

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG  
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA



Teorema de Bernstein para Gráficos Mínimos em  $\mathbb{R}^n$   
( $3 \leq n \leq 6$ )

*Edno Alan Pereira*

Belo Horizonte - MG  
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG  
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

Edno Alan Pereira

Orientador:

Prof. Ezequiel Rodrigues Barbosa

Teorema de Bernstein para Gráficos Mínimos em  $\mathbb{R}^n$   
( $3 \leq n \leq 6$ )

Dissertação submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMG, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Belo Horizonte - MG  
Fevereiro - 2014

*”Aos meus pais e irmãos por todo carinho e amor”*

*"O conhecimento matemático acrescenta vigor à mente, liberta-a de preconceitos, da superstição e da credulidade".*

*John Arbuthnot*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus pela vida, saúde, força e tudo de essencial que me permitiu concluir esse trabalho.

Ao ao meu pai Juvenal, minha mãe Marlene, meus irmãos Ediane, Jéssica, Jerlis, Esrom e Daniel pela torcida e afeto que sempre me proporcionaram fé e perseverança.

Aos meus professores do mestrado e também da graduação.

Ao professor Rosivaldo Gonçalves pelas palavras de incentivo que me deram tanta confiança.

Ao professor Ezequiel Barbosa que além do apoio e da valiosa orientação sempre me proporcionou tranquilidade.

A CAPES pelo auxílio financeiro.

Enfim, a todos que de alguma forma contribuíram.

# Resumo

O clássico teorema de Bernstein diz que se uma função  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é solução inteira da equação de superfície mínima,

$$\operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0$$

então  $u$  é uma função linear, ou seja, o gráfico de  $u$  é necessariamente um plano. Se considerarmos  $u : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , uma versão desse teorema continua válida para  $n \leq 8$ , existindo contra-exemplo em dimensões mais altas. Nosso principal objetivo nesse trabalho é demonstrar esse teorema para o caso  $n \leq 6$ . E mostraremos também que se uma hipersuperfície no espaço euclidiano é completa, mínima, estável e parabólica então ela é necessariamente um plano.

**Palavras chaves:** Superfícies Mínima, Teorema de Bernstein, Estabilidade.

# Abstract

The classic Bernstein theorem says that, if a function  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  is an entire solution to the minimal surface equation

$$\operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0$$

then  $u$  is a linear function, that is, the graph of  $u$  is necessarily a plane. If we consider  $u : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , a version of this theorem remains valid until  $n \leq 8$ , counter-examples were found in higher dimensions. Our main goal in this work is to show that this theorem is true for  $n \leq 6$ . We will also show that if a hypersurface in the euclidean space is complete, minimal, stable and parabolic then it is necessarily a plane.

**Keywords:** Minimal Surfaces, Bernstein theorem, Stability.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares em Geometria Riemanniana</b>	<b>6</b>
1.1 Variedades Diferenciáveis . . . . .	6
1.2 Espaço Tangente . . . . .	9
1.3 Variedades Riemannianas . . . . .	10
1.4 Conexões Afins . . . . .	11
1.5 Curvatura . . . . .	12
<b>2 Geometria das Subvariedades</b>	<b>17</b>
2.1 Imersões Isométricas . . . . .	17
2.2 Divergente, Gradiente e Laplaciano em Subvariedades . . . . .	23
<b>3 Superfícies Mínimas</b>	<b>26</b>
3.1 Primeira Fórmula de Variação . . . . .	26
3.2 Segunda Fórmula de Variação . . . . .	38
3.3 Desigualdade de Estabilidade . . . . .	51
3.4 Estimativa $L^p$ para $ A ^2$ . . . . .	52
3.5 Teorema de Bernstein . . . . .	58
<b>4 Estabilidade</b>	<b>60</b>
4.1 Caracterização para Estabilidade . . . . .	61

---

Apêndice	68
Referências Bibliográficas	69

# Introdução

A versão clássica do teorema de Bernstein demonstrada por ele em 1916 [2] afirma que *se uma superfície mínima em  $\mathbb{R}^3$  é um gráfico completo então ela é um plano*. Considerando uma superfície mínima que é gráfico de uma função  $u : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , versões do teorema foram provadas posteriormente para dimensões mais altas por, E. De Giorgio [7] para  $n = 4$ , F. J. Almgren, Jr. [1] para  $n = 5$  e J. Simons [19] para  $n \leq 8$ . O resultado torna-se falso para dimensão  $n \geq 9$  (veja [3]). Nesse trabalho mostraremos o caso  $n \leq 6$  devido a Schoen-Simon-Yau [18]. O caso geral ( $n \leq 8$ ) e o contra-exemplo para  $n \geq 9$  envolve técnicas mais sofisticadas e não será tratado aqui.

Lagrange em 1760, foi o primeiro matemático a definir superfície mínima, tendo como ponto de partida o estudo do seguinte problema: Dado uma curva fechada  $C$  sem auto-intersecções, achar a superfície de área mínima que tem esta curva como fronteira. Desde então o desenvolvimento da teoria das superfícies mínimas vem ganhando importantes contribuições e mostrando-se aplicável a outras áreas da ciência como, por exemplo, na teoria da relatividade geral ( Veja [4]. Teorema da Massa Positiva, pág. 251).

É bem conhecido que superfícies mínimas que são gráficos completos são estáveis, diante disso a questão que surge é: quais são as superfícies mínimas estáveis no  $\mathbb{R}^3$ ? O problema foi resolvido por Do Carmo-Peng [10] e em um contexto mais geral e independente por Fischer-Colbrie-Schoen [11] mostrando que tais superfícies são planos.

Consideremos  $f : \Sigma^k \rightarrow M^n$  uma imersão isométrica de uma variedade  $\Sigma^k$

---

em uma variedade Rimaniana orientável  $(M^n, g)$ . Uma variação de  $\Sigma^k$  com suporte compacto e bordo fixo é uma função diferenciável  $F : \Sigma^k \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M^n$  tal que,

1.  $F = Id$  fora de um conjunto compacto de  $\Sigma$
2.  $F(x, 0) = x$
3.  $\forall x \in \partial\Sigma$  temos,  $F(x, t) = x$

para cada  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ ,  $F(\Sigma^k, t)$  é uma imersão isométrica de  $\Sigma^k$  em  $M^n$ . Considerando o funcional  $\text{Vol}(F(\Sigma, t))$ , estamos interessados em saber das condições necessárias para que  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Vol}(F(\Sigma, t)) = 0$ . Derivando o funcional no parâmetro  $t$  e avaliando em  $t=0$  obtemos,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Vol}(F(\Sigma, t)) = - \int_{\Sigma} g(F_t, H) dV$$

onde  $F_t(x) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(x, t)$  é o campo variacional relativo a variação  $F$  e  $H$  é o campo curvatura média de  $\Sigma$ . Definimos Superfície Mínima como aquelas cuja curvatura média é identicamente nula. Dessa forma uma superfície mínima é um ponto crítico do funcional volume para qualquer variação  $F$  como descrita acima. Nosso próximo passo é saber das condições para que uma superfície mínima seja um ponto de mínimo do funcional Volume. Para isso, restringimos nossa atenção ao caso de hipersuperfícies mínimas com fibrado normal trivial. No espaço  $\mathbb{R}^n$ , uma hipersuperfície ter fibrado normal trivial equivale a ser orientável. Portanto, no espaço euclidiano consideraremos sempre as hipersuperfícies mínimas orientáveis. Calculando a segunda derivada do funcional volume e avaliando em  $t = 0$  obtemos,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Vol}(F(\Sigma, t)) = - \int_{\Sigma} \eta L \eta dV \tag{1}$$

onde  $L$  é o operador de estabilidade (ou operador de Jacobi) dado por,  $L = \Delta_{\Sigma} + |A|^2 + \text{Ric}_M(N, N)$  e  $\eta$  uma função suave sobre  $\Sigma$  com suporte compacto

---

e tal que  $\eta|_{\partial\Sigma} = 0$ . Para hipersuperfícies mínimas no  $\mathbb{R}^n$  temos a seguinte expressão para (1),

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Vol(F(\Sigma, t)) = - \int_{\Sigma} \eta \Delta_{\Sigma} \eta + |A|^2 \eta^2 dV \quad (2)$$

onde  $A$  é a segunda forma fundamental de  $\Sigma$ . Dizemos que uma hipersuperfície é estável se para todo domínio limitado  $\Omega \subset \Sigma^k$  e toda função  $\eta \in C_0^{\infty}(\Omega)$  vale,

$$- \int_{\Sigma} \eta L \eta dV = - \int_{\Sigma} \eta \Delta_{\Sigma} \eta + |A|^2 \eta^2 dV \geq 0$$

Para hipersuperfícies mínimas estáveis em  $\mathbb{R}^n$  obtemos a desigualdade de estabilidade,

$$\int_{\Sigma} |A|^2 \phi^2 dV \leq \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \phi|^2 dV$$

onde  $\phi$  é uma função de Lipschitz com suporte compacto.

No trabalho de Schoen-Simon-Yau [18] obtém-se a estimativa  $L^p$ ,

$$\int_{\Sigma} |A|^{2p} \phi^{2p} dV \leq C \int_{\Sigma} |\nabla \phi|^{2p} dV \quad \text{onde} \quad C = C(n, p)$$

para o quadrado da norma da segunda forma fundamental de uma hipersuperfície mínima estável e orientável em  $\mathbb{R}^n$ , onde  $p \in [2, 2 + \sqrt{2/(n-1)})$  e  $\eta$  é qualquer função de Lipschitz não negativa com suporte compacto. Para isso, considera-se a desigualdade de estabilidade para  $\eta = |A|^{1+q} f$  com  $q \in [0, \sqrt{2/(n-1)})$  combinada com a desigualdade de Simons (3.36) onde obtém-se,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |A|^{4+2q} f^2 dV &\leq 2(1+q)^2 \int_{\Sigma} f^2 |A|^{2q} |\nabla_{\Sigma} |A||^2 dV \\ &\quad + 2 \int_{\Sigma} |A|^{2+2q} |\nabla_{\Sigma} f|^2 dV \\ &\leq \left( \frac{2(1+q)^2(1+\frac{q}{\varepsilon})}{2/(n-1) - q^2 - \varepsilon q} + 2 \right) \int_{\Sigma} |A|^{2q+2} |\nabla f|^2 dV \end{aligned}$$

escolhendo  $p = 2 + q$ ,  $f = \phi^p$ , fazendo algumas substituições e usando a desigualdade de Young, obtemos o resultado.

---

Fixado um ponto  $x_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ , usando a estimativa  $L^p$  para a função,

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x - x_0| \leq r \\ 1 - \frac{\ln\left(\frac{|x-x_0|}{r}\right)}{\ln 2}, & \text{se } r < |x - x_0| \leq 2r \\ 0, & \text{se } |x - x_0| \geq 2r \end{cases}$$

juntamente com a desigualdade (3.6) prova-se o teorema de Bernstein:

**Teorema**(Schoen-Simon-Yau [18]). *Se  $u : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  é solução inteira da equação de superfície mínima e  $n \leq 6$ . Então  $u$  é uma função linear.*

Dado um domínio limitado  $\Omega \subset \Sigma$  de uma hipersuperfície mínima diremos que  $\lambda$  é autovalor de Dirichlet de  $L$  em  $\Omega$  se existe uma função não nula  $\eta \in C_0^\infty$  que se anula em  $\partial\Omega$  tal que  $L\eta + \lambda\eta = 0$ . Se uma hipersuperfície mínima  $\Sigma^{n-1}$  é compacta, definimos o *índice de morse* de  $\Sigma$  como o número de autovalores negativos (contando com multiplicidade) do operador de estabilidade  $L$ .

É conhecido que o operador de estabilidade  $L = \Delta_\Sigma + |A|^2 + \text{Ric}_M(N, N)$  é diagonalizável por uma sequência de valores próprios  $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \rightarrow \infty$  cujos subespaços de vetores próprios tem dimensão finita. Para o primeiro autovalor  $\lambda_1$  de  $L$  em um domínio limitado  $\Omega$  temos a seguinte caracterização:

$$\lambda_1(\Omega, L) = \inf \left\{ - \int_\Sigma \eta L \eta dV \mid \eta \in C_0^\infty(\Omega) \text{ e } \int_\Omega \eta^2 dV = 1 \right\}$$

Um domínio limitado  $\Omega \subset \Sigma$  de uma hipersuperfície mínima é estável se seu índice de morse é nulo. Isso é equivalente a exigir que o primeiro autovalor do operador  $L$  seja positivo.

Para uma hipersuperfície mínima completa não compacta com fibrado normal trivial temos as seguintes equivalências devido a Fischer-Colbrie-Schoen [11].

1.  $\lambda_1(\Omega, L) \geq 0$  para todo domínio limitado  $\Omega \subset \Sigma$

---

2.  $\lambda_1(\Omega, L) > 0$  para todo domínio limitado  $\Omega \subset \Sigma$

3. Existe uma função positiva  $u$  definida em  $\Sigma$  tal que  $Lu = 0$

Com esse resultado provaremos que uma hipersuperfícies mínima completa estável e parabólica em  $\mathbb{R}^3$  é necessariamente um plano.

# Capítulo 1

## Preliminares em Geometria Riemanniana

Nessa primeira parte trataremos de alguns conceitos básicos e preliminares em Geometria Riemanniana. As principais referências utilizadas nesse capítulo são [8], [13], [14] e [16], onde o leitor encontrará uma abordagem mais detalhada dos conceitos aqui introduzidos bem como as demonstrações omitidas.

### 1.1 Variedades Diferenciáveis

Uma *topologia* em um conjunto  $M$  é uma coleção  $\mathfrak{S}$  de subconjuntos de  $M$  satisfazendo as seguintes propriedades,

1.  $\emptyset \in \mathfrak{S}$ ,  $M \in \mathfrak{S}$
2. União arbitrária de elementos de  $\mathfrak{S}$  ainda pertence a  $\mathfrak{S}$
3. Intersecção finita de elementos de  $\mathfrak{S}$  ainda pertence a  $\mathfrak{S}$

Um *espaço topológico* é um par  $(M, \mathfrak{S})$  consistindo de um conjunto  $M$  e uma topologia  $\mathfrak{S}$  de  $M$ . Frequentemente refere-se a um espaço topológico

## 1.1 Variedades Diferenciáveis

---

$(M, \mathfrak{S})$  escrevendo apenas  $M$  quando não houver necessidade de especificar qual a topologia do conjunto. Dessa forma, se  $M$  é um espaço topológico com uma topologia  $\mathfrak{S}$  dizemos que um subconjunto  $U \subset M$  é um aberto em  $M$  se  $U \in \mathfrak{S}$ .

Seja  $M$  um espaço topológico e Hausdorff com base enumerável. Um *sistema de coordenadas locais* ou uma *carta local* em  $M$  é um homeomorfismo  $x : U \rightarrow x(U)$  de um subconjunto aberto  $U \subset M$  sobre um aberto  $x(U) \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $m$  é a dimensão de  $x : U \rightarrow x(U)$ . Dado um ponto  $p \in U$  temos  $x(p) = (x^1(p), \dots, x^m(p))$ . Chamamos os números  $x^i = x^i(p)$ ,  $i = 1, \dots, m$  de coordenadas do ponto  $p \in M$  no sistema  $x$ .

Um *atlas* de dimensão  $m$  sobre um espaço topológico  $M$  é uma coleção  $\mathfrak{A}$  de sistemas de coordenadas locais  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  em  $M$  cujos domínios  $U$  cobrem  $M$ . Os domínios  $U$  dos sistemas de coordenadas  $x \in \mathfrak{A}$  são chamadas as vizinhanças coordenadas de  $\mathfrak{A}$

**Definição 1.** *Uma Variedade Topológica  $M$  é um espaço topológico no qual existe um atlas de dimensão  $m$ . Ou seja,  $M$  é uma variedade topológica de dimensão  $n$  se cada ponto  $p \in M$  tem uma vizinhança homeomorfa a um aberto do  $\mathbb{R}^m$ .*

Dados dois sistemas de coordenadas locais  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $y : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  no espaço topológico  $M$ , tais que  $U \cap V \neq \emptyset$ , cada  $p \in U \cap V$  tem coordenadas  $x^i = x^i(p)$  no sistema  $x$  e coordenadas  $y^i = y^i(p)$  no sistema  $y$ . A correspondência  $(x^1(p), \dots, x^m(p)) \rightarrow (y^1(p), \dots, y^m(p))$  estabelece um homeomorfismo  $\phi_{xy} = y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$  chamado *mudança de coordenadas*.

Um atlas  $\mathfrak{A}$  sobre um espaço topológico  $M$  diz-se diferenciável, de classe  $C^k$ , ( $k \geq 1$ ), se todas as mudanças de coordenadas  $\phi_{xy}$ ,  $x, y \in \mathfrak{A}$  são aplicações de classe  $C^k$ . Escreve-se então  $\mathfrak{A} \in C^k$ . Como  $\phi_{yx} = (\phi_{xy})^{-1}$ , segue-se que as aplicações  $\phi_{xy}$  são, de fato, difeomorfismos de classe  $C^k$ . Em particular, se escrevemos  $\phi_{xy} : (x^1, \dots, x^m) \rightarrow (y^1, \dots, y^m)$ , então o determinante jacobiano

## 1.1 Variedades Diferenciáveis

---

$\det(\frac{\partial y^i}{\partial x^j})$  é não-nulo em todo ponto de  $x(U \cap V)$ .

Dado um atlas  $\mathfrak{A} \in C^k$  de dimensão  $m$  em um espaço topológico  $M$ , dizemos que um sistema de coordenadas  $z : W \rightarrow \mathbb{R}^m$  é *admissível* relativamente ao atlas  $\mathfrak{A}$  se  $\mathfrak{A} \cup \{z\}$  é ainda um atlas de classe  $C^k$  em  $M$ . Um atlas  $\mathfrak{A}$  de dimensão  $m$  e classe  $C^k$  sobre  $M$  se diz *máximo* quando contém todos os sistemas de coordenadas locais que são admissíveis em relação a  $\mathfrak{A}$ . Todo atlas de classe  $C^k$  sobre  $M$  pode ser ampliado, de modo único, até se tornar um atlas máximo de classe  $C^k$ , para isso basta acrescentar-lhe todos os sistemas de coordenadas admissíveis.

**Definição 2.** *Uma variedade diferenciável de dimensão  $m$  e classe  $C^k$  é um par ordenado  $(M, \mathfrak{A})$  onde  $M$  é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável e  $\mathfrak{A}$  é um atlas máximo de dimensão  $m$  e classe  $C^k$  sobre  $M$ .*

Nesse trabalho consideraremos apenas variedades conexas e suaves, ou seja, variedades tais que qualquer mudança de coordenadas seja uma aplicação infinitamente diferenciável. Os termos diferenciável e infinitamente diferenciável serão equivalentes no decorrer do trabalho, salvo menção em contrário. Escreveremos  $M^n$  para se referir a uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ .

Sejam  $M^m$  e  $N^n$  variedades suaves. Uma aplicação  $f : M^m \rightarrow N^n$  é diferenciável no ponto  $p \in M^m$  se existem sistemas de coordenadas  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  em  $M$ ,  $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  em  $N^n$  com  $p \in U$  e  $f(U) \subset V$  tais que  $y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow y(V)$  é diferenciável no ponto  $x(p)$ . Como as mudanças de coordenadas são difeomorfismos, segue que a definição de diferenciabilidade independe da escolha de cartas. Dizemos que  $f : M^m \rightarrow N^n$  é diferenciável se  $f$  for diferenciável em todos os pontos de  $M^m$ .

Uma aplicação  $f : M^m \rightarrow N^n$  é de classe  $C^k$  ou  $C^\infty$  se, para cada  $p \in M^m$ , existem sistemas de coordenadas locais  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  em  $N$ , com  $p \in U$  e  $f(U) \subset V$  tais que  $y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow y(V)$  é de classe  $C^k$  ou  $C^\infty$ .

## 1.2 Espaço Tangente

---

Nesse trabalho trataremos apenas das aplicações de classe  $C^\infty$  sobre variedades suaves. Um difeomorfismo  $f : M^m \rightarrow N^n$  é uma bijeção diferenciável cuja inversa é também diferenciável. Se ambas  $f$  e  $f^{-1}$  são de classe  $C^k$  dizemos que  $f$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$ .

**Exemplo 1.** O espaço  $\mathbb{R}^n$  é uma variedade diferenciável de classe  $C^\infty$  e dimensão  $n$ .

**Exemplo 2.** A esfera  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2} = 1\}$  é uma variedade diferenciável de classe  $C^\infty$  e dimensão  $n$ .

**Exemplo 3.** O espaço projetivo real  $P^n(\mathbb{R})$ , isto é, o espaço quociente de  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  pela relação de equivalência:

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \sim (\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}) \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0$$

é uma variedade diferenciável de classe  $C^\infty$  e dimensão  $n$ . Para mais detalhes veja [8] pág. 4.

## 1.2 Espaço Tangente

Seja  $M$  uma variedade suave e  $p \in M$ . A aplicação linear  $X_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida no conjunto de todas as funções infinitamente diferenciáveis em uma vizinhança de  $p$  é chamada de *derivada* se cumpre a condição,

$$X_p(fg) = f(p)X_p(g) + g(p)X_p(f)$$

para toda  $f, g \in C^\infty(M)$ .

O conjunto de todas as derivações de  $C^\infty(M)$  em  $p$  possui estrutura de espaço vetorial, chamado *espaço tangente* a  $M$  em  $p$ , denotado por  $T_pM$ . Um elemento de  $T_pM$  é chamado de *vetor tangente* a  $M$  em  $p$ .

Uma base para  $T_pM$  pode ser dada escolhendo uma carta local  $x : U \rightarrow x(U)$  em  $p$  e considerando as aplicações  $\frac{\partial(p)}{\partial x_i} : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por,

### 1.3 Variedades Riemannianas

---

$$\frac{\partial(p)}{\partial x_i} f = \frac{\partial}{\partial x_i} f \circ x^{-1}(x(p))$$

Assim, as aplicações  $\frac{\partial(p)}{\partial x_i}$  de acordo com a definição, vetores tangentes a  $M$  em  $p$  e o conjunto  $\left\{ \frac{\partial(p)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(p)}{\partial x_m} \right\}$  forma uma base para  $T_p M$ . O fibrado tangente  $TM$  é definido por  $TM := \bigcup_{p \in M} T_p M$ . É possível mostrar que  $TM$  possui estrutura de variedade diferenciável de dimensão  $2n$ .

**Definição 3.** *Um campo de vetores  $X$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que a cada ponto  $p \in M$  associa um vetor  $X(p) \in T_p M$ . em termos de aplicações,  $X$  é uma aplicação de  $M$  no fibrado tangente  $TM$ . O Campo  $X$  é diferenciável se a aplicação  $X : M \rightarrow TM$  é diferenciável.*

O conjunto de todos os campos diferenciáveis sobre  $M$  será denotado por  $\mathcal{X}(M)$ .

**Definição 4.** *Dadas duas variedades diferenciáveis  $M$  e  $N$ , um ponto  $p \in M$ , e uma aplicação diferenciável  $f : M \rightarrow N$ , a derivada de  $f$  em  $p$ , denotada por  $df_p$ , é a aplicação linear de  $T_p M$  em  $T_{f(p)} N$  definida por: para  $X_p \in T_p M$  e  $g$  diferenciável em uma vizinhança de  $f(p)$ ,*

$$(df_p \cdot X_p)(g) = X_p(g \circ f).$$

**Definição 5.** *Dados dois campos  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ , campo vetorial  $[X, Y]$  definido por,*

$$[X, Y]_p f = (XY - YX)f = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f))$$

*é chamado colchete.*

### 1.3 Variedades Riemannianas

**Definição 6.** *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que associa a cada ponto de  $p$  de  $M$  um produto*

## 1.4 Conexões Afins

---

interno  $\langle, \rangle_p$  no espaço tangente  $T_pM$ . As vezes usamos a notação  $g(\cdot) = g_p(\cdot)$  para a métrica Riemanniana.

A definição acima exige que a métrica  $\langle, \rangle_p$  varie diferenciavelmente no seguinte sentido: se  $x : U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^m$  é um sistema de coordenadas locais em  $p \in U$ , para  $q \in U$  com  $q = x^{-1}(x_1, \dots, x_m)$  devemos ter que  $\left\langle \frac{\partial(q)}{\partial x_i}, \frac{\partial(q)}{\partial x_j} \right\rangle_p : x(U) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável onde os vetores  $\left\{ \frac{\partial(q)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(q)}{\partial x_m} \right\}$  formam uma base para  $T_qM$  relativa ao sistema  $x$ .

As funções  $g_{ij}(x_1, \dots, x_m) = \left\langle \frac{\partial(q)}{\partial x_i}, \frac{\partial(q)}{\partial x_j} \right\rangle_q$  são chamadas *expressão da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas  $x$* . Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se *variedade Riemanniana*.

**Proposição 1.** *Uma variedade diferenciável  $M$  (de Hausdorff e com base enumerável) possui uma métrica Riemanniana.*

**Demonstração.** Veja [8], página 47. ■

## 1.4 Conexões Afins

**Definição 7.** *Uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

que se indica por  $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$  e que satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ ,
2.  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ ,
3.  $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ ,

em que  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ ,  $f, g \in C^\infty(M)$ . O símbolo  $\nabla_X Y$  lê-se: derivada covariante de  $Y$  na direção de  $X$ . Quando a conexão afim satisfaz as seguintes propriedades:

## 1.5 Curvatura

---

1.  $X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$ , (compatibilidade com a métrica)
2.  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ , (simetria)

é denominada *conexão de Levi-Civita* (ou *Rimanniana*).

**Proposição 2.** *Dada uma variedade Riemanniana  $M$ , existe uma única conexão de Levi-Civita em  $M$ .*

**Demonstração.** Veja [8] pag. 61. ■

**Observação 1.** Dado um sistema de coordenadas  $(U, x)$ , o fato de  $\nabla$  ser simétrica implica que para todo  $i, j = 1, \dots, n$  temos,

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i = 0, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

## 1.5 Curvatura

Nesta secção, apresentaremos a noção de curvatura que, intuitivamente mede o quanto uma variedade Riemanniana deixa de ser euclidiana.

**Definição 8.** *A curvatura  $R$  de uma variedade Riemanniana  $M$  é uma correspondência que associa a cada par  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  uma aplicação  $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  dada por,*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M)$$

onde  $\nabla$  é a conexão Riemanniana de  $M$ .

**Observação 2.** Se  $M = \mathbb{R}^n$ , então  $R(X, Y)Z = 0$  para todo  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ . De fato, consideremos  $\{e_1, \dots, e_n\}$  a base canônica do  $\mathbb{R}^n$ , dados  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ , podemos escrever

$$X = \sum_{i=1}^n X_i e_i, Y = \sum_{i=1}^n Y_i e_i, Z = \sum_{i=1}^n Z_i e_i,$$

então

## 1.5 Curvatura

---

$$\nabla_Y Z = \nabla_Y \left( \sum_{i=1}^n Z_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n Z_i \nabla_Y e_i + \sum_{i=1}^n [Y(Z_i)] e_i = \sum_{i=1}^n [Y(Z_i)] e_i$$

pois sendo  $e_i$  um campo constante, a sua derivada covariante, na direção de qualquer campo, é nula. Segue-se que,

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z &= \nabla_X \left\{ \sum_{i=1}^n [Y(Z_i)] e_i \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n Y(Z_i) \nabla_X e_i + \sum_{i=1}^n X[Y(Z_i)] e_i \\ &= \sum_{i=1}^n X[Y(Z_i)] e_i. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\nabla_Y \nabla_X Z = \sum_{i=1}^n Y[X(Z_i)] e_i.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z &= \sum_{i=1}^n X[Y(Z_i)] e_i - \sum_{i=1}^n Y[X(Z_i)] e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \{X[Y(Z_i)] - Y[X(Z_i)]\} e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \{[X, Y](Z_i)\} e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \{[X, Y](Z_i)\} e_i + \sum_{i=1}^n Z_i \nabla_{[X, Y]} e_i \\ &= \nabla_{[X, Y]} Z. \end{aligned}$$

Segue que,

$$0 = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z = R(X, Y)Z$$

## 1.5 Curvatura

---

Ressaltando mais uma vez o que foi dito no início, podemos ver a curvatura  $R$  como uma maneira de medir o quanto  $M$  deixa de ser euclidiana.

**Proposição 3.** *A curvatura  $R$  em  $M$  tem as seguintes propriedades;*

1.  $R$  é bilinear em  $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$ , isto é,

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1)$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2)$$

com  $f, g \in C^\infty$ , e  $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)$

2. Para todo par  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ , o operador curvatura  $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  é linear, isto é,

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z$$

com  $f \in C^\infty(M)$ ,  $Z, W \in \mathcal{X}(M)$

3. (Primeira identidade de Bianchi)

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

**Demonstração.** Veja [8] pág. 100 e 101 ■

**Proposição 4.** *Dada uma variedade Riemanniana  $(M, g)$  com uma curvatura  $R$ , usando a notação  $(X, Y, Z, T) = g(R(X, Y)Z, T)$  para quaisquer campos  $X, Y, Z, T \in \mathcal{X}(M)$  temos as seguintes propriedades:*

1.  $(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = 0$
2.  $(X, Y, Z, T) = -(Y, X, Z, T)$
3.  $(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z)$

## 1.5 Curvatura

---

$$4. (X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y)$$

**Demonstração.** Veja [8] pág. 102 ■

**Proposição 5.** *Seja  $\sigma \subset T_p M$  um subespaço bi-dimensional do espaço  $T_p M$  e sejam  $x, y \in \sigma$  dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(x, y) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2}$$

onde  $|x \wedge y|^2 = \sqrt{|x|^2|y|^2 - g(x, y)^2}$ , independe da escolha dos vetores  $x, y \in \sigma$

**Demonstração.** Veja [8] pág. 104 ■

**Definição 9.** *Dado um ponto  $p \in M$  e um subespaço bidimensional  $\sigma \subset T_p M$  o número real  $K(x, y) = K(\sigma)$ , onde  $\{x, y\}$  é uma base qualquer de  $\sigma$  é chamado curvatura seccional de  $\sigma$  em  $p$*

Seja  $x = z_n$  um vetor unitário em  $T_p M$ , tomemos  $\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$  uma base ortonormal do hiperplano de  $T_p M$  ortogonal a  $x$  e consideremos a média,

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} g(R(x, z_i)x, z_i)$$

essa expressão independe da escolha da base  $\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$ . De fato, defina em  $T_p M$  uma forma bilinear como segue: dados  $x, y \in T_p M$  façamos,

$$Q(x, y) = \text{traço da aplicação } z \rightarrow R(x, z)y.$$

pela linearidade da curvatura,  $Q$  é obviamente bilinear, e além disso temos,

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= \sum_{i=1}^{n-1} g(R(x, z_i)y, z_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} g(R(y, z_i)x, z_i) \\ &= Q(x, y) \end{aligned}$$

## 1.5 Curvatura

---

segue que  $Q$  é simétrica e  $Q(x, x) = (n - 1)Ric_p(x)$ . Dada a invariância do traço de uma aplicação linear, segue que  $Q(x, x)$  não depende da base  $\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$  escolhida. Isso mostra que a aplicação  $Ric_p(x)$  está intrinsecamente definida.

A forma bilinear  $\frac{1}{n-1}Q$  é chamada de *tensor de Ricci*. Dado um vetor unitário  $N \in T_pM$  o número  $Ric_p(N, N) := \frac{1}{n-1}Q(N, N)$  é chamado *curvatura de Ricci* na direção de  $N$ .

## Capítulo 2

# Geometria das Subvariedades

Nesse capítulo estaremos interessados em tratar da situação em que temos  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{m+n=k}$  uma aplicação diferenciável entre variedades suaves tal que  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \overline{M}$  é injetiva para todo  $p \in M$ . Nesse caso dizemos que  $f$  é uma *imersão*. Veremos que de uma forma natural a métrica de  $\overline{M}$  induz uma métrica sobre  $M$ . E se além disso,  $f$  é um homeomorfismo de  $M$  sobre  $f(M) \subset \overline{M}$  dizemos que  $f$  é um *mergulho*. Quando  $M$  é subconjunto de  $\overline{M}$  e a aplicação inclusão  $i : M \rightarrow \overline{M}$  é um mergulho, dizemos que  $M$  é *subvariedade* de  $\overline{M}$ . As principais referências utilizadas nesse capítulo são [4] e [8].

### 2.1 Imersões Isométricas

Seja  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{m+n=k}$  uma imersão. Se  $\overline{M}^{m+n=k}$  tem uma estrutura Riemanniana,  $f$  induz de maneira natural uma estrutura Riemanniana em  $M$  dada por  $g(u, v)_p := g(df_p(u), df_p(v))_{f(p)}$ ,  $u, v \in T_p M$ . Como  $df_p$  é injetiva,  $g(\cdot, \cdot)_p$  é um produto interno em  $T_p M$ . A métrica de  $M$  é chamada de métrica induzida por  $f$ , e nesse caso dizemos que  $f$  é uma *imersão isométrica*. Queremos estudar as relações entre as geometrias de  $M^n$  e  $\overline{M}^{m+n=k}$ . Então, para

## 2.1 Imersões Isométricas

---

cada  $p \in M$ , existe uma vizinhança  $U \subset M$ , de  $p$ , tal que  $f(U) \subset \overline{M}$  é uma subvariedade de  $\overline{M}$ , isto é, para todo ponto  $p \in M$ , existe uma vizinhança  $\overline{U} \subset \overline{M}$ , de  $f(p)$ , e um difeomorfismo  $x : \overline{U} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$ , em um aberto  $V$  de  $\mathbb{R}^k$ , tais que  $x$  aplica difeomorficamente  $f(U) \cap \overline{U}$  em um aberto do subespaço  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$ . Para simplificar a notação identificaremos  $U$  com  $f(U)$ , cada vetor  $v \in T_q M$  ( $q \in U$ ) com  $df_q(v) \in T_{f(q)} \overline{M}$ , e usando-se o difeomorfismo  $x$ , pode-se estender um campo de vetores definidos em  $U \subset M$  a um campo de vetores definidos em  $\overline{U} \subset \overline{M}$ . Para cada  $p \in M$ , o produto interno em  $T_p \overline{M}$  o decompõe na soma direta,

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp,$$

na qual  $(T_p M)^\perp$  é o complemento ortogonal de  $T_p M$  em  $T_p \overline{M}$ . Se  $v \in T_p \overline{M}$  ( $p \in M$ ), pode-se escrever,

$$v = v^\top + v^\perp,$$

na qual  $v^\top \in T_p M$  é denominada a *componente tangencial* de  $v$ , e  $v^\perp \in (T_p M)^\perp$  é denominada a *componente normal* de  $v$ . Dessa forma temos o *fibrado normal* sobre  $M$  definido por,

$$TM^\perp = \bigcup_{p \in M} (T_p M)^\perp$$

Denotar-se-á por  $\overline{\nabla}$ , a conexão Riemanniana de  $\overline{M}$ . Dados  $X$  e  $Y$  campos vetoriais locais definidos sobre  $M$ , considere  $\overline{X}$  e  $\overline{Y}$  como extensões locais de  $X$  e  $Y$  a  $\overline{M}$ , defini-se,

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^\top$$

e quando não houver perigo de confusão, escrever-se-á  $(\overline{\nabla}_X Y)^\top$ . Verifica-se que esta é uma conexão em  $M$ , e pela unicidade da conexão no teorema de Levi-Civita, é a conexão Riemanniana relativa à métrica induzida em  $M$ . Sejam  $X$  e  $Y$  campos vetoriais locais definidos sobre  $M$ . Então,

$$A(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^\top$$

## 2.1 Imersões Isométricas

---

é um campo local, definido sobre  $\overline{M}$ , normal a  $M$ , que não depende das extensões  $\overline{X}$  e  $\overline{Y}$ . Veja. [8] pág.40. Portanto  $A(X, Y)$  está bem definida. Denote por  $\mathcal{X}(U)^\perp$ , os campos de vetores (diferenciáveis em  $U$ ) normais a  $f(U) \approx U$ .

**Proposição 6.** *Se  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ , a aplicação  $A : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)^\perp$  dada por*

$$A(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

*é bilinear e simétrica.*

**Demonstração.** Veja [8], página 140. ■

Seja  $p \in M$  e  $\eta \in (T_p M)^\perp$ . A aplicação  $H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow$  dada por,

$$H_\eta(X, Y) = \langle A(X, Y), \eta \rangle$$

é pela proposição anterior, uma forma bilinear simétrica.

**Definição 10.** *A forma quadrática  $II_\eta$  definida em  $T_p M$  por,*

$$II_\eta(X) = H_\eta(X, X)$$

*é chamada a a segunda forma fundamental de  $f$  em  $p$  segundo o vetor normal  $\eta$ .*

Às vezes se utiliza também a expressão *segunda forma fundamental* para designar a aplicação  $A$  que em cada  $p \in M$  é uma aplicação bilinear, simétrica, tomando valores em  $(T_p M)^\perp$ . Seja  $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$  a aplicação linear dada por

$$\langle S_\eta(X), Y \rangle = H_\eta(X, Y) = \langle A(X, Y), \eta \rangle .$$

como  $H_\eta$  é simétrica, tem-se que  $S_\eta$  é auto-adjunta.

Temos a seguinte caracterização da aplicação linear auto-adjunta relacionada à segunda forma fundamental,

## 2.1 Imersões Isométricas

---

**Proposição 7.** *Seja  $p \in M, x \in T_pM$  e  $\eta \in (T_pM)^\perp$ . Seja  $N$  uma extensão local de  $\eta$  normal a  $M$ . Então,*

$$S_\eta(x) = -(\nabla_x N)^T. \quad (2.1)$$

**Demonstração.** Veja [8] pág. 142. ■

Escolha  $\{\eta_1, \dots, \eta_m\}$  um referencial ortonormal em  $\mathcal{X}(U)^\perp$  onde  $U$  é vizinhança de um ponto  $p \in M$ , isto é, para cada  $q \in U$ ,  $\eta_1(q), \dots, \eta_m(q)$  é uma base ortonormal de  $(T_qM)^\perp$ , então podemos escrever,

$$\begin{aligned} A(X, Y) &= \sum_{i=1}^m \langle A(X, Y), \eta_i \rangle \eta_i = \sum_{i=1}^m H_{\eta_i}(X, Y) \eta_i = \sum_{i=1}^m \langle S_{\eta_i}(X), Y \rangle \eta_i \\ &= - \sum_{i=1}^m \langle \bar{\nabla}_X \eta_i, Y \rangle \eta_i \end{aligned}$$

Dessa forma, temos uma expressão local para a segunda forma fundamental em termos da derivada covariante. Escolha agora uma base  $\{E_1, \dots, E_n\}$  ortonormal de  $T_pM$ . O vetor normal definido por,

$$H = \sum_{i=1}^n A(E_i, E_i)$$

não depende do referencial  $E_i$  escolhido. De fato, basta observar que,

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^n A(E_i, E_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^k H_{\eta_j}(E_i, E_i) \eta_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^k \langle S_{\eta_j}(E_i), E_i \rangle \eta_j \\ &= \sum_{j=n+1}^k \sum_{i=1}^n \langle S_{\eta_j}(E_i), E_i \rangle \eta_j \\ &= \sum_{j=n+1}^k \text{traço}(S_{\eta_j}) \eta_j \end{aligned} \quad (2.2)$$

## 2.1 Imersões Isométricas

---

Fica assim bem definido, em cada  $p \in M$ , um vetor  $H(p)$  normal a  $M$  em  $p$ , chamado *vetor curvatura média* de  $M$  em  $p$ . Além disso, o quadrado da norma da segunda forma fundamental de  $M$  é definido por,

$$|A|^2 = \sum_{i,j=1}^n |A(E_i, E_j)|^2$$

**Exemplo 4.** Se uma subvariedade é gráfico de uma função  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , o vetor curvatura média é dado por

$$H(p) = \frac{(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx}}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}} N$$

**Exemplo 5.** A curvatura média da esfera  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  de raio  $r$  é dada por  $H(p) = \frac{2}{r} N$

**Exemplo 6.** A curvatura média do plano é identicamente nula

O Próximo teorema relaciona a curvatura de  $M$  com a curvatura de  $\overline{M}$  por meio da segunda forma fundamental de  $M$ . Se  $x, y \in T_p M \subset T_p \overline{M}$ , são linearmente independentes, indicaremos por  $K(x, y)$  a curvatura seccional de  $M$  e  $\overline{K}(x, y)$  a curvatura seccional de  $\overline{M}$  relativa ao plano gerado por  $x$  e  $y$ .

**Teorema 1 (Gauss).** *Seja  $p \in M$  e  $x, y$  vetores ortonormais de  $T_p M$ . Então,*

$$K(x, y) - \overline{K}(x, y) = \langle A(x, x), A(y, y) \rangle - |A(x, y)|^2 \quad (2.3)$$

**Demonstração.** Veja [8] pág. 143 ■

Nosso interesse principal nesse trabalho será trabalhar com imersões do tipo  $f : M^{n-1} \rightarrow \overline{M}^n$ , nesse caso dizemos que  $M^{n-1}$  é uma *hipersuperfície* em  $M^n$ . Sendo assim a equação [2.3] assume uma expressão mais simples. Sejam  $p \in M$  e  $\eta \in (T_p M)^\perp$ ,  $|\eta| = 1$ . Sejam  $\{E_1, \dots, E_{n-1}\}$  uma base ortonormal de  $T_p M$  para a qual a aplicação  $S_\eta = S$  é diagonal, isto é,  $S(E_i) = \lambda_i E_i$ ,  $i =$

## 2.1 Imersões Isométricas

---

$1, \dots, n-1$  onde  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  são os valores próprios de  $S$ . Então  $H(E_i, E_i) = \lambda_i$  e  $H(E_i, E_j) = 0$ , se  $i \neq j$ . Logo [2.3] se escreve como,

$$\begin{aligned} K(E_i, E_j) - \overline{K}(E_i, E_j) &= \langle H(E_i, E_i)\eta, H(E_j, E_j)\eta \rangle - |H(E_i, E_j)\eta|^2 \\ &= \lambda_i \lambda_j \langle \eta, \eta \rangle \\ &= \lambda_i \lambda_j \end{aligned} \tag{2.4}$$

**Observação 3.** Se  $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma hipersuperfície em  $\mathbb{R}^3$  a equação [2.4] fica,

$$K(E_1, E_2) = \lambda_1 \lambda_2$$

já que  $\overline{K}(E_1, E_2) \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^n$ . O produto  $\lambda_i \lambda_j$  e a média  $\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2}$  são conhecidos respectivamente como *curvatura Gaussiana* e *curvatura média* de  $M^2$  no ponto  $p$  ( algumas literaturas consideram apenas soma  $(\lambda_1 + \lambda_2)$  na definição de curvatura média). Observe por (2.2) que a curvatura média é o traço da aplicação auto adjunta  $S_\eta = S$  associada a segunda forma fundamental. E nesse caso se traço( $S$ ) = 0 , ou seja,  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$  temos,

$$\begin{aligned} |A|^2 &= \sum_{i,j=1}^2 |A(E_i, E_j)|^2 \\ &= \sum_{i=1}^2 |A(E_i, E_i)|^2 \\ &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 \\ &= -2K \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde  $K$  é a curvatura Gaussiana de  $M^2$ .

Uma imersão  $f : \Sigma^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é *geodésica* em  $p \in \Sigma$  se a segunda forma fundamental  $II$  é identicamente nula em  $p$ . A imersão  $f$  é *totalmente geodésica* se ela é geodésica em todo  $p \in \Sigma$ .

## 2.2 Divergente, Gradiente e Laplaciano em Subvariedades

---

**Proposição 8.** *Uma imersão  $f : M \rightarrow \overline{M}$  é geodésica em  $p \in M$  se e só se toda geodésica  $\gamma$  de  $M$  partindo de  $p$  é geodésica em  $p \in \overline{M}$ .*

**Demonstração.** Veja [8] pág. 145 ■

**Corolário 1.** *As hipersuperfícies totalmente geodésicas do  $\mathbb{R}^n$  são os subespaços afins.*

**Exemplo 7.** Seja  $M = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ , e seja  $\Sigma$  uma subvariedade obtida pela intersecção de um plano que passa pela origem de  $\mathbb{R}^3$  com  $\mathbb{S}^2$ . Sabemos que tais subvariedades chamadas de *grandes círculos* são geodésicas em  $M$ . Decorre da proposição (8) que  $\Sigma$  é subvariedades totalmente geodésicas de  $\mathbb{S}^2$ .

## 2.2 Divergente, Gradiente e Laplaciano em Subvariedades

Estamos interessados agora em definir o conceito de Divergente, Gradiente e Laplaciano em uma hipersuperfície  $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ . Tais conceitos serão amplamente usados nos capítulos seguintes.

**Definição 11.** *Seja  $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  uma hipersuperfície e seja um  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ , a divergência de  $X$  é uma função  $\text{div}_\Sigma : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  definida em um ponto  $p \in \Sigma$  como,*

$$\text{div}_\Sigma X = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle$$

onde  $E_1, \dots, E_{n-1}$  é uma base ortonormal de  $T_p \Sigma$ .

Note que a definição de divergência não depende da base ortonormal escolhida. De fato, basta observar que  $\text{div}_\Sigma : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  é o traço da aplicação linear  $\nabla_{(\cdot)} X : T_p \Sigma \rightarrow T_p \Sigma$  dada por  $Y(p) \rightarrow \nabla_Y X(p)$ . Aqui por abuso de notação estamos considerando  $\nabla_Y X(p) = (\overline{\nabla}_Y X)^T(p)$ .

## 2.2 Divergente, Gradiente e Laplaciano em Subvariedades

---

**Definição 12.** *Seja  $f \in C^\infty(\Sigma)$ , definimos o gradiente de  $f$  como o único campo vetorial  $\nabla_\Sigma f \in \mathcal{X}(\Sigma)$  tal que,*

$$\langle \nabla_\Sigma f, X \rangle = Xf \quad (2.6)$$

para todo campo  $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$

A unicidade de tal campo, caso exista, é imediatamente verificada. Quanto a existência, basta considerar  $\{E_1, \dots, E_{n-1}\}$  um referencial ortonormal em uma vizinhança de um ponto  $p \in \Sigma$  e definir o campo  $Z \in \mathcal{X}(\Sigma)$

$$Z = \sum_{i=1}^{n-1} E_i(f)E_i$$

Verifica-se facilmente que  $Z$  satisfaz (2.6). Além disso  $Z$  não depende do referencial ortonormal escolhido. De fato, se  $\{E'_1, \dots, E'_{n-1}\}$  é outro referencial ortonormal, com  $E'_i = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ji}E_j$ , a matriz  $a_{ij}$  é ortogonal na vizinhança de  $p \in \Sigma$ , ou seja,  $AA^t = I$  logo,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} E'_i(f)E'_i &= \sum_{i,j,k=1}^{n-1} a_{ji}a_{ki}E_j(f)E_k = \sum_{j,k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_{ji}(a_{ik})^t E_j(f)E_k \\ &= \sum_{j,k=1}^{n-1} \delta_{jk}E_j(f)E_k = \sum_{j=1}^{n-1} E_j(f)E_j \end{aligned}$$

ou seja,  $\nabla_\Sigma f = Z$ . Podemos facilmente verificar que o divergente satisfaz a regra de Leibniz, ou seja,

$$\operatorname{div}_\Sigma(fX) = \langle \nabla_\Sigma f, X \rangle + f \operatorname{div}_\Sigma(X)$$

**Definição 13.** *Seja  $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  uma hipersuperfície e seja  $f \in C^\infty(\Sigma)$  definimos o operador Laplaciano sobre  $\Sigma$  como*

$$\Delta_\Sigma f = \operatorname{div}_\Sigma(\nabla_\Sigma f)$$

Dizemos que um referencial  $E_1, \dots, E_{n-1}$  em  $\mathcal{X}(U)$  é *geodésico* em  $p \in U$  se é ortonormal em cada  $q \in U$  e além disso  $\nabla_{E_i} E_j(q) = 0$ .

## 2.2 Divergente, Gradiente e Laplaciano em Subvariedades

---

Se considerarmos um referencial geodésico, operador Laplaciano toma uma forma mais simplificada como mostra a seguir,

$$\begin{aligned}\Delta_{\Sigma}f &= \operatorname{div}_{\Sigma}(\nabla_{\Sigma}f) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_i} \nabla_{\Sigma}f, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle \nabla_{E_i} \sum_{j=1}^{n-1} E_j(f) E_j, E_i \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n-1} \langle E_j(f) \nabla_{E_i} E_j + E_i(E_j(f)) E_j, E_i \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n-1} E_i(E_j(f)) \langle E_j, E_i \rangle + \langle \nabla_{E_i} E_j, E_i \rangle E_j(f) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} E_i(E_i(f))\end{aligned}$$

# Capítulo 3

## Superfícies Mínimas

Nesse capítulo trataremos de alguns conceitos básicos da teoria de superfícies mínimas tendo como principal objetivo a demonstração do teorema de Bernstein [5]. Iniciaremos com a primeira fórmula de variação e algumas de suas consequências. Em seguida teremos a segunda fórmula de variação e a desigualdade de estabilidade como consequência desta. Com a desigualdade de estabilidade e a desigualdade de Simon's obteremos uma estimativa  $L^p$  para  $|A|^2$  que será fundamental na demonstração do teorema supracitado. As principais referências aqui utilizadas são [9], [4] e [20].

### 3.1 Primeira Fórmula de Variação

Antes de tratar do caso geral consideraremos uma variação de uma hipersuperfície que é gráfico de uma função. Para isso, suponha que  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^2$  e consideremos,

$$\text{Graf}(u) = \{(x, y, u(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \Omega\}$$

então a área (ou volume) do gráfico é dada por,

### 3.1 Primeira Fórmula de Variação

---

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}(\text{Graf}(u)) &= \int_{\Omega} |(1, 0, u_x) \times (0, 1, u_y)| \, dx dy \\
 &= \int_{\Omega} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} \, dx dy \\
 &= \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \, dx dy
 \end{aligned}$$

Consideremos agora uma família de gráficos  $\text{Graf}(u)(t) = \{(x, y, u(x, y) + t\eta(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \Omega\}$  onde  $\eta$  é de classe  $C^2$  tal que  $\eta|_{\partial\Omega} = 0$ . Observe que  $\text{Graf}(u)(0) = \text{Graf}(u)$  e  $\partial \text{Graf}(u)(t) = \partial \text{Graf}(u)$  para todo  $t$ . Temos então,

$$\text{Vol}(\text{Graf}(u)(t)) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u + t\nabla\eta|^2} \, dx dy$$

derivando a expressão acima em relação ao parâmetro  $t$  obtemos,

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Vol}(\text{Graf}(u)(t)) &= \int_{\Omega} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sqrt{1 + |\nabla u + t\nabla\eta|^2} \, dx dy \\
 &= \int_{\Omega} \frac{\langle \nabla u, \nabla\eta \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \, dx dy \\
 &= \int_{\Omega} \text{div} \left( \eta \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) \, dx dy \\
 &\quad - \int_{\Omega} \eta \text{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) \, dx dy \\
 &= - \int_{\Omega} \eta \text{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) \, dx dy
 \end{aligned}$$

concluimos então que  $\text{Graf}(u)$  é ponto crítico do funcional volume se  $u$  satisfaz a equação,

$$\text{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0 \tag{3.1}$$

que é chamada de *equação de superfície mínima*. Observe que,

### 3.1 Primeira Fórmula de Variação

---

$$\begin{aligned}
 0 &= \left[ \left( \frac{u_x}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right)_x + \left( \frac{u_y}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right)_y \right] \\
 &= \frac{(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy}}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

o que resulta em,

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0 \quad (3.3)$$

Observe que a expressão (3.2) é a curvatura média do gráfico. A equação (3.3) é às vezes chamada também de *equação de Lagrange*. Veremos agora que o gráfico de uma função definida em um domínio  $\Omega$  satisfazendo a equação de superfície mínima, não é apenas um ponto crítico do funcional volume, é também um minimizante de área sobre todas as superfícies contidas no cilindro  $\Omega \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$  cujo bordo coincide com o bordo do gráfico de  $u$ . Para isso, procedemos da seguinte forma: Seja  $N$  o vetor normal à superfície dado por,

$$N = \frac{(-u_x, -u_y, 1)}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}$$

considere  $\omega$  uma forma de grau dois em  $\Omega \times \mathbb{R}$  dada por,

$$\omega(X, Y) = \det(X, Y, N)$$

onde  $X, Y \in \mathbb{R}^3$ . Determinamos  $\omega$  da seguinte maneira,

$$\omega \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -u_x \\ 0 & 1 & -u_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}$$

$$\omega \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -u_x \\ 0 & 0 & -u_y \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-u_y}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}$$

### 3.1 Primeira Fórmula de Variação

---

$$\omega \left( \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -u_x \\ 1 & 0 & -u_y \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-u_x}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}$$

logo,

$$\omega = \frac{dx \wedge dy - u_x dy \wedge dz + u_y dx \wedge dz}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}$$

calculando a diferencial exterior,

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) dx \wedge dy \wedge dz \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-u_x}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) dx \wedge dy \wedge dz \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-u_y}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-u_x}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-u_y}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) dx \wedge dy \wedge dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

visto que  $u$  satisfaz a equação de superfície mínima (3.1). Logo, temos que  $\omega$  é fechada. Dado  $X, Y \in \mathbb{R}^3$  vetores ortogonais em um ponto  $(x, y, z) \in \Omega \times \mathbb{R}$  temos,

$$|\omega(X, Y)| \leq 1$$

e a igualdade é assegurada se e somente se  $X, Y \in T_{(x,y,u(x,y))} \text{Graf}(u)$ . Usaremos a forma  $\omega$  assim construída pra demonstrar o próximo resultado.

**Proposição 9.** *Se  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\partial\Omega$  regular é solução da equação de Lagrange cujo gráfico é  $\text{Graf}(u)$  então para qualquer outra superfície  $\Sigma \subset \Omega \times \mathbb{R}$  tal que  $\partial\Sigma = \text{Graf}(u)$  temos,*

$$\text{Vol}(\text{Graf}(u)) \leq \text{Vol}(\Sigma) \tag{3.4}$$

**Demonstração.** Visto que  $\omega$  é fechada e que  $\text{Graf}(u)$  e  $\Sigma$  delimitam uma

### 3.1 Primeira Fórmula de Variação

---

região em  $\Omega \times \mathbb{R}$  onde vale o teorema de Stokes, e temos que,

$$\int_{\text{Graf}(u)} \omega = \int_{\Sigma} \omega$$

usando que  $|\omega(X, Y)| \leq 1$  e  $|\omega(X, Y)| = 1$  se e somente se  $X, Y \in T_p \text{Graf}(u)$  obtemos,

$$\text{Vol}(\text{Graf}(u)) = \int_{\text{Graf}(u)} \omega = \int_{\Sigma} \omega \leq \text{Vol}(\Sigma)$$

■

**Corolário 2.** *Se  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é solução da equação de Lagrange e  $D_r \subset \Omega$  então temos,*

$$\text{Vol}(\Sigma \cap B_r) \leq \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^2)}{2} r^2 = 2\pi r^2 \quad (3.5)$$

onde  $B_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < r\}$  e  $D_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$

**Demonstração.** Basta observar que  $\Sigma \cap \partial B_r$  divide  $\partial B_r$  em duas componentes uma das quais tem volume menor ou igual a  $\frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^2)}{2} r^2$ . Chamando de  $\Sigma'$  a componente de  $\partial B_r$  com volume menor ou igual a  $2\pi r^2$  e supondo que  $\Sigma' \subset D'_r \times \mathbb{R}$  onde  $D'_r \subset D_r$  é tal que  $u(D'_r) = \Sigma \cap B_r$  o resultado segue de (3.4). ■

**Observação 4.** Vimos pela proposição (9) que se o gráfico de uma função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz a equação de superfície mínima então  $\text{Graf}(u)$  possui o volume mínimo dentre todas as superfícies contidas no cilindro  $\Omega \times \mathbb{R}$  cujo bordo coincide com o bordo  $\partial \text{Graf}(u)$ . Entretanto, se considerarmos superfícies com pontos fora de  $\Omega \times \mathbb{R}$ , podemos facilmente construir uma superfície  $\Sigma$  tal que  $\partial \Sigma = \partial \text{Graf}(u)$  e  $\text{Vol}(\Sigma) < \text{Vol}(\text{Graf}(u))$ , ou seja, nesse caso  $\text{Graf}(u)$  não é absolutamente minimizante. A pergunta que surge é se existe alguma condição sobre  $\Omega$  para que todas as superfícies com bordo coincidindo com  $\text{Graf}(u)$  tenha volume maior que  $\text{Vol}(\text{Graf}(u))$ . A condição suficiente é que o domínio  $\Omega$  seja convexo. De fato, nesse caso a função projeção  $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \Omega \times \mathbb{R}$  é Lipschitz tal que  $P(x) = x$  para todo  $x \in \Omega \times \mathbb{R}$ . Se

### 3.1 Primeira Fórmula de Variação

---

$\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  é qualquer outra superfície tal que  $\partial\Sigma = \partial \text{Graf}(u)$  então  $\Sigma' = P(\Sigma)$  é tal que  $\text{Vol}(\Sigma') \leq \text{Vol}(\Sigma)$ . Aplicando a proposição (9) para  $\Sigma'$  temos,  $\text{Vol}(\text{Graf}(u)) \leq \text{Vol}(\Sigma)$  como queríamos.

De maneira semelhante, se  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz a equação de superfície mínima (3.1) e supondo que  $\Omega$  contém uma bola  $(n-1)$ -dimensional de raio  $r$  e centrada na origem vale ainda,

$$\text{Vol}(\Sigma \cap B_r) \leq \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})}{2} r^{n-1} \quad (3.6)$$

onde  $B_r$  é a bola  $n$ -dimensional de raio  $r$  e centro na origem.

Consideremos agora uma variação de uma imersão em uma variedade Riemanniana  $M$  qualquer.

Seja  $f : \Sigma^k \rightarrow M^n$  uma imersão isométrica. Uma *variação* de  $\Sigma$  com suporte compacto e bordo fixo é uma aplicação diferenciável  $F : \Sigma^k \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M^n$  tal que,

1.  $F = Id$  fora de um conjunto compacto de  $\Sigma$
2.  $F(x, 0) = x$
3.  $\forall x \in \partial\Sigma$  temos,  $F(x, t) = x$

Para cada  $x_0 \in \Sigma$  fixo temos uma curva  $F(x_0, t) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M^n$ . O campo  $F_t := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F(x_0, t)$  é chamado de *campo variacional* da variação  $F$ .

**Proposição 10.** *Seja  $f : \Sigma^k \rightarrow M^n$  uma imersão isométrica e  $F : \Sigma^k \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M^n$  uma variação de  $\Sigma^k$  com suporte compacto e bordo fixo. Então,*

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Vol}(F(\Sigma, t)) = - \int_{\Sigma} g(F_t, H) dV_0$$

**Demonstração.** Demonstração: Consideremos  $(x_i)$  um sistema de coordenadas locais em  $\Sigma^k$ . Para cada  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ ,  $F(\cdot, t) : \Sigma^k \rightarrow M^n$  é uma imersão de  $\Sigma^k$  em  $M^n$ . Logo  $(F \circ x_i)$  é uma carta local em  $F(\Sigma, t) \subset M^n$ .

### 3.1 Primeira F3rmula de Varia33o

---

Fa3amos  $F_j := d(F \circ x_i) \cdot e_j = dF \circ dx_i \cdot e_j = dF \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$  onde  $e_j$  3 o vetor can3nico do  $\mathbb{R}^k$ . Observe que  $F_j = F_j(t)$ . Defina  $g_{ij}(t) := g(F_{x_i}, F_{x_j})$  e  $v_t := \sqrt{\det(g_{ij}(t))} \sqrt{\det(g^{ij}(0))}$  podemos facilmente mostrar que a fun33o  $v_t$  n3o depende da escolha de cartas. Temos ent3o:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(F(\Sigma, t)) &= \int_{\Sigma} dV_t = \int_{\Sigma} \sqrt{\det(g_{ij}(t))} dx \\ &= \int_{\Sigma} \sqrt{\det(g_{ij}(t))} \sqrt{\det(g^{ij}(0))} \sqrt{\det(g_{ij}(0))} dx \\ &= \int_{\Sigma} v_t \sqrt{\det(g_{ij}(0))} dx \\ &= \int_{\Sigma} v_t dV_0 \end{aligned}$$

onde  $dV_t$  3 a forma de volume em  $F(\Sigma, t)$  e  $dV_0$  3 a forma de volume em  $\Sigma^k$ .

Logo,

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Vol}(F(\Sigma, t)) = - \int_{\Sigma} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} v_t dV_0$$

para avaliar  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} v_t$  escolheremos uma carta normal em um ponto  $x \in \Sigma^k$ .

Dessa forma  $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$  e  $\sqrt{\det(g_{ij}(0))} = \sqrt{\det(g^{ij}(0))} = 1$ . Pela comutatividade da derivada covariante, ou seja,  $\nabla_{F_t} F_{x_i} - \nabla_{F_{x_i}} F_t = 0$  temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} v_t &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \sqrt{\det(g_{ij}(t))} \sqrt{\det(g^{ij}(0))} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \sqrt{\det(g_{ij}(t))} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij}(0))}} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \det(g_{ij}(t)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g(F_{x_i}, F_{x_i}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k F_t g(F_{x_i}, F_{x_i}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k 2g(\nabla_{F_t} F_{x_i}, F_{x_i}) \\ &= \sum_{i=1}^k g(\nabla_{F_{x_i}} (F_t^T + F_t^N), F_{x_i}) \\ &= \sum_{i=1}^k g(\nabla_{F_{x_i}} F_t^T, F_{x_i}) + \sum_{i=1}^k g(\nabla_{F_{x_i}} F_t^N, F_{x_i}) \\ &= \text{div}_{\Sigma} F_t^T - g(F_t, H) \end{aligned}$$

### 3.1 Primeira Fórmula de Variação

---

na última igualdade usamos que:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^k g(\nabla_{F_{x_i}} F_t^N, F_{x_i}) &= \sum_{i=1}^k (F_{x_i} g(F_t^N, F_{x_i}) - g(F_t^N, \nabla_{F_{x_i}} F_{x_i})) \\
 &= \sum_{i=1}^k -g(F_t^N, \nabla_{F_{x_i}} F_{x_i}) = \sum_{i=1}^k -g(F_t^N, (\nabla_{F_{x_i}} F_{x_i})^N) \\
 &= -g(F_t^N, \sum_{i=1}^k (\nabla_{F_{x_i}} F_{x_i})^N) = -g(F_t^N, \sum_{i=1}^k A(F_{x_i}, F_{x_i})) \\
 &= -g(F_t, H)
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} v_t = \operatorname{div}_{\Sigma} F_t^T - g(F_t, H)$$

usando o fato que a variação tem suporte compacto e bordo fixo teremos que  $F_t$  será nulo sobre  $\partial\Sigma^k$ . Assim, pelo Teorema da divergência temos:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Sigma} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} v_t dV_0 &= \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma} F_t^T dV_0 - \int_{\Sigma} g(F_t, H) dV_0 \\
 &= 0 - \int_{\Sigma} g(F_t, H) dV_0 \\
 &= - \int_{\Sigma} g(F_t, H) dV_0
 \end{aligned}$$

de onde segue o resultado. ■

Dessa forma podemos ver que  $\Sigma^k$  é ponto crítico do funcional volume se e somente se o seu campo de curvatura média é identicamente nulo.

**Definição 14.** *Uma subvariedade imersa  $\Sigma^k \subset M^n$  é mínima se o seu campo de curvatura média é identicamente nulo.*

Se a superfície  $\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$  é gráfico de uma função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  onde  $\Omega$  é um conexo de  $\mathbb{R}^2$  com fronteira regular, ou seja,

$$\Sigma = \{(x, y, u(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \Omega\}$$

### 3.1 Primeira Fórmula de Variação

---

a curvatura média de  $\Sigma$  ser identicamente nula é equivalente ao fato da função  $u$  satisfazer a equação,

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0 \quad (3.7)$$

que é a equação que obtemos em (3.3).

**Exemplo 8.** Um plano  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície mínima. De fato já que a curvatura média é identicamente nula.

**Exemplo 9.** A superfície  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  parametrizada por,

$$\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au) \quad 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty$$

conhecida como *helicóide* (figura 3.1) é uma superfície mínima.

**Exemplo 10.** A superfície obtida pela revolução da catenária  $x = a \cosh(z/a)$  em torno do eixo  $z$  é conhecida como *catenóide* (figura 3.2) tem a seguinte parametrização

$$\varphi(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av), \quad 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty$$

**Exemplo 11.** A esfera  $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$  não é uma superfície mínima em  $\mathbb{R}^3$ . Observe que  $N = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$  é um campo normal unitário à esfera. Escolha o ponto  $p = (0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2$ , considere uma curva  $N(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  tal que  $N(0) = (0, 0, 1)$ . Como  $(x_1(t))^2 + (x_2(t))^2 + (x_3(t))^2 = 1$  temos  $2x_1(t)x_1'(t) + 2x_2(t)x_2'(t) + 2x_3(t)x_3'(t) = 0$  o que resulta em  $x_3'(0) = 0$  ou seja  $N'(0) = (x_1'(0), x_2'(0), 0)$ . Segue por (2.1) que  $S(x) = -(\bar{\nabla}_x N)^T = -x$  para todo  $x \in T_p \mathbb{S}^2$ . Resulta de (2.2) a o vetor curvatura média é  $H = -2N$ , logo  $\mathbb{S}^2$  não pode ser mínima.

Seja  $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  uma hipersuperfície. Dado  $X \in \mathcal{X}(M)$  em cada ponto  $p \in \Sigma$  temos a decomposição  $X = X^T + X^N$ . Segue que,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\Sigma X &= \operatorname{div}_\Sigma X^T + \operatorname{div}_\Sigma X^N \\ &= \operatorname{div}_\Sigma X^T - \langle X, H \rangle \end{aligned}$$

### 3.1 Primeira Fórmula de Variação

---

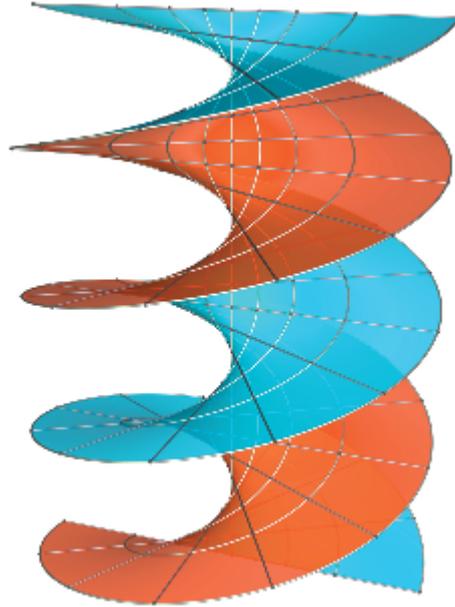


Figura 3.1: helicóide

se  $X$  é um campo com suporte compacto e que se anula em  $\partial\Sigma$  temos,

$$\int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma} X dV = - \int_{\Sigma} \langle X, H \rangle dV \quad (3.8)$$

decorre daí que  $\Sigma$  é mínima se e somente se,

$$\int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma} X dV = 0$$

para todo campo  $X$  definido em uma vizinhança de  $\Sigma$  com suporte compacto e que se anula em  $\partial\Sigma$ . Como consequência da primeira fórmula de variação temos a seguinte proposição.

**Proposição 11.** *Seja  $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  uma hipersuperfície. Temos que  $\Sigma$  é mínima se e somente se as funções coordenadas são harmônicas.*

### 3.1 Primeira Fórmula de Variação

---

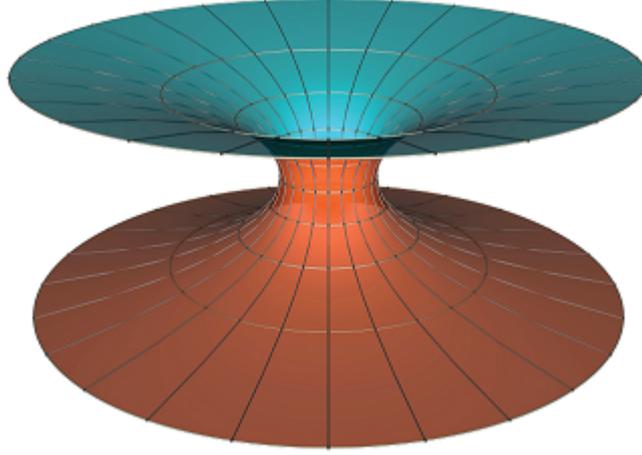


Figura 3.2: catenóide

**Demonstração.** Seja  $\eta \in C_0^\infty(\Sigma)$  e  $\eta|_{\partial\Sigma} = 0$  e seja  $X_i \in \mathcal{X}(M)$  com  $X_i := e_i$  onde  $e_i$  é o vetor canônico do  $\mathbb{R}^n$ . Observe que  $x_i : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow x_i$  e tal que  $\nabla_{\mathbb{R}^n} x_i = X_i$ . Temos que  $\eta X_i$  é um campo sobre  $\Sigma$  com suporte compacto e que se anula em  $\partial\Sigma$  logo,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\Sigma(\eta X_i) &= \langle \nabla_\Sigma \eta, X_i \rangle + \eta \operatorname{div}_\Sigma X_i \\ &= \langle \nabla_\Sigma \eta, \nabla_\Sigma x_i \rangle \end{aligned}$$

usando (3.8) obtemos,

$$- \int_\Sigma \langle \eta X_i, H \rangle dV = \int_\Sigma \operatorname{div}_\Sigma(\eta X_i) dV = \int_\Sigma \langle \nabla_\Sigma \eta, \nabla_\Sigma x_i \rangle dV$$

usando a primeira fórmula de Green e o fato que  $\eta$  tem suporte compacto obtemos,

$$- \int_\Sigma \langle \eta X_i, H \rangle dV = \int_\Sigma \operatorname{div}_\Sigma(\eta X_i) dV = \int_\Sigma \langle \nabla_\Sigma \eta, \nabla_\Sigma x_i \rangle dV = - \int_\Sigma \eta \Delta_\Sigma x_i dV$$

logo, se  $\Sigma$  é mínima então,

$$- \int_\Sigma \eta \Delta_\Sigma x_i dV = 0$$

### 3.1 Primeira Fórmula de Variação

---

e como  $\eta$  é arbitrária,  $\Delta_\Sigma x_i = 0$ . Reciprocamente, se  $\Delta_\Sigma x_i = 0$  então,

$$- \int_\Sigma \langle \eta X_i, H \rangle dV = 0$$

para qualquer  $\eta$  portanto  $H = 0$ . ■

**Proposição 12.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana fechada, isto é, compacta e sem bordo. Se  $f \in C^\infty(M)$  é tal que  $\Delta f(p) \geq 0$  para todo  $p \in M$  então  $f$  é constante.*

**Demonstração.** Seja  $X = \nabla f$ . Pelo teorema da divergência,

$$\int_M \Delta f dV = \int_M \operatorname{div} X dV = 0$$

já que  $\partial M = \emptyset$ . Como  $\Delta f \geq 0$  segue que  $\Delta f \equiv 0$ . Observe que,  $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$  e para  $f = g$ ,  $\nabla f^2 = 2f\nabla f$ . Logo,  $\Delta f^2 = \operatorname{div}(\nabla f^2) = \operatorname{div}(2f\nabla f) = 2\langle \nabla f, \nabla f \rangle + 2f\Delta f$ . Por integração obtemos,

$$\int_M \Delta f^2 dV = 2 \int_M |\nabla f|^2 dV + 2 \int_M f \Delta f dV$$

usando o teorema da divergência e que  $\Delta f = 0$  obtemos,

$$2 \int_M |\nabla f|^2 dV = 0$$

como  $|\nabla f|^2 \geq 0$  temos  $\nabla f = 0$ , ou seja,  $f$  é constante. ■

**Corolário 3.** *Não existe hipersuperfície mínima fechada em  $\mathbb{R}^n$*

**Demonstração.** Seja  $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  uma hipersuperfície mínima fechada. Pela proposição (11) as funções coordenadas de  $\Sigma$  são harmônicas ou seja  $\Delta_\Sigma x_i = 0$ . Segue pela proposição (12) que as funções coordenadas são constantes, e sendo assim,  $\Sigma$  se degenera em um ponto, o que não pode acontecer. ■

### 3.2 Segunda Fórmula de Variação

---

## 3.2 Segunda Fórmula de Variação

Vimos na secção anterior que se uma superfície  $\Sigma$  tem o seu campo de curvatura média identicamente nulo então tal superfície é ponto crítico do funcional  $\text{Vol}(F(\Sigma, t))$  com  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  para qualquer variação  $F$  de  $\Sigma$  com suporte compacto e bordo fixo. Nosso interesse agora é saber quando  $\Sigma$  é além de ponto crítico do funcional volume, um ponto de mínimo para qualquer variação. Para isso, calcularemos a segunda derivada do funcional Volume e para o caso de  $\frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=0} \text{Vol} F(\Sigma, t) \geq 0$ , diremos que tais superfícies são estáveis. Obteremos alguns resultados básicos para superfícies estáveis nas secções seguintes.

**Proposição 13.** *Seja  $f : \Sigma^k \rightarrow M^n$  uma imersão isométrica e  $F : \Sigma^k \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M^n$  uma variação de  $\Sigma$  com suporte compacto e bordo fixo cujo campo variacional seja normal, isto é,  $F_t^T \equiv 0$ . Então vale,*

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=0} \text{Vol}(F(\Sigma, t)) &= - \sum_{i,j=1}^k \int_{\Sigma} g(F_t, A(F_{x_i}, F_{x_j})) dV_0 + \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma}^N F_t|^2 dV_0 \\ &\quad - \sum_{i=1}^k \int_{\Sigma} g(R_M(F_{x_i}, F_t)F_{x_i}, F_t) dV_0 \end{aligned}$$

**Demonstração.** Como na primeira fórmula de variação, consideremos  $(x_i)$  um sistema de coordenadas locais e seja  $g_{ij}(t) := g(F_{x_i}, F_{x_j})$  e façamos também  $v_t := \sqrt{\det(g_{ij}(t))} \sqrt{\det(g^{ij}(0))}$ , então:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=0} \text{Vol}(F(\Sigma, t)) &= \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=0} \int_{\Sigma} dV_t \\ &= \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=0} \int_{\Sigma} v_t dV_0 \\ &= \int_{\Sigma} \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=0} v_t dV_0 \end{aligned}$$

### 3.2 Segunda Fórmula de Variação

---

observemos que,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \sqrt{\det(g_{ij}(t))} &= \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij}(t))}} \frac{d}{dt} (\det(g_{ij}(t))) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij}(t))}} d[\det(g_{ij}(t))] \cdot (g'_{ij}(t)) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij}(t))}} \sum_{j=1}^n \det \begin{bmatrix} g_{11}(t) & \cdots & g'_{1k}(t) & \cdots & g_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}(t) & \cdots & g'_{nk}(t) & \cdots & g_{nn}(t) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij}(t))}} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} g'_{ij}(t) \det(g_{[i,j]}(t)) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij}(t))}} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \det(g_{[i,j]}(t)) g'_{ik}(t) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij}(t))}} \sum_{i,j=1}^n \det(g_{ij}(t)) (g^{-1})_{ji}(t) g'_{ij}(t) \\
&= \frac{\det(g_{ij}(t))}{2\sqrt{\det(g_{ij}(t))}} \sum_{i,j=1}^n (g^{-1})_{ji}(t) g'_{ij}(t) \\
&= \frac{\sqrt{\det(g_{ij}(t))}}{2} \sum_{i,j=1}^n ((g^{-1})^t)_{ij}(t) g'_{ij}(t) \\
&= \frac{\sqrt{\det(g_{ij}(t))}}{2} \operatorname{tr}(((g^{-1})^t)^t)_{ij}(t) g'_{ij}(t) \\
&= \frac{\sqrt{\det(g_{ij}(t))}}{2} \operatorname{tr}((g^{-1})_{ij}(t) g'_{ij}(t)) \\
&= \frac{\sqrt{\det(g_{ij}(t))}}{2} \operatorname{tr}(g'_{ij}(t) g^{lm}(t))
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} \sqrt{\det(g_{ij}(t))} = \frac{\sqrt{\det(g_{ij}(t))}}{2} \operatorname{tr}(g'_{ij}(t) g^{lm}(t)) \quad (3.9)$$

onde  $(g_{[i,j]}(t))$  denota a submatriz obtida da matriz  $(g_{i,j}(t))$  extraído-se a  $i$ -ésima linha e a  $j$ -ésima coluna. Multiplicando  $2\sqrt{\det(g^{ij}(0))}$  em ambos os

### 3.2 Segunda F3rmula de Varia33o

---

lados de (3.9) obt3m-se,

$$2\frac{d}{dt}v_t = \text{tr}(g'_{ij}(t)g^{lm}(t))v_t \quad (3.10)$$

e derivando novamente obtemos,

$$\begin{aligned} 2\frac{d^2}{dt^2}v_t &= \frac{d}{dt}\{\text{tr}(g'_{ij}(t)g^{lm}(t))v_t\} \\ &= \frac{d}{dt}\{\text{tr}(g'_{ij}(t)g^{lm}(t))\}v_t + \{\text{tr}(g'_{ij}(t)g^{lm}(t))\}\frac{d}{dt}v_t \\ &= \text{tr}(g''_{ij}(t)g^{lm}(t) + g'_{ij}(t)(g^{lm})'(t))v_t + \{\text{tr}(g'_{ij}(t)g^{lm}(t))\}\frac{d}{dt}v_t \\ &= \text{tr}(g''_{ij}(t)g^{lm}(t) + g'_{ij}(t)(g^{lm})'(t))v_t \\ &+ \{\text{tr}(g'_{ij}(t)g^{lm}(t))\}\frac{1}{2}\text{tr}(g'_{ij}(t)g^{lm}(t))v_t \\ &= \text{tr}(g''_{ij}(t)g^{lm}(t) + g'_{ij}(t)(g^{lm})'(t))v_t + \frac{1}{2}\{\text{tr}(g'_{ij}(t)g^{lm}(t))\}^2v_t \end{aligned} \quad (3.11)$$

escolhendo um sistema de coordenadas  $(x_i)$  ortonormal em  $p \in \Sigma^k$ , avaliaremos  $\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} v_t$  como segue: Derivando  $\sum_{k=1}^n g^{lk}(t)g_{km}(t) = \delta_m^l$  obtemos  $\sum_{k=1}^n (g^{lk})'(t)g_{km}(t) + g^{lk}(t)g'_{km}(t) = 0$ . Com isso  $\sum_{k=1}^n (g^{lk})'(0)g_{km}(0) + g^{lk}(0)g'_{km}(0) = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n (g^{lk})'(0)\delta_{km} = -\sum_{k=1}^n g'_{km}(0)\delta_{lk}$ . Portanto  $(g^{lm})'(0) = -g'_{lm}(0)$  e usando isso em (3.11) temos,

$$2\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} v_t = \text{tr}(g''_{ij}(0)) - \text{tr}(g'_{ij}(0)g'_{lm}(0)) + \frac{1}{2}\{\text{tr}(g'_{ij}(0))\}^2 \quad (3.12)$$

usando a compatibilidade da m3trica e o fato que  $\nabla_{F_t}F_{x_i} - \nabla_{F_{x_i}}F_t = 0$  calculamos,

$$\begin{aligned} g'_{ij}(0) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g(F_{x_i}, F_{x_j}) = F_t g(F_{x_i}, F_{x_j}) \\ &= g(\nabla_{F_t}F_{x_i}, F_{x_j}) + g(F_{x_i}, \nabla_{F_t}F_{x_j}) = g(\nabla_{F_{x_i}}F_t, F_{x_j}) + g(F_{x_i}, \nabla_{F_{x_j}}F_t) \\ &= F_{x_i}g(F_t, F_{x_j}) - g(F_{x_i}, \nabla_{F_{x_i}}F_{x_j}) + F_{x_j}g(F_{x_i}, F_t) - g(\nabla_{F_{x_j}}F_{x_i}, F_t) \\ &= -g(F_t, \nabla_{F_{x_i}}F_{x_j}) - g(\nabla_{F_{x_j}}F_{x_i}, F_t) \\ &= -g(F_t, (\nabla_{F_{x_i}}F_{x_j})^N) - g((\nabla_{F_{x_j}}F_{x_i})^N, F_t) \\ &= -g(F_t, A(F_{x_i}, F_{x_j})) - g(A(F_{x_j}, F_{x_i}), F_t) \\ &= -2g(F_t, A(F_{x_i}, F_{x_j})) \end{aligned} \quad (3.13)$$

### 3.2 Segunda Fórmula de Variação

---

usando que  $\Sigma^k$  é mínima temos,

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(g'_{ij}(0)) &= \sum_{i=1}^k g'_{ii}(0) \\
 &= \sum_{i=1}^k -2g(F_t, A(F_{x_i}, F_{x_i})) \\
 &= -2g(F_t, \sum_{i=1}^k A(F_{x_i}, F_{x_i})) \\
 &= -2g(F_t, H) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

substituindo (3.14) em (3.12) obtemos,

$$2 \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} v_t = \text{tr}(g''_{ij}(0)) - \text{tr}(g'_{ij}(0)g'_{lm}(0)) \tag{3.15}$$

e também temos:

$$\begin{aligned}
 g''_{ij}(0) &= \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} g(F_{x_i}, F_{x_j}) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (F_t g(F_{x_i}, F_{x_j})) \\
 &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (g(\nabla_{F_t} F_{x_i}, F_{x_j}) + g(F_{x_i}, \nabla_{F_t} F_{x_j})) \\
 &= F_t g(\nabla_{F_t} F_{x_i}, F_{x_j}) + F_t g(F_{x_i}, \nabla_{F_t} F_{x_j}) \\
 &= g(\nabla_{F_t} \nabla_{F_t} F_{x_i}, F_{x_j}) + g(\nabla_{F_t} F_{x_i}, \nabla_{F_t} F_{x_j}) \\
 &+ g(\nabla_{F_t} F_{x_i}, \nabla_{F_t} F_{x_j}) + g(F_{x_i}, \nabla_{F_t} \nabla_{F_t} F_{x_j})
 \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
 \text{tr}[g''_{ij}(0)] &= \sum_{i=1}^k g''_{ii}(0) \\
 &= \sum_{i=1}^k (2g(\nabla_{F_t} \nabla_{F_t} F_{x_i}, F_{x_i}) + 2g(\nabla_{F_t} F_{x_i}, \nabla_{F_t} F_{x_i}))
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

usando mais uma vez que  $\nabla_{F_t} F_{x_i} - \nabla_{F_{x_i}} F_t = [F_t, F_{x_i}] = 0$  obtemos,

### 3.2 Segunda F3rmula de Varia33o

---

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^k g(\nabla_{F_t} \nabla_{F_t} F_{x_i}, F_{x_i}) &= \sum_{i=1}^k g(\nabla_{F_t} \nabla_{F_{x_i}} F_t, F_{x_i}) \\
&= \sum_{i=1}^k g(\nabla_{F_t} \nabla_{F_{x_i}} F_t - \nabla_{F_{x_i}} \nabla_{F_t} F_t + \nabla_{F_{x_i}} \nabla_{F_t} F_t, F_{x_i}) \\
&= \sum_{i=1}^k g(\nabla_{F_t} \nabla_{F_{x_i}} F_t - \nabla_{F_{x_i}} \nabla_{F_t} F_t - \nabla_{[F_t, F_{x_i}]} F_t, F_{x_i}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^k g(\nabla_{F_{x_i}} \nabla_{F_t} F_t, F_{x_i}) \\
&= \sum_{i=1}^k g(R_M(F_{x_i}, F_t) F_t, F_{x_i}) + \operatorname{div}_\Sigma(\nabla_{F_t} F_t) \quad (3.17)
\end{aligned}$$

substituindo (3.17) em (3.16) teremos,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}[g''_{ij}(0)] &= 2 \sum_{i=1}^k g(\nabla_{F_t} \nabla_{F_t} F_{x_i}, F_{x_i}) + 2 \sum_{i=1}^k g(\nabla_{F_t} F_{x_i}, \nabla_{F_t} F_{x_i}) \\
&= 2 \left( \sum_{i=1}^k g(R_M(F_{x_i}, F_t) F_t, F_{x_i}) + \operatorname{div}_\Sigma(\nabla_{F_t} F_t) \right) \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^k g(\nabla_{F_t} F_{x_i}, \nabla_{F_t} F_{x_i}) \\
&= 2 \sum_{i=1}^k g(R_M(F_{x_i}, F_t) F_t, F_{x_i}) + 2 \operatorname{div}_\Sigma(\nabla_{F_t} F_t) \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^k g((\nabla_{F_t} F_{x_i})^N + (\nabla_{F_t} F_{x_i})^T, (\nabla_{F_t} F_{x_i})^N + (\nabla_{F_t} F_{x_i})^T) \\
&= 2 \sum_{i=1}^k g(R_M(F_{x_i}, F_t) F_t, F_{x_i}) + 2 \operatorname{div}_\Sigma(\nabla_{F_t} F_t) \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^k g((\nabla_{F_t} F_{x_i})^N, (\nabla_{F_t} F_{x_i})^N) + 2 \sum_{i=1}^k g((\nabla_{F_t} F_{x_i})^T, (\nabla_{F_t} F_{x_i})^T) \quad (3.18)
\end{aligned}$$

usando que o sistemas de coordenadas 3ortonormal e que a varia33o 3 normal

### 3.2 Segunda Fórmula de Variação

---

obteremos,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^k g((\nabla_{F_t} F_{x_i})^T, (\nabla_{F_t} F_{x_i})^T) &= \sum_{i,j,l=1}^k g(g(\nabla_{F_t} F_{x_i}, F_{x_j}) F_{x_j}, g(\nabla_{F_t} F_{x_i}, F_{x_l}) F_{x_l}) \\
&= \sum_{i,j,l=1}^k g(\nabla_{F_t} F_{x_i}, F_{x_l}) g(\nabla_{F_t} F_{x_i}, F_{x_j}) g(F_{x_j}, F_{x_l}) \\
&= \sum_{i,j,l=1}^k g(\nabla_{F_t} F_{x_i}, F_{x_l}) g(\nabla_{F_t} F_{x_i}, F_{x_j}) \delta_{jl} \\
&= \sum_{i,j=1}^k g(\nabla_{F_t} F_{x_i}, F_{x_j}) g(\nabla_{F_t} F_{x_i}, F_{x_j}) \\
&= \sum_{i,j=1}^k g(\nabla_{F_t} F_{x_i}, F_{x_j})^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^k g(\nabla_{F_{x_i}} F_t, F_{x_j})^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^k (F_{x_i} g(F_t, F_{x_j}) - g(F_t, \nabla_{F_{x_i}} F_{x_j}))^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^k g(F_t, \nabla_{F_{x_i}} F_{x_j})^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^k g(F_t, (\nabla_{F_{x_i}} F_{x_j})^N)^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^k g(F_t, A(F_{x_i}, F_{x_j}))^2 \tag{3.19}
\end{aligned}$$

e também temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^k g((\nabla_{F_t} F_{x_i})^N, (\nabla_{F_t} F_{x_i})^N) &= \sum_{i=1}^k g((\nabla_{F_{x_i}} F_t)^N, (\nabla_{F_{x_i}} F_t)^N) \\
&= \sum_{i=1}^k |(\nabla_{F_t} F_{x_i})^N|^2 \\
&=: |(\nabla_{\Sigma}^N F_t)|^2 \tag{3.20}
\end{aligned}$$

### 3.2 Segunda F3rmula de Varia33o

---

substituindo (3.19) e (3.20) em (3.18) obtemos,

$$\begin{aligned} \text{tr}[g''_{ij}(0)] &= 2 \sum_{i=1}^k g(R_M(F_{x_i}, F_t)F_t, F_{x_i}) + 2 \text{div}_\Sigma(\nabla_{F_t} F_t) \\ &+ 2|(\nabla_\Sigma^N F_t)|^2 + 2 \sum_{i,j=1}^k g(F_t, A(F_{x_i}, F_{x_j}))^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

usando (3.13) obteremos,

$$\begin{aligned} \text{tr}[g'_{ij}(0)g'_{lm}(0)] &= \sum_{i,j=1}^k g'_{ij}(0)g'_{ji}(0) = \sum_{i,j=1}^k g'_{ij}(0)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^k (-2g(F_t, A(F_{x_i}, F_{x_j})))^2 \\ &= 4 \sum_{i,j=1}^k g(F_t, A(F_{x_i}, F_{x_j}))^2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

substituindo (3.22) e (3.21) em (3.15) obtemos,

$$\begin{aligned} 2 \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} v_t &= \text{tr}(g''_{ij}(0)) - \text{tr}(g'_{ij}(0)g'_{lm}(0)) \\ &= 2 \sum_{i=1}^k g(R_M(F_{x_i}, F_t)F_t, F_{x_i}) + 2 \text{div}_\Sigma(\nabla_{F_t} F_t) \\ &- 2 \sum_{i,j=1}^k g(F_t, A(F_{x_i}, F_{x_j}))^2 + 2|(\nabla_\Sigma^N F_t)|^2 \\ &= -2 \sum_{i=1}^k g(R_M(F_{x_i}, F_t)F_{x_i}, F_t) + 2 \text{div}_\Sigma(\nabla_{F_t} F_t) \\ &- 2 \sum_{i,j=1}^k g(F_t, A(F_{x_i}, F_{x_j}))^2 + 2|(\nabla_\Sigma^N F_t)|^2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} v_t &= - \sum_{i=1}^k g(R_M(F_{x_i}, F_t)F_{x_i}, F_t) + |(\nabla_\Sigma^N F_t)|^2 \\ &- \sum_{i,j=1}^k g(F_t, A(F_{x_i}, F_{x_j}))^2 + \text{div}_\Sigma(\nabla_{F_t} F_t) \end{aligned} \quad (3.24)$$

### 3.2 Segunda Fórmula de Variação

---

integrando (3.24) e usando teorema da divergência obtemos,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \text{Vol}(F(\Sigma, t)) &= - \sum_{i,j=1}^k \int_{\Sigma} g(F_t, A(F_{x_i}, F_{x_i})) dV_0 \\ &\quad + \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma}^N F_t|^2 dV_0 \\ &\quad - \sum_{i=1}^k \int_{\Sigma} g(R_M(F_{x_i}, F_t)F_{x_i}, F_t) dV_0 \end{aligned}$$

■

Sejam  $\Sigma^k \subset M^n$  uma superfície imersa e  $\Gamma(N\Sigma)$  seu fibrado normal. O operador  $L : \Gamma(N\Sigma) \rightarrow \Gamma(TM|_{\Sigma})$  dado por,

$$L(X) = \Delta_{\Sigma}^N(X) + \sum_{i=1}^k R_M(E_i, X)E_i + \tilde{A}(X)$$

é chamado de operador de estabilidade ou operador de Jacobi onde  $\tilde{A}(X)$  é definido por,

$$\tilde{A}(X) = \sum_{i,j=1}^k g(A(E_i, E_j), X)A(E_i, E_j)$$

é chamado de operador de Simon. E o operador  $\Delta_{\Sigma}^N$  definido por,

$$\Delta_{\Sigma}^N(X) = \sum_{i=1}^k (\nabla_{E_i}(\nabla_{E_i}X)^N)^N - \sum_{i=1}^k (\nabla_{(\nabla_{E_i}E_i)^T}X)^N$$

é o laplaciano sobre o fibrado normal. Os vetores  $E_i$  formam uma base ortonormal em  $T_p\Sigma$ .

**Proposição 14.** *Considerando a segunda forma de variação como enunciada anteriormente cujo campo variacional é  $F_t$  temos:*

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \text{Vol}(F(\Sigma, t)) = - \int_{\Sigma} g(F_t, L(F_t)) dV \quad (3.25)$$

### 3.2 Segunda F3rmula de Varia33o

---

**Demonstra33o.** Observemos que,

$$\begin{aligned}
g(F_t, \Delta_\Sigma^N F_t) &= g(F_t, \sum_{i=1}^k (\nabla_{F_{x_i}} (\nabla_{F_{x_i}} F_t)^N)^N) - \sum_{i=1}^k (\nabla_{(\nabla_{F_{x_i}} F_{x_i})^T F_t})^N \\
&= \sum_{i=1}^k g(F_t, (\nabla_{F_{x_i}} (\nabla_{F_{x_i}} F_t)^N)^N) - \sum_{i=1}^k g(F_t, (\nabla_{(\nabla_{F_{x_i}} F_{x_i})^T F_t})^N) \\
&= \sum_{i=1}^k g(F_t, \nabla_{F_{x_i}} (\nabla_{F_{x_i}} F_t)^N) - \sum_{i=1}^k g(F_t, \nabla_{(\nabla_{F_{x_i}} F_{x_i})^T F_t}) \\
&= \sum_{i=1}^k F_{x_i} g(F_t, \nabla_{F_{x_i}} \nabla_{F_{x_i}} F_t) - \sum_{i=1}^k g((\nabla_{F_{x_i}} F_t)^N, (\nabla_{F_{x_i}} F_t)^N) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (\nabla_{F_{x_i}} F_{x_i})^T g(F_t, F_t) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (E_i E_i g(F_t, F_t) - (\nabla_{F_{x_i}} F_{x_i})^T g(F_t, F_t)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^k g((\nabla_{F_{x_i}} F_t)^N, (\nabla_{F_{x_i}} F_t)^N) \\
&= \frac{1}{2} \Delta_\Sigma g(F_t, F_t) - \sum_{i=1}^k g((\nabla_{F_{x_i}} F_t)^N, (\nabla_{F_{x_i}} F_t)^N)
\end{aligned}$$

logo, por integra33o e teorema da diverg3ncia segue que,

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma g(F_t, \Delta_\Sigma^N(F_t)) dV &= - \int_\Sigma \sum_{i=1}^k g((\nabla_{F_{x_i}} F_t)^N, (\nabla_{F_{x_i}} F_t)^N) dV \\
&= - \int_\Sigma |\Delta_\Sigma^N F_t|^2 dV
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Alem disso,

$$g(F_t, \sum_{i=1}^k R_M(F_{x_i}, F_t) F_{x_i}) = \sum_{i=1}^k g(F_t, R_M(F_{x_i}, F_t) F_{x_i}) \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
g(F_t, \tilde{A}(F_t)) &= g(F_t, \sum_{i,j=1}^k g(A(F_{x_i}, F_{x_j}), F_t) A(F_{x_i}, F_{x_j})) \\
&= \sum_{i,j=1}^k g(F_t, A(F_{x_i}, F_{x_j}))^2
\end{aligned} \tag{3.28}$$

### 3.2 Segunda Fórmula de Variação

---

Por (3.26), (3.27) e (3.28) temos,

$$\begin{aligned}
-\int_{\Sigma} g(F_t, L(F_t))dV &= -\int_{\Sigma} g(F_t, \Delta_{\Sigma}^N(F_t))dV \\
&- \int_{\Sigma} g(F_t, \sum_{i=1}^k R_M(F_{x_i}, F_t)F_{x_i})dV \\
&- \int_{\Sigma} g(F_t, \tilde{A}(F_t))dV \\
&= -\sum_{i,j=1}^k \int_{\Sigma} g(F_t, A(F_{x_i}, F_{x_j}))^2 dV + \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma}^N F_t|^2 dV \\
&- \sum_{i=1}^k \int_{\Sigma} g(F_t, R_M(F_{x_i}, F_t)F_{x_i}) \\
&= \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} Vol(F(\Sigma, t))
\end{aligned}$$

■

No caso de hipersuperfícies com fibrado normal trivial o operador de estabilidade fica mais simples, pois passa a operar sobre funções. De fato, seja  $\Sigma^{n-1} \subset M^n$  uma hipersuperfície com fibrado normal trivial  $N$ , dado um campo normal  $X$  sobre  $\Sigma^{n-1} \subset M^n$  podemos escrever  $X = \eta N$  com  $\eta$  diferenciável. Logo, usando o fato que  $g(N, N) = 1 \Rightarrow g(N, \nabla_Y N) = 0$  para todo campo  $Y$  em  $M$  temos,

$$L(\eta N) = (\Delta_{\Sigma} \eta + |A|^2 \eta + \text{Ric}_M(N, N)\eta)N$$

De fato, visto que  $L(\eta N) = \phi N$  para alguma  $\phi \in C^{\infty}(\Sigma)$  temos  $g(L(\eta N), N) = \phi$  portanto considerando  $E_1, \dots, E_n$  um referencial local ortonormal em  $\Sigma^{n-1}$  temos,

$$\begin{aligned}
\phi &= g(L(\eta N), N) \\
&= g(\Delta_{\Sigma}^N(\eta N), N) + g\left(\sum_{i=1}^{n-1} R_M(E_i, \eta N)E_i, N\right) + g(\tilde{A}(\eta N), N)
\end{aligned}$$

### 3.2 Segunda Fórmula de Variação

---

observe que,

$$\begin{aligned}
g(\Delta_\Sigma^N(\eta N), N) &= g\left(\sum_{i=1}^{n-1} (\nabla_{E_i}(\nabla_{E_i}\eta N)^N)^N - \sum_{i=1}^{n-1} (\nabla_{(\nabla_{E_i}E_i)^T\eta N})^N, N\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{E_i}(\nabla_{E_i}\eta N)^N, N) - \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{(\nabla_{E_i}E_i)^T\eta N}, N) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} E_i g(\nabla_{E_i}(\eta N), N) - \sum_{i=1}^{n-1} g((\nabla_{E_i}\eta N)^N, \nabla_{E_i}N) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n-1} (\nabla_{E_i}E_i)^T g(\eta N, N) - \sum_{i=1}^{n-1} g(\eta N, \nabla_{(\nabla_{E_i}E_i)^T}N) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} E_i(E_i\eta g(N, N) - g(\eta N, \nabla_{E_i}N)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n-1} (\nabla_{E_i}E_i)^T \eta g(N, N) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} E_i E_i \eta g(N, N) - \sum_{i=1}^{n-1} (\nabla_{E_i}E_i)^T \eta g(N, N) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} E_i E_i \eta - \sum_{i=1}^{n-1} (\nabla_{E_i}E_i)^T \eta \\
&= \Delta_\Sigma \eta
\end{aligned} \tag{3.29}$$

além disso,

$$g\left(\sum_{i=1}^{n-1} R_M(E_i, \eta N)E_i, N\right) = \eta \sum_{i=1}^{n-1} g(R_M(E_i, N)E_i, N) = \eta \text{Ric}_M(N, N) \tag{3.30}$$

e por fim,

$$\begin{aligned}
g(\tilde{A}(\eta N), N) &= g\left(\sum_{i,j=1}^{n-1} g(A(E_i, E_j), \eta N)A(E_i, E_j), N\right) \\
&= \eta \sum_{i,j=1}^{n-1} g(A(E_i, E_j), N)^2 = \eta \sum_{i,j=1}^{n-1} |A(E_i, E_j)|^2 \\
&= \eta |A|^2
\end{aligned} \tag{3.31}$$

por (3.29), (3.30) e (3.31) temos,

$$\phi = g(L(\eta N), N) = \Delta_\Sigma \eta + |A|^2 + \text{Ric}_M(N, N)$$

### 3.2 Segunda Fórmula de Variação

---

como queríamos. Sendo assim, podemos escrever,

$$L\eta = \Delta_{\Sigma}\eta + |A|^2\eta + \text{Ric}_M(N, N)\eta \quad (3.32)$$

Seja  $\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$  uma hipersuperfície mínima compacta com fibrado normal trivial e seja  $F : \Sigma^2 \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma variação de  $\Sigma$  com bordo fixo. Então a equação (3.25) torna-se mais simples. De fato, observando a equação (3.32), usando o fato que  $\text{Ric}_{\mathbb{R}^3}(N, N) = 0$  onde  $N$  é o vetor normal a  $\Sigma$  em um ponto  $p$ , e que  $\Sigma$  é mínima e portanto vale (2.5) temos,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \text{Vol}(F(\Sigma, t)) &= - \int_{\Sigma} f L f dV \\ &= \int_{\Sigma} f \Delta f + f |A|^2 f dV \\ &= \int_{\Sigma} f \Delta f - 2K f^2 dV \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde  $f \in C^\infty(\Sigma)$  e  $f(p) = 0$  para todo  $p \in \partial\Sigma$ . Para o caso de hipersuperfície mínima completa não compacta consideramos variação  $F : \Sigma^2 \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$  com suporte compacto, isto é, consideraremos funções  $f \in C_0^\infty(\Sigma)$  em (3.33). Dessa forma a derivada (3.33) fornece informações sobre  $\Sigma$  apenas no suporte de  $f$  que por sua vez representa o campo variacional da variação  $F$ .

**Definição 15** (Estabilidade). *Dizemos que uma subvariedade mínima  $\Sigma^k \subset M^n$  é estável se para todas as variações  $F$  com bordo fixo temos:*

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \text{Vol}(F(\Sigma, t)) = - \int_{\Sigma} g(F_t, L(F_t)) dV \geq 0$$

**Definição 16.** *Uma subvariedade completa mínima e sem bordo (possivelmente não compacta) é estável se todo subdomínio compacto de  $\Sigma$  é estável.*

**Exemplo 12.** Hipersuperfície mínima  $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  que é gráfico de função  $u : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  é estável. De fato, segue da observação (4).

**Exemplo 13.** Um hiperplano  $\Pi^k \subset \mathbb{R}^n$  é uma hipersuperfície estável.

### 3.2 Segunda Fórmula de Variação

---

**Exemplo 14.** Dado  $M = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Temos que  $\mathbb{S}^1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{S}^2\}$  é subvariedade mínima de  $\mathbb{S}^2$ . Considere  $x(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$  uma parametrização de  $\mathbb{S}^1$ . Consideremos  $F : \mathbb{S}^1 \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{S}^2$ , com  $0 < \varepsilon < 1$  tal que  $F(x(\theta), t) = (\sqrt{1-t^2} \cos \theta, \sqrt{1-t^2} \sin \theta, t)$ . Temos portanto uma variação de  $\mathbb{S}^1$  em  $\mathbb{S}^2$ . Para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(F(\mathbb{S}^1, t)) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-t^2) \sin^2 \theta + (1-t^2) \cos^2 \theta} \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1-t^2} \, d\theta = 2\pi\sqrt{1-t^2} \end{aligned}$$

avaliando a segunda derivada do  $\text{Vol}F(\mathbb{S}^1, t)$  em  $t = 0$  temos,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \text{Vol}F(\mathbb{S}^1, t) &= \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \{2\pi\sqrt{1-t^2}\} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left\{ \frac{d}{dt} 2\pi\sqrt{1-t^2} \right\} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \frac{-2\pi t}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= -2\pi \left( \sqrt{1-t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} \right) \Big|_{t=0} = -2\pi \end{aligned}$$

concluimos então que  $\mathbb{S}^1$  é uma subvariedade mínima de  $\mathbb{S}^2$  que não é estável.

### 3.3 Desigualdade de Estabilidade

---

## 3.3 Desigualdade de Estabilidade

Nesta secção obteremos uma desigualdade que surge como consequência da segunda fórmula de variação. Essa será usada para obter uma estimativa  $L^p$  para o quadrado da norma da segunda forma fundamental.

**Proposição 15** (Desigualdade de Estabilidade). *Suponha que  $\Sigma^{n-1} \subset M^n$  seja uma hipersuperfície estável com fibrado normal trivial então para toda função de Lipschitz  $\eta$  com suporte compacto vale:*

$$\int_{\Sigma} (\inf Ric_M(N, N) + |A|^2)\eta^2 dV \leq \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma}\eta|^2 dV$$

**Demonstração.** Como  $\Sigma$  é estável vale:

$$-\int_{\Sigma} g(\eta N, L(\eta N)) dV = -\int_{\Sigma} \eta L\eta g(N, N) dV = -\int_{\Sigma} \eta L\eta dV \geq 0$$

ou seja,

$$0 \leq -\int_{\Sigma} \eta L\eta = -\int_{\Sigma} (\eta \Delta_{\Sigma}\eta + |A|^2\eta^2 + Ric_M(N, N)\eta^2) dV$$

usando que  $\eta$  tem suporte compacto segue pela primeira fórmula de Green que,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} (Ric_M(N, N) + |A|^2)\eta^2 dV &\leq -\int_{\Sigma} \eta \Delta_{\Sigma}\eta dV \\ &= \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma}\eta|^2 dV \end{aligned}$$

como  $\inf Ric_M(N, N) \leq Ric_M(N, N)$  obtemos,

$$\int_{\Sigma} (\inf Ric_M(N, N) + |A|^2)\eta^2 dV \leq \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma}\eta|^2 dV$$

■

**Observação 5.** Supondo  $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  e  $\eta$  nas hipóteses da desigualdade de estabilidade. Como  $Ric_{\mathbb{R}^n}(N, N) \equiv 0$  a desigualdade de estabilidade fica como:

$$\int_{\Sigma} |A|^2\eta^2 dV \leq \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma}\eta|^2 dV \quad (3.34)$$

### 3.4 Estimativa $L^p$ para $|A|^2$

Nesse capítulo obteremos uma estimativa  $L^p$  para o quadrado da norma da segunda forma fundamental em hipersuperfícies estáveis no  $\mathbb{R}^n$ . Para isso combinaremos a desigualdade de estabilidade [3.34] com a desigualdade de Simons (3.36) que não será demonstrada aqui (Veja[19]).

**Lema 2** (Desigualdade de Simons [19]). *Seja  $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  uma hipersuperfície mínima, então*

$$\Delta_{\Sigma}|A|^2 \geq -2|A|^4 + 2 \left(1 + \frac{2}{n-1}\right) |\nabla_{\Sigma}|A||^2 \quad (3.35)$$

ou equivalente,

$$|A||\Delta_{\Sigma}|A|| + |A|^4 \geq \frac{2}{n-1} |\nabla_{\Sigma}|A||^2 \quad (3.36)$$

**Demonstração.** Veja [4] ■

Para demonstrar o próximo teorema usaremos o seguinte resultado:

**Lema 3.**  $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0$  vale a desigualdade  $xy \leq \frac{\varepsilon x^2}{2} + \frac{y^2}{2\varepsilon}$

**Demonstração.** De fato  $\forall \varepsilon > 0$  vale  $(x - \frac{y}{\varepsilon})^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - \frac{2}{\varepsilon}xy + \frac{y^2}{\varepsilon^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{2}{\varepsilon}xy \leq x^2 + \frac{y^2}{\varepsilon}$  multiplicando por  $\frac{\varepsilon}{2}$  ambos os lados da última desigualdade segue o resultado. ■

**Teorema 4** (Schoen-Simon-Yau [18]). *Suponha que  $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  seja uma hipersuperfície mínima estável e orientável. Para todo  $p \in [2, 2 + \sqrt{2/(n-1)})$  e cada função de Lipschitz  $\phi$  não negativa com suporte compacto temos:*

$$\int_{\Sigma} |A|^{2p} \phi^{2p} \leq C \int_{\Sigma} |\nabla \phi|^{2p} \quad \text{onde} \quad C = C(n, p) \quad (3.37)$$

**Demonstração.** Para simplificar a notação, omitiremos a a forma de volume  $dV$  nas integrais.

Para  $q \in [0, \sqrt{2/(n-1)})$  façamos  $\eta = |A|^{1+q}f$  e pela desigualdade de estabilidade teremos:

$$\int_{\Sigma} |A|^2 (|A|^{1+q}f)^2 \leq \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} (|A|^{1+q}f)|^2$$

### 3.4 Estimativa $L^p$ para $|A|^2$

---

ou seja,

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma} |A|^{4+2q} f^2 &\leq \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma}|A|^{1+q} f + |A|^{1+q} \nabla_{\Sigma} f|^2 \\
&= \int_{\Sigma} |(1+q)|A|^q \nabla_{\Sigma}|A| f + |A|^{1+q} \nabla_{\Sigma} f|^2 \\
&= (1+q)^2 \int_{\Sigma} f^2 |A|^{2q} |\nabla_{\Sigma}|A||^2 \\
&\quad + 2(1+q) \int_{\Sigma} f |A|^{1+2q} \langle \nabla_{\Sigma}|A|, \nabla_{\Sigma} f \rangle \\
&\quad + \int_{\Sigma} |A|^{2+2q} |\nabla_{\Sigma} f|^2
\end{aligned} \tag{3.38}$$

multiplicando a desigualdade de Simons (3.36) por  $|A|^{2q} f^2$  obtemos,

$$|A|^{2q} f^2 (|A| \Delta |A| + |A|^4) \geq |A|^{2q} f^2 \frac{2}{n-1} |\nabla |A||^2$$

por integração e primeira identidade de Green. Segue que,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{n-1} \int_{\Sigma} |A|^{2q} f^2 |\nabla |A||^2 &\leq \int_{\Sigma} |A|^{4+2q} f^2 + \int_{\Sigma} |A|^{1+2q} f^2 \Delta |A| \\
&= \int_{\Sigma} |A|^{4+2q} f^2 + \int_{\partial \Sigma} f^2 |A|^{1+2q} \frac{d}{d\nu} |A| \\
&\quad - \int_{\Sigma} \langle \nabla_{\Sigma}(f^2 |A|^{1+2q}), \nabla_{\Sigma}|A| \rangle \\
&= \int_{\Sigma} |A|^{4+2q} f^2 - \int_{\Sigma} \langle f^2 \nabla_{\Sigma}|A|^{1+2q}, \nabla_{\Sigma}|A| \rangle \\
&\quad - \int_{\Sigma} \langle |A|^{1+2q} \nabla_{\Sigma} f^2, \nabla_{\Sigma}|A| \rangle \\
&= \int_{\Sigma} |A|^{4+2q} f^2 \\
&\quad - \int_{\Sigma} \langle f^2 (1+2q) |A|^{2q} \nabla_{\Sigma}|A|, \nabla_{\Sigma}|A| \rangle \\
&\quad - \int_{\Sigma} \langle |A|^{1+2q} 2f \nabla_{\Sigma} f, \nabla_{\Sigma}|A| \rangle \\
&= \int_{\Sigma} |A|^{4+2q} f^2 - (1+2q) \int_{\Sigma} f^2 |A|^{2q} |\nabla_{\Sigma}|A||^2 \\
&\quad - 2 \int_{\Sigma} f |A|^{1+2q} \langle \nabla_{\Sigma} f, \nabla_{\Sigma}|A| \rangle
\end{aligned} \tag{3.39}$$

### 3.4 Estimativa $L^p$ para $|A|^2$

---

combinando (3.38) e (3.39) obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{n-1} \int_{\Sigma} f^2 |A|^{2q} |\nabla |A||^2 &\leq (1+q)^2 \int_{\Sigma} f^2 |A|^{2q} |\nabla_{\Sigma} |A||^2 \\
&+ 2(1+q) \int_{\Sigma} f |A|^{1+2q} \langle \nabla_{\Sigma} f, \nabla_{\Sigma} |A| \rangle \\
&+ \int_{\Sigma} |A|^{2+2q} |\nabla f|^2 - (1+2q) \int_{\Sigma} f^2 |A|^{2q} |\nabla_{\Sigma} |A||^2 \\
&- 2 \int_{\Sigma} f |A|^{1+2q} \langle \nabla_{\Sigma} f, \nabla_{\Sigma} |A| \rangle \\
&= [(1+q)^2 - (1+2q)] \int_{\Sigma} f^2 |A|^{2q} |\nabla_{\Sigma} |A||^2 \\
&+ [2(1+q) - 2] \int_{\Sigma} f |A|^{1+2q} \langle \nabla_{\Sigma} f, \nabla_{\Sigma} |A| \rangle \\
&+ \int_{\Sigma} |A|^{2+2q} |\nabla f|^2 \\
&= q^2 \int_{\Sigma} f^2 |A|^{2q} |\nabla_{\Sigma} |A||^2 \\
&+ 2q \int_{\Sigma} f |A|^{1+2q} \langle \nabla_{\Sigma} f, \nabla_{\Sigma} |A| \rangle \\
&+ \int_{\Sigma} |A|^{2+2q} |\nabla f|^2
\end{aligned}$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned}
\left( \frac{2}{n-1} - q^2 \right) \int_{\Sigma} f^2 |A|^{2q} |\nabla |A||^2 &\leq \int_{\Sigma} |A|^{2+2q} |\nabla f|^2 \\
&+ 2q \int_{\Sigma} f |A|^{1+2q} \langle \nabla_{\Sigma} f, \nabla_{\Sigma} |A| \rangle \quad (3.40)
\end{aligned}$$

usando o lema (3) teremos,

$$\begin{aligned}
f |A|^{1+2q} \langle \nabla_{\Sigma} f, \nabla_{\Sigma} |A| \rangle &\leq f |A|^{1+2q} |\nabla_{\Sigma} f| |\nabla_{\Sigma} |A|| \\
&= f |A|^q |\nabla_{\Sigma} |A|| |\nabla_{\Sigma} f| |A|^{1+q} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} f^2 |A|^{2q} |\nabla_{\Sigma} |A||^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |\nabla_{\Sigma} f|^2 |A|^{2+2q} \quad (3.41)
\end{aligned}$$

multiplicando ambos os lados de (3.41) por  $2q$  e integrando obtemos,

$$\begin{aligned}
2q \int_{\Sigma} f |A|^{1+2q} \langle \nabla_{\Sigma} f, \nabla_{\Sigma} |A| \rangle &\leq \varepsilon q \int_{\Sigma} f^2 |A|^{2q} |\nabla_{\Sigma} |A||^2 \\
&+ \frac{q}{\varepsilon} \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} f|^2 |A|^{2+2q} \quad (3.42)
\end{aligned}$$

### 3.4 Estimativa $L^p$ para $|A|^2$

---

substituindo (3.42) em (3.40) obtemos,

$$\begin{aligned} \left( \frac{2}{n-1} - q^2 \right) \int_{\Sigma} f^2 |A|^{2q} |\nabla |A||^2 &\leq \int_{\Sigma} |A|^{2+2q} |\nabla_{\Sigma} f|^2 \\ &+ \varepsilon q \int_{\Sigma} f^2 |A|^{2q} |\nabla_{\Sigma} |A||^2 \\ &+ \frac{q}{\varepsilon} \int_{\Sigma} |A|^{2+2q} |\nabla_{\Sigma} f|^2 \end{aligned}$$

daí,

$$\left( \frac{2}{n-1} - q^2 - \varepsilon q \right) \int_{\Sigma} |A|^{2q} |\nabla_{\Sigma} |A||^2 f^2 \leq \left( 1 + \frac{q}{\varepsilon} \right) \int_{\Sigma} |A|^{2+2q} |\nabla_{\Sigma} f|^2 \quad (3.43)$$

se escolhermos  $\varepsilon > 0$  de modo que  $2/(n-1) - q^2 - \varepsilon q > 0$ , podemos então multiplicar ambos os lados da equação (3.43) por  $\frac{1}{2/(n-1) - q^2 - \varepsilon q}$  para obtermos,

$$\int_{\Sigma} |A|^{2q} |\nabla_{\Sigma} |A||^2 f^2 \leq \frac{(1 + \frac{q}{\varepsilon})}{(2/(n-1) - q^2 - \varepsilon q)} \int_{\Sigma} |A|^{2+2q} |\nabla_{\Sigma} f|^2 \quad (3.44)$$

**Observação 6.** Aqui foi essencial a exigência de  $q \in \left[ 0, \sqrt{2/(n-1)} \right)$  ou equivalentemente,  $q^2 < 2/(n-1)$  para que fosse possível escolher  $\varepsilon > 0$  de forma que  $\frac{2}{n-1} - q^2 - \varepsilon q > 0$  e assim obter a estimativa (3.44)

usando que,

$$\begin{aligned} 0 &\leq |(1+q)|A|^q |\nabla_{\Sigma} |A|| f - |A|^{1+q} |\nabla_{\Sigma} f|^2 \\ &= (1+q)^2 |A|^{2q} |\nabla_{\Sigma} |A||^2 f^2 - 2(1+q) f |A|^{1+2q} \langle \nabla_{\Sigma} |A|, \nabla_{\Sigma} f \rangle \\ &+ |A|^{2+2q} |\nabla_{\Sigma} f|^2 \end{aligned}$$

Obtemos,

$$\begin{aligned} 2(1+q) f |A|^{1+2q} \langle \nabla_{\Sigma} |A|, \nabla_{\Sigma} f \rangle &\leq f^2 (1+q)^2 |A|^{2q} |\nabla_{\Sigma} |A||^2 \\ &+ |A|^{2+2q} |\nabla_{\Sigma} f|^2 \end{aligned} \quad (3.45)$$

integrando (3.45) de ambos os lados, substituindo em (3.38) e usando (3.44)

### 3.4 Estimativa $L^p$ para $|A|^2$

---

obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma} |A|^{4+2q} f^2 &\leq 2(1+q)^2 \int_{\Sigma} f^2 |A|^{2q} |\nabla_{\Sigma} |A||^2 \\
&+ 2 \int_{\Sigma} |A|^{2+2q} |\nabla_{\Sigma} f|^2 \\
&\leq \left( \frac{2(1+q)^2(1+\frac{q}{\varepsilon})}{2/(n-1) - q^2 - \varepsilon q} + 2 \right) \int_{\Sigma} |A|^{2q+2} |\nabla f|^2 \quad (3.46)
\end{aligned}$$

Fazendo  $p = 2 + q$  teremos  $p \in [2, 2 + \sqrt{2/(n-1)})$  e para  $f = \phi^p$  temos  $\nabla_{\Sigma} f = \nabla_{\Sigma} \phi^p = p\phi^{p-1} \nabla \phi$  como  $\phi$  é positiva segue que  $|\nabla_{\Sigma} f|^2 = |\nabla_{\Sigma} \phi^p|^2 = p^2 \phi^{2p-2} |\nabla \phi|^2$  substituindo em (3.46) obtemos:

$$\int_{\Sigma} |A|^{2p} \phi^{2p} \leq \left( \frac{2(1+p-2)^2(1+\frac{p-2}{\varepsilon})}{2/(n-1) - (p-2)^2 - \varepsilon(p-2)} + 2 \right) p^2 \int_{\Sigma} |A|^{2p-2} \phi^{2p-2} |\nabla_{\Sigma} \phi|^2$$

fazendo  $c(n, p) = \frac{2(p-1)^2(1+\frac{p-2}{\varepsilon})}{2/(n-1) - (p-2)^2 - \varepsilon(p-2)} p^2 + 2p^2$  temos,

$$\int_{\Sigma} |A|^{2p} \phi^{2p} \leq c(n, p) \int_{\Sigma} |A|^{2p-2} \phi^{2p-2} |\nabla_{\Sigma} \phi|^2 \quad (3.47)$$

pela desigualdade de Young temos,

$$\begin{aligned}
|A|^{2p-2} \phi^{2p-2} |\nabla_{\Sigma} \phi| &= (\delta |A|^{2p-2} \phi^{2p-2}) \left( \frac{1}{\delta} |\nabla_{\Sigma} \phi|^2 \right) \\
&\leq \frac{(\delta |A|^{2p-2} \phi^{2p-2})^{\frac{p}{p-1}}}{p/(p-1)} + \frac{(\frac{1}{\delta} |\nabla_{\Sigma} \phi|^2)^p}{p} \\
&= \frac{p-1}{p} \delta^{\frac{p}{p-1}} |A|^{2p} \phi^{2p} + \frac{1}{p} \delta^{-p} |\nabla_{\Sigma} \phi|^{2p} \quad (3.48)
\end{aligned}$$

substituindo (3.48) em (3.47) obtemos,

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma} |A|^{2p} \phi^{2p} &\leq c(n, p) \frac{p-1}{p} \delta^{\frac{p}{p-1}} \int_{\Sigma} |A|^{2p} \phi^{2p} \\
&+ c(n, p) \frac{1}{p} \delta^{-p} \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \phi|^{2p} \quad (3.49)
\end{aligned}$$

temos que,

$$\left( c(n, p) \frac{p-1}{p} \delta^{\frac{p}{p-1}} \right) \rightarrow 0 \quad \text{quando } \delta \rightarrow 0$$

### 3.4 Estimativa $L^p$ para $|A|^2$

---

$$\left( c(n, p) \frac{1}{p} \delta^{-p} \right) \rightarrow \infty \quad \text{quando } \delta \rightarrow 0$$

logo, para  $\delta$  suficientemente pequeno podemos garantir que,

$$c(n, p) \frac{p}{p-1} \delta^{\frac{p}{p-1}} \int_{\Sigma} |A|^{2p} \phi^{2p} \leq c(n, p) \frac{1}{p} \delta^{-p} \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \phi|^{2p} \quad (3.50)$$

substituindo (3.50) em (3.49) teremos,

$$\int_{\Sigma} |A|^{2p} \phi^{2p} \leq 2c(n, p) \frac{1}{p} \delta^{-p} \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \phi|^{2p}$$

fazendo  $C(n, p) = 2c(n, p) \frac{1}{p} \delta^{-p}$  segue o resultado. ■

### 3.5 Teorema de Bernstein

---

## 3.5 Teorema de Bernstein

Demonstraremos agora o teorema de Bernstein para o caso  $n \leq 6$ . Convém ressaltar mais uma vez que o resultado ainda é válido para  $n = 7$  e  $n = 8$  entretanto a técnica aqui usada não se aplica a esses casos. Uma demonstração para o caso geral,  $n \leq 8$  pode ser encontrada em [19].

**Teorema 5** (Schoen-Simon-Yau [18]). *Se  $u : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  é solução inteira da equação de superfície mínima e  $n \leq 6$ . Então  $u$  é uma função linear.*

**Demonstração.** Fixe  $x_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$  e para cada  $r > 0$ , defina a função  $\phi$  em  $\mathbb{R}^n$  dada por,

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x - x_0| \leq r \\ 1 - \frac{\ln\left(\frac{|x-x_0|}{r}\right)}{\ln 2}, & \text{se } r < |x - x_0| \leq 2r \\ 0, & \text{se } |x - x_0| \geq 2r \end{cases}$$

dessa forma,  $\phi$  tem suporte compacto em  $\mathbb{R}^n$  e ,

$$\nabla\phi = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in (B_{2r} \setminus B_r)^c \\ \frac{1}{\ln 2} \frac{x - x_0}{|x - x_0|^2}, & \text{se } x \in B_{2r} \setminus B_r \end{cases}$$

segue que,

$$|\nabla\phi| = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in (B_{2r} \setminus B_r)^c \\ \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{|x - x_0|} \leq \frac{1}{r \ln 2}, & \text{se } x \in B_{2r} \setminus B_r \end{cases}$$

Escolhendo  $p$  tal que  $2p = 4 + \sqrt{7/5} < 4 + \sqrt{8/(n-1)}$ , usando  $\phi$  no teorema (4) e a estimativa (3.6) obtemos,

### 3.5 Teorema de Bernstein

---

$$\begin{aligned}
\int_{B_r \cap \Sigma} |A|^{(4+\sqrt{7/5})} dV &= \int_{B_r \cap \Sigma} |A|^{(4+\sqrt{7/5})} \phi^{(4+\sqrt{7/5})} dV \\
&\leq \int_{B_{2r} \cap \Sigma} |A|^{(4+\sqrt{7/5})} \phi^{(4+\sqrt{7/5})} dV \\
&\leq C(n, p) \int_{B_{2r} \cap \Sigma} |\nabla_{\Sigma} \phi|^{(4+\sqrt{7/5})} dV \\
&\leq C(n, p) \int_{B_{2r} \cap \Sigma} \frac{1}{(r \ln 2)^{(4+\sqrt{7/5})}} dV \\
&= C(n, p) \frac{1}{(\ln 2)^{(4+\sqrt{7/5})}} \frac{1}{r^{(4+\sqrt{7/5})}} \int_{B_{2r} \cap \Sigma} dV \\
&= C(n, p) \frac{1}{(\ln 2)^{(4+\sqrt{7/5})}} \frac{1}{r^{(4+\sqrt{7/5})}} \text{Vol}(B_{2r} \cap \Sigma) \\
&\leq \bar{C}(n, p) \frac{1}{r^{(4+\sqrt{7/5})}} \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})}{2} (2r)^{n-1} \\
&\leq \bar{\bar{C}}(n, p) \frac{r^{n-1}}{r^{(4+\sqrt{7/5})}} \\
&= \bar{\bar{C}}(n, p) r^{n-5-\sqrt{7/5}}.
\end{aligned}$$

Visto que  $n \leq 6$ , temos que  $n-5-\sqrt{7/5} < 0$ , logo,  $\bar{\bar{C}}(n, p) r^{n-5-\sqrt{7/5}} \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow \infty$  e conseqüentemente,  $|A|^2 \equiv 0$ .  $\blacksquare$

Dito de outra forma, gráficos mınimos completos em  $\mathbb{R}^n$  com  $n \leq 6$  sao subespaços afins.

# Capítulo 4

## Estabilidade

A questão que se levanta diante do clássico teorema de Bernstein é: uma hipersuperfície mínima estável em  $\mathbb{R}^3$  é um plano? Nesse capítulo usaremos um resultado devido a Fischer-Colbrie & Schoen [11] que juntamente com a hipótese de tal hipersuperfície ser parabólica, torna afirmativa a resposta à questão acima.

**Definição 17.** Dizemos que  $\lambda$  é autovalor de Dirichlet de  $L$  em  $\Omega \subset \Sigma$  se existe um campo normal não trivial  $X$  que se anula em  $\partial\Omega$  tal que

$$LX + \lambda X = 0$$

**Definição 18.** O Índice de Morse de uma superfície mínima compacta  $\Sigma$  é número de autovalores de Dirichlet negativos do operador  $L$  (contando a multiplicidade) agindo sobre o espaço das secções suaves do fibrado normal que se anula sobre  $\partial\Omega$ .

Para o caso de hipersuperfícies com fibrado normal trivial a definição de estabilidade fica em termos de funções  $\eta \in C_0^\infty(\Sigma)$  tal que  $\eta|_{\partial\Sigma} = 0$ , ou seja, dizer que  $\Sigma$  é estável significa que,

## 4.1 Caracterização para Estabilidade

---

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Sigma} \eta L \eta dV &= - \int_{\Sigma} \eta \Delta_{\Sigma} \eta + |A|^2 \eta^2 + \text{Ric}_M(N, N) \eta^2 dV \\
 &= \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \eta|^2 - |A|^2 \eta^2 - \text{Ric}_M(N, N) \eta^2 dV \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

para toda função  $\eta \in C_0^{\infty}(\Sigma)$ ,  $\eta|_{\partial\Sigma} = 0$ . Usamos a primeira fórmula de Green na segunda igualdade.

## 4.1 Caracterização para Estabilidade

Daremos agora uma caracterização de estabilidade para hipersuperfícies com fibrado normal trivial. Para isso precisaremos de alguns resultados da teoria das Equações Diferenciais Parciais. Quando forem usados, indicaremos referências. É um resultado conhecido de análise que o operador  $L$  pode ser diagonalizado por uma sequência crescente de valores próprios reais  $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \rightarrow \infty$  cujos subespaços de vetores próprios tem dimensão finita. Dessa forma a definição de estabilidade é equivalente a exigir que  $\lambda_1(\Omega, L) \geq 0$  para todo subdomínio limitado  $\Omega \subset \Sigma$  onde,

$$\lambda_1(\Omega, L) = \inf \left\{ - \int_{\Sigma} \eta L \eta dV \mid \eta \in C_0^{\infty}(\Omega) \text{ e } \int_{\Omega} \eta^2 dV = 1 \right\} \quad (4.1)$$

Para uma função  $u \in C^{\infty}(\Omega)$  definimos a norma  $\|\cdot\|_{W^{1,2}}$  por,

$$\|u\|_{W^{1,2}}^2 = \int u^2 + \int |\nabla u|^2$$

o Espaço de Sobolev  $W_0^{1,2}(\Omega)$  é o fecho de  $C_0^{\infty}(\Omega)$  com respeito a norma  $\|\cdot\|_{W^{1,2}}$ .

**Lema 6.** *Se  $L$  é o operador de estabilidade de uma hipersuperfície  $\Sigma$  com fibrado normal trivial e  $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega, L)$  então,*

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \frac{\int |\nabla_{\Sigma} \eta|^2 - |A|^2 \eta^2 - \text{Ric}_M(N, N) \eta^2}{\int \eta^2} \mid \eta \in W_0^{1,2}(\Omega) \right\} \quad (4.2)$$

## 4.1 Caracterização para Estabilidade

---

além disso, se  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  satisfaz,

$$\frac{\int |\nabla_\Sigma \eta|^2 - |A|^2 \eta^2 - Ric_M(N, N) \eta^2}{\int \eta^2} = \lambda_1 \quad (4.3)$$

então  $u$  é suave e  $Lu = -\lambda_1 u$

**Demonstração.** Veja [4] pág. 44 ■

**Lema 7.** *Se  $u$  é uma função suave em  $\Omega$  que se anula em  $\partial\Omega$  e  $Lu = -\lambda u$  com  $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega, L)$ , então  $u$  não pode mudar de sinal.*

**Demonstração.** Podemos assumir que  $u$  não é identicamente nula. Visto que  $u$  se anula em  $\partial\Omega$  o mesmo acontece com  $|u|$ . Como  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  temos  $|u| \in W_0^{1,2}(\Omega)$  e além disso  $|u|$  satisfaz (4.3). Pelo Lema 6,  $|u|$  é suave e  $L|u| = -\lambda_1|u|$ . Visto que  $|u| \geq 0$  e  $|u|$  não é identicamente nula a desigualdade de Harnack implica que  $|u| > 0$  em  $\Omega$ . ■

Esse lema diz que auto funções associadas ao primeiro autovalor não trocam de sinal.

**Lema 8.** *Seja  $\Sigma$  uma hipersuperfície mínima com fibrado normal trivial,  $L$  seu operador de estabilidade e  $\Omega \subset \Sigma$  um domínio limitado. Se existe uma função positiva  $u$  em  $\Omega$  tal que  $Lu = 0$  então  $\Omega$  é estável.*

**Demonstração.** Seja  $q = |A|^2 + Ric_M(N, N)$  dessa forma  $L = \Delta_\Sigma + q$ . Como  $u > 0$ ,  $w := \log u$  está bem definida e satisfaz,

$$\Delta_\Sigma w = -q - |\nabla_\Sigma w|^2 \quad (4.4)$$

de fato,

$$\nabla_\Sigma w = \nabla_\Sigma \log u = \frac{\nabla_\Sigma u}{u} \Rightarrow u \nabla_\Sigma w = \nabla_\Sigma u \quad (4.5)$$

usando propriedade da divergência e (4.5) temos,

$$\begin{aligned} \Delta_\Sigma u &= \operatorname{div}(\nabla_\Sigma u) = \operatorname{div}(u \nabla_\Sigma w) \\ &= \langle \nabla_\Sigma u, \nabla_\Sigma w \rangle + u \operatorname{div} \nabla_\Sigma w \\ &= \frac{|\nabla_\Sigma u|^2}{u} + u \Delta_\Sigma w \end{aligned}$$

## 4.1 Caracterização para Estabilidade

---

portanto,

$$\Delta_{\Sigma} w = \frac{\Delta_{\Sigma} u}{u} - \frac{|\nabla_{\Sigma} u|^2}{u^2} \quad (4.6)$$

e como por hipótese  $Lu = 0$  temos  $q = -\frac{\Delta_{\Sigma} u}{u}$ , substituindo em (4.6) segue o resultado. Observe que dada  $f \in C_0^{\infty}(\Omega)$  temos,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f^2 \nabla_{\Sigma} w) &= \langle \nabla_{\Sigma} f^2, \nabla_{\Sigma} w \rangle + f^2 \operatorname{div}(\nabla_{\Sigma} w) \\ &= 2f \langle \nabla_{\Sigma} f, \nabla_{\Sigma} w \rangle + f^2 \Delta_{\Sigma} w \end{aligned} \quad (4.7)$$

multiplicando  $f^2$  de ambos os lados da equação (4.4), utilizando (4.7) a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade de Young ( $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ ) obtemos,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f^2 q dV + \int_{\Omega} f^2 |\nabla_{\Sigma} w|^2 dV &= - \int_{\Omega} f^2 \Delta_{\Sigma} w dV \\ &= \int_{\Omega} 2fg \langle \nabla_{\Sigma} f, \nabla_{\Sigma} w \rangle dV - \int_{\Omega} \operatorname{div}(f^2 \nabla_{\Sigma} w) dV \\ &= \int_{\Omega} 2f \langle \nabla_{\Sigma} f, \nabla_{\Sigma} w \rangle dV \\ &\leq \int_{\Omega} 2|f| |\nabla_{\Sigma} f| |\nabla_{\Sigma} w| dV \\ &\leq \int_{\Omega} 2 \left( \frac{|\nabla_{\Sigma} f|^2}{2} + \frac{|f|^2 |\nabla_{\Sigma} w|^2}{2} \right) dV \\ &= \int_{\Omega} |\nabla_{\Sigma} f|^2 dV + \int_{\Omega} |f|^2 |\nabla_{\Sigma} w|^2 dV \end{aligned}$$

cancelando as partes iguais na equação anterior obtemos,

$$\int_{\Omega} f^2 q dV \leq \int_{\Omega} |\nabla_{\Sigma} f|^2 dV$$

por fim, usando isso obtemos,

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} f L f dV &= - \int_{\Omega} f (\Delta_{\Sigma} f + |A|^2 f + \operatorname{Ric}_M(N, N) f) dV \\ &= - \int_{\Omega} f \Delta_{\Sigma} f + f^2 q dV \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}(f \nabla f) - |\nabla_{\Sigma} f|^2 dV - \int_{\Omega} f^2 q dV \\ &= \int_{\Omega} |\nabla_{\Sigma} f|^2 dV - \int_{\Omega} f^2 q dV \geq 0 \end{aligned}$$

## 4.1 Caracterização para Estabilidade

---

como vale para qualquer  $f \in C_0^\infty(\Omega)$  temos que  $\Omega$  é estável. ■

**Proposição 16** (Fischer-Colbrie & Schoen [11]). *Se  $\Sigma$  é uma hipersuperfície mínima completa não compacta com fibrado normal trivial, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $\lambda_1(\Omega, L) \geq 0$  para todo domínio limitado  $\Omega \subset \Sigma$
2.  $\lambda_1(\Omega, L) > 0$  para todo domínio limitado  $\Omega \subset \Sigma$
3. Existe uma função positiva  $u$  definida em  $\Sigma$  tal que  $Lu = 0$

**Demonstração.** (1)  $\Rightarrow$  (2). Dado  $\Omega_0$  um domínio limitado escolha  $\Omega_1$  outro domínio limitado tal que  $\Omega_0 \subset \Omega_1$  mas  $\Omega_0 \neq \Omega_1$ . Pela caracterização de  $\lambda_1$  temos,

$$\lambda_1(\Omega_0, L) \geq \lambda_1(\Omega_1, L) \geq 0 \quad (4.8)$$

seja  $u_0$  uma auto função positiva associada a  $\lambda_1(\Omega_0, L)$ . Defina  $u_1$  sobre  $\Omega_1$  como,

$$u_1(x) = \begin{cases} u_0, & \text{se } x \in \Omega_0 \\ 0, & \text{se } x \notin \Omega_0 \end{cases}$$

se  $\lambda_1(\Omega_0, L) = \lambda_1(\Omega_1, L)$  então pelo Lema 6,  $Lu_1 = -\lambda_1 u_1$ , e pelo Lema 7,  $u_1 > 0$  em  $\Omega$ . Mas isso não pode acontecer já que  $u_1$  se anula em  $\Omega_1 \setminus \Omega_0$ . Logo, a desigualdade entre  $\lambda_1(\Omega_0, L)$  e  $\lambda_1(\Omega_1, L)$  é estrita.

(2)  $\Rightarrow$  (3). Fixe  $p \in \Sigma$  e para cada  $r > 0$  defina,

$$B_r^\Sigma := B_r^\Sigma(p) = \{q \in \Sigma \mid \text{dist}_\Sigma(p, q) < r\}$$

considere o seguinte problema,

$$(1) : \begin{cases} Lu_r = 0 & \text{em } B_r^\Sigma \\ u_r = 1 & \text{em } \partial B_r^\Sigma \end{cases}$$

#### 4.1 Caracterização para Estabilidade

---

visto que  $\lambda_1(B_r^\Sigma, L) > 0$ , pela alternativa de Fredholm o problema  $Lu = 0$  em  $B_r^\Sigma$ ,  $u = 0$  em  $\partial B_r^\Sigma$  tem apenas a solução trivial, e nesse caso o problema,

$$(2) : \begin{cases} Lv_r = -|A|^2 - \text{Ric}_M(N, N) & \text{em } B_r^\Sigma \\ v_r = 0 & \text{em } \partial B_r^\Sigma \end{cases}$$

tem uma única solução  $v_r$  em  $B_r^\Sigma$ . Tomando  $u_r = v_r + 1$  temos uma solução de (1). Afirmamos que  $u_r \geq 0$  em  $B_r^\Sigma$ . De fato, supondo ser falso que  $u_r \geq 0$ , podemos escolher uma componente conexa  $\Omega$  não vazia do conjunto  $\{x \in B_r^\Sigma \mid u_r(x) < 0\}$ . Assim  $u_r$  é uma solução do problema,

$$(3) : \begin{cases} Lu_r = 0 & \text{em } \Omega \\ u_r = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ u_r > 0 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

como por hipótese  $\lambda_1(\Omega, L) > 0$ , mais uma vez a alternativa de Fredholm garante que não existe solução não trivial para o problema,

$$(4) : \begin{cases} L\bar{u} = 0 & \text{em } \Omega \\ \bar{u} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

logo, temos uma contradição entre (3) e (4). Isso significa que o conjunto  $\{x \in B_r^\Sigma \mid u_r(x) < 0\} = \emptyset$  e conseqüentemente  $u_r \geq 0$  em  $B_r^\Sigma$ . E pela desigualdade de Harnack temos  $u_r > 0$  em  $B_r^\Sigma$ . para cada  $r$ , defina  $w_r$  por,

$$w_r = \frac{u_r}{u_r(p)}$$

logo,  $w_r$  satisfaz,  $Lw_r = 0$  e  $w_r(p) = 1$ . Pela desigualdade de Harnack (Teorema 8.20 [12]) para qualquer  $B_{4R}^\Sigma(y) \subset B_r^\Sigma(p)$  temos,

$$\sup_{B_{4R}^\Sigma(y)} w_r \leq C \inf_{B_{4R}^\Sigma(y)} w_r \leq C_R$$

## 4.1 Caracterização para Estabilidade

---

onde  $C$  depende apenas de  $R$ . Dado  $R_0$  para qualquer  $r$  tal que  $4R_0 \leq r$  temos,

$$\sup_{B_{R_0}^\Sigma} w_r \leq C_{R_0}$$

usando as estimativas de Schauder (teorema 6.2 e 6.6 [12]) obtemos,

$$|w_r|_{C^{2,\alpha}_{B_{R_0}^\Sigma}} = |w_r|_{2,\alpha;B_{R_0}^\Sigma} \leq \bar{C}_{R_0}$$

Escolhendo um compacto  $K \subset \Sigma$  podemos tomar  $R_0$  suficientemente grande tal que  $K \subset B_{R_0}^\Sigma(p)$ , dessa forma a família de funções  $w_r$  com  $r \geq 4R_0$  tem uma estimativa  $C^{2,\alpha}(B_{R_0}^\Sigma)$  uniforme nos compactos de  $\Sigma$ . Pelo Teorema de Arzelá-Ascoli podemos escolher uma sequência  $w_{r_i}$ , tal que se  $r_i \rightarrow \infty$ ,  $w_{r_i}$  converge uniformemente nos compactos de  $\Sigma$  a uma função  $w$ , e como a convergência é garantida nas derivadas de segunda ordem de  $w_{r_i}$  para as derivadas de segunda ordem de  $w$ , temos  $Lw = 0$ , e além disso, como  $w_{r_i}$  é não negativa para todo  $r_i$ ,  $w$  é uma função não negativa e satisfaz  $w(p) = 1$  sendo assim  $w \geq 0$ . Novamente pela desigualdade de Harnack garantimos que  $w > 0$  o que completa a prova.

(3)  $\Rightarrow$  (1). Segue do lema (8) ■

**Definição 19.** *Uma subvariedade  $\Sigma$  é parabólica se toda função positiva super-harmônica  $u$  (isto é,  $\Delta_\Sigma u \leq 0$ ) sobre  $\Sigma$  é constante.*

**Corolário 4.** *Se  $\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície orientável, mínima estável, completa, conexa, parabólica e sem bordo então  $\Sigma^2$  é um plano.*

**Demonstração.** Sendo  $\Sigma^2$  estável vale  $\lambda_1(\Omega, L) \geq 0$  para todo domínio limitado  $\Omega \subset \Sigma^2$  e pela Proposição 16 existe  $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  positiva tal que  $Lu = 0$  ou seja,

$$0 = Lu = \Delta_\Sigma u + |A|^2 u + \text{Ric}_{\mathbb{R}^3}(N, N)u$$

logo,

$$\Delta_\Sigma u = -(|A|^2 + \text{Ric}_{\mathbb{R}^3}(N, N))u = -|A|^2 u \leq 0$$

#### 4.1 Caracterização para Estabilidade

---

como  $\Sigma^2$  é parabólica  $u$  precisa ser constante. Portanto,

$$0 = \Delta_{\Sigma} u = -|A|^2 u$$

e sendo  $u$  é positiva,  $|A| \equiv 0$ . ■

# Apêndice

**Teorema 9** (Teorema da Divergência). *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana orientável,  $\Omega$  um domínio em  $M$  com bordo  $\partial\Omega$  regular e  $v$  um campo vetorial unitário normal exterior ao bordo  $\partial\Omega$ . Então para qualquer campo vetorial  $X \in \mathcal{X}(M)$  com suporte compacto temos,*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X dV = \int_{\partial\Omega} \langle X, v \rangle dA$$

**Demonstração.** Veja [6] pág. 152. ■

Como consequência, temos que se  $X|_{\partial\Omega} = 0$  então,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X dV = 0$$

**Teorema 10** (I fórmula de Green). *Seja  $f, h : M \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f, h \in C_0^\infty(M)$ . Então,*

$$\int_M \{h\Delta f + \langle \nabla f, \nabla h \rangle\} dV = 0$$

**Demonstração.** Veja [6] pág. 152. ■

**Proposição 17** (Derivada do determinante). *Dado  $A(t) = (a_{ij}(t))$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  um caminho de matrizes tal que  $A(t) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  e  $A(0) = I_n$  então,*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A(t) = \operatorname{tr}(a'_{ij}(0))$$

**Demonstração.** Veja [17] pág. 174. ■

# Referências Bibliográficas

- [1] F. J. Almgren, - *Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem*, Ann. of Math. 84 (1966) 277 – 292.
- [2] S. Bernstein, - *Über ein geometrisches Theorem und seine Anwendung auf die partiellen Differentialgleichungen vom ellipschen*, Typos. Math. Zeit. 26 (1927) 551 - 558 (translation of the original version in Comm. Soc. Math. Kharkov 2-ème sér. 15 (1915 - 17) 38 - 45).
- [3] E. Bombieri, E. de Giorgi and E. Giusti, - *Minimal cones and the Bernstein problem*, Inv. Math. Vol. 7, 1969, pages 243 - 268.
- [4] T. Colding, & W. Minicozzi, - *A Course in Minimal Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, Vol 121, American Mathematical Society, Rhode Island.
- [5] I. Chavel, - *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1984.
- [6] I. Chavel, - *Riemannian Geometry: a modern introduction*, second ed., Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 2006.
- [7] E. De Giorgi, - *Frontiere orientate di misura minima*, Sem. Mat. Scuola Norm. Sup. Pisa (1961) 1-56.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [8] M. do Carmo, - *Geometria Riemanniana*. 5 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
- [9] M. do Carmo, - *Superfícies Mínimas*, 2<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.
- [10] M. do Carmo, & C. K. Peng, - *Stable complete minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$  are planes*, American Mathematical Society, 1(1979), 903 - 906.
- [11] D. Fischer-Colbrie, & R. Schoen, - *The structure of complete stable minimal surfaces in three manifolds of nonnegative scalar curvature*, Comm. Pure Appl. Math. 33(1980), 199 - 211.
- [12] D. Gilbarg, & N. S. Trudinger, - *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Reprint of the 1998 Edition, 2001.
- [13] J. Jost, - *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Universitext, Springer-Verlag, 1995.
- [14] J. M. Lee, - *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, New York: Springer-Verlag, 1997.
- [15] E. L Lima, - *Curso de Análise*, Volume 2. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008
- [16] E. L. Lima, - *Variedades Diferenciáveis*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2010.
- [17] W. Tu Loring, - *An Introduction to Manifolds*, second edition, New York, Springer 2011.
- [18] R. Schoen, L. Simon, and S. T. Yau, - *Curvature estimates for minimal hypersurfaces*, Acta Math. 134 (1975) 275-288.
- [19] J. Simons, - *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. of Math. 88 (1968) 62-105.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [20] T. J. Wilmore, - *Total Curvature in Riemannian Geometry*, Chichester:  
Ellis Horwood limited, 1982