

Graciele de Cássia Oliveira

# **Geometria Fractal na Educação Básica**

Universidade Federal de Minas Gerais

Março de 2014

Graciele de Cássia Oliveira

# Geometria Fractal na Educação Básica

Monografia apresentada ao programa de pós-graduação em Matemática para Professores com Ênfase em Cálculo, Instituto de Ciências Exatas-ICEX, Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Especialista em Matemática com Ênfase em Cálculo.

Orientadora: Carmen Rosa Giraldo Vergara

Universidade Federal de Minas Gerais

06 de Março de 2014

# Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus que iluminou o meu caminho durante esta caminhada me dando força, saúde e sabedoria. À minha filha amada, razão da minha existência, por ter compreendido minha ausência quando necessário. De forma grata e grandiosa à minha família querida, mãe, pai e irmã, pelo amor incondicional, me apoiando nos momentos de dificuldades. Ao meu diretor Wellington e colegas de trabalho, que embora não tivessem conhecimento disto me incentivaram e ajudaram quando precisei. E não deixando de agradecer em especial à minha orientadora, Carmen pelo carinho, paciência e pelos conhecimentos adquiridos.

Dedico este trabalho à minha família, por todo apoio, amor e compreensão!

# Resumo

Este trabalho teve como objetivo o estudo da Geometria Fractal na educação básica, citando a importância de trabalhar com conhecimentos atuais nas aulas de matemática de maneira inovadora. De modo geral, o ensino de Matemática segue sempre a mesma rotina. Com o intuito de mostrar que é possível fugir do tradicionalismo, é importante que o professor apresente conteúdos ligados ao contexto do aluno. A ideia de estudar essa geometria se deve ao fato dela ser mais precisa para descrever as formas presentes na natureza, numa couve-flor, samambaia, nuvem e etc, já a Geometria Euclidiana apenas as formas geométricas, levando o aluno a perceber a sua relação com os elementos do cotidiano, fazendo conexões com a Matemática e o mundo da Natureza, explorando-a por caminhos não-analíticos. Diante disso foram propostas diversas atividades desenvolvidas em sala de aula, para que alguns desses conceitos sejam compreendidos.

*Palavras chave: Geometria Fractal, ensino da geometria, aprendizagem matemática.*

# Abstract

This work aimed to study the fractal geometry in basic education, citing the importance of working with current knowledge in mathematics lessons in innovative ways. Overall, the teaching of mathematics always follows the same routine. In order to show that it is possible to escape from traditionalism, it is important that the teacher presents content related to the context of the student. The idea of studying this geometry is due to the fact that it is more accurate to describe shapes found in nature, a cauliflower, fern, sky etc., now only the Euclidean geometric shapes, leading the student to realize his relationship with the elements of everyday life, making connections with mathematics and the world of Nature, by exploiting the non-analytic paths. Therefore proposals were many activities in the classroom, so that some of these concepts are understood.

*Keywords: Fractal Geometry mathematics, geometry teaching, mathematical learning.*

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>viii</b>
<b>1 Espaços Métricos</b>	<b>1</b>
1.1 Preliminares . . . . .	1
1.2 Contrações em espaços métricos . . . . .	16
<b>2 Espaço de Hausdorff</b>	<b>21</b>
2.1 Contrações no Espaço de Hausdorff . . . . .	34
2.2 Sistema de funções iteradas (SFI) . . . . .	36
2.3 SFI com condensação . . . . .	39
<b>3 Geometria Fractal</b>	<b>42</b>
3.1 Introdução . . . . .	42
3.2 Aspectos da Geometria Fractal . . . . .	43
3.2.1 Classificação dos Fractais . . . . .	44
3.2.2 Auto-similaridade ou Auto-semelhança Fractal . . . . .	46
3.2.3 Dimensão Fractal . . . . .	46
3.3 Alguns fractais clássicos . . . . .	49
3.3.1 O conjunto de Cantor . . . . .	49
3.3.2 A Curva de Koch . . . . .	51
3.3.3 O triângulo de Sierpinski . . . . .	55
3.4 Explorando fractais na sala de aula . . . . .	57
3.4.1 Atividade 01: Geometria Euclidiana e sua associação com ob- jetos conhecidos . . . . .	58
3.4.2 Atividade 02: Vídeo sobre Geometria Fractal . . . . .	58

3.4.3	Atividade 03: Construindo Fractais . . . . .	59
3.4.4	Atividade 04: Construindo Fractais com o software GeoGebra	62
3.4.5	Atividade 05: Logaritmos e perímetros . . . . .	70
3.5	Resultados Obtidos com a aplicação das atividades . . . . .	71

# Introdução

Durante séculos a geometria euclidiana foi considerada como a geometria que melhor descrevia o mundo em que vivemos. Euclides (325 - 265 a. C.) desenvolveu vários estudos sobre as formas de objetos planos, mas objetos complexos como uma samambaia, por exemplo, não tinham definição de forma e dimensão. Isso abriu caminho para outras geometrias. Dentre essas geometrias, temos o surgimento da geometria fractal, ramo da matemática destinado a estudar as formas que se caracterizam por repetições de um determinado padrão com constantes variações. Essas formas são facilmente identificadas na natureza, em uma couve-flor, um relâmpago, uma árvore, pois apresentam sempre cópias aproximadas de si mesmo em seu interior.

Neste contexto, o estudo sobre os fractais tem como objetivo estimular e despertar o interesse dos alunos, pois em muitos momentos eles se deparam com uma forma irregular, portanto é importante conhecer as áreas onde estas formas são estudadas e aplicadas.

Deste modo, para inserir esse tema, relacionando-o com alguns conteúdos de matemática, foi desenvolvido uma oficina com os alunos do 2º ano do ensino médio, na Escola Estadual Dr. Orestes Diniz, em Betim - MG, abordando o conceito de fractais, sua origem e propriedades, mostrando como são construídos alguns deles, citando exemplos de aplicações através de atividades exploradas com materiais manipuláveis (instrumentos de medida e material concreto) em sala de aula e no laboratório de informática usando o software *GeoGebra*, para que, assim, os alunos possam ter acesso a atividades diferentes, percebendo que a matemática não é uma ciência pronta e acabada, mas uma ciência que evolui de acordo com as nossas necessidades e está sempre presente no dia-a-dia.



# Capítulo 1

## Espaços Métricos

Espaços métricos são conjuntos nos quais podemos “medir” a distância entre dois elementos quaisquer. Nesta secção formalizamos o conceito de distância e estudamos outros conceitos relacionados a Geometria Fractal, que estuda subconjuntos complexos desses conjuntos.

### 1.1 Preliminares

**Definição 1.1** *Um espaço métrico  $(X, d)$  é um conjunto não vazio  $X$  de elementos chamados pontos, dotado de uma função*

$$\begin{aligned} d : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) \end{aligned}$$

*Chamada distância métrica, que satisfaz as seguintes propriedades:*

Para todo  $x, y, z \in X$ , temos que:

- i)  $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \iff x = y$  (distância não negativa)
- ii)  $d(x, y) = d(y, x)$  (simetria)
- iii)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (desigualdade triangular).

**Exemplo 1.2** A aplicação  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$d(x, y) := |x - y|$$

é uma métrica sobre  $\mathbb{R}$ , onde  $||$  denota o valor absoluto.

De fato, dados  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , temos que

i)  $d(x, y) = |x - y| \iff d(x, y) \geq 0.$

$$d(x, y) = |x - y| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y.$$

ii)  $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x).$

iii)  $d(x, y) = |x - y|$   
 $= |(x - z) + (z - y)|$   
 $\leq |x - z| + |z - y|$   
 $= |x - z| + |y - z|$   
 $= d(x, z) + d(y, z).$

**Exemplo 1.3** A aplicação  $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2},$$

é uma métrica sobre  $\mathbb{R}^2$ .

i) Para qualquer  $x = (x_1, x_2)$  e  $y = (y_1, y_2)$  teremos,

$$\begin{aligned} d(x, y) \geq 0 &\iff \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \geq 0 \\ &\iff (y_1 - x_1)^2 \geq 0 \text{ e } (y_2 - x_2)^2 \geq 0 \\ &\iff d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \geq 0 \end{aligned}$$

Para qualquer  $x = (x_1, x_2)$  e  $y = (y_1, y_2)$  teremos,

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 &\iff \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} = 0 \\ &\iff (y_1 - x_1)^2 = 0 \text{ e } (y_2 - x_2)^2 = 0 \\ &\iff y_1 = x_1 \text{ e } y_2 = x_2 \\ &\iff x = y. \end{aligned}$$

ii)  $d(x, y) = \iff \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = d(y, x)$

iii) Para provar a desigualdade triangular, vamos utilizar a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

Sejam  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , em  $\mathbb{R}^n$ , observe que

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)$$

No caso particular de  $\mathbb{R}^2$ , temos que para qualquer  $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

Observe que da desigualdade acima temos que,

$$a_1b_1 + a_2b_2 \leq |a_1b_1 + a_2b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

Por outro lado temos que,

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 &= (a_1^2 + a_2^2) + 2(a_1b_1 + a_2b_2) + (b_1^2 + b_2^2) \\ &\leq (a_1^2 + a_2^2) + 2\left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}\right) + (b_1^2 + b_2^2) \\ &= \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}\right)^2. \end{aligned}$$

Sejam  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$  e  $z = (z_1, z_2)$  em  $\mathbb{R}^2$ ,

fazendo  $a_1 = z_1 - x_1$ ,  $a_2 = z_2 - x_2$ ,  $b_1 = y_1 - z_1$  e  $b_2 = y_2 - z_2$ ,

temos  $a_1 + b_1 = y_1 - x_1$  e  $a_2 + b_2 = y_2 - x_2$ , portanto

$$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 \leq \left(\sqrt{(z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2}\right)^2,$$

logo

$$\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \leq \sqrt{(z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2},$$

então  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ , como queríamos demonstrar.

**Exemplo 1.4** Sejam  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ , definimos o produto interno entre os elementos  $x$  e  $y$  em  $\mathbb{R}^2$  como

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2,$$

definimos também a norma do elemento  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  em  $\mathbb{R}^2$  como

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

e o ângulo  $\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  entre  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  como

$$\theta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } x = 0 \text{ ou } y = 0, \\ \arccos \frac{x \cdot y}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}, & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Agora consideremos  $d_*$ :

$$d_* : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto d_*(x, y) = \left| \|x\| - \|y\| \right| + \theta(x, y). \quad (2)$$

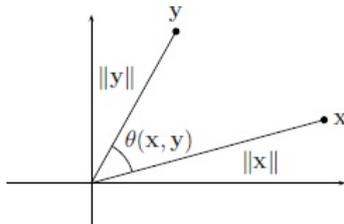


Figura 1.1: A métrica  $d_*$ .

$d_*$  é uma métrica em  $\mathbb{R}^2$ :

$$\text{i) } d_*(x, y) = \left| \|x\| - \|y\| \right| + \theta(x, y) \iff \left| \|x\| - \|y\| \right| \geq 0 \text{ e } \theta(x, y) \geq 0 \iff d_*(x, y) \geq 0.$$

Se  $\mathbf{x}=\mathbf{y}$ , de (2) temos que  $d_*(\mathbf{x}, \mathbf{y})=0$

Reciprocamente se  $d_*(\mathbf{x}, \mathbf{y})=0$ , então  $\left| \|x\| - \|y\| \right| + \theta(x, y) = 0$ , mas como cada termo da soma não é negativo, então cada termo é 0, portanto  $\|x\| = \|y\|$  e  $\theta(x, y) = 0$ , então  $y = \alpha x$ , para algum  $\alpha > 0$ , portanto  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

$$\text{ii) } d_*(x, y) = \left| \|x\| - \|y\| \right| + \theta(x, y) = \left| \|y\| - \|x\| \right| + \theta(y, x) = d_*(y, x).$$

$$\text{iii) Agora vamos demonstrar que } d_*(x, y) \leq d_*(x, z) + d_*(y, z). \quad (3)$$

Considerando o produto interno definido em  $\mathbb{R}^2$  e  $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ , temos a seguinte desigualdade

$$\theta(x, y) \leq \theta(x, z) + \theta(y, z). \quad (4)$$

De (4) e (2) temos

$$\begin{aligned} d_*(x, y) &= \left| \|x\| - \|y\| \right| + \theta(x, y) \\ &\leq \left| \|x\| - \|z\| \right| + \theta(x, z) + \left| \|y\| - \|z\| \right| + \theta(y, z) \\ &= d_*(x, z) + d_*(y, z). \end{aligned}$$

Satisfazendo a desigualdade (3).

Portanto,  $d_*$  é de fato uma métrica em  $\mathbb{R}^2$ .

**Definição 1.5** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico . Dizemos que  $Y$  é um **subespaço métrico** de  $X$  se  $Y \subset X$  e adotarmos em  $Y$  a métrica  $d$  restrita a  $Y$ .*

**Exemplo 1.6** *Seja  $X = \mathbb{R}^2$  com métrica usual  $d_u$  e  $S = [0, 1] \times [0, 1]$ .  $(S, d_u)$  é um subespaço métrico de  $(\mathbb{R}^2, d_u)$ .*

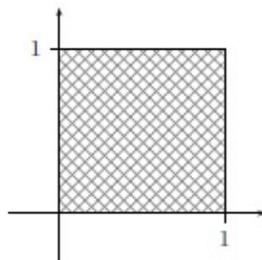


Figura 1.2:  $S = [0, 1] \times [0, 1]$

**Definição 1.7** *Seja  $X$  um espaço métrico, uma aplicação  $s$  definida por:*

$$\begin{aligned} s : \mathbb{N}^* &\longrightarrow X \\ n &\longrightarrow s(n) = x_n \end{aligned}$$

é chamada sequência de elementos em  $X$ .

Escrevemos  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \dots)$ , ou  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , ou simplesmente  $(x_n)$ .

**Exemplo 1.8**  $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$  é uma sequência de elementos em  $\mathbb{R}$  cujo conjunto de termos é  $\{-1, 1\}$ .

**Exemplo 1.9** *Considere a sequência definida por:*

$$\begin{cases} s_1 = s_2 = 1 \\ s_n = s_{n-2} + s_{n-1}, \forall n \geq 3 \end{cases}$$

Assim, seus cinco primeiros termos são: 1, 1, 2, 3, 5. Esta sequência é conhecida como sequência de Fibonacci.

**Definição 1.10** *Uma sequência  $x_n$  dita limitada superiormente se existir um número real  $M$  tal que*

$$x_n \leq M, \forall n \geq 1$$

*A sequência é limitada inferiormente se existir um número  $m$  tal que*

$$m \leq x_n, \forall n \geq 1$$

*Se ela for limitada superiormente e inferiormente, então  $x_n$  é dita **sequência limitada**.*

**Exemplo 1.11**  $x_n = n$  é limitada inferiormente ( $a_n > 0$ ) mas não superiormente.

$x_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)$  é limitada, pois  $0 < a_n < 1$ , para todo  $n$ .

**Definição 1.12** Uma sequência  $x_n$  é **crecente** se

$$x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma sequência  $x_n$  é **decrecente** se:

$$x_n \geq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Toda sequência crescente ou decrescente é chamada de **monótona**.

**Exemplo 1.13**  $x_n = \left(\frac{5}{n+4}\right) = 1, \frac{5}{6}, \frac{5}{7} \dots$  é decrescente.

$$x_n = \left(n + \frac{1}{n}\right) = 2, 2 + \frac{1}{2}, 3 + \frac{1}{3} \dots \text{ é crescente.}$$

Logo as duas sequências são monótonas.

Dado um espaço métrico é fundamental conhecer a definição de **convergência**, e esse conceito será essencial para o nosso estudo de fractais.

**Definição 1.14** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico e  $(x_n)$  uma sequência em  $X$ . Dizemos que a sequência  $(x_n)$  converge se existe um número real  $S \in X$ , tal que, os termos da sequência  $(x_n)$  se aproximam cada vez mais de  $S$ , de modo que a distância de  $(x_n)$  a  $S$  pode ser tão pequena quanto quiser.

Ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = S$$

Uma sequência que possui limite, diz-se convergente, caso contrário diz-se divergente.

De maneira implícita, todos os limites de sequências reais que estudaremos se farão quando  $n \rightarrow +\infty$ .

**Exemplo 1.15** A sequência  $(\frac{1}{n})_n$  é convergente no espaço métrico  $\mathbb{R}$  com métrica usual, pois  $(\frac{1}{n})_n \rightarrow 0$ .

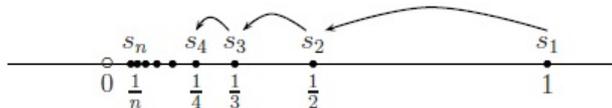


Figura 1.3: A medida que avançamos nos termos de  $(\frac{1}{n})_n \rightarrow 0$  eles se aproximam cada vez mais de zero.

Pela Propriedade Arquimediana temos que quaisquer  $x, y, z \in \mathbb{R}$  com  $x > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $Nx > y$ . Assim dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $N\varepsilon > 1$ , ou seja  $N > \frac{1}{\varepsilon}$ . Portanto

$$d\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

E assim, concluímos que  $(\frac{1}{n})_n \rightarrow 0$ .

O seguinte teorema nos mostra a **unicidade do limite** para sequências.

**Teorema 1.16** Se uma sequência  $(x_n)$  converge, então este limite é único.

### Demonstração

Suponhamos por contradição que  $(x_n) \rightarrow L$ ,  $(x_n) \rightarrow M$  com  $L \neq M$ , assim temos que  $d(L, M) > 0$ .

Seja  $\varepsilon = \frac{d(L, M)}{2}$ .

Como  $(x_n) \rightarrow L$ , existe  $N_1 \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n \geq N_1, d(x_n, L) < \varepsilon$ .

Como  $(x_n) \rightarrow M$ , existe  $N_2 \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n \geq N_2, d(x_n, M) < \varepsilon$ .

Seja  $N = \max \{ N_1, N_2 \}$ . Para todo  $n \geq N$  temos que:

$$0 \leq d(L, M) \leq d(L, x_n) + d(M, x_n) < \frac{d(L, M)}{2} + \frac{d(L, M)}{2}.$$

Logo,  $d(L, M) < d(L, M)$ , que é uma contradição.

**Definição 1.17** *Seja  $x_n$  uma sequência em  $X$  e  $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  uma função crescente ( $n_1 \leq n_2$  implica  $k(n_1) \leq k(n_2)$ ). A função composta  $x \circ k : \mathbb{N} \rightarrow X$  se chama subsequência de  $x_n$ .*

Analisando esta definição, temos que

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{k} & \mathbb{N} \xrightarrow{x} X \\ n & \mapsto & k_n \mapsto x_{k_n} \end{array}$$

Desta maneira  $x \circ k$  é uma sequência em  $X$ , cujos termos  $x_{k_n}$  são “extraídos” da sequência original  $x_n$ , porém esses termos não foram extraídos de qualquer forma, obedecem a condição

$$n \leq m \implies k_n \leq k_m \quad (\text{k é crescente})$$

significa que da sequência  $(x_n)_n$  vão se formando os termos  $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_m}, \dots$ , mas preservando a ordem.

**Exemplo 1.18** *Dada a sequência  $(\sqrt{n})_n$  temos que  $(\sqrt{2}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{12}, \sqrt{14}, \dots)$  é uma subsequência, enquanto  $(1, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{3}, \sqrt{12}, \sqrt{10}, \sqrt{14}, \dots)$  não é.*

**Proposição 1.19** *Seja  $(x_n)_n$  uma sequência em um espaço métrico. Então  $(x_n)_n \rightarrow L$  se e somente se toda subsequência de  $(x_n)_n$  converge a  $L$ .*

### Demonstração

Se toda sequência  $x_n$  converge a  $L$ , então  $x_n \rightarrow L$ , pois a sequência completa é subsequência de si mesma e o limite é único. Reciprocamente, suponhamos que  $x_n \rightarrow L$  e seja  $(x_{k_n})_n$  uma subsequência de  $x_n$ . Seja  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que,  $n \geq N$  implica  $d(x_n, L) < \varepsilon$ . Em particular, para cada  $k_n > N$  temos que  $d(x_{k_n}, L) < \varepsilon$ , isto é, a subsequência  $(x_{k_n})$  converge para  $L$ .

**Proposição 1.20** *Toda sequência monótona limitada de números reais é convergente.*

### Demonstração

Tomemos a sequência limitada  $\{x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots\}$ . Seja  $a = \sup\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , suponha que  $a = \lim x_n$ . Então, dado arbitrariamente  $\varepsilon > 0$ , o número  $a - \varepsilon$ , não pode ser cota superior do conjunto dos valores  $x_n$ , pois é menor que  $a$ . Logo existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que,

$$a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a.$$

Então

$$n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq a < a + \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Portanto,

$$d(x_n, a) < \varepsilon, \forall n > n_0.$$

**Definição 1.21** *Uma sequência  $x_n$  em  $X$  é chamada **sequência de Cauchy** se para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que:*

$$m, n \geq N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Observe que numa sequência de Cauchy, a medida que a posição dos termos crescem, os termos se aproximam cada vez mais.

**Exemplo 1.22** *A sequência  $(x_n)$  em  $\mathbb{R}$  dada por  $x_n = \frac{1}{n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  é uma sequência de Cauchy.*

Se  $\varepsilon > 0$ , pela Propriedade Arquimediana, podemos encontrar  $n_0$  tal que  $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ , então se  $n, m \geq n_0$ , podemos supor que  $n \geq m$ , assim teremos

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0}.$$

De onde concluímos que

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \leq \left| \frac{1}{n_0} - 0 \right| = \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

Portanto  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy.

**Teorema 1.23** *Se uma sequência de pontos  $(x_n)$  em  $X$  converge para um ponto  $x \in X$ , então esta é uma sequência de Cauchy.*

Este teorema nos diz que se uma sequência converge então ela é de Cauchy.

### Demonstração

Supondo que a sequência  $(x_n)$  converge para  $x \in X$ . Então dado  $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ , existe  $N$ , tal que,

$$n \geq N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sejam  $n, m \geq N$ , então pela desigualdade triangular,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, dado  $\varepsilon > 0$ , se  $n, m \geq N$ ,  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ , ou seja,  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy.  $\square$

No entanto existem espaços contendo sequências de Cauchy, não convergentes. Por exemplo a sequência  $\frac{1}{n}$  é de Cauchy, mas não é convergente no intervalo  $(0, 1)$ .

**Teorema 1.24** *Seja  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy em  $X$ . Se existir uma subsequência de  $(x_n)$  que converge para  $p \in X$ , então  $\lim x_n = p$ .*

### Demonstração

Seja  $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots)$  uma sequência conforme o enunciado. Então, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um índice  $n_k$  tal que:

$$n_i \geq n_k \implies d(x_n, p) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por outro lado, sendo  $(x_n)_n$  sequência de Cauchy, existe  $s$  tal que:

$$m, n \geq s \implies d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomando  $t = \max\{n_k, s\}$ , existe  $n_j > t$  tal que

$$n \geq t \implies d(x_n, p) \leq d(x_n, x_{n_j}, p) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Logo,  $\lim x_n = p$ .

O espaço onde todas as sequências de Cauchy são convergentes, chama-se **espaço completo**. Estes espaços serão objetos de estudo a seguir.

**Definição 1.25** *Um espaço métrico  $X$  é dito **completo** se toda sequência de Cauchy em  $X$  converge para um ponto pertencente a  $X$ .*

A proposição abaixo, é um dos exemplos mais importantes de espaço métrico completo.

**Proposição 1.26** *A reta  $\mathbb{R}$  é um espaço métrico completo.*

### Demonstração

Seja  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy em  $\mathbb{R}$ . Tomando  $\delta = 1$ , existe  $r$  tal que:

$$m, n \geq r \implies d(x_m, x_n) = |x_m - x_n| < 1.$$

Em particular  $|x_m - x_n| < 1$ , para todo  $m \geq r$ , mas

$$|x_m| = |x_m - x_r + x_r| \leq |x_m - x_r| + |x_r|$$

e, portanto, para todo  $m \geq r$

$$|x_m| < 1 + |x_r|.$$

Seja  $\lambda = \max\{|x_1|, \dots, |x_r - 1|, 1 + |x_r|\}$ . Então para todo  $n$ ,

$$d(x_n, 0) = |x_n| < \lambda$$

Podemos concluir que para todo  $n \geq 1$ ,  $(x_n) \in B(0, \lambda)$ . Assim existe  $k > 0$  tal que  $|x_n| < k$ , para todo  $n \geq 1$ , logo para cada índice  $m$  existe

$$(y_m) = \inf\{x_m, x_{m+1}, \dots\}$$

Assim fica claro que,

$$y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n \leq \dots \leq k.$$

e portanto  $(y_m)$  é uma sequência convergente. Suponhamos que  $\lim y_n = p \in \mathbb{R}$ , vamos mostrar que  $(x_n)$  converge para  $p$ .

Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $s$  tal que:

$$n \geq s \implies |y_n - p| < \frac{\varepsilon}{3}$$

como  $(x_n)$  é de Cauchy, existe  $t$  de modo que:

$$m, n \geq t \implies |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Seja  $l > \max\{s, t\}$ . Levando em conta que  $y_l = \inf\{x_1, x_{l+1}, \dots\}$ , existe  $j \geq l$  para o qual,

$y_l \leq x_j \leq y_l + \frac{\varepsilon}{3}$  e portanto

$$|x_j - y_l| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Assim, para todo  $n > l$ , temos:

$$|x_n - p| \leq |x_n - x_j| + |x_j - y_l| + |y_l - p| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim x_n = p. \square$$

Em geral temos que  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^n$  são espaços métricos completos.

**Definição 1.27** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico,  $S \subseteq X$  e  $x \in X$ . Dizemos que  $x$  é um ponto aderente de  $S$ , se existe uma sequência  $x_n$  em  $S$  tal que  $x_n \rightarrow x$ .*

**Exemplo 1.28** *Sejam  $X = \mathbb{R}$ ,  $S = (0, 1]$ .  $0$  é um ponto de aderência de  $S$ , pois existe uma sequência*

$$\left(\frac{1}{n}\right)_n \text{ em } S / \left(\frac{1}{n}\right)_n \rightarrow 0.$$

Podemos observar que  $0 \notin S$ , e  $\frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}$  também são pontos aderentes de  $S$ .

O conjunto de todos os pontos aderentes de um conjunto  $S$  é chamado **aderência** de  $S$ , e é denotado por  $\overline{S}$ .

Ou seja,  $\overline{S} = \{x \in X | x \text{ é ponto aderente de } S\}$ .

**Exemplo 1.29**  $\overline{(0, 1]} = [0, 1]; \overline{[0, \infty)} = [0, \infty); \overline{(0, 1) \cup \{2\}} = [0, 1] \cup \{2\}$ .

Uma outra maneira de caracterizar ponto aderente a um conjunto é usando o conceito de **bola**, que é muito útil no contexto de espaços métricos.

**Definição 1.30** *Sejam  $a$  um ponto de um espaço métrico  $(X, d)$  e um número real  $r > 0$ . Chama-se **bola** de centro  $a$  e raio  $r$ , ao conjunto*

$$B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$$

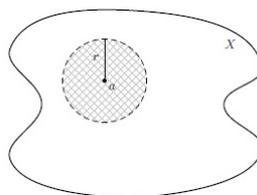


Figura 1.4: Bola de centro  $a$  e raio  $r$ .

**Definição 1.31** Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico e  $S \subseteq X$ . Dizemos que  $S$  é fechado se  $S = \overline{S}$  (conjunto de todos os pontos aderentes de  $S$ ).

**Exemplo 1.32** Observando o exemplo (1.29), podemos perceber que em  $(\mathbb{R}, d)$ ,  $[0, 1]$  e  $[0, \infty)$  são exemplos de conjuntos fechados, já  $(0, 1]$  e  $(0, 1) \cup \{2\}$  não são fechados.

Na família de conjuntos fechados de um espaço métrico, estamos interessados nos conjuntos compactos, que definimos a seguir.

**Definição 1.33** Um conjunto  $S \subseteq X$  é dito **compacto** quando toda sequência  $(x_n)$  em  $S$ , possuir subsequência que converge para um ponto de  $S$ .

**Exemplo 1.34** Se  $X = \mathbb{R}$ , temos  $S = [0, 1]$ ,  $S_1 = [0, 1)$  e  $S_2 = [0, \infty)$ . Então  $S$  é compacto, enquanto o conjunto  $S_1 = [0, 1)$  não é compacto, uma vez que, a sequência  $(\frac{n}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência em  $S_1$  e não admite subsequência convergente em  $S_1$  e  $S_2 = [0, \infty)$  também não é compacto, pois a sequência  $(x_n)$  não admite subsequências convergentes.

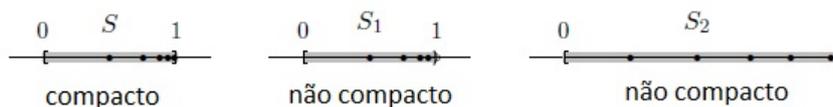


Figura 1.5: Exemplos de compacidade.

## 1.2 Contrações em espaços métricos

Intuitivamente uma contração é uma função de um espaço métrico em si mesmo, reduzindo distâncias.

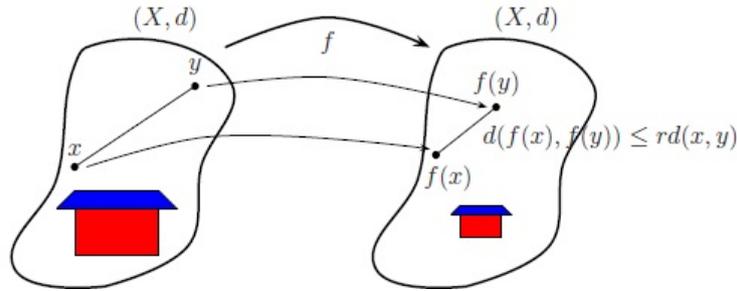


Figura 1.6: Noção de contração.

**Definição 1.35** Uma transformação em  $X$  é uma aplicação  $f : X \rightarrow X$ , para a qual, para cada ponto  $x \in X$  temos um ponto  $f(x) \in X$ .

$$\text{Se } K \subset X \text{ então } f(K) = \{f(x) : x \in K\}.$$

**Definição 1.36** (*Função de contração*). Uma transformação  $f : X \rightarrow X$  em  $X$  é uma **contração** se existe uma constante  $r \in \mathbb{R}$ , com  $0 \leq r < 1$  tal que,

$$d(f(x), f(y)) \leq r \cdot d(x, y), \forall x, y \in X.$$

a constante  $r$  chama-se *fator de contração* de  $f$ .

Uma contração tem infinitos fatores de contração e se  $r$  é fator de contração de  $f$ , então  $s$  também é, para todo  $s$ , tal que  $r < s < 1$ .

**Exemplo 1.37**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

$$d(f(x), f(y)) = \left| \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} - \left( \frac{1}{3}y + \frac{2}{3} \right) \right| = \frac{1}{3}|x - y| = \frac{1}{3}d(x, y).$$

$f$  é contração, com fator de contração  $\frac{1}{3}$ . Para qualquer  $r \in [\frac{1}{3}, 1)$  é também um fator de contração de  $f$ .

**Exemplo 1.38** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $f(z) = rze^{i\theta} + a + bi$ , onde  $r, a, b, \in \mathbb{R}$ , com  $0 \leq r < 1$ ,  $i$  é unidade imaginária e  $e$  a constante de Euler.

Recordemos que  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$  de onde  $\|e^{i\theta}\| = 1$ . Contudo,

$$\begin{aligned} \|f(z) - f(w)\| &= \|rze^{i\theta} + a + bi - rwe^{i\theta} - a - bi\| \\ &= r\|e^{i\theta}\| \cdot \|z - w\| = r\|z - w\|, \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|f(z) - f(w)\| = r\|z - w\|,$$

ou seja,

$$d(f(z), f(w)) = rd(z, w)$$

Logo,  $f$  é uma contração com fator de contração  $r$ .

**Proposição 1.39** Toda contração é contínua.

*Demonstração*

Sejam  $f : X \rightarrow X$  uma contração,  $a \in X$  e  $\varepsilon > 0$ . Devemos encontrar  $\delta > 0$  tal que:

$$d(x, a) < \delta \rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Dado que  $f$  é uma contração, existe  $r$ , com  $0 \leq r < 1$ , tal que  $d(f(x), f(y)) \leq rd(x, y)$ .

Se  $r = 0$  tender para  $d(f(x), f(y)) = 0, \forall x, y \in X$ , significa que  $f$  é uma função constante e portanto contínua.

Se  $r > 0$ , basta fazer  $\delta = \frac{\varepsilon}{r}$ , já que se  $d(x, a) < \delta = \frac{\varepsilon}{r}$ , então:

$$d(f(x), f(a)) \leq rd(x, a) < r\frac{\varepsilon}{r} = \varepsilon.$$

**Definição 1.40** Seja  $f : X \rightarrow X$ ; um ponto  $x_0 \in X$  é chamado **ponto fixo** de  $f$ , se  $f(x_0) = x_0$ .

**Exemplo 1.41** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$  tem como ponto fixo  $\frac{3}{2}$ , pois

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

Neste caso,  $\frac{3}{2}$  é ainda o **único** ponto fixo de  $f$ , já que é o único número real que satisfaz  $\frac{1}{3}x + 1 = x$ .

$$\frac{1}{3}x + 1 = x \implies \frac{2}{3}x = 1 \implies x = \frac{3}{2}.$$

Por outro lado, este único ponto fixo, também satisfaz uma propriedade especial, que veremos após a seguinte observação:

Se  $f : X \rightarrow X$  e  $x \in X$ , observamos então que os elementos  $f(x), f(f(x)), f(f(f(x)))$ , etc., estão bem definidos.

Denotemos  $f(f(x))$  por  $f^{\circ 2}(x)$ ,  $f(f(f(x)))$  por  $f^{\circ 3}(x)$  e assim sucessivamente. Podemos também definir como se segue:

$$\begin{cases} f^{\circ 1}(x) = f(x) \\ f^{\circ n}(x) = f(f^{\circ(n-1)}(x)), \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Desta maneira, para todo  $x \in X$  é definida a seguinte sequência:

$$x, f(x), f^{\circ 2}(x), \dots, f^{\circ n}(x), \dots$$

chamada **órbita** de  $x$ .

Voltando ao exemplo anterior e analisando a **órbita** para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{3}x + 1 \\
f^{\circ 2}(x) &= f\left(\frac{1}{3}x + 1\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x + 1\right) + 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2x + \frac{1}{3} + 1 \\
f^{\circ 3}(x) &= f\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2x + \frac{1}{3} + 1\right) = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2x + \frac{1}{3} + 1\right) + 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^3x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + 1 \\
&\vdots \\
f^{\circ n}(x) &= \left(\frac{1}{3}\right)^n x + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + 1.
\end{aligned}$$

Observe que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(\frac{1}{3}\right)^n x + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + 1 \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n x + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^i \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2},
\end{aligned}$$

Que é o ponto fixo de  $f$ .

Veremos que isso, não é uma coincidência pois é um caso particular do teorema seguinte, um dos mais importantes teoremas da geometria fractal: o **teorema do ponto fixo**, que garante a existência e unicidade de cada fractal obtido através de iteração de funções.

**Teorema 1.42** *Seja  $f : X \rightarrow X$  uma função de contração sobre um espaço métrico completo  $X$ . Então  $f$  possui um único ponto fixo  $x_f \in X$  e mais ainda, para algum ponto  $x \in X$ , a sequência  $\{f^{\circ n}(x); n = 0, 1, 2, \dots\}$  converge para  $x_f$ . Isto é,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x) = x_f, \text{ para cada } x \in X.$$

### Demonstração

Seja  $x \in X$  e  $0 \leq s < 1$  um fator de contração para  $f$ . Então,

$$d(f^{\circ n}(x), f^{\circ m}(x)) = s^{\min\{n,m\}} d(x, f^{|n-m|}(x)) \quad (1)$$

para todo  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ , com  $x \in X$  fixo. Para  $k = 0, 1, 2, \dots$ , temos,

$$\begin{aligned}
d(x, f^k(x)) &\leq d(x, f(x)) + d(f(x), f^2(x)) + \dots + d(f^{k-1}(x), f^k(x)) \\
&\leq (1 + s + s^2 + \dots + s^{k-1})d(x, f(x)) \\
&\leq (1 - s)^{-1}d(x, f(x)),
\end{aligned}$$

substituindo na equação (1), temos

$$d(f^{\circ n}(x), f^{\circ m}(x)) \leq s^{\min\{m, n\}} \cdot (1 - s)^{-1} \cdot (d(x, f(x))),$$

portanto  $(f^n(x))$  é uma sequência de Cauchy. Como  $X$  é completo esta sequência de Cauchy possui um limite  $x_f \in X$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x) = x_f$$

Agora mostremos que  $x_f$  é ponto fixo de  $f$ . Como  $f$  é uma contração ela é contínua, logo

$$f(x_f) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{\circ n+1}(x) = x_f.$$

Supondo que exista mais que um ponto fixo de  $f$ , sejam  $x_f$  e  $y_f$  dois pontos fixos de  $f$ , então,

$$x_f = f(x_f), y_f = f(y_f) \text{ e } d(x_f, y_f) = d(f(x_f), f(y_f)) \leq s d(x_f, y_f),$$

onde  $(1 - s)d(x_f, y_f) \leq 0$ , o que implica  $d(x_f, y_f) = 0$ .

# Capítulo 2

## Espaço de Hausdorff

Os estudos anteriores irão servir de base para a definição e conceituação do espaço de Hausdorff, que é o espaço onde se define a Geometria Fractal.

**Definição 2.1** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico completo. Denotamos por  $\mathcal{H}(X)$ , o espaço cujos pontos são os subconjuntos compactos não vazios de  $X$ .*

$$\mathcal{H}(X) = \{K \subseteq X / K \text{ é compacto e } K \neq \emptyset\}$$

É preciso definir agora em  $\mathcal{H}(X)$  uma métrica, para isto definiremos primeiro a distância de um elemento do espaço métrico  $X$  a um elemento de  $\mathcal{H}(X)$ .

**Definição 2.2** *A distância de um ponto  $a \in X$  a um conjunto compacto  $K \in \mathcal{H}(X)$ , é definida por*

$$\hat{d}(a, K) = \min\{d(a, x) | x \in K\}$$

Como  $K$  é um conjunto compacto e não-vazio, temos que:

$$\exists x \in K : \hat{d}(a, K) = d(a, x)$$

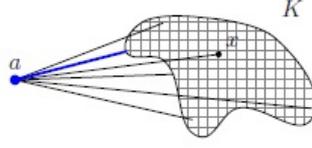


Figura 2.1:  $\hat{d}(a, K)$ .

**Observação 2.3** *O mínimo desta definição sempre existe.*

De fato, seja  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = d(a, x), \forall x \in K$ . Vejamos que  $f$  é contínua. Seja  $\varepsilon > 0$ . Observemos que:  $-d(x, y) \leq d(x, a) - d(y, a) \leq d(x, y)$ ; portanto,

$$|f(x) - f(y)| = |d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y).$$

Desta forma, basta tomar  $\delta \leq \varepsilon$  para ter a continuidade de  $f$ .

Consideremos agora o seguinte conjunto

$$S := \{d(a, x) \mid x \in K\} (= \{f(x) \mid x \in K\}).$$

Observe que  $S \subseteq \mathbb{R}$ ,  $S \neq \emptyset$  (pois  $K \neq \emptyset$ ) e  $S$  é limitado inferiormente; pois se  $\mathbb{R}$  é completo, existe  $P = \inf S$ . Como  $P$  é o maior limite inferior de  $S$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $y_n \in K$  talque  $f(y_n) < P + \frac{1}{n}$ , e se  $-\frac{1}{n} < 0 \leq f(y_n) - P < \frac{1}{n}$ ; portanto  $|f(y_n) - P| < \frac{1}{n}$ , resultando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = P.$$

Como  $K$  é compacto, existe  $(y_{k_n})_n$  subsequência de  $(y_n)_n$ , talque  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_{k_n}) = \hat{y}$ , com  $\hat{y} \in K$ . Se  $f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (y_{k_n})\right) = f(\hat{y})$  e  $f$  é contínua,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_{k_n}) = f(\hat{y})$ . Portanto  $(f(y_{k_n}))_n$  é uma subsequência de  $(f(y_n))_n$ , então  $P = f(\hat{y})$ , de modo que  $P$  é realmente mínimo de  $S$ .

**Definição 2.4** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico, a distância entre dois conjuntos  $A$  e  $B \in \mathcal{H}(X)$ , é dada por:*

$$\tilde{d}(A, B) = \max\{\hat{d}(a, B) \mid a \in A\} = \max\{\min\{d(a, b) \mid b \in B\} \mid a \in A\}$$

Normalmente por  $A$  e  $B$  serem compactos e não-vazios, temos que:

$$\exists x \in A \text{ e } y \in B : d(A, B) = d(x, y)$$

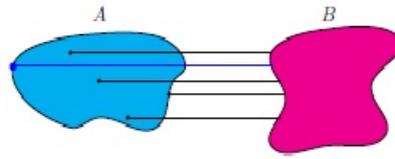


Figura 2.2:  $\tilde{d}(A, B)$ .

**Exemplo 2.5** Considere em  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$  os conjuntos:  $A = [0, 1] \times [0, 1]$  e  $B = [1, 7] \times [0, 8]$ .

Quando calculamos a distância obtemos

- $\tilde{d}([0, 1] \times [0, 1], [1, 7] \times [0, 8]) = 1$ .
- $\tilde{d}([1, 7] \times [0, 8], [0, 1] \times [0, 1]) = \sqrt{85}$ .

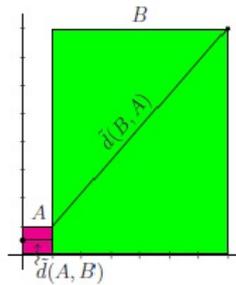


Figura 2.3:  $\tilde{d}(A, B) \neq \tilde{d}(B, A)$ .

Logo,  $\tilde{d}(A, B) \neq \tilde{d}(B, A)$ .

**Exemplo 2.6** Consideremos agora em  $(\mathbb{R}, d_u)$  os conjuntos:  $A = [0, 1]$  e  $B = [0, 2]$ .

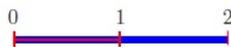


Figura 2.4:  $\tilde{d}(A, B) \neq \tilde{d}(B, A)$ .

Temos então  $\tilde{d}([0, 1], [0, 2]) = 0 \neq 1 = \tilde{d}([0, 2], [0, 1])$ .

**Observação 2.7** *O máximo da definição anterior sempre existe.*

Seja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \hat{d}(x, B), \forall x \in A$ . E como demonstramos anteriormente  $f(x)$  sempre existe. Vejamos que  $f$  é contínua. Seja  $\varepsilon > 0$ . teremos,

$$|f(x) - f(y)| = |\hat{d}(x, B) - \hat{d}(y, B)| = |d(x, b_1) - d(y, b_2)|$$

para algum  $b_1, b_2 \in B$ ; então temos

$$\begin{aligned}\hat{d}(x, B) &= d(x, b_1) \quad (= \min\{d(x, b) | b \in B\}) \\ \hat{d}(y, B) &= d(y, b_2) \quad (= \min\{d(y, b) | b \in B\}).\end{aligned}$$

Portanto

$$d(x, b_1) \leq d(x, b_2) \leq d(x, y) + d(y, b_2) \quad \text{e} \quad d(y, b_2) \leq d(y, b_1) \leq d(y, x) + d(x, b_1).$$

Das desigualdades anteriores obtemos

$$-d(x, y) \leq d(x, b_1) - d(y, b_2) \leq d(x, y).$$

assim,

$$|d(x, b_1) - d(y, b_2)| \leq d(x, y).$$

E para obter a continuidade de  $f$  basta então tomar  $0 < \delta \leq \varepsilon$ .

Consideremos agora o seguinte conjunto

$$S := \{\hat{d}(x, B) \mid x \in A\}.$$

$S \subseteq \mathbb{R}, S \neq \emptyset$  (pois  $A$  e  $B$  são vazios). Como  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e  $A$  é compacto, logo  $f(A)$  também é compacto. Note que  $F(A) = S$  é compacto e portanto limitado. Como  $\mathbb{R}$  é completo existe  $P = \sup S$ . Para verificar que  $P$  é máximo de  $S$ , vamos supor que para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $y_n \in A$  tal que  $P - \frac{1}{n} < f(y_n)$ , logo

$$-\frac{1}{n} < 0 \leq P - f(y_n) < \frac{1}{n},$$

onde  $|P - f(y_n)| < \frac{1}{n}$  e portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = P.$$

Como  $A$  é compacto e  $(y_n)_n$  é uma sequência em  $A$ , existe  $(y_{k_n})$  subsequência de  $(y_n)_n$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{k_n} = \hat{a}$  para algum  $\hat{a} \in A$ . Portanto  $f(\lim_{n \rightarrow \infty} y_{k_n} = (\hat{a}))$ , e como  $f$  é contínua,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{k_n} = (\hat{a})$ . Então  $P = f\hat{a}$ , de maneira que  $P$  é o máximo de  $S$ .

A partir da distância entre dois conjuntos, podemos definir uma **métrica**.

**Definição 2.8** *Sejam  $A, B \in \mathcal{H}(X)$ , definimos então a Métrica de Hausdorff denotada por  $h(A, B)$ , como*

$$h(A, B) = \max\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\}$$

Ou seja, o maior valor entre essas distâncias será a distância de Hausdorff entre os conjuntos  $A$  e  $B$ .

Para mostrar que  $h(A, B)$  é uma métrica para  $\mathcal{H}(X)$ , vamos verificar as duas propriedades de métrica.

Sejam  $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$ . Vamos supor quando necessário que  $\max\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A) = \tilde{d}(A, B)\}$  e sabemos que  $\tilde{d}(A, B) = d(a, b)$  para algum  $a \in A$  e  $b \in B$ , por serem  $A$  e  $B$  conjuntos compactos e não-vazios.

$$i) h(A, B) = 0 \iff A = B$$

Se  $A = B$  então:

$$h(A, B) = h(A, A) = \max\{\hat{d}(a, A), a \in A\} = \max\{\min\{d(a, a_1), \forall a, a_1 \in A\}\}$$

Como  $\min\{d(a, a_1) = 0\}$ , pois podemos ter  $a = a_1$  uma vez que ambos pertencem ao conjunto  $A$ . Então,

$$h(A, A) = 0$$

Por outro lado, se  $h(A, B) = 0$  então temos:

$$\max\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\} = 0 \implies \tilde{d}(A, B) = \tilde{d}(B, A) = 0$$

Logo  $A = B$ , quando a distância entre os dois conjuntos for igual a zero.

$$\text{ii) } h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B), \forall A, B, C \in \mathcal{H}(X)$$

Provemos primeiro que  $\tilde{d}(A, B) \leq \tilde{d}(A, C) + \tilde{d}(C, B)$ . Para algum  $a \in A$  temos que

$$\begin{aligned} \hat{d}(a, B) &= \min\{d(a, b) : b \in B\} \\ &\leq \min\{d(a, c) + d(c, b) : b \in B\} \forall c \in C \\ &= d(a, c) + \min\{d(c, b) : b \in B\} \forall c \in C, \text{ portanto} \\ \hat{d}(a, B) &\leq \min\{d(a, c) : c \in C\} + \max\{\min\{d(c, b) : b \in B\} : c \in C\} \\ &= \hat{d}(a, C) + \tilde{d}(C, B), \text{ logo} \\ \tilde{d}(A, B) &\leq \tilde{d}(A, C) + \tilde{d}(C, B). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \tilde{d}(B, A) &\leq \tilde{d}(B, C) + \tilde{d}(C, A), \text{ portanto} \\ h(A, B) &= \max\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\} \leq \max\{\tilde{d}(B, C), \tilde{d}(C, B)\} + \max\{\tilde{d}(A, C), \tilde{d}(C, A)\} \\ &= h(B, C) + h(A, C). \end{aligned}$$

Portanto  $h(A, B) = \max\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\}$  é uma métrica para  $\mathcal{H}(X)$ .

Assim dado um espaço métrico completo  $X$  podemos associar a este, um novo espaço métrico, com uma métrica induzida  $d$ , que será a métrica de Hausdorff, representada por  $(\mathcal{H}(X), h)$ .

A partir de agora vamos provar que  $\mathcal{H}(X)$  é completo.

**Definição 2.9** *Sejam  $S \subset X$  e  $\varepsilon \geq 0$ . Então:  $S + \varepsilon = \{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon \text{ para algum } x \in S\}$*

*O conjunto  $S + \varepsilon$  é chamado **dilatação** de  $S$  por uma bola de raio  $\varepsilon$ .*

**Lema 2.10** *Sejam  $A, B \in \mathcal{H}(X)$ , onde  $X$  é um espaço métrico e  $\varepsilon > 0$ , então*

$$h(A, B) \leq \varepsilon \Leftrightarrow A \subset B + \varepsilon \text{ e } B \subset A + \varepsilon.$$

### **Demonstração**

Primeiro mostraremos que  $d(A, B) \leq \varepsilon \Leftrightarrow A \subset B + \varepsilon$ .

Suponha  $\tilde{d}(A, B) \leq \varepsilon$ . Então  $\max\{\hat{d}(a, B) : a \in A\} \leq \varepsilon \Rightarrow \hat{d}(a, B) \leq \varepsilon, \forall a \in A$ .  
Então para cada  $a \in A$ , temos  $a \in B + \varepsilon$ , e portanto  $A \subset B + \varepsilon$ .

Suponha agora que  $A \subset B + \varepsilon$ .

Seja  $a \in A$ , e considere  $\tilde{d}(A, B) = \max\{\hat{d}(a, B) : a \in A\}$ .

Desde que,  $A \subset B + \varepsilon$ , par cada  $a \in A$  existe  $b \in B$  tal que,  $d(a, b) \leq \varepsilon, \forall a \in A$ .  
Então  $\hat{d}(a, B) \leq \varepsilon$ . Isso vale para todo  $a \in A$ . Logo,  $\tilde{d}(A, B) \leq \varepsilon$ .

Analogamente, teremos que  $\tilde{d}(B, A) \leq \varepsilon \Leftrightarrow B \subset A + \varepsilon$ , completando a demonstração.

Seja  $\{A_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ , uma sequência de Cauchy de conjuntos em  $(\mathcal{H}(X), h)$ .  
Isto é, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N$ , tal que  $n, m \geq N$ , implica

$$A_m \subset A_n + \varepsilon \text{ e } A_n \subset A_m + \varepsilon,$$

ou seja,  $h(A_n, A_m) \leq \varepsilon$ .

Como estamos interessados nas sequências de Cauchy em  $X$ , com propriedade  $\{x_n \in A_n, \forall n\}$ , precisamos estender a mesma para sua subsequência, ou seja, para  $\{x_{n_j} \in A_{n_j}\}$ , subsequência de  $\{x_n \in A_n\}$ , teremos que  $x_n \in A_{n_j}$ , para cada  $j$ . Por-

tanto segue o lema da Extensão.

**Lema 2.11** *Sejam  $X$  um espaço métrico,  $\{(A_n)_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$  uma seqüência de Cauchy em  $(\mathcal{H}(X), h)$  e  $(n_{n_j})$  uma subsequência infinita crescente de inteiros positivos.*

Supondo que  $\{x_{n_j} \in A_{n_j} : j = 1, 2, 3, \dots\}$  é uma seqüência de Cauchy em  $X$ . Então existe uma seqüência de Cauchy  $\{\tilde{x}_n \in A_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$  tal que,  $\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j}, \forall j = 1, 2, 3, \dots$

### Demostração

Vamos construir a seqüência  $\{\tilde{x}_n \in A_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ .

Para cada  $n \in \{1, 2, 3, \dots, n_1\}$ , faça  $\{\tilde{x}_n \in A_n : d(\tilde{x}_n, x_{n_1}) = d(x_{n_1}, A_n)\}$ . Isto é,  $\tilde{x}_n$  é o pontos mais próximo em  $A_n$  para  $x_{n_1}$ . A existência de tal ponto, é a garantida pela compaticidade de  $A_n$ . Em geral, para cada  $j \in \{2, 3, \dots\}$  e cada  $n \in \{n_{j+1}, \dots, n_j\}$ , faça  $\tilde{x}_n \in \{x \in A_n : d(x, x_{n_j}) = d(x_{n_j}, A_n)\}$ .

Agora vamos mostrar que  $(\tilde{x}_n)$  é uma extensão de  $(x_{n_j})$  para  $(A_n)$ .

Por construção temos que  $\tilde{x}_n = x_{n_j}$  e  $x_n \in A_n$ , para mostrar que  $(\tilde{x}_n)$  é uma seqüência de Cauchy, dado  $\varepsilon > 0$ , como  $(x_{n_j})$  é uma seqüência de Cauchy, por hipótese, existe  $N_1$  e  $N_2$  tais que

$$n_k, n_j \geq N_1 \Rightarrow d(x_{n_k}, x_{n_j}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$m, n \geq N_2 \Rightarrow d(A_m, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Seja  $N = \max\{N_1, N_2\}$  e note que, para  $m, n \geq N$ ,

$$d(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) \leq d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \tilde{x}_n),$$

onde  $m \in \{n_{j-1} + 1, n_{j-1} + 2, \dots, n_j\}$  e  $n \in \{n_{k-1} + 1, n_{k-1} + 2, \dots, n_k\}$ .

Como  $h(A_m, A_{n_j}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ , então existe  $y \in A_m \cap ((x_{n_j}) + \frac{\varepsilon}{3})$  tal que,  $d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ .

Analogamente,  $d(\tilde{x}_{n_k}, \tilde{x}_n) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ , portanto

$$d(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \forall m, n > N.$$

Portanto  $(\tilde{x}_n)$  é uma sequência de Cauchy.

**Teorema 2.12** *Seja  $X$  um espaço métrico completo. Então  $(\mathcal{H}(X), h)$  é um espaço métrico completo. Além disso, se  $(A_n)_n$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{H}(X)$ , então*

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{H}(X)$$

sendo que:

$A = \{ x \in X : \text{existe uma sequência de Cauchy } (x_n), \text{ que converge para } x_n \in A_n \}$ .

### Demonstração

Seja  $(A_n)$  uma sequência e Cauchy em  $\mathcal{H}(X)$  e  $A$  definido como no teorema. Dividiremos a demonstração em cinco etapas:

1.  $A \neq \emptyset$
2.  $A$  é fechado e portanto completo, já que  $X$  é completo.
3. Para  $\varepsilon > 0$ , existe  $N$  tal que, para  $n \geq N$ ,  $A \subset A_n + \varepsilon$
4.  $A$  é totalmente limitado e portanto, junto à (2), é compacto.
5.  $\lim A_n = A$ .

**Demonstração de (1).** Para provar (1), mostraremos que existe uma sequência de inteiros positivos  $N_1, < N_2 < N_3 < \dots < N_n < \dots$ , tal que

$$h(A_m, A_n) < \frac{1}{2^i}, \forall m, n > N_i \text{ e } i = 1, 2, 3, \dots, N$$

Para  $x_{N_i} \in A_{N_i}$ . Então como  $h(A_{N_1}, A_{N_2}) \leq \frac{1}{2}$ , podendo encontrar  $x_{N_2} \in A_{N_2}$  tal que,  $d(x_{N_1}, x_{N_2}) < \frac{1}{2}$ . Escolhendo uma sequência finita  $x_{N_i} \in A_{N_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$

para o qual  $d(x_{N_{i-1}}, x_{N_i}) \leq \frac{1}{2^{i-1}}$ .

Como  $h(A_{N_k}, A_{N_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}$ , e  $x_{N_k} \in A_{N_k}$ , podemos encontrar  $x_{N_{k+1}} \in A_{N_{k+1}}$  tal que,  $d(x_{N_k}, x_{N_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}$ .

Por exemplo, seja  $x_{N_{k+1}}$  o ponto em  $A_{N_{k+1}}$ , que é o mais próximo para  $x_{N_k}$ .

Por indução podemos encontrar uma sequência infinita  $\{x_{N_i} \in A_{N_i}\}$  tal que,  $d(x_{N_i}, x_{N_{i+1}}) \leq \frac{1}{2^i}$ .

Para ver que  $(x_{n_i})$  é uma sequência de Cauchy em  $X$ , seja  $\varepsilon > 0$  e escolha  $N_\varepsilon$  tal que,

$$\sum_{i=N_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$$

então, para  $m > n > N_\varepsilon$ , temos

$$d(x_{N_m}, x_{N_n}) \leq d(x_{N_m}, x_{N_{m+1}}) + d(x_{N_{m+1}}, x_{N_{m+2}}) + \dots + d(x_{N_{n+1}}, x_{N_n}) <$$

$\sum_{i=N_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$ , pelo lema da extensão, existe uma subsequência

convergente  $\{a_i \in A_i\}$  para o qual  $a_{N_i} = x_{N_i}$ .

Então,  $\lim a_i$  existe e por definição está em  $A$ . Portanto  $A \neq \emptyset$ .

**Demonstração de (2).** Para mostrar que  $A$  é fechado, suponha que  $\{a_i \in A\}$  seja uma sequência convergente para o ponto  $a$ . Fazendo  $A$  fechado, mostremos que  $a \in A$ . Para cada inteiro positivo  $i$ , existia uma sequência  $\{x_{i,n} \in A\}$  tal que, quando  $n \rightarrow \infty \Rightarrow \lim x_{i,n} = a_i$ . Então existe uma sequência crescente de números inteiros  $(N_i)$  tal que,  $d(a_{N_i}, a) < \frac{1}{i}$ .

Logo,  $d(x_{N_i, m_i}, a) \leq \frac{2}{i}$ .

Se fizermos  $y_{m_i} = x_{N_i, m_i}$ , veremos que  $y_{m_i} \in A_{m_i}$  e quando  $i \rightarrow \infty$  então  $\lim y_{m_i} = a$ . Pelo lema da extensão,  $(y_{m_i})$  pode ser estendida para uma sequência convergente

$\{z_i \in A_i\}$ , e assim  $a \in A$ . Portanto  $A$  é fechado.

**Demonstração de (3).** Seja  $\varepsilon > 0$ . Então existe uma  $N$  tal que, para

$$m, n \geq N, h(A_m, A_n) \leq \varepsilon.$$

Agora seja  $n \geq N$ . Então, se

$$m \geq N, A_m \subset A_n + \varepsilon.$$

Precisamos mostrar que  $A \subset A_n + \varepsilon$ . Para isso, seja  $a \in A$ . Existe uma sequência  $\{a_i \in A_i\}$  que converge para  $a$ . Podemos assumir  $N$  grande o bastante tal que,

$$m \geq N, d(a_m, a) < \varepsilon.$$

Então,  $a_m \in A_n + \varepsilon$ , já que  $A_m \subset A_n + \varepsilon$ . Como  $A_n$  é compacto, temos que  $A_n + \varepsilon$  é fechado. Então uma vez que  $a_m \in A_n + \varepsilon, \forall m \geq N$ ,  $a$  estará em  $A_n + \varepsilon$ . Logo, temos que  $A \subset A_n + \varepsilon$  para  $N$  grande o bastante.

**Demonstração (4).** Supondo que  $A$  não seja totalmente limitado. Então para algum  $\varepsilon > 0$  não existirá uma  $\varepsilon$  - rede finita.

Podemos então encontrar uma sequência  $(x_i)$  em  $A$  tal que,  $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$  para  $i \neq j$ . Mostraremos que isso é uma contradição.

Por (3) existirá um  $n$  grande o bastante tal que,  $A \subset A_n + \frac{\varepsilon}{3}$ . Para cada  $x_i$ , existe um correspondente  $y_i \in A_n$ , para qual

$$d(x_i, y_i) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Como  $A_n$  é compacto, alguma subsequência  $(y_{n_i})$  de  $(y_i)$  converge. Então podemos encontrar pontos nesta sequência tão próximos quanto quisermos. Em particular dois pontos  $y_{n_i}$  e  $y_{n_j}$  tais que,

$$d(y_{n_i}, y_{n_j}) \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

logo,

$$d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq d(y_{n_i}, y_{n_i}) + d(y_{n_i}, y_{n_j}) + d(y_{n_j}, y_{n_j}) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

e assim, temos uma contradição para a maneira em que  $(x_{n_i})$  foi escolhida.

Portanto  $A$  é totalmente limitado e, por (2), também é compacto.

**Demostração (5).** De (4),  $A \in \mathcal{H}(X)$ . Então de (3) e pelo lema 3.1.1, a prova que  $\lim A_i = A$  será completa se mostrarmos que, dado  $\varepsilon > 0$ , existirá um  $N$  tal que,  $n \geq N \Rightarrow A_n \subset A + \varepsilon$ .

Para mostrar isso, faremos  $\varepsilon > 0$  e encontraremos  $N$ , tal que, para  $m, n \geq N$ ,

$$h(A_m, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow A_m \subset A_n + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja  $n \geq N$ , mostremos que  $A_n \subset A + \varepsilon$ . Seja  $y \in A_n$ , então existe uma sequência crescente  $(N_i)$  de inteiros, tal que,  $n < N_1 < N_2 < \dots < N_n < \dots$ , e para

$$m, n \geq N_j, A_m \subset A_n + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}.$$

Note que,  $A_n \subset A_{N_1} + \frac{\varepsilon}{2}$ . Como  $y \in A_n$ , existe um ponto  $X_{N_2} \in A_{N_2}$  tal que,

$$d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \frac{\varepsilon}{2^2}$$

Da mesma forma, podemos usar a indução para encontrar uma sequência  $\{x_{N_1}, x_{N_2}, x_{N_3}, \dots\}$  tal que,  $x_{N_j} \in A_{N_j}$  e  $d(x_{N_j}, x_{N_{j+1}}) < \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$ . Usando a desigualdade triangular algumas vezes, mostramos que,

$$d(y, x_{N_j}) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall j,$$

e também que  $(x_{N_j})$  é uma sequência de Cauchy. Pela maneira que  $n$  foi escolhido, cada  $A_{N_j} \subset A_n + \frac{\varepsilon}{2}$ .

$(x_{N_j})$  converge para um ponto  $x$  e como  $A_n + \frac{\varepsilon}{2}$  é fechado,  $x \in A_n + \frac{\varepsilon}{2}$  também. mais ainda,  $d(y, x_{N_j}) \leq \varepsilon$  e o que implica  $d(x, y) \leq \varepsilon$ .

Então  $A_n \subset A + \varepsilon$  para  $n \geq N$ . Portanto,  $\lim A_n = A$  e conseqüentemente  $(\mathcal{H}(X), h)$  é um espaço métrico completo.

O resultado anterior junto com as contrações, proporcionam as ferramentas necessárias para construir fractais no seu espaço, que é o **espaço de Hausdorff**.

## 2.1 Contrações no Espaço de Hausdorff

Antes de definir um fractal, primeiro temos que falar das funções de contração no espaço de Hausdorff.

**Lema 2.13** *Seja  $w : X \rightarrow X$  uma função de contração num espaço métrico  $X$ , com fator de contração  $s$ . Então  $w : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ , definida por*

$$w(B) = \{w(x) : x \in B\}, \forall B \in \mathcal{H}(X)$$

é uma contração sobre  $(\mathcal{H}(X), h)$ , com o fator de contração  $s$ .

**Demonstração.** Pela proposição (1.41) temos que  $w$  é contínua e aplica  $\mathcal{H}(X)$  nele próprio.

Seja  $B, C \in \mathcal{H}(X)$ . Então

$$\begin{aligned} d(w(B), w(C)) &= \max\{\min\{d(w(x), w(y)) : y \in C\} : x \in B\} \\ &\leq \max\{\min\{s.d(x, y) : y \in C\} : x \in B\} = s.d(B, C). \end{aligned}$$

Analogamente,  $d(w(C), w(B)) \leq s.d(C, B)$ . Portanto

$$\begin{aligned} h(w(B), w(C)) &= \max\{d(w(B), w(C)), d(w(C), w(B))\} \\ &\leq \max\{s.d(B, C), s.d(C, B)\} \\ &\leq s.\max\{d(B, C), d(C, B)\} \\ &\leq s.h(B, C). \end{aligned}$$

**Lema 2.14** *Seja  $X$  um espaço métrico completo. Então para  $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$ , temos*

$$d(A, B \cup C) = \min\{d(A, B), d(A, C)\}$$

**Lema 2.15** *Para todo  $B, C, D, E \in \mathcal{H}(X)$ , temos*

$$h(B \cup C, D \cup E) \leq \max\{h(B, D), h(C, E)\}$$

onde  $h$  é a métrica de Hausdorff.

**Demonstração.** Usaremos o lema (2.10) para essa demonstração.

Primeiro vamos mostrar que  $d(B \cup C, D \cup E) \leq \max\{d(B, D), d(C, E)\}$ . De fato,

$$\begin{aligned}
 d(B \cup C, D \cup E) &= \max\{d(x, D \cup E) : x \in B \cup C\} \\
 &= \max\{\max\{d(x, D \cup E) : x \in B\}, \max\{d(x, D \cup E) : x \in C\}\} \\
 &= \max\{d(B, D \cup E), d(C, D \cup E)\} \\
 &= \max\{\min\{d(B, D), d(B, E)\}, \min\{d(C, D), d(C, E)\}\} \\
 &\leq \max\{d(B, D), d(C, E)\}.
 \end{aligned}$$

De modo análogo teremos

$$d(D \cup E, B \cup C) \leq \max\{d(D, B), d(E, C)\}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
 h(B \cup C, D \cup E) &= \max\{d(B \cup C, D \cup E), d(D \cup E, B \cup C)\} \\
 &\leq \max\{\max\{d(B, D), d(C, E)\}, \max\{d(D, B), d(E, C)\}\} \\
 &\leq \max\{\max\{d(B, D), d(D, B)\}, \max\{d(C, E), d(E, C)\}\} \\
 &\leq \max\{h(B, D), h(C, E)\}.
 \end{aligned}$$

Completando a demonstração.

**Lema 2.16** *Seja  $X$  um espaço métrico. Seja  $\{w_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ , contrações sobre  $(\mathcal{H}(X), h)$ , sendo o fator de contração de  $w_n$ , denotado por  $s_n$  para cada  $n$ . Defina  $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  por*

$$W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup \dots \cup w_N(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B)$$

*Então  $W$  é uma contração com o fator de contração  $s = \max\{s_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ .*

**Demonstração** Vamos demonstrar para  $N = 2$ . Um argumento indutivo completa a demonstração.

Seja  $B, C \in \mathcal{H}(X)$ . Temos

$$\begin{aligned} h(W(B), W(C)) &= h(w_1(B) \cup w_2(B), w_1(C) \cup w_2(C)) \\ &\leq \max\{h(w_1(B), w_1(C)), h(w_2(B), w_2(C))\} \text{ (Pelo Lema 3.2.6)} \\ &\leq \max\{s_1 h(B, C), s_2 h(B, C)\} \leq sh(B, C). \end{aligned}$$

## 2.2 Sistema de funções iteradas (SFI)

O meio mais usado na construção de fractais é o sistema de funções iteradas, que definimos a seguir.

**Definição 2.17** *Seja  $f : X \rightarrow X$  uma transformação em  $X$ . Chamamos de iteração sobre  $f$ , transformações da forma  $f^n : X \rightarrow X$  definidas por:*

$$f^0(x) = I, f^1(x) = f(x), f^2(x) = f \circ f(x), \dots, f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ vezes}}(x)$$

para  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Um **sistema de funções iteradas (SFI)** é uma estrutura da forma  $\{X; f_1, f_2, f_3, \dots, f_N\}$  onde  $X$  é um espaço métrico completo e cada  $f_i : X \rightarrow X, i = 1, 2, 3, \dots, N$ , são contrações em  $X$ .

O seguinte teorema garante a existência e unicidade do que chamaremos de atrator de SFI.

**Teorema 2.18** *Seja  $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$  um SFI, se define*

$$\begin{aligned} F : \mathcal{H}(X) &\longrightarrow \mathcal{H}(X) \\ K &\longmapsto F(K) =: \bigcup_{i=1}^N f_i(K); \end{aligned}$$

*então existe um único  $A \in \mathcal{H}(X)$ , tal que  $F(A) = A = \bigcup_{i=1}^N f_i(A)$ .*

E ainda mais, para qualquer  $K \in (\mathcal{H}(X), h)$  tem-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^{on}(K) = A.$$

$A$  é chamado atrator de um SFI.

**Demonstração.** Primeiramente note que  $F$  está bem definida e além disso é uma contração em  $\mathcal{H}(X)$ .

Por outro lado, sendo  $X$  um espaço métrico completo, temos que  $\mathcal{H}(X)$  também é completo, podendo então aplicar o teorema do ponto fixo a função

$$F : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X),$$

para concluir que existe um único  $A \in \mathcal{H}(X)$  tal que

$$\bigcup_{i=1}^N f_i(A) = F(A) = A. \quad (4.5)$$

E aplicando a segunda parte do teorema do ponto fixo, temos finalmente a segunda parte do teorema.

**Exemplo 2.19** Considere o SFI  $\{\mathbb{R}; f_1, f_2\}$ , onde:

$$f_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

neste caso  $F : \mathcal{H}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R})$  está bem definida por

$$F(K) := f_1(K) \cup f_2(K), \quad \forall K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}).$$

Como conjunto inicial tomemos o conjunto  $C_0 = [0, 1]$ . Então, fica claro que o atrator deste SFI, é o conjunto de Cantor  $\mathcal{C}$  e para provarmos isto, basta observar que  $(C_n)_n$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{H}(\mathbb{R})$  onde

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots \supseteq C_n \supseteq \dots$$

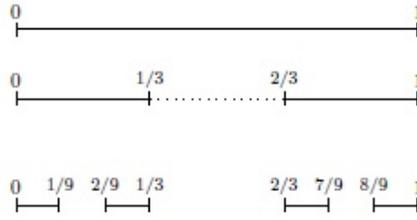


Figura 2.5: Construção do conjunto de Cantor

Então como  $X$  é completo e  $(C_n)_n$  é uma sequência de Cauchy, e supondo pelo teorema anterior, para obter

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \mathcal{C}$$

Analisando a expressão (4.5) e recordando que cada  $w_i$  é uma contração, de modo que cada  $w_i(A)$  poderia ser interpretada como uma cópia reduzida de  $A$ , então pela igualdade (4.5) poderia dizer também que o conjunto  $A$  é a união de um número finito de cópias reduzidas de si mesmo.

**Definição 2.20** *Um conjunto é autosimilar se é o atrator de um SFI.*

**Exemplo 2.21** *Consideremos um SFI  $\{\mathbb{R}^2; \frac{1}{2}z; \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}\}$ . Neste caso  $F : \mathcal{H}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$  é definida por*

$$F(K) := f_1(K) \cup f_2(K) \cup f_3(K), \quad \forall K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2),$$

sendo  $f_1(z) = \frac{1}{2}z$ ,  $f_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}$  e  $f_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$ .

**Exemplo 2.22** *Tomemos agora SFI  $\{[0, 1]; \frac{2}{3}x\}$ .*

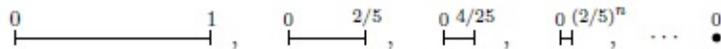


Figura 2.6: Construção do atrator do SFI  $\{[0, 1]; \frac{2}{3}x\}$

Seu atrator é  $A = 0$ . E de fato, pelo Teorema anterior, basta provar que  $A$  é um ponto fixo da contração  $F : \mathcal{H}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{H}([0, 1])$  definida por

$$F(K) = f_1(K), \quad \forall K \in \mathcal{H}([0, 1]), \quad f_1(x) = \frac{2}{3}x.$$

Tomemos

$$F(\{0\}) = f_1(\{0\}) = \{f_1(0)\} = \{0\}.$$

Com este exemplo podemos perceber que em qualquer SFI, temos somente uma contração.

## 2.3 SFI com condensação

É comum ver figuras como estas, quando pensamos em fractais

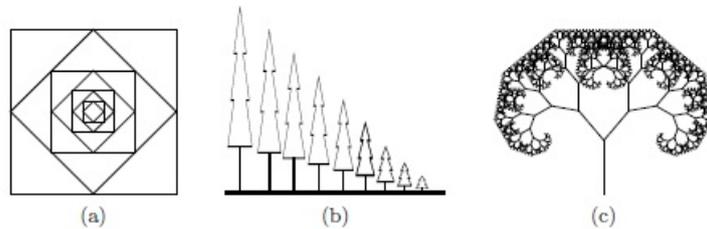


Figura 2.7: SFI com condensação

Intuitivamente sem usar uma lupa, dentro destas figuras observamos cópias reduzidas de si mesmo em qualquer parte do conjunto. Mas mesmo fazendo uso de uma, não seria possível afirmar que existem realmente cópias reduzidas. No entanto, é possível obter este tipo de figuras como atratores de algum sistemas de funções iteradas, que chamamos de SFI com condensação.

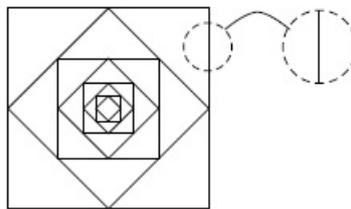


Figura 2.8: Figura(a) anterior usando a lupa.

**Definição 2.23** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico e  $C \in \mathcal{H}(X)$ . Definimos  $w_0 : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  por  $w_0(K) := C \vee K \in \mathcal{H}(X)$ . Dizemos então que,  $w_0$  é uma transformação de condensação, e  $C$  é o conjunto condensação associado.*

Observe que,  $w_0$  é uma função constante  $\mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ , portanto  $w_0$  é uma contração (com fator de contração zero), cujo ponto fixo é o conjunto de condensação  $C$ .

Agora, seja  $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N\}$  um SFI e  $w_0 : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ , uma transformação de condensação. Então  $\{X; w_0, w_1, w_2, \dots, w_N\}$  se chama SFI com condensação.

**Exemplo 2.24** *Seja  $\{\mathbb{R}^2; w_0, w_1, w_2\}$  onde*

$$w_0(K) := \{0\} \times [0, 1], \quad w_1(z) := \frac{1}{2}ze^{-i\frac{\pi}{4}} + i \text{ e } w_2 := \frac{1}{2}ze^{i\frac{\pi}{4}} + i.$$

Observe que a única diferença entre SFI e SFI com condensação é a presença de uma contração diferente no segundo caso, do outro SFI, enquanto  $w_0 : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  é o domínio e contradomínio de  $w_0$  é  $\mathcal{H}(X)$ , nas outras contrações o domínio e contradomínio é  $X$ . No entanto, o SFI com condensação pode trabalhar da mesma forma que os outros e gerar uma sequência convergente de compactos.

Agora vejamos como seria isto para o SFI com condensação no exemplo acima:

**Exemplo 2.25** *Para o SFI o exemplo (2.24), temos que  $W : \mathcal{H}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$  é dado por*

$$\begin{aligned} W(K) &:= w_0(K) \cup w_1(K) \cup w_2(K) \\ &= \{0\} \times [0, 1] \cup w_1(K) \cup w_2(K). \end{aligned}$$

Tomemos como conjunto inicial, o mesmo conjunto de condensação:  $K = \{0\} \times [0, 1]$ . A sequência  $K, W(K), W^{\circ 2}(K), W^{\circ 3}(K), \dots, W^{\circ n}(K), \dots$  seria aproximadamente a seguinte:

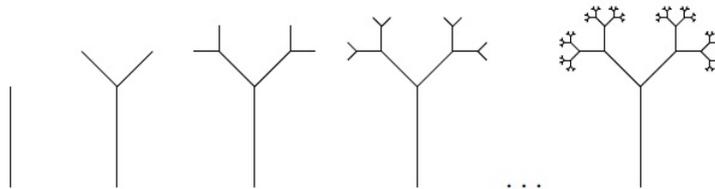


Figura 2.9: Construção de uma árvore fractal.

**Teorema 2.26** *Seja  $\{X; w_0, w_1, w_2, \dots, w_N\}$  um SFI com condensação. Então uma transformação  $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ , definida por*

$$W(K) =: \bigcup_{i=0}^N w_i(K), \quad K \in \mathcal{H}(X)$$

*tem um único ponto fixo, isto é, existe um único  $A \in \mathcal{H}(X)$  tal que*

$$W(A) = A = \bigcup_{i=0}^N w_i(A).$$

*E mais, para qualquer  $K \in \mathcal{H}(X)$  tem-se que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W^{on}(K) = A.$$

**Definição 2.27** *Seja  $\{X; w_0, w_1, w_2, \dots, w_N\}$  um SFI com condensação. O conjunto  $A$  do teorema anterior é chamado atrator do SFI com condensação.*

**Exemplo 2.28** *O atrator do SFI  $\{\mathbb{R}^2; w_0, w_1\}$  onde  $w_0$  é uma transformação de condensação definida por  $w_0(K) := \partial([0, 1] \times [0, 1])$ ,  $\forall K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$  e  $w_1(z) := \frac{\sqrt{2}}{2} z e^{i\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}$ , é o conjunto da figura abaixo*

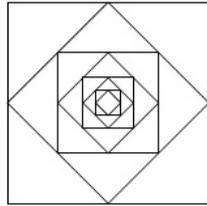


Figura 2.10: Atrator de um SFI com condensação.

**Definição 2.29** *Dados um SFI  $\{X; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ , com fator de contração  $s$ , e  $W$  uma função de contração em  $H(X)$ . Define-se **Fractal**, o ponto fixo  $A \in H(X)$  da função de contração  $\mathbf{W}$ , ou seja após infinitas iterações de uma função resulta-se um Fractal.*

# Capítulo 3

## Geometria Fractal

### 3.1 Introdução

O termo fractal foi empregado em 1975, por Benoît Mandelbrot quando sentiu necessidade de encontrar um nome para descrever a geometria que buscava representar as formas da natureza. Uma consulta a um dicionário de latim resultou no encontro do adjetivo fractus, do verbo frangere, que significa quebrar. Foi assim criada a palavra fractal. Caracterizam-se por repetir padrões infinitamente com várias e constantes variações. Partindo quase de charadas matemáticas, Mandelbrot começou a raciocinar mentalmente sobre situações naturais e começou seus estudos sobre o assunto, onde deparou com o problema antigo de Georg Cantor chamado Poeira de Cantor. Para fazer um conjunto de Cantor, começamos com um intervalo entre 0 e 1, representado por um segmento de reta. Eliminamos então o terço médio. Isto resulta em dois segmentos. Novamente retiramos o terço médio e assim sucessivamente. O resultado é uma estranha poeira de pontos, que obedece a um padrão não linear. Na época Mandelbrot trabalhava em ruídos que interferiam na transmissão de dados para os computadores da IBM. Ele pensava nos erros de transmissão como uma espécie de conjunto de Cantor disposto no tempo. No entanto ele logo entendeu que os padrões apresentados indicavam que os ruídos nas transmissões de dados jamais seriam explicados com base em acontecimentos locais específicos.

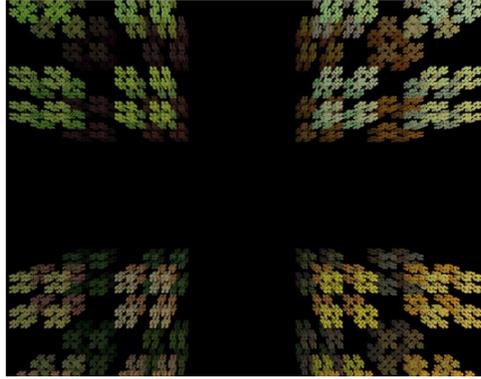


Figura 3.1: A poeira de Cantor em uma visão tridimensional.

Mandelbrot foi um dos primeiros a plotar um Fractal em computadores isso em 1975, apresentando o primeiro traçado detalhado do gráfico de um conjunto cujo parâmetro era um sistema dinâmico no campo complexo, esse conjunto é conhecido hoje como Conjunto de Mandelbrot, figura que vários cientistas consideram como o objeto mais complexo que a matemática já encarou. O conjunto de Mandelbrot é obtido quando submetemos os números complexos (números do tipo  $a + ib$ , em que,  $a$  e  $b$  são números reais e  $i$  é a constante imaginária) a um processo iterativo.

“Um objeto é dito fractal” se além da independência da escala, a dimensão Hausdorff for diferente da dimensão topológica ou dimensão do espaço em que o fractal está inserido, ou seja, diferente da dimensão de objetos Euclidianos como o ponto, a reta ou o plano, devem estar entre tais. Tecnicamente, um fractal é um objeto que apresenta invariância na sua forma à medida em que a escala, sob a qual o mesmo é analisado, é alterada, mantendo-se a sua estrutura idêntica à original.

## 3.2 Aspectos da Geometria Fractal

A geometria fractal estuda as propriedades e comportamentos de figuras mais complexas que a geometria euclidiana abrange, falha na descrição de formas encontradas na natureza. A geometria fractal, em destaque a dimensão fractal, tem utilização em varias áreas científicas, como no estudo dos sistemas caóticos, reconhecimento de padrões em imagens, tecnologia, ciências, artes e música, etc.

O fractal é uma estrutura geométrica ou física e geralmente são muito similares em diferentes níveis de escala, porém nos fractais naturais essa característica é limitada em função da escala. O objeto é composto por partes reduzidas com forma semelhantes à dele próprio.

Os fractais podem ser obtidos geometricamente ou aleatoriamente, através de processos recursivos, os quais podem apresentar características encontradas em formas da natureza e estão presentes em vários lugares. Existem muitos objetos naturais que são considerados fractais naturais, devido ao seu comportamento ou estrutura, mas estes são tipo de fractais finitos o que os distingue dos fractais de tipo matemático criado por interações recursivas.

Para discutir essa geometria é necessário fazer uma análise sobre os tipos de fractais que existem, bem como as características matemáticas que os definem.

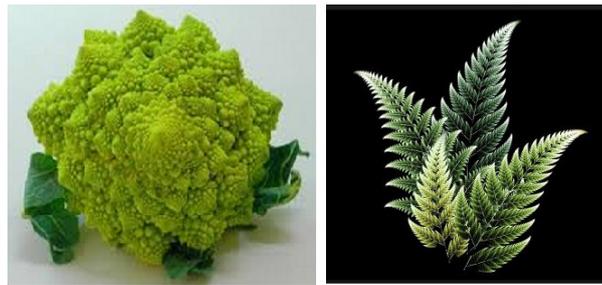


Figura 3.2: Exemplos de fractais: couve-flor e samambaia.

### 3.2.1 Classificação dos Fractais

Os fractais podem ser classificados em três categorias principais. Estas categorias podem ser determinadas pelo modo como o fractal é formado ou gerado, como mostramos a seguir.

**Sistema de funções iteradas:** Os fractais determinísticos, conhecidos como fractais geométricos, são subconjuntos gerados por transformações geométricas simples do próprio objeto nele mesmo, possuem uma regra fixa de substituição geométrica, aplicada a cada iteração como por exemplo, a curva de Peano, o floco de neve de Koch e a esponja de Menger, que estudaremos mais adiante. A curva de Peano é

um exemplo de fractal geométrico que preenche o plano. Uma curva que preenche o plano passa por todos os pontos de uma área, acabando por ocupá-la na totalidade.

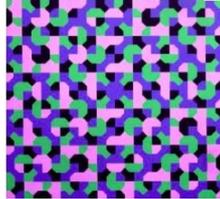


Figura 3.3: Curva de Peano.

**Fractais gerados por computadores:** Também são chamados de fractais de fuga, um exemplo típico é o conjunto de Mandelbrot, um dos fractais mais conhecidos, são gráficos de funções matemáticas definidoras de conjuntos que costumam operar com números imaginários e números complexos.

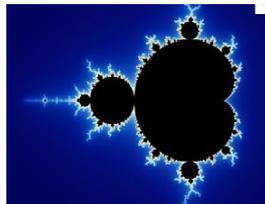


Figura 3.4: Conjunto de Mandelbrot.

**Fractais aleatórios:** São também chamados de fractais naturais, quando o todo é estatisticamente semelhante a uma ampliação de uma parte dizemos que o fractal é aleatório.

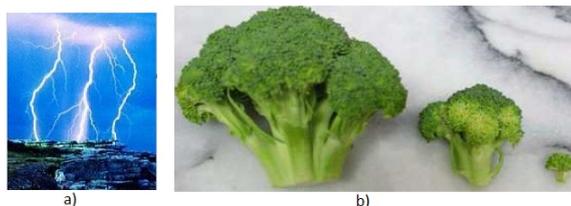


Figura 3.5: Exemplos de fractais aleatórios: relâmpago(a) e couve-flor(b).

### 3.2.2 Auto-similaridade ou Auto-semelhança Fractal

A auto-similaridade, consiste em obter réplicas menores de uma figura através de sua divisão (ou no caso dos fractais, de sua ampliação). Quando as réplicas são sempre idênticas e obtidas através do mesmo fator de redução, diz-se que a figura possui auto-similaridade estrita. Algumas figuras geométricas tradicionais, como um quadrado, por exemplo, também possui essa característica. É possível dividir um quadrado em certo número de réplicas menores dele mesmo.

Muitos objetos na natureza são auto-similares, chamados de **fractais determinísticos**, onde qualquer que seja a ampliação considerada, obteremos sucessivas cópias do objeto inicial.

Existem três tipos de auto-similaridade:

- Exata:** Réplicas perfeitas, onde o fractal é exatamente idêntico em diferentes escalas. Exemplo: Fractais gerados por sistemas de funções iteradas.

- Aproximada:** Réplicas quase-perfeitas, onde o fractal parece mas não é idêntico em escalas diferentes. Exemplo: Fractais gerados por computadores.

- Estatística:** É caracterizada estatisticamente, onde os elementos de uma certa parte da figura enquadram-se em uma certa modalidade da distribuição estatística, que são preservadas em diferentes escalas. Exemplo: Fractais aleatórios.

### 3.2.3 Dimensão Fractal

A dimensão fractal é uma medida do grau de irregularidade e de fragmentação e diferente da geometria euclidiana, não é uma quantidade inteira, pode ser uma fração simples, ou até mesmo um número irracional. A dimensão de um fractal representa o grau de ocupação deste no espaço e surge então como uma alternativa de medição, obtendo assim o grau de complexidade de uma forma.

Existem diversas formas de definir dimensão fractal, dimensão de capacidade, ou dimensão de Hausdorff, que discutiremos a seguir.

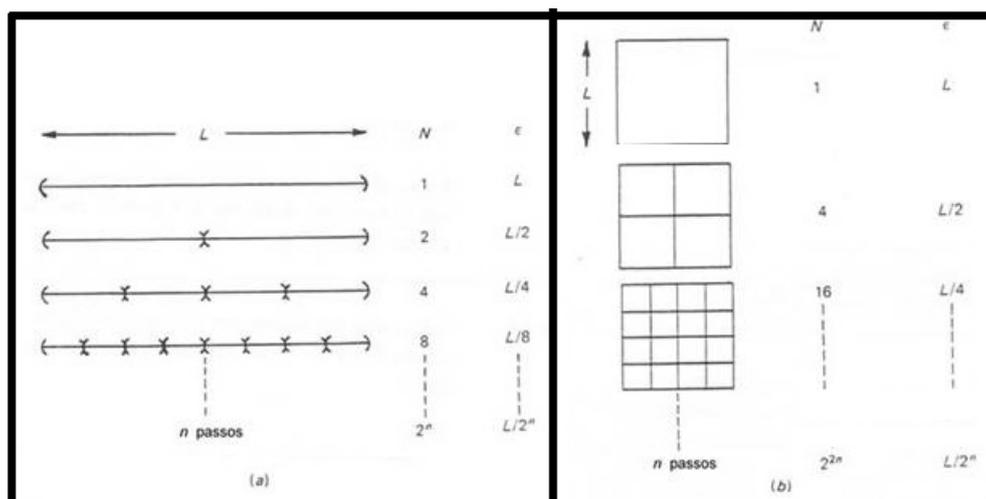


Figura 3.6: Aplicação do método das caixas para calcular a **dimensão de capacidade**.

Se uma linha de comprimento  $L$  for partida em segmentos iguais, de tamanho  $\epsilon$  como em (a) na figura acima, quanto maior o número de segmentos  $N(\epsilon)$ , menor será o tamanho de  $\epsilon$ , de tal forma que:

$$N(\epsilon) = L \left( \frac{1}{\epsilon} \right)$$

No caso de um quadrado de lado  $L$ , como na Figura (b), temos:

$$N(\epsilon) = L^2 \left( \frac{1}{\epsilon} \right)^2$$

Generalizando, teremos:

$$N(\epsilon) = L^d \left( \frac{1}{\epsilon} \right)^d$$

Tomando-se o logaritmo dessa expressão:

$$d = \frac{\log N(\epsilon)}{\log N(\epsilon) + \log \frac{1}{\epsilon}}$$

Considerando que o termo em  $L$  será desprezível para pequenos valores de  $\epsilon$ , a dimensão de capacidade pode ser definida pela expressão:

$$d_c = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \frac{1}{\epsilon}}$$

onde  $\epsilon$  é o tamanho da aresta (lado ou comprimento) da caixa e  $N(\epsilon)$  é o número de caixas preenchidas.

Um exemplo de dimensão fracionária menor que a unidade é o **Conjunto de Cantor** que aplicando-se a definição acima, temos  $N(\varepsilon) = 2^{\frac{1}{\varepsilon}}$  e  $\varepsilon = \frac{1}{2} : d_c = \frac{\log 2}{\log 3} \cong 0,63$ .

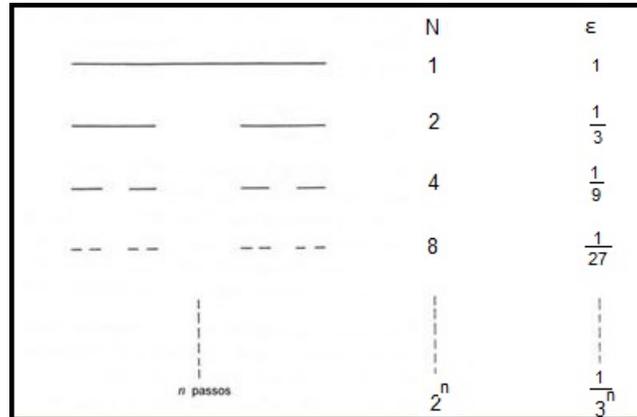


Figura 3.7: Dimensão do conjunto de Cantor.

Já para a Curva de Koch teremos uma dimensão um pouco maior, entre um e dois. Nesse caso  $N(\varepsilon) = 4^{\frac{1}{\varepsilon}}$  e  $\varepsilon = \frac{1}{3} : d_c = \frac{\log 4}{\log 3} \cong 1,26$ .

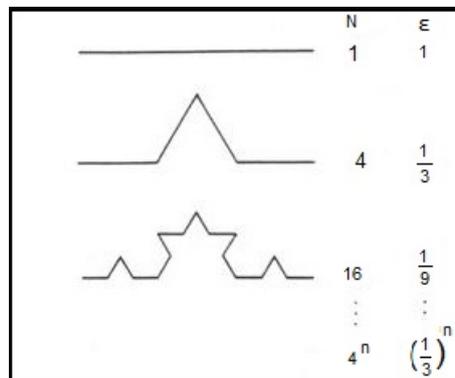


Figura 3.8: Dimensão da Curva de Koch.

### 3.3 Alguns fractais clássicos

#### 3.3.1 O conjunto de Cantor

Este conjunto foi desenvolvido pelo matemático Georg Cantor em 1883, para sua construção tomemos como ponto de partida o intervalo fechado  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ , obtido da seguinte forma:

Partindo do intervalo  $C_0 = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ , no qual é dividido em três partes iguais descartando-se o terço médio.



Figura 3.9: 1º passo para construção do conjunto de Cantor.

Ficando assim a união disjunta dos intervalos  $[0, \frac{1}{3}]$  e  $[\frac{2}{3}, 1]$  e cada intervalo com comprimento  $\frac{1}{3}$ .

Depois cada um dos dois intervalos é dividido novamente em três partes iguais desprezando o terço médio de cada um deles, ficando assim a união disjunta.

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

Cada intervalo com comprimento  $\frac{1}{9}$ .



Figura 3.10: 2º passo para construção do conjunto de Cantor.

Continuando o processo para os 4 intervalos restantes, são obtidos 8 intervalos de comprimento  $\frac{1}{27}$ .



Figura 3.11: 3º passo para construção do conjunto de Cantor.

Repete-se o processo indefinidamente. Na  $n$ -ésima etapa teremos obtido  $2^n$  intervalos fechados cada um de comprimento  $\frac{1}{3^n}$ . Note que o comprimento de  $C_n$ , é  $2^n \times \frac{1}{3^n}$

O conjunto de cantor é o **conjunto limite** deste processo.

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

Observação:

- 1)  $\mathcal{C}$  tem comprimento zero. Observe que  $\mathcal{C}$  tem comprimento menor do que o comprimento de qualquer  $C_n$ , já vimos que  $2^n \times \frac{1}{3^n}$ . Agora como  $\left(\frac{2^n}{3^n}\right) \rightarrow 0$  quando  $N \rightarrow \infty$ , temos que

$$Comp(\mathcal{C}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

- 2)  $\mathcal{C}$  não contém intervalos de forma  $(a, b)$ ,  $a < b$ .

Se existir  $(a, b) \subseteq \mathcal{C}$  se teria por contradição:

$$a < b - a = comp(a, b) \leq comp(\mathcal{C}) = 0$$

Pode-se dizer que o conjunto de cantor é um conjunto de uma espécie de pontos pulverizados, por esta razão é conhecido também como **poeira de cantor**, visto na introdução desse capítulo (figura 3.1).

- 3)  $\mathcal{C}$  é fechado, isto é,  $(\overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C})$ .

Lembremos que  $\mathcal{C}$  é definido por:  $C := \bigcap_{j=1}^{\infty} C_j$ , onde

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right],$$

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

$$C_j := \bigcup_{k=1}^{2^j} C_{jk}$$

Como cada  $C_j$  é fechado, já que é uma união finita de fechados. E sendo  $\mathcal{C}$  uma intersecção de fechados, temos que  $\mathcal{C}$  é fechado.

- 4)  $\mathcal{C}$  é limitado.
- 5)  $\mathcal{C}$  é compacto.
- 6)  $\mathcal{C}$  é completo.
- 7) Sua dimensão fractal é obtida lembrando do seu processo de geração. Como ele é gerado através da subdivisão de uma reta em 3 partes iguais, e cada iteração é igual a duas partes da próxima iteração. Vimos que precisamos de duas partes para reconstruir o todo e cada parte é igual a anterior dividida por 3.

### 3.3.2 A Curva de Koch

A curva de Koch foi apresentada pelo matemático sueco Helge Von Koch, em 1904 e é construída a partir de um segmento de reta, aplicando sucessivamente os seguintes passos:

- 1) Dividimos esse segmento em três partes iguais.
- 2) Substitua o segmento médio por dois segmentos iguais, de modo que, o segmento do meio e os dois novos segmentos formem um triângulo equilátero.
- 3) Obtendo uma linha poligonal com quatro segmentos de comprimento igual.
- 4) Posteriormente, repetem-se os passos 1 - 3 para cada um dos segmentos obtidos.

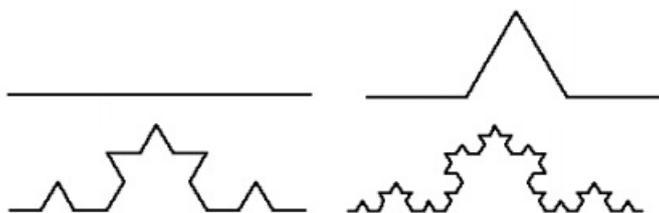


Figura 3.12: Diferentes níveis construção da curva de Koch.

Analisando o número de segmentos, comprimento destes e o comprimento total da curva em cada nível, podemos representar cada um desses itens através de uma função, onde a variável é o nível da construção.

Vamos provar que o comprimento total da curva ( $N_n$ ) em um nível  $n \geq 0$  é:

$$N_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Para  $n = 0$  temos:

$$N_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^0 = 1.$$

Considerando que no primeiro nível temos um segmento unitário. Para  $k \geq 0$ , vamos supor que o comprimento total ( $N_k$ ) da curva no nível  $k$  é:

$$N_k = \left(\frac{4}{3}\right)^k.$$

Sabemos que em cada nível um segmento é substituído por quatro segmentos reduzidos de  $\frac{1}{3}$ , neste nível a curva possui  $\frac{4}{3}$  do comprimento desta no nível anterior, então a cada nível multiplicamos o comprimento por  $\frac{4}{3}$ . Então

$$N_{k+1} = \frac{4}{3}N_k = \frac{4}{3} \left(\frac{4}{3}\right)^k = \left(\frac{4}{3}\right)^{k+1},$$

Temos o fractal quando  $n \rightarrow \infty$  ou seja, do resultado de infinitos níveis, podendo observar algumas propriedades:

1) O número o segmentos tende para o infinito:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n = \infty$$

2) O comprimento de cada segmento tende para zero:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L}{3^n} = 0$$

3) O comprimento total da curva tende para o infinito:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4L}{3}\right)^n = \infty$$

Portanto, apesar do comprimento de cada segmento tender para zero, o comprimento total da curva tende para o infinito e além disso,

- 4) É limitado, pois ocupa uma região limitada do espaço, com área finita.
- 5) É fechado, por ser uma interseção de conjuntos fechados.
- 6) É autosimilar, podemos dividi-la em 4 partes, cada uma delas é uma cópia fiel em escala  $1/3$  da figura original.
- 7) Já sabemos que em cada nível, um segmento dessa curva é substituído por  $\frac{1}{3}$ , portanto sua dimensão será dada por

$$D = \frac{\log N}{\log F} = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,26.$$

ou seja, a curva de Koch não é nem unidimensional nem bidimensional - ela está no meio do caminho.

Esta curva deu origem a um outro fractal, conhecido como **floco de neve** ou **ilha de von Koch**, que é construído a partir de um triângulo equilátero, contruindo a curva de von Koch em cada uma das três arestas desse triângulo.



Figura 3.13: As duas primeiras iterações da Ilha de Koch.

Observando seu perímetro e outras características desse fractal, verificamos que cada lado é formado a partir de uma curva de Koch, assim para obtê-lo basta multiplicar o comprimento da curva por três e logo veremos que seu perímetro será também infinito.

Para determinar a área delimitada por esta figura, vamos supor que o comprimento dos lados do triângulo equilátero gerador do floco de neve seja  $L$ .

Temos que a área de um triângulo equilátero qualquer de lado  $L$  é dado por:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2$$

Considerando o lado do triângulo inicial sendo unitário temos que a área inicial será de  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ . E a cada iteração, é inserido um triângulo em cada segmento que a

figura possui. Na tabela abaixo podemos verificar o número de triângulos inseridos a cada iteração:

Iteração	1	2	3	4	...	N
Nº de triângulos	3	12	48	192	...	$3 \times 4^{N-1}$

Assim na n-ésima iteração da construção do floco de neve são inseridos  $3 \times 4^{N-1}$  de lado  $\left(\frac{1}{3}\right)^N$ , logo a área de cada um desses novos triângulos será:

$$A_N = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1}{3^{2N}}$$

Esta área tende a zero quando N tende ao infinito. A área total da floco de neve de Koch é dada pela área do triângulo inicial adicionada das áreas individuais de cada triângulo inserido na figura após iteração, resultando assim:

$$A_T = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \sum_{N=1}^{\infty} 4^{N-1} A_N$$

Logo,

$$A_T = \frac{\sqrt{3}}{4} \left( 1 + \frac{3}{4} \sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^N \right) \quad (*)$$

Portanto,

$$S = \sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^N$$

Que corresponde a um somatório infinito de uma progressão geométrica de razão  $r = \frac{4}{9}$ , cujo o primeiro termo é  $a_1 = \frac{4}{9}$ , como  $|r| < 1$  temos que a soma é dada por,

$$\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{4}{5}$$

substituindo em (\*)

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \left( 1 + \frac{3}{5} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

Então podemos verificar que este Fractal possui área finita, o que é estranho, uma vez que a curva que delimita esta figura tem comprimento infinito.

### 3.3.3 O triângulo de Sierpinski

Waclaw Sierpinski, matemático polonês, em 1916 apresentou um dos famosos “monstros” em seu trabalho o **triângulo de Sierpinski**. Para sua construção seguimos os seguintes procedimentos:

- 1) Considere um triângulo equilátero e seu interior;
- 2) Marcar o ponto médio de cada segmento unindo-os, formando 4 triângulos equiláteros;
- 3) Eliminar o triângulo central;
- 4) Repetir a mesma construção em cada um dos triângulos não eliminados;
- 5) Repetir a operação 4 sucessivamente.

e a “última” figura é conhecida pelo nome de **triângulo de Sierpinski**.



Figura 3.14: As duas primeiras iterações do processo de construção do triângulo de Sierpinski.

Este processo é conhecido como Processo por remoção de triângulos. Inicialmente temos um triângulo, após a primeira iteração obtemos três triângulos, repetindo o processo teremos nove triângulos, e assim sucessivamente. Podemos demonstrar por indução que o número de triângulos  $T_N$  em uma determinada iteração  $N$  será:

$$T_N = 3^N.$$

Quando  $N$  cresce indefinidamente o número de triângulos tende a infinito. Ou seja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3^N = \infty.$$

Agora verifiquemos o que ocorre com o perímetro e a área desse triângulo. Consideremos que o lado do triângulo inicial é  $L$ , assim inicialmente temos que o perímetro é dado por  $C_0 = 3L$ . Na primeira iteração teremos que o perímetro de cada triângulo será  $C_1 = \frac{3L}{2}$ , na segunda teremos  $C_2 = \frac{3L}{4}$ , seguindo este raciocínio

concluimos que após  $N$  iterações o perímetro de cada triângulo contido na figura será:

$$C_N = \frac{3L}{2^N}$$

Como verificamos anteriormente o número de triângulos é dado por  $3^N$ , logo numa determinada iteração  $N$  o perímetro total será dado por:

$$C_T = 3 \frac{3^N}{2^N} L.$$

Quando  $N$  tende ao infinito o perímetro total vai para o infinito.

Denotando por  $A_0$  a área do primeiro triângulo, vamos determinar a área de cada um dos triângulos obtidos após as iterações. Na primeira iteração dividimos o triângulo inicial em quatro triângulos e retiramos o triângulo central, sendo assim, a área de cada triângulo será dada por  $A_1 = \frac{1}{4}A_0$ , na segunda iteração pelo mesmo raciocínio cada triângulo possuirá área igual a um quarto da área  $A_1$ , assim  $A_2 = \frac{1}{16}A_0$ , repetindo esse argumento podemos concluir que dada uma iteração  $N$  a área de cada triângulo será:

$$A_N = \frac{1}{4^N} A_0.$$

Com isso, a área total  $A_T$  obtida pela soma das áreas individuais dos  $3^N$  triângulos será:

$$A_T = \frac{1}{4^N} A_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^N A_0$$

como  $A_0$  é um valor finito fixo e  $\frac{3}{4} < 1$ , temos que se  $N$  tende ao infinito a área total tende a zero, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n A_0 = 0$$

Podemos observar então algumas propriedades desse fractal:

- 1) Tem área zero, conforme foi verificado acima.
- 2) Não contém conjuntos abertos.

Se existir  $D = B(a; r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < r^2\}$  tal que  $D \subseteq \mathcal{C}$  implicaria que  $a(D) \leq a(\mathcal{C})$ , isto é,  $0 < \pi r^2 \leq 0$  por contradição.

- 3) É fechado, isto é,  $(\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{S})$ .

Lembrando que na sua construção cada  $\mathcal{S}$  é fechado, portanto  $S := \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$  é fechado.

- 4) É completo, pois é fechado em  $\mathbb{R}^2$ , que é completo.
- 5) É limitado.
- 6) É compacto, pois é fechado e limitado.
- 7) Alicando a fórmula para calcular a dimensão vista anteriormente, temos  $N(\varepsilon) = 3$  e  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . Nesse caso  $n = 3$ , pois o número de triângulos é triplicado de um nível para o outro e o fator de semelhança entre eles é  $\frac{1}{2}$ , pois o comprimento do lado de cada triângulo é reduzido pela metade em cada nível, portanto:  $D = \frac{\log 3}{\log 2} \cong 1,58$ .

### 3.4 Explorando fractais na sala de aula

Na maioria das vezes ensinar matemática pelo método tradicional é inútil e desinteressante, visto que grande parte dos alunos tem muita dificuldade e apatia pelo conteúdo. Diante disso nos deparamos com a necessidade de abandonar o tradicionalismo e buscar novas metodologias e tecnologias para facilitar o processo de ensino aprendizagem dessa disciplina.

O conceito de fractal está presente em diversas áreas do conhecimento científico e participa de tecnologias indispensáveis na atualidade, sua abordagem além de proporcionar aulas dinâmicas e envolventes que atraem a atenção dos alunos pela sua beleza incrível, cores e luminosidade, estimula sua dimensão emocional, possibilita o desenvolvimento do raciocínio - lógico e sua integração entre conceitos matemáticos e elementos do cotidiano, tais como o uso de processos iterativos, escrever fórmulas gerais, criar algoritmos, calcular áreas e perímetros de figuras.

A inserção desse tema, ocorreu através de uma oficina “Descobrimo a Geometria Fractal”, realizada com os alunos do 2º ano do Ensino Médio, da E. E. Dr. Orestes Diniz, localizada em Betim/MG. A escola possui onze salas de aula equipadas, com todo material didático necessário (jogos, material concreto, vidraria, microscópio, vídeo, data show, etc) para atender diferentes disciplinas, além de uma biblioteca com grande acervo e um laboratório de informática completo, contendo trinta e três computadores em ótimo estado com internet e diversos softwares educativos.

Com o intuito de analisar e discutir os conceitos dessa nova geometria e sua aborda-

gem em sala de aula, esta oficina foi dividida em diversas etapas com diferentes tipos de atividades, algumas delas sendo uma adaptação das bibliografias (3),(5),(6),(7), (8) e (9), deste trabalho.

### **3.4.1 Atividade 01: Geometria Euclidiana e sua associação com objetos conhecidos**

Nesse primeiro momento com o recurso da tecnologia (Data Show), foi exibido uma apresentação em Power Point (editada), para os alunos em sala de aula, com uma breve descrição da geometria euclidiana; importância, biografia de Euclides, os cinco postulados, o uso de apenas a régua e compasso para suas demonstrações, áreas de polígonos e os poliedros regulares. Em seguida a turma foi dividida em grupos, cada um com diversas figuras e objetos presentes no nosso dia-a-dia, pedindo aos alunos para associar se possível suas formas geométricas com figuras planas e poliedros conhecidos da geometria euclidiana. Observando os comentários e reflexões dos grupos, foi feita algumas intervenções com perguntas como: Quem conhece essas figuras? Qual a relação destas figuras com a Matemática? Vocês encontraram alguma dificuldade em associar algumas figuras ou objetos com as formas geométricas já conhecidas? Por quê? Vocês já ouviram falar da Geometria Fractal?

O objetivo desta atividade foi fazer com que o aluno percebesse diversas formas geométricas existentes nos objetos do nosso dia a dia e diante da dificuldade de associar algumas dessas figuras introduzir a geometria fractal. As figuras apresentadas foram: tronco de uma árvore, o sol, uma casa, montanhas, nuvens, raios, couve-flor, samambaias.

### **3.4.2 Atividade 02: Vídeo sobre Geometria Fractal**

No sentido de introduzir os principais conceitos da Geometria Fractal, novamente com o Data Show, foi apresentado um vídeo aos alunos em sala de aula “Geometria Fractal - Arte e Matemática em formas naturais” de Andrios Bemfica e Cas-

siana Alves, disponibilizado no endereço: <https://www.youtube.com/results?search-query=geometria+fractal-arte+e+matemática+em+formas+naturais>, destacando os seguintes aspectos; conceito de fractal, sua nomenclatura, sua auto-semelhança e simetria, origem da geometria fractal, alguns fractais geométricos importantes; Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski, Pirâmide de Sierpinski, Esponja de Menger, Curva de Koch, Conjunto de Cantor, Curva de Peano, Árvore Pitagórica e fractais na natureza.

As atividades a seguir foram realizadas com os alunos, através da construção de alguns fractais; Triângulo de Sierpinski, Fractal Triminó, Curva de Koch e floco de neve de Koch

### 3.4.3 Atividade 03: Construindo Fractais

- Triângulo de Sierpinski

Para quebrar a rotina das aulas de matemática, e por acreditar que um trabalho diferente, motiva e envolve os alunos, práticas como o manuseio de instrumentos de medida (régua, compasso) em sala de aula, auxilia na abstração de determinados conteúdos e desenvolve sua criatividade. Então depois de apresentar alguns fractais importantes, foi proposto a turma uma atividade de construção desses fractais, usando papel quadriculado, régua e lapis de cor, de maneira que o próprio aluno descubra qual fractal foi construído. Os passos dessa atividade foram realizados conforme bibliografia (3) e (9) deste trabalho.

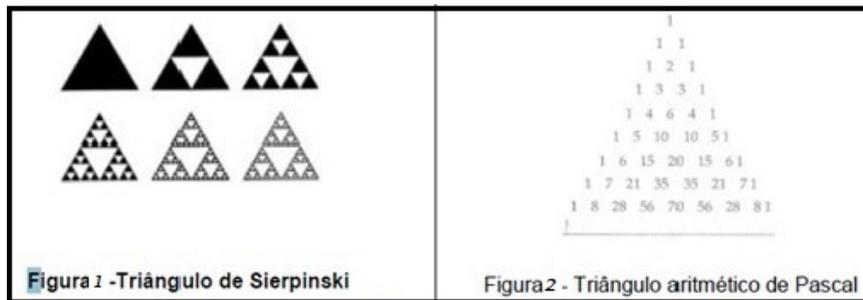
Passos:

- 1- Construa um triângulo equilátero.
- 2- Marque o ponto médio em cada um de seus lados.
- 3- Construa segmentos unindo esses pontos médios.
- 4- Quantos triângulos foi formado até agora?
- 5- Pinte os três triângulos (do exterior) de uma mesma cor e não pinte o triângulo central.
- 6- Para cada triângulo colorido, marque o ponto médio em cada um de seus lados e construa segmentos unindo esses pontos médios.

- 7- E agora, quantos triângulos você possui?
- 8- Qual o nome do fractal que você acabou de construir?
- 9- Qual é a fórmula para calcular a área de um triângulo equilátero?
- 10- A cada iteração um triângulo dá origem a quatro novos triângulos, então qual a fração que seria o fator multiplicador da área em cada novo triângulo?
- 11- Complete a tabela deduzindo a fórmula da área em cada interação.

Iteração	0	1	2	3	...	N
Nº de triângulos	1	3			...	$3^N$
Área de cada triângulo	$\frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$	$\frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$				$\frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$

Qual a relação do Triângulo de Sierpinski com o Triângulo de Pascal?



Para esta atividade foi necessário relembrar algumas propriedades do Triângulo de Pascal, sua formação, descoberta e propriedades, visto que esse conteúdo já havia sido explicado anteriormente, ressaltando alguns aspectos como:

- As diagonais de fora são formadas pelo número 1;
- A soma de dois números consecutivos de uma mesma linha do triângulo corresponde ao número que está na linha logo abaixo, bem abaixo dos dois números somados;
- A soma dos elementos de cada linha é uma potência de base 2 e não esquecendo que na segunda diagonal encontram-se os números naturais.

Mas o importante nesse caso é observar como estes dois triângulos estão intimamente ligados, apesar de aparentemente não parecer que se relacionam, pois um deles é um “amontoado” de números e o outro contém no seu interior um padrão geométrico.

Passos:

1. Construir o Triângulo de Pascal com pelo menos 8 ou 16 linhas.
2. Colorir em preto as casas correspondentes aos números ímpares.

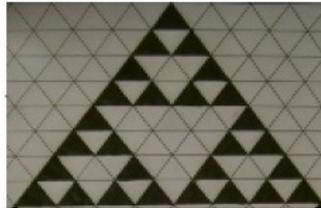


Figura 3.15: Triângulo de Sierpinski/Triângulo de Pascal.

Ao terminar de colorir, ficou claro para os alunos que o Triângulo de Pascal se transforma visivelmente no Triângulo de Sierpinski.

- Fractal Triminó

A utilização de material concreto tem um papel fundamental no processo de ensino aprendizagem, visto que, é uma ferramenta que auxilia na resolução de uma situação-problema, possibilita um aprender significativo, do qual o aluno participe raciocinando, compreendendo e tendo a oportunidade de assimilar o conteúdo de maneira mais leve e divertida. Portanto, nessa atividade utilizaremos o material dourado, contendo 250 peças de madeira, para construção do fractal Triminó.

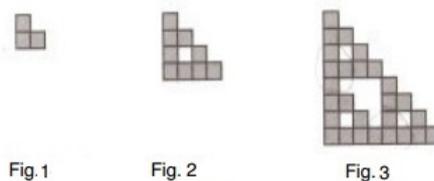


Figura 3.16: Níveis do Fractal Triminó.

Passos:

1. Considere o triminó não-reto, construído por 3 quadrados (Fig.1), que serão

fractal em nível 1.

2. O aluno deverá substituir cada peça quadrada por um triminó L (Fig.2), teremos assim o Fractal em nível 2.

3. Novamente o aluno deverá trocar cada quadrado por um triminó (Fig 3), obtendo assim o Fractal ao nível 3.

Observe que no Nível 1 foram usadas  $3^1 = 3$  peças: no nível 2:  $3 \times 3 = 9$  peças; no nível 3:  $3 \times 3^2 = 27$  peças.

Agora construa um Fractal Triminó ao nível 4 e responda:

- a) Quantas peças serão usadas?
- b) Para construir um Fractal Triminó ao nível 5, quantas peças serão necessárias?
- c) E para construir um Fractal Triminó ao nível n?
- d) Preencha a tabela abaixo, observando o número de peças em cada nível.

Nível	1	2	3	4	5	...	N
Nº de peças	$3 = 3^1$	$3 \times 3 = 3^2$					$3 \times 3^{N-1} = 3^N$

e) Agora você é capaz de descobrir que conteúdo de matemática está relacionado com esta atividade?

Analisando então as propriedades matemáticas envolvidas nesta construção, podemos dizer que o fractal triminó tem um fator multiplicador  $3^n$ . Após verificar a sequência numérica formada pelo número de quadrados em cada iteração  $\{3, 9, 27, \dots, 3^n\}$ . Esta seqüência determina uma progressão geométrica, onde o primeiro termo é  $a_1 = 3$ , a razão é dada por  $\frac{a_2}{a_1}$ , ou seja,  $q = \frac{9}{3} = 3$ , e termo geral é dado por  $a_n = a_1 \times q^{n-1}$ , então teremos  $a_n = 3 \times 3^{n-1}$ . Atividade direcionada conforme bibliografia (8) e (9) deste trabalho.

### 3.4.4 Atividade 04: Construindo Fractais com o software GeoGebra

Diante da importância do uso do computador no contexto escolar, a utilização desse recurso para construção de fractais, tem por objetivo despertar o interesse

dos alunos mostrando a beleza das imagens que se pode construir, visto que normalmente isso é impossível. Existem vários *softwares*, mas a opção pelo Geogebra foi por funcionar na plataforma Linux, presente no laboratório de informática da escola, além de ser gratuito. Seu uso possibilita a exploração de objetos geométricos e algébricos de forma interativa envolvendo conteúdos matemáticos nos diferentes níveis de ensino.

No primeiro momento, conduzi os alunos ao laboratório de informática e apresentei os passos operacionais de acesso ao *software* Geogebra, sua interface e suas ferramentas, para que pudessem conhecê-lo e explorá-lo.

Depois de já estarem familiarizados com o *software* deixei o tempo livre para desenvolver sua criatividade fazendo algumas construções geométricas relembrando conceitos já abordados.

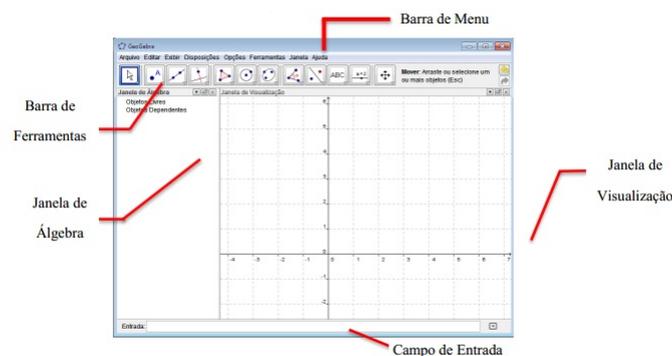


Figura 3.17: Janela principal do Geogebra.

- Construção da Curva de Koch

O processo de obtenção da curva de Koch é bem simples: primeiramente consideramos um segmento de reta e o dividimos em três partes iguais, retirando a parte central. Na parte central construímos um triângulo equilátero e retiramos a base. Em seguida repetimos este processo nos quatro segmentos restantes, e assim sucessivamente. Os passos para construção desses fractais foram baseados nas bibliografia (5),(6) e (7) deste trabalho.

**Passos para construção no GeoGebra:**

- 1- Abra o GeoGebra e na janela de visualização selecione a opção exibir ou esconder

eixos caso estejam visíveis.

2- Primeira iteração: Selecione a ferramenta 2.1(Novo ponto) e crie dois pontos, A e B. Em seguida selecionar a ferramenta 3.2(segmento definido por dois pontos) e unir estes pontos.

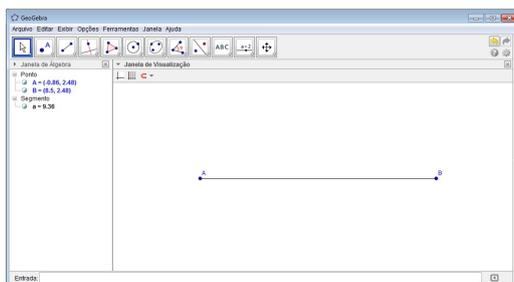


Figura 3.18: Nível 0 da Curva de Koch no Interface do Geogebra.

3- O próximo passo seria dividir esse segmento em três partes iguais. Mas para isso, num outro local da tela construa outro segmento de reta para ser nossa unidade de medida. Construir uma semirreta do ponto A de um tamanho qualquer. Selecione novamente a ferramenta 2.1 e crie dois pontos, C e D. Selecine a ferramenta 3.4 e construa uma semirreta do ponto A de um tamanho qualquer, obtendo assim um ponto E.

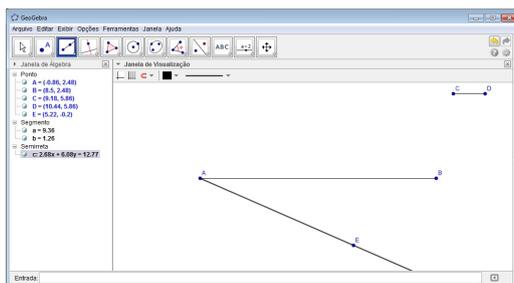


Figura 3.19: Sequência da construção da Curva de Koch.

4- Agora, marcar na semirreta três segmentos de mesmo tamanho utilizando a nossa unidade a partir do ponto A. Para isso, construir uma circunferência d centro em A e raio b, selecionando a ferramenta 6.1, originando a circunferência d; em seguida repete-se o processo, mas agora considerando F como centro e E o outro ponto, obtendo a circunferência d, em seguida selecione a ferramenta 2.4 marcando a

intersecção de dois objetos (circunferência e semirreta ponto F). Repetir o processo mais duas vezes centrado o círculo na intersecção. Marcar o ponto de intersecção da semirreta auxiliar com a última circunferência construída. Traçar o segmento de reta g unindo os pontos B e J.

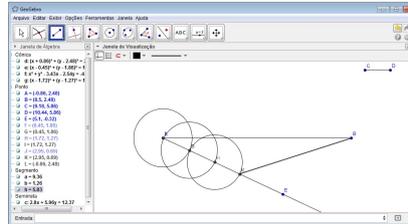


Figura 3.20: Continuação da construção da Curva de Koch.

5- Selecione a ferramenta 4.2 para traçar paralelas a g passando pelos pontos de intersecção F e H, encontrando o ponto de intersecção entre o segmento a e as paralelas que passam por F e H. Observe que dividimos o segmento A em três partes congruentes.

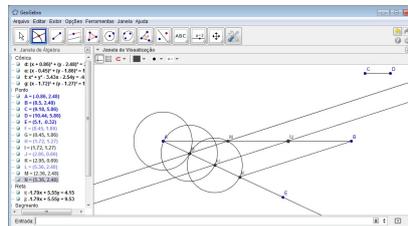


Figura 3.21: Processo de construção da Curva de Koch.

6- Esconda os objetos que aparecem durante a construção, basta clicar com o botão direito do **mouse** sobre o objeto e em exibir objeto e para esconder os nomes dos objetos, clicar em exibir rótulo.

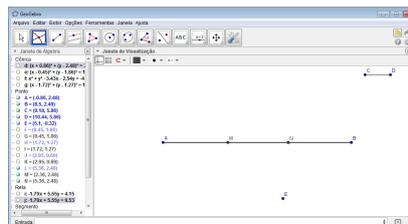


Figura 3.22: Intersecção das duas circunferências.

7- Para apagar a parte central teremos que esconder o segmento de reta  $a$  e construir dois segmentos de reta unindo os pontos  $AN$  e  $MB$ . Agora substitua a parte central por um triângulo equilátero sem um lado e, para isso, desenharemos um círculo de centro em  $N$  e outro de centro em  $M$  e raio  $bn$  ou  $m$ . Marcar o ponto de intersecção dessas duas circunferências.

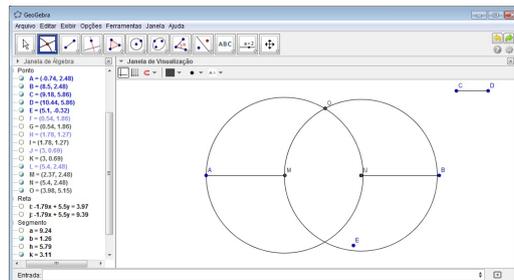


Figura 3.23: Imagem com as circunferências escondidas.

8- Desenhe o segmento de reta  $QN$  e  $QM$ , escondendo as circunferências e o ponto de intersecção  $QM$  obtendo assim a segunda iteração.

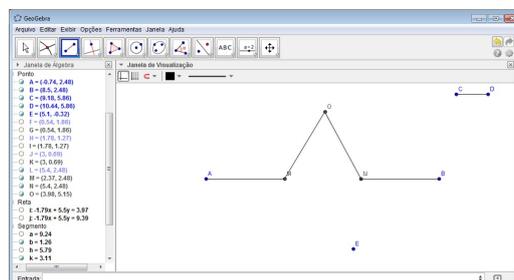


Figura 3.24: Nível 1 da Curva de Koch.

9- Para cada segmento, repetimos o mesmo processo realizado no segmento inicial, chamado iteração e assim obtemos a curva Koch. Mas isso seria muito trabalhoso. O GeoGebra permite a criação de uma ferramenta que reproduz a construção, o qual recebe o nome de macro construção. Para isso, ative a opção ferramentas criar nova ferramenta, abrindo uma janela com as abas:

- a) Saída de objetos: são os objetos para reproduzir e que dependem de outros. Para inseri-los na construção, basta clicar sobre esses objetos com o botão esquerdo do mouse.
- b) Objetos iniciais: são objetos que foram informados inicialmente dos quais depen-

dem toda a construção. No nosso exemplo, correspondem aos pontos A, B, C, D, e E. Esses objetos automaticamente aparecem em objetos iniciais.

c) Nome e ícone: é o nome dado ao novo ícone conforme desejado. Após a nomeação dessa ferramenta, clicar em concluído. Irá aparecer um novo ícone com a ferramenta construída. Para utilizá-la é preciso clicar no ícone com o nome dado e nos pontos A, M, C, D, E. Ao construir essa nova parte da Curva, teremos que esconder o segmento que une os pontos AM, para eliminar o segmento central. Repete-se o mesmo processo, mas agora com os segmentos M, O, C, D, E, depois O, N, C, D, E e N, B, C, D, E. Fazendo assim quantas iterações desejarmos.

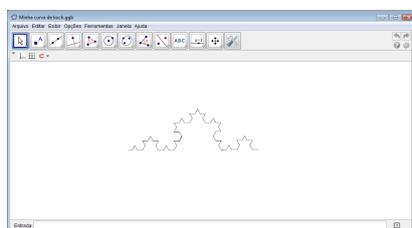


Figura 3.25: Curva de Koch concluída após três iterações.

Após esta construção, para fazer uma análise do número de segmentos, comprimento destes e perímetro da curva em cada nível, foi distribuído aos alunos uma tabela para registro de cada passo, indicando como  $c$  o comprimento do lado do triângulo equilátero inicial e ressaltando que no segundo momento da atividade o segmento foi dividido em 3 partes iguais ficando assim com 4 segmentos, então cada comprimento tem  $\frac{1}{3}$  de  $c$ , ou seja  $\frac{1}{3}c$ .

A partir de então, eles conseguem preencher a tabela abaixo:

Níveis (Iterações)	0	1ª	2ª	3ª	4ª	...	n-ésima
Nº de segmentos	1	$4^1 = 4$					$4^n$
Comprimento do segmento	$c$	$\frac{1}{3}c$					
Comprimento da curva	$1c$	$4^1 \left(\frac{1}{3}\right)c$					$4^n \left(\frac{1}{3}\right)^n c$

Figura 3.26: Quantidade de segmentos, comprimento do segmento e comprimento total em cada iteração.

Depois da tabela totalmente preenchida podemos observar que:

- Em cada linha verifica-se o aumento do número de segmentos e a redução do comprimento dos mesmos, conforme o nível em questão.
- Considerando que o comprimento para um dado nível é  $\frac{4}{3}$  do nível anterior, ou seja, de um nível para outro o comprimento é multiplicado pelo fator  $\frac{4}{3} > 1$ .
- Portanto, o comprimento aumenta de um nível para outro, e cresce indefinidamente tendendo a infinito quando o nível de construção tende a infinito.

- Construção do floco de neve ou Ilha de Koch

Com o objetivo de estabelecer relações com a Curva de Koch construída anteriormente, retomamos os conceitos similares para identificar a regra utilizada na construção desse fractal. Mostramos a seguir os passos necessários para sua construção.

1- Selecciona a ferramenta 5.2 e construa um triângulo equilátero ABC.

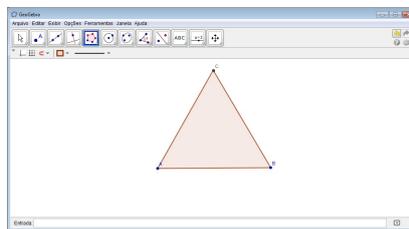


Figura 3.27: Ponto de partida para a construção da Ilha de Koch.

2- Com a mesma ferramenta construída anteriormente para a Curva de Koch, realizar a primeira iteração, ocultando os pontos e nomes dos segmentos, clicando com o botão do direito do *mouse* na opção EXIBIR OBJETO e EXIBIR RÓTULO.

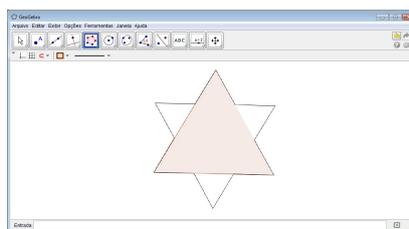


Figura 3.28: Ilha de Koch com objetos ocultos.

3- Desse modo, segue-se realizando quantas iterações desejar.

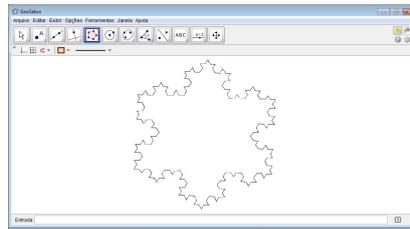


Figura 3.29: Fractal Floco de Neve construído após três iterações.

Após esta construção, foram feitas as seguintes perguntas:

- Quando dividimos cada lado do triângulo inicial em 3 partes quantos segmentos resultaram?
- Qual seria o fator de aumento?
- O processo para construção do Floco de Neve é o mesmo da Curva de Koch?
- Considerando o comprimento do lado inicial do triângulo como  $c$ , como podemos expressar o perímetro neste nível?
- O que mudaria na tabela anterior (Curva de Koch) no cálculo do perímetro?
- Refaça novamente a tabela usando as respostas das questões acima, lembrando que o processo é o mesmo só que multiplicado por três, pois iniciamos com o triângulo equilátero.

Níveis (Iterações)	0	1 <sup>a</sup>	2 <sup>a</sup>	3 <sup>a</sup>	4 <sup>a</sup>	...	n-ésima
Nº de segmentos	1	$4^1 = 4$				...	$4^n$
Comprimento do segmento	$c$					...	
Perímetro						...	

Figura 3.30: Quantidade de segmentos, comprimento e perímetro em cada iteração.

Podemos fazer então as seguintes observações:

- Se o processo for efetuado  $n$  vezes o comprimento de cada segmento tende a zero e o comprimento total da curva tende para o infinito.
- Analisar o Floco de Neve possibilita ao aluno determinar o perímetro da sua curva e a área delimitada por ela, permitindo a possibilidade de iniciar o processo com outros polígonos convexos.

- Seu perímetro tem seu número de segmentos multiplicado por  $4^n$  a cada nível de construção, desta forma, o perímetro do Floco de Neve e o comprimento da Curva de Koch crescem tendendo ao infinito conforme o nível de construção  $n$  aumenta.

### 3.4.5 Atividade 05: Logaritmos e perímetros

Para essa atividade foi necessário relembrar o conteúdo de *Logaritmos*, visto que o mesmo já havia sido explicado anteriormente, fazendo um breve revisão das principais propriedades; produto do logaritmo, quociente do logaritmo, potência do logaritmo e outras. Feito isto, dei sequência a atividade propondo aos alunos o seguinte desafio:

*Utilizando a  $n$ -ésima iteração do perímetro do Floco de Neve e as propriedades operatórias de logaritmo, considere que seu comprimento inicial seja,  $c = 1m$ , quantas iterações teriam que ser realizadas para que o perímetro seja igual a 60 metros?*

Fazendo  $c = 1m$  na fórmula e igualando a 60 metros de perímetro,

$$3\left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot c = 60 \implies \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot 1 = 20$$

aplicando logaritmo em ambos os lados temos,

$$\log\frac{4^n}{3} = \log 20$$

aplicando a propriedade de potência do logaritmo e usando a fatoração,

$$n \cdot \log\frac{4}{3} = \log(2^2 \cdot 5)$$

aplicando a propriedade do quociente e produto do logaritmo,

$$n \cdot (\log 4 - \log 3) = \log 2^2 + \log 5$$

isolando  $n$ , encontramos

$$n = \frac{2 \cdot \log 2 + \log 5}{2 \cdot \log 2 - \log 3}$$

Considerando  $\log 2 = 0,301$ ;  $\log 3 = 0,477$  e  $\log 5 = 0,699$ , teremos

$$n = \frac{2.0,301 + 0,699}{2.0,301 - 0,477} \implies n = \frac{1,301}{0,125} \implies n = 10,4$$

Portanto seriam necessárias aproximadamente 10 iterações, para um perímetro de 60 metros.

### 3.5 Resultados Obtidos com a aplicação das atividades

Ao iniciar a primeira atividade, em cada figura apresentada, os alunos relatavam oralmente qual figura geométrica poderia ser utilizada para representá-la. Nas três primeiras figuras apresentadas, os alunos responderam sem dificuldades, no entanto, as demais geraram uma discussão, pois alguns diziam que uma montanha poderia ser uma pirâmide, outros um cone, a couve-flor poderia ser uma esfera. Nesse momento introduzi o conceito de fractal, explicando que a geometria fractal surgiu da dificuldade que os matemáticos tinham, desde a antiguidade, de representar elementos irregulares da natureza.

Na segunda atividade, fica nítido o interesse dos alunos pelo aspecto visual, a beleza presente nas figuras fractais despertou interesse e os motivou a empenharem-se na realização das atividades propostas.

Na terceira atividade, fica claro para os alunos a importância de ter aprendido alguns conceitos; triângulos equiláteros, ponto médio de um segmento, potenciação e área, pois são muito utilizados nessa hora. Durante a construção do triângulo de Sierpinski os alunos conseguem perceber nitidamente o que acontece, a medida que as iterações são realizadas, esse processo se repete várias vezes, sendo que, em cada interação temos triângulos cada vez menores. Durante o preenchimento da tabela surgiram algumas dúvidas sobre frações e fatoração, mas foram sanadas. Quando os alunos tentavam descobrir a relação entre os dois triângulos, alguns apresentaram dificuldade em cálculos, mas mesmo assim neste momento mostraram-se criativos, e entusiasmados com a atividade realizada. O grupo que construiu o Triângulo de Pascal, e pintou os números múltiplos de 2, chegou a conclusão que quando se soma

dois números ímpares ou dois números pares o resultado sempre é um número par. Na quarta atividade, a construção do fractal triminó, através do material concreto, possibilitou aos alunos, desenvolver passo a passo, conteúdos como potenciação, frações e alguns conceitos de P.G., tais como sua lei de formação, razão e etc e perceberam que os conhecimentos algébricos, nesse caso, facilitou o aprendizado, visto que não foram exercícios mecânicos. Era perceptível como os alunos faziam uso da álgebra de maneira natural, visto que a grande maioria compreendiam seu significado. Porém, outros alunos apresentaram certa dificuldade em relacionar cada nível com a potenciação.

Com relação a utilização do software Geogebra, percebeu-se que o mesmo facilitou o entendimento das características dos fractais, além de servir como elemento motivador para os alunos, ofereceu condições para que manipulassem os diferentes componentes das figuras construídas permitindo a exploração e de conceitos geométricos e algébricos; perímetro, potenciação, frações e logaritmos. Ficou claro a dificuldade de um grupo de alunos, em relação as propriedades operatórias dos logaritmos, mas foi feita uma revisão para facilitar o processo. Além disso, após a construção geométrica é possível fazer uma análise algébrica do número de segmentos, comprimento de cada segmento, comprimento total da curva. A precisão das medidas no decorrer das iterações foi outra das contribuições obtidas com o software. Manualmente, com uso de recursos convencionais como régua e compasso, fazer certas medições em intervalos de espaço muito pequenos é uma tarefa que requer muita habilidade. Assim, o ambiente computacional proporcionou exatidão aos traçados economizando tempo.

A exploração dessa nova geometria encantou e desafiou os alunos possibilitando estabelecer relações entre o referido conteúdo e os elementos da natureza que os rodeiam. Dessa maneira, conclui-se que o uso de atividades diversificadas, no ensino de Geometria quando aliado a uma metodologia adequada, possibilita a participação ativa dos alunos à aprendizagem, como verificado nos relatos dos alunos.

# Referências Bibliográficas

- [1] SABOGAL S.; ARENAS G., Introducción a la geometría fractal. Escuela de Matemáticas Universidad Industrial de Santander Bucaramanga, 2011.
- [2] SILVA R.S., Fractais Geométricos. Trabalho. Universidade Federal de Alfenas. Alfenas.MG. 2010.
- [3] BARBOSA. R. M., Descobrimo a geometria fractal para a sala de aula. 2ª ed. Autêntica. Belo Horizonte. MG. 2005.
- [4] FERNANDES, J. A., Fractais: Uma nova visão da Matemática. Monografia. Centro Universitário de Lavras - UNILAVRAS, Lavras. MG. 2007.
- [5] FACCIO T. A.; DULLIUS M. M., CONSTRUÇÃO DE FRACTAIS COM USO DO SOFTWARE GEOGEBRA. Disponível: <https://www.univates.br/ppgece/media/pdf/Construcao-de-fractais-com-uso-do-software-geogebra.pdf>. Acesso em 17/10/2013.
- [6] FUZZO R. A.; SANTOS T. S.; FERREIRA L., Fractais e o Geogebra: Construindo a curva de Koch. XIII Conferência Interamericana da Educação. 26-30 junho. Recife. 2011. Disponível: <https://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiiw>. Acesso em 03/10/2012.
- [7] BEMFICA A.; ALVES C., Fractais: progressão e série geométrica Uma metodologia de ensino. FACO. 2010.
- [8] VALIM J. C.; COLUCCI V., Geometria Fractal No Ensino Fundamental e Médio. XXII SEMANA ACADÊMICA DA MATEMÁTICA. Dis-

ponível:projetos.unioeste.br/cursos/cascavel/matematica/xxiisam/artigos/13.pdf.  
Acesso em 03/10/2012.

[9] VEJAN M. P.; FRANCO V. S., GEOMETRIA NÃO-EUCLIDIANA / GEOMETRIA DOS FRACTAIS. Disponível: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2207-8.pdf>. Acesso em 22/05/2013.

[10] AURICHI L. F., Espaços Métricos. Monografia. Universidade de São Paulo. 2010.

[11] Revista Brasileira de Ensino de Física. v. 30, n. 2, 2304 (2008). Disponível: <http://www.sbfisica.org>. Acesso em 07/04//2013.

[12] M.; SILVA S. C.; MACIEL N. A., UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA FRACTAL EM SALA DE AULA NA EDUCAÇÃO BÁSICA, VIDYA, v. 32, n. 2, p.113-132, Santa Maria. 2012. Disponível: [sites.unifra.br/Portals/35/2012/08.pdf](http://sites.unifra.br/Portals/35/2012/08.pdf). Acesso em 28/09/2013.

[13] PALESSI, D. M., Motivação do estudo de progressões aritméticas e geométricas através da geometria fractal. 57 f. Monografia. Universidade Federal do Paraná. Curitiba.2007.

[14] NIEDERMEYER C. I.; KOEFENDERK C.; ROOS L. T.,GEOMETRIA FRACTAL E ENSINO DE MATEMÁTICA. X Encontro Gaúcho de Educação Matemática Comunicação Científica. 02 a 05 de junho de 2009. Ijuí/RS.

[15] UNIVERSIDADE DE LISBOA. Desenvolvido pelo departamento de educação da Faculdade de Ciências. 2007b. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm14/index.htm>

[16] GEOMETRIA FRACTAL. Disponível: file:///D:/Monografia/GEOMETRIA