $m_j, n_j > 0$, $l_j \geq m_j + n_j - 1$ para todo $j = 1, ..., r$, e quaisquer dois polinômios em $\{f_1, ..., f_r, g_1, ..., g_s, ..., h_1, ..., h_t\}$ são relativamente primos. Defina $k_j = min(m_j, n_j)$.

Afirmativa 2 *Os geradores do pencil podem ser tomados de tal forma que* *(a)* $m_j = n_j = k_j$, *para* $j = 1, ..., r$.

(b) $s = t$ *e* $a_i = b_i$, *para* $i = 1, ..., s$.

Demonstração: Considere $X_\lambda = X + \lambda Y$, e $R \wedge X_\lambda = g_\lambda.\partial_x \wedge \partial_y$, onde $g_\lambda = g + \lambda h$, e o parâmetro $\lambda \in \mathbb{C}$. O Teorema de Bertini (1.2) garante que, se $u = mdc(g, h)$, então $\frac{g_\lambda}{u}$ é não singular fora do conjunto $\{u_k = 0 | u_k \text{ divide } u\}$ (isto significa que $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{g_\lambda}{u}\right), \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{g_\lambda}{u}\right)\right) \neq (0, 0)$). Portanto, $u = \Pi_{j=1}^r f_j^{k_j}$ e $g_\lambda = \Pi_{j=1}^r f_j^{k_j} \cdot \Pi_{i=1}^s g_{i\lambda}$, com f_j, $g_{i\lambda}$ lineares para todo i, j, onde $s + \sum_j k_j = d + 1$ e quaisquer dois polinômios em $\{f_1, ..., f_r, g_{1\lambda}, ..., g_{s\lambda}\}$ são relativamente primos.

Agora, considere λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{C}$, distintos e não nulos, e considere g_{λ_1}, g_{λ_2}. Chame $X = X_{\lambda_1}$ e $Y = X_{\lambda_2}$. X e Y são geradores de X_λ, e portanto $X_\lambda = X_{\lambda_1} + \lambda.X_{\lambda_2}$, e $g_\lambda = g_{\lambda_1} + \lambda.g_{\lambda_2}$. Em particular, X e Y satisfazem (a) e (b), conforme desejado. □

No que segue, estaremos supondo que X e Y foram escolhidos conforme enunciado na afirmativa acima. Vamos provar que a decomposição de f em fatores irredutíveis é da forma

$$f = \Pi_{j=1}^r f_j^{2k_j + t_j}, \ t_j \geq 0 \tag{4.3}$$

Temos que $m = n = d - 1 > 0$; usando as expressões do Teorema (3.1), temos:

$$m\left(\frac{dh}{h} - \frac{dg}{g}\right) = \frac{m^2 f}{gh}(y.dx - x.dy)$$

(aqui, $p = q = 1$). Reescrevendo, temos:

$$g.dh - h.dg = mf(y.dx - x.dy).$$

Escreva $g = \psi.G_1$, $h = \psi.H_1$, onde

$$\psi = \Pi_{j=1}^r f_j^{k_j}, \ G_1 = \Pi_{i=1}^s g_i^{a_i}, \ \text{e } H_1 = \Pi_{i=1}^t h_i^{b_i}.$$

Note que H_1 e G_1 tem o mesmo grau. Nestes termos, calculemos $g.dh - h.dg$. Temos:

$$\begin{aligned} g.dh - h.dg &= \psi.G_1.d(\psi.H_1) - \psi.H_1.d(\psi.G_1) \\ &= \psi.G_1(d(\psi).H_1 + \psi.d(H_1)) - \psi.H_1(d(\psi).G_1 + \psi.d(G_1)) \\ &= \psi^2(d(H_1).g_1 - d(G_1).H_1) + \psi.d(\psi)(G_1.H_1 - H_1.G_1) \\ &= \psi^2(d(H_1).G_1 - d(G_1).H_1) \end{aligned}$$

que é igual a $mf(y.dx - x.dy)$, e portanto $\psi^2 | f$ (note aqui que os termos que aparecem em $d(H_1).G_1 - d(G_1).H_1$) são polinomiais cujos fatores lineares são relativamente primos aos fatores de f). Disso, temos $l_j \geq 2k_j \Rightarrow l_j = 2k_j + t_j$, para $t_j \geq 0$ onde

$$G_1.d(H_1) - H_1.d(G_1) = m.\Pi_{j=1}^{r} f_j^{t_j}(y.dx - x.dy)$$

e portanto $f = \Pi_{j=1}^{r} f_j^{2k_j+t_j}$.

Agora, considere o mapa $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, $\phi([x : y]) = [g(x,y) : h(x,y)]$. Pelo cancelamento do fator comum entre g e h, ϕ pode ser escrita como $\phi([x : y]) = [G_1(x,y) : H_1(x,y)]$. Como G_1 e H_1 são relativamente primos, temos que $deg(\phi) = deg(G_1) = deg(H_1)$. Considere $\{p_1, ..., p_t\} \subset \mathbb{P}^1$ o conjunto dos pontos críticos de ϕ e suponha $\phi(p_j) = c_j \in \mathbb{P}^1$ (estes são calculados usando as coordenadas $[1 : t]$ e $[t : 1]$ de $\mathbb{P}^1$). Se $c_j \neq \infty = [0 : 1] \in \mathbb{P}^1$, defina $K_j = G_1 - c_j H_1$. Se $c_j = \infty$, defina $K_j = H_1$. Suponha que p_j seja um ponto crítico com $mult_{p_j}(\phi) = l_j \geq 2$. Então podemos escrever $K_j = \psi_j^{l_j}.A$, onde ψ_j é um polinômio linear, A é homogêneo e ψ_j não divide A. Vamos provar que $\psi_j^{l_j-1}$ divide $\Pi_{i=1}^{r} f_i^{m_i}$. De fato isto acontece, pois, de $c_j \neq \infty$, temos

$$\begin{aligned}
K_j.d(H_1) - H_1.d(K_j) &= (G_1 - c_j.H_1).d(H_1) - H_1(d(G_1) - c_j.d(H_1)\\
&= G_1.d(H_1) - c_j.H_1.d(H_1) - H_1.d(G_1) + c_j.H_1.d(H_1)\\
&= G_1.d(H_1) - H_1.d(G_1)\\
&= m.\Pi_{i=1}^{r} f_i^{m_i}(y.dx - x.dy)
\end{aligned}$$

conforme visto anteriormente. Isto significa que, se $\psi_j^{l_j-1}$ divide $K_j.d(H_1) - H_1.d(K_j)$, então $\psi_j^{l_j-1}$ divide $\Pi_{i=1}^{r} f_i^{m_i}$. Mas $K_j = \psi_j^{l_j}.A$, e disso temos que $\psi_j^{l_j-1}$ divide $K_j.d(H_1) - H_1.d(K_j)$, e o caso em que $c_j \neq \infty$ está provado.

No caso em que $c_j = \infty$, então temos $K_j = H_1 = \psi_j^{l_j}.A$, e portanto $\psi_j^{l_j}$ divide $G_1.d(H_1) - H_1.d(G_1)$. Pelo visto acima, temos que $\psi_j^{l_j-1}$ divide $\Pi_{i=1}^{r} f_i^{m_i}$. Portanto, para cada $j \in \{1, ..., t\}$, podemos escrever $\psi_j = \lambda_j.f_{i(j)}$, onde $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$ e $i(j) \in \{1, ..., r\}$, donde concluímos que $l_j - 1 \leq m_{i(j)}$, e em particular, $t \leq r$.

Reordenando os índices de tal forma que tenhamos $i(j) = j$, para todo $j \in \{1, ..., r\}$, e fazendo $l_j = 1$ para os índices j em $\{t+1, ..., r\}$ (caso $t < r$), temos $m_j - (l_j - 1) \geq 0$, para todo $j \in \{1, ..., r\}$.

Provemos agora que $m_j = l_j - 1$, para todo $j \in \{1, ..., r\}$. Sabemos que $s + \sum_{i=1}^{r} k_i = d + 1$, $f = \Pi_{i=1}^{r} f_i^{2k_i+t_i}$ e $deg(f) = 2d$. Então

$$\sum_{i=1}^{r} m_i = deg\left(\sum_{i=1}^{r} f_i^{m_i}\right) = 2d - 2 \cdot \sum_{i=1}^{r} k_i = 2d - 2(d + 1 - s) = 2s - 2.$$

Por outro lado, usando a Fórmula de Riemann-Hurwitz (1.1), temos

$$\begin{aligned}
&2.g(\mathbb{P}^1) - 2 = deg(\phi).(2g(\mathbb{P}^1) - 2) + \textstyle\sum_{p\in\mathbb{P}^1}[mult_p(\phi) - 1] \Rightarrow \\
&\Rightarrow -2 = -2s + \textstyle\sum_{i=1}^{r}(l_i - 1) \\
&\Rightarrow 2s - 2 = \textstyle\sum_{i=1}^{r}(l_j - 1) \\
&\Rightarrow \textstyle\sum_{i=1}^{r} t_i = \sum_{i=1}^{r}(l_i - 1) \\
&\Rightarrow \textstyle\sum_{i=1}^{r} t_i - (l_i - 1) = 0
\end{aligned}$$

Como $t_i - (l_i - 1) \geq 0$, para todo $i \in \{1, ..., r\}$, segue que $t_i = l_i - 1$. Assim ficam provados os itens (d) e (e) do Teorema (4.1). Agora, aplicando o item (d) do Teorema (3.1), prova-se que os geradores X e Y do pencil tem a expressão desejada e, portanto, (f) também está provado.

Resta demonstrar que $1 \leq s \leq d-1$ e que $1 \leq r \leq d$. Como $k_j \geq 1$, para todo $j \in \{1, ..., r\}$, então $\sum_{j=1}^{r} 2k_j \geq 2r \Rightarrow \sum_{j=1}^{r}(2k_j + m_j) = 2d \geq 2r$, e disso conclui-se que $1 \leq r \leq d$. Portanto

$$s = deg(G_1) = deg\left(\frac{g}{\Pi_{j=1}^{r} f_j^{k_j}}\right) = deg(g) - deg\left(\Pi_{j=1}^{r} f_j^{k_j}\right) = d + 1 - \sum_{j=1}^{r} k_j$$

e disso temos que $s \leq d+1-r$, e portando $s \leq d$. Mas, por definição, $s \geq 0$. Se $s = 0$, então teríamos ϕ constante e $g = \lambda.h$, para alguma constante não nula $\lambda \in \mathbb{C}$, pois g e h são não identicamente nulos. Usando isso, temos

$$R \wedge (X - \lambda.Y) = (g - \lambda.h)\partial_x \wedge \partial_y = 0 \Rightarrow X - \lambda.Y = \psi.R$$

onde ψ é um polinômio homogêneo de grau $d - 1$. Portanto,

$$[X - \lambda.Y, X] = [X, X] - \lambda[Y, X] = 0 = [\psi.R, X] = \psi[R, X] - X(\psi).R$$

donde conclui-se que $\psi.m.X = X(\psi).R$, e portanto X e R são colineares, o que contradiz nossa hipótese. Vale então que $s \geq 1$.

Agora, suponha $s = d$. Neste caso, temos $g = f_1 \cdot g_1 \cdots g_d$, $h = f_1 \cdot h_1 \cdots h_d$ e $f = f_1^{2d}$ (pois $s + \sum_{i=1}^{r} k_i = d + 1$, isto é, $\sum_{i=1}^{r} k_i = 1 \Rightarrow r = 1$ e, como $f = f_1^{2k_1+m_1}$, onde $m_1 = 2s - 2 = 2d - 2$, temos $f = f_1^{2+2d-2} = f_1^{2d}$).

Dessa forma, o mapa $\phi = [g_1 \cdots g_d : h_1 \cdots h_d]$, tem grau $d \geq 0$ e apenas um ponto de ramificação, $\{f_1 = 0\}$, com multiplicidade $2d-1$. Isto é impossível, pois teríamos

$$mult_{\{f_1=0\}}(\phi) = 2d - 1 > d = \sum_{p\in\mathbb{P}^1} mult_p(\phi)$$

Com isto, provamos que $1 \leq s \leq d - 1$, conforme desejado.

Para encerrar a prova, façamos a recíproca. Inicialmente, note-se que X e Y são quasi-homogêneos em relação ao campo radial, isto é, os campos obtidos são da forma (4.1) e são quasi-homogêneos em relação a R (por serem homogêneos por construção). Do Teorema 3.1, item (b), fazendo $S = R$, temos que as equações (3.1) e (3.2) são satisfeitas por f, g e h. Usando o Lema (2.5), conclui-se que $[X, Y] = 0$, conforme desejado.

$\square$

Definição 4.1 *Sejam X e Y, $g = \Pi_{j=1}^r f_j^{k_j} \cdot \Pi_{i=1}^s g_i$ e $h = \Pi_{j=1}^r f_j^{k_j} \cdot \Pi_{i=1}^s h_i$ como no Teorema anterior. Os conjuntos $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f_j(x, y) = 0\}$, para $j \in \{1, ..., r\}$ são chamadas as direções fixas do pencil gerado por X e Y.*

Resgatando a definição de $g_\lambda = g + \lambda.h$, que figura na demonstração do Teorema anterior, as direções $\{g_{i,\lambda} = 0\}$ são as *direções móveis do pencil*. O polinômio homogêneo g_λ exerce o mesmo papel para $Z_\lambda = X + \lambda.Y$ que g exerce em X e h em Y. Em particular, g_λ se fatora em termos lineares como

$$g_\lambda = \Pi_{j=1}^r f_j^{k_j} \cdot \Pi_{i=1}^s g_{i,\lambda}.$$

O papel desempenhado pela quantidade de direções móveis e fixas de um pencil é fundamental para os dois seguintes colorários.

Corolário 4.1 *Seja $(Z_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{P}^1}$ um pencil de campos vetoriais homogêneos comutativos em $\mathbb{C}^2$, de grau 2. Após um eventual mudança linear de coordenadas, os geradores X e Y escrevem-se como um dos três seguintes casos:*

(a) $X = g \cdot R$, $Y = h \cdot R$, onde g e h são polinômios homogêneos de grau um e $R = x\partial_x + y\partial_y$.

(b) $X = x^2\partial_x$ e $Y = -y^2\partial_y$, e, neste caso, o pencil tem duas direções fixas.

(c) $Y = y^2\partial_x$ e $X = 2xy\partial_x + y^2\partial_y$, e, neste caso, o pencil possui apenas uma direção fixa.

Demonstração: Considere X_1 e Y_1 geradores de um pencil de campos polinomiais homogêneos que comutam e de grau 2. Escreva $X_1 \wedge Y_1 = f_1\partial_x \wedge \partial_y$, $R \wedge X_1 = g_1\partial_x \wedge \partial_y$, e $R \wedge Y_1 = h_1\partial_x \wedge \partial_y$. Se $g_1 \equiv h_1 \equiv 0$, já provamos que, neste caso, X_1 e Y_1 são múltiplos do campo radial R, o que prova o item (a).

Suponha f_1, g_1 e h_1 não identicamente nulos. Por (c) do Teorema (4.1), a aplicação $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, $\phi([x : y]) = [g_1(x, y) : h_1(x, y)]$ tem grau 1. Isso significa que, como $deg(g_1) = deg(h_1) = d + 1 = 3$. Então

$$g_1 = \Pi_{i=1}^r f_i^{k_i} \cdot \Pi_{j=1}^s g_{1j} = \Pi_{i=1}^2 f_i^{k_i}.g_2$$

onde $k_1 + k_2 = 2$ e f_1, f_2 e g_2 são lineares. Podemos ter, então, $f_1 \neq f_2$ (e neste caso, o pencil tem duas direções fixas) ou $f_1 = f_2$ (uma direção fixa).

Suponha que tenhamos duas direções fixas; sejam elas $\{f_1 = 0\}$ e $\{f_2 = 0\}$. Como f_i é linear, para $i = 1, 2$, nas variáveis x e y, existem a_1, b_1 e a_2, b_2 tais que $f_1 = a_1x - b_1y$ e $f_2 = a_2x - b_2y$, com $(a_1, b_1) \neq \lambda(a_2, b_2)$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Isso significa que $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$, e portanto, a transformação linear cuja matriz (na base canônica) é

$$\frac{1}{a_2b_1 - a_1b_2}\begin{bmatrix} b_1 & -a_1 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix}$$

leva $\{f_1 = 0\}$ e $\{f_2 = 0\}$ em $\{x = 0\}$ e $\{y = 0\}$, respectivamente. Neste caso, $g_1 = xy.g_2$ e $h_1 = xy.h_2$, $f = x^2y^2$, com g_1 e h_2 lineares e relativamente primos; é possível, portanto, escolher λ_1 e λ_2 com $[a : b]$, $[c : d] \in \mathbb{P}^1$ tais que $ag_2 + bh_2 = x$, $cg_2 + dh_2 = y$. Defina, então, $g = x^2y = xy(a.g_2 + b.h_2)$ e $h = x.y^2$; ao fazer isso, estamos considerando os novos geradores $Z_{\lambda_1} = aX + bY$ e $Z_{\lambda_2} = cX + dY$ do pencil. Neste caso, temos

$$df = 2xy.dx + 2x^2y.dy,\ \ dg = 2xy.dx + x^2,\ \text{ e } dh = y^2.dx + 2xy.dy$$

Observe agora que

$$dg \wedge dh = 3x^2y^2dx \wedge dy,\ \ dh \wedge df = -2x^2y^3dx \wedge dy,\ \text{ e } df \wedge dg = -2x^3y^2dx \wedge dy$$

portanto

$$f.dg \wedge dh + g.dh \wedge df + h.df \wedge dg = [x^4y^4(3 - 2 - 2)]dx \wedge dy = (-1)f^2.dx \wedge dy.$$

Uma vez que $\dfrac{f}{g} = \dfrac{x^2.y^2}{x^2.y} = y$, e $\dfrac{f}{h} = \dfrac{x^2.y^2}{x.y^2} = x$ são linearmente independentes, podemos então aplicar o Lema (2.5) para obter campos $X = \left(g\dfrac{d(f/g)}{f/g}\right)^*$ e $Y = \left(h\dfrac{d(f/h)}{f/h}\right)^*$ (o asterisco denota o dual da 1-forma). Temos:

$$X = \left(x^2y\left(\frac{dy}{y}\right)\right)^* = (x^2.dy)^* = x^2\partial_x$$

e

$$Y = \left(xy^2\left(\frac{dx}{x}\right)\right)^* = (y^2dx)^* = -y^2\partial_y.$$

Uma vez que a comutatividade de campos independe de escalares, podemos tomar $Y = y^2\partial_y$, o que encerra a prova de (b).

Resta provar (c). Neste caso, temos apenas uma direção fixa, a qual, via mudança de coordenadas, pode ser assumida como $\{y = 0\}$. Neste caso, $g_1 = y^2 g_2$, $h_1 = y^2 h_2$ e $f = y^4$, com g_2 e h_2 relativamente primos. Neste caso, podemos tomar combinações lineares, como antes, de forma que $ag_2 + bh_2 = x$ e $cg_2 + dh_2 = y$. Defina $g = xy^2 = y^2(ag_2 + bh_2)$ e $h = y^3 = y^2(cg_2 + dh_2)$. Temos:

$$df = 4y^3 dy, \; dg = y^2 dx + 2xydy, \text{ e } dh = 3y^2 dy$$

e

$$dg \wedge dh = 4y^3 dx \wedge dy, \; dh \wedge df = 0 \text{ e } df \wedge dg = -4y^3 dx \wedge dy.$$

Temos então que

$$f.dg \wedge dh + g.dh \wedge df + h.df \wedge dg = 3y^8 dx \wedge dy - 4y^8 dx \wedge dy = -f^2 dx \wedge dy.$$

Podemos então aplicar novamente o Lema (2.5), para obter campos X e Y que serão os geradores procurados. Temos

$$\begin{aligned} X = \left(g \frac{d(f/g)}{f/g} \right)^* &= \left(xy^2 \frac{d(y^2/x)}{y^2/x} \right)^* \\ &= \left(x^2 \left(\frac{-y^2}{x^2} dx + \frac{2y}{x} dy \right) \right)^* \\ &= (-y^2.dx + 2xy.dy)^* \\ &= 2xy.\partial_x + y^2.\partial_y \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Y = \left(h \frac{d(f/h)}{f/h} \right)^* &= \left(y^3. \frac{d(y)}{y} \right)^* \\ &= (y^2.dy)^* \\ &= y^2.\partial_x \end{aligned}$$

o que encerra a prova do corolário. □

Corolário 4.2 *Seja $(Z_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{P}^1}$ um pencil de campos polinomiais homogêneos de comutam em $\mathbb{C}^2$ com grau igual a 3. Após uma mudança linear de variáveis, os geradores X e Y do pencil podem ser tomados como:*

(a) $X = g.R$ e $Y = h.R$, onde g e h são polinômios homogêneos de grau 2 e R é o campo radial.

(b) $X = y^3.\partial_x$ e $Y = 3xy^2.\partial_x + y^3.\partial_y$. Neste caso, o pencil tem uma direção móvel e uma fixa.

(c) $X = x^2 y.\partial_x$ e $Y = xy^2.\partial_x - y^3.\partial_y$. Neste caso, o pencil tem uma direção móvel e duas direções fixas.

(d) $X = (2x^2y + x^3)\partial_x - x^2y.\partial_y$ *e* $Y = -xy^2.\partial_x + (2xy^2 + y^3)\partial_y$. *Neste caso, o pencil tem uma direção móvel e três direções fixas.*

(e) $X = x^3.\partial_x$ *e* $Y = y^3.\partial_y$. *Neste caso, o pencil tem duas direções móveis e duas fixas.*

Demonstração: Sejam f, g e h como no Teorema (4.1). Caso tenhamos $g \equiv h \equiv 0$, então X e Y são colineares e, portanto, são como em (a) do Corolário (4.1). Caso contrário, considere o mapa

$$\begin{array}{rll} \phi: & \mathbb{P}^1 & \to \mathbb{P}^1 \\ & [x:y] & \mapsto [g(x,y):h(x,y)]. \end{array}$$

Este mapa tem grau s, onde podemos ter $s = 1$ ou $s = 2$, conforme (c) do Teorema (4.1).

Suponha inicialmente que $s = 2$. Como $g(\mathbb{P}^1) = 0$, usando a Fórmula de Riemann-Hurwitz, temos:

$$2(g(\mathbb{P}^1) - 1) = 2.deg(\phi)(g(\mathbb{P}^1) - 1) + \sum_{p \in \mathbb{P}^1} (mult_p(\phi) - 1)$$

donde $\sum_{p\in\mathbb{P}^1}(mult_p(\phi) - 1) = 2$. Como $mult_p(\phi) \leq 2 = s$, para $p \in \mathbb{P}^1$, segue que existem apenas dois pontos de ramificação, e estes possuem multiplicidade 2 cada. Chame-os $[x_1 : y_1]$, $[x_2 : y_2] \in \mathbb{P}^1$.

Considere Φ_1 a transformação de Möbius tal que $\Phi_1([0:1]) = [x_1 : y_1]$ e $\Phi([1:0]) = [x_2 : y_2]$, e Φ_2 tal que $\Phi_2(\phi([x_1 : y_1])) = [0:1]$, $\phi_2(\phi([x_1 : x_2])) = [1:0]$. Escolhendo um ponto arbitrário $[x_3 : y_3] \in \mathbb{P}^1 - \{[x_1 : y_1], [x_2 : y_2]\}$, e fixando $\Phi_1([1:1]) = [x_3 : y_3]$, $\Phi_2(\phi([x_3 : y_3])) = [1:1]$, temos que Φ_1 e Φ_2 ficam unicamente determinadas e, em particular, são biholomorfismos de $\mathbb{P}^1$, e disso $mult_p(\Phi_i) = 1$, para $i = 1, 2$, para todo $p \in \mathbb{P}^1$.

Segue que $\Phi = \Phi_2 \circ \phi \circ \Phi_1 : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ tem pontos de multiplicidade 2 em $[1:0]$ e $[0:1]$ apenas, e multiplicidade 1 nos demais. Além disso, esta aplicação fixa os pontos $[1:0]$ e $[0:1]$. Necessariamente, esta aplicação é da forma $\Phi([x:y]) = [x^2 : y^2]$ que, em coordenadas complexas, é da forma $\Phi([x:y]) = \dfrac{y^2}{x^2}$. Disso, temos que $g(x,y) = f_1 \cdot f_2 \cdot y^2$, $h(x,y) = f_1 \cdot f_2 \cdot x^2$, onde f_1 e f_2 são fatores lineares, g e h polinomiais de grau 4. Como o conjunto dos pontos críticos de Φ é $\{[0:1], [1:0]\}$, e ambos são pontos de ramificação, escreva $G_1 = y^2$, $H_1 = x^2$, $c_1 = 0$, $c_2 = \infty$. Defina $K_1 = y^2 - 0.H_1 = y^2$ e $K_2 = x^2$ (estamos reproduzindo o feito na prova do Teorema (4.1)). Então, $\psi_1 = x$, $\psi_2 = y$ e $f_1 = \lambda_1.x$ e $f_2 = \lambda_2.y$, com λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{C}^*$, donde $\{x = 0\}$ e $\{y = 0\}$ são as direções fixas do pencil.

Do item (d) do Teorema (4.1), temos $k_1 = k_2 = 1$ e do item (e), temos que $t_1 = t_2 = 1$. Portanto, $f = x^3.y^3$ (via mudança linear de coordenadas), e $g = xy^3$ e $h = x^3y$. Agora, como $\dfrac{f}{g} = x^2$, $\dfrac{f}{h} = y^2$ são não constantes e meromorfas em $\mathbb{C}^2$, e

$$\begin{aligned}
&f.dg \wedge dh + g.dh \wedge df + h.df \wedge dg \\
&= [x^3y^3(x^3y^3 - 3x^3y) + xy^3(9x^5y^3 - 3x^5y^3) + x^3y(9x^3y^5 - 3x^3y^5)]dx \wedge dy \\
&= [-2x^6y^6 + 6x^6y^6 + 6x^6y^6]dx \wedge dy = 10(x^3y^3)^2 dx \wedge dy \\
&= 10.f^2.dx \wedge dy.
\end{aligned}$$

Pelo Lema (2.5), o pencil gerado por

$$\begin{aligned}
X &= \left(g\left(\frac{dg}{g} - \frac{df}{f}\right)\right)^* \\
&= (y^3.dx + 3xy^2.dy - 3y^3.dx - 3xy^2dy)^* \\
&= (-2y^3.dx)^* \\
&= 2y^3.\partial_y
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
Y &= \left(h\left(\frac{dh}{h} - \frac{df}{f}\right)\right)^* \\
&= (-2x^3dy)^* \\
&= -2x^3\partial_x.
\end{aligned}$$

Independento a comutatividade de escalares, podemos tomar $X = y^3\partial_y$ e $Y = x^3\partial_x$. Isso prova o item (e).

Agora, suponha $s = 1$. Neste caso, temos apenas uma direção móvel. Por Riemann-Hurwitz, ϕ não tem pontos de ramificação; logo, $t_j = 0$, para $j = 1, 2$, onde t_j é como consta no Teorema (4.1). Como $f = \Pi_{j=1}^{r} f_j^{2k_j}$ e $def(f) = 6$. Temos três possibilidades:

(i) $r = 1$, $k_1 = 3$;

(ii) $r = 2$, $k_1 = 1$ e $k_2 = 2$;

(iii) $r = 3$ e $k_1 = k_2 = k_3 = 1$.

No primeiro caso, temos apenas uma direção fixa. Via uma mudança linear de coordenadas, podemos supor $f_1 = y$. Assim, temos $f = y^6$, $g = y^3.g_1$, $h = y^3.h_1$, onde h_1 e g_1 são lineares e relativamente primos.

Escolha a, b, c, $d \in \mathbb{C}$ tais que $ac - bd \neq 0$, $a.g_1 + b.h_1 = x$, $c.g_1 + d.h_1 = y$; e os geradores Z_{λ_1} e Z_{λ_2} para o pencil Z_λ, onde $\lambda_1 = [a : b]$ e $\lambda_2 = [c : d]$.

Neste caso, $g_{\lambda_1} = a.g + b.h = y^3(a.g_1 + b.h_1) = y^3.x$ e $g_{\lambda_2} = y^4$. Considere então novas funções $g = g_{\lambda_2}$ e $h = g_{\lambda_1}$. Como $\dfrac{f}{g} = \dfrac{y^3}{x}$ e $\dfrac{f}{h} = y^2$ são não constantes, meromorfas e independentes, e como

$$\begin{aligned} f.dg \wedge dh + g.dh \wedge df + h.df \wedge dg &= -4y^{12}dx \wedge dy + 6y^{12}dx \wedge dy \\ &= 2y^{12}dx \wedge dy \\ &= 2.f^2dx \wedge dy \end{aligned}$$

então podemos aplicar o lema (2.5) para concluir que

$$\begin{aligned} X &= \left(g\left(\frac{dg}{g} - \frac{df}{f}\right)\right)^* \\ &= (4y^3.dy - 6y^3.dy)^* \\ &= (-2y^3.dy)^* \\ &= -2y^3.\partial_x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Y &= \left(h\left(\frac{dh}{h} - \frac{df}{f}\right)\right)^* \\ &= (y^3.dx + 3xy^2.dy - 6xy^2.dy)^* \\ &= (y^3.dx - 3xy^2.dy)^* \\ &= -3xy^2.\partial_x - y^3.\partial_y \end{aligned}$$

podemos tomar então $X = y^3.\partial_x$ e $Y = 3xy^2.\partial_x + y^3.\partial_y$, o que prova o item (b).

No segundo caso, temos duas direções fixas, as quais, via mudança linear de coordenadas, podem ser tomadas como $f_1 = x$, $f_2 = y$. Como $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, segue do Teorema (4.1) que $f = x^2y^4$, $g = xy^2.g_1$, $h = xy^2.h_1$, onde g_1 e h_1 são relativamente primos. Conforme feito anteriormente, escolhendo geradores adequados, podemos escrever $a.g_1 + b.h_1 = x$, $c.g_1 + d.h_1 = y$, com $ac - bd \neq 0$. Disso, temos que $g = x^2y^2$, $h = xy^3$. Como $\dfrac{f}{g} = y^2$ e $\dfrac{f}{h} = xy$. são meromorfas, não constantes e independentes, e como

$$f.dg \wedge dh + g.dh \wedge df + h.df \wedge dg = (-2)x^4y^8.dx \wedge dy = -2.f^2.dx \wedge dy$$

segue do Lema (2.5) que podemos tomar os seguintes geradores:

$$\begin{aligned} X &= \left(g\left(\frac{dg}{g} - \frac{df}{f}\right)\right)^* \\ &= (-2x^2y.dy)^* \\ &= -2x^2y\partial_x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Y &= \left(h\left(\frac{dh}{h}-\frac{df}{f}\right)\right)^* \\ &= (-y^3.dx - xy^2.dy)^* \\ &= -x.y^2.\partial_x + y^3.\partial_y \end{aligned}$$

Pode-se tomar $X = 2x^2y.\partial_x$ e $Y = x.y^2.\partial_x - y^3.\partial_y$, o que prova (c).

No terceiro caso, temos três direções fixas: f_1, f_2 e f_3. Via uma transformação linear, podemos supor $f_1 = x$, $f_2 = y$ e a partir disso temos $f_3 = ax + by$, com $a, b \in \mathbb{C}^*$. A transformação $T(x,y) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$ faz com que possamos admitir $f_3 = x+y$. Então, $f = x^2y^2(x+y)^2$, $g = xy(x+y).g_1$ e $h = xy(x+y)h_1$, onde g_1 e h_1 são relativamente primos. Tomando combinações lineares adequadas, podemos assumir $g = x^2y(x+y)$ e $h = xy^2(x+y)$. Como $\frac{f}{g} = y(x+y)$ e $\frac{f}{h} = x(x+y)$ são meromorfas e independentes, podemos tomar os geradores

$$\begin{aligned} X &= \left(g\left(\frac{dg}{g}-\frac{df}{f}\right)\right)^* \\ &= (x^2y.dx + (2x^2y + x^3).dy)^* \\ &= (2x^2y + x^3).\partial_x - x^2y.\partial_y \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Y &= \left(h\left(\frac{dh}{h}-\frac{df}{f}\right)\right)^* \\ &= ((2xy^2 + y^3)dx + xy^2.dy)^* \\ &= xy^2.\partial_x - (2xy^2 + y^3)\partial_y \end{aligned}$$

o que prova (d).

□

Referências Bibliográficas

[1] Carmo, M. P. do. *Differential Forms and Applications*. Springer, Berlim Heidelberg, 1991.

[2] Cerveau, D., Mattei, J-F. *Formes intégrables holomorphes singuliéres*, Société Mathématique de France, Astérisque no. 97, 1982.

[3] Farkas, HM., Kra, I. *Riemann Surfaces*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 1980.

[4] Guillot, A. *Sur les exemples de Lins Neto de feuilletages algébriques*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334, 2002.

[5] Gunning, R. C., Rossi, H. *Analytic Functions of Several Complex Variables*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1965.

[6] Griffith, P., Harris, J. *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley-Interscience Publication, New York, 1978.

[7] Lins Neto, A. *Homogeneous Commuting Vector Fields on* $\mathbb{C}^2$. Astérisque No. 323, Société Mathématique de France, 2009.

[8] Lins Neto, A. *Holomorphic Rank of Hypersurfaces with an Isolated Singularity*. Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática, vol. 29, N.1, 1998.

[9] Lins Neto, A., Camacho, C. *Introdução à Teoria das Folheações*. IMPA, Rio de Janeiro - RJ, 1977.

[10] Lins Neto, A. *Funções de uma variável Complexa*. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro - RJ, 2008.

[11] Lins Neto, A. *Some examples for the Poincaré and Painlevé Problems*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 2002.

[12] Miranda, R. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces.* Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Estados Unidos, 1995.

[13] Moussu, R. *Sur l'Existence d'Intégrales Premières pour un Germe de Forme de Pfaff.* Ann. Inst. Fourier 26,vol.2, 1976.

[14] Poincaré, H. *Sur l'intégration algébrique des équations différentielles*, C. R. Acad. Sci. 112, 1891.

[15] Poincaré, H. *Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré*, Rendiconti del Circolo Matemático di Palermo 5, 1891.