

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICEx  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**Cálculo das Proficiências dos Alunos de MG na  
prova de Matemática do ENEM de 2011 através de  
um modelo da Teoria de Resposta ao Item**

**FABRÍCIA GOMES MOREIRA**

Belo Horizonte-MG  
Fevereiro/2014

**FABRÍCIA GOMES MOREIRA**

**Cálculo das Proficiências dos Alunos de MG na prova de  
Matemática do ENEM de 2011 através de um modelo da  
Teoria de Resposta ao Item**

Monografia apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática para Professores com Ênfase em Cálculo, Instituto de Ciências Exatas - ICEX, Departamento de Matemática, da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Especialista em Matemática com Ênfase em Cálculo.

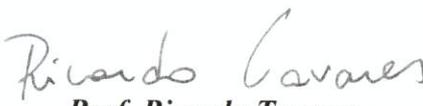
Orientador: Prof. Dr. Ricardo Tavares

Belo Horizonte-MG

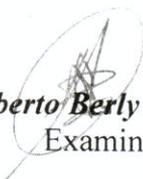
Fevereiro/2014

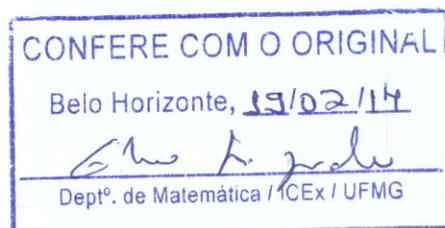
**ATA DA 154ª MONOGRAFIA DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA PARA PROFESSORES, APRESENTADO PELA ALUNA FABRICIA GOMES MOREIRA.**

Aos dezenove dias do fevereiro de 2014, às 09h00, na Sala 3060, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pela Comissão do Curso de Especialização em Matemática para Professores, para julgar a apresentação da monografia da aluna **Fabricia Gomes Moreira**, intitulada: "*Cálculo das proficiências dos alunos de MG na prova de matemática do ENEM de 2011 através de um modelo da teoria de resposta ao item*", como requisito para obtenção do Grau de Especialista em Matemática, com ênfase em Cálculo. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Ricardo Tavares, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares, passou a palavra à aluna para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa da aluna. Após a defesa, os membros da Comissão Examinadora reuniram-se sem a presença da aluna e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: a aluna foi considerada **Aprovada**, por unanimidade, com nota 92 e conceito A. O resultado final foi comunicado publicamente à aluna pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ata, que será assinada por todos os membros participantes da Comissão Examinadora. Belo Horizonte, 19 de fevereiro de 2014.

  
**Prof. Ricardo Tavares**  
Orientador

  
**Prof. Jussara de Matos Moreira**  
Examinadora

  
**Prof. Alberto Berly Sarmiento Vera**  
Examinador



# Agradecimentos

A Deus, princípio de tudo.

Ao professor Dr. Ricardo Tavares, pela paciência, dedicação, habilidade e competência com que me orientou na realização desse trabalho.

Aos meus pais e demais familiares pelo apoio e compreensão.

Aos meus colegas do curso de Especialização em Matemática/2012, pelo companheirismo e auxílio nas horas difíceis e pelos momentos de descontração.

A todos aqueles que, diretamente ou indiretamente, contribuíram para a realização desse trabalho.

“Queres aprender? Estuda!

Queres aprender mais? Procura um bom mestre!

Queres aprender mais ainda?

Ensina aos outros o que aprendeste!”

Chiara Lubich

# **Cálculo das Proficiências dos Alunos de MG na prova de Matemática do ENEM de 2011 através de um modelo da Teoria de Resposta ao Item**

Autor: Fabrícia Gomes Moreira

Orientador(a): Dr. Ricardo Tavares

## **RESUMO**

O presente trabalho na área de avaliação educacional aborda o cálculo das proficiências dos alunos de Minas Gerais que fizeram a prova de Matemática do ENEM/2011 usando um modelo de Teoria de Resposta ao Item (TRI). A TRI é um conjunto de modelos matemáticos que supõe que o desempenho de um avaliado em um teste pode ser predito (ou explicado) pela proficiência (habilidade) e pelas características dos itens do teste. A TRI tem contribuído com modelos que representam a relação entre a probabilidade de um indivíduo responder corretamente a um item e suas habilidades na área em que está sendo avaliado. Adotou-se o modelo logístico com 3 parâmetros que descreve a relação entre a habilidade do indivíduo examinado e a probabilidade de uma resposta correta com três parâmetros: dificuldade, discriminação e casualidade. Esta monografia apresenta um estudo da Teoria de Resposta ao Item aplicada aos microdados dos 438.974 alunos que fizeram a inscrição nos 853 municípios de Minas Gerais. Os resultados mostraram que as proficiências estimadas para o sexo masculino foram maiores que para o feminino. Com relação à rede administrativa de ensino, os melhores desempenhos foram observados nos alunos da rede Federal, seguido daqueles da particular, depois municipal, e por último, estadual. Observou-se ainda que as maiores proficiências foram registradas nos municípios maiores. Para leitura e formatação do banco de dados foi utilizado o software SPSS, enquanto que a análise da modelagem via TRI foi realizada pelo BILOG e a visualização dos dados através de tabelas, gráficos e mapas foi obtida usando o ambiente computacional R.

*Palavras-chave:* Teoria de Resposta ao Item, Proficiência, Microdados, ENEM.

# **Calculation of Students Proficiencies in MG in the Mathematics exam of ENEM/ 2011 through the Item Response Theory model**

Author: Fabrícia Gomes Moreira

Advisor: Dr. Ricardo Tavares

## **ABSTRACT**

This study in the area of educational assessment discusses the calculation of proficiencies of students from Minas Gerais who made the Mathematics exam of ENEM/2011 using a model of Item Response Theory (IRT). IRT is a set of mathematical models which expects that the performance of a rated on a test can be predicted (or explained) by proficiency (skill) and the characteristics of the test items. The IRT has contributed to models that represent the relationship between the probability of an individual to respond correctly to an item and its skills in the area that has been evaluated. A 3-parameter logistic model that describes the relationship between the ability of the examined individual and the probability of a correct answer with three parameters: difficulty, discrimination and causality, was adopted in this study. This monography presents a study of Item Response Theory applied to microdata from 438,974 students who have made the inscription in 853 municipalities of Minas Gerais. The results showed that the estimated proficiencies for males were higher than for females. Relating to administrative school system, the best performances were observed in students of the Federal network, followed by those of private, and finally public network. It was also observed that higher proficiencies were registered in larger municipalities. The SPSS software was used for the reading and formatting of the database, while the analysis of modeling by IRT was performed by BILOG, and the data visualization through tables, graphics and maps was obtained using the computing environment R.

*Keywords:* Item Response Theory, Proficiency, Microdata, ENEM.

# Lista de figuras

1	CCI (a); CCI: $a=2.0$ e $b=1.0$ com $c$ variando (b); CCI: $a=2$ e $c=0.2$ com $b$ variando (c); CCI: $b=1$ e $c=0.2$ com $a$ variando (d). . . . .	p. 18
2	Proporção de acertos em cada alternativa por grupo do escore, itens 01 a 08. .	p. 27
3	Proporção de acertos em cada alternativa por grupo do escore, itens 09 a 16. .	p. 28
4	Proporção de acertos em cada alternativa por grupo do escore, itens 17 a 24. .	p. 29
5	Proporção de acertos em cada alternativa por grupo do escore, itens 25 a 32. .	p. 30
6	Proporção de acertos em cada alternativa por grupo do escore, itens 33 a 40. .	p. 31
7	Proporção de acertos em cada alternativa por grupo do escore, itens 41 a 45. .	p. 32
8	Distribuição das proficiências estimadas por sexo, Matemática/ENEM/2011 .	p. 35
9	Indicador de solicitação de certificação no Ensino Médio. . . . .	p. 36
10	Situação de conclusão do Ensino Médio. . . . .	p. 37
11	Dependência administrativa (Escola). . . . .	p. 38
12	Distribuição das proficiências estimadas por mesorregiões, Matemática/ENEM/- 2011. . . . .	p. 39
13	Distribuição das proficiências por faixas do tamanho populacional dos muni- cípios, Matemática/ENEM/2011. . . . .	p. 40
14	Mapa de Minas Gerais das proficiências estimadas em Matemática/ENEM/2011.	p. 41

# Lista de tabelas

1	Expansão da Prova de Matemática: composição dos cadernos . . . . .	p. 22
2	Distribuição por Sexo . . . . .	p. 23
3	Distribuição por Situação de Conclusão do Ensino Médio (EM) . . . . .	p. 23
4	Distribuição por rede administrativa de ensino . . . . .	p. 23
5	Análise descritiva por item . . . . .	p. 24
6	Estimativas dos parâmetros dos itens para o modelo de 3-PL . . . . .	p. 33

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 10
<b>2</b>	<b>Modelo de Teoria de Resposta ao Item</b>	p. 14
<b>3</b>	<b>Resultados</b>	p. 21
3.1	Dados . . . . .	p. 21
3.2	Análise Descritiva dos Itens . . . . .	p. 24
3.3	Estimativas dos parâmetros dos itens . . . . .	p. 33
3.4	Estimativas dos parâmetros dos indivíduos (Cálculo das Proficiências) . . . . .	p. 35
3.5	Visualização espacial da proficiência em Matemática . . . . .	p. 41
<b>4</b>	<b>Considerações finais</b>	p. 42
	<b>Referências</b>	p. 43
	<b>Apêndice A – Conceitos em Probabilidade</b>	p. 45
	<b>Apêndice B – Código da leitura e expansão dos dados</b>	p. 51
B.1	Leitura dos microdados da prova de Matemática do ENEM 2011 . . . . .	p. 51
B.2	Definição dos rótulos da variáveis e de seus respectivos valores . . . . .	p. 56
B.3	Expansão da prova de Matemática ENEM/2011 . . . . .	p. 59
	<b>Anexo A – Prova de Matemática do ENEM/2011 (Caderno Amarelo)</b>	p. 70

# 1 Introdução

No Brasil, durante muitos anos, os alunos concluintes do ensino médio, em sua maioria, estavam totalmente dependentes de um ou dois vestibulares isolados para ingressarem no ensino superior. Tais vestibulares eram formulados diferentemente, tanto no nível de dificuldade das questões, como nos assuntos abordados referentes às Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), Lei 9.394 aprovada em 1996.

Castro e Tiezzi (2005) detalharam o processo de reforma do ensino médio ocorrido com a homologação dessa lei em 1999, em que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) orientam os conteúdos do currículo, considerando três eixos: flexibilidade, diversidade e contextualização.

Com a criação do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM, em 1998, pelo Ministério da Educação (MEC) com o objetivo de avaliar as competências e habilidades desenvolvidas pelos alunos do Ensino Médio, foi possível monitorar essa reforma e avaliar o desempenho dos alunos desse ciclo.

Ao longo dos anos, a importância do ENEM foi aumentando conforme a sua utilização em vários programas de políticas públicas. Um dos primeiros programas a utilizar a nota do ENEM foi o Financiamento estudantil (Fies), criado em 1999 para substituir Programa de Crédito Educativo - PCE/CREDUC. O Programa Universidade para Todos (Prouni) é um programa do Ministério da Educação, criado pelo governo federal em 2004, que concede bolsas de estudo integrais e parciais (50%), em instituições privadas de ensino superior.

A partir de 2009, o ENEM passou a ser utilizado também como mecanismo de seleção para o ingresso no Ensino Superior. A partir desse mesmo ano, o exame foi utilizado para certificar o Ensino Médio de pessoas com no mínimo 18 anos que não concluíram esse ciclo. Em 2011, criou-se o programa Ciência sem Fronteiras que concede bolsas de estudos no exterior destinado a alunos de graduação e pós-graduação, com base nos resultados obtidos pelos candidatos no ENEM.

Com a reformulação do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), passando de 64 para

180 questões e de 1 para 2 dias de aplicação, surge em 2010 o Sistema de Seleção Unificada (Sisu), que é um sistema informatizado, gerenciado pelo Ministério da Educação (MEC), em que os alunos cadastram seu número de inscrição do ENEM para concorrer a uma vaga em instituições públicas de educação superior.

Os processos de avaliação e seleção de indivíduos durante muitos anos foram realizados com base nos escores brutos, ou seja, no total de acertos. Dessa forma, a proficiência era avaliada exclusivamente por meio da Teoria Clássica dos Testes (TCT), que consiste em atribuir notas a partir do números de acertos, descontados os erros.

Para Pasquali (2009) a Psicometria é um conjunto de técnicas cujo objetivo é determinar as habilidades cognitivas dos indivíduos expressas por meio do comportamento humano. A Psicometria moderna tem duas vertentes, a teoria clássica dos testes (TCT) e a teoria de resposta ao item (TRI) sendo uma das principais técnicas, e fundamenta-se como um método quantitativo para explicar o padrão de respostas dadas pelos indivíduos a um conjunto de itens de um exame e se destaca especialmente em processos de avaliação educacional em larga escala.

Neste trabalho será utilizada a TRI. Uma das grandes vantagens da TRI sobre a TCT é que ela permite a comparação entre populações, desde que submetidas a provas que tenham alguns itens comuns, ou ainda, a comparação entre indivíduos da mesma população que tenham sido submetidos a provas totalmente diferentes.

Segundo Andrade, Tavares e Valle (2000) a Teoria de Resposta ao Item (TRI) possibilita a garantia de uma maior precisão no cálculo das proficiências (traços latentes) de indivíduos.

Na década de 90, houve uma expansão no uso da TRI em testes de avaliação educacional e, atualmente, a maioria dos programas de avaliação em larga escala no mundo tem como base esta teoria. No Brasil, o uso da TRI em avaliações educacionais teve início com o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) em 1995, mas já era utilizada em vários países do mundo. Andrade e Klein (1999) apresentam uma lista de aplicações da TRI no Brasil em avaliações educacionais. Dois testes bastante conhecidos no mundo que utilizam a TRI são: o PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes) e o exame de proficiência em língua inglesa (TOEFL). Devido aos erros citados anteriormente, a TRI recebeu grande atenção nacional após o ENEM ter substituído vários vestibulares na seleção de alunos que desejavam uma vaga em uma instituição pública de ensino superior.

A TRI é um conjunto de modelos matemáticos que supõe que o desempenho de um avaliado em um teste pode ser predito (ou explicado) pela proficiência (habilidade) e pelas características dos itens do teste. O modelo é baseado em uma função monotônica crescente que indica

que quanto maior a proficiência do avaliado, maior será a sua probabilidade de acertar o item (ANDRADE; TAVARES; VALLE, 2000; BAKER; KIM, 2004; SOARES, 2005; HAMBLETON; SWAMI-NATHAN; ROGERS, 1991; KLEIN, 2003; PASQUALI, 1997).

Segundo Karino (2011), a utilização da TRI no ENEM teve duas finalidades: (i) permitir a comparabilidade dos resultados entre os anos e (ii) permitir a aplicação do ENEM várias vezes ao ano. Isto é possível porque a TRI concentra-se nos itens e não no teste como um todo. A medida de proficiência da TRI leva em conta não apenas o número de acertos, mas também o padrão de respostas do aluno.

Fundamentalmente, este trabalho de monografia se justifica por trazer uma melhor compreensão do desempenho regional obtido pelos alunos de Minas Gerais na prova de Matemática do ENEM de 2011. A dimensão espacial e geográfica das proficiências tem sido ainda pouco explorada. Cada região do país apresenta um cardápio próprio de problemas, cuja solução não é uniforme. Por exemplo, será que a probabilidade de acerto de um determinado item da prova varia significativamente de uma região para outra? A distribuição espacial das proficiências nos centros urbanos/rurais deverá se dar em torno de “*hotspots*”? A localização obedece a diferentes determinantes conforme cada rede administrativa de ensino? Diferentes contextos sócioespaciais e econômicos propiciam a oportunidade para o surgimento de níveis distintos de aprendizado/habilidades? As respostas a estes e outros aspectos podem contribuir significativamente para os planejadores e gestores da educação brasileira nas esferas federal, estadual e municipal. Geralmente, eles se vêem crescentemente impelidos a incorporar, ao lado das tradicionais variáveis socioeconômicas, as dimensões espaciais e territoriais do aprendizado, um fenômeno tão importante para o desenvolvimento de uma nação.

Os números não podem ser generalizados, e é por causa da extensão territorial de Minas Gerais que este estudo se propõe a realizar uma visualização espacial das proficiências dos alunos que fizeram o ENEM nesse período, uma vez que o desempenho pode ter uma forte heterogeneidade regional podendo indicar fatores de deficiência diferenciados associados ao contexto de sucesso/fracasso desses candidatos ao exame.

Os diferentes contextos sociais e econômicos dos municípios mineiros propiciam a oportunidade para o surgimento de uma dinâmica distinta no que diz respeito ao conhecimento e habilidades cognitivas de seus estudantes e isto tem desafiado a capacidade dos planejadores e gestores em sistemas de avaliação educacional bem como uma maior compreensão dos aspectos que diferenciam cada uma das regiões quanto ao aprendizado de seus estudantes. Este trabalho teve como objetivo maior estudar a TRI e calcular as proficiências estimadas para os alunos que fizeram a prova de matemática do ENEM/2011 em Minas Gerais. O capítulo 2 apresenta a Te-

oria de Resposta ao Item, o capítulo 3 destaca os resultados obtidos no estudo e o capítulo 4 as considerações finais. O Apêndice A apresenta alguns conceitos em Probabilidade, o Apêndice B disponibiliza a programação de SSPS necessária para leitura e expansão dos microdados e o Anexo A apresenta a prova de Matemática referente ao caderno Amarelo.

## 2 Modelo de Teoria de Resposta ao Item

A Teoria de Resposta ao Item (TRI) apresenta uma longa história, pois no século XIX, já havia os primeiros estudos em medida, mas foi a partir de meados dos anos 80, que a TRI vem se tornando a técnica predominante no campo dos testes.

No início do século XX, Thurstone (1927) deu uma grande contribuição na construção de medida de atitude. Araujo, Andrade e Bortolotti (2009) desenvolveram um método estatístico de medida denominado Lei dos Julgamentos Comparativos que pode ser visto como o mais importante precursor probabilístico da Teoria de Resposta ao Item. Além disso, os estudiosos Lawley (1943), Guttman (1950) e Lazarsfeld (1950) apresentaram os primeiros modelos para variáveis latentes, que foram fundamentais para o início da TRI.

Para Pasquali (1996), a formalidade para os primeiros modelos de TRI surgiu com os trabalhos de Lord (1952, 1953a, 1953b) nos Estados Unidos e Rasch (1960) na Holanda, que a utilizaram para testes de desempenho e de aptidão. Lord (1952) elaborou o modelo teórico e o método para estimar os parâmetros dos itens utilizando o modelo da ogiva normal. Em seguida, Birnbaum (1968) propôs uma formulação matemática mais apropriada e utilizada até os dias atuais que é o modelo logístico.

Segundo Andrade, Tavares e Valle (2000), a Teoria de Resposta ao Item (TRI) é um conjunto de modelos matemáticos que procuram representar a probabilidade de um indivíduo dar uma certa resposta a um item como função dos parâmetros do item e da habilidade do respondente. Essa relação é sempre expressa de tal forma que quanto maior a habilidade, maior a probabilidade de acerto no item.

Tradicionalmente utilizam os resultados de exames, representados por seus escores brutos ou padronizados, para avaliar ou selecionar indivíduos com um determinado fim. Ao contrário da Teoria Clássica dos Testes que sempre associa as análises e interpretações ao exame como um todo, a Teoria de Resposta ao Item (TRI) tem contribuído com modelos que representam a relação entre a probabilidade de um indivíduo responder corretamente a um item e suas habili-

dades na área em que está sendo avaliado. Com isso, os itens são os elementos centrais e não o exame como um todo. Os modelos logísticos em TRI são dicotômicos e utilizados quando os itens de teste são binários, portanto, a variável resposta  $Y$  assume apenas dois valores 0 e 1, valor igual a 0 para item errado e igual a 1 para item correto.

Para a formalização do modelo será necessário conhecimentos básicos de probabilidade tais como: Função de Distribuição de Probabilidade, Esperança e caracterização do modelo de Bernoulli; todos apresentados no apêndice A.

O princípio da modelagem via Teoria de Resposta ao Item é o mesmo utilizado em qualquer área da estatística, ou seja, o modelo decompõe as observações em duas partes: sistemática (explicável) e aleatória (não explicável), conforme apresentado por Azevedo e Gamerman (2009). O modelo fica expressado por

$$Y = \mu + \text{erro} \quad \text{onde} \quad E(Y) = \mu$$

O tratamento da parte sistemática é mais difícil e por isso iniciaremos a formalização da TRI por esta componente determinística. Considere a seguinte hipótese  $H_0 : \mu = \theta$ , em que  $\theta$  representa a proficiência do aluno. Assim, uma estimativa para o  $\theta$  de cada aluno seria a média (ou a soma) das suas respostas corretas (escore bruto). Isso é muito comum mas não é a estratégia mais apropriada, pois o aluno pode ser prejudicado caso receba itens mais difíceis e a comparação com os demais se torna injusta.

A primeira formalização da TRI veio com a proposta de Rasch (1960) que considerou a dificuldade ( $b_i$ ) do item  $i$ . A hipótese adotada por ele foi  $H_0 : \mu = \theta - b_i$ . Quanto maior a dificuldade do item espera-se uma menor proporção de respostas corretas ( $Y$ 's iguais a 1), principalmente quando a habilidade do aluno é baixa (Figura 1(c)). O modelo de Rasch ou de 1 parâmetro é expresso por

$$Y = (\theta - b_i) + \text{erro}.$$

Lord (1952) propôs um segundo modelo, baseado na distribuição normal acumulada (ogiva normal), que adicionou um outro parâmetro ao modelo de Rasch: a discriminação ( $a_i$ ) do item  $i$ . A discriminação de um item representa a capacidade desse item separar os indivíduos que possuem a habilidade exigida nesse item daqueles que ainda não tenham adquirido tal conhecimento. Quanto maior a discriminação do item espera-se que a proporção de acertos do item seja maior apenas para os indivíduos com alta habilidade (Figura 1(d)). A hipótese proposta foi  $H_0 : \mu = a_i(\theta - b_i)$ . O modelo de 2 parâmetros é expresso por

$$Y = a_i(\theta - b_i) + \text{erro}.$$

O tratamento da parte aleatória é mais simples, mas tem suma importância para adequabilidade do bom uso do modelo. Existem vários tipos de respostas possíveis: dicotômica, nominal, ordinal e contínua. Neste trabalho, concentraremos em respostas do tipo dicotômicas: 0 (errado) e 1 (certo). O modelo estatístico para modelar variáveis aleatórias do tipo sucesso ou fracasso é o modelo de Bernoulli. Esse modelo possui um parâmetro  $p$  que representa a probabilidade de ocorrer um sucesso, ou seja,  $P(Y = 1) = p$ . Da mesma forma que  $P(Y = 0) = 1 - p$ . Assim, a média dessas respostas corrigidas ( $Y$ ) é dada por  $\mu = E(Y) = p$ . Com isso tenderíamos a fazer

$$p = \mu = a_i(\theta - b_i) \quad (2.1)$$

Conforme Azevedo e Gamerman (2009) destaca, a igualdade da equação (2.1) gera o problema de  $p$  e  $\mu$  estarem em diferentes escalas, ou seja,  $0 \leq p \leq 1$  e  $-\infty < \mu < \infty$ . Será necessário transformar  $\mu$  para  $[0, 1]$ . Uma alternativa para contornar esse problema seria utilizar qualquer função de distribuição acumulada de uma variável aleatória na reta. As principais transformações utilizadas são

1. Ogiva Normal:  $F(z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2} dx$
2. Logística:  $F(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$

As duas transformações são bem similares, mas na literatura de TRI é mais comum o uso da transformação logística. Se  $F$  é a função de distribuição acumulada do modelo logístico, temos que

$$p_i = F(\mu) = F(a_i(\theta - b_i)) = \frac{1}{1 + e^{-a_i(\theta - b_i)}}.$$

Lord (1968) observou que questões de múltipla escolha sempre permitiam que o aluno acertasse a questão mesmo quando não possuía nenhuma habilidade para tal, e assim propôs um terceiro modelo, também baseado na distribuição normal acumulada (ogiva normal), que adicionou um parâmetro referente ao acerto casual ( $c_i$ ) do item  $i$  ao modelo de dois parâmetros. BIRNBAUM substituiu a função ogiva normal pela função logística devido ser uma função explícita dos parâmetros do item e da habilidade.

O modelo logístico de 3 parâmetros (AZEVEDO; GAMERMAN, 2009), conhecido como 3-PL, descreve a relação entre a habilidade do indivíduo examinado e a probabilidade de uma resposta correta considerando três parâmetros: dificuldade, discriminação e casualidade. Ele é frequentemente usado para analisar dados de testes de múltipla escolha onde os indivíduos tentam escolher a resposta correta de uma lista de possíveis respostas. O modelo 3-PL é similar

ao modelo 2-PL, exceto pela probabilidade de que o  $j$ -ésimo indivíduo responderá positivamente o  $i$ -ésimo item que depende do parâmetro  $c_i$ .

Considere  $Y_{ij}$  a resposta do indivíduo  $j$  ao item  $i$ . Então  $Y_{ij} | (\theta_j, \vartheta_i) \sim Ber(p_{ij})$ . A expressão do modelo 3-PL adequado para respostas dicotômicas é dada por

$$p_{ij} = P[Y_{ij} = 1 | (\theta_j, \vartheta_i)] = c_i + (1 - c_i) \frac{1}{1 + e^{-a_i(\theta_j - b_i)}}$$

com  $i=1, 2, \dots, m$  e  $j=1, 2, \dots, n$ ; em que  $l$  é o número de itens e  $n$  é o número de indivíduos.  $Y_{ij}$  é uma variável binária que assume valor 1 quando o indivíduo  $j$  responde corretamente ao item  $i$ , ou 0 quando responde incorretamente;  $\theta_j$  representa a habilidade (traço latente) do  $j$ -ésimo indivíduo;  $P(Y_{ij} = 1 | \theta_j, \vartheta_i)$  é a probabilidade do indivíduo  $j$  com habilidade  $\theta_j$  e parâmetros  $\vartheta_i$  acertar o item  $i$ ;  $\vartheta_i = (a_i, b_i, c_i)$  é o vetor contendo os 3 parâmetros.  $a_i$  é o parâmetro de discriminação (ou de escala) do item  $i$ , com valor proporcional à inclinação da curva característica do item (CCI), Figura 1, no ponto  $b_i$ ;  $b_i$  é o parâmetro de dificuldade (ou de posição) do item  $i$ , medido na mesma escala da habilidade;  $c_i$  é o parâmetro que representa a probabilidade de indivíduos com baixa habilidade acertarem o item  $i$  (probabilidade de acerto casual).

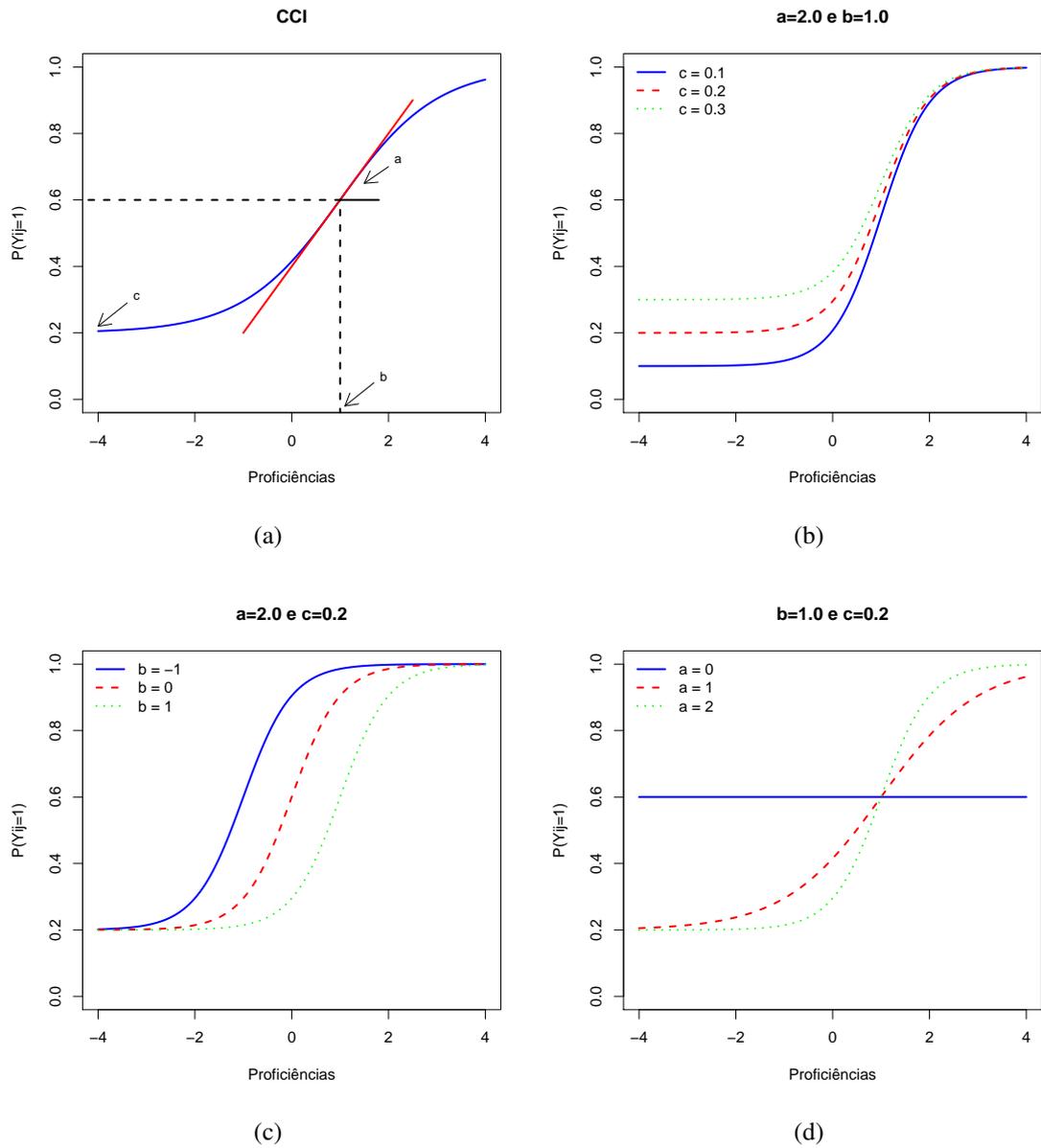


Figura 1: CCI (a); CCI:  $a=2.0$  e  $b=1.0$  com  $c$  variando (b); CCI:  $a=2$  e  $c=0.2$  com  $b$  variando (c); CCI:  $b=1$  e  $c=0.2$  com  $a$  variando (d).

Para um melhor entendimento dos itens do modelo, construímos quatro curvas características dos itens, Figura 1, que mostra a relação entre a proporção de respostas corretas e os parâmetros do modelo. A Figura 1(b) mostra o comportamento do modelo quando o parâmetro de acerto casual ( $c$ ) varia, fixados o parâmetro de discriminação  $a = 2.0$  e o parâmetro de dificuldade  $b = 1.0$ . A Figura 1(c) mostra o comportamento do modelo quando o parâmetro de dificuldade ( $b$ ) varia, fixados o parâmetro de discriminação  $a = 2.0$  e o parâmetro de acerto casual  $c = 0.2$ . A Figura 1(d) mostra o comportamento do modelo quando o parâmetro de discriminação ( $a$ ) varia, fixados o parâmetro de dificuldade  $b = 1.0$  e o parâmetro de acerto casual  $c = 0.2$ .

A estimação por máxima verossimilhança apresenta problemas para os itens que são respondidos corretamente, ou incorretamente, por todos os indivíduos, e também para as habilidades de indivíduos que responderam corretamente, ou incorretamente, a todos os itens (ANDRADE; TAVARES; VALLE, 2000). Neste trabalho de monografia, utilizaremos o software (ZIMOWSKI et al., 2003) BILOG-MG, cujo enfoque Bayesiano é adotado para estimar os parâmetros do modelo 3-PL, e esses problemas são contornados.

A estimação Bayesiana estabelece distribuições a priori para os parâmetros, constrói uma distribuição a posteriori e estima os parâmetros com base em alguma característica dessa distribuição. As componentes de  $\vartheta_i$  são consideradas variáveis aleatórias independentes e contínuas, com distribuições especificadas. Nos modelos de TRI, a estimação envolve dois tipos de parâmetros: os parâmetros dos itens e as habilidades dos indivíduos. Neste trabalho, estimamos os parâmetros dos itens e as habilidades dos indivíduos simultaneamente.

A função de verossimilhança do modelo 3-PL (ANDRADE; TAVARES; VALLE, 2000); (AZEVEDO; GAMERMAN, 2009); (GAMERMAN; LOPES, 2006) é dada por:

$$L(\vartheta, \theta) = \prod_{j=1}^n \prod_{i \in I_j} p_{ij}^{y_{ij}} (1 - p_{ij})^{1-y_{ij}}$$

em que  $I_j$  contém 1, 2, ..., 1.

Uma vez que as distribuições a posteriori não têm uma forma analítica fechada, os métodos numéricos serão utilizados para auxiliar a estimação dos parâmetros do modelo. Alguns gráficos e resumos serão obtidos com o auxílio do software (R Core Team, 2013).

Um ponto crítico na TRI é a estimação dos parâmetros envolvidos nos modelos, em particular quando necessita-se estimar tanto os parâmetros dos itens quanto os das habilidades. Inicialmente, a estimação era feita através do método da máxima verossimilhança conjunta, ver (ANDRADE; TAVARES; VALLE, 2000), que envolve um número muito grande de parâmetros a se-

rem estimados simultaneamente e, conseqüentemente, gera grandes problemas computacionais. O número de parâmetros a serem estimados no modelo 3-PL é dado por  $p = 3.I + J$ , sendo  $I$  o número de itens e  $J$  o de indivíduos. Como os bancos de dados são geralmente muito grandes, isso gera dificuldades computacionais para o ajuste do modelo. Com isto, a estimação Bayesiana tem sido a mais adotada. Para maiores detalhes ver Fox (2010). Como esse trabalho tem um enfoque mais aplicado, não será apresentada a teoria referente aos métodos de estimação do modelo. Um estudo mais matemático pode encontrado em (ANDRADE; TAVARES; VALLE, 2000).

## 3 Resultados

### 3.1 Dados

A teoria apresentada nesta monografia foi aplicada aos microdados da prova de Matemática do ENEM 2011, mas especificamente às respostas dos alunos que se inscreveram no estado de Minas Gerais. Apesar de nem todos os alunos do Ensino Médio terem prestado o ENEM, nesse trabalho consideraremos o estudo populacional, pois a nossa população alvo foi todos os inscritos nos 853 municípios.

Os dados foram obtidos junto ao portal dos Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira ([www.inep.gov.br](http://www.inep.gov.br)) em 17 de abril de 2013 às 10h20min.

A relação das variáveis disponibilizadas pode ser visualizada no apêndice B bem como a sintaxe SPSS de leitura, formatação e expansão desses microdados.

A prova de Matemática do ENEM 2011 foi composta de quatro cadernos: Prova Amarela, Prova Cinza, Prova Azul e Prova Rosa, todas com os mesmo 45 itens, apenas dispostos de forma permutada, conforme apresentado na Tabela 1.

O caderno Amarelo foi considerado referência para a construção do banco de dados. Esse caderno está disponibilizado no anexo A.

Tabela 1: Expansão da Prova de Matemática: composição dos cadernos

Prova Amarela			Expansão		
Questão do ENEM	Gabarito	Item	Prova Cinza	Prova Azul	Prova Rosa
136	B	1	2	3	4
137	A	2	1	4	3
138	E	3	4	1	2
139	E	4	3	2	1
140	E	5	12	12	7
141	C	6	13	13	8
142	C	7	7	5	11
143	E	8	8	11	12
144	E	9	9	9	13
145	E	10	5	10	9
146	B	11	6	6	10
147	C	12	11	8	6
148	B	13	10	7	5
149	E	14	17	18	15
150	C	15	18	19	16
151	E	16	19	17	14
152	B	17	14	15	19
153	A	18	15	14	18
154	D	19	16	16	17
155	C	20	23	21	29
156	B	21	21	23	27
157	D	22	20	22	26
158	B	23	22	20	28
159	E	24	28	28	24
160	A	25	25	24	21
161	D	26	24	27	20
162	C	27	26	25	22
163	D	28	29	29	25
164	B	29	27	26	23
165	D	30	35	36	34
166	C	31	36	35	35
167	C	32	33	33	30
168	C	33	34	32	31
169	B	34	30	34	36
170	A	35	31	30	32
171	D	36	32	31	33
172	C	37	42	40	44
173	A	38	43	41	45
174	E	39	41	39	43
175	C	40	44	37	41
176	C	41	45	38	42
177	C	42	39	43	37
178	C	43	40	42	38
179	D	44	37	45	40
180	D	45	38	44	39

A Tabela 2 apresenta a distribuição dos candidatos que fizeram a prova de Matemática do ENEM/2011 por sexo. Observa-se que dos 438.974 candidatos que compareceram, 59% eram do sexo feminino.

Tabela 2: Distribuição por Sexo

Sexo	Frequência	Percentual
Masculino	180.007	41,0
Feminino	258.967	59,0
Total	438.974	100,00

Em relação a Tabela 3 podemos verificar que 52,4% dos candidatos já concluíram o Ensino Médio.

Tabela 3: Distribuição por Situação de Conclusão do Ensino Médio (EM)

Situação de Conclusão do EM	Frequência	Percentual
Já concluiu	230.057	52,4
Cursando e concluirá em 2012	136.466	31,1
Cursando e concluirá após 2012	52.906	12,1
Não conclui e nem esta cursando	19.545	4,5
Total	438.974	100,00

A Tabela 4 apresenta a distribuição por rede administrativa de ensino, sendo que dos 438.974 candidatos, aproximadamente 24% estudam ou estudaram na rede estadual de ensino e 68,9% não identificaram a rede de ensino (possivelmente não responderam tal item no questionário)

Tabela 4: Distribuição por rede administrativa de ensino

Rede administrativa de ensino	Frequência	Percentual
Federal	3.758	0,9
Estadual	104.491	23,8
Municipal	3.604	0,8
Privada	24.746	5,6
Total	136.599	31,1
Valor ausente	302.375	68,9
Total	438.974	100,00

## 3.2 Análise Descritiva dos Itens

A Tabela 5 apresenta o número de respondentes, o total de acertos, o percentual de acertos e o coeficiente de correlação bisserial <sup>1</sup>. O Coeficiente de correlação Bisserial mede a relação entre a resposta do item e o total de acertos na prova. Quanto menor a correlação bisserial de um item, menor será a influência desse item na nota final do candidato. Observa-se que os itens 04, 08, 09, 10, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 27, 30, 33, 38, 39 e 43 tiveram percentual de acertos menor ou igual a 30%. Percebe-se ainda que os itens 20, 23, 33 e 39 apresentaram baixo coeficiente de correlação bisserial (menor ou igual a 0,20), e isso pode comprometer a convergência do modelo, pois são itens que não se relacionam com o escore total do teste.

Tabela 5: Análise descritiva por item

Itens	Nº respondentes	Total de acertos	% acertos	Corr. bisserial
1	437.503	278.208	63,38	0,43
2	437.310	236.502	53,88	0,49
3	437.130	312.042	71,08	0,42
4	436.581	59.035	13,45	0,37
5	436.886	237.032	54,00	0,40
6	437.143	162.405	37,00	0,49
7	437.082	171.821	39,14	0,43
8	437.078	66.223	15,09	0,38
9	437.155	92.548	21,08	0,24
10	436.874	124.445	28,35	0,49
11	437.191	230.875	52,59	0,46
12	436.787	143.082	32,59	0,43
13	437.006	140.076	31,91	0,29

<sup>1</sup>Com base no trabalho de (LIRA, 2004), o Estimador do Coeficiente de Correlação Bisserial é apresentado da seguinte forma:

$$\hat{\rho}_b = \frac{\bar{X}_p - \bar{X}_t}{S_t} \cdot \frac{p}{y}$$

ou

$$\hat{\rho}_b = \frac{\bar{X}_p - \bar{X}_q}{S_t} \cdot \frac{p \cdot q}{y}$$

onde:  $\hat{\rho}_b$  é o Coeficiente de Correlação Bisserial;  $\bar{X}_p$  é média dos valores de X para o grupo superior (grupo cujos valores de X estão acima do ponto de dicotomização da variável Y);  $\bar{X}_q$  é a média dos valores de X para o grupo inferior (grupo cujos valores de X estão abaixo do ponto de dicotomização da variável Y);  $\bar{X}_t$  é a média total de X da amostra;  $S_t$  é desvio padrão total de X da amostra;  $p$  é a proporção de casos do grupo superior (grupo cujos valores de X estão acima do ponto de dicotomização da variável Y);  $q$  é a proporção de casos do grupo inferior (grupo cujos valores de X estão abaixo do ponto de dicotomização da variável Y);  $y$  é a ordenada da distribuição normal do ponto de dicotomização (p) da variável (Y).

14	436.438	249.608	56,86	0,49
15	437.043	206.376	47,01	0,52
16	436.813	246.158	56,08	0,45
17	436.650	92.930	21,17	0,28
18	436.549	105.362	24,00	0,27
19	437.128	114.319	26,04	0,36
20	436.644	59.580	13,57	0,05
21	436.614	94.735	21,58	0,23
22	436.966	108.592	24,74	0,33
23	436.651	101.013	23,01	0,16
24	436.986	75.352	17,17	0,31
25	436.585	144.926	33,01	0,41
26	436.819	239.425	54,54	0,43
27	436.428	119.777	27,29	0,22
28	436.568	179.877	40,98	0,45
29	436.616	156.284	35,60	0,42
30	436.150	107.751	24,55	0,27
31	436.657	144.376	32,89	0,46
32	436.092	151.814	34,58	0,30
33	436.687	92.828	21,15	0,19
34	435.853	148.213	33,76	0,31
35	436.448	175.090	39,89	0,42
36	436.634	216.382	49,29	0,39
37	436.636	244.267	55,64	0,47
38	436.259	88.904	20,25	0,34
39	435.689	69.531	15,84	0,19
40	436.605	284.776	64,87	0,40
41	436.715	284.866	64,89	0,41
42	436.357	135.819	30,94	0,37
43	435.674	91.401	20,82	0,24
44	436.296	156.426	35,63	0,35
45	436.510	183.076	41,71	0,44

---

As Figuras 2, 3, 4, 5, 6 e 7 se referem ao comportamento das escolhas das alternativas para cada um dos 45 itens da prova segundo o grupo de escore total. Cada um dos 45 gráfi-

cos mostra a proporção de alunos que selecionaram cada alternativa, para grupos consecutivos de seus escores ordenados. Esperamos que a linha referente ao gabarito tenha inclinação positiva, o que significa que alunos com maiores escores tendem a responder corretamente com mais frequência. Analogamente, as linhas para os distratores (alternativas incorretas) devem ter uma inclinação negativa. Na análise desses gráficos, os itens cuja a linha referente ao gabarito apresentou inclinação negativa foi considerado de comportamento ruim, foram eles: 4, 9, 8, 20, 21, 23, 33 e 39. Também se destacaram os itens intermediários: 17, 18, 22, 24, 27, 30, 38 e 43, que são aqueles, nos quais a linha referente ao gabarito teve uma inclinação positiva pouco significativa. Do total dos 45 itens, 29 foram considerados de comportamento bom, pois a linha referente ao gabarito apresenta uma inclinação positiva.

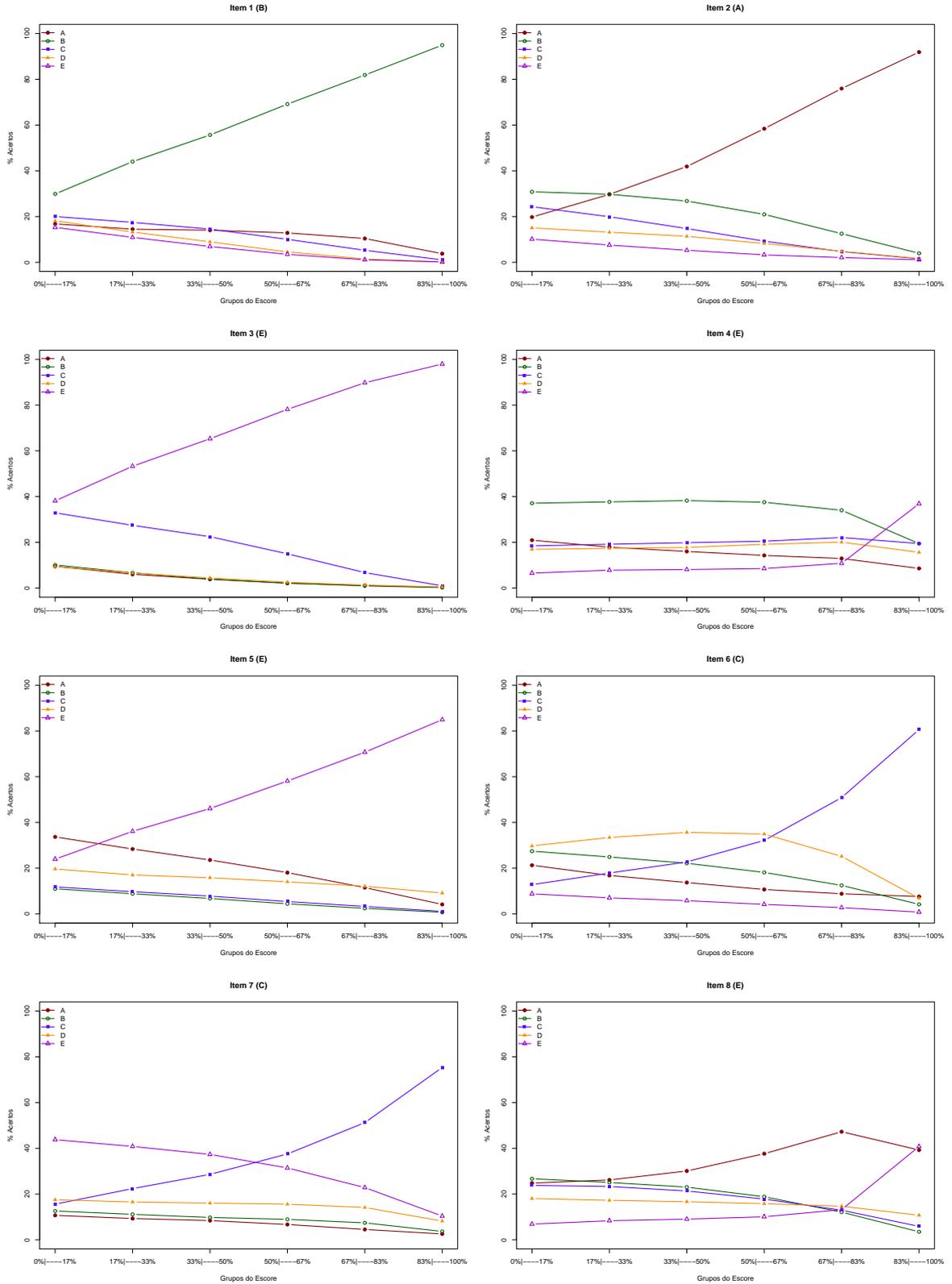


Figura 2: Proporção de acertos em cada alternativa por grupo do escore, itens 01 a 08.

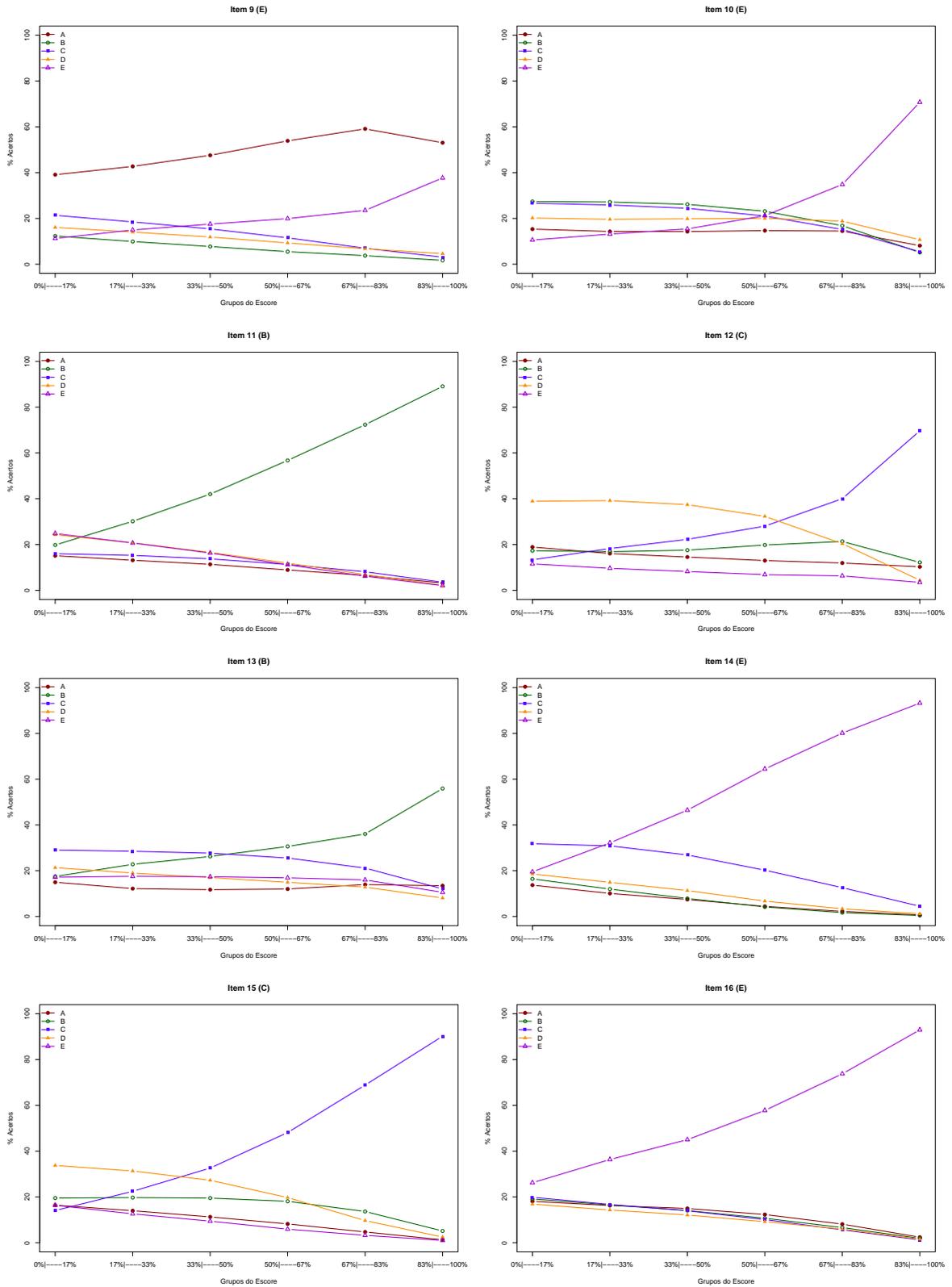


Figura 3: Proporção de acertos em cada alternativa por grupo do escore, itens 09 a 16.

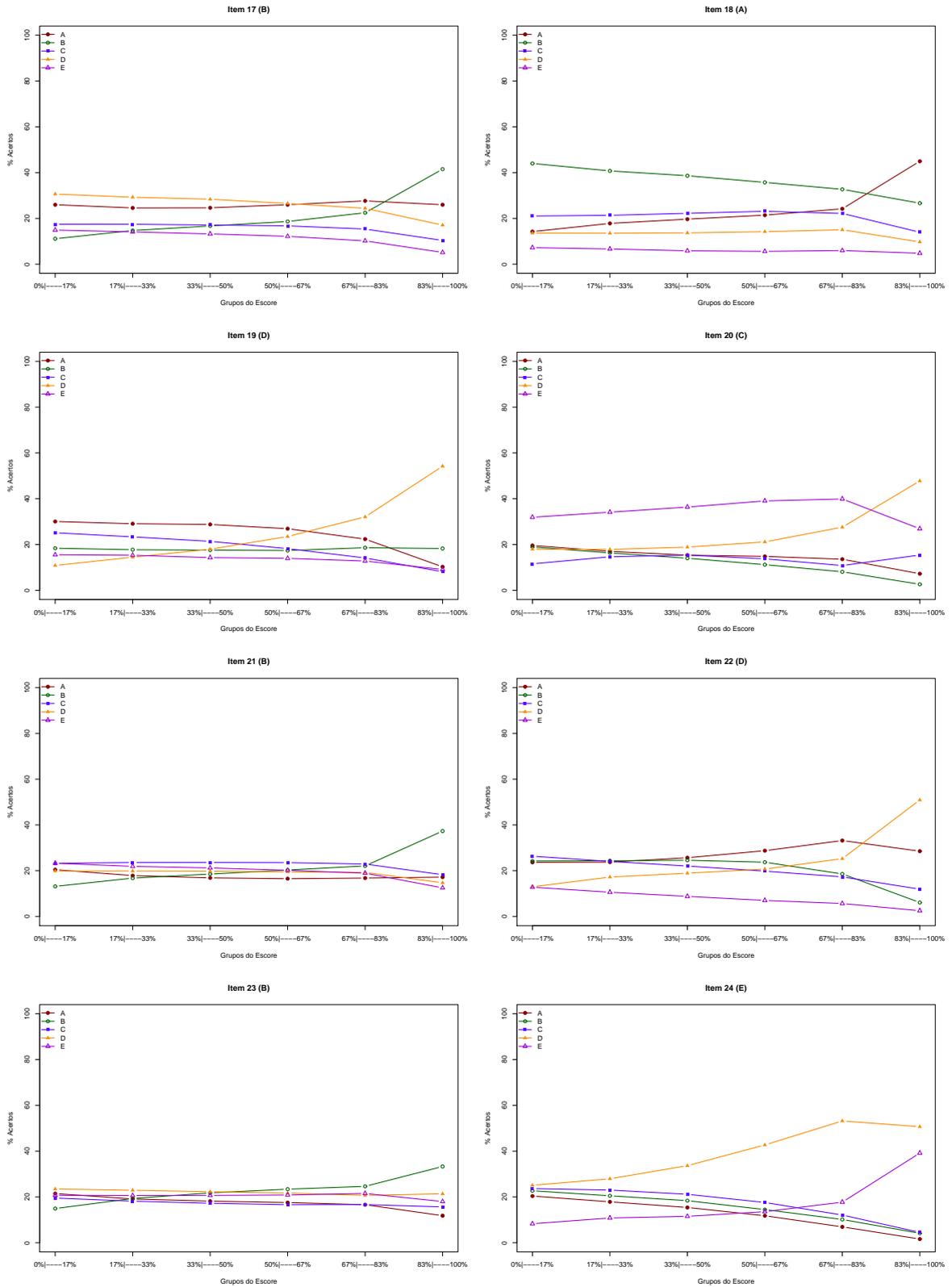


Figura 4: Proporção de acertos em cada alternativa por grupo do escore, itens 17 a 24.

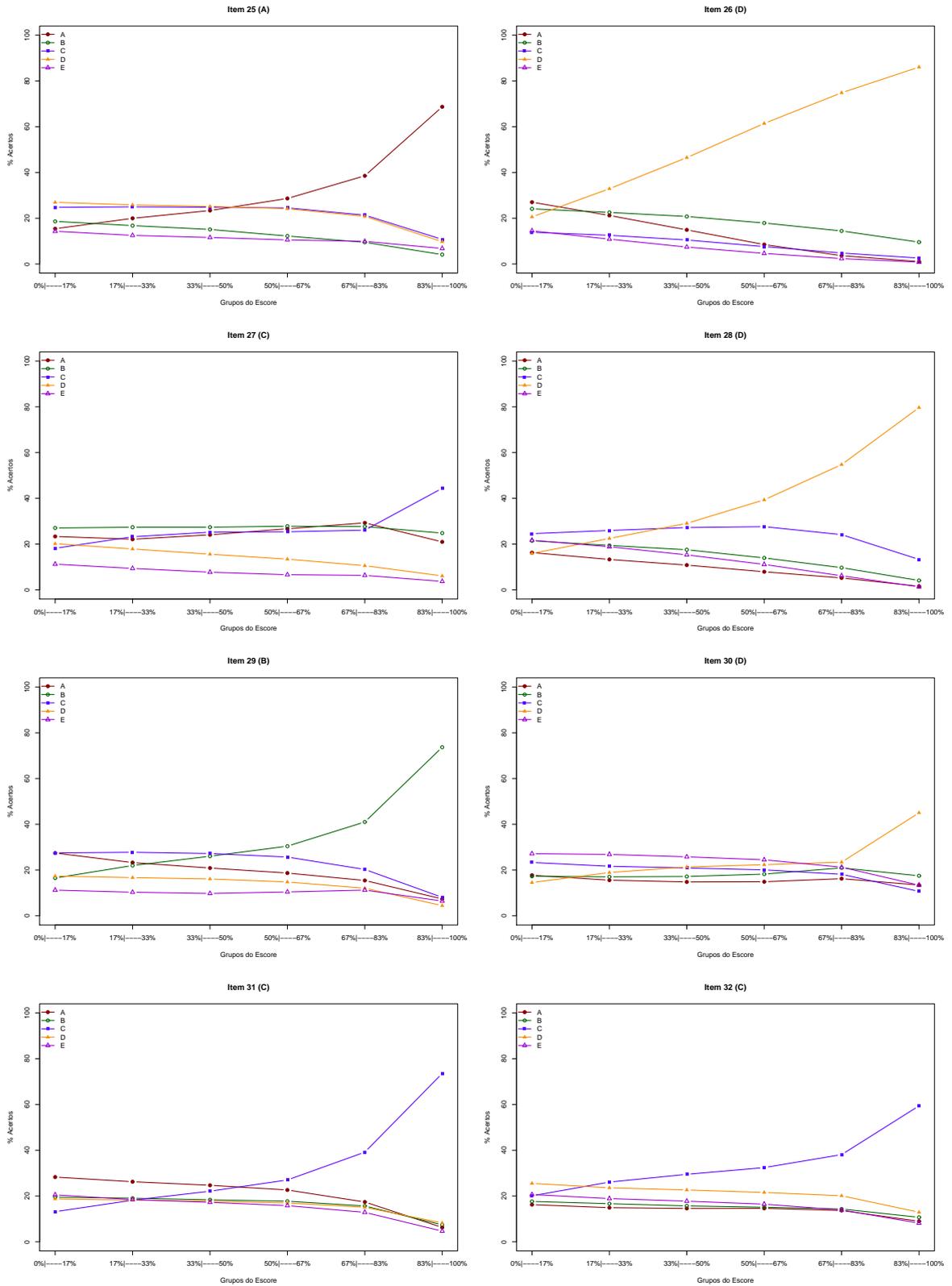


Figura 5: Proporção de acertos em cada alternativa por grupo do escore, itens 25 a 32.

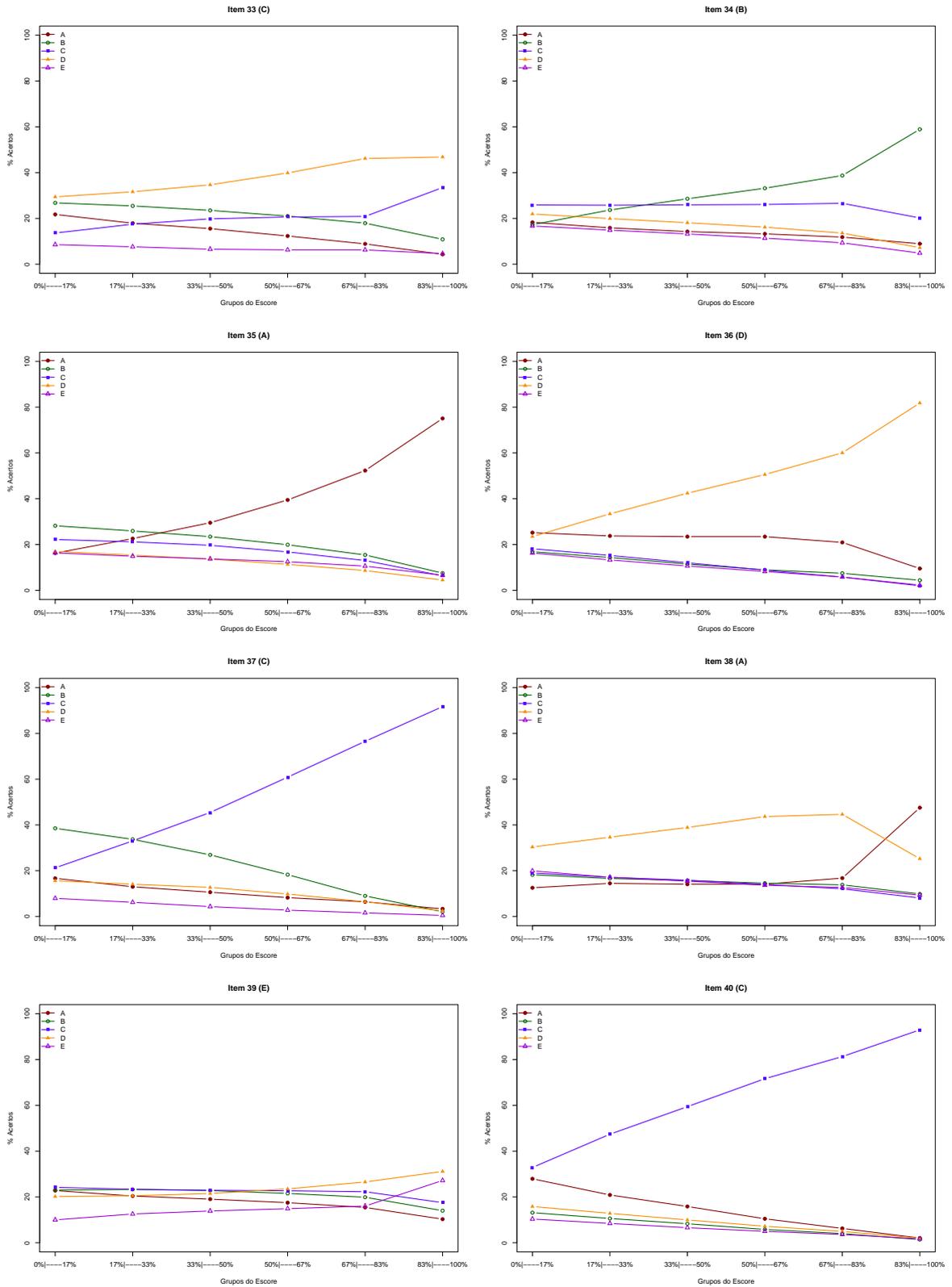


Figura 6: Proporção de acertos em cada alternativa por grupo do escore, itens 33 a 40.

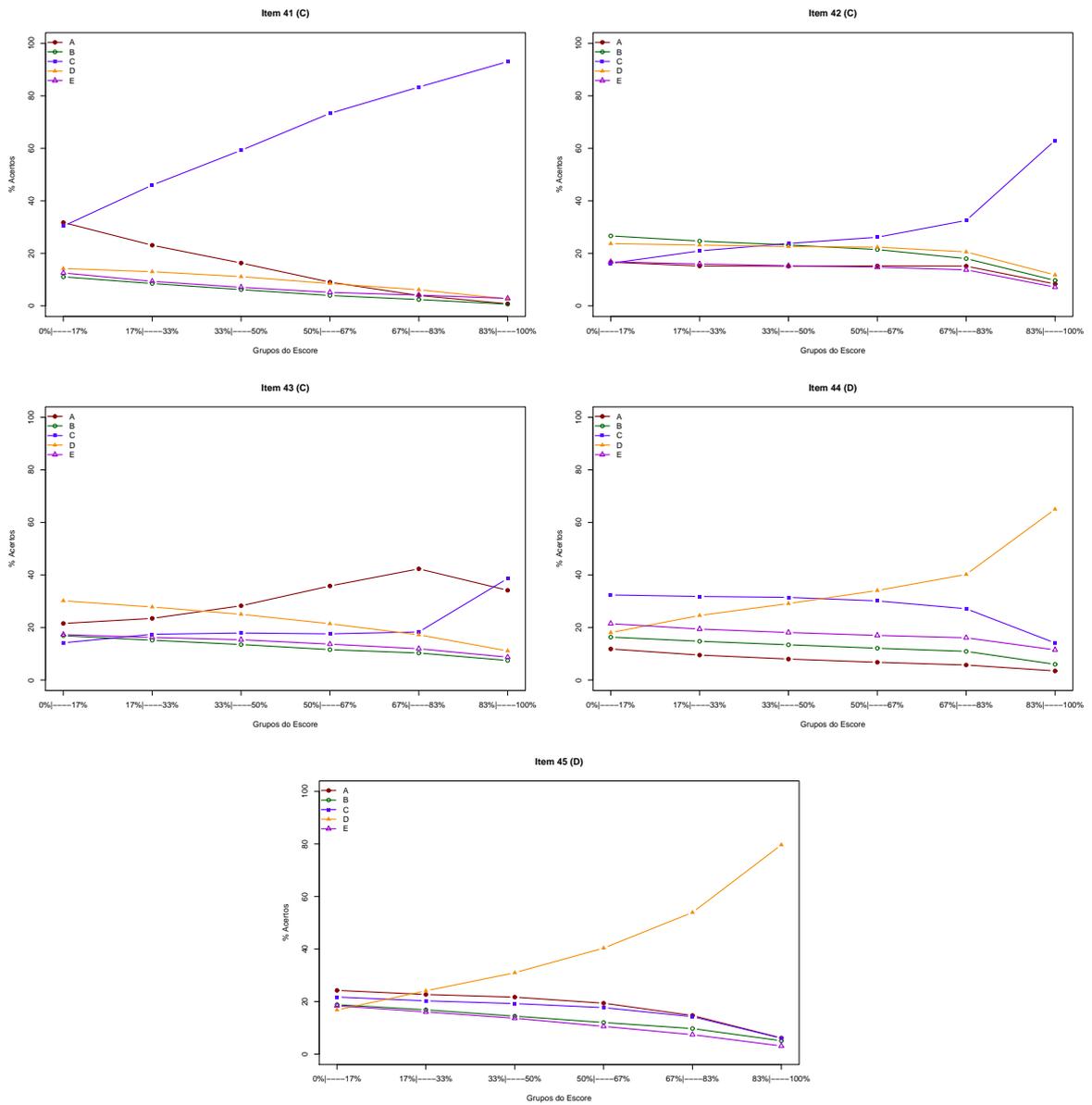


Figura 7: Proporção de acertos em cada alternativa por grupo do escore, itens 41 a 45.

### 3.3 Estimativas dos parâmetros dos itens

A Tabela 6 mostra as estimativas dos parâmetros dos itens:  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  e  $\hat{c}$ , com os respectivos erros padrão:  $EP(\hat{a})$ ,  $EP(\hat{b})$  e  $EP(\hat{c})$ . Para o objetivo do nosso trabalho iremos analisar apenas os parâmetros sem os erros padrão relacionados aos 45 itens, destacaremos os 5 maiores valores para cada parâmetro e também os cinco menores, todos em ordem decrescente. Com relação ao poder de discriminação (parâmetro a), os 5 itens com maiores valores de  $\hat{a}$  são: 20, 38, 43, 04 e 30, e com os menores valores: 35, 40, 41, 26 e 05. Em termos de dificuldade (parâmetro b), os 5 itens com os maiores valores de  $\hat{b}$  são: 20, 23, 09, 39 e 33 e os 5 menores: 14, 26, 03, 40 e 41. Já com relação à probabilidade de acerto casual (parâmetro c), maiores valores de  $\hat{c}$ : 03, 16, 32, 01 e 44, e os 5 menores valores: 08, 04, 14, 41 e 26.

Tabela 6: Estimativas dos parâmetros dos itens para o modelo de 3-PL

Itens	$\hat{a}$	$EP(\hat{a})$	$\hat{b}$	$EP(\hat{b})$	$\hat{c}$	$EP(\hat{c})$
01	1,783	0,017	-0,018	0,009	0,260	0,004
02	1,867	0,014	0,180	0,006	0,165	0,003
03	2,063	0,020	-0,254	0,010	0,316	0,004
04	3,211	0,032	1,791	0,004	0,079	0,001
05	1,117	0,012	0,105	0,016	0,121	0,006
06	2,136	0,015	0,855	0,004	0,154	0,001
07	1,586	0,014	0,939	0,006	0,174	0,002
08	2,865	0,027	1,742	0,004	0,086	0,001
09	1,397	0,023	2,328	0,013	0,147	0,001
10	2,443	0,018	1,129	0,003	0,124	0,001
11	1,579	0,013	0,199	0,008	0,143	0,003
12	2,035	0,017	1,203	0,004	0,176	0,001
13	1,701	0,022	1,721	0,007	0,230	0,001
14	1,700	0,012	-0,123	0,008	0,073	0,004
15	2,114	0,015	0,404	0,004	0,148	0,002
16	2,139	0,018	0,367	0,006	0,281	0,002
17	2,180	0,027	1,957	0,007	0,156	0,001
18	2,404	0,029	1,878	0,006	0,185	0,001
19	1,446	0,016	1,594	0,006	0,126	0,002
20	4,443	0,140	2,561	0,011	0,129	0,001
21	2,405	0,036	2,118	0,008	0,178	0,001

22	2,421	0,026	1,704	0,005	0,176	0,001
23	2,296	0,049	2,448	0,013	0,208	0,001
24	1,956	0,022	1,959	0,007	0,105	0,001
25	2,310	0,022	1,234	0,004	0,198	0,001
26	1,151	0,006	-0,186	0,006	0,007	0,002
27	3,041	0,046	1,963	0,006	0,237	0,001
28	1,723	0,014	0,797	0,005	0,172	0,002
29	2,629	0,023	1,164	0,004	0,225	0,001
30	3,094	0,039	1,833	0,005	0,199	0,001
31	2,580	0,021	1,130	0,004	0,184	0,001
32	2,186	0,027	1,638	0,006	0,271	0,001
33	2,994	0,050	2,171	0,007	0,186	0,001
34	1,609	0,020	1,612	0,007	0,232	0,002
35	1,362	0,013	0,818	0,007	0,135	0,003
36	1,407	0,016	0,679	0,009	0,240	0,003
37	1,699	0,014	0,118	0,008	0,168	0,003
38	3,491	0,035	1,654	0,003	0,140	0,001
39	2,757	0,047	2,290	0,009	0,134	0,001
40	1,295	0,014	-0,314	0,018	0,172	0,008
41	1,255	0,010	-0,566	0,017	0,045	0,008
42	2,918	0,029	1,430	0,004	0,221	0,001
43	3,435	0,049	1,941	0,005	0,172	0,001
44	2,238	0,025	1,404	0,005	0,254	0,001
45	1,725	0,015	0,821	0,005	0,188	0,002

### 3.4 Estimativas dos parâmetros dos indivíduos (Cálculo das Proficiências)

Nessa seção será apresentada através de bloxplots as proficiências estimadas dos alunos que fizeram a prova de matemática de ENEM/2011.

A Figura 8 apresenta o bloxplot da proficiência entre candidatos do sexo feminino e masculino. Percebemos que a maior proficiência estimada em matemática é dos candidatos do sexo masculino.

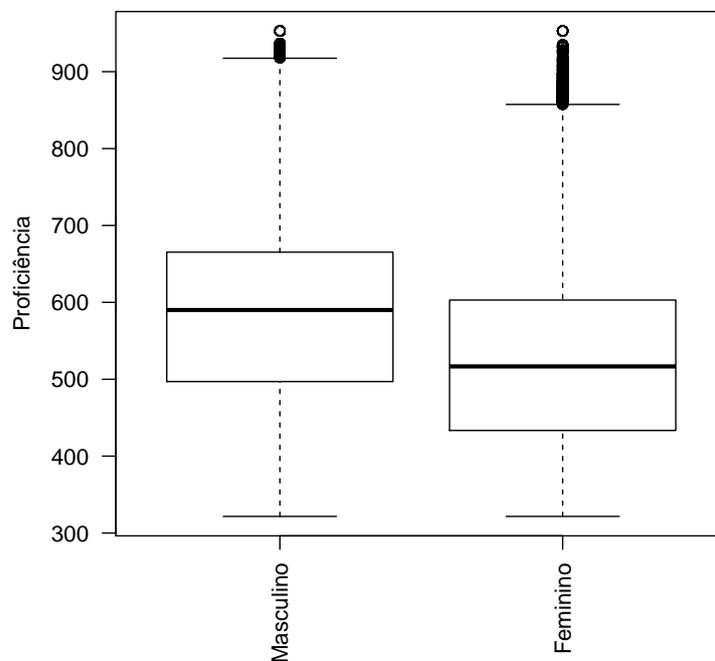


Figura 8: Distribuição das proficiências estimadas por sexo, Matemática/ENEM/2011

Na Figura 9, observa-se que a maior proficiência estimada foi para aqueles candidatos que fizeram a prova sem a intenção de obter a certificação do Ensino Médio.

A Figura 10 apresenta o bloxplot dos alunos que já concluíram o ensino médio (Sit.1), que apresentaram maior proficiência estimada em matemática, e ainda em relação aos alunos que vão concluir o ensino médio em 2012 (Sit.2) e posterior a esse ano (Sit.3), nota-se que as proficiências estimadas estão praticamente equiparadas. As menores proficiências estimadas são dos alunos que não concluíram e não estão cursando o ensino médio (Sit.4).

Na Figura 11, são apresentadas as proficiências estimadas em relação à rede administrativa

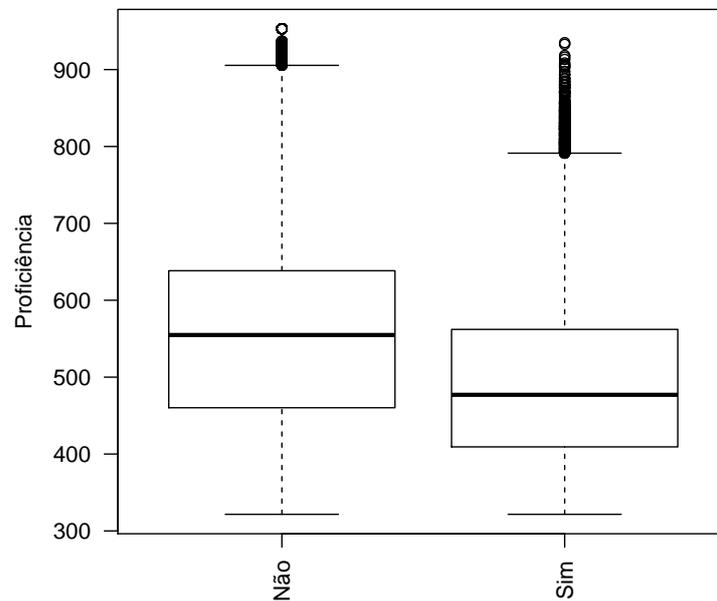


Figura 9: Indicador de solicitação de certificação no Ensino Médio.

de ensino, sendo os melhores desempenhos observados nos alunos da rede Federal, seguidos daqueles da particular, depois municipal, e por último, estadual.

Na Figura 12 são apresentadas as proficiências estimadas dos alunos em matemática por mesorregiões: Noroeste de Minas (3101), Norte de Minas (3102), Jequitinhonha (3103), Vale do Mucuri (3104), Triângulo Mineiro/Alto Paranaíba (3105), Central Mineira (3106), Metropolitana de Belo Horizonte (3107), Vale do Rio Doce (3108), Oeste de Minas (3109), Sul/Sudoeste de Minas (3110), Campo das Vertentes (3111), Zona da Mata (3112). Observa-se que a mesorregião com maiores proficiências em matemática é a Oeste de Minas, seguido da Sul/Sudoeste de Minas e Campo das Vertentes, ainda as mesorregiões com menores proficiências foram no Vale do Mucuri, em seguida Norte de Minas e Jequitinhonha.

A Figura 13 apresenta a distribuição das proficiências por faixas do tamanho populacional dos municípios. Observa-se que as maiores proficiências foram registradas nos municípios maiores. A faixa 1 representa os municípios com a população até 10 mil habitantes, a faixa 2 representa os municípios com a população entre 10 e 50 mil habitantes, a faixa 3 representa os municípios com a população entre 50 e 100 mil habitantes, a faixa 4 representa os municípios com a população entre 100 e 250 mil habitantes, a faixa 5 representa os municípios com a população entre 250 e 500 mil habitantes, e a faixa 6 representa os municípios com a população

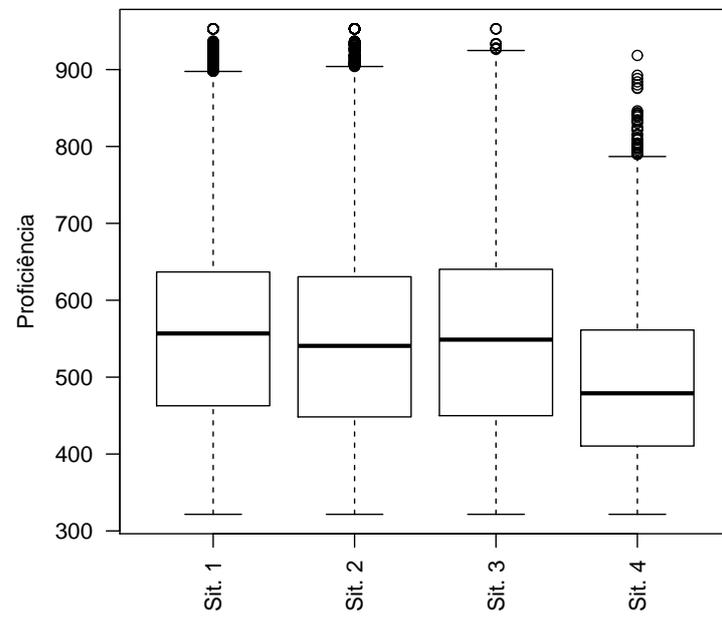


Figura 10: Situação de conclusão do Ensino Médio.

acima de 500 mil habitantes.

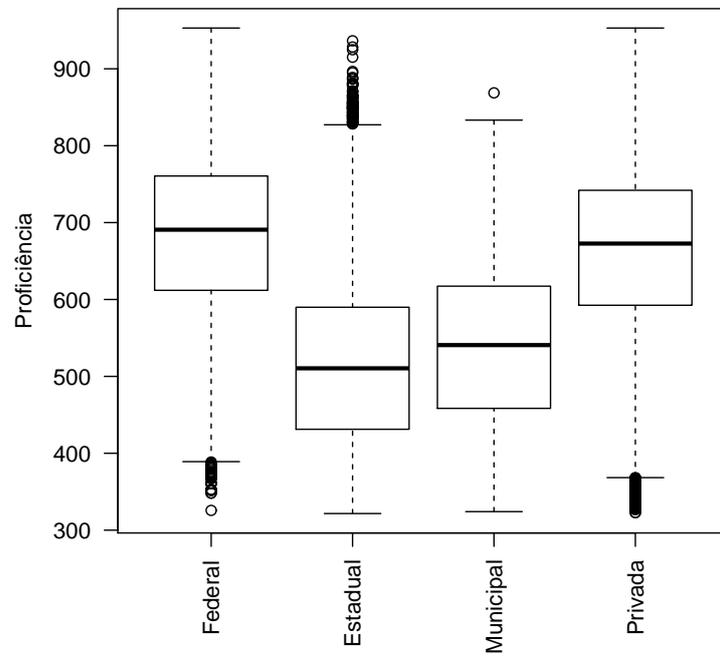


Figura 11: Dependência administrativa (Escola).

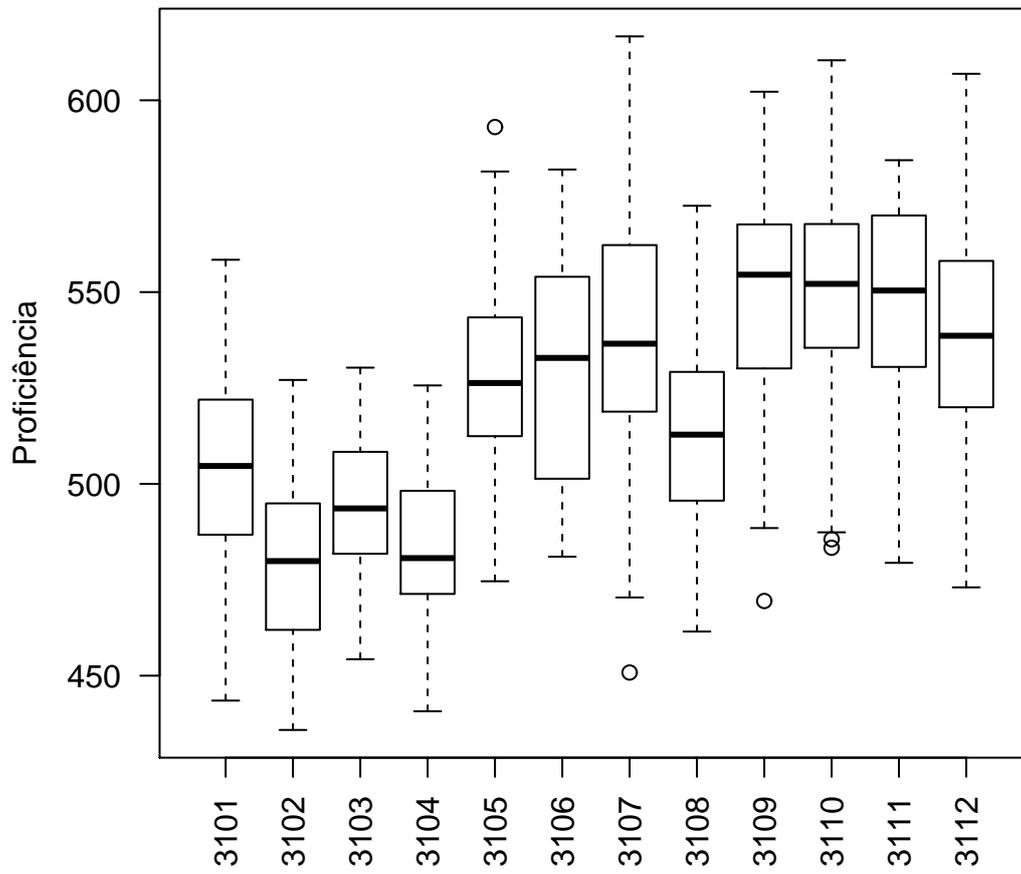


Figura 12: Distribuição das proficiências estimadas por mesorregiões, Matemática/ENEM/2011.

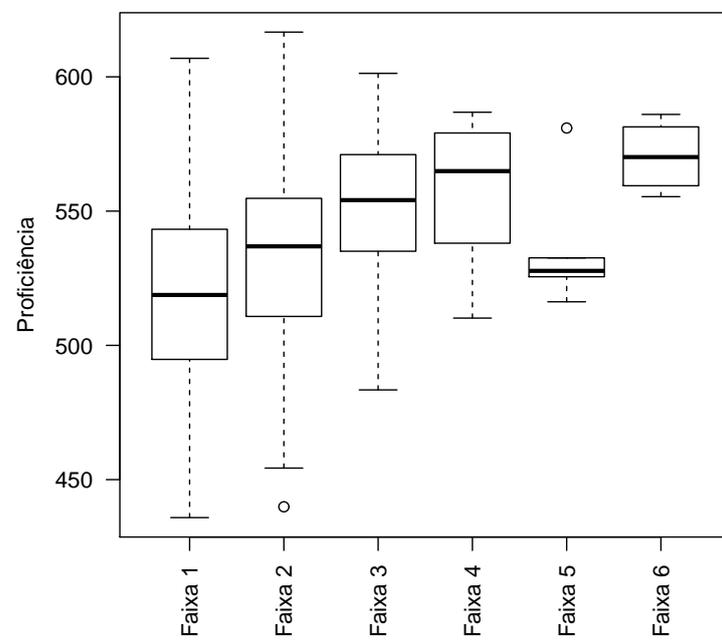


Figura 13: Distribuição das proficiências por faixas do tamanho populacional dos municípios, Matemática/ENEM/2011.

### 3.5 Visualização espacial da proficiência em Matemática

Como o estado de Minas Gerais é bastante heterogêneo geograficamente, optou-se pela apresentação espacial das proficiências médias estimadas por municípios, destacando a mesor-região que ele se insere, conforme a Figura 14.

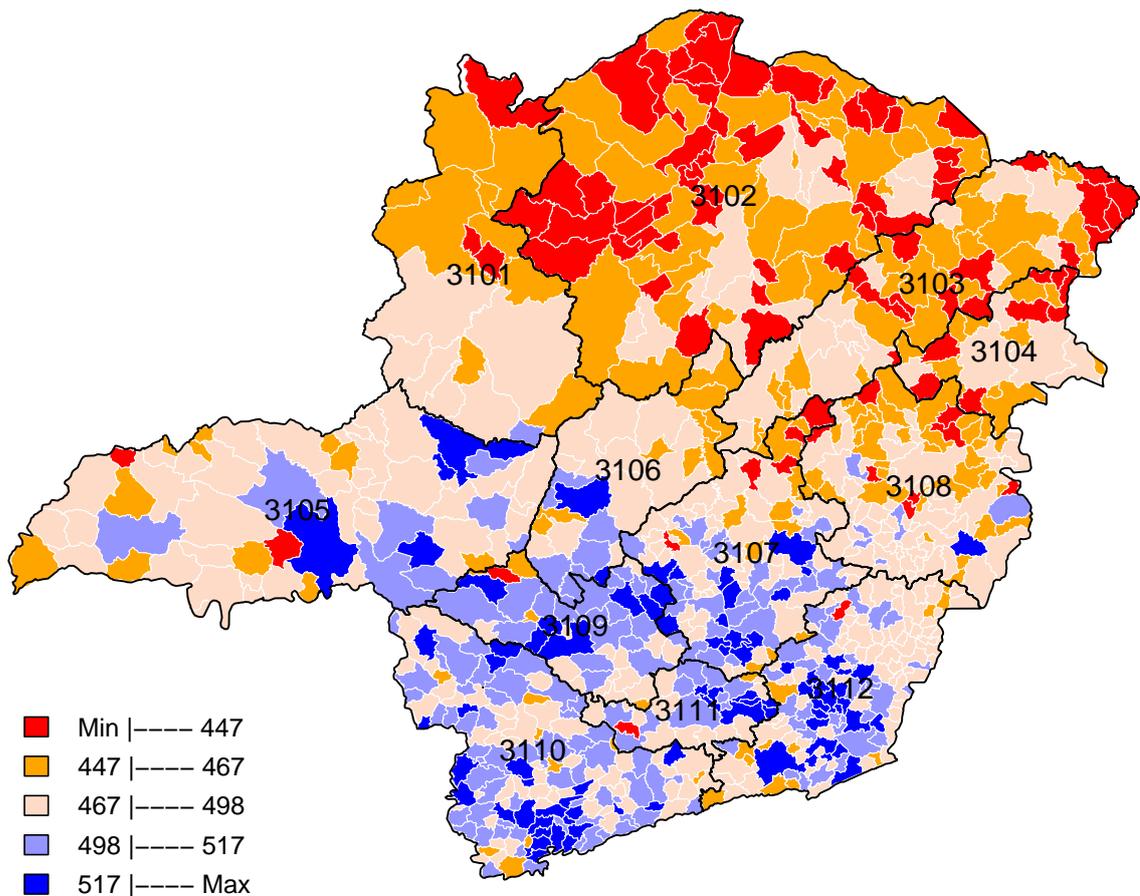


Figura 14: Mapa de Minas Gerais das proficiências estimadas em Matemática/ENEM/2011.

Observa-se nitidamente, que o desempenho em Matemática dos alunos que fizeram o ENEM/2011 nos municípios localizados mais ao norte do estado é bem inferior aos que estão mais ao sul do estado. Percebe-se que o perfil dos municípios e a sua posição geográfica dentro do estado interfere fortemente no desempenho dos alunos na prova de matemática do ENEM/2011.

## 4 Considerações finais

Neste trabalho buscamos um entendimento melhor da Teoria de Resposta ao Item e de como estimar as proficiências dos alunos a partir de um banco de dados reais. Realizamos também algumas análises das características dos itens, tais como dificuldade, discriminação e casualidade. Além disso, destacamos os resultados das proficiências por sexo, rede administrativa de ensino, mesorregião, e tamanho populacional do município, além da distribuição espacial destas proficiências.

Um aspecto interessante foi o melhor desempenho em Matemática por parte dos municípios localizados mais ao Sul do estado, o que coincide com a distribuição geográfica da desigualdade social existente no estado. Os candidatos do sexo masculino tiveram desempenho superior ao obtido pelo sexo feminino. O desempenho obtido na rede Federal de ensino foi maior, como já era esperado.

O tema está em evidência no momento e vários trabalhos futuros podem ser realizados a partir deste. A análise pode ser estendida para as outras três áreas do ENEM (Ciências da Natureza e suas tecnologias, Ciências Humanas e suas tecnologias, Linguagens, códigos e suas tecnologias) e/ou ampliar o estudo para a região Sudeste ou Brasil.

## Referências

- ANDRADE, D. F.; TAVARES, H. R.; VALLE, R. C. Teoria de resposta ao item: Conceitos e aplicações. In: 14º SINAPE - SIMPÓSIO NACIONAL DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA, 2000. Caxambu/MG: ABE - Associação Brasileira de Estatística, 2000.
- ARAUJO, E. A. C.; ANDRADE, D. F. de; BORTOLOTTI, S. L. V. Teoria de resposta ao item. *Revista da Escola de Enfermagem da USP*, v. 43, p. 1000–1008, 2009.
- AZEVEDO, C. L. N.; GAMERMAN, D. Introdução à teoria da resposta ao item. In: 1º Congresso Brasileiro de Teoria de Resposta ao Item. São Paulo: Associação Brasileira de Estatística (ABE), 2009. Minicurso.
- BAKER, F. B.; KIM, S. *Item response theory: parameter estimation techniques*. New York: Marcel Dekker, 2004.
- CASTRO, M. H. G.; TIEZZI, S. A reforma do ensino médio e a implementação do enem no brasil. In: \_\_\_\_\_. *Os desafios da educação no Brasil*. 1. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2005. p. 115–147.
- FOX, J.-P. *Bayesian Item Response modeling Theory and applications*. New York: Springer, 2010.
- GAMERMAN, D.; LOPES, F. H. *Markov Chain Monte Carlo: Stochastic Simulation for Bayesian Inference*. London: Chapman and Hall, 2006.
- HAMBLETON, K. R.; SWAMINATHAN, H.; ROGERS, J. H. *Fundamentals of item response theory*. California: Sage Publications, 1991.
- KARINO, C. A. Entenda a teoria de respostas ao item (tri), utilizada no enem. *Nota técnica, INEP, Ministério da Educação*, v. 1, p. 1–5, 2011.
- KLEIN, R. Utilização da teoria de resposta ao item no sistema nacional de avaliação da educação básica (saeb). *Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação*, v. 11 (40), p. 283–296, 2003.
- LIRA, S. A. *Análise de correlação: abordagem teórica e de construção dos coeficientes com aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Setor de Ciências Exatas, UFPR, 2004.
- LORD, F. M. A theory of test scores. *Psychometric Monograph*, v. 7, 1952.
- LORD, F. M. An application of confidence intervals and of maximum likelihood to the estimation of an examinee's ability. *Psychometrika*, v. 18, p. 57–75, 1953.
- LORD, F. M. The relation of test score to the trait underlying the test. *Educational and Psychological Measurement*, v. 13, p. 517–548, 1953.

- LORD, F. M. An analysis of the verbal scholastic aptitude test using birnbaum's three-parameter logistic model. *Educational and Psychological Measurement*, v. 28, p. 989–1020, 1968.
- MEYER, P. L. *Probabilidade: aplicação à estatística*. 2ªed. ed. Rio de Janeiro: LTD, 2009.
- PASQUALI, L. *Teoria e Métodos de Medida em Ciências do Comportamento*. Brasília: Laboratório de Pesquisa em Avaliação e Medida/Instituto de Psicologia/UnB:INEP, 1996.
- PASQUALI, L. *Psicometria: teoria e aplicações*. Brasília: UnB, 1997.
- PASQUALI, L. Psicometria. *Revista da Escola de Enfermagem da USP*, v. 43, p. 992–999, 2009.
- R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2013. Disponível em: <<http://www.R-project.org/>>.
- RASCH, G. *Probabilistic Models for Some Intelligence and Attainment Test*. Copenhagen: Danish Institute for Educational Research, 1960.
- ROSS, S. *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*. 8ªed. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.
- SOARES, T. M. Utilização da teoria da resposta ao item na produção de indicadores sócio-econômicos. *Pesquisa Operacional*, v. 25 (1), p. 83–112, 2005.
- ZIMOWSKI, M. F. et al. *BILOG-MG 3 - computer program*. Chicago, 2003. Disponível em: <[www.ssicentral.com/irt](http://www.ssicentral.com/irt)>.

## APÊNDICE A – Conceitos em Probabilidade

Com base nas referências Meyer (2009) e Ross (2010) são apresentados alguns conceitos sobre probabilidade.

A Probabilidade é um instrumento para medir o quão verossímil ou provável é a ocorrência de um evento. Podemos classificar os experimentos em dois tipos: aleatórios (não determinístico) e não aleatórios (determinísticos). Os experimentos determinísticos são totalmente caracterizados a priori, ou seja, são fenômenos em que o resultado é sabido antes mesmo que ele ocorra e desta forma, nada temos a fazer. O objetivo da teoria das probabilidades é o estudo dos fenômenos aleatórios.

**Definição A.0.1**(*Experimento*) É qualquer processo ou estudo que resulte em dados cujo valor seja desconhecido.

**Definição A.0.2**(*Experimento Aleatório*) É um experimento, ensaio ou observação cujo resultado não pode ser predito com certeza, antes da realização do mesmo.

Os exemplos a seguir ilustrarão tal situação:

**Exemplo 1:** No lançamento de um dado, observar o número mostrado na face de cima;

**Exemplo 2:** No lançamento de uma moeda repetidamente, observar o resultado da face de cima;

**Exemplo 3:** De uma urna que contém bolas azuis e vermelhas, retira-se uma bola e verifica-se sua cor.

**Definição A.0.3**(*Espaço Amostral  $\Omega$* ) O Espaço Amostral é o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória.

**Exemplo 1:** Na experiência que consiste no lançamento de uma moeda, o espaço amostral associado é:

$$\{Cara, Coroa\}$$

**Exemplo 2:** Na experiência que consiste no lançamento de um dado, o espaço amostral associado é:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

**Definição A.0.4**(Evento  $E$ ) É todo subconjunto finito de um espaço amostral. É um conjunto de resultados de interesse em uma experiência aleatória.

**Exemplo 1:** Na experiência que consiste no lançamento de uma moeda, podemos ter os seguintes eventos de interesse:

$$\{Cara\}, \{Coroa\}$$

**Exemplo 2:** Na experiência que consiste no lançamento de um dado, podemos ter os seguintes eventos de interesse:

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$$

**Definição A.0.5**(Definição Clássica de Probabilidade)

Seja uma experiência aleatória onde todos os elementos de um espaço amostral ( $\Omega$ ) associado a uma experiência aleatória tenham a mesma chance de ocorrer e seja ( $E$ ) um evento de interesse do espaço amostral ( $\Omega$ ), então a probabilidade de ocorrer o evento ( $E$ ) pode ser assim definida:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}, \text{ com } 0 \leq P(E) \leq 1,$$

onde:

$n(E)$  é o número de elementos do evento de interesse  $E$ ;

$n(\Omega)$  é o número de elementos do espaço amostral  $\Omega$ .

Exemplo: Qual a probabilidade de se obter número par no lançamento de um dado?

$E = \text{número par}$

$$E = \{2, 4, 6\} \Rightarrow n(E) = 3$$

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6, \text{ então:}$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Propriedades:

**Limitações:**  $\Omega$  finito; Resultados equiprováveis.

**Definição A.0.6**(*Definição: Frequentista de Probabilidade - segunda metade do século XVII*) Considerem-se  $n$  repetições de uma experiência aleatória e seja  $n_E$  o número de ocorrências de um acontecimento  $E$  nessas  $n$  repetições. Então

$$P(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n_E}{n}.$$

**Limitações:** Só é aplicável se a experiência for repetível; É apenas uma interpretação que não fornece uma regra de cálculo.

**Definição A.0.7**(*Axiomática de Probabilidade - Kolmogorov(1903 – 1987)*) Seja um  $\Omega$  espaço amostral associado a um experimento. A cada evento  $A$  associaremos um número real representado por  $P(A)$  e denominado **probabilidade de  $A$** , que satisfaça às seguintes propriedades:

1. para todo  $A \subseteq \Omega$  vale que  $0 \leq P(A) \leq 1$ ;
2.  $P(\Omega) = 1$ ;
3. se  $A \subseteq \Omega, B \subseteq \Omega$  e  $A \cap B = \emptyset$  então  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

**Definição A.0.8**(*Subjetiva de Probabilidade*) A probabilidade subjetiva é o grau de convicção ou crença que cada pessoa atribui à ocorrência ou não de um evento. A probabilidade subjetiva é frequentemente empregada naquelas situações em que a repetição do experimento não pode ser realizada ou que não pode ser realizada em condições idênticas, como por exemplo: Um paciente é submetido a um novo tipo de cirurgia e deseja-se saber se ele ficará bom.

**Definição A.0.9**(*Probabilidade condicional*) Dados dois eventos  $A$  e  $B$ , a probabilidade condicional de  $A$  dado que ocorreu  $B$  é representada por  $P(A | B)$  é dada por

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0. (I)$$

Caso  $P(B) = 0$ ,  $P(A | B)$  pode ser definido arbitrariamente. Assim, alguns autores fazem  $P(A | B) = 0$  e outros, ainda consideram  $P(A | B) = P(A)$ .

**Definição A.0.10**(*Eventos independentes*) Dois eventos são **independentes** quando a ocorrência ou não-ocorrência de um evento não tem efeito algum na probabilidade de ocorrência do

outro evento. Dois eventos  $A$  e  $B$  são independentes se e somente se

$$1. P(A | B) = P(A) \text{ ou } P(B | A) = P(B),$$

desde que as probabilidades condicionais existam. Caso Contrário,  $A$  e  $B$  serão dependentes.

$$2. P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

( $A$  e  $B$  são mutuamente independentes). Essa segunda equação decorre da definição da probabilidade condicional e do fato de  $P(A | B) = P(A)$  e  $P(B | A) = P(B)$ .

Multiplicando a fórmula (I) da Definição por  $P(A)$ , obtemos a importante regra multiplicativa que nos permite calcular a probabilidade de dois eventos ocorrerem simultaneamente. A regra diz que “a probabilidade de dois eventos ocorrerem simultaneamente é dada pela probabilidade de um deles ocorrer vezes a probabilidade condicional do outro ocorrer dado que o primeiro já ocorreu”. Se em um experimento ambos os eventos  $A$  e  $B$  podem ocorrer, então

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A),$$

desde que  $P(A) > 0$ .

**Definição A.0.11**(*Variáveis aleatórias*) Uma variável aleatória é uma função que associa um número real a cada elemento do espaço amostral.

**Definição A.0.12**(*Variável aleatória discreta*) Uma variável aleatória é chamada de variável aleatória discreta se assume valores num conjunto enumerável, com certa probabilidade, ou seja, uma quantidade  $X$ , associada a cada possível resultado do espaço amostral.

**Definição A.0.13**(*Variável aleatória contínua*) Uma variável aleatória é chamada de variável contínua se seu conjunto de valores é qualquer intervalo dos números reais, o que seria um conjunto não enumerável. Frequentemente, os valores possíveis de uma variável aleatória contínua são, precisamente, os mesmos valores que estão contidos no espaço amostral contínuo.

**Definição A.0.14**(*Função de Distribuição de Probabilidade*) A função que atribui a cada valor da variável aleatória sua probabilidade é denominada de função de probabilidade ou distribuição de probabilidade. A notação a ser utilizada é:

$$P(X = x_i) = p(x_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

ou ainda,

$X$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$
$P_i$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$\dots$

Uma função de probabilidade satisfaz  $0 \leq p_i \leq 1$  e  $\sum_i p_i = 1$ .

**Definição A.0.15**(*Função de Distribuição de Probabilidade Acumulada*) Há muitos problemas em que podemos desejar calcular a probabilidade na qual o valor observado da variável aleatória  $X$  será menor ou igual a algum número real  $x$ . Escrevendo  $F(X) = P(X \leq x)$  para cada número real  $x$ , definimos  $F(x)$  como a **função de distribuição acumulada** da variável aleatória  $X$ . A **função de distribuição acumulada**  $F(x)$  de uma variável aleatória discreta  $X$ , que tem distribuição de probabilidade  $f(x)$  é

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t), \text{ para } -\infty < x \leq \infty$$

**Definição A.0.16**(*Função Massa de Probabilidade*) O conjunto de pares ordenados  $(x, f(x))$  é a função de probabilidade, função massa de probabilidade ou distribuição de probabilidade da variável discreta  $X$ , se, para cada resultado possível de  $x$ ,

1.  $f(x) \geq 0$ ,
2.  $\sum_x f(x) = 1$ ,
3.  $P(X = x) = f(x)$ .

**Definição A.0.17**(*Modelo de Bernoulli*) Dizemos que uma variável  $X$  segue o modelo Bernoulli se atribuí 0 ou 1 à ocorrência de fracasso ou sucesso, respectivamente. Como  $p$  representando a probabilidade de **sucesso**, sua função discreta de probabilidade é dada por

$X$	0	1
$P_i$	$1 - p$	$p$

ou de modo resumido,  $P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x}$ ,  $x = 0, 1$ .

**Definição A.0.18**(*Esperança e Variância*) **Esperança matemática** é uma medida que estuda a tendência central da variável aleatória ou valor esperado de uma variável aleatória  $X$ , sendo denotado por  $E(X)$ . Seja  $X$  uma variável aleatória com distribuição de probabilidade  $f(x)$ . A média ou o valor esperado de  $X$  é

$$\mu = E(X) = \sum_x xf(x)$$

se  $X$  for discreta.

Seja  $X$  uma variável aleatória com  $P(X_i = x_i) = p(x_i) = p_i, i = 1, 2, \dots, k$  e média  $\mu$ . A **variância** de  $X$  é a ponderação pelas respectivas probabilidades, dos desvios relativos à média, elevados ao quadrado, isto é,

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2 p_i.$$

Muitas vezes denotamos a variância por  $\sigma^2$  e, se houver possibilidade de confusão, usamos  $\sigma_X^2$ . Extraindo a raiz quadrada da variância obtemos desvio padrão que é representado por  $\sigma$  ou  $\sigma_X$ .

## APÊNDICE B – Código da leitura e expansão dos dados

Como os dados possuem padrões diferentes de um ano para outro, iremos apresentar apenas a sintaxe referente aos microdados de 2011. A sintaxe SPSS apresentada na seção B.1 foi elaborada pela equipe do INEP, enquanto que as das seções B.2 e B.3 foram elaborações próprias desta monografia.

### B.1 Leitura dos microdados da prova de Matemática do ENEM 2011

```

GET DATA  /TYPE = TXT
  /FILE = 'C:\Fabricia\Monografia\...
  \DADOS\DADOS_ENEM_2011.txt'
  /FIXCASE = 1
  /ARRANGEMENT = FIXED
  /FIRSTCASE = 1
  /IMPORTCASE = ALL
  /VARIABLES =
  /1
  NU_INSCRICAO          0-11    F12          /*Número de inscrição no
  ENEM 2011*/
  NU_ANO                12-15    F4           /*Ano do Enem*/
  IDADE                 16-18    F3           /*Idade do inscrito em 31/12/2011*/
  TP_SEXO               19-19    F1           /*Sexo do inscrito*/
  COD_MUNICIPIO_INSC    20-26    F7           /*Código do Município em
  que o inscrito mora:*/
  NO_MUNICIPIO_INSC    27-176   A150        /*Nome do município em

```

o inscrito mora\*/

UF_INSC	177-178	A2	/*Código da Unidade da Federação do inscrito no Enem*/
ST_CONCLUSAO	179-179	F1	/*Situação em relação ao ensino médio*/
IN_TP_ENSINO	180-180	F1	/*Tipo de instituição onde o estudante concluiu ou concluirá o ensino médio*/
IN_CERTIFICADO	181-181	F1	/*Indicador de que o inscrito solicitará certificação no Ensino Médio*/
IN_BRILLE	182-182	F1	/*Indicador de necessidade especial - Braille*/
IN_AMPLIADA	183-183	F1	/*Indicador de necessidade especial - Prova ampliada*/
IN_LEDOR	184-184	F1	/*Indicador de necessidade especial - Auxílio de Ledor*/
IN_ACESSO	185-185	F1	/*Indicador de necessidade especial - Sala de mais fácil acesso*/
IN_TRANSCRICAO	186-186	F1	/*Indicador de necessidade especial - Auxílio para transcrição*/
IN_LIBRAS	187-187	F1	/*Indicador de necessidade especial - Libras*/
IN_UNIDADE_PRISIONAL	188-188	F1	/*Indicador de necessidade especial - Unidade Prisional*/
IN_BAIXA_VISAO	189-189	F1	/*Indica se o inscrito tem uma baixa visão*/
IN_CEGUEIRA	190-190	F1	/*Indica se o inscrito tem uma cegueira*/
IN_DEFICIENCIA_AUDITIVA	191-191	F1	/*Indica se o inscrito tem uma deficiência auditiva*/
IN_DEFICIENCIA_FISICA	192-192	F1	/*Indica se o inscrito tem uma deficiência física*/
IN_DEFICIENCIA_MENTAL	193-193	F1	/*Indica se o inscrito tem uma deficiência mental*/
IN_DEFICIT_ATENCAO	194-194	F1	/*Indica se o inscrito tem um Deficit de Atencao*/

IN_DISLEXIA	195-195	F1	/*Indica se o inscrito tem uma Dislexia (dificuldade na area da leitura)*/
IN_GESTANTE	196-196	F1	/*Indica se o inscrito é gestante*/
IN_LACTANTE	197-197	F1	/*Indica se o inscrito é lactante*/
IN_LEITURA_LABIAL	198-198	F1	/*Indica se o inscrito necessita do atendimento especial Leitura Labial*/
IN_SABATISTA	199-199	F1	/*Indica se o inscrito é da religião sabatista, religião que guarda os sabados*/
IN_SURDEZ	200-200	F1	/*Indica se o inscrito tem uma surdez*/
TP_ESTADO_CIVIL	201-201	F1	/*Estado Civil do participante*/
TP_COR_RACA	202-202	F1	/*Código da Cor/Raça Participante*/
PK_COD_ENTIDADE	203-210	F8	/*Código da Escola: Número gerado como identificação da escola*/
COD_MUNICIPIO_ESC	211-217	F7	/*Código do Município da escola em que estudou:*/
NO_MUNICIPIO_ESC	218-367	A150	/*Nome do município da escola*/
UF_ESC	368-369	A2	/*Sigla da Unidade da Federação da escola*/
ID_DEPENDENCIA_ADM	370-370	F1	/*Dependência administrativa*/
ID_LOCALIZACAO	371-371	F1	/*Localização/ Zona da escola*/
SIT_FUNC	372-372	F1	/*Situação de funcionamento*/
COD_MUNICIPIO_PROVA	373-379	F7	/*Código do Município da cidade de prova:*/
NO_MUNICIPIO_PROVA	380-529	A150	/*Nome do Município da cidade de prova*/
UF_MUNICIPIO_PROVA	530-531	A2	/*Sigla da Unidade da Federação do município de prova*/

IN_PRESENCA_CN	532-532	F1	/*Presença à prova objetiva de Ciências da Natureza*/
IN_PRESENCA_CH	533-533	F1	/*Presença à prova objetiva de Ciências Humanas*/
IN_PRESENCA_LC	534-534	F1	/*Presença à prova objetiva de Linguagens e Códigos*/
IN_PRESENCA_MT	535-535	F1	/*Presença à prova objetiva de Matemática*/
NU_NT_CN	536-544	COMMA9	/*Nota da prova de Ciências da Natureza*/
NU_NT_CH	545-553	COMMA9	/*Nota da prova de Ciências Humanas*/
NU_NT_LC	554-562	COMMA9	/*Nota da prova de Linguagens e Códigos*/
NU_NT_MT	563-571	COMMA9	/*Nota da prova de Matemática*/
TX_RESPOSTAS_CN	572-616	A45	/*Vetor com as respostas da parte objetiva da prova de Ciências da Natureza */
TX_RESPOSTAS_CH	617-661	A45	/*Vetor com as respostas da parte objetiva da prova de Ciências Humanas */
TX_RESPOSTAS_LC	662-706	A45	/*Vetor com as respostas da parte objetiva da prova de Linguagens e Códigos */
TX_RESPOSTAS_MT	707-751	A45	/*Vetor com as respostas da parte objetiva da prova de Matemática */
ID_PROVA_CN	752-754	F3	/*Código do tipo de prova de Ciências da Natureza*/
ID_PROVA_CH	755-757	F3	/*Código do tipo de prova de Ciências Humanas*/
ID_PROVA_LC	758-760	F3	/*Código do tipo de prova de Linguagens e Códigos*/
ID_PROVA_MT	761-763	F3	/*Código do tipo de prova de Matemática*/
TP_LINGUA	764-764	F1	/*Tipo de Língua Estrangeira selecionada*/
DS_GABARITO_CN	765-809	A45	/*Vetor com o gabarito da parte objetiva da prova de Ciências da Natureza */
DS_GABARITO_CH	810-854	A45	/*Vetor com o gabarito da parte objetiva da prova de Ciências Humanas */

DS_GABARITO_IC	855-904	A50	/*Vetor com o gabarito da parte objetiva da prova de Linguagens e Códigos */
DS_GABARITO_MT	905-949	A4	/*Vetor com o gabarito da parte objetiva da prova de Matemática
IN_STATUS_REDACAO	950-950	A1	/*Presença à redação*/
NU_NOTA_COMP1	951-959	COMMA9	/*Nota da competência 1*/
NU_NOTA_COMP2	960-968	COMMA9	/*Nota da competência 2*/
NU_NOTA_COMP3	969-977	COMMA9	/*Nota da competência 3*/
NU_NOTA_COMP4	978-986	COMMA9	/*Nota da competência 5*/
NU_NOTA_REDACAO	996-1004	COMMA9	/*Nota da prova de redação*/
IN_CONCLUINTE_CENSO	1005-1005	F1	/*Indicador de concluinte no Censo da Educação Básica 2011*/
COD_ETAPA_ENSINO_CENSO	1006-1007	F2	/*Etapa do Aluno*/
COD_ENTIDADE_CENSO	1008-1015	F8	/*Código da Escola do Aluno no Censo da Educação Básica 2011*/
COD_MUNICIPIO_ESC_CENSO	1016-1022	F7	/*Código do Município da escola*/
NO_MUNICIPIO_ESC_CENSO	1023-1172	A150	/*Nome do Município da Escola*/
UF_ESC_CENSO	1173-1174	A2	/*Sigla da Unidade da Federação da escola*/
ID_DEPENDENCIA_ADM_CENSO	1175-1175	F1	/*Dependência administrativa*/
ID_LOCALIZACAO_CENSO	1176-1176	F1	/*Localização/Zona da escola*/
SIT_FUNC_CENSO	1177-1177	F1	/*Situação de funcionamento*/

.

CACHE.

Formats NU_NT_CN	(F7.2).
Formats NU_NT_CH	(F7.2).
Formats NU_NT_IC	(F7.2).
Formats NU_NT_MT	(F7.2).
Formats NU_NOTA_COMP1	(F7.2).
Formats NU_NOTA_COMP2	(F7.2).

```

Formats NU_NOTA_COMP3                (F7.2) .
Formats NU_NOTA_COMP4                (F7.2) .
Formats NU_NOTA_COMP5                (F7.2) .
Formats NU_NOTA_REDACAO              (F7.2) .
EXECUTE.

```

```

SAVE OUTFILE='C:\Fabricia\Monografia\...
/COMPRESSED.

```

## B.2 Definição dos rótulos da variáveis e de seus respectivos valores

```

VARIABLE LABELS  COD_MUNICIPIO_INSC 'Código do Município de residência'.

```

```

VARIABLE LABELS  TP_SEXO 'Sexo'.

```

```

VALUE LABELS  TP_SEXO                '0' "Masculino"
                                                '1' "Feminino".

```

```

EXECUTE.

```

```

VARIABLE LABELS  TP_CONCLUSAO 'Situação de conclusão do Ensino Médio'.

```

```

VALUE LABELS  TP_CONCLUSAO '1' "Já conclui o Ensino Médio"
                        '2' "Estou cursando e concluirei o Ensino Médio em 2012"
                        '3' "Estou cursando e concluirei o Ensino Médio após 2012"
                        '4' "Não conclui e não estou cursando o Ensino Médio".

```

```

EXECUTE.

```

```

VARIABLE LABELS  IN_TP_ENSINO 'Tipo de instituição que conclui
ou concluirá o Ensino Médio'.

```

```

VALUE LABELS  IN_TP_ENSINO '1' "Ensino Regular"
                        '2' "Ensino de Jovens e Adultos"
                        '3' "Ensino Profissionalizante"
                        '4' "Ensino Especial".

```

EXECUTE.

VARIABLE LABELS IN\_CERTIFICADO 'Indicador de solicitação de  
certificação no Ensino Médio'.

VALUE LABELS IN\_CERTIFICADO '0' "Não"

'1' "Sim".

EXECUTE.

VARIABLE LABELS TP\_ESTADO\_CIVIL 'Estado Civil'.

VALUE LABELS TP\_ESTADO\_CIVIL '0' "Solteiro(a)"

'1' "Casado(a)/ Mora com um(a) companheiro(a)"

'2' "Divorciado(a)/Desquitado(a)/Separado"

'3' "Viúvo(a)".

EXECUTE.

VARIABLE LABELS TP\_COR\_RACA 'Cor/raça'.

VALUE LABELS TP\_COR\_RACA '0' "Não declarado"

'1' "Branca"

'2' "Preta"

'3' "Parda"

'4' "Amarela"

'5' "Indígena".

EXECUTE.

VARIABLE LABELS COD\_MUNICIPIO\_ESC 'Código do Município da escola'.

VARIABLE LABELS ID\_DEPENDENCIA\_ADM 'Dependência  
administrativa (Escola)'.

VALUE LABELS ID\_DEPENDENCIA\_ADM '1' "Federal"

'2' "Estadual"

'3' "Municipal"

'4' "Privada".

EXECUTE.

VARIABLE LABELS ID\_LOCALIZACAO 'Localização (Escola)'.  
VALUE LABELS ID\_LOCALIZACAO

'1' "Urbana"

'2' "Rural".

EXECUTE.

VARIABLE LABELS SIT\_FUNC 'Situação de funcionamento (Escola)'.  
VALUE LABELS SIT\_FUNC

'1' "Em atividade"

'2' "Paralisada"

'3' "Extinta"

'4' "Escola extinta em  
anos anteriores".

EXECUTE.

VARIABLE LABELS COD\_MUNICIPIO\_PROVA 'Código do Município da aplicação  
da prova'.  
VALUE LABELS COD\_MUNICIPIO\_PROVA

VARIABLE LABELS IN\_PRESENCA\_MT 'Presença na prova objetiva de  
Matemática'.  
VALUE LABELS IN\_PRESENCA\_MT

'0' "Faltou à prova"

'1' "Presente na prova"

'3' "Eliminado na prova".

EXECUTE.

VARIABLE LABELS NU\_NT\_MT 'Nota da prova de Matemática'.  
VALUE LABELS NU\_NT\_MT

VARIABLE LABELS TX\_RESPOSTAS\_MT 'Vetor com as respostas da parte  
objetiva da prova de Matemática'.  
VALUE LABELS TX\_RESPOSTAS\_MT

VARIABLE LABELS ID\_PROVA\_MT 'Código do tipo de prova de Matemática'.  
VALUE LABELS ID\_PROVA\_MT

'129' "AMARELO"

'130' "CINZA"

```
'131' "AZUL"
'132' "ROSA"
'136' "CINZA".
```

```
EXECUTE.
```

```
VARIABLE LABELS TP_LINGUA 'Tipo de Língua Estrangeira'.
```

```
VALUE LABELS TP_LINGUA '0' "Inglês"
```

```
'1' "Espanhol".
```

```
EXECUTE.
```

```
VARIABLE LABELS DS_GABARITO_MT 'Vetor com o gabarito da parte
objetiva da prova de Matemática'.
```

### **B.3 Expansão da prova de Matemática ENEM/2011**

```
COMPUTE IdAluno=$CASENUM.
```

```
EXECUTE.
```

\* Expansão dos dados 2010

```
DO IF (ID_PROVA_MT = 129).
```

```
COMPUTE Item01=Q01F.
```

```
COMPUTE Item02=Q02F.
```

```
COMPUTE Item03=Q03F.
```

```
COMPUTE Item04=Q04F.
```

```
COMPUTE Item05=Q05F.
```

```
COMPUTE Item06=Q06F.
```

```
COMPUTE Item07=Q07F.
```

```
COMPUTE Item08=Q08F.
```

```
COMPUTE Item09=Q09F.
```

```
COMPUTE Item10=Q10F.
```

```
COMPUTE Item11=Q11F.
```

```
COMPUTE Item12=Q12F.
```

```
COMPUTE Item13=Q13F.
```

```
COMPUTE Item14=Q14F.  
COMPUTE Item15=Q15F.  
COMPUTE Item16=Q16F.  
COMPUTE Item17=Q17F.  
COMPUTE Item18=Q18F.  
COMPUTE Item19=Q19F.  
COMPUTE Item20=Q20F.  
COMPUTE Item21=Q21F.  
COMPUTE Item22=Q22F.  
COMPUTE Item23=Q23F.  
COMPUTE Item24=Q24F.  
COMPUTE Item25=Q25F.  
COMPUTE Item26=Q26F.  
COMPUTE Item27=Q27F.  
COMPUTE Item28=Q28F.  
COMPUTE Item29=Q29F.  
COMPUTE Item30=Q30F.  
COMPUTE Item31=Q31F.  
COMPUTE Item32=Q32F.  
COMPUTE Item33=Q33F.  
COMPUTE Item34=Q34F.  
COMPUTE Item35=Q35F.  
COMPUTE Item36=Q36F.  
COMPUTE Item37=Q37F.  
COMPUTE Item38=Q38F.  
COMPUTE Item39=Q39F.  
COMPUTE Item40=Q40F.  
COMPUTE Item41=Q41F.  
COMPUTE Item42=Q42F.  
COMPUTE Item43=Q43F.  
COMPUTE Item44=Q44F.  
COMPUTE Item45=Q45F.  
  
ELSE IF (ID_PROVA_MT = 130).
```

COMPUTE Item01=Q02F.  
COMPUTE Item02=Q01F.  
COMPUTE Item03=Q04F.  
COMPUTE Item04=Q03F.  
COMPUTE Item05=Q12F.  
COMPUTE Item06=Q13F.  
COMPUTE Item07=Q07F.  
COMPUTE Item08=Q08F.  
COMPUTE Item09=Q09F.  
COMPUTE Item10=Q05F.  
COMPUTE Item11=Q06F.  
COMPUTE Item12=Q11F.  
COMPUTE Item13=Q10F.  
COMPUTE Item14=Q17F.  
COMPUTE Item15=Q18F.  
COMPUTE Item16=Q19F.  
COMPUTE Item17=Q14F.  
COMPUTE Item18=Q15F.  
COMPUTE Item19=Q16F.  
COMPUTE Item20=Q23F.  
COMPUTE Item21=Q21F.  
COMPUTE Item22=Q20F.  
COMPUTE Item23=Q22F.  
COMPUTE Item24=Q28F.  
COMPUTE Item25=Q25F.  
COMPUTE Item26=Q24F.  
COMPUTE Item27=Q26F.  
COMPUTE Item28=Q29F.  
COMPUTE Item29=Q27F.  
COMPUTE Item30=Q35F.  
COMPUTE Item31=Q36F.  
COMPUTE Item32=Q33F.  
COMPUTE Item33=Q34F.  
COMPUTE Item34=Q30F.

COMPUTE Item35=Q31F.  
COMPUTE Item36=Q32F.  
COMPUTE Item37=Q42F.  
COMPUTE Item38=Q43F.  
COMPUTE Item39=Q41F.  
COMPUTE Item40=Q44F.  
COMPUTE Item41=Q45F.  
COMPUTE Item42=Q39F.  
COMPUTE Item43=Q40F.  
COMPUTE Item44=Q37F.  
COMPUTE Item45=Q38F.

ELSE IF (ID\_PROVA\_MT = 131).

COMPUTE Item01=Q03F.  
COMPUTE Item02=Q04F.  
COMPUTE Item03=Q01F.  
COMPUTE Item04=Q02F.  
COMPUTE Item05=Q12F.  
COMPUTE Item06=Q13F.  
COMPUTE Item07=Q05F.  
COMPUTE Item08=Q11F.  
COMPUTE Item09=Q09F.  
COMPUTE Item10=Q10F.  
COMPUTE Item11=Q06F.  
COMPUTE Item12=Q08F.  
COMPUTE Item13=Q07F.  
COMPUTE Item14=Q18F.  
COMPUTE Item15=Q19F.  
COMPUTE Item16=Q17F.  
COMPUTE Item17=Q15F.  
COMPUTE Item18=Q14F.  
COMPUTE Item19=Q16F.  
COMPUTE Item20=Q21F.

COMPUTE Item21=Q23F.  
COMPUTE Item22=Q22F.  
COMPUTE Item23=Q20F.  
COMPUTE Item24=Q28F.  
COMPUTE Item25=Q24F.  
COMPUTE Item26=Q27F.  
COMPUTE Item27=Q25F.  
COMPUTE Item28=Q29F.  
COMPUTE Item29=Q26F.  
COMPUTE Item30=Q36F.  
COMPUTE Item31=Q35F.  
COMPUTE Item32=Q33F.  
COMPUTE Item33=Q32F.  
COMPUTE Item34=Q34F.  
COMPUTE Item35=Q30F.  
COMPUTE Item36=Q31F.  
COMPUTE Item37=Q40F.  
COMPUTE Item38=Q41F.  
COMPUTE Item39=Q39F.  
COMPUTE Item40=Q37F.  
COMPUTE Item41=Q38F.  
COMPUTE Item42=Q43F.  
COMPUTE Item43=Q42F.  
COMPUTE Item44=Q45F.  
COMPUTE Item45=Q44F.

ELSE IF (ID\_PROVA\_MT = 132).

COMPUTE Item01=Q04F.  
COMPUTE Item02=Q03F.  
COMPUTE Item03=Q02F.  
COMPUTE Item04=Q01F.  
COMPUTE Item05=Q07F.  
COMPUTE Item06=Q08F.

COMPUTE Item07=Q11F.  
COMPUTE Item08=Q12F.  
COMPUTE Item09=Q13F.  
COMPUTE Item10=Q09F.  
COMPUTE Item11=Q10F.  
COMPUTE Item12=Q06F.  
COMPUTE Item13=Q05F.  
COMPUTE Item14=Q15F.  
COMPUTE Item15=Q16F.  
COMPUTE Item16=Q14F.  
COMPUTE Item17=Q19F.  
COMPUTE Item18=Q18F.  
COMPUTE Item19=Q17F.  
COMPUTE Item20=Q29F.  
COMPUTE Item21=Q27F.  
COMPUTE Item22=Q26F.  
COMPUTE Item23=Q28F.  
COMPUTE Item24=Q24F.  
COMPUTE Item25=Q21F.  
COMPUTE Item26=Q20F.  
COMPUTE Item27=Q22F.  
COMPUTE Item28=Q25F.  
COMPUTE Item29=Q23F.  
COMPUTE Item30=Q34F.  
COMPUTE Item31=Q35F.  
COMPUTE Item32=Q30F.  
COMPUTE Item33=Q31F.  
COMPUTE Item34=Q36F.  
COMPUTE Item35=Q32F.  
COMPUTE Item36=Q33F.  
COMPUTE Item37=Q44F.  
COMPUTE Item38=Q45F.  
COMPUTE Item39=Q43F.  
COMPUTE Item40=Q41F.  
COMPUTE Item41=Q42F.

COMPUTE Item42=Q37F.

COMPUTE Item43=Q38F.

COMPUTE Item44=Q40F.

COMPUTE Item45=Q39F.

END IF.

EXECUTE.

FORMATS Item01 TO Item45 (F1.0).

EXECUTE.

RECODE Item01 Item02 Item03 Item04 Item05 Item06 Item07 Item08

Item09 Item10

Item11 Item12 Item13 Item14 Item15 Item16 Item17

Item18 Item19 Item20

Item21 Item22 Item23 Item24 Item25 Item26 Item27

Item28 Item29 Item30

Item31 Item32 Item33 Item34 Item35 Item36 Item37

Item38 Item39 Item40

Item41 Item42 Item43 Item44 Item45 (SYSMIS=9).

VALUE LABELS Item01 Item02 Item03 Item04 Item05 Item06 Item07

Item08 Item09 Item10

Item11 Item12 Item13 Item14 Item15 Item16 Item17

Item18 Item19 Item20

Item21 Item22 Item23 Item24 Item25 Item26 Item27

Item28 Item29 Item30

Item31 Item32 Item33 Item34 Item35 Item36 Item37

Item38 Item39 Item40

Item41 Item42 Item43 Item44 Item45 '1' "A" '2'

"B" '3' "C" '4' "D" '5' "E" '9' "Não Respondido".

EXECUTE.

## \*CORREÇÃO DOS ITENS (RESPOSTAS BINÁRIAS)

RECODE Item01 (1=0) (2=1) (3=0) (4=0) (5=0)  
(MISSING=9) INTO Item01F.

RECODE Item02 (1=1) (2=0) (3=0) (4=0) (5=0)  
(MISSING=9) INTO Item02F.

RECODE Item03 (1=0) (2=0) (3=0) (4=0) (5=1)  
(MISSING=9) INTO Item03F.

RECODE Item04 (1=0) (2=0) (3=0) (4=0) (5=1)  
(MISSING=9) INTO Item04F.

RECODE Item05 (1=0) (2=0) (3=0) (4=0) (5=1)  
(MISSING=9) INTO Item05F.

RECODE Item06 (1=0) (2=0) (3=1) (4=0) (5=0)  
(MISSING=9) INTO Item06F.

RECODE Item07 (1=0) (2=0) (3=1) (4=0) (5=0)  
(MISSING=9) INTO Item07F.

RECODE Item08 (1=0) (2=0) (3=0) (4=0) (5=1)  
(MISSING=9) INTO Item08F.

RECODE Item09 (1=0) (2=0) (3=0) (4=0) (5=1)  
(MISSING=9) INTO Item09F.

RECODE Item10 (1=0) (2=0) (3=0) (4=0) (5=1)  
(MISSING=9) INTO Item10F.

RECODE Item11 (1=0) (2=1) (3=0) (4=0) (5=0)  
(MISSING=9) INTO Item11F.

RECODE Item12 (1=0) (2=0) (3=1) (4=0) (5=0)  
(MISSING=9) INTO Item12F.

RECODE Item13 (1=0) (2=1) (3=0) (4=0) (5=0)  
(MISSING=9) INTO Item13F.

RECODE Item14 (1=0) (2=0) (3=0) (4=0) (5=1)  
(MISSING=9) INTO Item14F.

RECODE Item15 (1=0) (2=0) (3=1) (4=0) (5=0)  
(MISSING=9) INTO Item15F.

RECODE Item16 (1=0) (2=0) (3=0) (4=0) (5=1)  
(MISSING=9) INTO Item16F.

RECODE Item17 (1=0) (2=1) (3=0) (4=0) (5=0)

(MISSING=9) INTO Item17F.  
RECODE Item18 (1=1) (2=0) (3=0) (4=0) (5=0)  
(MISSING=9) INTO Item18F.  
RECODE Item19 (1=0) (2=0) (3=0) (4=1) (5=0)  
(MISSING=9) INTO Item19F.  
RECODE Item20 (1=0) (2=0) (3=1) (4=0) (5=0)  
(MISSING=9) INTO Item20F.  
RECODE Item21 (1=0) (2=1) (3=0) (4=0) (5=0)  
(MISSING=9) INTO Item21F.  
RECODE Item22 (1=0) (2=0) (3=0) (4=1) (5=0)  
(MISSING=9) INTO Item22F.  
RECODE Item23 (1=0) (2=1) (3=0) (4=0) (5=0)  
(MISSING=9) INTO Item23F.  
RECODE Item24 (1=0) (2=0) (3=0) (4=0) (5=1)  
(MISSING=9) INTO Item24F.  
RECODE Item25 (1=1) (2=0) (3=0) (4=0) (5=0)  
(MISSING=9) INTO Item25F.  
RECODE Item26 (1=0) (2=0) (3=0) (4=1) (5=0)  
(MISSING=9) INTO Item26F.  
RECODE Item27 (1=0) (2=0) (3=1) (4=0) (5=0)  
(MISSING=9) INTO Item27F.  
RECODE Item28 (1=0) (2=0) (3=0) (4=1) (5=0)  
(MISSING=9) INTO Item28F.  
RECODE Item29 (1=0) (2=1) (3=0) (4=0) (5=0)  
(MISSING=9) INTO Item29F.  
RECODE Item30 (1=0) (2=0) (3=0) (4=1) (5=0)  
(MISSING=9) INTO Item30F.  
RECODE Item31 (1=0) (2=0) (3=1) (4=0) (5=0)  
(MISSING=9) INTO Item31F.  
RECODE Item32 (1=0) (2=0) (3=1) (4=0) (5=0)  
(MISSING=9) INTO Item32F.  
RECODE Item33 (1=0) (2=0) (3=1) (4=0) (5=0)  
(MISSING=9) INTO Item33F.  
RECODE Item34 (1=0) (2=1) (3=0) (4=0) (5=0)  
(MISSING=9) INTO Item34F.

```
RECODE Item35 (1=1) (2=0) (3=0) (4=0) (5=0)
(MISSING=9) INTO Item35F.
RECODE Item36 (1=0) (2=0) (3=0) (4=1) (5=0)
(MISSING=9) INTO Item36F.
RECODE Item37 (1=0) (2=0) (3=1) (4=0) (5=0)
(MISSING=9) INTO Item37F.
RECODE Item38 (1=1) (2=0) (3=0) (4=0) (5=0)
(MISSING=9) INTO Item38F.
RECODE Item39 (1=0) (2=0) (3=0) (4=0) (5=1)
(MISSING=9) INTO Item39F.
RECODE Item40 (1=0) (2=0) (3=1) (4=0) (5=0)
(MISSING=9) INTO Item40F.
RECODE Item41 (1=0) (2=0) (3=1) (4=0) (5=0)
(MISSING=9) INTO Item41F.
RECODE Item42 (1=0) (2=0) (3=1) (4=0) (5=0)
(MISSING=9) INTO Item42F.
RECODE Item43 (1=0) (2=0) (3=1) (4=0) (5=0)
(MISSING=9) INTO Item43F.
RECODE Item44 (1=0) (2=0) (3=0) (4=1) (5=0)
(MISSING=9) INTO Item44F.
RECODE Item45 (1=0) (2=0) (3=0) (4=1) (5=0)
(MISSING=9) INTO Item45F.
```

```
FORMATS Item01F TO Item45F (F1.0).
```

```
EXECUTE.
```

```
RECODE  Item01F Item02F Item03F Item04F Item05F
Item06F Item07F Item08F Item09F Item10F
        Item11F Item12F Item13F Item14F
        Item15F Item16F Item17F Item18F
        Item19F Item20F
        Item21F Item22F Item23F Item24F
        Item25F Item26F Item27F Item28F
        Item29F Item30F
```

```
Item31F Item32F Item33F Item34F
Item35F Item36F Item37F Item38F
Item39F Item40F
Item41F Item42F Item43F Item44F
Item45F (SYSMIS=9).

VALUE LABELS Item01F Item02F Item03F Item04F Item05F
Item06F Item07F Item08F Item09F Item10F
Item11F Item12F Item13F Item14F
Item15F Item16F Item17F Item18F
Item19F Item20F
Item21F Item22F Item23F Item24F
Item25F Item26F Item27F Item28F
Item29F Item30F
Item31F Item32F Item33F Item34F
Item35F Item36F Item37F Item38F
Item39F Item40F
Item41F Item42F Item43F Item44F
Item45F '1' "Certo" '0' "Errado" '9' "Não Respondido".

EXECUTE.
```

**ANEXO A – Prova de Matemática do ENEM/2011  
(Caderno Amarelo)**

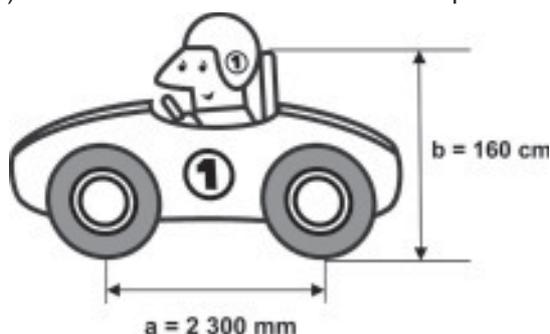
## MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

### Questões de 136 a 180

#### QUESTÃO 136

Um mecânico de uma equipe de corrida necessita que as seguintes medidas realizadas em um carro sejam obtidas em metros:

- a) distância **a** entre os eixos dianteiro e traseiro;
- b) altura **b** entre o solo e o encosto do piloto.



Ao optar pelas medidas **a** e **b** em metros, obtêm-se, respectivamente,

- A 0,23 e 0,16.
- B 2,3 e 1,6.**
- C 23 e 16.
- D 230 e 160.
- E 2 300 e 1 600.

#### QUESTÃO 137

O medidor de energia elétrica de uma residência, conhecido por “relógio de luz”, é constituído de quatro pequenos relógios, cujos sentidos de rotação estão indicados conforme a figura:



Disponível em: <http://www.enersul.com.br>. Acesso em: 26 abr. 2010.

A medida é expressa em kWh. O número obtido na leitura é composto por 4 algarismos. Cada posição do número é formada pelo último algarismo ultrapassado pelo ponteiro.

O número obtido pela leitura em kWh, na imagem, é

- A 2 614.**
- B 3 624.
- C 2 715.
- D 3 725.
- E 4 162.

#### QUESTÃO 138

O dono de uma oficina mecânica precisa de um pistão das partes de um motor, de 68 mm de diâmetro, para o conserto de um carro. Para conseguir um, esse dono vai até um ferro velho e lá encontra pistões com diâmetros iguais a 68,21 mm; 68,102 mm; 68,001 mm; 68,02 mm e 68,012 mm.

Para colocar o pistão no motor que está sendo consertado, o dono da oficina terá de adquirir aquele que tenha o diâmetro mais próximo do que precisa.

Nessa condição, o dono da oficina deverá comprar o pistão de diâmetro

- A 68,21 mm.
- B 68,102 mm.
- C 68,02 mm.
- D 68,012 mm.
- E 68,001 mm.**

#### QUESTÃO 139

A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como  $M_w$ ), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica.  $M_w$  e  $M_0$  se relacionam pela fórmula:

$$M_w = -10,7 + \frac{2}{3} \log_{10} (M_0)$$

Onde  $M_0$  é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina-cm.

O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude  $M_w = 7,3$ .

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. Historic Earthquakes.

Disponível em: <http://earthquake.usgs.gov>. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. USGS Earthquake Magnitude Policy.

Disponível em: <http://earthquake.usgs.gov>. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico  $M_0$  do terremoto de Kobe (em dina-cm)?

- A  $10^{-5,10}$
- B  $10^{-0,73}$
- C  $10^{12,00}$
- D  $10^{21,65}$
- E  $10^{27,00}$**

**QUESTÃO 140**

A figura seguinte mostra um modelo de sombrinha muito usado em países orientais.



Disponível em: <http://mdmat.psyco.ufrgs.br>. Acesso em: 1 maio 2010.

Esta figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de

- A pirâmide.
- B semiesfera.
- C cilindro.
- D tronco de cone.
- E cone.

**QUESTÃO 141**

Em 2010, um caos aéreo afetou o continente europeu, devido à quantidade de fumaça expelida por um vulcão na Islândia, o que levou ao cancelamento de inúmeros voos.

Cinco dias após o início desse caos, todo o espaço aéreo europeu acima de 6 000 metros estava liberado, com exceção do espaço aéreo da Finlândia. Lá, apenas voos internacionais acima de 31 mil pés estavam liberados.

Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br>. Acesso em: 21 abr. 2010 (adaptado).

Considere que 1 metro equivale a aproximadamente 3,3 pés.

Qual a diferença, em pés, entre as altitudes liberadas na Finlândia e no restante do continente europeu cinco dias após o início do caos?

- A 3 390 pés.
- B 9 390 pés.
- C 11 200 pés.
- D 19 800 pés.
- E 50 800 pés.

**QUESTÃO 142**

Em uma certa cidade, os moradores de um bairro carente de espaços de lazer reivindicam à prefeitura municipal a construção de uma praça. A prefeitura concorda com a solicitação e afirma que irá construí-la em formato retangular devido às características técnicas do terreno. Restrições de natureza orçamentária impõem que sejam gastos, no máximo, 180 m de tela para cercar a praça. A prefeitura apresenta aos moradores desse bairro as medidas dos terrenos disponíveis para a construção da praça:

- Terreno 1: 55 m por 45 m
- Terreno 2: 55 m por 55 m
- Terreno 3: 60 m por 30 m
- Terreno 4: 70 m por 20 m
- Terreno 5: 95 m por 85 m

Para optar pelo terreno de maior área, que atenda às restrições impostas pela prefeitura, os moradores deverão escolher o terreno

- A 1.
- B 2.
- C 3.
- D 4.
- E 5.

**QUESTÃO 143**

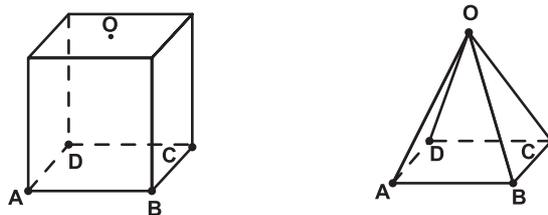
Sabe-se que a distância real, em linha reta, de uma cidade A, localizada no estado de São Paulo, a uma cidade B, localizada no estado de Alagoas, é igual a 2 000 km. Um estudante, ao analisar um mapa, verificou com sua régua que a distância entre essas duas cidades, A e B, era 8 cm.

Os dados nos indicam que o mapa observado pelo estudante está na escala de

- A 1 : 250.
- B 1 : 2 500.
- C 1 : 25 000.
- D 1 : 250 000.
- E 1 : 25 000 000.

**QUESTÃO 144**

Uma indústria fabrica brindes promocionais em forma de pirâmide. A pirâmide é obtida a partir de quatro cortes em um sólido que tem a forma de um cubo. No esquema, estão indicados o sólido original (cubo) e a pirâmide obtida a partir dele.



Os pontos A, B, C, D e O do cubo e da pirâmide são os mesmos. O ponto O é central na face superior do cubo. Os quatro cortes saem de O em direção às arestas  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , nessa ordem. Após os cortes, são

descartados quatro sólidos.

Os formatos dos sólidos descartados são

- A todos iguais.
- B todos diferentes.
- C três iguais e um diferente.
- D apenas dois iguais.
- E iguais dois a dois.

**QUESTÃO 145**

**Café no Brasil**

O consumo atingiu o maior nível da história no ano passado: os brasileiros beberam o equivalente a 331 bilhões de xícaras.

Veja. Ed. 2158, 31 mar. 2010.

Considere que a xícara citada na notícia seja equivalente a, aproximadamente, 120 mL de café. Suponha que em 2010 os brasileiros bebam ainda mais café, aumentando

o consumo em  $\frac{1}{5}$  do que foi consumido no ano anterior.

De acordo com essas informações, qual a previsão mais aproximada para o consumo de café em 2010?

- A 8 bilhões de litros.
- B 16 bilhões de litros.
- C 32 bilhões de litros.
- D 40 bilhões de litros.
- E 48 bilhões de litros.

**QUESTÃO 146**

Você pode adaptar as atividades do seu dia a dia de uma forma que possa queimar mais calorias do que as gastas normalmente, conforme a relação seguinte:

- Enquanto você fala ao telefone, faça agachamentos: 100 calorias gastas em 20 minutos.
- Meia hora de supermercado: 100 calorias.
- Cuidar do jardim por 30 minutos: 200 calorias.
- Passear com o cachorro: 200 calorias em 30 minutos.
- Tirar o pó dos móveis: 150 calorias em 30 minutos.
- Lavar roupas por 30 minutos: 200 calorias.

Disponível em: <http://cyberdiet.terra.com.br>. Acesso em: 27 abr. 2010 (adaptado).

Uma pessoa deseja executar essas atividades, porém, ajustando o tempo para que, em cada uma, gaste igualmente 200 calorias.

Apartir dos ajustes, quanto tempo a mais será necessário para realizar todas as atividades?

- A 50 minutos.
- B 60 minutos.
- C 80 minutos.
- D 120 minutos.
- E 170 minutos.

**QUESTÃO 147**

Para uma atividade realizada no laboratório de Matemática, um aluno precisa construir uma maquete da quadra de esportes da escola que tem 28 m de comprimento por 12 m de largura. A maquete deverá ser construída na escala de 1 : 250.

Que medidas de comprimento e largura, em cm, o aluno utilizará na construção da maquete?

- A 4,8 e 11,2
- B 7,0 e 3,0
- C 11,2 e 4,8
- D 28,0 e 12,0
- E 30,0 e 70,0

**QUESTÃO 148**

Uma equipe de especialistas do centro meteorológico de uma cidade mediu a temperatura do ambiente, sempre no mesmo horário, durante 15 dias intercalados, a partir do primeiro dia de um mês. Esse tipo de procedimento é frequente, uma vez que os dados coletados servem de referência para estudos e verificação de tendências climáticas ao longo dos meses e anos.

As medições ocorridas nesse período estão indicadas no quadro:

Dia do mês	Temperatura (em °C)
1	15,5
3	14
5	13,5
7	18
9	19,5
11	20
13	13,5
15	13,5
17	18
19	20
21	18,5
23	13,5
25	21,5
27	20
29	16

Em relação à temperatura, os valores da média, mediana e moda são, respectivamente, iguais a

- A 17 °C, 17 °C e 13,5 °C.
- B 17 °C, 18 °C e 13,5 °C.
- C 17 °C, 13,5 °C e 18 °C.
- D 17 °C, 18 °C e 21,5 °C.
- E 17 °C, 13,5 °C e 21,5 °C.



### QUESTÃO 149

Observe as dicas para calcular a quantidade certa de alimentos e bebidas para as festas de fim de ano:

- Para o prato principal, estime 250 gramas de carne para cada pessoa.
- Um copo americano cheio de arroz rende o suficiente para quatro pessoas.
- Para a farofa, calcule quatro colheres de sopa por convidado.
- Uma garrafa de vinho serve seis pessoas.
- Uma garrafa de cerveja serve duas.
- Uma garrafa de espumante serve três convidados.

Quem organiza festas faz esses cálculos em cima do total de convidados, independente do gosto de cada um.

Quantidade certa de alimentos e bebidas evita o desperdício da ceia.  
Jornal Hoje. 17 dez. 2010 (adaptado).

Um anfitrião decidiu seguir essas dicas ao se preparar para receber 30 convidados para a ceia de Natal. Para seguir essas orientações à risca, o anfitrião deverá dispor de

- A 120 kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 15 de cerveja e 10 de espumante.
- B 120 kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 30 de cerveja e 10 de espumante.
- C 75 kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 15 de cerveja e 10 de espumante.
- D 7,5 kg de carne, 7 copos americanos, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 30 de cerveja e 10 de espumante.
- E 7,5 kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 15 de cerveja e 10 de espumante.

### QUESTÃO 150

A participação dos estudantes na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) aumenta a cada ano. O quadro indica o percentual de medalhistas de ouro, por região, nas edições da OBMEP de 2005 a 2009:

Região	2005	2006	2007	2008	2009
Norte	2%	2%	1%	2%	1%
Nordeste	18%	19%	21%	15%	19%
Centro-Oeste	5%	6%	7%	8%	9%
Sudeste	55%	61%	58%	66%	60%
Sul	21%	12%	13%	9%	11%

Disponível em: <http://www.obmep.org.br>. Acesso em: abr. 2010 (adaptado).

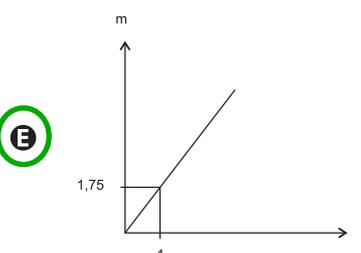
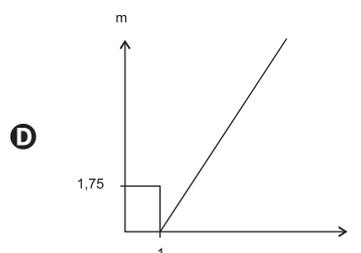
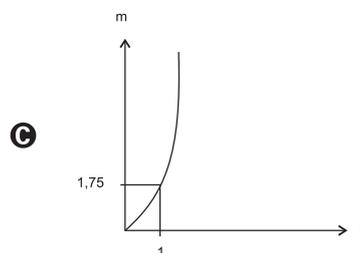
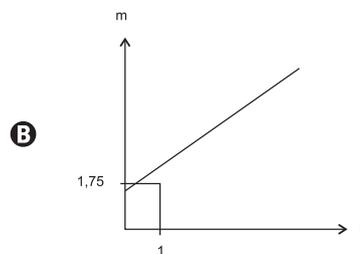
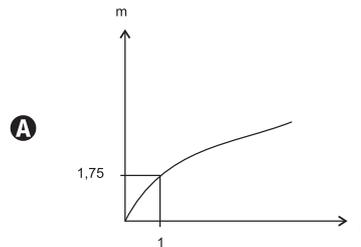
Em relação às edições de 2005 a 2009 da OBMEP, qual o percentual médio de medalhistas de ouro da região Nordeste?

- A 14,6%
- B 18,2%
- C 18,4%
- D 19,0%
- E 21,0%

### QUESTÃO 151

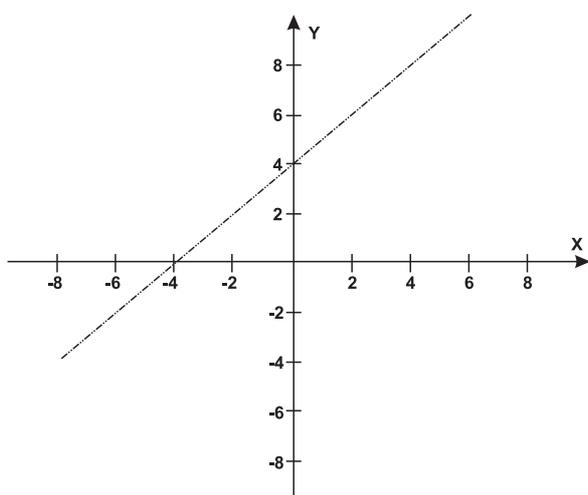
As frutas que antes se compravam por dúzias, hoje em dia, podem ser compradas por quilogramas, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção. Considere que, independente da época ou variação de preço, certa fruta custa R\$ 1,75 o quilograma.

Dos gráficos a seguir, o que representa o preço  $m$  pago em reais pela compra de  $n$  quilogramas desse produto é



**QUESTÃO 152**

Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.



A reta de equação  $y = x + 4$  representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto  $P = (-5, 5)$ , localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km.

Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto

- A (-5, 0).
- B (-3, 1).
- C (-2, 1).
- D (0, 4).
- E (2, 6).

**QUESTÃO 153**

O Índice de Massa Corporal (IMC) é largamente utilizado há cerca de 200 anos, mas esse cálculo representa muito mais a corpulência que a adiposidade, uma vez que indivíduos musculosos e obesos podem apresentar o mesmo IMC. Uma nova pesquisa aponta o Índice de Adiposidade Corporal (IAC) como uma alternativa mais fidedigna para quantificar a gordura corporal, utilizando a medida do quadril e a altura. A figura mostra como calcular essas medidas, sabendo-se que, em mulheres, a adiposidade normal está entre 19% e 26%.

**O velho IMC**  
(Índice de Massa Corporal)



$$\text{Índice de Massa Corporal} = \frac{\text{massa (kg)}}{\text{altura} \times \text{altura (m)}}$$

**O novo IAC**  
(Índice de Adiposidade Corporal)



$$\% \text{ de Gordura Corporal} = \frac{\text{Circunferência do quadril (cm)}}{\text{Altura} \times \sqrt{\text{altura (m)}}} - 18$$

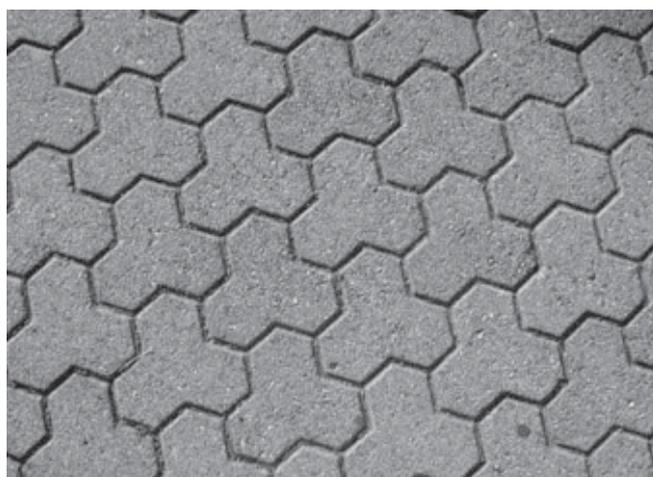
Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br>. Acesso em: 24 abr. 2011 (adaptado).

Uma jovem com  $\text{IMC} = 20 \text{ kg/m}^2$ , 100 cm de circunferência dos quadris e 60 kg de massa corpórea resolveu averiguar seu IAC. Para se enquadrar aos níveis de normalidade de gordura corporal, a atitude adequada que essa jovem deve ter diante da nova medida é

(Use  $\sqrt{3} = 1,7$  e  $\sqrt{1,7} = 1,3$ )

- A reduzir seu excesso de gordura em cerca de 1%.
- B reduzir seu excesso de gordura em cerca de 27%.
- C manter seus níveis atuais de gordura.
- D aumentar seu nível de gordura em cerca de 1%.
- E aumentar seu nível de gordura em cerca de 27%.

**QUESTÃO 154**



Disponível em: <http://www.diaadia.pr.gov.br>. Acesso em: 28 abr. 2010.

O polígono que dá forma a essa calçada é invariante por rotações, em torno de seu centro, de

- A 45°.
- B 60°.
- C 90°.
- D 120°.
- E 180°.



### QUESTÃO 155

O saldo de contratações no mercado formal no setor varejista da região metropolitana de São Paulo registrou alta. Comparando as contratações deste setor no mês de fevereiro com as de janeiro deste ano, houve incremento de 4 300 vagas no setor, totalizando 880 605 trabalhadores com carteira assinada.

Disponível em: <http://www.folha.uol.com.br>. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Suponha que o incremento de trabalhadores no setor varejista seja sempre o mesmo nos seis primeiros meses do ano.

Considerando-se que  $y$  e  $x$  representam, respectivamente, as quantidades de trabalhadores no setor varejista e os meses, janeiro sendo o primeiro, fevereiro, o segundo, e assim por diante, a expressão algébrica que relaciona essas quantidades nesses meses é

- A  $y = 4\ 300x$
- B  $y = 884\ 905x$
- C**  $y = 872\ 005 + 4\ 300x$
- D  $y = 876\ 305 + 4\ 300x$
- E  $y = 880\ 605 + 4\ 300x$

### QUESTÃO 156

A tabela compara o consumo mensal, em kWh, dos consumidores residenciais e dos de baixa renda, antes e depois da redução da tarifa de energia no estado de Pernambuco.

Como fica a tarifa			
Residencial			
Consumo Mensal (kWh)	Antes	Depois	Economia
140	R\$ 71,04	R\$ 64,75	R\$ 6,29
185	R\$ 93,87	R\$ 85,56	R\$ 8,32
350	R\$ 177,60	R\$ 161,86	R\$ 15,74
500	R\$ 253,72	R\$ 231,24	R\$ 22,48

Baixa renda			
Consumo Mensal (kWh)	Antes	Depois	Economia
30	R\$ 3,80	R\$ 3,35	R\$ 0,45
65	R\$ 11,53	R\$ 10,04	R\$ 1,49
80	R\$ 14,84	R\$ 12,90	R\$ 1,94
100	R\$ 19,31	R\$ 16,73	R\$ 2,59
140	R\$ 32,72	R\$ 28,20	R\$ 4,53

Fonte: Celpe

Diário de Pernambuco. 28 abr. 2010 (adaptado).

Considere dois consumidores: um que é de baixa renda e gastou 100 kWh e outro do tipo residencial que gastou 185 kWh. A diferença entre o gasto desses consumidores com 1 kWh, depois da redução da tarifa de energia, mais aproximada, é de

- A R\$ 0,27.
- B** R\$ 0,29.
- C R\$ 0,32.
- D R\$ 0,34.
- E R\$ 0,61.

### QUESTÃO 157

Um jovem investidor precisa escolher qual investimento lhe trará maior retorno financeiro em uma aplicação de R\$ 500,00. Para isso, pesquisa o rendimento e o imposto a ser pago em dois investimentos: poupança e CDB (certificado de depósito bancário). As informações obtidas estão resumidas no quadro:

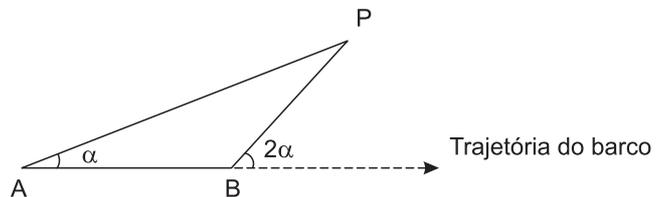
	Rendimento mensal (%)	IR (imposto de renda)
POUPANÇA	0,560	ISENTO
CDB	0,876	4% (sobre o ganho)

Para o jovem investidor, ao final de um mês, a aplicação mais vantajosa é

- A a poupança, pois totalizará um montante de R\$ 502,80.
- B a poupança, pois totalizará um montante de R\$ 500,56.
- C o CDB, pois totalizará um montante de R\$ 504,38.
- D** o CDB, pois totalizará um montante de R\$ 504,21.
- E o CDB, pois totalizará um montante de R\$ 500,87.

### QUESTÃO 158

Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual  $\alpha$  fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual  $2\alpha$ . A figura ilustra essa situação:



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo  $\alpha = 30^\circ$  e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância  $AB = 2\ 000$  m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será

- A 1 000 m.
- B**  $1\ 000\sqrt{3}$  m.
- C  $2\ 000\frac{\sqrt{3}}{3}$  m.
- D 2 000 m.
- E  $2\ 000\sqrt{3}$  m.

**QUESTÃO 159**

Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das “ilhas de calor” da região, que deveriam ser inferiores a 31°C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:



Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é

- A  $\frac{1}{5}$
- B  $\frac{1}{4}$
- C  $\frac{2}{5}$
- D  $\frac{3}{5}$
- E  $\frac{3}{4}$**

**QUESTÃO 160**

O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou R\$ 100 000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R\$ 350 000,00, enquanto a segunda cobrou R\$ 120 000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R\$ 150 000,00. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada.

Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas?

- A  $100n + 350 = 120n + 150$**
- B  $100n + 150 = 120n + 350$
- C  $100(n + 350) = 120(n + 150)$
- D  $100(n + 350\ 000) = 120(n + 150\ 000)$
- E  $350(n + 100\ 000) = 150(n + 120\ 000)$

**QUESTÃO 161**

O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33 000 passagens; em fevereiro, 34 500; em março, 36 000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes.

Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

- A 38 000
- B 40 500
- C 41 000
- D 42 000**
- E 48 000

**QUESTÃO 162**

Uma pessoa aplicou certa quantia em ações. No primeiro mês, ela perdeu 30% do total do investimento e, no segundo mês, recuperou 20% do que havia perdido. Depois desses dois meses, resolveu tirar o montante de R\$ 3 800,00 gerado pela aplicação.

A quantia inicial que essa pessoa aplicou em ações corresponde ao valor de

- A R\$ 4 222,22.
- B R\$ 4 523,80.
- C R\$ 5 000,00.**
- D R\$ 13 300,00.
- E R\$ 17 100,00.

**QUESTÃO 163**

Muitas medidas podem ser tomadas em nossas casas visando à utilização racional de energia elétrica. Isso deve ser uma atitude diária de cidadania. Uma delas pode ser a redução do tempo no banho. Um chuveiro com potência de 4 800 W consome 4,8 kW por hora.

Uma pessoa que toma dois banhos diariamente, de 10 minutos cada, consumirá, em sete dias, quantos kW?

- A 0,8
- B 1,6
- C 5,6
- D 11,2**
- E 33,6

**QUESTÃO 164**

Cerca de 20 milhões de brasileiros vivem na região coberta pela caatinga, em quase 800 mil km<sup>2</sup> de área. Quando não chove, o homem do sertão e sua família precisam caminhar quilômetros em busca da água dos açudes. A irregularidade climática é um dos fatores que mais interferem na vida do sertanejo.

Disponível em: <http://www.wwf.org.br>. Acesso em: 23 abr. 2010.

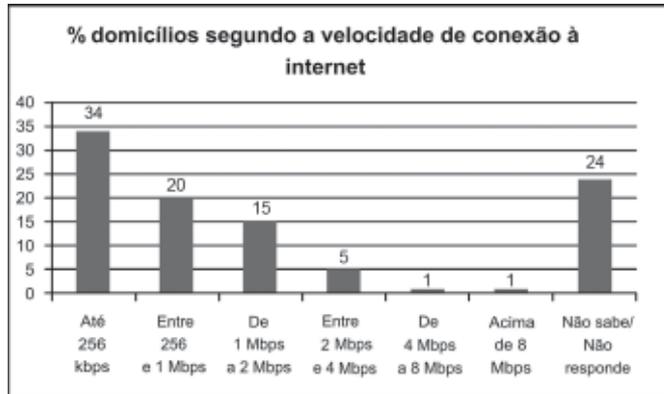
Segundo este levantamento, a densidade demográfica da região coberta pela caatinga, em habitantes por km<sup>2</sup>, é de

- A 250.
- B 25.**
- C 2,5.
- D 0,25.
- E 0,025.



### QUESTÃO 165

O gráfico mostra a velocidade de conexão à internet utilizada em domicílios no Brasil. Esses dados são resultado da mais recente pesquisa, de 2009, realizada pelo Comitê Gestor da Internet (CGI).



Disponível em: <http://agencia.ipea.gov.br>. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Escolhendo-se, aleatoriamente, um domicílio pesquisado, qual a chance de haver banda larga de conexão de pelo menos 1 Mbps neste domicílio?

- A 0,45
- B 0,42
- C 0,30
- D 0,22
- E 0,15

### QUESTÃO 166

Todo o país passa pela primeira fase de campanha de vacinação contra a gripe suína (H1N1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emílio Ribas, de São Paulo, a imunização "deve mudar", no país, a história da epidemia. Com a vacina, de acordo com ele, o Brasil tem a chance de barrar uma tendência do crescimento da doença, que já matou 17 mil no mundo. A tabela apresenta dados específicos de um único posto de vacinação.

#### Campanha de vacinação contra a gripe suína

Datas da vacinação	Público-alvo	Quantidade de pessoas vacinadas
8 a 19 de março	Trabalhadores da saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 e 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 e 39 anos	50

Disponível em: <http://img.terra.com.br>. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Escolhendo-se aleatoriamente uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é

- A 8%.
- B 9%.
- C 11%.
- D 12%.
- E 22%.

### QUESTÃO 167

Em um jogo disputado em uma mesa de sinuca, há 16 bolas: 1 branca e 15 coloridas, as quais, de acordo com a coloração, valem de 1 a 15 pontos (um valor para cada bola colorida).

O jogador acerta o taco na bola branca de forma que esta acerte as outras, com o objetivo de acertar duas das quinze bolas em quaisquer caçapas. Os valores dessas duas bolas são somados e devem resultar em um valor escolhido pelo jogador antes do início da jogada.

Arthur, Bernardo e Caio escolhem os números 12, 17 e 22 como sendo resultados de suas respectivas somas.

Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de ganhar o jogo é

- A Arthur, pois a soma que escolheu é a menor.
- B Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 4 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.
- C Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.
- D Caio, pois há 10 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 8 possibilidades para a escolha de Bernardo.
- E Caio, pois a soma que escolheu é a maior.

### QUESTÃO 168

É possível usar água ou comida para atrair as aves e observá-las. Muitas pessoas costumam usar água com açúcar, por exemplo, para atrair beija-flores. Mas é importante saber que, na hora de fazer a mistura, você deve sempre usar uma parte de açúcar para cinco partes de água. Além disso, em dias quentes, precisa trocar a água de duas a três vezes, pois com o calor ela pode fermentar e, se for ingerida pela ave, pode deixá-la doente. O excesso de açúcar, ao cristalizar, também pode manter o bico da ave fechado, impedindo-a de se alimentar. Isso pode até matá-la.

Ciência Hoje das Crianças. FNDE; Instituto Ciência Hoje, ano 19, n. 166, mar. 1996.

Pretende-se encher completamente um copo com a mistura para atrair beija-flores. O copo tem formato cilíndrico, e suas medidas são 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro. A quantidade de água que deve ser utilizada na mistura é cerca de (utilize  $\pi = 3$ )

- A 20 mL.
- B 24 mL.
- C 100 mL.
- D 120 mL.
- E 600 mL.

**QUESTÃO 169**

A figura apresenta informações biométricas de um homem (Duílio) e de uma mulher (Sandra) que estão buscando alcançar seu peso ideal a partir das atividades físicas (corrida). Para se verificar a escala de obesidade, foi desenvolvida a fórmula que permite verificar o Índice de Massa Corporal (IMC). Esta fórmula é apresentada como  $IMC = m/h^2$ , onde  $m$  é a massa em quilogramas e  $h$  é altura em metros.

**O PERFIL DOS NOVOS CORREDORES**

DUILIO SABA	
Idade	50 anos
Altura	1,88 metro
Peso	96,4 quilos
Peso ideal	94,5 quilos

SANDRA TESCARI	
Idade	42 anos
Altura	1,70 metro
Peso	84 quilos
Peso ideal	77 quilos

Veja. Ed. 2055 (adaptado).

No quadro é apresentada a Escala de Índice de Massa Corporal com as respectivas categorias relacionadas aos pesos.

Escala de Índice de Massa Corporal	
CATEGORIAS	IMC (kg/m <sup>2</sup> )
Desnutrição	Abaixo de 14,5
Peso abaixo do normal	14,5 a 20
Peso normal	20 a 24,9
Sobrepeso	25 a 29,9
Obesidade	30 a 39,9
Obesidade mórbida	Igual ou acima de 40

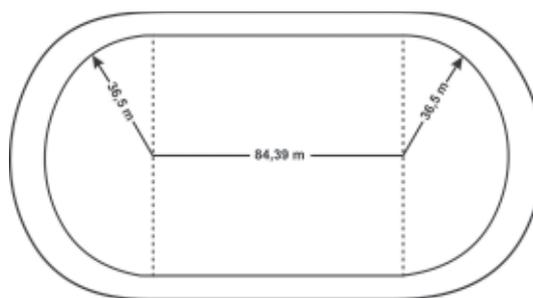
Nova Escola. N° 172, maio 2004.

A partir dos dados biométricos de Duílio e Sandra e da Escala de IMC, o valor IMC e a categoria em que cada uma das pessoas se posiciona na Escala são

- A Duílio tem o IMC 26,7 e Sandra tem o IMC 26,6, estando ambos na categoria de sobrepeso.
- B Duílio tem o IMC 27,3 e Sandra tem o IMC 29,1, estando ambos na categoria de sobrepeso.
- C Duílio tem o IMC 27,3 e Sandra tem o IMC 26,6, estando ambos na categoria de sobrepeso.
- D Duílio tem o IMC 25,6, estando na categoria de sobrepeso, e Sandra tem o IMC 24,7, estando na categoria de peso normal.
- E Duílio tem o IMC 25,1, estando na categoria de sobrepeso, e Sandra tem o IMC 22,6, estando na categoria de peso normal.

**QUESTÃO 170**

O atletismo é um dos esportes que mais se identificam com o espírito olímpico. A figura ilustra uma pista de atletismo. A pista é composta por oito raias e tem largura de 9,76 m. As raias são numeradas do centro da pista para a extremidade e são construídas de segmentos de retas paralelas e arcos de circunferência. Os dois semicírculos da pista são iguais.



BIEMBENGUT, M. S. *Modelação Matemática como método de ensino-aprendizagem de Matemática em cursos de 1º e 2º graus*. 1990. Dissertação de Mestrado. IGCE/UNESP, Rio Claro, 1990 (adaptado).

Se os atletas partissem do mesmo ponto, dando uma volta completa, em qual das raias o corredor estaria sendo beneficiado?

- A 1
- B 4
- C 5
- D 7
- E 8

**QUESTÃO 171**

Nos últimos cinco anos, 32 mil mulheres de 20 a 24 anos foram internadas nos hospitais do SUS por causa de AVC. Entre os homens da mesma faixa etária, houve 28 mil internações pelo mesmo motivo.

Época. 26 abr. 2010 (adaptado).

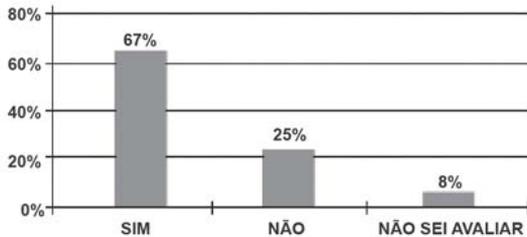
Suponha que, nos próximos cinco anos, haja um acréscimo de 8 mil internações de mulheres e que o acréscimo de internações de homens por AVC ocorra na mesma proporção.

De acordo com as informações dadas, o número de homens que seriam internados por AVC, nos próximos cinco anos, corresponderia a

- A 4 mil.
- B 9 mil.
- C 21 mil.
- D 35 mil.
- E 39 mil.

**QUESTÃO 172**

Uma enquete, realizada em março de 2010, perguntava aos internautas se eles acreditavam que as atividades humanas provocam o aquecimento global. Eram três as alternativas possíveis e 279 internautas responderam à enquete, como mostra o gráfico.



Época. Ed. 619, 29 mar. 2010 (adaptado).

Analisando os dados do gráfico, quantos internautas responderam "NÃO" à enquete?

- A Menos de 23.
- B Mais de 23 e menos de 25.
- C Mais de 50 e menos de 75.
- D Mais de 100 e menos de 190.
- E Mais de 200.

**QUESTÃO 173**

A cor de uma estrela tem relação com a temperatura em sua superfície. Estrelas não muito quentes (cerca de 3 000 K) nos parecem avermelhadas. Já as estrelas amarelas, como o Sol, possuem temperatura em torno dos 6 000 K; as mais quentes são brancas ou azuis porque sua temperatura fica acima dos 10 000 K.

A tabela apresenta uma classificação espectral e outros dados para as estrelas dessas classes.

Estrelas da Sequência Principal

Classe Espectral	Temperatura	Luminosidade	Massa	Raio
O5	40 000	$5 \times 10^5$	40	18
B0	28 000	$2 \times 10^4$	18	7
A0	9 900	80	3	2.5
G2	5 770	1	1	1
M0	3 480	0,06	0,5	0,6

Temperatura em Kelvin.

Luminosidade, massa e raio, tomando o Sol como unidade.

Disponível em: <http://www.zenite.nu>. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

Se tomarmos uma estrela que tenha temperatura 5 vezes maior que a temperatura do Sol, qual será a ordem de grandeza de sua luminosidade?

- A 20 000 vezes a luminosidade do Sol.
- B 28 000 vezes a luminosidade do Sol.
- C 28 850 vezes a luminosidade do Sol.
- D 30 000 vezes a luminosidade do Sol.
- E 50 000 vezes a luminosidade do Sol.

**QUESTÃO 174**

O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do

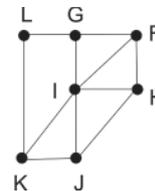
computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares. Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75 913 é

- A 24.
- B 31.
- C 32.
- D 88.
- E 89.

**QUESTÃO 175**

Um técnico em refrigeração precisa revisar todos os pontos de saída de ar de um escritório com várias salas.

Na imagem apresentada, cada ponto indicado por uma letra é a saída do ar, e os segmentos são as tubulações.



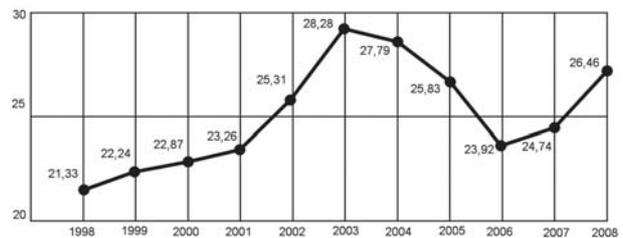
Iniciando a revisão pelo ponto K e terminando em F, sem passar mais de uma vez por cada ponto, o caminho será passando pelos pontos

- A K, I e F.
- B K, J, I, G, L e F.
- C K, L, G, I, J, H e F.
- D K, J, H, I, G, L e F.
- E K, L, G, I, H, J e F.

**QUESTÃO 176**

O termo agronegócio não se refere apenas à agricultura e à pecuária, pois as atividades ligadas a essa produção incluem fornecedores de equipamentos, serviços para a zona rural, industrialização e comercialização dos produtos.

O gráfico seguinte mostra a participação percentual do agronegócio no PIB brasileiro:



Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada (CEPEA). Almanaque abril 2010. São Paulo: Abril, ano 36 (adaptado).

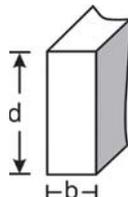
Esse gráfico foi usado em uma palestra na qual o orador ressaltou uma queda da participação do agronegócio no PIB brasileiro e a posterior recuperação dessa participação, em termos percentuais.

Segundo o gráfico, o período de queda ocorreu entre os anos de

- A 1998 e 2001.
- B 2001 e 2003.
- C 2003 e 2006.
- D 2003 e 2007.
- E 2003 e 2008.

**QUESTÃO 177**

A resistência das vigas de dado comprimento é diretamente proporcional à largura ( $b$ ) e ao quadrado da altura ( $d$ ), conforme a figura. A constante de proporcionalidade  $k$  varia de acordo com o material utilizado na sua construção.



Considerando-se  $S$  como a resistência, a representação algébrica que exprime essa relação é

- A  $S = k \cdot b \cdot d$
- B  $S = b \cdot d^2$
- C  $S = k \cdot b \cdot d^2$**
- D  $S = \frac{k \cdot b}{d^2}$
- E  $S = \frac{k \cdot d^2}{b}$

**QUESTÃO 178**

Considere que uma pessoa decida investir uma determinada quantia e que lhe sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:

- Investimento A: 3% ao mês
- Investimento B: 36% ao ano
- Investimento C: 18% ao semestre

As rentabilidades, para esses investimentos, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades:

$n$	$1,03^n$
3	1,093
6	1,194
9	1,305
12	1,426

Para escolher o investimento com a maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá

- A escolher qualquer um dos investimentos A, B ou C, pois as suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.
- B escolher os investimentos A ou C, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.
- C escolher o investimento A, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos B e C.**
- D escolher o investimento B, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento A e de 18% do investimento C.
- E escolher o investimento C, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos A e B.

**QUESTÃO 179**

Uma indústria fabrica um único tipo de produto e sempre vende tudo o que produz. O custo total para fabricar uma quantidade  $q$  de produtos é dado por uma função, simbolizada por  $CT$ , enquanto o faturamento que a empresa obtém com a venda da quantidade  $q$  também é uma função, simbolizada por  $FT$ . O lucro total ( $LT$ ) obtido pela venda da quantidade  $q$  de produtos é dado pela expressão  $LT(q) = FT(q) - CT(q)$ .

Considerando-se as funções  $FT(q) = 5q$  e  $CT(q) = 2q + 12$  como faturamento e custo, qual a quantidade mínima de produtos que a indústria terá de fabricar para não ter prejuízo?

- A 0
- B 1
- C 3
- D 4**
- E 5

**QUESTÃO 180**

Uma empresa de telefonia fixa oferece dois planos aos seus clientes: no plano K, o cliente paga R\$ 29,90 por 200 minutos mensais e R\$ 0,20 por cada minuto excedente; no plano Z, paga R\$ 49,90 por 300 minutos mensais e R\$ 0,10 por cada minuto excedente.

O gráfico que representa o valor pago, em reais, nos dois planos em função dos minutos utilizados é

