

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado

**Dinâmica local de difeomorfismos tangentes à
identidade em \mathbb{C} e em \mathbb{C}^2**

Guilherme Barbosa de Almeida

Orientadora: Lorena López Hernanz

Coorientador: Fábio Enrique Brochero Martínez

BELO HORIZONTE, 24 DE FEVEREIRO DE 2014

Agradecimentos

Agradeço à professora Lorena pela paciência, comprometimento e profissionalismo na orientação de meu trabalho.

Agradeço ao professor Fábio pelo auxílio dado nas discussões.

Agradeço à minha família pelo apoio e pela paciência.

Agradeço aos amigos pelo incentivo e pela companhia.

Agradeço à CAPES e ao REUNI pelo auxílio financeiro.

Agradeço à UFMG e ao DMAT por promoverem o programa de mestrado.

Agradeço a tudo e todos que deixei de citar, que contribuíram de alguma forma para o sucesso deste trabalho.

Sumário

1	Dinâmica local de difeomorfismos tangentes à identidade em \mathbb{C}	4
1.1	A classificação formal	4
1.1.1	Difeomorfismos tangentes à identidade e campos de vetores formais	6
1.2	O teorema da flor	11
1.3	A classificação analítica	16
2	O teorema de Camacho e Sad	23
2.1	Preliminares	23
2.1.1	Folheações singulares	23
2.1.2	Separatrizes	25
2.1.3	Explosões	26
2.1.4	O efeito de uma explosão sobre uma folheação	28
2.1.5	O efeito de uma explosão sobre uma curva	30
2.2	O teorema de Seidenberg	32
2.2.1	Invariantes inteiros locais por explosões	34
2.2.2	Redução a singularidades pré-simples	38
2.3	O teorema de Briot-Bouquet	41
2.4	A existência de separatrizes	44
3	Dinâmica local de difeomorfismos tangentes à identidade em \mathbb{C}^2	50
3.1	Preliminares	50
3.2	O teorema de Hakim	53
3.3	A existência de curvas parabólicas	61
3.4	A existência de domínios invariantes	64

Capítulo 1

Dinâmica local de difeomorfismos tangentes à identidade em \mathbb{C}

Sistemas dinâmicos discretos holomorfos em $(\mathbb{C}, 0)$ tangentes à identidade são germes de difeomorfismos locais da forma

$$f(z) = z + a_{r+1}z^{r+1} + a_{r+2}z^{r+2} + \dots, \quad a_{r+1} \neq 0, \quad (1.1)$$

onde $r + 1$ é chamado de multiplicidade de f . O conjunto desses sistemas será denotado por $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ e chamaremos seus elementos simplesmente de difeomorfismos tangentes à identidade. Denotamos por $\text{Diff}_{r+1}(\mathbb{C}, 0)$ o conjunto dos difeomorfismos tangentes à identidade com multiplicidade $r + 1$. O conjunto das séries formais do tipo (1.1) são os difeomorfismos formais tangentes à identidade.

Dois difeomorfismos tangentes à identidade f_1 e f_2 são analiticamente conjugados se existe um difeomorfismo h tal que $h \circ f_1 = f_2 \circ h$ numa vizinhança da origem. Se h é apenas formal dizemos que os sistemas são formalmente conjugados. As relações de ser analítica ou formalmente conjugado são relações de equivalência em $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Abordaremos neste capítulo o problema clássico de obter as classes de conjugação analítica e formal.

Outro problema abordado neste capítulo é entender o comportamento das órbitas em torno da origem. Mais precisamente, dado um difeomorfismo tangente à identidade f e um ponto z_0 no domínio de f buscaremos entender como evolui $f^{on}(z_0)$ quando $n \rightarrow \infty$. O resultado geral será dado pelo teorema da flor ([12]).

As referências principais para este capítulo são [1], [2], [7], [12], [13] e [16]. Resultados sobre sistemas que não são tangentes à identidade podem ser encontrados em [1] e [14].

1.1 A classificação formal

A classificação formal de difeomorfismos tangentes à identidade é dada pela seguinte proposição:

Proposição 1.1.1. *Seja $f \in \text{Diff}_{r+1}(\mathbb{C}, 0)$. Então f é formalmente conjugado à função*

$$h(z) = z - z^{r+1} + \beta z^{2r+1}, \quad (1.2)$$

onde β é um invariante formal (e analítico) dado por

$$\beta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - f(z)},$$

sendo γ um caminho circular de raio suficientemente pequeno orientado positivamente.

Demonstração: Se $h(z) = z - z^{r+1} + \beta z^{2r+1}$ então

$$\frac{1}{z - h(z)} = \frac{1}{z^{r+1}(1 - \beta z^r)} = \frac{1}{z^{r+1}} + \frac{\beta}{z} + \dots,$$

logo

$$\beta = \text{Res} \left(\frac{1}{z - h(z)}, 0 \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - h(z)}.$$

Dado $f(z) = z + a_{r+1}z^{r+1} + \dots$, para provarmos que f e h são formalmente conjugados, tomemos a mudança de coordenadas polinomial

$$\varphi(z) = z + \mu z^d + O(z^{d+1}),$$

com $\mu \neq 0$ e $d \geq 2$. Desta forma, temos que $\varphi^{-1}(z) = z - \mu z^d + O(z^{d+1})$, $(\varphi^{-1})'(z) = 1 - d\mu z^{d-1} + O(z^d)$ e $(\varphi^{-1})^{(j)} = O(z^{d-j})$ para todo $j \geq 2$. Usando a expansão de Taylor de φ^{-1} temos

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(z) &= \varphi^{-1} \left(\varphi(z) + \sum_{j \geq r+1} a_j \varphi(z)^j \right) \\ &= z + (\varphi^{-1})'(\varphi(z)) \left(\sum_{j \geq r+1} a_j z^j (1 + \mu z^{d-1} + O(z^d))^j \right) + O(z^{d+2r}) \\ &= z + (1 - d\mu z^{d-1} + O(z^d)) \sum_{j \geq r+1} a_j z^j (1 + j\mu z^{d-1} + O(z^d)) + O(z^{d+2r}) \\ &= z + a_{r+1} z^{r+1} + \dots + a_{r+d-1} z^{r+d-1} \\ &\quad + [a_{r+d} + (r+1-d)\mu a_{r+1}] z^{r+d} + O(z^{r+d+1}). \end{aligned}$$

Se $d \neq r+1$ podemos fazer uma mudança de coordenadas da forma $\varphi(z) = z + \mu z^d$ para eliminar o termo de grau $r+d$ da série de Taylor de f , sem alterar os termos de grau menor. Para conjugar formalmente f com h fazemos inicialmente a mudança de coordenadas $\xi(z) = \zeta z$, com $\zeta^{r+1} = -a_{r+1}$. Posteriormente, utilizamos uma sequência de mudanças de coordenadas polinomiais da forma $\varphi(z) = z + \mu z^d$ para eliminar todos os termos da expansão de Taylor de f exceto o termo de grau $2r+1$. \square

1.1.1 Difeomorfismos tangentes à identidade e campos de vetores formais

Apresentamos nesta seção a classificação formal na linguagem de campos de vetores. Para isto, mostremos primeiro a relação existente entre campos de vetores formais e difeomorfismos tangentes à identidade.

Seja X um germe de campo de vetores na origem de \mathbb{C} ,

$$X = H(z) \frac{d}{dz},$$

sendo H um germe de uma função holomorfa numa vizinhança da origem. A base para a classificação formal é a existência de fluxos locais em vizinhanças de qualquer ponto do domínio de X (veja [17]):

Teorema 1.1.2. *Sejam Ω um conjunto aberto em \mathbb{C} e X um campo de vetores analítico definido em Ω . Para qualquer subconjunto compacto $K \subset \Omega$ existem $\delta > 0$, uma vizinhança aberta U de K em Ω e uma única função $\Phi : U \times (-\delta, \delta) \rightarrow \Omega$ (fluxo local) tal que $z \rightarrow \Phi(z, t)$ é holomorfa para todo t fixado e*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(z, t) = F(\Phi(z, t)) \\ \Phi(z, 0) = z \end{cases} . \quad (1.3)$$

Para um t fixado o mapa $\Phi_t : z \mapsto \Phi(z, t)$ é chamado de *fluxo de X na variável t* . Multiplicando o campo de vetores X por $\delta/2$ temos o fluxo associado $\Psi(z, t) := \Phi(z, t\delta/2)$ que satisfaz $\Psi(z, 0) = z$ e $\frac{\partial}{\partial t} \Psi(z, t) = (\delta/2)X(\Psi(z, t))$. Deste modo, a função Ψ está definida no intervalo $(-2, 2)$. Concluimos que, a menos de uma constante, sempre podemos assumir que o fluxo para $t = 1$ está bem definido. Observ que o fluxo para $t = 1$ sempre é um germe de uma função holomorfa numa vizinhança da origem. Busquemos agora condições que caracterizam quando o fluxo é um difeomorfismo tangente à identidade.

Proposição 1.1.3. *Seja X um germe de campo de vetores holomorfo em $(\mathbb{C}, 0)$. O fluxo na variável t fixa a origem para todo t se, e somente se, X é singular na origem, isto é, $X(0) = 0$.*

Demonstração: Se $\Phi(0, t) = 0$ para todo t , então $X(0) = X(\Phi(0, t)) = \frac{d}{dt} \Phi(0, t) = 0$. Por outro lado, se $X(0) = 0$ temos que $\Phi(0, t)$ e $\beta \equiv 0$ são soluções da equação diferencial com condição inicial

$$\begin{cases} f'(t) = X(f(t)) \\ f(0) = 0. \end{cases} .$$

O resultado segue da unicidade de soluções para equações diferenciais ordinárias com condição inicial ([17]). \square

O próximo teorema mostra que o fluxo na variável t de um campo de vetores holomorfo singular na origem pode ser expresso como exponencial do próprio campo.

Teorema 1.1.4. *Seja $X = H(z) \frac{d}{dz}$ um germe de campo de vetores holomorfo em $(\mathbb{C}, 0)$ singular na origem. Então o fluxo de X na variável t , $\Phi(z, t)$, é dado por*

$$\Phi(z, t) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} X^n \cdot z,$$

onde $X^n \cdot z$ é definido por indução como $X^n \cdot z = X \cdot (X^{n-1} \cdot z) = H(z) \frac{d}{dz} (X^{n-1} \cdot z)$, com $X \cdot z := H(z)$.

Demonstração: Observamos que se $\sigma(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(t) z^i$, com $\varphi_i(t)$ convergente, satisfaz (1.3) então os coeficientes $\varphi_i(t)$ são bem determinados. Temos que $F(z, t) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} X^n \cdot z$ e $\Phi(z, t)$ possuem expansão em torno de $z = 0$ com coeficientes convergentes em t e satisfazem (1.3). Logo $F(z, t) = \Phi(z, t)$. \square

Pela demonstração anterior a expressão formal do fluxo na variável t pode ser vista como a série exponencial de tX . Por isso, denotamos o fluxo de X na variável t como $\exp(tX)$.

Definição 1.1.5. Dada uma série formal $u = \sum_{j=l}^{\infty} b_j z^j$, com $l \geq 0$ e $b_l \neq 0$ definimos a

ordem de u na origem, $\nu(u)$, como $\nu(u) := l$. Se o campo X é dado por $X = u(z) \frac{d}{dz}$, a ordem de X na origem, $\nu(X)$, é definida como $\nu(X) := \nu(u)$.

Proposição 1.1.6. *A aplicação $\exp : X \mapsto \exp(X)$ é uma bijeção entre o espaço dos campos de vetores formais de ordem $r + 1 \geq 2$ e o espaço dos difeomorfismos formais tangentes à identidade com multiplicidade $r + 1$.*

Demonstração: Dado $X = \sum_{j=r+1}^{\infty} A_j z^j \frac{d}{dz}$, é fácil ver por indução que $\nu(X^n \cdot z) = nr + 1$ para $n \geq 2$.

De acordo com o teorema 1.1.4, se escrevermos $f(z) = \exp(X)(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ temos

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n \cdot z.$$

Como $r + 2 \leq nr + 1$ para todo $n \geq 2$ escrevemos

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j = z + X \cdot z + O(z^{r+2}) = z + A_{r+1} z^{r+1} + O(z^{r+2}).$$

Portanto $a_0 = 0$; $a_1 = 1$; $a_j = 0$ para $j = 2, \dots, r$ e $a_{r+1} = A_{r+1}$. Como $\nu_n := \nu(X^n \cdot z)$ é estritamente crescente, a_j , com $j \geq r + 2$, é bem determinado por um polinômio nas constantes A_m . Mas as constantes A_m , com $m \geq j + 1$, não podem aparecer na expressão de a_j pois são coeficientes de z^m com $m \geq j + 1$. Daí, $f = \exp(X)(z)$ é bem definida e é um difeomorfismo tangente à identidade de multiplicidade $r + 1$. Mostramos agora que a aplicação $X \mapsto \exp(X)$ pode ser formalmente invertida. Seja

$$f = z + \sum_{j=r+1}^{\infty} a_j z^j, \quad a_{r+1} \neq 0,$$

um difeomorfismo formal tangente à identidade. Se

$$X = \sum_{j=r+1}^{\infty} A_j z^j \frac{\partial}{\partial z},$$

a identidade $\exp(X) = f$ é equivalente a

$$a_{m+1} = A_{m+1} + TH_{m+1} \left(\sum_{j=2}^m \frac{1}{j!} X_m^j(z) \right)$$

onde $m \geq r$, $X_m = \sum_{j=r+1}^m A_j z^j \frac{\partial}{\partial z}$ e $TH_{m+1}(h)$ é o termo homogêneo de h de ordem $m + 1$. Estas equações determinam X de maneira única. \square

Estendemos a definição de $\exp(X)$ a campos de vetores formais: se X é um campo de vetores formal de ordem $\nu(X) \geq 2$, o fluxo para $t = 1$ de X é definido como

$$\exp(X)(z) := z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n \cdot z,$$

onde $X^n \cdot z := X \cdot (X^{n-1} \cdot z) = H(z) \frac{d}{dz} (X^{n-1} \cdot z)$, com $X \cdot z = H(z)$, sendo que a derivação é feita formalmente termo a termo. Então, pela proposição 1.1.6, temos a definição que se segue.

Definição 1.1.7. Dado um difeomorfismo formal tangente à identidade f , o gerador infinitesimal de f é o único campo de vetores formal X (de ordem $\nu(X) \geq 2$) tal que $f = \exp(X)$.

O teorema 1.1.6 mostra que existe uma bijeção entre difeomorfismos formais tangentes à identidade e campos de vetores formais X de ordem $\nu(X) \geq 2$. Se o campo for analítico o fluxo para $t = 1$ associado é também analítico. Mostremos que a recíproca deste fato é falsa ([2], pág 553).

Proposição 1.1.8. *Seja $f = z + z^2 + z^3 + \sum_{j=4}^{\infty} a_j z^j$ uma função inteira. Então o gerador infinitesimal de f não é analítico.*

Demonstração: Pela proposição 1.1.6 o gerador infinitesimal de f deve ser da forma $X = H(z) \frac{d}{dz}$ com $H = z^2 + a_3 z^3 + O(z^4)$. A igualdade $\exp(X)(z) = f(z)$ implica que $a_3 = 0$. Escrevendo

$$H(z) = z^2(1 + a_4 z^2 + \dots) = \frac{z^2}{1 + \lambda z + O(z^2)},$$

temos $1 + \lambda z + O(z^2) = 1$ logo $\lambda = 0$. Se X é analítico (veja teorema 1.1.9 e observação 1.1.10) existe uma mudança de coordenadas local e analítica tal que nas novas coordenadas $X(z)$ é dado por $W(z) = z^2 \frac{d}{dz}$. Isto implica que f e $\exp(W)$ são analiticamente

conjugados. Como $W^n \cdot z = n! z^{n+1}$ temos que $\exp(W)(z) = \sum_{j=1}^{\infty} z^j = \frac{z}{1-z}$.

Se existe uma mudança de coordenadas analítica local φ com $\varphi(0) = 0$ tal que $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(z) = \frac{z}{1-z}$ então para todo natural n existe $\delta_n > 0$ tal que para $|z| < \delta_n$, $\varphi^{-1} \circ f^{on} \circ \varphi = \left(\frac{z}{1-z}\right)^{on} = \frac{z}{1-nz}$. Logo para $|z| < \delta_n$,

$$f^{on} \circ \varphi(z) = \varphi\left(\frac{z}{1-nz}\right).$$

Isto vai ser usado para expandir φ na imagem de $|z| < \delta$ através da aplicação $z \mapsto \frac{z}{1-nz}$, pois o lado esquerdo está bem definido para $|z| < \delta$ e n arbitrário. Mais precisamente, seja $\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C}, |z| < \delta\}$. Tome Ω_n a imagem de Ω_0 na esfera de Riemann através da aplicação $z \mapsto \frac{z}{1-nz}$. Para n suficientemente grande Ω_n é o complemento na

esfera de Riemann de um disco pequeno $\Delta_n \subset \Omega_0$. O inverso da aplicação $z \mapsto \frac{z}{1-nz}$

é $z \mapsto \frac{z}{1+nz}$. Definimos em Ω_n a função $\tilde{\varphi}(z) = f^{(n)} \circ \varphi\left(\frac{z}{1+nz}\right)$. Numa vizinhança da origem temos que $\varphi = \tilde{\varphi}$, logo em todo ponto em $\Omega_0 - \Delta_n$ vale a mesma igualdade. Assim φ pode ser expandida (por $\tilde{\varphi}$) para uma função holomorfa na esfera de Riemann. Pelo teorema de Liouville φ deve ser constante, o que é uma contradição. \square

O próximo teorema fornece a classificação formal de sistemas tangentes à identidade usando a correspondência formal destes com os campos formais.

Teorema 1.1.9. *Seja f um difeomorfismo formal tangente à identidade. Existem $r \in \mathbb{N}$, e $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que f é formalmente conjugado ao fluxo para $t = 1$ do campo de vetores*

$$\chi_{r,\lambda}(z) = \frac{z^{r+1}}{1 + \lambda z^r} \frac{d}{dz}. \quad (1.4)$$

Mais ainda, r e λ são invariantes formais determinados unicamente por f .

Demonstração: Consideramos $f(z) = z + \sum_{j=r+1}^{\infty} a_j z^j$, com $a_{r+1} \neq 0$ e seja $X = H(z) \frac{d}{dz}$ o gerador infinitesimal de f . Fazendo mudança linear de coordenadas podemos considerar $H(z) = z^{r+1} + O(z^{r+2})$. Mostremos que existe uma mudança formal de coordenadas de forma que $X(z)$ seja dado por (1.4).

Utilizaremos a dualidade entre campos de vetores e formas diferenciais. Consideramos a 1-forma dual $\omega = \frac{dz}{H(z)}$ caracterizada por $\omega(X) \equiv 1$. Transformamos o problema de fazer mudança de coordenadas em campos de vetores no problema de fazer mudança de coordenadas nas 1-formas duais correspondentes.

Primeiro escrevemos

$$H(z) = z^{r+1}(1 + \alpha_1 z + \dots) = \frac{z^{r+1}}{1 + b_1 z + \dots + \lambda z^r + \dots},$$

logo

$$\frac{dz}{H(z)} = \left(\frac{1}{z^{r+1}} + \frac{b_1}{z^r} + \dots + \frac{\lambda}{z} + \dots \right) dz.$$

Assim, a forma $\frac{dz}{H(z)}$ tem polo de ordem $r+1$ na origem e resíduo λ . Estes são invariantes formais por pullback. Da dualidade entre campos de vetores formais e formas formais temos que r, λ são invariantes por mudança de coordenadas formais associados a $H(z)$.

Buscamos agora um difeomorfismo formal tangente à identidade φ tal que

$$\varphi^* \left(\frac{1 + \lambda w^r}{w^{r+1}} dw \right) = \frac{1}{H(z)} dz. \quad (1.5)$$

Escrevendo $\frac{dz}{H(z)} = \left(\lambda \frac{dz}{z} + d \frac{g(z)}{z^r} \right)$ temos

$$\varphi^* \left(\frac{dw}{w^{r+1}} + \frac{\lambda dw}{w} \right) = \left(\frac{\lambda}{\varphi} d\varphi + \frac{d\varphi}{\varphi^{r+1}} \right) = \left(\frac{\lambda dz}{z} + d \frac{g}{z^r} \right).$$

Se escrevermos $\varphi(z) = zu(z)$ teremos

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{uz}(u'z + u)dz + \frac{(u'z + u)}{(uz)^{r+1}}dz &= \frac{\lambda}{z}dz + d\frac{g}{z^r} \\ \Rightarrow d\frac{g}{z^r} &= \lambda[\log(u)]'dz + \frac{(u'z + u)}{(uz)^{r+1}}dz \\ \Rightarrow g + \frac{1}{ru^r} - \lambda z^r \log(u) &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Como $g(0) = 1/r$, se consideramos $h(z, u) = g(z) + \frac{1}{ru^r} - \lambda z^p \log(u)$ temos que $p = (0, 1)$ é solução de $h(z, u) = 0$ e $\frac{\partial h}{\partial u}(p) \neq 0$. Pelo teorema da função implícita (formal) a equação (1.5) tem uma única solução $u(z)$ tal que $u(0) = 1$, logo existe φ formal com $\varphi'(0) = 1$ que satisfaz (1.4). \square

Observação 1.1.10. Dado um difeomorfismo tangente à identidade f com invariantes formais r e λ (como no teorema anterior) e gerador infinitesimal X , a demonstração do teorema 1.1.9 garante que se X é analítico então X e $\chi_{r,\lambda}$ são analiticamente conjugados.

1.2 O teorema da flor

Nesta seção mostraremos como se comportam as órbitas de um difeomorfismo tangente à identidade numa vizinhança da origem.

Consideramos inicialmente um difeomorfismo f da forma

$$f(z) = z(1 + az^r)$$

para algum $a \neq 0$. Seja $v \in S^1 \subset \mathbb{C}$ tal que av^r é real positivo. Então para qualquer $c > 0$ temos

$$f(cv) = c(1 + c^r av^r)v \in \mathbb{R}^+v$$

e, mais ainda, $|f(cv)| > |cv|$. Em outras palavras a semirreta \mathbb{R}^+v é invariante por f e repelida pela origem. Por outro lado, se av^r é real negativo é fácil ver que o segmento $[0, |a|^{-1/r}]v$ é invariante por f e atraído pela origem. Este exemplo sugere a definição que se segue.

Seja $f \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ da forma

$$f(z) = z + a_{r+1}z^{r+1} + a_{r+2}z^{r+2} + \dots, \quad a_{r+1} \neq 0.$$

Um vetor unitário $v \in S^1$ é uma direção atratora (respectivamente, repulsora) para f na origem se $a_{r+1}v^r$ é real negativo (respectivamente, positivo). Claramente, há r direções atradoras igualmente espaçadas separadas por r direções repulsoras igualmente

espaçadas: se $a_{r+1} = |a_{r+1}|e^{i\alpha}$, então $v = e^{i\theta}$ é atratora (respectivamente, repulsora) se, e somente se,

$$\theta = \frac{2k+1}{r}\pi - \frac{\alpha}{r} \quad \left(\text{respectivamente, } \theta = \frac{2k}{r}\pi - \frac{\alpha}{r} \right).$$

Além disso, uma direção repulsora (atratora) para f é atratora (repulsora) para f^{-1} , que está definida numa vizinhança da origem. O teorema da flor descreve como a dinâmica de f em uma vizinhança da origem se organiza em torno dessas direções.

Teorema 1.2.1. (Teorema da flor) *Seja $f \in \text{Diff}_{r+1}(\mathbb{C}, 0)$. Então existem $2r$ regiões abertas simplesmente conexas, dispostas como pétalas de uma flor em torno da origem, centradas em direções atratoras e repulsoras, de forma que as órbitas de f são alternativamente atraídas ou repelidas pela origem.*

Mais precisamente, chamamos de V_k^+ , para $k = 0, \dots, r-1$ as pétalas centradas em direções atratoras. Fazendo mudança de coordenadas, estas coincidem com as r componentes conexas de $\{z \in U; z^r \notin \mathbb{R}^+\}$. Por outro lado, as r pétalas centradas em direções repulsoras, V_k^- , com $k = 0, \dots, r-1$, coincidem com as r componentes conexas de $\{z \in U; z^r \notin \mathbb{R}^-\}$. Além disso para $k = 0, \dots, r-1$ temos

$$\begin{aligned} f(V_k^+) \subset V_k^+ \quad , \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |f^{\circ n}|_{V_k^+} = 0 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f^{\circ n}}{|f^{\circ n}|} \rightarrow v_k^+; \\ f^{-1}(V_k^-) \subset V_k^- \quad , \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |f^{\circ(-n)}|_{V_k^-} = 0 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f^{\circ(-n)}}{|f^{\circ(-n)}|} \rightarrow v_k^-, \end{aligned}$$

onde v_k^+ são as direções atratoras associadas às respectivas pétalas V_k^+ e v_k^- são as direções repulsoras associadas às respectivas pétalas V_k^- .

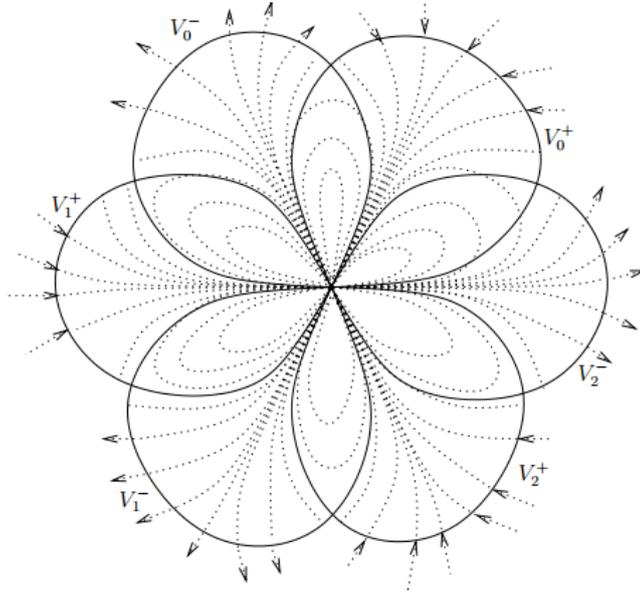


Figura 1.1: Flor de 6 pétalas, ilustrando as órbitas para um difeomorfismo tangente à identidade com multiplicidade 4. Figura retirada de [12], página 43.

Demonstração: A menos de conjugação linear podemos supor que $a_{r+1} = -1$. A principal técnica da demonstração é fazer uma mudança de variável e trabalhar em uma vizinhança setorial do infinito.

Consideramos a variável $w := \varphi(z) = \frac{1}{rz^r}$. Quando w é suficientemente grande de modo que $\varphi^{-1}(w)$ pertença ao domínio de definição de f , a composição $F = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ faz sentido e temos

$$F(w) = w + 1 + \epsilon(w), \quad (1.7)$$

onde $|\epsilon(w)| = O(w^{-1/r})$. Se $\text{Re}(w)$ é suficientemente grande então

$$\text{Re}(F(w)) > \text{Re}(w) + \frac{1}{2}.$$

Isto implica que o semiplano $H_R = \{w \in \mathbb{C}; \text{Re}(w) > R\}$, com R grande o suficiente, é invariante por F . Além disso, temos por indução que

$$\forall w \in H_R, \quad \text{Re}(F^{\circ k}(w)) > \text{Re}(w) + \frac{k}{2},$$

o que implica que $F^{\circ k}(w) \rightarrow \infty$ em H_R quando $k \rightarrow \infty$. Observamos agora que o argumento de $w_k = F^{\circ k}(w)$ tende a zero. De fato, (1.7) nos dá

$$\frac{w_k}{k} = \frac{w}{k} + 1 + \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} O(w_l^{-1/r}).$$

O teorema de Cesàro implica que

$$\frac{w_k}{k} \rightarrow 1,$$

logo $\arg(w_k) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

Consideramos a vizinhança setorial do infinito $D_+(a, R) = \{w \in \mathbb{C}; |\arg(w - R)| < a\}$, com $0 < a < \pi$ e $R > 0$. Para ε dado podemos escolher a e R suficientemente grandes tais que em $D_+(a, R)$ tenhamos

$$|F(w) - w - 1| \leq \varepsilon/2$$

e, além disso, $F(D_+(a, R)) \subset D_+(a, R)$. Assim, toda órbita que começa em $D_+(a, R)$ entra em H_R . As pétalas atratoras são obtidas fazendo $\varphi^{-1}(D_+(a, R))$. As pétalas repulsoras são obtidas fazendo mesmo raciocínio para f^{-1} . Neste último caso elas são pré-imagens de vizinhanças setoriais do infinito da forma $D_-(a, R) = \{w \in \mathbb{C}; |\arg(w + R) - \pi| < a\}$. \square

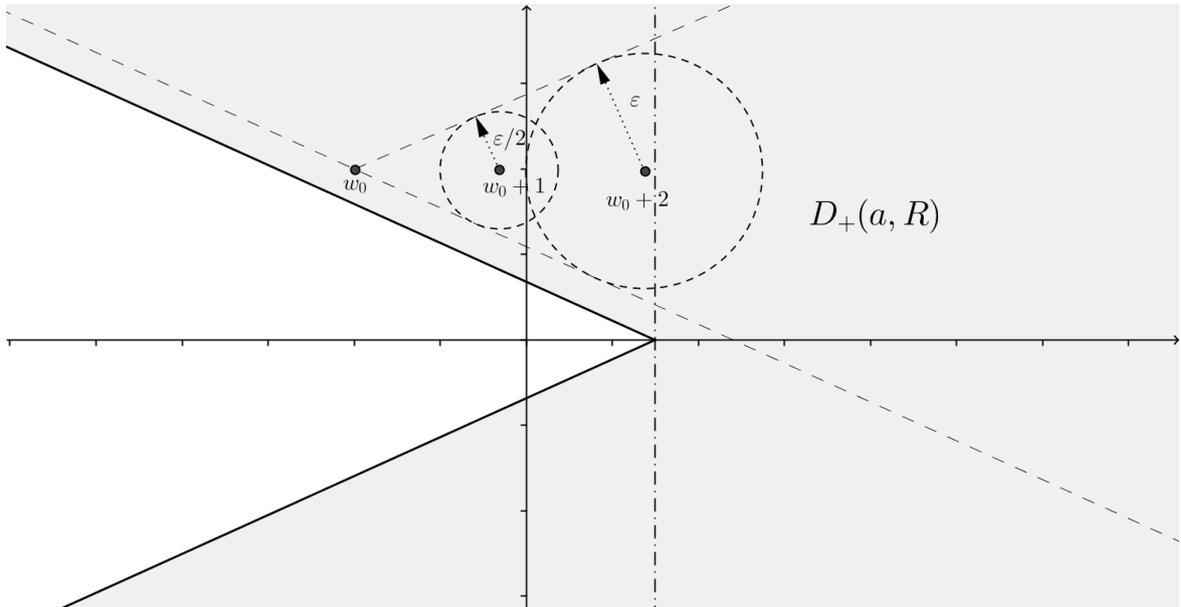


Figura 1.2: A vizinhança setorial do infinito $D_+(a, R)$ é construída de modo a ser F -invariante.

1.3 A classificação analítica

Apresentamos nesta seção a classificação analítica dos difeomorfismos tangentes à identidade. Na classificação formal vimos que há um número finito de invariantes formais. Agora veremos que dado um difeomorfismo tangente à identidade existem infinitos invariantes analíticos dados pelos coeficientes de uma série de Fourier.

Consideramos $f \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ da forma

$$f(z) = z + z^2 + z^3 + \sum_{j=4}^{\infty} a_j z^j.$$

Se considerarmos a variável $w := 1/z$, temos que em $D_+(a, R)$ o difeomorfismo é dado por

$$F(w) = w + 1 + \epsilon(w)$$

onde $\text{Res}(\epsilon(w), 0)$ é nulo. Por simplicidade faremos a classificação analítica para difeomorfismos pertencentes à classe de conjugação formal de f que será chamada de *classe de ordem 2 sem resíduos*. O resultado geral é análogo.

O passo inicial para classificação analítica é mostrar que em $D_+(a, R)$ o sistema é analiticamente conjugado a uma translação.

Teorema 1.3.1. *Seja $F(w) = w + 1 + \epsilon(w)$, com $\epsilon(w) = \sum_{n=2}^{+\infty} k_n w^{-n}$ holomorfa numa vizinhança do infinito. Para $a \in]0, \pi[$ fixado, e R suficientemente grande existe uma única função Φ^+ holomorfa em $D_+(a, R) = \{w \in \mathbb{C}; |\arg(w - R)| < a\}$ possuindo as seguintes propriedades:*

(i) $\Phi^+(w) = w + \psi^+(w)$, com $\psi^+(w) \rightarrow 0$ se $w \rightarrow \infty$;

(ii) $\Phi^+ \circ F = g \circ \Phi^+$, onde $g(w) = w + 1$.

Além disso, se $k_n = 0$ para $n \leq m$ então $\psi^+(w) = O(w^{-m})$ quando $w \rightarrow \infty$.

A demonstração será baseada nos seguintes lemas:

Lema 1.3.2. *Se $R \geq 1$ existe $c > 0$ tal que em $D_+(a, R)$ vale*

$$\sum_{p=0}^{\infty} \left| \frac{1}{p+w} \right|^{m+1} \leq \frac{c}{|w|^m}. \quad (1.8)$$

Demonstração: Consideramos primeiro um w qualquer em $D_+(a, R)$ tal que $\text{Re}(w) \geq 0$. Neste caso a função

$$h(x) = \left| \frac{1}{w+x} \right|$$

é decrescente em $[0, +\infty)$. Logo

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{\infty} \left| \frac{1}{w+p} \right|^{m+1} &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{[(\operatorname{Im}w)^2 + (\operatorname{Re}w + p)^2]^{(m+1)/2}} \\
&\leq \frac{1}{|w|^{m+1}} + \int_0^{\infty} \frac{1}{[(\operatorname{Im}w)^2 + (\operatorname{Re}w + x)^2]^{(m+1)/2}} dx \\
&\leq \frac{1}{|w|^{m+1}} + \int_0^{\infty} \frac{2^{(m+1)/2}}{[|\operatorname{Im}w| + \operatorname{Re}w + x]^{(m+1)}} dx \\
&\leq \frac{1}{|w|^{m+1}} + \frac{2^{(m+1)/2}}{m(|\operatorname{Im}w| + \operatorname{Re}w)^m} \\
&\leq \frac{1}{|w|^m} \left(\frac{1}{|w|} + \frac{2^{(m+1)/2}}{m} \right) \leq \frac{c_0}{|w|^m}.
\end{aligned}$$

Se w está em uma das componentes conexas de $\{\operatorname{Re}(w) < 0\} \cap D_+(a, R)$ existe $\gamma > 0$ tal que

$$|\operatorname{Re}(w) - R| \leq \gamma |\operatorname{Im}(w)|.$$

Disto, temos que $|w| < \sqrt{\gamma^2 + 1} |\operatorname{Im}(w)|$, isto é, existe $\alpha > 0$ tal que $|w| < \alpha |\operatorname{Im}(w)|$. Além disso, a função

$$t(x) = \frac{1}{|\operatorname{Im}(w) + x|^{m+1}}$$

é decrescente em $[0, +\infty)$. Logo temos

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{\infty} \left| \frac{1}{w+p} \right|^{m+1} &\leq 2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{|\operatorname{Im}w + p|^{(m+1)}} \\
&\leq \frac{2}{|\operatorname{Im}w|^{m+1}} + 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{(|\operatorname{Im}w|^2 + x^2)^{(m+1)/2}} dx \\
&\leq \frac{2}{|\operatorname{Im}w|^{m+1}} + 2 \int_0^{\infty} \frac{2^{(m+1)/2}}{(|\operatorname{Im}w| + x)^{(m+1)}} dx \\
&\leq 2^{(m+3)/2} \left[\frac{1}{|\operatorname{Im}w|^{m+1}} + \frac{1}{m|\operatorname{Im}w|^m} \right] \\
&\leq \frac{2^{(m+3)/2}}{\alpha^m |w|^m} \left(\frac{1}{\alpha|m|} + \frac{1}{m} \right) \leq \frac{c_1}{|w|^m}.
\end{aligned}$$

O lema fica provado tomando $c = \max\{c_0, c_1\}$. □

Lema 1.3.3. *Existem $A > 0$, $0 < a < \pi$ e $R \geq 1$ tal que F é definida em $D_+(a, R)$ e se verifica*

$$\sup\{|\epsilon(w')|; |w - w'| \leq 1\} \leq \frac{A}{|w|^{m+1}}. \quad (1.9)$$

Demonstração: Escrevendo $w' = w + \rho$ com $|\rho| \leq 1$, tomando a apropriado e R suficientemente grande, existe uma constante L tal que

$$\left| \frac{w}{w + \rho} \right| \leq \frac{1}{1 - \frac{|\rho|}{|w|}} \leq L.$$

Logo

$$|\epsilon(w')| = |\epsilon(w + \rho)| \leq \frac{M}{(|w + \rho|)^{m+1}} \leq \frac{ML^{m+1}}{(|w|)^{m+1}}.$$

O resultado segue, então, com $A = ML^{m+1}$. \square

Observação 1.3.4. Aumentando possivelmente R , podemos supor ainda, por conta de (1.8), que

$$A \sum_{p=0}^{\infty} \left| \frac{1}{w + p} \right|^{m+1} \leq 1. \quad (1.10)$$

Corolário 1.3.5. *Em $D_+(a, R)$, as iteradas $F^{\circ p}$ estão definidas e existe $K > 0$ tal que valem as desigualdades*

$$S_p(w) := |F^{\circ p}(w) - (w + p)| \leq \frac{K}{|w|^m} \quad \forall \quad p.$$

Demonstração: Primeiro mostremos que existe C tal que

$$S_p(w) \leq C \sum_{q=0}^{p-1} \left| \frac{1}{w + q} \right|^{m+1}.$$

Procederemos fazendo indução em p . Inicialmente temos que $S_1(w) = \epsilon(w) = O\left(\frac{1}{|w|^{m+1}}\right)$, isto é, existe $A' > 0$ tal que $S_1(w) \leq A'/|w|^{m+1}$. Tome então $C = \max\{A, A'\}$.

Suponhamos agora que a desigualdade vale para p . Temos que

$$F^{\circ(p+1)}(w) = F \circ F^{\circ p}(w) = F^{\circ p}(w) + 1 + \epsilon \circ F^{\circ p}(w).$$

Pela hipótese de indução e por (1.10) temos $|F^{\circ p}(w) - (w + p)| \leq 1$. Disto, concluímos que $F^{\circ p}(w) \in D_+(a, R)$ e de (1.9):

$$|\epsilon \circ F^{\circ p}(w)| \leq \frac{C}{|w + p|^{m+1}}.$$

Usando novamente a hipótese de indução temos

$$|F^{\circ(p+1)}(w) - (w + p + 1)| \leq |F^{\circ p}(w) - (w + p)| + |\epsilon \circ F^{\circ p}(w)| \leq C \sum_{q=0}^p \left| \frac{1}{w + q} \right|^{m+1}.$$

Finalmente, o corolário segue de (1.8). □

Demonstração do Teorema 1.3.1. A equação $\Phi^+ \circ F = g \circ \Phi^+$ se escreve como $\psi^+ \circ F + \epsilon = \psi^+$. Verificamos que $\psi^+ = \sum_{p=0}^{\infty} \epsilon \circ F^{\circ p}$ satisfaz formalmente a equação. A sequência das somas parciais da série de funções acima é dada por

$$S_p(w) = \sum_{j=0}^p \epsilon \circ F^{\circ j}(w) = F^{\circ p}(w) - (w + p).$$

Pelo corolário 1.3.5 é possível escolher a e R de modo que em $D_+(a, R)$ vale a estimativa

$$|S_p(w)| \leq \frac{K}{|w|^m},$$

o que garante a convergência de ψ^+ .

Para provar a unicidade suponhamos que existem ψ_1 e ψ_2 tais que

$$\psi_1 \circ F + \epsilon = \psi_1 \quad \text{e} \quad \psi_2 \circ F + \epsilon = \psi_2.$$

Então

$$(\psi_1 - \psi_2) \circ F = \psi_1 - \psi_2.$$

Suponhamos que $\psi_1 - \psi_2$ satisfaz a condição acima com $\psi_1(w) - \psi_2(w) \rightarrow 0$ quando $w \rightarrow \infty$. Neste caso, se $\psi_1(w_0) - \psi_2(w_0) \neq 0$, por iteração teríamos que $(\psi_1 - \psi_2) \circ F^{\circ p}(w_0) = \psi_1(w_0) - \psi_2(w_0)$, o que é uma contradição, pois o corolário 1.3.5 garante que se $p \rightarrow \infty$, $F^{\circ p}(w_0) \rightarrow \infty$. □

Mostraremos agora que a função Φ^+ definida em $D_+(a, R)$ como no teorema anterior possui no infinito uma aproximação formal de acordo com a definição a seguir.

Definição 1.3.6. Seja $f : V \subset \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ uma função holomorfa em uma vizinhança setorial do infinito V . Dada uma série formal $\tilde{f}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^{-n}$, dizemos que f é assintótica a \tilde{f} no infinito quando para todo n existe $A_n > 0$ tal que

$$\left| f(w) - \sum_{r=0}^{n-1} a_r w^{-r} \right| \leq A_n |w|^{-n}$$

para $w \in V$. Quando existe a série \tilde{f} com esta propriedade dizemos que f possui desenvolvimento assintótico no infinito.

Proposição 1.3.7. A função Φ^+ do teorema 1.3.1 possui desenvolvimento assintótico no infinito.

Demonstração: Por coeficientes indeterminados existe uma única série formal $\hat{\Phi}$ da forma $\hat{\Phi}(w) = w + \sum_{n=1}^{\infty} c_n w^{-n}$ tal que se verifica $\hat{\Phi} \circ F = g \circ \hat{\Phi}$, onde $g(w) = w + 1$. Fixado p , para mostrar que

$$\left| \Phi^+(w) - \sum_{n=0}^{p-1} c_n w^{-n} \right| \leq A_p |w|^{-p},$$

observamos primeiro que o teorema 1.3.1 estabelece a desigualdade no caso particular em que $\epsilon(w) = F(w) - w - 1$ se anula no infinito na ordem $p + 2$. Para o caso geral basta substituir F por $\Phi_q \circ F \circ \Phi_q^{-1}$, com $\Phi_q = w + \sum_{n=1}^q c_n w^{-n}$, e $q \gg p$. \square

Observação 1.3.8. Operando da mesma forma com F^{-1} e g^{-1} no lugar de F e g encontraremos uma função Φ^- , única da forma $w + \psi^-(w)$, holomorfa em $D_-(a, R)$ tal que $\Phi^- \circ F^{-1} = g^{-1} \circ \Phi^-$ e $\psi^-(w) \rightarrow 0$ quando $w \rightarrow \infty$. Além disso, Φ^- terá a série $\hat{\Phi}$ como desenvolvimento assintótico no infinito.

Observação 1.3.9. Toda solução formal \hat{u} da equação $\hat{u} \circ F = g \circ \hat{u}$ pode ser obtida a partir de $\hat{\Phi}(w) = w + \sum_{n=1}^{\infty} c_n w^{-n}$. Se \hat{u} é solução, então

$$\hat{u}(w) = w + c + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (w + c)^{-n},$$

onde c é um número complexo arbitrário. Omitimos a demonstração, que pode ser feita por coeficientes indeterminados.

Invariantes analíticos

A base para a busca de invariantes analíticos está no fato de que Φ^+ e Φ^- não coincidem nas duas componentes conexas de $D_+(a, R) \cap D_-(a, R)$.

Consideramos a composição $\Psi = \Phi^+ \circ (\Phi^-)^{-1}(w) = w + \Sigma(w)$. A priori, Ψ está definida em $\beta = D_-(a, R) \cap \Phi^-(D_+(a, R))$. Este conjunto tem duas componentes conexas, uma superior e outra inferior, que denominaremos β^{sup} e β^{inf} ($\Phi^-(D_+(a, R))$ é uma vizinhança setorial do infinito do mesmo tipo que $D_+(a, R)$). Assim, obtemos duas funções analíticas Σ^{sup} e Σ^{inf} . As relações de conjugação

$$\Phi^+ \circ F = \Phi^+ + 1 \quad \text{e} \quad \Phi^- \circ F^{-1} = \Phi^- - 1$$

nos dão

$$\Sigma(w + 1) = \Sigma(w).$$

Assim Σ^{sup} e Σ^{inf} são ambas 1-periódicas. Mais ainda, sabemos que estas funções tendem a 0 quando $\text{Im}(w) \rightarrow \pm\infty$. Obtemos, então, duas séries de Fourier:

$$\Sigma^{\text{sup}}(w) = \Psi(w) - w = \sum_{m \leq -1} B_m e^{-2\pi m w}, \quad \text{Im}(w) > \kappa_0, \quad (1.11)$$

$$\Sigma^{\text{inf}}(w) = \Psi(w) - w = \sum_{m \geq 1} B_m e^{-2\pi m w}, \quad \text{Im}(w) < -\kappa_0, \quad (1.12)$$

que são convergentes para $\kappa_0 > 0$ grande o suficiente. O problema da classificação analítica está resolvido com o seguinte teorema:

Teorema 1.3.10. *Dois difeomorfismos tangentes à identidade pertencentes à classe de ordem 2 sem resíduo são analiticamente conjugados se, e somente se, eles definem o mesmo par de séries de Fourier ($\Sigma^{\text{sup}}, \Sigma^{\text{inf}}$) a menos de uma mudança de variáveis $w \mapsto w + c$.*

Demonstração: Consideramos os sistemas F_1 e F_2 satisfazendo $\Sigma_2^{\text{sup}}(w) = \Sigma_1^{\text{sup}}(w + c)$ e $\Sigma_2^{\text{inf}}(w) = \Sigma_1^{\text{inf}}(w + c)$, com $c \in \mathbb{C}$. Em β^{sup} e em β^{inf} temos

$$\Psi_2 = \tau^{-1} \circ \Psi_1 \circ \tau,$$

onde $\tau(w) = w + c$, $\Psi_2 = \Phi_2^+ \circ \Phi_2^-$ e $\Psi_1 = \Phi_1^+ \circ \Phi_1^-$.

Sejam $\hat{\Phi}_1$ o desenvolvimento assintótico de Φ_1^+ e Φ_1^- e $\hat{\Phi}_2$ o desenvolvimento assintótico de Φ_2^+ e Φ_2^- . Temos que $\hat{\Phi}_2^{-1} \circ \tau^{-1} \circ \hat{\Phi}_1$ conjuga formalmente F_1 e F_2 . Isto significa que as funções $(\Phi_2^+)^{-1} \circ \tau^{-1} \circ \Phi_1^+$ e $(\Phi_2^-)^{-1} \circ \tau^{-1} \circ (\Phi_1^-)^{-1}$ podem ser coladas dando origem a uma conjugação analítica, pois $(\Phi_2^-)^{-1} = (\Phi_2^-)^{-1} \circ \tau^{-1} \circ \Phi_1^+ \circ (\Phi_1^-)^{-1} \circ \tau$.

Por outro lado, se existe $h \in \text{Id} + \mathbb{C}\{w^{-1}\}$ tal que $F_2 \circ h = h \circ F_1$, temos que $h \circ \hat{\Phi}_1$ estabelece uma conjugação formal entre F_2 e $w \mapsto w + 1$. Pela observação 1.3.9 existe um $c \in \mathbb{C}$ tal que $\hat{\Phi}_2^{-1} = h \circ \hat{\Phi}_1^{-1} \circ \tau$ e $\hat{\Phi}_2 = \tau^{-1} \circ \hat{\Phi}_1 \circ h^{-1}$, com $\tau(w) = w + c$. Logo $(\Phi_2^\pm)^{-1} = h \circ (\Phi_1^\pm)^{-1} \circ \tau$ e $\Phi_2^\pm = h \circ \Phi_1^\pm \circ \tau$, e $\Phi^+ \circ \Phi^- = \tau^{-1} \circ \Phi_1^+ \circ (\Phi_1^-)^{-1} \circ \tau$, como o desejado. \square

Observação 1.3.11. Os coeficientes B_m das séries (1.11) e (1.12) são chamados de invariantes analíticos de F . Em [8], Écalle demonstrou que esse conjunto de invariantes é realizável, isto é, dado um par de séries de Fourier $(\Sigma^{\text{sup}}, \Sigma^{\text{inf}})$ como em (1.11) e (1.12) existe um difeomorfismo cujos invariantes analíticos associados são os coeficientes dessas séries.

Capítulo 2

O teorema de Camacho e Sad

O teorema de Camacho e Sad [4] garante a existência de separatrizes sobre singularidades de folheações holomorfas de dimensão um em variedades complexas de dimensão dois. O resultado será utilizado no próximo capítulo para provar a existência de curvas parabólicas para difeomorfismos tangentes à identidade em dimensão dois com ponto fixo isolado. Para demonstrar o teorema utilizaremos o teorema de Seidenberg [15], também conhecido como teorema da redução de singularidades. Tomamos [15] e [5] como referências básicas deste capítulo .

2.1 Preliminares

2.1.1 Folheações singulares

Seja M uma variedade complexa de dimensão m . Uma folheação holomorfa de dimensão k , \mathbb{F} , é um atlas holomorfo $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha); \alpha \in I\}$ de M tal que toda carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in A$ satisfaz:

(i) $\varphi_\alpha(U_\alpha) = A_\alpha \times B_\alpha$ onde A_α e B_α são abertos de \mathbb{C}^k e \mathbb{C}^{m-k} respectivamente;

(ii) Para todo $(x_\beta, y_\beta) \in \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, $x_\beta \in \mathbb{C}^k$, $y_\beta \in \mathbb{C}^{m-k}$, a mudança de cartas $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ satisfaz

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x_\beta, y_\beta) = (f_{\alpha\beta}(x_\beta, y_\beta), g_{\alpha\beta}(y_\beta)).$$

Cada carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ é chamada de *carta distinguida* da folheação \mathbb{F} . Os subconjuntos de U da forma $\varphi_\alpha^{-1}(A_\alpha \times \{b\})$ são chamados de *placas* da carta distinguida $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$.

Consideramos em M a relação de equivalência que identifica dois pontos $p, q \in M$ se, e somente se, existe uma cadeia finita de placas P_1, \dots, P_r de \mathbb{F} tal que $p \in P_1$, $q \in P_r$

e $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset, \forall i$. As folhas de \mathbb{F} são as classes de equivalência de M por esta relação.

Dada M uma variedade complexa de dimensão m e \mathbb{F} uma folheação de dimensão k sobre M , \mathbb{F} é dita *folheação singular de dimensão k sobre M* se existe um conjunto analítico $\text{Sing}(\mathbb{F}) \subset M$ de dimensão menor ou igual a $m - 2$ tal que $\mathbb{F}|_{M \setminus \text{Sing}(\mathbb{F})}$ é uma folheação de dimensão k sobre $M \setminus \text{Sing}(\mathbb{F})$. O conjunto $\text{Sing}(\mathbb{F})$ é chamado *conjunto singular de \mathbb{F}* .

Neste texto nos preocuparemos com folheações singulares de dimensão 1 em variedades de dimensão 2. Podemos caracterizá-las através de famílias de campos de vetores, conforme o teorema seguinte (veja [15]).

Teorema 2.1.1. *Seja M uma variedade complexa de dimensão dois e \mathbb{F} uma folheação holomorfa singular sobre M . Existem coleções $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\{g_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset}$, tais que*

(i) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma cobertura de $M \setminus \text{Sing}(\mathbb{F})$ por abertos;

(ii) Para todo α , X_α é um campo de vetores holomorfo não identicamente nulo sobre U_α ;

(iii) Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $g_{\alpha\beta}$ é uma função holomorfa não nula em $U_\alpha \cap U_\beta$ tal que

$$X_\alpha = g_{\alpha\beta} \cdot X_\beta \quad \text{em} \quad U_\alpha \cap U_\beta;$$

(iv) $\text{Sing}(\mathbb{F}) = \cup_{\alpha \in A} \text{Sing}(X_\alpha)$, onde $\text{Sing}(X_\alpha) = \{p \in U_\alpha \mid X_\alpha(p) = 0\}$.

Nas condições do teorema acima, tomando um refinamento da cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, se necessário, podemos supor que para todo $\alpha \in A$, U_α é o domínio de uma carta local $\varphi_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha) : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^2$. Para todo α , podemos escrever $X_\alpha = a_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + b_\alpha \frac{\partial}{\partial y_\alpha}$. Consideramos a 1-forma ω_α dual de X_α , definida por:

$$\omega_\alpha = -b_\alpha dx_\alpha + a_\alpha dy_\alpha.$$

Temos, então, que $\omega_\alpha \cdot X_\alpha \equiv 0$. Não é difícil ver que $\omega_\alpha = h_{\alpha\beta} \omega_\beta$, onde $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta}$, sendo $D_{\alpha\beta}$ o determinante da matriz jacobiana da mudança de coordenadas $\varphi_\alpha \circ (\varphi_\beta)^{-1}$. Podemos, então, caracterizar as folheações singulares em variedades de dimensão 2 utilizando a linguagem de formas diferenciais de acordo com o seguinte corolário:

Corolário 2.1.2. *Sejam M uma variedade complexa de dimensão 2 e \mathbb{F} uma folheação singular de M . Existem coleções $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\{\omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\{h_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset}$, tais que:*

(i) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma cobertura aberta de M .

(ii) Para todo α , ω_α é uma 1-forma holomorfa não identicamente nula sobre U_α .

(iii) Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ então $h_{\alpha\beta}$ é uma função holomorfa não nula em $U_\alpha \cap U_\beta$ e

$$\omega_\alpha = h_{\alpha\beta}\omega_\beta.$$

(iv) $\text{Sing}(\mathbb{F}) = \cup_{\alpha \in A} \text{Sing}(\omega_\alpha)$, onde $\text{Sing}(\omega_\alpha) = \{p \in U_\alpha; \omega_\alpha(p) = 0\}$.

Neste capítulo vamos estudar folheações de dimensão 1 com singularidades isoladas. Se quisermos estudar uma folheação numa vizinhança de um ponto m , os resultados anteriores permitem escolher uma carta local $((x, y), U) \ni m$ e trabalhar com um campo de vetores da forma

$$X_m = p(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + q(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

ou com a 1-forma dual

$$\omega_m = -q(x, y)dx + p(x, y)dy.$$

Chamaremos X_m e ω_m de *geradores locais de \mathbb{F} em m* .

2.1.2 Separatrizes

Dada uma folheação holomorfa singular \mathbb{F} em $(\mathbb{C}^2, 0)$ de dimensão 1 com singularidade isolada na origem, o teorema de Camacho e Sad garante a existência de separatrizes pela origem conforme a definição a seguir.

Definição 2.1.3. Seja \mathbb{F} folheação holomorfa singular definida numa variedade M de dimensão 2. Uma separatriz de \mathbb{F} por m é uma curva $h : B_\varepsilon \rightarrow M$ analítica, irreduzível tal que se H é a imagem de h temos $m \in H$ e $H \setminus \{m\}$ é uma folha de \mathbb{F} .

Como aplicação do teorema dos zeros de Hilbert (veja [5]), temos que a curva h é uma separatriz de \mathbb{F} por m se, e somente se, h divide $\omega \wedge dh$, onde ω é um gerador local de \mathbb{F} em m . Equivalentemente, existe um germe de 2-forma η tal que

$$\omega \wedge dh = h\eta.$$

O resultado acima permite-nos definir separatrizes formais:

Definição 2.1.4. Seja \mathbb{F} uma folheação singular numa variedade M de dimensão 2. Uma separatriz formal de \mathbb{F} por m é uma curva formal h definida em B_ε tal que $h(0) = m$ e h divide (formalmente) a 2-forma $\omega \wedge dh$, onde ω é um gerador local de \mathbb{F} em m .

As separatrizes de uma folheação singular \mathbb{F} de dimensão 1 podem ser parametrizadas, de acordo com o seguinte teorema ([4]):

Teorema 2.1.5. (Puiseux) Consideramos $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; f(x, y) = 0\}$ uma curva analítica em um aberto $U \subset \mathbb{C}^2$ com $(0, 0) \in C$. Então, a menos de difeomorfismos locais em \mathbb{C} , existe uma única parametrização analítica $t \in B_\varepsilon \mapsto (a(t), b(t))$ da forma

$$a(t) = t^n, \quad b(t) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r t^r,$$

para algum $n \in \mathbb{N}$, tal que $f(a(t), b(t)) \equiv 0$ e

$$\min\{\nu_0(a(t)), \nu_0(b(t))\} = \nu_0(f(x, y)),$$

onde $\nu_0(p)$ é a ordem de p na origem.

A parametrização local $(a(t), b(t))$ do teorema acima é chamada de *parametrização primitiva* de C .

2.1.3 Explosões

Definimos o espaço projetivo de dimensão 1, $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, como

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 = \frac{\mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}}{\sim},$$

onde \sim é a relação de equivalência definida por $(a, b) \sim (c, d)$ se existe $u \in \mathbb{C}^*$ tal que $(a, b) = u(c, d)$. A classe de (a, b) é denotada por $(a : b)$ e pode ser vista como a reta de \mathbb{C}^2 que passa pela origem e por (a, b) . O espaço $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ é, então, o conjunto de retas de \mathbb{C}^2 que passam pela origem. Este espaço pode, de maneira natural, ser identificado com a esfera de Riemann $\bar{\mathbb{C}}$.

Vamos construir agora uma variedade $\tilde{\mathbb{C}}^2 \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ que contém o espaço projetivo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ e uma aplicação analítica sobrejetiva $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ chamada de *blow-down*.

Definição 2.1.6. Seja $\tilde{\mathbb{C}}^2$ a variedade complexa definida como

$$\tilde{\mathbb{C}}^2 = \{(x, y), (a : b) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1; ay = bx\}.$$

O *blow-down* $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ é definido como a projeção

$$\pi((x, y), (a : b)) = (x, y).$$

Observamos que $\pi^{-1}(0, 0) \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Chamaremos $D = \pi^{-1}(0, 0)$ de divisor excepcional de $\tilde{\mathbb{C}}^2$.

Vemos claramente que a aplicação

$$\pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D} : \tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

é um biholomorfismo. A última coordenada de $\tilde{\mathbb{C}}^2$ depende das duas primeiras, então podemos cobrir $\tilde{\mathbb{C}}^2$ utilizando duas cartas, $U \simeq \mathbb{C}^2$ e $V \simeq \mathbb{C}^2$ com coordenadas (x, t) e (s, y) , respectivamente. A primeira carta $((x, t), U)$ cobre pontos de $\tilde{\mathbb{C}}^2$ da forma $(x, tx, (1 : t))$ e a segunda carta $((s, y), V)$ cobre os pontos da forma $(sy, y, (s : 1))$. Logo

$$\pi(x, t) = (x, tx) \quad \text{em} \quad ((x, t), U) \quad \text{e} \quad \pi(s, y) = (sy, y) \quad \text{em} \quad ((s, y), V).$$

Dado um aberto M de \mathbb{C}^2 com $0 \in M$, a formalização feita acima permite-nos construir uma variedade $M_1 = \pi^{-1}(M)$ também de dimensão 2 isomorfa a M fora da origem. Este processo é chamado de *explosão de M na origem*, denotado por Π e pode ser iterado: começamos com um aberto M contendo a origem; fazendo a primeira explosão na origem obtemos uma variedade M_1 e uma aplicação de blow-down $\pi_1 : M_1 \rightarrow M$ com divisor $D_1 = \pi_1^{-1}(0)$. Em seguida, fixamos $q_1 \in M_1$ e da explosão de M_1 no ponto q_1 obtemos uma variedade M_2 e uma aplicação de blow-down $\pi_2 : M_2 \rightarrow M_1$ com divisor D_2 . Prosseguindo indutivamente, após n explosões obteremos uma variedade M_n e uma aplicação de blow-down, $\pi_n : M_n \rightarrow M_{n-1}$, com divisor D_n . Uma sequência de n explosões será denotada por Π^n e chamada de *processo de explosão*.

O divisor D^n do processo de explosão Π^n é definido indutivamente da seguinte maneira: $D^1 = D_1$ e $D^n = D_n \cup \pi_n^{-1}(D^{n-1})$. Se definirmos $\Phi_n = \pi_n \circ \dots \circ \pi_1 : M_n \rightarrow M$ temos que $\Phi_n|_{M_n \setminus D^n} : M_n \setminus D^n \rightarrow M \setminus \Phi_n(D^n)$ é um biholomorfismo.

Podemos verificar sem grande dificuldade que o divisor D^n é, de fato, uma união de n curvas complexas, todas difeomorfas a $\overline{\mathbb{C}}$. Assim, por exemplo, na segunda explosão, se $q_1 \in D_1$ teremos que $D^2 = D_2 \cup \pi_2^{-1}(D_1)$. Temos ainda que $\pi_2^{-1}(D_1) \simeq \overline{\mathbb{C}}$ e que D_2 corta $\pi_2^{-1}(D_1)$ transversalmente num único ponto, ou seja, D^2 é a união de dois espaços projetivos mergulhados em M_2 com um único ponto em comum. Por abuso de linguagem, usaremos a mesma notação para D_i e a suas sucessivas pré-imagens por π_i, \dots, π_n . Com esta convenção, podemos dizer que $D^n = \cup_{j=1}^n D_j$.

No caso em que para todo $i = 1, \dots, n-1$ a i -ésima explosão for feita em um ponto de D^i , o divisor D_i corta um outro transversalmente num único ponto, o qual chamaremos de esquina de D^n , de tal forma que se $D_{i_1} \cap D_{i_2} \neq \emptyset, \dots, D_{i_{m-1}} \cap D_{i_m} \neq \emptyset$ então $D_{i_1} \cap D_{i_m} = \emptyset$. Um tal processo será chamado de *processo de explosão da origem*. Se nestas mesmas condições, a sequência de explosões for infinita temos um *processo infinito de explosão da origem* que será denotado por Π^∞ .

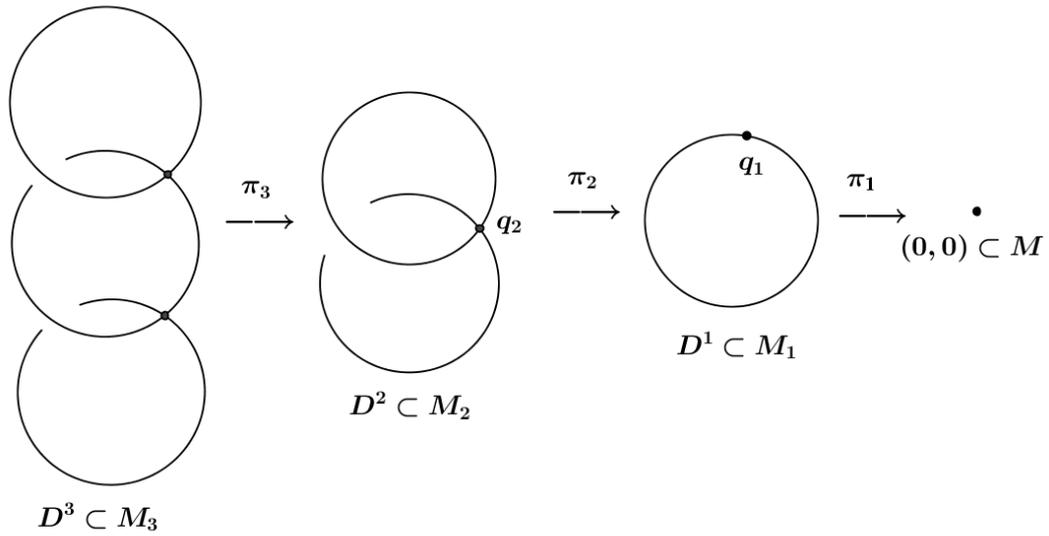


Figura 2.1: Ilustração de um processo de explosão da origem. Fazemos, primeiramente, explosão na origem, que está contida num aberto M , gerando $M_1 \supset D_1$. Posteriormente, fazemos explosão sobre um ponto q_1 de D^1 gerando $M_2 \supset D^2 = D_1 \cup D_2$. A última explosão é feita sobre a esquina q_2 de D^2 gerando $M_3 \supset D^3 = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ que contém duas esquinas.

2.1.4 O efeito de uma explosão sobre uma folheação

Seja \mathbb{F} uma folheação em $(\mathbb{C}^2, 0)$ com singularidade na origem. Consideramos o campo $X = p(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + q(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ como gerador local de \mathbb{F} na origem, ou equivalentemente a 1-forma dual $\omega = -q(x, y)dx + p(x, y)dy$. Podemos escrever o desenvolvimento de Taylor de ω em $(0, 0)$ como:

$$\omega = \sum_{j=k}^{\infty} -q_j(x, y)dx + p_j(x, y)dy,$$

onde p_j e q_j são polinômios homogêneos de grau j , com p_k ou q_k não identicamente nulos. Fazendo uma explosão Π na origem obtemos a aplicação de blow-down π . Ao

escrevermos $\pi^*(\omega)$ na carta $((x, t), U)$ temos

$$\begin{aligned}\pi^*(\omega) &= \sum_{j=k}^{\infty} -q_j(x, tx)dx + p_j(x, tx)d(tx) \\ &= x^k \sum_{j=k}^{\infty} x^{j-k} [(tp_j(1, t) - q_j(1, t))dx + xp_j(1, t)dt].\end{aligned}$$

Podemos ainda dividir a forma acima por x^k e obter

$$(*) \quad x^{-k}\pi^*(\omega) = (tp_k(1, t) - q_k(1, t))dx + xp_k(1, t)dt + x\alpha,$$

onde α é a 1-forma

$$\alpha(x, t) = \sum_{j=k+1}^{\infty} x^{j-k-1} [(tp_j(1, t) - q_j(1, t))dx + xp_j(1, t)dt].$$

Definindo $r(x, y) = yp_k(x, y) - xq_k(x, y)$ temos que

$$x^{-k}\pi^*(\omega) = r(1, t)dx + xp_k(1, t)dt + x\alpha.$$

Analogamente, calculando $\pi^*(\omega)$ na carta $((s, y), V)$, obtemos:

$$(**) \quad y^{-k}\pi^*(\omega) = r(s, 1)dy - yq_k(s, 1)ds + y\beta$$

onde β é uma 1-forma. Chamamos o polinômio r de *cone tangente de ω* . Temos dois casos a considerar:

(I) Caso dicrítico: $r \equiv 0$. A explosão Π é chamada de explosão dicrítica e o divisor D^1 é chamado de divisor dicrítico. As formas $(*)$ e $(**)$ ainda podem ser divididas por x e y respectivamente. Neste caso temos

$$\omega_1 = x^{-k-1}\pi^*(\omega) = p_k(1, t)dt + (tp_{k+1}(1, t) - q_{k+1}(1, t))dx + x\alpha_1(x, t) \text{ em } ((x, t), U);$$

$$\omega'_1 = y^{-k-1}\pi^*(\omega) = -q_k(s, 1)ds + (p_{k+1}(s, 1) - sq_{k+1}(s, 1))dy + y\beta_1(s, t) \text{ em } ((s, y), V),$$

expressões que não podem mais ser divididas por x ou y , respectivamente. A folheação definida em M_1 dada nas cartas $((x, t), U)$ e $((s, y), V)$ por ω_1 e ω'_1 é chamada *transformada estrita* de \mathbb{F} por Π e denotada por \mathbb{F}^1 . Ao trabalharmos na primeira carta temos que fora do divisor $D^1 = \pi^{-1}(0, 0)$ as folhas de \mathbb{F} e \mathbb{F}^1 são coincidentes. Nos pontos sobre o divisor $(0, t_0)$ tais que $p_k(1, t_0) \neq 0$ as folhas de \mathbb{F}^1 são transversais ao divisor. Os pontos $(0, t_0)$ tais que $p_k(1, t_0) = 0$ são os pontos singulares de \mathbb{F}^1 , ou os pontos de tangência das folhas de \mathbb{F}^1 com o divisor. Assim cada folha transversal ao divisor dá origem a uma separatriz local de \mathbb{F} por blow-down. Portanto uma singularidade dicrítica

possui uma infinidade de separatrizes. Na segunda carta temos um raciocínio análogo.

(II) Caso não dicrítico: $r \neq 0$. A explosão Π é chamada de explosão não dicrítica e o divisor D^1 é chamado de divisor não dicrítico. As formas (*) e (**) não podem mais ser divididas por x ou y , respectivamente. A folheação definida em M_1 dada nas cartas $((x, t), U)$ e $((s, y), V)$ por (*) e (**) é chamada *transformada estrita* de \mathbb{F} por Π e denotada por \mathbb{F}^1 . Ao trabalharmos na primeira carta temos que fora do divisor $D^1 = \pi^{-1}(0, 0)$ as folhas de \mathbb{F} e \mathbb{F}^1 são coincidentes e o divisor $(x = 0)$ é uma separatriz de \mathbb{F}^1 . As singularidades sobre o divisor são as raízes de $tp_k(1, t) - q_k(1, t) = 0$, mais a origem da segunda carta, caso 0 seja raiz de $r(s, 1)$. Assim \mathbb{F}^1 possui $k+1$ singularidades, contadas com multiplicidade, sobre o divisor. Se alguma das singularidades de \mathbb{F}^1 sobre D^1 possui uma separatriz h então $\pi \circ h$ será separatriz de \mathbb{F} em $(0, 0)$. Por outro lado se \mathbb{F} possui uma separatriz h pela origem temos que após explosão a curva h cruzará o divisor transversalmente em pontos singulares de \mathbb{F}^1 . Logo para buscarmos separatrizes de \mathbb{F} devemos buscar separatrizes de \mathbb{F}^1 sobre as singularidades do divisor D^1 .

Dado um processo de explosão Π^n definimos a folheação \mathbb{F}^n em M_n chamada de *transformada estrita de \mathbb{F} por Π^n* indutivamente da seguinte maneira: \mathbb{F}^n é a transformada estrita de \mathbb{F}^{n-1} e \mathbb{F}^1 é a transformada estrita de \mathbb{F} .

2.1.5 O efeito de uma explosão sobre uma curva

Seja $(h = 0)$ uma equação irredutível de uma curva Γ tal que $(0, 0) \in \Gamma$. Ao escrevermos a função h como série de Taylor temos

$$h = h_\nu + h_{\nu+1} + \dots,$$

onde cada h_i é homogênea de grau i e ν é a ordem de h , ou seja, $h_\nu \neq 0$. Escrevemos

$$h_\nu(x, y) = \prod_{i=1}^k (y - l_i x)^{p_i}, \quad l_i \in \mathbb{C}, \quad \nu = \sum_{i=1}^k p_i,$$

e consideramos Π a explosão da origem com a aplicação de blow-down π . Então na primeira carta $(y = tx)$ temos

$$h \circ \pi(x, t) = x^\nu \tilde{h}(x, t), \quad \tilde{h}(x, t) = \prod_{i=1}^k (t - l_i)^{p_i} + x(\dots).$$

Segue que $h \circ \pi$ se anula na união de D^1 com $\tilde{h} = 0$. A *transformada estrita de Γ por Π* é a curva definida por $(\tilde{h} = 0)$.

Dada uma curva Γ em $(\mathbb{C}^2, 0)$, se fizermos explosão na origem obtemos a transformada estrita Γ_1 na variedade M_1 . Dado um processo de explosão Π^n definimos a curva Γ_n em M_n chamada de *transformada estrita de Γ por Π^n* indutivamente da seguinte maneira: Γ_n é a transformada estrita de Γ_{n-1} e Γ_1 é a transformada estrita de Γ .

Proposição 2.1.7. *Seja \mathbb{F} uma folheação em $(\mathbb{C}^2, 0)$ e Γ uma curva irredutível passando pela origem de $(\mathbb{C}^2, 0)$. Seja Π a explosão da origem e Γ_1 a transformada estrita de Γ por Π . Suponhamos que Γ seja descrita por $(h = 0)$ e que $\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ seja uma parametrização primitiva de Γ . Nestas condições, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Γ é uma separatriz de \mathbb{F} pela origem.

(ii) $\gamma^*\omega = 0$.

(iii) Γ_1 é uma separatriz de \mathbb{F}^1 passando por $\Gamma_1 \cap D^1$.

Demonstração: Seja $\omega = -q(x, y)dx + p(x, y)dy$ um gerador local de \mathbb{F} . Temos que h divide $\omega \wedge dh$ se, e somente se, h divide

$$\left[-q(x, y) \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) - p(x, y) \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) \right] dx \wedge dy,$$

o que equivale a dizer que h divide

$$\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} -q(x, y) & p(x, y) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) \end{vmatrix}.$$

Derivando $h(\alpha(t), \beta(t)) = 0$ temos

$$\left\langle \left(\frac{\partial h}{\partial x}(\alpha(t), \beta(t)), \frac{\partial h}{\partial y}(\alpha(t), \beta(t)) \right), (\alpha'(t), \beta'(t)) \right\rangle = 0.$$

Como também $\langle (-\beta'(t), \alpha'(t)), (\alpha'(t), \beta'(t)) \rangle = 0$, temos que

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}(\alpha(t), \beta(t)), \frac{\partial h}{\partial y}(\alpha(t), \beta(t)) \right) \quad \text{e} \quad (-\beta'(t), \alpha'(t))$$

são proporcionais.

Assim, se vale (i) então $\Delta(\alpha(t), \beta(t)) = 0$. Logo

$$\begin{vmatrix} -q(\gamma(t)) & p(\gamma(t)) \\ -\beta'(t) & \alpha'(t) \end{vmatrix} = 0,$$

o que implica que $\gamma^*\omega = 0$.

Se vale (ii) temos que $\Delta(\gamma(t)) = 0$, logo $\Delta(\alpha(t), \beta(t)) = h(\alpha(t), \beta(t))\eta(\alpha(t), \beta(t))$, sendo η uma 2-forma. Portanto $\Delta(x, y) = h(x, y)\eta(x, y)$ para todo (x, y) tal que $h(x, y) = 0$. O teorema dos zeros de Hilbert garante que $h(x, y)$ divide $\Delta(x, y)$.

Para mostrar a equivalência entre (ii) e (iii) basta observarmos que Γ_1 possui uma parametrização γ' tal que $\pi \circ \gamma' = \gamma$. \square

2.2 O teorema de Seidenberg

Seja \mathbb{F} uma folheação em $(\mathbb{C}^2, 0)$ com singularidade na origem. O teorema de Seidenberg mostra que dado um processo infinito de explosão da origem Π^∞ tal que toda explosão é feita sobre uma singularidade, existe um n_0 tal que todas singularidades em M_n com $n \geq n_0$ são simples, no sentido da definição seguinte. No restante do capítulo \mathbb{F} será uma folheação singular em uma variedade de dimensão 2 e Π^∞ um processo infinito de explosão da origem tal que as explosões são feitas sobre singularidades.

Definição 2.2.1. Seja $\omega = -q(x, y)dx + p(x, y)dy$ um gerador local de uma folheação \mathbb{F} que possui singularidade na origem. A origem é uma singularidade simples de \mathbb{F} se a matriz jacobiana

$$J_0(\omega; x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x}(0) & \frac{\partial p}{\partial y}(0) \\ \frac{\partial q}{\partial x}(0) & \frac{\partial q}{\partial y}(0) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

possui autovalores λ, μ tais que $\lambda \neq 0$ e $\mu/\lambda \notin \mathbb{Q}_{>0}$.

A definição anterior não depende da escolha de coordenadas (x, y) nem da escolha do gerador ω . Assim, dada uma singularidade m sempre podemos fazer uma mudança de coordenadas e admitir que $m = (0, 0)$.

Se a singularidade é simples então é possível diagonalizar a matriz (2.1), isto é, podemos fazer uma mudança linear de coordenadas de modo que o gerador local ω seja da forma

$$\omega = [-\alpha y + \tilde{q}(x, y)]dx + [x + \tilde{p}(x, y)]dy \quad (2.2)$$

com $\nu(\tilde{p}) \geq 2$ e $\nu(\tilde{q}) \geq 2$.

A proposição seguinte mostra que as singularidades simples são estáveis por explosão, isto é, explosões centradas em singularidades simples geram divisores com singularidades simples. Além disso, as explosões sobre singularidades simples são sempre não dicríticas.

Proposição 2.2.2. *Seja Π a explosão da origem. Suponhamos que \mathbb{F} tenha singularidade simples na origem e sejam $\{\alpha, 1/\alpha\}$ os quocientes dos autovalores λ e μ da matriz (2.1) (isto é, $\alpha = \mu/\lambda$). Então:*

(i) Π é não dicrítica;

(ii) A folheação \mathbb{F}^1 possui exatamente duas singularidades em D^1 , ambas simples.

Demonstração: Por (2.2) podemos escolher coordenadas (x, y) de modo que o gerador local seja dado por

$$\omega = [-\alpha y + \tilde{p}(x, y)]dx + [x + \tilde{q}(x, y)]dy,$$

com $\nu(\tilde{p}) \geq 2$ e $\nu(\tilde{q}) \geq 2$. Vemos claramente que o cone tangente não é identicamente nulo. Fazendo a explosão $y = tx$ e considerando a primeira carta temos

$$\begin{aligned}\pi^*(\omega) &= [tx + t\tilde{p}(x, tx) - \alpha tx + \tilde{q}(x, tx)]dx + x[x + \tilde{p}(x, tx)]dt \\ &= x\{(1 - \alpha)t + xA(x, t)\}dx + x[1 + xB(x, t)]dt.\end{aligned}$$

A folheação \mathbb{F}^1 é localmente dada por

$$x^{-1}\pi^*(\omega) = [(1 - \alpha)t + xA(x, t)]dx + x[1 + xB(x, t)]dt.$$

Então, na carta $((x, t), U)$, $(0, 0)$ é a única singularidade e

$$J_0(x^{-1}\pi^*(\omega); x, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -A(0, 0) & \alpha - 1 \end{bmatrix},$$

logo $(0, 0)$ é singularidade simples. Analogamente, a origem será a única singularidade da outra carta e será simples. \square

Definição 2.2.3. Seja \mathbb{F} uma folheação em M com singularidade na origem. Consideremos $\omega = -q(x, y)dx + p(x, y)dy$ um gerador local de \mathbb{F} . A origem é uma singularidade pré-simples de \mathbb{F} se a matriz

$$J_0(\omega; x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x}(0) & \frac{\partial p}{\partial y}(0) \\ \frac{\partial q}{\partial x}(0) & \frac{\partial q}{\partial y}(0) \end{bmatrix}$$

não é nilpotente, isto é, se existe algum autovalor não nulo.

A definição acima faz sentido pois a condição sobre a matriz é independente da escolha de ω e das coordenadas (x, y) . Novamente, ao fazermos mudança de coordenadas qualquer singularidade pode ser tomada como a origem.

As próximas subseções estão dedicadas a demonstrar o teorema de Seidenberg:

Teorema 2.2.4. *Seja \mathbb{F} uma folheação em $(\mathbb{C}^2, 0)$ com singularidade na origem. Dado um processo infinito de explosão Π^∞ existe um n_0 tal que para $n \geq n_0$ todo ponto de $\text{Sing}(\mathbb{F}^n)$ é uma singularidade simples de \mathbb{F}^n .*

A demonstração será feita em duas etapas. A primeira etapa consiste na redução a singularidades pré-simples, nela provaremos a seguinte proposição:

Proposição 2.2.5. *Seja \mathbb{F} uma folheação em $(\mathbb{C}^2, 0)$ com singularidade na origem. Dado um processo infinito de explosão da origem Π^∞ existe um n_0 tal que para $n \geq n_0$ todo ponto de $\text{Sing}(\mathbb{F}^n)$ é uma singularidade pré-simples de \mathbb{F}^n .*

A demonstração será feita por absurdo. Para tal precisaremos de invariantes inteiros locais, de natureza geométrica, associados a uma singularidade, que decrescem a cada explosão. O teorema de Seidenberg será consequência, então, da seguinte proposição:

Proposição 2.2.6. *Seja \mathbb{F} uma folheação em $(\mathbb{C}^2, 0)$ que possui uma singularidade pré-simples na origem. Dado um processo infinito de explosão Π^∞ existe um n_0 tal que para $n \geq n_0$ todo ponto de $\text{Sing}(\mathbb{F}^n)$ é uma singularidade simples de \mathbb{F}^n .*

Demonstração: Podemos escolher um gerador ω e um sistema de coordenadas (x, y) tal que

$$\omega = [-\mu y + Q(x, y)]dx + [\lambda x + cy + P(x, y)]dy$$

com $\nu(Q) \geq 2$, $\nu(P) \geq 2$, $c \in \mathbb{C}$ e $\lambda \neq 0$ ou $\mu \neq 0$. Ao fazermos a explosão na origem temos, na primeira carta,

$$\omega_1 = \frac{\pi^*(\omega)}{x} = [t(\lambda - \mu) + ct^2 + xA(x, t)]dx + [x(\lambda + ct) + P(x, tx)]dt.$$

Logo $(0, 0)$ é a única singularidade sobre o divisor e

$$J_0(\omega_1; x, t) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ -A(0, 0) & \mu - \lambda \end{bmatrix}.$$

Como $\lambda \neq 0$ ou $\mu \neq 0$ segue que $\lambda \neq 0$ ou $-\lambda + \mu \neq 0$. Assim a classe de singularidades pré-simples é invariante por explosões. Dada uma singularidade pré-simples m , seja α um dos quocientes dos autovalores da matriz associada à singularidade. Definimos o *invariante de ressonância* como

$$\text{Ress}(\mathbb{F}, m) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \notin \mathbb{Q}_{>0} \\ p + q & \text{se } \alpha = p/q \in \mathbb{Q}_{>0} \text{ (fração irredutível)} \end{cases}$$

Uma singularidade pré-simples m é simples se, e somente se, $\text{Ress}(\mathbb{F}, m) = 0$. Além disso, o invariante de ressonância diminui estritamente a cada explosão feita sobre singularidades pré-simples que não são simples. Assim é possível obtermos apenas singularidades simples sobre o divisor fazendo um número finito de explosões sobre uma singularidade pré-simples. \square

2.2.1 Invariantes inteiros locais por explosões

Ordem de uma folheação em um ponto

Consideramos \mathbb{F} uma folheação em uma variedade M e m um ponto de M . Seja

$$\omega = -q(x, y)dx + p(x, y)dy$$

um gerador local em m . A ordem $\nu_m(\mathbb{F})$ da folheação \mathbb{F} em m é definida como

$$\nu_m(\mathbb{F}) = \min\{\nu_m(q), \nu_m(p)\}$$

A definição não depende da escolha do gerador ω . O ponto m é não singular se, e somente se, $\nu_m(\mathbb{F}) = 0$. Notemos também que quando m é uma singularidade pré-simples temos que $\nu_m(\mathbb{F}) = 1$.

Número de Milnor

Consideramos as curvas $a(x, y) = 0$ e $b(x, y) = 0$ que se intersectam em m , com a irredutível. Seja $\Phi(t) = (x(t), y(t))$ uma parametrização primitiva da curva ($a = 0$). Definimos a multiplicidade de interseção de a e b em m como

$$i(a, b; m) = \nu_m(b(x(t), y(t)))$$

A multiplicidade de interseção satisfaz, entre outras, as seguintes propriedades:

- $i(a, b; m) = i(b, a; m)$;
- $i(ac, b; m) = i(a, b; m) + i(c, b; m)$;
- $i(a, b; m) < +\infty$ se, e somente se, a e b não possuem fator comum;
- $i(a, b; m) = i(a - cb, b; m)$.

Seja Π uma explosão em m com aplicação de blow-down π . Consideramos um elemento $a \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tal que $m \in (a = 0)$ e m' um ponto do divisor $D^1 = \pi^{-1}(m)$. Seja $(f = 0)$ uma equação irredutível de D^1 em m' . A transformada estrita de a em m' é definida como

$$\text{str}(a, m') = \frac{f(a \circ \pi)}{x^{\nu_m(a)}}$$

Lema 2.2.7. (Fórmula de Noether) *Sejam a e b dois elementos de $\mathbb{C}\{x, y\}$ sem fator comum. Então vale a relação:*

$$i(a, b; m) = \nu_m(a)\nu_m(b) + \sum_{m' \in D^1} i(\text{str}(a, m'), \text{str}(b, m'); m')$$

Demonstração: Podemos supor que a é irredutível em $\mathbb{C}\{x, y\}$. A menos de uma mudança de coordenadas podemos considerar m' como origem da primeira carta da explosão e que a parametrização primitiva de $(a = 0)$ é dada por

$$\begin{cases} x = x(s) = s^n \\ y = y(s) \quad \text{onde} \quad \nu_0(y(s)) > n = \nu_m(a). \end{cases}$$

Logo temos

$$\nu_m(b(s^n, y(s))) = n\nu_m(b) + \nu_0(b'(s^n, y'(s))),$$

onde

$$b'(x, t) = x^{-\nu_m(b)}b(x, tx), \quad y'(s) = y(s)/s^n.$$

□

Definição 2.2.8. Se $\omega = -q(x, y)dx + p(x, y)dy$ é um gerador de \mathbb{F} em m , o número de Milnor $\mu_m(\mathbb{F})$ é por definição

$$\mu_m(\mathbb{F}) = i(-q, p; m).$$

O número de Milnor está bem definido pois independe da escolha do gerador ω .

Proposição 2.2.9. *Seja Π a explosão em um ponto m e denotemos $\nu = \nu_m(\mathbb{F})$. Se Π é não dicrítica então*

$$\mu_m(\mathbb{F}) = \nu^2 - (\nu + 1) + \sum_{m' \in D^1} \mu_{m'}(\mathbb{F}^1),$$

e se Π é dicrítica então

$$\mu_m(\mathbb{F}) = (\nu + 1)^2 - (\nu + 2) + \sum_{m' \in D^1} \mu_{m'}(\mathbb{F}^1).$$

Demonstração: Seja $\omega = -q(x, y)dx + p(x, y)dy$ um gerador local de \mathbb{F} em m . Fazendo uma mudança linear de coordenadas, podemos supor que o ponto ∞ da primeira carta não é um ponto singular de \mathbb{F}^1 e que $\nu_m(q) = \nu_m(p) = \nu$. Além disso, no caso dicrítico, podemos supor que x^2 não divide $p_\nu(x, y)$.

No caso não dicrítico temos

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\tilde{q}(x, t)dx + \tilde{p}(x, t)dt = \frac{tp(x, tx) - q(x, tx)}{x^k}dx + \frac{xp(x, tx)}{x^k}dt \\ &= \left[r(1, t) + \sum_{j=k+1}^{\infty} x^{j-k} [tp_j(1, t) - q_j(1, t)] \right] dx + \left[xp_k(1, t) + \sum_{j=k+1}^{\infty} x^{j-k+1} p_j(1, t) \right] dt. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} i(-\tilde{q}, \tilde{p}; m) &= i(\tilde{p}, -\tilde{q}; m) = i(x, -\tilde{q}; m) + i\left(\frac{p(x, tx)}{x^k}, -\tilde{q}; m\right) \\ &= i\left(x, -\tilde{q} - x\left(\sum_{j=k}^{\infty} x^{j-k}(tp_j(1, t) - q_j(1, t))\right); m\right) + i\left(\frac{p(x, tx)}{x^k}, -\tilde{q} - t\frac{p(x, tx)}{x^k}; m\right) \\ &= i(x, r(1, t); m) + i\left(\frac{p(x, tx)}{x^k}, \frac{-q(x, tx)}{x^k}; m\right). \end{aligned}$$

Usando a fórmula de Noether temos

$$\begin{aligned} \sum_{m' \in D^1} \mu_{m'}(\mathbb{F}^1) &= \sum_{m' \in D^1 \setminus \{\infty\}} \mu_{m'}(\mathbb{F}^1) = \sum_{m' \in D^1 \setminus \{\infty\}} i(-\tilde{q}, \tilde{p}; m') \\ &= \sum_{m' \in D^1 \setminus \{\infty\}} i(x, r(1, t); m) + i\left(\frac{p(x, tx)}{x^k}, \frac{-q(x, tx)}{x^k}; m\right) \\ &= i(p, -q; m) - \nu^2 + gr_t(r(1, t)) = \mu_m(\mathbb{F}) - \nu^2 + (\nu + 1). \end{aligned}$$

No caso dicrítico temos

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\tilde{q}(x, t)dx + \tilde{p}(x, t)dt = \frac{tp(x, tx) - q(x, tx)}{x^{k+1}}dx + \frac{p(x, tx)}{x^k}dt \\ &= \left\{ \sum_{j=k+1}^{\infty} x^{j-k-1}[tp_j(1, t) - q_j(1, t)] \right\} dx + \left\{ p_k(1, t) + \sum_{j=k+1}^{\infty} x^{j-k}p_j(1, t) \right\} dt.\end{aligned}$$

Usando a fórmula de Noether e o fato de x dividir $p(x, y)$ mas x^2 não, temos

$$\begin{aligned}\sum_{m' \in D^1} \mu_{m'}(\mathbb{F}^1) &= \sum_{m' \in D^1 \setminus \{\infty\}} i(-\tilde{q}, \tilde{p}; m) = \sum_{m' \in D^1 \setminus \{\infty\}} i(-x\tilde{q}, \tilde{p}; m) - i(x, \tilde{q}; m) \\ &= \sum_{m' \in D^1 \setminus \{\infty\}} i\left(-x\tilde{q} - \frac{tp(x, tx)}{x^k}, \frac{p(x, tx)}{x^k}; m\right) - i\left(x, \frac{p(x, tx)}{x^k}; m\right) \\ &= \sum_{m' \in D^1 \setminus \{\infty\}} i\left(-\frac{q(x, tx)}{x^k}, \frac{p(x, tx)}{x^k}, m\right) - i(x, p_k(1, t) + x(\dots); m) \\ &= i(-q, p; m) - \nu^2 - (\nu - 1) = \mu_m(\mathbb{F}) - (\nu + 1)^2 + (\nu + 2).\end{aligned}$$

□

Ordem de restrição

Dada uma curva Γ , escolhamos coordenadas em m tal que $\Gamma = (y = 0)$. Se $\omega = -q(x, y)dx + p(x, y)dy$ é um gerador local de \mathbb{F} , a ordem de restrição $\tau(\mathbb{F}, \Gamma; m)$ de Γ em m é definida como

$$\tau(\mathbb{F}, \Gamma; m) = \nu_0(-q(x, 0)).$$

Desta forma temos que $\tau(\mathbb{F}, \Gamma; m) = +\infty$, isto é, $q(x, 0) \equiv 0$ se, e somente se, Γ é uma separatriz de \mathbb{F} .

Proposição 2.2.10. *Seja Π a explosão em m e consideramos Γ_1 a transformada estrita de Γ por Π e m' a interseção de Γ_1 com o divisor D^1 . Pondo $\nu = \nu_m(\mathbb{F})$ e $\tau = \tau(\mathbb{F}, \Gamma; m)$ temos*

- $\tau(\mathbb{F}^1, \Gamma_1; m') = \tau - \nu$ se Π é não dicrítica
- $\tau(\mathbb{F}^1, \Gamma_1; m') = \tau - \nu - 1$ se Π é dicrítica.

Demonstração: Escolhamos coordenadas (x, y) tais que $\Gamma = (y = 0)$ e seja

$$\omega = -q(x, y)dx + p(x, y)dy$$

um gerador local de \mathbb{F} em m . Se o gerador de \mathbb{F}^1 em m' é dado por $\omega_1 = -q'(x, t)dx + p'(x, t)dt$, no caso não dicrítico temos que

$$-q'(x, y) = x^{-\nu}(-q(x, tx) + tp(x, tx)),$$

logo $\tau(\mathbb{F}^1, \Gamma_1; m') = \nu_0(-q'(x, 0)) = \tau - \nu$. No caso dicrítico

$$-q'(x, y) = x^{-\nu-1}(-q(x, tx) + tp(x, tx)),$$

logo $\tau(\mathbb{F}^1, \Gamma_1; m') = \tau - \nu - 1$. □

2.2.2 Redução a singularidades pré-simples

Com os invariantes numéricos ordem, número de Milnor e ordem de restrição provaremos a proposição 2.2.5, que juntamente com a proposição 2.2.6 concluirá a demonstração do teorema de Seidenberg.

Lema 2.2.11. *Seja $\mathbb{F} = \mathbb{F}_0$ uma folheação em $(\mathbb{C}^2, 0)$ e Γ_0 uma curva lisa formal em $(\mathbb{C}^2, 0)$. Consideramos Π^∞ um processo infinito de explosão de forma que a i -ésima explosão é feita em $m_i = \Gamma_i \cap \pi_i^{-1}(m_{i-1})$, onde Γ_i é a transformada estrita de Γ_{i-1} por \mathbb{F}^i . Suponhamos que m_i seja singularidade de \mathbb{F}_i para todo índice i . Então Γ_0 é uma separatriz formal de \mathbb{F} . Além disso, se toda explosão de Π^∞ é não dicrítica, existe um índice k tal que m_k é uma singularidade pré-simples de \mathbb{F}^k .*

Demonstração: Se Γ_0 não é uma separatriz formal de \mathbb{F} , a ordem de restrição $\tau(\mathbb{F}, \Gamma_0; 0)$ é finita. Como m_i é ponto singular de \mathbb{F}^i temos que $\nu_{m_i}(\mathbb{F}^i) \geq 1$ para todo i . Logo, pela proposição 2.2.10 temos que

$$\tau(\mathbb{F}^i, \Gamma_i, m_i) < \tau(\mathbb{F}^{i-1}, \Gamma_{i-1}; m_{i-1}) \quad \forall i \geq 1,$$

o que é uma contradição, pois τ nunca é negativo.

Se todas as explosões são não dicríticas podemos supor, a menos de uma explosão, que o divisor $(x = 0)$ e $\Gamma_0 = (y = 0)$ são separatrizes de \mathbb{F} . Um gerador local ω de \mathbb{F} se escreve como

$$\omega = -y\hat{q}(x, y)dx + x\hat{p}(x, y)dy,$$

onde y não divide $\hat{p}(x, y)$ e x não divide $-\hat{q}(x, y)$. Se $\nu = \nu_0(\mathbb{F}) = 1$ temos que $-\hat{q}(x, y)$ ou $\hat{p}(x, y)$ tem termo independente não nulo, logo a singularidade é pré-simples. Se $\nu \geq 2$, após a primeira explosão teremos

$$\omega_1 = -t\tilde{q}(x, t)dx + x\tilde{p}(x, t)dt,$$

com

$$\tilde{p}(x, t) = \frac{\hat{p}(x, tx)}{x^{\nu-1}}.$$

Se a ordem de \mathbb{F}^1 não é menor que a ordem de \mathbb{F} teremos que y divide \hat{p} , o que é uma contradição. Logo após um número finito de explosões a ordem será 1 e teremos o resultado. \square

Definição 2.2.12. Seja \mathbb{F} uma folheação em $(\mathbb{C}^2, 0)$. Consideramos Π^∞ um processo infinito de explosão tal que a i -ésima explosão é feita sobre $m_i \in \text{Sing}(\mathbb{F}^i)$. Para cada índice $i \geq 0$, denotamos por $e(D^i, m_i)$ o número de componentes irredutíveis não dicríticas de D^i por m_i . O invariante de controle I_i de \mathbb{F}^i em m_i é definido como

$$I_i = \mu_{m_i}(\mathbb{F}^i) - e(D^i, m_i).$$

Nas condições acima temos o seguinte lema:

Lema 2.2.13. Para cada $i \geq 1$ temos que:

(i) Se $e(D^i, m_i) = 2$ e $\nu_{m_i}(\mathbb{F}^i) = 1$, o ponto m_i é uma singularidade pré-simples de \mathbb{F}^i .

(ii) Se $\nu_{m_i}(\mathbb{F}^i) = 1$ e a explosão em m_i é dicrítica, o ponto m_i é uma singularidade pré-simples de \mathbb{F}^i .

(iii) Se m_i não é pré-simples então $I_i \geq I_{i+1}$. Além disso, a desigualdade é estrita se $\nu_{m_i}(\mathbb{F}^i) \geq 2$ ou se a explosão em m_i é dicrítica.

Demonstração:

(i) Se $e(D^i, m_i) = 2$ temos que m_i é uma esquina interseção de duas componentes não dicríticas. Então podemos supor que $(x = 0)$ e $(y = 0)$ são separatrizes de \mathbb{F}^i . Um gerador local de \mathbb{F}^i será dado por

$$\omega_i = -y\hat{q}(x, y)dx + x\hat{p}(x, y)dy. \quad (2.3)$$

Como $\nu_{m_i}(\mathbb{F}^i) = 1$ temos que $\hat{q}(0, 0) \neq 0$ ou $\hat{p}(0, 0) \neq 0$. Portanto a matriz $J_0(\omega_i; x, y)$ possui um autovalor não nulo.

(ii) Se a explosão em m_i é dicrítica existem duas separatrizes Γ_1 e Γ_2 que são transversais a D_{i+1} em pontos diferentes. Escolhemos um sistema de coordenadas em m_i tal que $\pi_{i+1}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ tem equação $xy = 0$. Como em (i), o gerador de \mathbb{F} será da forma (2.3), e como $\nu_{m_i}(\mathbb{F}^i) = 1$, m_i é singularidade pré-simples.

(iii) Temos

$$I_i - I_{i+1} = \mu_{m_i}(\mathbb{F}^i) - e(D^i, m_i) - \mu_{m_{i+1}}(\mathbb{F}^{i+1}) + e(D^{i+1}, m_{i+1}).$$

Denotamos $\nu = \nu_{m_i}(\mathbb{F}^i)$. Se a explosão em m_i é dicrítica,

$$I_i - I_{i+1} = \underbrace{(\nu + 1)^2 - (\nu + 2)}_{\Delta_1} + \underbrace{\left[-\mu_{m_{i+1}}(\mathbb{F}^{i+1}) + \sum_{m' \in D_{i+1}} \mu_{m'}(\mathbb{F}^{i+1}) \right]}_{\Delta_2} + \underbrace{e(D^{i+1}, m_{i+1}) - e(D^i, m_i)}_{\Delta_3}.$$

Mas pelo item (ii) vale que $\nu \geq 2$. Portanto $\Delta_1 \geq 5$, $\Delta_2 \geq 0$ e $\Delta_3 \geq -1$, logo $I_i > I_{i+1}$.
Se a explosão em m_i é não dicrítica,

$$I_i - I_{i+1} = \underbrace{\nu^2 - (\nu + 1)}_{\Theta_1} + \underbrace{\left[-\mu_{m_{i+1}}(\mathbb{F}^{i+1}) + \sum_{m' \in D_{i+1}} \mu_{m'}(\mathbb{F}^{i+1}) \right]}_{\Theta_2} + \underbrace{e(D^{i+1}, m_{i+1}) - e(D^i, m_i)}_{\Theta_3}.$$

Mostremos primeiro que $\Theta_2 + \Theta_3 \geq 1$. Se $e(D^i, m_i) = 0$ então $e(D^{i+1}, m_{i+1}) = 1$. Portanto $\Theta_2 \geq 0$ e $\Theta_3 \geq 1$. Se $e(D^i, m_i) = 1$ e $e(D^{i+1}, m_{i+1}) = 1$ teremos uma esquina em D_{i+1} que não é m_{i+1} , logo $\Theta_3 = 0$ e $\Theta_2 \geq 1$. Se $e(D^i, m_i) = 1$ e $e(D^{i+1}, m_{i+1}) = 2$ então $\Theta_2 \geq 0$ e $\Theta_3 = 1$. Se $e(D^i, m_i) = 2$ e $e(D^{i+1}, m_{i+1}) = 1$ teremos duas esquinas em D_{i+1} diferentes de m_{i+1} , logo $\Theta_2 \geq 2$ e $\Theta_3 = -1$. Por último, se $e(D^i, m_i) = 2$ e $e(D^{i+1}, m_{i+1}) = 2$ há uma esquina em D_{i+1} diferente de m_{i+1} , assim $\Theta_2 \geq 1$ e $\Theta_3 = 0$.

Caso $\nu = 1$ segue que $\Theta_1 = -1$ o que implica que $\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 \geq 0$. Por outro lado, se $\nu \geq 2$ então $\Theta_1 \geq 1$ o que implica que $\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 > 0$. Assim $I_i > I_{i+1}$ quando $\nu \geq 2$ e $I_i \geq I_{i+1}$ quando $\nu = 1$. \square

Podemos agora demonstrar a proposição 2.2.5: dada uma folheação \mathbb{F} em $(\mathbb{C}^2, 0)$ suponhamos que existe um processo infinito de explosão da origem Π^∞ tal que para todo i , a i -ésima explosão é feita sobre uma singularidade m_i de \mathbb{F}^i que não é pré-simples. Se uma quantidade infinita das explosões são dicríticas o invariante de controle I_i iria decrescer indefinidamente, o que não é possível. Se há uma quantidade finita de explosões dicríticas, a partir de um k_0 todas as explosões são não dicríticas. Supomos, então, que todas as explosões são não dicríticas. Como o invariante de controle não pode decrescer indefinidamente deverá se estabilizar. Portanto $I_i = I_{i+1}$ para todo i o que implica que $\nu_{m_i}(\mathbb{F}^i) = 1$. Como as singularidades m_i não são pré-simples a afirmação (i) do lema 2.2.13 garante que $e(E_i, m_i) = 1$ para todo i . Obtemos, então, uma sequência infinita de singularidades sobre componentes não dicríticas do divisor que não são esquinas, estas determinam uma curva formal não singular Γ nas condições do lema 2.2.11. O lema garante que existe um k tal que m_k é singularidade pré-simples de \mathbb{F}^k , o que é uma contradição.

2.3 O teorema de Briot-Bouquet

O teorema de Seidenberg mostra que dada uma folheação \mathbb{F} em $(\mathbb{C}^2, 0)$ podemos encontrar um processo de explosão da origem Π^n de modo que todas as singularidades de \mathbb{F}^n em M_n sejam simples. Dada uma singularidade simples p que não é esquina, sobre uma componente não dicrítica de D^n , o teorema de Briot-Bouquet nos dará condições para a existência de separatrizes por p transversais a D^n .

Definição 2.3.1. Consideramos \mathbb{F} uma folheação em $(\mathbb{C}^2, 0)$ com singularidade simples na origem. Podemos supor que

$$\omega = -q(x, y)dx + p(x, y)dy = [-\mu y + q'(x, y)]dx + [\lambda x + p'(x, y)]dy,$$

onde $\nu(p') \geq 2$ e $\nu(q') \geq 2$, e λ e μ são os autovalores da matriz $J_0(\omega; x, y)$. As direções dos autovetores associados a λ e μ são chamadas de *direções próprias* de \mathbb{F} . A direção própria associada ao autovalor λ (respectivamente μ) é uma *direção forte* se $\lambda \neq 0$ (respectivamente $\mu \neq 0$); caso contrário, será uma *direção fraca*.

Segue da definição anterior que uma singularidade simples possui pelo menos uma direção forte.

Teorema 2.3.2. (Briot-Bouquet) *Seja \mathbb{F} uma folheação em $(\mathbb{C}^2, 0)$ com singularidade simples na origem. Suponhamos que \mathbb{F} possui uma separatriz convergente não singular D pela origem. Então \mathbb{F} possui única separatriz formal Γ diferente de D pela origem. Além disso a curva formal Γ é lisa, transversal a D e seu espaço tangente $T_0\Gamma$ é uma direção própria para \mathbb{F} na origem. Se $T_0\Gamma$ é uma direção forte, a curva formal Γ é convergente.*

Demonstração: Escolhemos um sistema de coordenadas de modo que $D = (x = 0)$ e o gerador local de \mathbb{F} seja dado por

$$\omega = [-\mu y + q(x, y)]dx + x[\lambda + p(x, y)]dy, \quad (2.4)$$

com $\nu(p) \geq 2$ e $\nu(q) \geq 1$. Provemos primeiro a existência da curva formal lisa, transversal a D , cujo espaço tangente é uma direção própria de \mathbb{F} .

Consideramos uma curva formal

$$\gamma(t) = \left(t, \sum_{n \geq 2} a_n t^n \right).$$

A condição $\gamma^*\omega = 0$ é equivalente às equações

$$(n\lambda - \mu)a_n = P_n(a_2, a_3, \dots, a_{n-1}), \quad n \geq 2$$

sendo P_n polinômio nas variáveis a_2, a_3, \dots, a_{n-1} que depende unicamente dos coeficientes de ω . Como $n\lambda - \mu \neq 0$ para todo n , o coeficiente a_n é bem determinado. Temos ainda que $\lambda'(0) = (1, 0)$ é autovetor associado a λ . Logo Γ é lisa, transversal a D e seu espaço tangente na origem é uma direção própria de \mathbb{F} .

Provemos agora a unicidade. Ao fazermos uma mudança formal de coordenadas

$$(x, y) \mapsto \left(x, y - \sum_{n \geq 2} a_n x^n \right)$$

podemos supor que $\Gamma = (y = 0)$ é uma separatriz. O gerador local se escreve como

$$\omega = -y[\mu + \hat{q}(x, y)]dx + x[\lambda + \hat{p}(x, y)]dy,$$

com $\hat{p}(0, 0) = \hat{q}(0, 0) = 0$. Suponhamos que exista uma separatriz $\tilde{\Gamma}$ diferente de D e de $(y = 0)$. Então $\tilde{\Gamma}$ possui uma parametrização $\tilde{\gamma}$ dada por

$$\begin{cases} x = t^p \\ y = a_q t^q + a_{q+1} t^{q+1} + \dots, \quad a_q \neq 0 \end{cases}.$$

A condição de $\tilde{\Gamma}$ ser separatriz implica que $(q\lambda - p\mu)a_q = 0$, o que é uma contradição. A curva Γ é, então, única.

Resta provar agora a convergência quando $\lambda \neq 0$. Se $\lambda \neq 0$, o termo $\lambda + h(x, y)$ de (2.4) possui inverso multiplicativo, logo podemos escrever o gerador ω na forma

$$\omega = \left(-\frac{\mu}{\lambda} y + \sum_{n+m \geq 2} Q_{nm} x^n y^m \right) dx + x dy.$$

Vamos mostrar que a série $\sigma(t) = \sum_{n \geq 2} a_n t^n$ construída anteriormente é convergente.

Como $\gamma^* \omega = 0$, temos que

$$\left[-\frac{\mu}{\lambda} \sigma(t) + \sum_{n+m \geq 2} Q_{nm} t^n (\sigma(t))^m \right] + t \sigma'(t) = 0,$$

ou seja,

$$\sum_{n \geq 2} \left(-\frac{\mu}{\lambda} + n \right) a_n t^n + \sum_{n+m \geq 2} Q_{nm} t^n (\sigma(t))^m = 0.$$

Então

$$a_n \left(-\frac{\mu}{\lambda} + n \right) = P_n(\{Q_{ij}\}_{i+j \leq n}; \{a_s\}_{s \leq n-1}),$$

onde os P_n são polinômios nas variáveis $\{a_s\}$ e $\{A_{nm}\}$ com coeficientes inteiros positivos.
Seja

$$\alpha = \min \left\{ \left| -\frac{\mu}{\lambda} + n \right|; n = 2, 3, \dots \right\} > 0$$

e consideramos a equação implícita real

$$g(v, u) = 0, \quad \text{onde} \quad g(v, u) = \alpha v + \sum_{n+m \geq 2} |Q_{nm}| u^n v^m.$$

Temos que g é analítica, $g(0, 0) = 0$ e $\frac{\partial g}{\partial v}(0, 0) = \alpha \neq 0$. O teorema da função implícita garante que existe uma única função analítica b tal que $g(u, b(u)) = 0$. Necessariamente temos também que $b(0) = 0$. Escrevendo $(u) = \sum_{j \geq 2} b_j u^j$ temos

$$\alpha b(u) + \sum_{m+n} |Q_{nm}| u^n (b(u))^m = 0$$

logo

$$\alpha b_n = P_n(\{|Q_{ij}|\}_{i+j \leq n}, \{b_s\}_{s \leq n-1}),$$

onde P_n também tem coeficientes inteiros positivos. Temos então que $|a_n| \leq b_n$ para todo $n \geq 2$, e segue a convergência de σ . \square

Corolário 2.3.3. *Seja \mathbb{F} folheação em $(\mathbb{C}^2, 0)$ com singularidade simples na origem. Então \mathbb{F} possui exatamente duas separatrizes formais Γ_1 e Γ_2 . Elas são lisas, se cortam transversalmente e os respectivos espaços tangentes são direções próprias de \mathbb{F} . Além disso, a curva formal Γ_i será convergente se corresponder a uma direção forte.*

Demonstração: Ao fazermos explosão Π na origem teremos duas singularidades simples em D^1 . Como a explosão é não dicrítica, D^1 é uma separatriz passando por cada uma das singularidades. O teorema anterior garante que para cada singularidade existe uma outra separatriz, lisa, transversal ao divisor e que será convergente caso a direção própria correspondente seja forte. Estas separatrizes se projetam como separatrizes de \mathbb{F} na origem por blow-down. \square

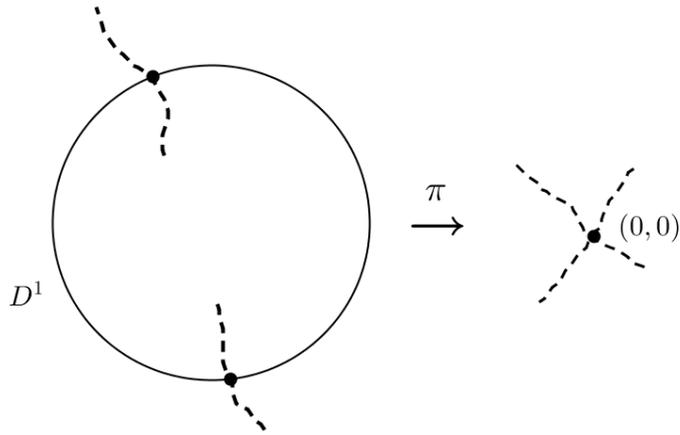


Figura 2.2: As linhas tracejadas sobre D^1 representam as separatrizes formais que se projetam por π em separatrizes formais pela origem.

2.4 A existência de separatrizes

Usaremos nesta seção a redução de singularidades e o teorema de Briot-Bouquet para provar o teorema de Camacho e Sad, que é o principal resultado do capítulo. A demonstração apresentada é devida à J. Cano (veja [6]).

Teorema 2.4.1. (Camacho e Sad) *Toda folheação \mathbb{F} em $(\mathbb{C}^2, 0)$ com singularidade na origem admite separatriz.*

Definição 2.4.2. Seja Γ uma separatriz não singular de \mathbb{F} . Suponhamos que $\Gamma = (y = 0)$. Temos que um gerador de \mathbb{F} é dado por

$$\omega = -y\tilde{q}(x, y)dx + p(x, y)dy, \quad \tilde{q}(x, y), p(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}.$$

O índice da separatriz Γ relativo a \mathbb{F} na origem é definido como:

$$I(\mathbb{F}; \Gamma, 0) = \text{Res} \left(\frac{\tilde{q}(x, 0)}{p(x, 0)}, 0 \right).$$

Um cálculo elementar mostra que $I(\mathbb{F}; \Gamma, 0)$ não depende da escolha de coordenadas (x, y) e nem do gerador local ω .

Proposição 2.4.3. *Seja Π uma explosão não dicrítica da origem de \mathbb{C}^2 , $D^1 \subset M_1$ o divisor, \mathbb{F}^1 a transformada estrita de \mathbb{F} por Π e Γ_1 a transformada estrita por Π da separatriz não singular Γ . Então*

- $\sum_{m' \in D^1} I(\mathbb{F}^1; D^1, m') = -1$

- $I(\mathbb{F}^1; \Gamma_1, q') = I(\mathbb{F}; \Gamma, 0) - 1$ onde $q' = \Gamma_1 \cap D^1$.

Demonstração: Se m' não é singularidade de \mathbb{F}^1 temos que $I(\mathbb{F}^1; D^1, m') = 0$. Escolhemos coordenadas tais que o ponto ∞ da primeira carta não seja um ponto singular de \mathbb{F}^1 . Se

$$\omega = -[q_\nu(x, y) + q_{\nu+1}(x, y) + \dots]dx + [p_\nu(x, y) + p_{\nu+1}(x, y) + \dots]dy,$$

na primeira carta da explosão temos que $D^1 = (x = 0)$ e

$$\omega_1 = [r(1, t) + x(\dots)]dx + x[p_\nu(1, t) + x(\dots)]dt.$$

Observamos que $p_\nu(1, t)$ é um polinômio de grau ν , pois x não divide $p_\nu(x, y)$, logo $r(1, t)$ tem grau $\nu + 1$ e o coeficiente de t^ν em $p_\nu(1, t)$ é o mesmo que o de $t^{\nu+1}$ em $r(1, t)$.

Dividindo ω por uma constante, podemos supor que

$$p_\nu(1, t) = t^\nu + \dots \quad \text{e} \quad r(1, t) = t^{\nu+1} + \dots$$

onde as reticências indicam termos de ordem superior. Seja $\gamma \subset \mathbb{C}$ um círculo que contém todas as raízes de $r(1, t)$ em seu interior. Pelo teorema dos resíduos,

$$\sum_{m' \in D^1} I(\mathbb{F}^1; D^1, m') = \sum_w \text{Res} \left(\frac{-p_\nu(1, t)}{r(1, t)}, w \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\gamma} -\frac{p_\nu(1, t)}{r(1, t)} dt = -1.$$

Para a segunda afirmação, consideramos $\Gamma = (y = 0)$. Um gerador local de \mathbb{F} é dado por

$$\omega = -y\tilde{q}(x, y)dx + p(x, y)dy.$$

Fazendo a explosão da origem temos, na primeira carta,

$$\omega_1 = t[-x\tilde{q}(x, tx) + p(x, tx)]dx + xp(x, tx)dt,$$

desta forma $\Gamma_1 = (t = 0)$ e $q' = \Gamma_1 \cap D^1 = (0, 0)$. Logo

$$I(\mathbb{F}^1; \Gamma_1, q') = \text{Res} \left(\frac{x\tilde{q}(x, 0) - p(x, 0)}{xp(x, 0)}, 0 \right) = I(\mathbb{F}, \Gamma, 0) - 1.$$

□

Lema 2.4.4. *Seja \mathbb{F} uma folheação em $(\mathbb{C}^2, 0)$ com singularidade simples na origem e sejam Γ_x e Γ_y as duas separatrizes formais tangentes às direções próprias L_x e L_y , respectivamente. Então,*

- Se L_x é uma direção fraca, então $I(\mathbb{F}; \Gamma_y, 0) = 0$.

- Se $\lambda\mu \neq 0$, então $I(\mathbb{F}; \Gamma_x, 0) \cdot I(\mathbb{F}; \Gamma_y, 0) = 1$.

Demonstração: Se L_x é uma direção fraca então L_y é uma direção forte, logo Γ_y é convergente. Para uma escolha de coordenadas conveniente podemos supor que $\Gamma_y = (y = 0)$ e que um gerador local de \mathbb{F} se escreve como

$$\omega = -y\tilde{q}(x, y)dx + p(x, y)dy,$$

com $\tilde{q}(0, 0) = 0$ e $p(x, 0) = xu(x)$, $u(0) \neq 0$. Como 0 é raiz de $\tilde{q}(x, 0)$ segue que $\tilde{q}(x, 0) = xv(x)$, logo

$$\frac{\tilde{q}(x, 0)}{p(x, 0)} = \frac{v(x)}{u(x)},$$

e portanto $I(\mathbb{F}; \Gamma_y, 0) = 0$.

Se $\lambda\mu \neq 0$, o teorema de Briot-Bouquet garante a existência de duas separatrizes convergentes transversais. Então podemos escrever um gerador local de \mathbb{F} como

$$\omega(x, y) = y[-\mu + \hat{q}(x, y)]dx + x[\lambda + \hat{p}(x, y)]dy,$$

com $\hat{q}(0, 0) = \hat{p}(0, 0) = 0$. Portanto

$$I(\mathbb{F}; \Gamma_x, 0) = \text{Res} \left(\frac{\lambda + \hat{p}(0, y)}{y\mu - y\hat{q}(0, y)}, 0 \right) = \frac{\lambda}{\mu}.$$

De maneira análoga $I(\mathbb{F}; \Gamma_y, 0) = \mu/\lambda$, logo $I(\mathbb{F}; \Gamma_x, 0) \cdot I(\mathbb{F}; \Gamma_y, 0) = 1$. □

Definição 2.4.5. Dada uma folheação \mathbb{F} em $(\mathbb{C}^2, 0)$, seja \mathbb{F}^n a transformada estrita de \mathbb{F} em M_n por um processo de explosão Π^n . Suponhamos que o divisor D^n de M_n não possui componentes dicríticas. Dizemos que o par (\mathbb{F}^n, D^n) satisfaz a propriedade (\star) num ponto m de D^n se uma das condições seguintes é satisfeita:

(\star_1) O ponto m pertence a exatamente uma componente irredutível de D^n , denotada por D_m e

$$I(\mathbb{F}^n; D_m, m) \notin \mathbb{Q}_{\geq 0};$$

(\star_2) O ponto m pertence a duas componentes irredutíveis D_m^+ e D_m^- de D^n e existe um número real $a > 0$ tal que

$$(\star_{2,1}) \quad I(\mathbb{F}; D_m^+, m) \in \mathbb{Q}_{\leq -a}$$

e

$$(\star_{2,2}) \quad I(\mathbb{F}; D_m^-, m) \notin \mathbb{Q}_{\geq -\frac{1}{a}}.$$

Observação 2.4.6. Se m é uma singularidade simples que satisfaz a propriedade (\star) , pelo lema 2.5.4 m não é uma esquina e a direção própria transversal ao divisor é forte.

Lema 2.4.7. *Suponhamos que (\mathbb{F}^n, D^n) satisfaz a propriedade (\star) em um ponto m da componente D_m de D^n . Consideramos a explosão em m com aplicação de blow-down π_{n+1} e suponhamos que a explosão é não dicrítica. Então existe um ponto q' de $D_{m+1} = \pi^{-1}(m)$ tal que $(\mathbb{F}^{n+1}, D^{n+1})$ satisfaz a propriedade (\star) em q' .*

Demonstração: Procederemos por absurdo. Se m não é esquina, tome $m' = D_m \cap D_{m+1}$ (figura 2.3).

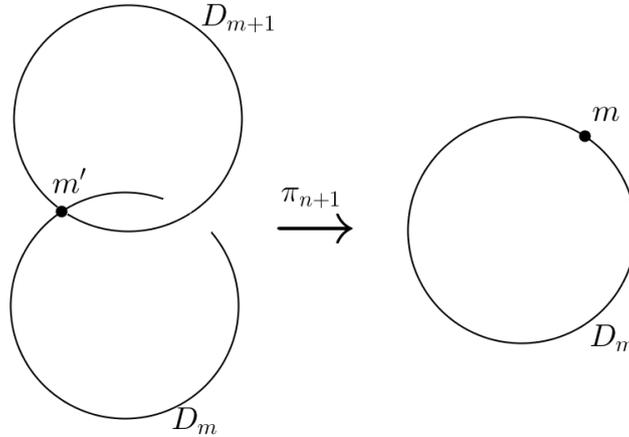


Figura 2.3: Explosão não dicrítica centrada em m gera o divisor D_{m+1} e a esquina m' .

Para cada q' de D_{m+1} distinto de m' temos que $I(\mathbb{F}^{n+1}; D_{m+1}, q') \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Pela proposição 2.4.3 temos que

$$I(\mathbb{F}^{n+1}; D_{m+1}, m') + \sum_{q' \neq m'} I(\mathbb{F}^{n+1}; D_{m+1}, q') = -1.$$

Então

$$I(\mathbb{F}^{n+1}; D_{m+1}, m') = -1 - \sum_{q' \neq m'} I(\mathbb{F}^{n+1}; D_{m+1}, q') \in \mathbb{Q}_{\leq -1}.$$

Como $(\mathbb{F}^{n+1}, D^{n+1})$ não satisfaz a propriedade (\star_2) no ponto m' e $I(\mathbb{F}^n; D_{m+1}, m) \in \mathbb{Q}_{\leq 1}$, então

$$I(\mathbb{F}^{n+1}; D_m, m') \in \mathbb{Q}_{\geq -1}.$$

Portanto

$$I(\mathbb{F}^n; D_m, m) = I(\mathbb{F}^{n+1}; D_m, m') + 1 \in \mathbb{Q}_{\geq 0},$$

o que contraria a hipótese.

Suponhamos agora que m é uma esquina sobre as componentes D_m^+ e D_m^- . Sejam D_{m+1}^+ e D_{m+1}^- as respectivas transformadas estritas de D_m^+ e D_m^- , $m^+ = D_{m+1}^+ \cap D_{m+1}^+$ e $m^- = D_{m+1}^+ \cap D_{m+1}^-$ (figura 2.4).

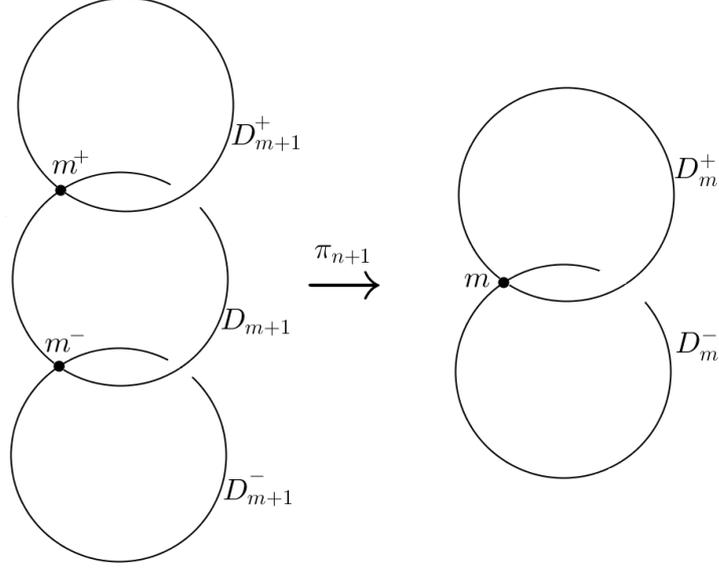


Figura 2.4: Explosão não dicrítica sobre a esquina m dando origem ao divisor D_{m+1} e a duas esquinas, m^+ e m^- .

Mostraremos que se vale $(\star_{2,1})$ para (\mathbb{F}^n, D^n) em m então não vale $(\star_{2,2})$, o que contradiz a hipótese.

Da proposição 2.4.3 temos que

$$I(\mathbb{F}^{n+1}; D_{m+1}^+, m^+) = I(\mathbb{F}^n; D_m^+, m) - 1.$$

Se vale $(\star_{2,1})$ para m , temos que $I(\mathbb{F}^{n+1}; D_{m+1}^+, m^+) \in \mathbb{Q}_{\leq -(a+1)}$. Como (\star_2) não se verifica para m^+ temos que

$$I(\mathbb{F}^{n+1}; S_{m+1}^+, m^+) \in \mathbb{Q}_{\geq -\frac{1}{a+1}}.$$

Além disso,

$$I(\mathbb{F}^{n+1}; D_{m+1}, m^+) + I(\mathbb{F}^{n+1}; D_{m+1}, m^-) = -1 - \sum_{q' \neq m^\pm} I(\mathbb{F}^{n+1}; D_{m+1}, q') \in \mathbb{Q}_{\leq -1}.$$

Segue que

$$I(\mathbb{F}^{n+1}; D_{m+1}, m^-) = [I(\mathbb{F}^{n+1}; D_{m+1}, m^+) + I(\mathbb{F}^{n+1}; D_{m+1}, m^-)] - I(\mathbb{F}^{n+1}; D_{m+1}, m^+),$$

logo $I(\mathbb{F}^{n+1}, D_{m+1}, m^-) \in \mathbb{Q}_{\leq -\frac{a}{a+1}}$.

Por outro lado, como (\star_2) não é satisfeita para m^- ,

$$I(\mathbb{F}^{n+1}; D_{m+1}^-, m^-) \in \mathbb{Q}_{\geq -\frac{a+1}{a}}.$$

Usando novamente a proposição 2.4.3 temos

$$I(\mathbb{F}^n; D_m^-, m) \in \mathbb{Q}_{\geq -\frac{1}{a}},$$

portanto (\mathbb{F}^n, D^n) não satisfaz $(\star_{2,2})$. □

Dada uma folheação \mathbb{F} em $(\mathbb{C}^2, 0)$ com singularidade isolada na origem, fazemos explosão na origem e obtemos o divisor D^1 . Se a explosão for dicrítica teremos uma infinidade de separatrizes sobre o divisor que se projetam em separatrizes sobre $(\mathbb{C}^2, 0)$ por blow-down. Se a explosão for não dicrítica, pela proposição 2.4.3 teremos que

$$\sum_{m \in D^1} I(\mathbb{F}^1; D^1, m) = -1,$$

onde \mathbb{F}^1 é a transformada estrita de \mathbb{F} . Existe então um ponto m_1 sobre D^1 tal que o índice da separatriz em m_1 é negativo, logo m_1 é uma singularidade que satisfaz (\star) . Pelo lema 2.4.7, podemos fazer uma sequência de explosões em pontos que satisfazem a propriedade (\star) . Se alguma dessas explosões é dicrítica segue de imediato que \mathbb{F} admite separatriz. Caso contrário, pelo teorema de Seidenberg após um número finito dessas explosões todas as singularidades são simples. Então pela observação 2.4.6 existe uma singularidade simples que não é esquina e tal que a direção própria transversal ao divisor é forte. Pelo teorema de Briot-Bouquet, existe uma separatriz convergente que se projeta por blow-down em uma separatriz de \mathbb{F} .

Capítulo 3

Dinâmica local de difeomorfismos tangentes à identidade em \mathbb{C}^2

Neste capítulo consideramos germes de difeomorfismos tangentes à identidade em \mathbb{C}^2 , ou seja, difeomorfismos da forma

$$F(\mathbf{z}) = \mathbf{z} + P_{r+1}(\mathbf{z}) + P_{r+2}(\mathbf{z}) + \dots, \quad (3.1)$$

definidos numa vizinhança da origem de \mathbb{C}^2 , onde P_h é uma função vetorial de polinômios homogêneos de grau h , $P_{r+1} \neq 0$ e o inteiro $r + 1 \geq 2$ é a multiplicidade de F . Como no caso de dimensão 1, o conjunto dos difeomorfismos tangentes à identidade de \mathbb{C}^2 será denotado por $\text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$. O subconjunto dos elementos de $\text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ com multiplicidade $r + 1$ será denotado por $\text{Diff}_{r+1}(\mathbb{C}^2, 0)$. Uma série formal do tipo (3.1) será chamada de difeomorfismo formal tangente à identidade de \mathbb{C}^2 . Estudaremos o comportamento das iteradas $\mathbf{z}_n = F^{on}(\mathbf{z})$ de pontos próximos da origem: nosso principal objetivo é encontrar domínios invariantes atraídos pela origem assim como foi feito no caso de dimensão 1, isto é, buscamos domínios análogos às pétalas atratoras do teorema da flor. As referências para este capítulo são [9], [10] e [3].

3.1 Preliminares

Seja $F \in \text{Diff}_{r+1}(\mathbb{C}^2, 0)$. Uma *curva parabólica de F na origem* é um mapa holomorfo injetivo $\varphi : \Delta \rightarrow \mathbb{C}^2$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) Δ é um domínio simplesmente conexo em \mathbb{C} com $0 \in \partial\Delta$;
- (ii) φ é contínua na origem e $\varphi(0) = 0$;
- (iii) $\varphi(\Delta)$ é invariante por F e $(F|_{\varphi(\Delta)})^{on} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Além disso, se $[\varphi(\zeta)] \rightarrow [v]$ quando $v \rightarrow 0$, onde $[\cdot]$ denota a projeção canônica de $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, dizemos que φ é tangente a $[v]$ na origem.

Uma *direção característica de F* é um ponto $[v] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ tal que $P_{r+1}(v) = \lambda v$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$; v é *não degenerada* se $\lambda \neq 0$. Se $[v] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ é uma direção característica não degenerada podemos escolher coordenadas (z, w) em \mathbb{C}^2 tais que $v = (1, u_0)$ e

$$P_{r+1}(v) = P_{r+1}(1, u_0) = (p_{r+1}(1, u_0), q_{r+1}(1, u_0)),$$

com $p_{r+1}(1, u_0) \neq 0$. A definição e a proposição seguintes dão uma interpretação geométrica das direções características.

Definição 3.1.1. Seja $f \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$. Uma trajetória característica de F é qualquer órbita $\{\mathbf{z}_n\} = \{F^{\circ n}(\mathbf{z})\}$ de um ponto \mathbf{z} no domínio de F , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{z}_n = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbf{z}_n] = [v],$$

para algum $v \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. O vetor v será chamado de direção de tangência de $\{\mathbf{z}_n\}$.

Proposição 3.1.2. Se v é a direção de tangência de uma trajetória característica $\{\mathbf{z}_n\}$ de F , então v é uma direção característica de F . Além disso, se $P_{r+1}(v) \neq 0$ e se as coordenadas são escolhidas em \mathbb{C}^2 de modo que $v = (1, u_0)$ e $P_{r+1}(1, u_0) = (p_{r+1}(1, u_0), q_{r+1}(1, u_0))$ com $p_{r+1}(1, u_0) \neq 0$ então para $\mathbf{z}_n = (z_n, w_n)$, temos

$$z_n^r \sim -\frac{1}{np_{r+1}(1, u_0)}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Demonstração: Se $P_{r+1}(v) = 0$ não há o que provar. Supomos que $P_{r+1}(v) \neq 0$. Então podemos escolher coordenadas (z, w) em \mathbb{C}^2 tais que F é dada por $F(z, w) = (z_1, w_1)$, com

$$\begin{aligned} z_1 &= z + p_{r+1}(z, w) + p_{r+2}(z, w) + \dots \\ w_1 &= z + q_{r+1}(z, w) + q_{r+2}(z, w) + \dots \end{aligned}$$

de forma que $v = (1, u_0)$ e $p_{r+1}(z, w) \neq 0$. Sabemos que $\{(z_n, w_n)\}$ converge para zero e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_n}{z_n} \rightarrow u_0.$$

Ao fazermos a explosão na origem $w = uz$ temos

$$\begin{aligned} z_1 &= z + p_{r+1}(1, u)z^{r+1} + p_{r+2}(1, u)z^{r+2} + \dots \\ u_1 &= u + s(u)z^r + O(z^{r+1}) \end{aligned}, \quad (3.2)$$

onde $s(u) := q_{r+1}(1, u) - p_{r+1}(1, u)u$ é um polinômio de grau $r+2$. Portanto as direções características não degeneradas de F são da forma $(1, u_0)$, com u_0 raiz de $s(u)$. A relação (3.2) implica que

$$\begin{aligned} \frac{1}{rz_1^r} &= \frac{1}{rz^r} - p_{r+1}(1, u) + O(z) \\ \frac{1}{rz_2^r} &= \frac{1}{rz_1^r} - p_{r+1}(1, u_1) + O(z_1) \\ &\dots \\ \frac{1}{rz_n^r} &= \frac{1}{rz_{n-1}^r} - p_{r+1}(1, u_{n-1}) + O(z_{n-1}). \end{aligned}$$

Somando estas relações e dividindo por n temos

$$\frac{1}{nrz_n^r} = \frac{1}{nrz^r} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (p_{r+1}(1, u_{k-1}) + O(z_{k-1})).$$

O teorema de Cesàro garante então que $1/rz_n^r$ converge para $-p_{r+1}(1, u_0)$ quando $n \rightarrow \infty$.

A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$$

é convergente, pois $u_n \rightarrow u_0$, mas se $s(u_0) \neq 0$ teríamos que

$$u_{n+1} - u_n \sim s(u_0)z_n^r \sim \frac{Cs(u_0)}{n},$$

com $C \in \mathbb{C}^*$, o que é impossível. \square

Seja $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ com direção característica não degenerada $v = (1, u_0)$. Após explosão F é da forma (3.2). Podemos fazer uma mudança linear de coordenadas e supor que $u_0 = 0$, de forma que $s(0) = 0$ e $u_1 = (1 + \alpha z^r)u + O(|u|^2 z^r, z^{r+1})$, onde $\alpha = s'(0)$. Ao trocarmos ainda z por $-p_{r+1}(1, 0)z$ transformamos a primeira coordenada de F em $z - z^{r+1} + O(|u|z^{r+1}, z^{r+2})$. O estudo de difeomorfismos tangentes à identidade em $(\mathbb{C}^2, 0)$ numa vizinhança de uma direção característica não degenerada $v = (1, 0)$ é agora reduzido ao estudo de transformações analíticas do tipo

$$\begin{cases} z_1 = f(z, u) = z - z^{r+1} + O(uz^{r+1}, z^{r+2}), \\ u_1 = g(z, u) = (1 - \alpha z^r)u + O(u^2 z^r, uz^{r+1}) + z^{r+1}\psi_r(z) \end{cases} \quad (3.3)$$

Seja $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ escrita como em (3.3). Então $v = (1, 0)$ é uma direção característica. Buscamos curvas parabólicas de F tangentes a v . Observamos que se existisse

uma curva analítica invariante em uma vizinhança da origem o teorema da flor garantiria a existência de curvas parabólicas. Entretanto este não é o caso em geral. Seguindo a mesma ideia que usamos na proposição 1.1.8 para mostrar que a função complexa $b(z) = z/(z + 1)$ não pode ser analiticamente conjugada à nenhuma função inteira, em qualquer disco em torno da origem é possível mostrar que a transformação

$$\begin{cases} z_1 = z/(z + 1) \\ u_1 = u \exp(-az) + z^2 \end{cases}$$

não possui curva invariante tangente à direção característica (veja [9]).

3.2 O teorema de Hakim

Apresentamos nesta seção o teorema de Hakim, que nos fornece condições para a existência de curvas parabólicas para um difeomorfismo de \mathbb{C}^2 tangente à identidade:

Teorema 3.2.1. *Seja $F \in \text{Diff}_{r+1}(\mathbb{C}^2, 0)$. Após explosão da origem assumimos que F é dado por (3.3). Se $\alpha \notin \mathbb{N}$ temos que para cada direção característica não degenerada v de F existem r curvas parabólicas tangentes a v .*

Essa é uma versão mais fraca do teorema de Hakim pois o enunciado é válido mesmo sem a condição sobre α . Com esta hipótese adicional temos a seguinte proposição:

Proposição 3.2.2. *Seja F uma transformação analítica do tipo (3.3) com $\alpha \notin \mathbb{N}$. Então para todo $k \in \mathbb{N}$ podemos escolher coordenadas locais (z, u) tais que*

$$\begin{aligned} z_1 &= f(z, u) = z - z^{r+1} + O(uz^{r+1}, z^{r+2}), \\ u_1 &= g(z, u) = u(1 - \alpha z^r + O(uz^r, z^{r+1})) + z^{k+r+1}\psi_{k+1}(z). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Demonstração: Fixado k mostremos que existe uma sequência $\{p_n\}$, $n = 1, \dots, k - 1$ de polinômios p_n de grau n tal que $p_n(0) = 0$ e

$$g(z, p_n(z)) = p_n(f(z, p_n(z))) + z^{n+r+1}\varphi_{r+1}(z). \quad (3.5)$$

Mais ainda,

$$p_{n+1}(z) = p_n(z) + c_{n+1}z^{n+1},$$

com

$$c_{n+1} = \frac{\varphi_{n+1}(0)}{n + 1 - \alpha}.$$

Fazemos indução em n . Para obter $p_1(z) = c_1z$ temos que provar que existe c_1 tal que

$$c_1f(z, c_1z) = g(z, c_1z) + O(z^{r+2}). \quad (3.6)$$

Como para qualquer constante c_1 temos $f(z, c_1 z) = z - z^{r+1} + O(z^{r+2})$, de

$$g(z, c_1 z) = c_1 z(1 - \alpha z^r) + z^{r+1} \psi_r(0) + O(z^{r+2})$$

segue que a condição (3.6) é satisfeita se

$$c_1 = -\frac{\psi_r(0)}{1 - \alpha}.$$

Suponhamos agora que haja um p_n tal que a relação (3.5) é satisfeita. De

$$f(z, u) = z(1 - z^r) + z^{r+1} \phi(z, u)$$

temos

$$p_{n+1}(f(z, p_{n+1}(z))) = p_n(f(z, p_n(z))) + c_{n+1} z^{n+1} (1 - (n+1)z^r) + O(z^{n+r+2}),$$

e de

$$g(z, u) = u(1 - \alpha z^r + O(u z^r, z^{r+1})) + z^{r+1} \psi_r(z)$$

segue que

$$g(z, p_n(z) + c_{n+1} z^{n+1}) = g(z, p_n(z)) + c_{n+1} z^{n+1} (1 - \alpha z^r) + O(z^{n+r+2}).$$

Então

$$\begin{aligned} g(z, p_{n+1}(z)) - p_{n+1}(f(z, p_{n+1}(z))) &= g(z, p_n(z)) + c_{n+1} z^{n+r+1} (n+1 - \alpha) \\ &\quad - p_n(f(z, p_n(z))) + O(z^{n+r+2}). \end{aligned}$$

Da hipótese de indução,

$$g(z, p_n(z)) - p_n(f(z, p_n(z))) = z^{n+r+1} \varphi_{r+1}(z),$$

temos que p_{n+1} é solução de (3.5) se

$$c_{n+1} = \frac{-\varphi_{r+1}(0)}{n+1 - \alpha}.$$

Fixado $k \in \mathbb{N}$ tomando como novas coordenadas

$$\begin{aligned} Z &= z, \\ U &= u - p_{k-1}(z) \end{aligned} .$$

temos o resultado. □

Dado $F = (f, g) \in \text{Diff}_{r+1}(\mathbb{C}^2, 0)$ como em (3.4), para provarmos a existência de r curvas parabólicas tangentes à direção característica não degenerada $(1, 0)$ construiremos uma função u analítica numa região da forma

$$D_{\delta,r} = \{z \in \mathbb{C}; |z^r - \delta| < \delta\}.$$

tal que

$$u(f(z, u(z))) = g(z, u(z)), \quad (3.7)$$

e $\lim_{z \rightarrow 0} u(z)/z = 0$. O domínio $D_{\delta,r}$ é um domínio com r componentes simplesmente conexas, todas com a origem na borda. Observamos que dado $\eta \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ podemos escolher δ suficientemente pequeno de modo que, a menos de rotação, as r componentes conexas de $D_{\delta,r}$ estejam contidas nas r pétalas atratoras de η , dadas pelo teorema da flor.

Para a demonstração do teorema de Hakim fixamos k tal que $k \geq 2$ e $k > \text{Re}(\alpha) + 1$ e consideramos o espaço

$$\epsilon(\delta) = \{u \in \mathcal{O}(D_{\delta,r}); u(z) = z^{k-1}h(z), \|h\|_\infty < \infty\}$$

e o subespaço

$$H(\delta) = \{u \in \epsilon(\delta); |u(z)| \leq |z|^{k-1}, |u'(z)| \leq |z|^{k-2}\}.$$

O conjunto $\epsilon(\delta)$ é um espaço de Banach com norma $\|u\|_{\epsilon(\delta)} = \|h\|_\infty$ e $H(\delta)$ é um subconjunto fechado de $\epsilon(\delta)$. Para $u \in H(\delta)$, denotamos

$$f^u(z) = f(z, u(z)) = z - z^{r+1} + O(z^{r+2}, z^{r+1}u(z)).$$

O teorema da flor para difeomorfismos tangentes à identidade em \mathbb{C} garante que existe um $\delta_0 = \delta_0(\|h\|_\infty)$ tal que se $0 < \delta \leq \delta_0$ então cada componente conexa de $D_{\delta,r}$ é invariante e atraída pela origem sob a ação de f . Ademais, se $z_n := (f^u)^{on}(z)$ temos que $z_n \sim 1/n^{1/r}$.

Se encontramos $u \in \epsilon(\delta)$, com $\delta \leq \delta_0$, que satisfaça (3.7) para todo $z \in D_{\delta,r}$, a restrição de $\varphi(z) := (z, u(z))$ a cada componente conexa de $D_{\delta,r}$ será uma curva parabólica para F .

Suponhamos que z e z_1 pertencem à mesma componente de $D_{\delta,r}$, então definimos

$$H(z, w) := w - \frac{z^\alpha}{z_1^\alpha} g(z, w) = O(z^{r+1}w, z^r w^2, z^{r+k}). \quad (3.8)$$

Para $u \in H(\delta)$ definimos o operador T dado por

$$T \cdot u(z_0) = z_0^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} z_n^{-\alpha} H(z_n, u(z_n)),$$

onde $z_n = (f^u)^{on}(z_0)$. Temos que $H(z_n, u(z_n))$ está bem definida para qualquer z_0 em $D_{\delta, r}$, e como $z_n = O\left(\frac{1}{n^{1/r}}\right)$ vale que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n^{-\alpha} H(z_n, u(z_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} O(z_n^{k+r-\alpha}) = \sum_{n=0}^{\infty} O\left(\frac{1}{n^{(k+r-\alpha)/r}}\right).$$

Como $k > \text{Re}(\alpha)$ a série é normalmente convergente. Nos próximos resultados, por simplicidade, escrevemos $z_0 = z$. A proposição seguinte mostra que podemos buscar a função u como ponto fixo do operador T .

Proposição 3.2.3. *A condição $u(f(z, u(z))) = g(z, u(z))$ é satisfeita se, e somente se, u é ponto fixo do operador T .*

Demonstração: Se $u(f(z, u(z))) = g(z, u(z))$ então

$$T \cdot u(z) = z^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} z_n^{-\alpha} \left[u(z_n) - \frac{z_n^\alpha}{[f(z_n, u(z_n))]^\alpha} g(z_n, u(z_n)) \right].$$

Ao escrevermos $f(z_n, u(z_n)) = z_{n+1}$, temos que

$$T \cdot u(z) = z^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{u(z_n)}{z_n^\alpha} - \frac{u(z_{n+1})}{z_{n+1}^\alpha} \right] = z^\alpha \frac{u(z)}{z^\alpha} = u(z).$$

logo u é ponto fixo de T . Por outro lado,

$$Tu(z) = u(z) - \frac{z^\alpha}{z_1^\alpha} g(z, u(z)) + z^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} z_n^{-\alpha} \left[u(z_n) - \frac{z_n^\alpha}{(z_{n+1})^\alpha} g(z_n, u(z_n)) \right].$$

Assim se $T \cdot u(z) = u(z)$ então

$$g(z, u(z)) = T \cdot u(z_1) = u(z_1) = u(f(z, u(z))).$$

□

Lema 3.2.4. *Seja $u \in H(\delta)$. Então se δ é suficientemente pequeno vale a estimativa*

$$|z_n|^r \leq 2 \frac{|z|^r}{|1 + nrz^r|}. \quad (3.9)$$

Demonstração: Pela hipótese em u temos que $z_1 = z - z^{r+1} - z^{r+1}\Phi_u(z)$ com $\|\Phi_u\|_\infty$ limitado independentemente de u . Então

$$\frac{1}{z_1^r} = \frac{1}{z^r} + r + z\theta_u(z), \quad (3.10)$$

onde

$$\theta_u(z) = O(z^2, \|u\|) = O(z^r, z^{k-1} \|h\|_\infty)$$

é limitado independentemente de u e holomorfa em z e $u(z)$. Somando de 1 até n temos

$$\frac{1}{z_n^r} = \frac{1}{z^r} (1 + nrz^r) \left[1 + \frac{z^r}{1 + nrz^r} \sum_{j=0}^{n-1} z_j \theta_u(z_j) \right],$$

Tomando δ suficientemente pequeno a soma dentro dos colchetes é uniformemente próxima de 1 (com respeito a u e a z) o que demonstra (3.9). \square

Corolário 3.2.5. *Para qualquer $s > r$ existe uma constante $C_s = C_s(\delta) \geq 1$ tal que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|^s \leq C_s |z|^{s-r}. \quad (3.11)$$

Demonstração: Do lema anterior temos que

$$|z_n^r|^{s/r} \leq \frac{2^{s/r} |z|^s}{(1 + |nz^r|^2)^{s/2r}},$$

logo

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|^s \leq \left(2^{s/r} \int_0^{\infty} \frac{|z|^r}{(1 + |tz^r|^2)^{s/2r}} \right) |z|^{s-r}.$$

\square

O passo agora é estimarmos as derivadas.

Proposição 3.2.6. *Seja $u(z) = z^{k-1}h(z) \in H(\delta)$. Então vale a estimativa*

$$\left| \frac{dz_n}{dz} \right| \leq 2 \frac{|z_n|^{r+1}}{|z|^{r+1}}. \quad (3.12)$$

Demonstração: Nestas condições temos que $\|h'(z)\|_\infty \leq \kappa$ e $\|\theta'_u\|_\infty$ é limitado independentemente de u . Consideramos $K = \|(z\theta_u(z))'\|_\infty$. Diferenciando (3.10) com respeito a z temos

$$\frac{dz_1}{dz} = \frac{z_1^{r+1}}{z^{r+1}} \left[1 - \frac{z^{r+1}}{r} (\theta_u(z) + z\theta'_u(z)) \right].$$

De (3.11) temos $|z|^{r+1} \leq C_{r+1}|z|$. Se escolhermos $\delta < \frac{r}{2KC_{r+1}}$ temos que

$$\left| \frac{dz_1}{dz} \right| \leq 2 \frac{|z_1|^{r+1}}{|z|^{r+1}}.$$

Procedendo por indução supomos que

$$\left| \frac{dz_j}{dz} \right| \leq 2 \frac{|z_j|^{r+1}}{|z|^{r+1}},$$

para $j = 1, \dots, n-1$. Diferenciando

$$\frac{1}{z_n^r} = \frac{1}{z^r} + nr + \sum_{j=0}^{n-1} z_j \theta_u(z_j),$$

com respeito a z temos

$$\frac{dz_n}{dz} = \frac{z_n^{r+1}}{z^{r+1}} \left[1 - \frac{z^{r+1}}{r} \sum_{j=0}^{n-1} (\theta_u(z_j) + z_j \theta'_u(z_j)) \frac{dz_j}{dz} \right].$$

A hipótese de indução e a relação (3.11) nos dão

$$\left| \sum_{j=0}^{n-1} (\theta_u(z_j) + z_j \theta'_u(z_j)) \frac{dz_j}{dz} \right| \leq \frac{2KC_{r+1}}{|z|^r};$$

novamente se $\delta < r/2KC_{r+1}$ temos (3.12) para $j = n$. □

Proposição 3.2.7. *Se δ é suficientemente pequeno então $T \cdot u \in H(\delta)$ para todo $u \in H(\delta)$.*

Demonstração: Escrevemos

$$T \cdot u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_n}{z} \right)^{-\alpha} H(z_n, u(z_n)).$$

Fixado δ suficientemente pequeno (3.8) e (3.11)

$$|T \cdot u(z)| \leq K_1 |z|^k$$

para alguma constante K_1 . Em particular se $\delta < 1/K_1$ temos que

$$|T \cdot u(z)| \leq |z|^{k-1}.$$

Analogamente, (3.8), (3.11) e (3.12) nos dão

$$\left| \frac{dT \cdot u}{dz}(z) \right| \leq K_2 |z|^{k-2}$$

para alguma constante K_2 , assim se $\delta < 1/K_2$ temos $|(T \cdot u)'(z)| \leq |z|^{k-2}$. \square

O teorema do ponto fixo de Banach (veja [11]) garante que se T é uma contração no espaço normado completo $H(\delta)$ então existe um único ponto fixo u de T . O passo final para a demonstração do teorema de Hakim é, então, mostrar que para δ suficientemente pequeno T é uma contração em $H(\delta)$.

Lema 3.2.8. *Sejam $u, \tilde{u} \in H(\delta)$, e tome $z_n = (f^u)^{\circ n}(z)$ e $\tilde{z}_n = (f^{\tilde{u}})^{\circ n}(z)$. Então existe uma constante L tal que para todo n ,*

$$|\tilde{z}_n - z_n| \leq L |z|^k \|u - \tilde{u}\|_{\epsilon(\delta)}.$$

Demonstração: De (3.4) temos

$$\begin{aligned} f(z, u(z)) - f(\tilde{z}, \tilde{u}(\tilde{z})) &= z - \tilde{z} - z^{r+1} + \tilde{z}^{r+1} + O(z^{r+1}u(z), z^{r+2}) - O(\tilde{z}^{r+1}\tilde{u}(\tilde{z}), \tilde{z}^{r+2}) \\ &= (z - \tilde{z}) \left[1 - \sum_{j=0}^{\infty} z^j \tilde{z}^{r-j} + O(|\hat{z}|)^{r+1} \right] + (u(z) - \tilde{u}(\tilde{z})) O(|\hat{z}|)^{r+1}, \end{aligned}$$

onde $|\hat{z}| = \max\{|z|, |\tilde{z}|\}$. Em cada componente conexa de $D_{\delta,r}$ temos que $z_n \sim \tilde{z}_n \sim \frac{1}{n^{1/r}}$ quando $n \rightarrow \infty$, então podemos trocar $|\hat{z}|$ por $|z|$ nestas estimativas. Assim

$$\begin{aligned} u(z) - \tilde{u}(\tilde{z}) &= u(z) - u(\tilde{z}) + u(\tilde{z}) - \tilde{u}(\tilde{z}) \\ &= [u'(z)(z - \tilde{z} + u''(z)(z - \tilde{z})^2 + \dots)] + [\tilde{z}^{k-1}(h_u(\tilde{z}) - h_{\tilde{u}}(\tilde{z}))] \\ &= (z - \tilde{z}) O(|z|^{k-2}) + \|u - \tilde{u}\|_{\epsilon(\delta)} O(|z|^{k-1}), \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} f(z, u(z)) - f(\tilde{z}, \tilde{u}(\tilde{z})) &= (z - \tilde{z}) \left[1 - \sum_{j=0}^r \tilde{z}^j z^{r-j} + O(|z|^{r+1}) \right] \\ &+ (z - \tilde{z}) O(|z|^{k+r-1}) + \|h_u - h_{\tilde{u}}\|_{\infty} O(|z|^{k+r}). \end{aligned}$$

Para δ suficientemente pequeno vale

$$\left| 1 - \sum_{j=0}^r \tilde{z}^j z^{r-j} + O(|z|^{r+1}) \right| \leq 1,$$

e portanto temos as desigualdades

$$\begin{aligned} |\tilde{z}_1 - z_1| &\leq |\tilde{z} - z| + C_1 |z|^{k+r} \|h_u - h_{\tilde{u}}\|_\infty, \\ &\dots \\ |\tilde{z}_n - z_n| &\leq |\tilde{z}_{n-1} - z_{n-1}| + C_1 |z_n|^{k+r} \|h_u - h_{\tilde{u}}\|_\infty. \end{aligned}$$

Somando estas equações e fazendo $z = \tilde{z}$ temos

$$|\tilde{z}_n - z_n| \leq C_1 \sum_{j=0}^{n-1} |z_j|^{k+r} \|h_{\tilde{u}} - h_u\|_\infty$$

e pela desigualdade (3.11) temos

$$|\tilde{z}_n - z_n| \leq L |z|^k \|h_{\tilde{u}} - h_u\|_\infty.$$

□

Sejam agora $u, \tilde{u} \in H(\delta)$ e denotemos, como no lema anterior, $z_n = (f^u)^{on}(z)$ e $\tilde{z}_n = (f^{\tilde{u}})^{on}(z)$. Ao desenvolvermos a diferença $T \cdot u(z) - T \cdot \tilde{u}(z)$ temos

$$T \cdot u(z) - T \cdot \tilde{u}(z) = \underbrace{z^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} z_n^{-\alpha} [H(z_n, u(z_n)) - H(\tilde{z}_n, \tilde{u}(\tilde{z}_n))]}_{\Omega_1} + \underbrace{z^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} [z_n^{-\alpha} - \tilde{z}_n^{-\alpha}] H(\tilde{z}_n, \tilde{u}(\tilde{z}_n))}_{\Omega_2}.$$

Usando a desigualdade do valor médio, para constantes K_j , $j = 1, 2, 3$, temos

$$\begin{aligned} |H(z_n, u(z_n)) - H(\tilde{z}_n, \tilde{u}(\tilde{z}_n))| &= |H(z_n, u(z_n)) - H(z_n, \tilde{u}(z_n)) + H(z_n, \tilde{u}(z_n)) - H(\tilde{z}_n, \tilde{u}(\tilde{z}_n))| \\ &\leq K_1 \left[|z_n|^{r+1} \|u(z_n) - \tilde{u}(\tilde{z}_n)\| + |z_n|^{r+k-1} |z_n - \tilde{z}_n| \right] \end{aligned}$$

e pelo lema 3.2.8,

$$\begin{aligned} |u(z_n) - \tilde{u}(\tilde{z}_n)| &\leq |\tilde{u}(\tilde{z}_n) - \tilde{u}(z_n)| + |\tilde{u}(z_n) - u(z_n)| \\ &\leq C_1 |z_n|^{k-2} |\tilde{z}_n - z_n| + |z_n|^{k-1} \|h_{\tilde{u}} - h_u\|_\infty \\ &\leq (K_2 |z_n|^{k-2} |z|^k + |z_n|^{k-1}) \|h_{\tilde{u}} - h_u\|_\infty. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade (3.11) segue que

$$|\Omega_1| \leq K_3 |z|^k \|h_{\tilde{u}} - h_u\|_\infty.$$

Para estimar o termo Ω_2 escrevemos

$$z_n^{-\alpha} - \tilde{z}_n^{-\alpha} = z_n^{-\alpha} \left[1 - \exp \left(-\alpha \log \frac{\tilde{z}_n}{z_n} \right) \right]$$

e

$$\begin{aligned} \left| \left(1 - \exp \left(-\alpha \log \frac{\tilde{z}_n}{z_n} \right) \right) H(\tilde{z}_n, \tilde{u}(\tilde{z}_n)) \right| &\leq K'_1 \frac{|\tilde{z}_n - z_n|}{|z_n|} |z_n|^{k+r} \\ &\leq K'_2 |z_n|^{k+r-1} |z|^k \|h_{\tilde{u}} - h_u\|_\infty. \end{aligned}$$

Usando (3.11) temos $|\Omega_2| \leq K'_3 |z|^{2k-1} \|h_{\tilde{u}} - h_u\|_\infty$.

Concluimos que o termo $|\Omega_2|$ tem ordem maior do que o termo $|\Omega_1|$. Então para δ suficientemente pequeno existe uma constante K tal que

$$|T \cdot u(z) - T \cdot \tilde{u}| \leq K |z|^k \|h_{\tilde{u}} - h_u\|_\infty.$$

Pela definição de norma em H_δ isto implica que, para δ pequeno o suficiente, existe uma constante $c < 1$ tal que $\|T \cdot \tilde{u} - T \cdot u\| \leq c \|\tilde{u} - u\|$, logo T é uma contração. Isto conclui a demonstração do teorema 3.2.1.

3.3 A existência de curvas parabólicas

Nesta seção utilizaremos o teorema de Camacho e Sad e o teorema de Hakim para mostrarmos a existência de curvas parabólicas para difeomorfismos de \mathbb{C}^2 tangentes à identidade com ponto fixo isolado:

Teorema 3.3.1. *Seja $F \in \text{Diff}_{r+1}(\mathbb{C}^2, 0)$ com ponto fixo isolado na origem. Então existem r curvas parabólicas disjuntas para F pela origem.*

Dado um campo de vetores formal X em $(\mathbb{C}^2, 0)$ o operador exponencial de X é a aplicação $\exp tX : \mathbb{C}[[z, w]] \rightarrow \mathbb{C}[[z, w, t]]$ definido pela fórmula:

$$\exp tX(g) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} X^j(g),$$

onde $X^0(g) = g$ e $X^{j+1}(g) = X(X^j(g))$. Notemos que como $\nu(X^j(g)) \geq j + \nu(g)$, podemos substituir $t = 1$ e obter o elemento $\exp X(g) \in \mathbb{C}[[z, w]]$. Mais ainda, temos que

$$\exp tX(fg) = \exp tX(f) \exp tX(g).$$

Assim como no caso de dimensão 1, o operador exponencial estabelece uma bijeção entre o espaço dos campos de vetores formais de ordem maior ou igual a 2 e o espaço dos difeomorfismos formais tangentes à identidade em $(\mathbb{C}^2, 0)$.

Dado um difeomorfismo formal $G = \left(z + \sum_{r=1}^{\infty} p_{r+1}(z, w), w + \sum_{r=1}^{\infty} q_{r+1}(z, w) \right)$, o campo de vetores formal X tal que $G = \exp(X)$ é chamado de *gerador infinitesimal* de G .

As direções características de G correspondem às raízes do cone tangente de X . Mais ainda, se $X' = fX$, com $G = \exp(X)$, temos que $\exp(X') = (z + f(z, w)p(z, w), w + f(z, w)q(z, w))$. A recíproca deste fato também é verdadeira, isto é, se $\exp(X')(z, w) = (z + f(z, w)p(z, w), w + f(z, w)q(z, w))$ e $X = (z + p(z, w), w + q(z, w))$ então $X' = fX$. Em particular 0 é uma singularidade isolada de X se e somente se 0 é ponto fixo isolado de G .

Seja Π a explosão de \mathbb{C}^2 na origem com aplicação de blow-down $\pi : (M_1, D^1) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ onde $D^1 = \pi^{-1}(0)$. Como $D^1 \simeq \mathbb{P}^1$ temos que cada direção característica determina um ponto de D^1 .

Proposição 3.3.2. *Seja $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$. Então existe um único germe de difeomorfismo \tilde{F} em (M_1, D^1) tal que $\pi \circ \tilde{F} = F \circ \pi$ e $\tilde{F}|_{D^1} = \text{id}|_{D^1}$. Mais ainda, o germe \tilde{F}_p tem multiplicidade maior ou igual à multiplicidade de F para qualquer direção característica $p \in D^1$ e, então, $\tilde{F}_p \in \text{Diff}(M_1, p)$.*

Demonstração: Seja $F(z, w) = (z + p_{r+1}(z, w) + \dots, w + q_{r+1}(z, w) + \dots) \in \text{Diff}_{r+1}(\mathbb{C}^2, 0)$. Definimos \tilde{F} na primeira carta de M_1 , $((z, u), U)$, como

$$\begin{aligned} \tilde{F}(z, u) &= \pi^{-1} \circ F \circ \pi(z, u) = \left(z + p_{r+1}(z, zu) + \dots, \frac{zu + q_{r+1}(z, zu) + \dots}{z + p_{r+1}(z, zu) + \dots} \right) \\ &= (z + z^{r+1}(p_{r+1}(1, u) + z(\dots)), u + z^r(q_{r+1}(1, u) - up_{r+1}(1, u) + z(\dots))). \end{aligned}$$

Observamos que $\tilde{F}(0, u) = (0, u)$, então todos os pontos do divisor D^1 são fixos. Além disso, se $q_{r+1}(1, u_0) - u_0 p_{r+1}(1, u_0) = 0$ temos $dF(0, u_0) = \text{Id}$ e para qualquer direção característica $p = (0, u_0) \in D^1$ a multiplicidade de \tilde{F}_p é maior ou igual à multiplicidade de F . \square

Proposição 3.3.3. *Seja X um campo de vetores formal com $\nu(X) = r + 1 \geq 2$. Consideramos \tilde{X} o campo de vetores formal em (M_1, D^1) tal que $D\pi \cdot \tilde{X} = X \circ \pi$. Se p é um ponto do cone tangente de X então $\nu(\tilde{X}_p) \geq \nu(X)$.*

Demonstração: Seja $X = a(z, w)\frac{\partial}{\partial z} + b(z, w)\frac{\partial}{\partial w}$ com $a(z, w) = a_{r+1}(z, w) + \dots$ e $b(z, w) = b_{r+1}(z, w) + \dots$. Fazendo explosão na origem \tilde{X} é dado na carta $((z, u), U)$ por

$$\begin{aligned} \tilde{X}(z, u) &= a(z, zu)\frac{\partial}{\partial z} + \frac{b(z, zu) - ua(z, zu)}{z}\frac{\partial}{\partial u} \\ &= z^{r+1}(a_{r+1}(1, u) + z(\dots))\frac{\partial}{\partial z} + z^r((b_{r+1}(1, u) - ua_{r+1}(1, u)) + z(\dots))\frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned}$$

Se $p = (0, u_0) \in D^1$ é tal que $b_{r+1}(1, u_0) - u_0 a_{r+1}(1, u_0) = 0$, então $\nu(a(z, zu)) \geq r + 1$. Logo $\nu_p \left(\frac{b(z, zu) - ua(z, zu)}{z} \right) \geq r + 1$. \square

O ponto p é um *ponto estritamente singular* do campo X se para qualquer $f \in \mathbb{C}[[z, w]]$ tal que $X = fX'$ tivermos que p é ponto singular de X' .

Lema 3.3.4. *Sejam $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ e X o gerador infinitesimal de F . Consideramos \tilde{F} e \tilde{X} como nas duas proposições anteriores. Então para qualquer $p \in D^1$ temos*

$$\tilde{F}_p = \exp(\tilde{X}_p).$$

Demonstração: Seja $((z, u), U)$ a primeira carta de M_1 e $p \in U \cap D^1$ um ponto sobre o divisor. Aplicando uma mudança de coordenadas podemos supor que $p = (0, 0) \in U$. Como $F(z, w) = \exp(X) = (\exp X(z), \exp X(w))$, usando a definição de \tilde{F} temos

$$\begin{aligned} \tilde{F}(z, u) &= \left(\exp X(z), \frac{\exp X(zu)}{\exp X(z)} \right) = \left(\exp \tilde{X}(z), \frac{\exp \tilde{X}(zu)}{\exp \tilde{X}(z)} \right) \\ &= \left(\exp \tilde{X}(z), \frac{\exp \tilde{X}(z) \exp \tilde{X}(u)}{\exp \tilde{X}(z)} \right) = (\exp \tilde{X}(z), \exp \tilde{X}(u)) \\ &= \exp(\tilde{X}_p)(z, u). \end{aligned}$$

□

Dado um campo de vetores formal X (respectivamente um difeomorfismo formal F) em $(\mathbb{C}^2, 0)$, se fizermos um processo de explosão da origem Π^n obtemos em D^n a transformada estrita X^n (respectivamente F^n) definida de maneira análoga ao que feito para folheações na linguagem de formas diferenciais na subsecção 2.1.4. Enunciamos o teorema de Camacho e Sad em sua versão formal. A demonstração é feita da mesma forma feita no capítulo 2.

Teorema 3.3.5. *Seja X campo de vetores formal em $(\mathbb{C}^2, 0)$ tal que $\nu(X) \geq 2$, com singularidade isolada na origem. Existe um processo de explosão da origem Π^n tal que a i -ésima explosão é feita sobre um ponto estritamente singular de D^i para $i \geq 2$ e em D^n existe um ponto p sobre a componente D_p de D^n satisfazendo a seguinte propriedade: existem coordenadas locais (t, u) em p tal que $D_p = (t = 0)$ e um gerador local de X^n é dado por*

$$X^n = t^m \left((\lambda t + t^2(\dots)) \frac{\partial}{\partial t} + (\mu u + t(\dots)) \frac{\partial}{\partial u} \right),$$

onde $\lambda \neq 0$, $\frac{\mu}{\lambda} \notin \mathbb{Q}_{>0}$ e $m \geq \nu(X) - 1$.

Observação 3.3.6. A afirmação acima também é válida quando alguma explosão de Π^n é dicrítica. Neste caso, basta considerarmos uma das infinitas direções características não degeneradas em um divisor dicrítico.

Demonstração do teorema 3.3.1: dado o difeomorfismo F com multiplicidade $r + 1$ tome X seu gerador infinitesimal. Consideramos X^n e p como no teorema anterior. Pelo lema 3.3.4 temos

$$F_p^n = \exp(X_p^n) = (t + \lambda t^{m+1} + O(t^{m+2}), u + \mu t^m u + O(t^{m+1}))$$

Então F_p^n é um difeomorfismo tangente à identidade com $(1, 0)$ uma direção característica não degenerada. Pelo teorema de Hakim, existem r curvas parabólicas disjuntas $\varphi_j : \Omega_j \rightarrow M_n$ para F_p^n tangentes a $(1, 0)$ em p . Como esta direção é transversal ao divisor, segue que $\varphi_j(\Omega_j) \cap D^n = \{p\}$. Então cada φ_j se projeta como curva parabólica de F por blow-down.

3.4 A existência de domínios invariantes

Apresentamos nesta seção o teorema que nos dá condições para existência de domínios invariantes para difeomorfismos tangentes à identidade em $(\mathbb{C}^2, 0)$.

Consideramos $F(z, w) \in \text{Diff}_{r+1}(\mathbb{C}^2, 0)$. Fazendo explosão na origem, $w = zu$, o teorema 3.3.5 e a proposição 3.2.2 garantem que existe um sistema de coordenadas no qual F é dado por

$$\begin{cases} z_1 = f(z, u) = z - z^{r+1} + O(uz^{r+1}, z^{r+2}), \\ u_1 = g(z, u) = u(1 - \alpha z^r + O(uz^r, z^{r+1})) + z^{k+r+1}\psi_{k+1}(z) \end{cases} ,$$

onde k pode ser escolhido arbitrariamente grande. Observamos que $v = (1, 0)$ é uma direção característica não degenerada de F . Nestas condições temos o seguinte teorema:

Teorema 3.4.1. *Se α possui parte real positiva existem r domínios invariantes nos quais todo ponto é atraído para a origem ao longo de uma trajetória tangente a v .*

Demonstração: O teorema 3.3.1 garante a existência de r curvas parabólicas φ_r obtidas como a restrição de uma função φ a cada pétala atratora do domínio

$$S_{\delta,c} = \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}; z \in D_{\delta,r} = \{z \in \mathbb{C}; |z^r - \delta| < \delta\}, |w| \leq c|z|\}.$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} Z &= z \\ U &= u - \varphi(z), \end{aligned}$$

obtemos a transformação

$$\begin{cases} z_1 = f(z, u) = z - z^{r+1} + O(uz^{r+1}, z^{r+2}), \\ u_1 = g(z, u) = (1 - z^r \alpha)u + O(|u|^2 z^r, uz^{r+1}) \end{cases} . \quad (3.13)$$

Seja P_0 uma das pétalas de $D_{\delta,r}$. Ao fazermos uma rotação podemos supor que P_0 esteja centrada no semieixo positivo $\text{Re}(z) > 0$. Consideramos λ uma constante positiva tal que $\text{Re}(\alpha) > \lambda$ e seja

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C}; |1 - \alpha z| \leq 1\},$$

que é o disco centrado em $1/\alpha$ com raio $1/|\alpha|$. Como $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ existem constantes γ e ρ tais que o setor

$$A_{\gamma,\rho} = \{z \in \mathbb{C}; |\operatorname{Im}(z)| \leq \gamma \operatorname{Re}(z), |z| \leq \rho\}$$

está contido na interseção de Δ e $\overline{P_0}$. Mostremos primeiro que se γ , ρ , e c são suficientemente pequenos, para $(z, u) \in A_{\gamma,\rho} \times \{|u| \leq c\}$ temos

$$|u_1| \leq |u|(1 - \lambda|z|). \quad (3.14)$$

Para isto, basta mostrarmos que

$$|1 - z\alpha|^2 < (1 - \lambda|z|)^2.$$

Temos

$$\begin{aligned} |1 - z\alpha|^2 &= 1 - \operatorname{Re}(z)[- \operatorname{Re}(z)(\operatorname{Re}(\alpha))^2 + 2\operatorname{Re}(\alpha) - \operatorname{Re}(z)(\operatorname{Im}(\alpha))^2] \\ &\quad + \operatorname{Im}(z)[\operatorname{Im}(z)(\operatorname{Im}(\alpha))^2 + 2\operatorname{Im}(\alpha) + \operatorname{Im}(z)(\operatorname{Re}(\alpha))^2]. \end{aligned}$$

Usando que $\operatorname{Re}(z) \ll \varepsilon$ e $|\operatorname{Im}(z)| < \gamma \operatorname{Re}(z)$ segue que

$$\begin{aligned} |1 - z\alpha|^2 &\leq 1 - \operatorname{Re}(z)\{- \operatorname{Re}(z)(\operatorname{Re}(\alpha))^2 + 2(\operatorname{Re}(\alpha)) - \operatorname{Re}(z)(\operatorname{Im}(\alpha))^2 \\ &\quad - \gamma[\operatorname{Im}(z)(\operatorname{Im}(\alpha))^2 + 2\operatorname{Im}(\alpha) + \operatorname{Im}(z)\operatorname{Re}(\alpha)]\}. \end{aligned}$$

Por outro lado, nestas mesmas condições temos

$$\begin{aligned} (1 - \lambda|z|)^2 &\geq 1 - \operatorname{Re}(z)(2\lambda - \lambda^2 \operatorname{Re}(z)) - |\operatorname{Im}(z)|(2\lambda - \lambda^2 |\operatorname{Im}(z)|) \\ &\geq 1 - \operatorname{Re}(z)(2\lambda - \lambda^2 \operatorname{Re}(z) - \gamma(2\lambda - \lambda^2 |\operatorname{Im}(z)|)). \end{aligned}$$

A desigualdade segue então escolhendo γ suficientemente pequeno. Segue de imediato que a segunda coordenada de (3.13) é estável em $A_{\gamma,\rho} \times \{|u| < c\}$.

O teorema de Cesàro garante que $z_n^r = O(1/n)$. Além disso a desigualdade (3.14) implica que que $\{u_n\}$ converge para zero. Logo vale que $z_n^r \sim \frac{r}{n}$.

Tome μ constante positiva tal que $\mu < \lambda$. De

$$z_1^{-\mu} \leq z^{-\mu}[1 + \mu z^r + O(|u|z^r, z^{r+1})]$$

temos que se $|z|$ e $|u|$ são suficientemente pequenos então

$$|z_1|^{-\mu} \leq |z|^{-\mu}(1 + \lambda|z|^r) \leq |z|^{-\mu}(1 + \lambda|z|).$$

Esta desigualdade junto com a desigualdade (3.14) nos dá

$$|u_1||z_1|^{-\mu} \leq |u||z|^{-\mu}(1 + O(z^2)).$$

Então existe uma constante C tal que $|u_n| \leq C|z_n|^\mu$. Concluimos que $\{|u_n|\}$ converge para zero mais rápido do que $1/n^{\lambda/r}$ para qualquer constante positiva $\lambda < \operatorname{Re}(\alpha)$. Como $w_n = z_n u_n$ a trajetória de $\{z_n, w_n\}$ é tangente à direção característica na origem. Fazendo o mesmo raciocínio para todas as pétalas atratoras de $D_{\delta,r}$ obtemos r domínios invariantes, como o desejado. \square

Referências Bibliográficas

- [1] M. Abate. *An introduction to local holomorphic dynamics in one complex variable*, disponível em <http://www.dm.unipi.it/~abate/articoli/artric.html>, 2008.
- [2] P. Ahern e J. P. Rosay. *Entire functions, in the classification of differentiable germs tangent to the identity, in one or two variables*. American Mathematical Society.
- [3] F. E. Brochero-Martínez, F. Cano e L. López-Hernanz. *Parabolic curves for diffeomorphisms in \mathbb{C}^2* . *Mat.* **52** (2008), 189-194.
- [4] C. Camacho e P. Sad. *Pontos singulares de equações diferenciais analíticas*. Rio de Janeiro: IMPA, 1987.
- [5] F. Cano, D. Cerveau e J. Déserti. *Théorie élémentaire des feuilletages holomorphes singuliers*. Paris: Belin, 2013
- [6] J. Cano. *Construction of invariant curves for singular holomorphic vector fields* *American Mathematical Society* **125(9)** (1997), 2649-2650.
- [7] M. D. Contreras e S. D. Madrigal. *Five lectures in complex analysis: second Winter School on Complex Analysis and Operator Theory, February 5-9, 2008*.
- [8] J. Ecalle. *Théorie itérative: introduction à la théorie des invariants holomorphes*. *J. Math. Pures Appl.* 54 (1975) 183-258.
- [9] M. Hakim. *Analytic transformations of $(\mathbb{C}^p, 0)$ tangent to identity*, *Duke Math. J.* **92(2)**(1998), 403-428.
- [10] M. Hakim. *Transformations tangent to identity, Stable pieces of manifolds*. Preprint, 1997.
- [11] E. Lima. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: IMPA, 1975.
- [12] F. Loray. *Pseudo-groupe d'une singularité de feuilletage holorphe en dimension deux*, disponível em hal.archives-ouvertes.fr/hal-00016434, 2005.

- [13] B. Malgrange. *Travaux d'Ecalte et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques*. Astérisque **92-93** (1981/82), 59-73.
- [14] J. Milnor. *Dynamics in one complex variable: introductory lectures*. 2nd ed. Braunschweig: Vieweg, 2000.
- [15] A. Neto e B. Scardua. *Folheações algébricas complexas*. Rio de Janeiro: IMPA, 1997.
- [16] D. Sauzin. *Resurgent functions and splitting problems*. RIMS Kokyuroku **1493** (2006), 48-117.
- [17] J. Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro: IMPA, 1979. **347(2)** (1995).