

Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

Redução Simplética de Hamiltonianos de
Tonelli e aplicações ao Problema de N
Corpos

Justino Muniz Júnior

Orientador: Mário Jorge Dias Carneiro
Coorientador: Matthew Joseph Perlmutter

Belo Horizonte

2014

Justino Muniz Júnior

Redução Simplética de Hamiltonianos de Tonelli e aplicações ao Problema de N Corpos

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Mário Jorge Dias
Carneiro

Coorientador: Matthew Joseph
Perlmutter

Belo Horizonte

2014

Justino Muniz Júnior

Redução Simplética de Hamiltonianos de Tonelli e aplicações ao Problema de N Corpos

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Mário Jorge Dias Carneiro (Orientador) - UFMG

Matthew Joseph Perlmutter (Coorientador) - UFMG

Clodoaldo Grotta Ragazzo - IME-USP

Ezequiel Claudio Maderna Conde - UDELAR-Uruguay

José Antônio Golçalves Miranda - UFMG

Romero Barbieri Solha - UFMG

Belo Horizonte, 11 de março de 2014.

À minha família

Agradecimentos

Primeiramente a Deus. Minha família pelo apoio incondicional, em especial a meus pais. Minha noiva Ana Gabriela e toda sua família pelo estímulo. Ao Programa de Pós-Graduação de Matemática da UFMG por mais essa oportunidade de crescimento. Aos amigos da pós-graduação, especialmente Alexandre e Pano Preto. À UFV pelo incentivo ao treinamento. Aos amigos de Florestal, especialmente Alexandre (o mesmo), Sérgio, Guto e Renato. Aos membros da banca examinadora pelas diversas críticas, correções e sugestões. Ao meu coorientador Matthew Perlmutter pelo suporte, especialmente em geometria simplética. Ao meu orientador Mário Jorge por toda a paciência nesses 7 anos de convivência e aprendizado.

Resumo

Este trabalho trata de Hamiltonianos de Tonelli com simetrias sob o ponto de vista de redução simplética. O objetivo é aplicar técnicas dessa teoria na determinação de medidas invariantes minimizantes e KAM fracas.

Paralelamente trabalhamos com uma generalização do problema de N corpos no contexto de variedades e obtivemos um teorema de existência de KAM fracas invariantes pela ação diagonal do grupo de isometrias da variedade em questão. Como consequência, provamos a validade desse teorema para o caso de variedades hiperbólicas de curvatura seccional constante com o potencial "Newtoniano" usualmente encontrado na literatura.

Por fim, buscamos apresentar exemplos que ilustrassem os resultados obtidos. Dedicamos o último capítulo para tratar dos problemas de 2 corpos e 3 corpos restritos no plano hiperbólico, em que desenvolvemos grande parte da teoria de redução simplética no primeiro caso.

Palavras-chave: Medidas Minimizantes. Redução Simplética. Teorema KAM fraco invariante. Problema de N -corpos sobre variedades.

Abstract

This work is devoted to study of Tonelli Hamiltonians with symmetries from the point of view of symplectic reduction. The goal is to apply techniques of this theory in the determination of minimizing invariant measures and weak KAM.

At the same time we work with a generalization of the N body problem in the context of manifolds and obtained an existence theorem of weak KAM invariant by the diagonal action of the group of isometries of the manifold. As a consequence, we prove the validity of this theorem in the case of hyperbolic manifolds of constant sectional curvature with "Newtonian" potential usually found in the literature.

Finally, we seek to provide examples to illustrate the results obtained. We devote the last chapter to the 2 body and restricted 3 body problems in the hyperbolic plane, which developed much of the symplectic reduction theory in the first case .

Palavras-chave: Minimizing Measures. Symplectic Reduction. Invariant weak KAM theorem. N body problem in manifold.

Sumário

1	Elementos de Redução Simplética, KAM Fracas e Medidas Minimizantes	11
1.1	KAM Fracas e Medidas Minimizantes	11
1.2	Redução Simplética	17
2	Hamiltonianos com Simetrias	21
2.1	Redução Simplética e Medidas Minimizantes	21
2.2	KAM Fracas Reduzidas	26
2.3	Um Hamiltoniano Mecânico no Toro T^2	27
3	O teorema KAM fraco para o problema de N-corpos em variedades	30
3.1	Teorema KAM fraco para o Problema de N corpos em variedades de curvatura constante	43
4	Aplicações	46
4.1	O Problema de 2-Corpos no Plano Hiperbólico Real	51
4.2	O Problema de 3-Corpos Restritos no Plano Hiperbólico Real	64
	Bibliografia	76

Introdução

Uma questão relevante no estudo de sistemas Hamiltonianos é sobre a existência de gráficos invariantes. Se $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 com T^*M munido da estrutura simplética canônica, uma subvariedade Lagrangiana N conexa de classe C^1 é invariante pelo fluxo Hamiltoniano de H se e somente se H é constante sobre N (Hamilton-Jacobi). O gráfico de uma 1-forma de classe C^1 é uma subvariedade Lagrangiana invariante de T^*M se e somente se a 1-forma é fechada. Subvariedades Lagrangianas desse tipo são ditas Gráficos Lagrangianos Invariantes. Há um especial interesse na busca por Gráficos Lagrangianos Invariantes Exatos, ou seja, gráficos de 1-formas exatas. Isso remete a resolver uma equação do tipo

$$H(x, d_x u) = k,$$

onde $d_x u$ denota a derivada da função u no ponto $x \in M$ e $k \in \mathbb{R}$ é uma constante. Essa é a bem conhecida equação de Hamilton-Jacobi. Sabe-se ([6], teorema A) que essa equação possui subsoluções regulares se $k > c(H)$ e não possui sequer subsolução fraca se $k < c(H)$, em que $c(H)$ é o valor crítico de Mañé. Assim torna-se extremamente interessante estudar o caso $k = c(H)$.

Em [13] Fathi prova a existência de uma função Lipschitz $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

$$H(x, d_x u) = c(H),$$

em quase todo ponto na medida de Lebesgue, sob certas hipóteses no Hamiltoniano H . Tais soluções ficaram conhecidas como KAM fracas. Como esse é um teorema de existência, pouco se sabe sobre como obter tais soluções, a não ser em termos da Ação Potencial de Mañé (veja [8]). Mesmo para o caso de M ser uma superfície, pode ser extremamente trabalhoso. Entretanto, quando o Hamiltoniano possui simetrias, essa tarefa pode ser facilitada. Tais simetrias estarão associadas à ação de um grupo que deixa o Hamiltoniano invariante. Aplicando técnicas da teoria de redução simplética obtivemos

tais KAM fracas a partir de soluções do Hamiltoniano reduzido (KAM fracas reduzidas), conforme veremos no segundo capítulo.

Nossos resultados são:

Teorema A. *Seja $H^2 = \{z \in \mathbb{C} | \text{Im}z > 0\}$ o plano hiperbólico com a métrica*

$$ds^2 = \frac{-4}{(z - \bar{z})^2} dz d\bar{z}$$

de curvatura -1 . O problema de 2 corpos em H^2 é dado pelo Hamiltoniano:

$$H(w, p) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m_1} \langle p_1, p_1 \rangle_{w_1} + \frac{1}{m_2} \langle p_2, p_2 \rangle_{w_2} \right] - m_1 m_2 \coth d(w_1, w_2),$$

em que $w = (w_1, w_2) \in M = (H^2)^2 \setminus \Delta$, Δ é a diagonal e m_i são as massas dos corpos.

*Munindo T^*M com a estrutura simplética canônica temos que H é fracamente integrável.*

Esse resultado é interessante visto que em [12] Shchepetilov provou que tal problema não é integrável no seguinte sentido: os Hamiltonianos reduzidos (de momento não nulo) não admitem integrais primeiras meromorfas além da energia. Nossa definição de fracamente integrável é segundo [16].

Teorema B. *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana completa simplesmente conexa de curvatura seccional não-positiva de dimensão n e $M^N = M \times \dots \times M$ a variedade produto, onde $n \geq 1$ e N é o número de corpos. Considere o Lagrangiano $L : TM^N \rightarrow \mathbb{R}$ dado por*

$$L(x, v) \mapsto \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i g(x_i, v_i) + U_\kappa(x),$$

onde $U_\kappa(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{[d(x_i, x_j)]^{2\kappa}}$ com $\kappa \in (0, 1)$ e d denota a distância dada pela métrica g . Então existe $u : M^N \rightarrow \mathbb{R}$ KAM fraca invariante pela ação diagonal do grupo de isometrias de M .

Teorema C. *Considere o modelo de Poincaré na bola euclidiana de raio R . Seja o Hamiltoniano*

$$H_R(x, p) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{\lambda(x_j)}{m_j} \langle p_j, p_j \rangle - \frac{1}{2} \sum_{j < k} m_j m_k \text{ctn}_R(d_R(x_j, x_k)),$$

onde $\lambda(x_j) = \frac{(R^2 - \|x_j\|^2)^2}{4R^4}$, $\text{ctn}_R(d_R(x_j, x_k)) = \frac{1}{R} \coth\left(\frac{d_R(x_j, x_k)}{R}\right)$ e d_R denota a distância hiperbólica. Existe $u : M^N \rightarrow \mathbb{R}$ KAM fraca invariante.

No capítulo 1 estabelecemos boa parte da nossa notação e resultados básicos para o desenvolvimento dos demais. Fizemos também algumas observações válidas na presença de simetrias, como a invariância dos conjuntos de Mather, Aubry e Mañé. No capítulo 2 discutimos como a redução simplética nos permite definir KAM fracas reduzidas, bem como medidas de Mather reduzidas. Provamos que, para um Hamiltoniano de Tonelli que é invariante por um grupo de Lie G , então u é KAM fraca de H se e somente se u_μ é KAM fraca do Hamiltoniano reduzido. Nessas hipóteses, se o conjunto de Mather é não vazio então m é uma medida de Mather se e somente se m_μ é uma medida de Mather reduzida, em que $m_\mu = (T\tau_\mu)^* m$ e $\tau_\mu : M \rightarrow M_\mu$ um G_μ fibrado principal com $M_\mu = M/G_\mu$. Finalizamos o capítulo 2 com um exemplo ilustrando tais conceitos. No capítulo 3 provamos os teoremas B e C. O potencial cotangente hiperbólica da distância utilizado no teorema C é o potencial "Newtoniano" usado na literatura: este satisfaz a equação de Laplace e se reduz ao potencial Newtoniano euclidiano quando a curvatura tende a zero (veja [18]). Um simples exemplo (análogo ao feito por Maderna em [17]) ilustra a obtenção de KAM fracas invariantes.

Dedicamos o início do capítulo 4 para apresentar um caso de redução que se aplica ao problema de 2 corpos (primeira seção) e que implica no teorema A. Além disso, apresentamos a redução simplética do problema de 2 corpos e obtemos todas as KAM fracas invariantes. Na segunda seção procedemos de maneira análoga a um problema de 3 corpos restrito euclidiano. Tomamos uma solução circular do problema de 2 corpos (obtida por Diacu, Perez-Chavela, Reyes Victoria em [18]) e consideramos um terceiro corpo de massa desprezível sob efeito do movimento dos dois primeiros corpos de mesma massa no disco de Poincaré. Descrevemos completamente o caso integrável, onde os dois primeiros corpos são levados no bordo do disco. Obtivemos também uma classificação de estabilidade da solução de equilíbrio.

Capítulo 1

Elementos de Redução Simplética, KAM Fracas e Medidas Minimizantes

Neste capítulo será feita uma apresentação dos conceitos básicos das teorias. O objetivo é estabelecer boa parte da notação e linguagem, além de listar os principais resultados a serem utilizados nos demais capítulos. Para maiores detalhes as principais referências são, para a primeira seção, Mather [3] (caso compacto), Fathi [13] e Fathi-Maderna [14] e para a segunda seção, Abraham-Marsden [2].

1.1 KAM Fracas e Medidas Minimizantes

Sejam M uma variedade Riemanniana conexa sem bordo e G um grupo de Lie agindo livre e propriamente sobre M por isometrias. Um Lagrangiano de M é uma função $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre seu fibrado tangente. O Hamiltoniano associado $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por

$$H(x, p) = \sup_{v \in T_x M} \{p(v) - L(x, v)\}.$$

Nossas hipóteses sobre os Lagrangianos (respectivamente Hamiltonianos) serão:

1. (H1) (Regularidade) L de classe C^r , $r \geq 2$;
2. (H2) (Convexidade) L estritamente convexo nas fibras, ou seja, para cada $x \in M$ e todos $v, w \in T_x M$ tem-se

$$L(x, tv + (1-t)w) < tL(x, v) + (1-t)L(x, w), \forall t \in (0, 1);$$

3. (H3) (Superlinearidade) L superlinear, isto é, dado $A > 0$ existe $B > 0$ tal que

$$L(x, v) \geq A \|v\|_x - B, \quad \forall (x, v) \in TM,$$

onde a norma $\|\cdot\|_x$ vem da métrica Riemanniana de M .

4. (H4) (Limitação Uniforme) Dado $R \geq 0$, então

$$A(R) = \sup \{L(x, v) \mid \|v\|_x \leq R\} < +\infty.$$

5. (H5) (Invariância) L é invariante pela ação levantada ao fibrado tangente, ou seja, dados $g \in G$, $x \in M$ e $v \in T_x M$, então

$$L(x, v) = L(g(x), d_x g(v)),$$

onde g denota o elemento do grupo e a isometria associada, simultaneamente, e $d_x g$ é a derivada de g no ponto x .

Lagrangianos (respectivamente Hamiltonianos) que satisfazem (H1)-(H4) são ditos Lagrangianos de Tonelli (respectivamente Hamiltonianos de Tonelli). Note que não estamos supondo M compacta. De fato estamos também interessados nos casos M não compacta, conforme veremos adiante.

Se T^*M é o fibrado cotangente de uma variedade M , defina a *1-forma de Liouville* Θ em T^*M por

$$\Theta_{(x,p)}(\xi) = p(x) (T\pi_{(x,p)}^* \xi) \text{ com } (x,p) \in T^*M \text{ e } \xi \in T_{(x,p)}(T^*M),$$

onde $\pi^* : T^*M \rightarrow M$ é a projeção e $T\pi^* : TT^*M \rightarrow TM$ sua derivada. A *forma simplética canônica* em T^*M é definida como $\omega = -d\Theta$, que é uma 2-forma fechada e não degenerada ($\omega(W, \cdot)$ é um isomorfismo).

A equação de Hamilton-Jacobi é dada por

$$H(x, d_x u) = k,$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante. Dizemos que $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução regular da equação de Hamilton-Jacobi se a satisfaz em todos os pontos e que $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma subsolução de Hamilton-Jacobi se satisfaz

$$H(x, d_x u) \leq k$$

em todos os pontos.

Definição 1.1.1. O valor crítico, denotado por $c(H)$ ou $c(L)$, é definido por

$$c(H) = \inf \{k \in \mathbb{R} | H(x, d_x u) = k \text{ possui subsolução regular}\}.$$

Dado um Lagrangiano de Tonelli $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ definimos a equação de Euler-Lagrange por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial x}.$$

Se $v = \dot{x}$,

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, v) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}(x, v) = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial v}(x, v) v + \frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x, v) \dot{v}.$$

Como L é não-degenerado (pela convexidade),

$$\dot{v} = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x, v) \right]^{-1} \left[\frac{\partial L}{\partial x}(x, v) - \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial v}(x, v) v \right].$$

O campo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \left[\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x, v) \right]^{-1} \left[\frac{\partial L}{\partial x}(x, v) - \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial v}(x, v) v \right] \end{aligned}$$

é dito *Campo de Euler-Lagrange* e denotado por X_L . Claramente X_L é de classe C^{r-2} . Se $r = 2$ não podemos garantir unicidade de soluções. Entretanto este é na verdade de classe C^{r-1} (ver [13]). O fluxo associado é conhecido como o *Fluxo de Euler-Lagrange*. Uma curva em M que é a projeção de uma solução de Euler-Lagrange é dita uma *extremal*.

A ação de uma medida de probabilidade m invariante pelo fluxo de Euler-Lagrange com suporte compacto em TM é definida por

$$A_L(m) = \int_{TM} L dm.$$

Definição 1.1.2. Uma medida de probabilidade invariante pelo fluxo de Euler-Lagrange m tal que

$$A_L(m) = -c(L)$$

é dita uma *medida minimizante*.

O conjunto $\tilde{\mathcal{M}} = \{(x, v) \in TM \mid (x, v) \in \text{supp}(m) \text{ com } m \text{ medida minimizante}\}$ é chamado de conjunto de Mather. Sua projeção em M é denotado por \mathcal{M} .

Define-se a homologia $\rho(m) \in H_1(TM, \mathbb{R}) \simeq H_1(M, \mathbb{R})$ de uma medida invariante m por

$$\langle \rho(m), [\omega] \rangle = \int_{TM} \omega dm,$$

em que $[\omega] \in H^1(M, \mathbb{R})$ é a classe de cohomologia da 1-forma $\omega : TM \rightarrow \mathbb{R}$. As funções α e β de Mather $\alpha : H^1(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ e $\beta : H_1(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ são definidas por

$$\alpha([\omega]) = c(L - \omega) \text{ e } \beta(h) = -\min \{A_L(m) \mid \rho(m) = h\}.$$

Aqui m é tomada no conjunto das medidas invariantes. Sabe-se (ver [3]) que α e β são superlineares e convexas, sendo uma dual convexa da outra.

Se um grupo de Lie G age em M livre e propriamente por difeomorfismos e $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ é invariante pela ação de G levantada a T^*M temos algumas observações. A menos que seja dito o contrário, g denota o elemento do grupo e o difeomorfismo associado, simultaneamente. A ação de uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é dada por

$$A_L(\gamma) = \int_a^b L(\gamma(t), \gamma'(t)) dt.$$

1. Se $g \in G$, então $L \circ Tg = L$, onde L é o Lagrangiano associado ao Hamiltoniano H e Tg é o mapa tangente de $g : M \rightarrow M$ dado por

$$Tg(x, v) = (g(x), d_x g(v)).$$

De fato. Temos que

$$\begin{aligned} L(x, v) &= \sup_{p \circ d_x g \in T_x^* M} \{(p \circ d_x g)(v) - H(x, p \circ d_x g)\} \\ &= \sup_{p \in T_{g(x)}^* M} \{p(d_x g(v)) - H(g(x), p)\} \\ &= L(Tg(x, v)). \end{aligned}$$

2. A ação de curvas é invariante por G . Se $g \in G$, $A_L(\gamma) = A_L(g \circ \gamma)$ para toda curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$. Logo

$$\varphi_t^L \circ Tg = Tg \circ \varphi_t^L,$$

onde φ_t^L denota o fluxo de Euler-Lagrange.

3. Se m é uma medida de invariante e $(Tg)^*(m)(\cdot) = m((Tg)^{-1}(\cdot))$, então

$$(Tg)^*(m)(E) = (Tg)^*(m)(\varphi_{-t}^L(E)),$$

pois

$$\begin{aligned} (Tg)^*(m)(E) &= m((Tg)^{-1}(E)) \\ &= m(\varphi_{-t}^L((Tg)^{-1}(E))) \\ &= m((Tg \circ \varphi_t^L)^{-1}(E)) \\ &= m((\varphi_t^L \circ Tg)^{-1}(E)) \\ &= m((Tg)^{-1}(\varphi_{-t}^L(E))) \\ &= (Tg)^*(m)(\varphi_{-t}^L(E)). \end{aligned}$$

Isso significa que $(Tg)^*$ leva medida invariante em medida invariante.

4. Se m é uma medida minimizante, então $(Tg)^*(m)$ também será:

$$\int_{TM} Ld((Tg)^*(m)) = \int_{TM} (L \circ Tg) dm = \int_{TM} Ldm.$$

5. Se $g \in G$, então $Tg(\tilde{\mathcal{M}}) = \tilde{\mathcal{M}}$. Com efeito, sejam m uma medida minimizante e (x, v) pertencente ao suporte de m . Logo $(Tg^{-1})^*(m) = m \circ Tg$ e $Tg(x, v)$ pertence ao suporte de $(Tg^{-1})^*(m)$. Com isso $Tg(\tilde{\mathcal{M}}) \subset \tilde{\mathcal{M}}$. Como Tg é homeomorfismo,

$$\tilde{\mathcal{M}} \subset Tg^{-1}(\tilde{\mathcal{M}}) \subset \tilde{\mathcal{M}}.$$

6. g^* leva 1-forma exata em 1-forma exata, pois

$$(g^*(\eta))_x(v) = \eta_{g(x)}(d_x g(v)).$$

Logo, se $\eta = df$

$$(g^*(df))_x(v) = d_{g(x)}f(dg_x(v)) = d_x(f \circ g)(v).$$

7. $\alpha([\eta]) = \alpha([g^*(\eta)])$:

$$\int_{TM} (L - \eta) d((Tg)^*(m)) = \int_{TM} (L \circ Tg - g^*(\eta)) dm = \int_{TM} (L - g^*(\eta)) dm.$$

8. $\langle \rho((Tg)^*(m)), [\eta] \rangle = \langle \rho(m), [g^*(\eta)] \rangle$, pois

$$\begin{aligned} \langle \rho((Tg)^*(m)), [\eta] \rangle &= \int_{TM} \eta d((Tg)^*(m)) \\ &= \int_{TM} g^*(\eta) dm \\ &= \langle \rho(m), [g^*(\eta)] \rangle. \end{aligned}$$

9. $\beta(\rho((Tg)^*(m))) = \beta(\rho(m))$ para cada $g \in G$. De fato, se $\beta(\rho(m)) = A_L(m)$, dado $g \in G$ existe $[g^*(\eta)] \in H^1(M, \mathbb{R})$ tal que

$$\beta(\rho(m)) + \alpha([g^*(\eta)]) = \langle \rho(m), [g^*(\eta)] \rangle.$$

Logo

$$\begin{aligned} \beta(\rho((Tg)^*(m))) - \beta(\rho(m)) &= \beta(\rho((Tg)^*(m))) + \alpha([\eta]) - (\beta(\rho(m)) + \alpha([g^*(\eta)])) \\ &\geq \langle \rho((Tg)^*(m)), [\eta] \rangle - \langle \rho(m), [g^*(\eta)] \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\beta(\rho(m)) = A_L(m) = A_L((Tg)^*(m)) \geq \beta(\rho((Tg)^*(m))).$$

O item 2 nos permite concluir que tanto a Barreira de Peierls quanto a Ação Potencial de Mañé (para definições ver [13]) são G invariantes, de modo que os conjuntos de Aubry e Mañé serão também G invariantes.

Observe que, se G é um grupo conexo (ou considerando a componente conexa da identidade), então η e $g^*\eta$ serão cohomólogas, pois g será isotópico à identidade. Nesse caso

$$H^1(M, \mathbb{R})/G = H^1(M, \mathbb{R}),$$

logo a função α quociente coincide com a própria função α .

Definiremos agora o que vem a ser uma KAM fraca. Mais detalhes podem ser encontrados em [13] e [14]. Dados $u : M \rightarrow [-\infty, +\infty]$ e $t \geq 0$, define-se

$$T_t^- u : M \rightarrow [-\infty, +\infty]$$

por

$$T_t^- u(x) = \inf_{\gamma} \left\{ u(\gamma(0)) + \int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds \right\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre curvas $\gamma : [0, t] \rightarrow M$ de classe C^1 por partes com $\gamma(t) = x$.

Definição 1.1.3. (*KAM fraca*) Uma função Lipschitz $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma *KAM fraca* se

$$u = T_t^- u + tc(H),$$

para cada $t \geq 0$. Em particular, satisfaz a equação de Hamilton-Jacobi

$$H(x, d_x u) = c(H)$$

em quase todo ponto na medida de Lebesgue ([14]).

1.2 Redução Simplética

Iniciaremos essa seção com definições como de ações simpléticas, ações adjuntas e coadjuntas. Ao fim enunciaremos alguns teoremas de redução simplética. Para maiores detalhes veja [2], [4] e [7].

Uma variedade simplética é um par (P, ω) , em que P é uma variedade diferenciável de dimensão par e ω é uma 2-forma não-degenerada e fechada. Uma ação de um grupo de Lie G em uma variedade simplética (P, ω) é dita simplética se G age em P por simplectomorfismos, ou seja, para cada $g \in G$, $\Phi_g : P \rightarrow P$ satisfaz

$$(\Phi_g)^* \omega = \omega.$$

Dado $g \in G$, considere a conjugação por g dada por

$$\psi_g(h) = g^{-1}hg.$$

Se \mathcal{G} denota a álgebra de Lie de G temos que a ação adjunta de G em \mathcal{G} é dada por

$$g \mapsto Ad_g := T_e \psi_g : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G},$$

onde e é a identidade.

Se \mathcal{G}^* denota o dual da álgebra de Lie de G temos a ação coadjunta de G em \mathcal{G}^*

$$Ad^* : G \times \mathcal{G}^* \rightarrow \mathcal{G}^*$$

dada por

$$\langle Ad_g^*(\mu), \zeta \rangle = \langle \mu, Ad_{g^{-1}}(\zeta) \rangle, \mu \in \mathcal{G}^*, \zeta \in \mathcal{G}.$$

Sejam Φ uma ação simplética de G em P e $\zeta \in \mathcal{G}$ representando um campo invariante à esquerda. Denotemos por $\exp t\zeta$ o fluxo em G gerado por ζ . Portanto $\Phi(\exp t\zeta, \cdot)$ é um fluxo em P do campo

$$\zeta_P(p) = \frac{d}{dt} \{\Phi(\exp t\zeta, p)\} |_{t=0},$$

dito gerador infinitesimal de ζ . Para cada $p \in P$ denotaremos seu subgrupo de isotropia pela ação Φ por

$$G_p = \{g \in G : \Phi(g, p) = p\}$$

e para cada $\mu \in \mathcal{G}^*$ denotaremos seu subgrupo de isotropia pela ação coadjunta Ad^* por

$$G_\mu = \{g \in G : Ad_{g^{-1}}^* \mu = \mu\}.$$

Dizemos que uma aplicação

$$J : P \rightarrow \mathcal{G}^*$$

é um mapa momento se

$$d\widehat{J}(\zeta) = i_{\zeta_P} \omega,$$

onde $\widehat{J} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(P, \mathbb{R})$ é definido por

$$\widehat{J}(\zeta)(p) = \langle J(p), \zeta \rangle$$

para $\zeta \in \mathcal{G}$ e $p \in P$.

Dizemos que J é Ad^* -equivariante se

$$Ad_{g^{-1}}^* J(p) = J(\Phi(g, p)), \forall g \in G, \forall p \in P.$$

Teorema 1.2.1. ([2], teorema 4.3.1) *Sejam Φ uma ação simplética de um grupo de Lie G em uma variedade simplética (P, ω) e*

$$J : P \rightarrow \mathcal{G}^*$$

um mapa momento Ad^ -equivariante para essa ação. Se $\mu \in \mathcal{G}^*$ é um valor regular de J e G_μ age livre e propriamente em $J^{-1}(\mu)$, então*

$$P_\mu = J^{-1}(\mu) / G_\mu$$

possui uma única forma simplética ω_μ tal que

$$\pi_\mu^* \omega_\mu = i_\mu^* \omega,$$

onde $\pi_\mu : J^{-1}(\mu) \rightarrow P_\mu$ é a projeção natural e $i_\mu : J^{-1}(\mu) \rightarrow P$ é a inclusão.

Este último teorema permite induzir um Hamiltoniano na variedade reduzida:

Teorema 1.2.2. ([2], teorema 4.3.5) *Nas hipóteses do teorema anterior se $H : P \rightarrow \mathbb{R}$ é G -invariante, então o fluxo φ_t^H de X_H deixa $J^{-1}(\mu)$ invariante e comuta com a ação de G_μ em $J^{-1}(\mu)$, de modo a induzir um fluxo $\varphi_t^{H_\mu}$ em P_μ satisfazendo*

$$\pi_\mu \circ \varphi_t^H = \varphi_t^{H_\mu} \circ \pi_\mu.$$

O fluxo $\varphi_t^{H_\mu}$ é um fluxo Hamiltoniano em P_μ com Hamiltoniano H_μ tal que

$$H_\mu \circ \pi_\mu = H \circ i_\mu.$$

H_μ é dito Hamiltoniano reduzido.

Uma vez conhecida uma curva solução do problema reduzido o levantamento a uma solução do problema original é feita da seguinte maneira: dado $p \in J^{-1}(\mu)$, sejam $c(t)$ e $c_\mu(t)$ soluções de X_H e X_{H_μ} , respectivamente, com $c(0) = p_0$. Tome $d(t) \in J^{-1}(\mu)$ uma curva suave com $d(0) = p_0$ e

$$[d(t)]_\mu = c_\mu(t).$$

Primeiramente resolve-se a equação

$$\zeta_P(d(t)) = X_H(d(t)) - d'(t)$$

para $\zeta(t) \in \mathcal{G}_\mu$, em que \mathcal{G}_μ denota a Álgebra de Lie de G_μ e $d'(t)$ é o vetor velocidade da curva d no instante t . Determinado $\zeta(t)$, resolve-se

$$g'(t) = T_e L_{g(t)} \zeta(t)$$

para $g(t) \in G_\mu$ com $g(0) = e$, em que $g'(t)$ é um campo invariante à esquerda. Finalmente $c(t)$ será dada por

$$c(t) = \Phi_{g(t)} d(t).$$

Casos em que G é abeliano podem ser resolvidos mais facilmente: conhecido $\zeta(t)$, $g(t)$ será dado por

$$g(t) = \exp\left(\int_0^t \zeta(s) ds\right).$$

Trataremos agora da redução simplética de um sistema mecânico invariante pela ação de um grupo de Lie G . Para maiores detalhes ver [4].

Se um grupo de Lie G age livremente em uma variedade Riemanniana Q por isometrias, considere um Lagrangiano mecânico $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$L(q, v) = \frac{1}{2} \langle \langle v, v \rangle \rangle_q - V(q).$$

Teremos assim um G fibrado principal $Q \rightarrow Q/G$. Para cada $q \in Q$ considere o tensor de inércia $\mathcal{I} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^*$ dado por

$$\langle \mathcal{I}(q) \eta, \zeta \rangle = \langle \langle \eta_Q(q), \zeta_Q(q) \rangle \rangle_q.$$

Defina $\mathcal{A} : TQ \rightarrow \mathcal{G}$ por $\mathcal{A}(q, v) = \mathcal{I}^{-1}(q)(J(FL(q, v)))$, onde J é o mapa momento e FL é a transformada de Legendre dada por

$$FL(q, v) = \frac{\partial}{\partial v} L(q, v).$$

Daí prova-se que \mathcal{A} é uma conexão para o G fibrado principal $Q \rightarrow Q/G$ dita conexão mecânica. O espaço horizontal hor_q da conexão \mathcal{A} em q é dado por

$$hor_q = \{(q, v) \mid J(FL(q, v)) = 0\}.$$

O espaço vertical será dado por $ver_q = \{\xi_Q(q) \mid \xi \in \mathcal{G}\}$. Para cada $\mu \in \mathcal{G}^*$ defina a 1-forma \mathcal{A}_μ em Q por

$$\langle \mathcal{A}_\mu(q), v \rangle = \langle \mu, \mathcal{A}(q, v) \rangle.$$

Essa 1-forma é tal que $J(\mathcal{A}_\mu(q)) = \mu$. A curvatura $curv\mathcal{A}$ da conexão \mathcal{A} é a derivada covariante exterior de \mathcal{A} dada em $q \in Q$ por

$$curv\mathcal{A}(v, w) = d\mathcal{A}(hor(v), hor(w)) = -\mathcal{A}([hor(v), hor(w)]),$$

onde o colchete é calculado tomando-se extensões de v e w a campos vetoriais. O potencial efetivo V_μ é definido por

$$V_\mu = H(\mathcal{A}_\mu),$$

em que $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ é o Hamiltoniano associado. Assim teremos $V_\mu(q) = V(q) + \frac{1}{2} \langle \mu, \mathcal{I}^{-1}(q) \mu \rangle$. A variedade reduzida $P_\mu = J^{-1}(\mu)/G_\mu$ pode ser identificada com $P_{\mathcal{O}_\mu} = J^{-1}(\mathcal{O}_\mu)/G$, onde \mathcal{O}_μ é a órbita coadjunta de μ . Se Ω_{can} é a estrutura simplética canônica em T^*Q , então a estrutura simplética em $T^*(Q/G_\mu)$ será

$$\Omega_{can} - d\mathcal{A}_\mu.$$

Passando ao quociente teremos a estrutura simplética em P_μ . No caso em que $Q = G$, então $P_\mu \simeq \mathcal{O}_\mu$ munida da forma de Kirillov. O Hamiltoniano reduzido em $T^*(Q/G_\mu)$ será dado por

$$H_\mu([q, p]) = \frac{1}{2} \|p\|_q^2 + V_\mu(q),$$

onde $(q, p) \in J^{-1}(0)$ é um representante de $[q, p] \in T^*(Q/G_\mu)$, levado a $J^{-1}(\mu)$ por $(q, p) \mapsto (q, p + \mathcal{A}_\mu(q))$. A métrica é a quociente em Q/G_μ , assim como o potencial V_μ é identificado pelo quociente. Para descrever o Hamiltoniano reduzido em $P_\mu \simeq P_{\mathcal{O}} = J^{-1}(\mathcal{O}_\mu)/G$, escolha $\nu \in \mathcal{O}_\mu$ órbita coadjunta de μ e $(q, p) \in J^{-1}(0)$ que representa $[q, p] \in T^*(Q/G_\mu)$. Levando (q, p) a $J^{-1}(\mathcal{O}_\mu)$ por $(q, p) \mapsto (q, p + \mathcal{A}_\nu(q))$ teremos

$$H_{\mathcal{O}_\mu}(q, p, \nu) = \frac{1}{2} \|p\|_q^2 + V_\nu(q),$$

em que $P_{\mathcal{O}_\mu}$ é munida da estrutura simplética $\Omega_{can} - \beta_\mu$ com β_μ dada pelo quociente de $d\mathcal{A}_\mu$.

Capítulo 2

Hamiltonianos com Simetrias

O objetivo principal deste capítulo é explorar simetrias de um Hamiltoniano a fim de se estudar a dinâmica envolvida. Se um Hamiltoniano é invariante pela ação livre e própria de um grupo, pelo teorema de redução simplética obtemos um novo Hamiltoniano na variedade reduzida. Porém o Hamiltoniano reduzido não será do tipo Tonelli em geral. Na verdade a variedade simplética reduzida pode sequer ser fibrado cotangente de alguma variedade. Entretanto, para alguns casos nosso propósito será satisfeito, como veremos adiante.

2.1 Redução Simplética e Medidas Minimizantes

Em [9] E. Maderna prova que toda KAM fraca é invariante pelo grupo de simetrias de um Hamiltoniano de Tonelli em uma variedade compacta. Veremos que, mesmo sem compacidade, esse resultado continua válido, desde que o conjunto de Mather seja não vazio. Exemplos de Hamiltonianos com simetria podem ser obtidos considerando uma variedade Riemanniana (M, g) e um potencial V que seja invariante por algum subgrupo G de isometrias de M . Assim o Hamiltoniano mecânico $H = K + V$ definido no fibrado cotangente de M será invariante pela ação levantada de G ao fibrado cotangente T^*M , onde $K(x, p) = \frac{1}{2}g^*(x, p)$.

Em [14] A. Fathi e E. Maderna estudaram soluções KAM fracas para o caso não compacto. Também consideraram soluções da equação de Hamilton-Jacobi (ρ -invariantes) para Hamiltonianos invariantes pela ação de um grupo de Lie. No que segue recordaremos algumas definições e resultados obtidos [14]. Primeiramente, estabeleceremos nossas

hipóteses (as mesmas de [14]). Dados $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe ao menos C^2 e M uma variedade Riemanniana completa, seja G um grupo de Lie conexo agindo própria e livremente em M por isometrias. Além disso suponha:

1. (H1) (Superlinearidade Uniforme) Dado $K \geq 0$, existe $C^*(K) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\forall (x, p) \in T^*M, H(x, p) \geq K \|p\| - C^*(K);$$

2. (H2) (Limitação Uniforme) Dado $R \geq 0$, então

$$A^*(R) = \sup \{H(x, p) \mid \|p\| \leq R\} < +\infty;$$

3. (H3) (Convexidade estrita nas fibras) Para todo $(x, p) \in T^*M$, a derivada segunda $\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(x, p)$ é positiva definida;

4. (H4) (Invariância) H é invariante pela ação levantada ao fibrado cotangente, ou seja, dados $g \in G$, $x \in M$ e $p \in T_{g(x)}^*M$, então

$$H(g(x), p) = H(x, p \circ d_x g),$$

onde g denota, simultaneamente, o elemento do grupo e a isometria associada.

Definição 2.1.1. *Dados $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo (H1)-(H4), $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma solução ρ -equivariante se é solução da equação de Hamilton-Jacobi e se, para cada $g \in G$, existe $\rho(g) \in \mathbb{R}$ tal que*

$$g^*u = u + \rho(g),$$

onde $g^*u(x) = u(gx)$.

Segue que $\rho : G \rightarrow \mathbb{R}$ é um homomorfismo de grupo. Dados $c \in \mathbb{R}$ e $\rho \in \text{Hom}(G, \mathbb{R})$ denote por $\mathcal{H}_\rho(c)$ o conjunto das funções contínuas c -dominadas que são ρ -equivariantes, ou seja,

$$\mathcal{H}_\rho(c) = \{u \in C^0(M, \mathbb{R}) \mid \forall g \in G, g^*u = u + \rho(g), u \prec L + c\}.$$

Para cada $\rho \in \text{Hom}(G, \mathbb{R})$,

$$c(\rho) = \sup \{c \in \mathbb{R} \mid \mathcal{H}_\rho(c) = \emptyset\}.$$

Se $c(\rho) < +\infty$,

$$c(\rho) = \inf \{c \in \mathbb{R} \mid \mathcal{H}_\rho(c) \neq \emptyset\}.$$

A função $c : \text{Hom}(G, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\rho \mapsto c(\rho)$ é chamada de função de Mather.

Definição 2.1.2. Dizemos que $\rho : G \rightarrow \mathbb{R}$ é dócil se $c(\rho) < +\infty$. Denotaremos por $Hom_{tame}(G, \mathbb{R})$ o conjunto dos homomorfismos dóceis.

Se $Hom_{tame}(G, \mathbb{R})$ tem dimensão finita, então a função de Mather c restrita a $Hom_{tame}(G, \mathbb{R})$ é convexa e superlinear ([14], proposição 7.2).

Defina:

$$c_{G,\min}(H) = \inf \{c(\rho) \in \mathbb{R} \mid \rho \in Hom_{tame}(G, \mathbb{R})\}.$$

Então existe $\rho \in Hom_{tame}(G, \mathbb{R})$ tal que $c_{G,\min}(H) = c(\rho)$ ([14], lema 7.3). Isso é facilmente verificado quando c é superlinear.

Definição 2.1.3. Sejam G um grupo e $l^\infty(G)$ o espaço das funções reais limitadas em G . Um grupo G é dito amenable se existe um funcional linear

$$m : l^\infty(G) \rightarrow \mathbb{R}$$

satisfazendo:

1. Se c é uma função constante, $m(c) = c$;
2. Dados $\varphi_1, \varphi_2 \in l^\infty(G)$, $m(\varphi_1) \geq m(\varphi_2)$, se $\varphi_1(g) \geq \varphi_2(g)$ para todo $g \in G$;
3. Dados $\varphi \in l^\infty(G)$, $m(g_*\varphi) = m(\varphi)$, onde $g_*\varphi(h) = \varphi(hg)$, para cada $h \in G$.

Grupos compactos, finitos, abelianos, entre outros são amenable. Um exemplo de um grupo não amenable é $SL(2, \mathbb{R})$. O teorema KAM fraco equivariante ([14], teorema 7.1) afirma que, para cada $\rho \in Hom_{tame}(G, \mathbb{R})$ existe uma solução de viscosidade $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ de

$$H(x, d_x u) = c(\rho).$$

Se G é amenable, então $c_{G,\min}(H) = c(H)$ ([14], teorema 7.4). Seja $c_{inv}(H) = c(0)$, ou seja, o menor valor que admite soluções invariantes. Em geral temos a seguinte desigualdade:

$$c(H) \leq c_{G,\min}(H) \leq c_{inv}(H).$$

Uma questão interessante é saber se alguma dessas desigualdades é estrita. Temos uma proposição nesse sentido:

Proposição 2.1.4. *Seja $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ um Hamiltoniano invariante por G e simétrico, ou seja,*

$$H(x, p) = H(x, -p), \forall p \in T_x^*M.$$

Se $Hom_{tame}(G, \mathbb{R})$ tem dimensão finita, então $c_{G, \min}(H) = c_{inv}(H)$.

Demonstração. Dado $\rho \in Hom_{tame}(G, \mathbb{R})$, considere

$$A_\rho = \{c \in \mathbb{R} \mid \mathcal{H}_\rho(c) \neq \emptyset\}.$$

Se $c \in A_\rho$, então existe $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u \prec L + c$ e $g^*u = u + \rho(g)$. Logo

$$u(\gamma(T)) - u(\gamma(0)) \leq A_{L+c}(\gamma)$$

para toda curva $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ absolutamente contínua. Para cada γ , seja $\delta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\delta(s) = \gamma(T - s).$$

Como L é simétrico, $A_{L+c}(\gamma) = A_{L+c}(\delta)$ e

$$-u(\delta(T)) - (-u(\delta(0))) = u(\gamma(T)) - u(\gamma(0)) \leq A_{L+c}(\delta),$$

de modo que $-u \prec L + c$. Por outro lado,

$$g^*u = u + \rho(g) \Leftrightarrow g^*(-u) = -u + -\rho(g),$$

logo $c \in A_\rho$ é equivalente a $c \in A_{-\rho}$. Portanto $c(\rho) = c(-\rho)$. Como $c : Hom_{tame}(G, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa, então

$$c(0) = c\left(\frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}(-\rho)\right) \leq \frac{1}{2}c(\rho) + \frac{1}{2}c(-\rho) = c(\rho),$$

como queríamos. □

Assim, em Hamiltonianos simétricos invariantes por G amenable teremos

$$c(H) = c_{inv}(H).$$

Mesmo para G não amenable temos um exemplo de um Hamiltoniano simétrico tal que $c(H) = c_{inv}(H)$ (problema de 2 corpos no plano hiperbólico). Uma ideia para se obter $c(H) < c_{inv}(H)$ seria tomar H mecânico, G não amenable com \mathcal{M} conjunto de Mather vazio (veja a proposição 2.1.5 abaixo). Para o Hamiltoniano do problema de N corpos, tanto euclidiano (teorema 3 [17]) quanto não euclidiano (próximo capítulo), teremos

$$c(H) = c_{inv}(H).$$

Proposição 2.1.5. *Se $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ é invariante por G e satisfaz (H1)-(H4) com $\mathcal{M} \neq \emptyset$, então*

$$c(H) = c_{inv}(H).$$

Além disso, toda KAM fraca $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ será invariante.

O caso M compacta é feito por E. Maderna ([9], teorema 1). A prova é baseada na conexidade de G , na continuidade de u e na invariância de \mathcal{M} que é não vazio pela compacidade de M . Observamos que a hipótese de compacidade de M pode ser substituída por $\mathcal{M} \neq \emptyset$, portanto a demonstração de 2.1.5 será totalmente análoga e preferimos não repetí-la aqui.

Dado $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ invariante por G , seja $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ o Lagrangiano associado. Para cada $\mu \in \mathcal{G}^*$, temos $\tau_\mu : M \rightarrow M_\mu$ como G_μ fibrado principal. Observe que, a invariância de H implica na invariância de L , ou seja, se $g \in G$ e $Tg = (g, dg)$, então $L \circ Tg = L$. Além disso, o Lagrangiano reduzido associado a $H_\mu : T^*M_\mu \rightarrow \mathbb{R}$ será $L_\mu : TM_\mu \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$L_\mu \circ T\tau_\mu = L \circ i_\mu.$$

Observemos agora que, tanto o Hamiltoniano, quanto o Lagrangiano reduzido são do tipo Tonelli:

Lema 2.1.6. *$L_\mu : TM_\mu \rightarrow \mathbb{R}$ é um Lagrangiano de Tonelli.*

Demonstração. Para a convexidade, note que

$$\begin{aligned} L_\mu(sT_x\tau_\mu(v_1) + (1-s)T_x\tau_\mu(v_2)) &= L_\mu(T_x\tau_\mu(sv_1 + (1-s)v_2)) \\ &= L(x, sv_1 + (1-s)v_2) \\ &\leq sL(x, v_1) + (1-s)L(x, v_2) \\ &= sL_\mu(T_x\tau_\mu(v_1)) + (1-s)L_\mu(T_x\tau_\mu(v_2)), \end{aligned}$$

para $s \in [0, 1]$ e $v_1, v_2 \in T_xM$. Para a superlinearidade, como $|T_x\tau_\mu(v)| \leq \|T_x\tau_\mu\| |v|$,

$$\frac{L_\mu(T_x\tau_\mu(v))}{|T_x\tau_\mu(v)|} \geq \frac{L(x, v)}{\|T_x\tau_\mu\| |v|} = \frac{1}{\|T_x\tau_\mu\|} \frac{L(x, v)}{|v|}.$$

Portanto

$$\lim_{|T_x\tau_\mu(v)| \rightarrow +\infty} \frac{L_\mu(T_x\tau_\mu(v))}{|T_x\tau_\mu(v)|} \geq \frac{1}{\|T_x\tau_\mu\|} \lim_{|v| \rightarrow +\infty} \frac{L(x, v)}{|v|} = +\infty.$$

□

Suponha $\tilde{\mathcal{M}} \neq \emptyset$. Seja m uma medida de probabilidade invariante pelo fluxo φ_t^L . Podemos definir, a partir de m , uma medida m_μ de probabilidade invariante pelo fluxo $\varphi_t^{L_\mu}$ por

$$m_\mu = (T\tau_\mu)^* m$$

tal que $m_\mu(E) = m((T\tau_\mu)^{-1}(E))$ para todo mensurável $E \subset TM_\mu$. Tal medida será dita medida de Mather reduzida. Denote por A_{L_μ} o funcional de ação em L_μ que chamaremos funcional de ação reduzido. Se m é uma medida de Mather para L , ou seja, se $A_L(m) = -c(H)$, então

$$A_{L_\mu}(m_\mu) = \int_{TM_\mu} L_\mu dm_\mu = \int_{TM} (L_\mu \circ T\tau_\mu) dm = \int_{TM} L dm = -c(H).$$

Reciprocamente, se m_μ é uma medida de probabilidade invariante pelo fluxo $\varphi_t^{L_\mu}$, definimos uma medida m de probabilidade invariante pelo fluxo φ_t^L por

$$m = m_\mu \circ T\tau_\mu.$$

Se m_μ é uma medida de Mather para L_μ , então

$$A_L(m) = \int_{TM} L dm = \int_{TM_\mu} L_\mu dm_\mu = -c(H_\mu).$$

Pelo teorema 2.2.2, $c(H_\mu) = c(H)$. Logo temos:

Teorema 2.1.7. *Dado $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ invariante por G , seja $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ o Lagrangiano associado. Se $\tilde{\mathcal{M}} \neq \emptyset$, então m é uma medida de Mather para L se e somente se m_μ é uma medida de Mather para L_μ com $m_\mu = (T\tau_\mu)^* m$.*

2.2 KAM Fracas Reduzidas

A proposição 2.1.5, juntamente com o teorema de redução simplética, motiva a definição de KAM fracas reduzidas.

Definição 2.2.1. *Seja $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo (H1)-(H4). Dizemos que uma função Lipschitz $u_\mu : M_\mu \rightarrow \mathbb{R}$ é uma KAM fraca reduzida se*

$$H_\mu \left([x]_\mu, d_{[x]_\mu} u_\mu \right) = c(H_\mu)$$

em quase todo ponto na medida de Lebesgue, onde $\mu \in \mathcal{G}^*$, $M_\mu = M/G_\mu$ e G_μ é o subgrupo de isotropia da ação coadjunta de G sobre \mathcal{G}^* .

Note que $c(H) \leq c(H_\mu)$. Se $c(H) = c(H_\mu)$, então $u(x) = u_\mu([x]_\mu)$ será uma KAM fraca. Por outro lado, se $\mathcal{M} \neq \emptyset$, pela proposição 2.1.5,

$$c(H) = c_{inv}(H) = c(H_\mu),$$

para $\mu \in \mathcal{G}^*$ tal que $G_\mu = G$ ($\mu = 0$, por exemplo), de modo que, se u é KAM fraca, então $u = u_\mu$. Logo temos o teorema sobre KAM fracas reduzidas:

Teorema 2.2.2. *Se $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz (H1)-(H4) com $\mathcal{M} \neq \emptyset$, então u é KAM fraca se e somente se u_μ é KAM fraca reduzida com $G_\mu = G$.*

Esse teorema é, na verdade, um método de obtenção de KAM fracas, desde que consigamos determinar as reduzidas.

2.3 Um Hamiltoniano Mecânico no Toro T^2

Seja $H : T^*T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ o Hamiltoniano dado por

$$H(\theta, p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - 1 + \cos 2\pi(\theta_1 - \theta_2),$$

onde T^2 é o toro plano. Consideremos o grupo de Lie $G = S^1$ e a ação $\Phi : G \times T^2 \rightarrow T^2$ dada por

$$\Phi(\phi, \theta) = (\theta_1 + \phi, \theta_2 + \phi).$$

Temos que H é invariante pela ação levantada de Φ ao fibrado cotangente de T^2 . Identificando $\mathcal{G} = \mathbb{R}$, dado $X = 1 \in \mathcal{G}$,

$$X^\#(\theta) = (1, 1),$$

de modo que o mapa momento associado é dado por

$$J(\theta, p) = p_1 + p_2.$$

Como H é um Hamiltoniano mecânico, temos que $c(H) = 0$ e o conjunto de Mather é dado por

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \{(\theta, 0) \in TT^2 : \theta_1 = \theta_2\} \simeq S^1.$$

Observe que a curva fechada cujo traço é $\widetilde{\mathcal{M}}$ não é solução do campo de Euler-Lagrange. Na verdade $\widetilde{\mathcal{M}}$ é formado por soluções de equilíbrio da forma $(\theta_1, \theta_1, 0, 0)$ com $\theta_1 \in S^1$. Fazendo a mudança de coordenadas simpléticas

$$(\theta, p) \mapsto (\theta_1 + \theta_2, \theta_1 - \theta_2, p_1 + p_2, p_1 - p_2)$$

com $\phi_1 = \theta_1 + \theta_2$, $\phi_2 = \theta_1 - \theta_2$, $P_1 = p_1 + p_2$ e $P_2 = p_1 - p_2$, transformamos o campo Hamiltoniano

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_1 = p_1 \\ \dot{\theta}_2 = p_2 \\ \dot{p}_1 = -2\pi \operatorname{sen} 2\pi (\theta_1 - \theta_2) \\ \dot{p}_2 = 2\pi \operatorname{sen} 2\pi (\theta_1 - \theta_2) \end{array} \right.$$

em

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi}_1 = c_1 \\ \dot{\phi}_2 = P_2 \\ \dot{P}_1 = 0 \\ \dot{P}_2 = -4\pi \operatorname{sen} (2\pi \phi_2) \end{array} \right. ,$$

onde c_1 é a constante da integral primeira $J(\theta, p) = p_1 + p_2$. Portanto conseguimos exibir seções do espaço de fase nessas novas coordenadas. Por outro lado, fazendo a redução simplética com

$$J(\theta, p) = p_1 + p_2 = -2\mu$$

teremos $J^{-1}(-2\mu)/G = \{(x, p_x) \in T^*S^1 : x = \theta_1 - \theta_2, p_x = p_1\} = T^*S^1$ e

$$H_{-2\mu}(x, p_x) = p_x^2 + 2\mu p_x + 2\mu^2 - 1 + \cos 2\pi x.$$

O Lagrangiano associado é da forma

$$L_{-2\mu}(x, v_x) = \frac{v_x^2}{4} - \mu v_x - \mu^2 + 1 - \cos 2\pi x.$$

Seguindo Sorrentino [15] (páginas 33-37) consideraremos o Lagrangiano

$$L_0(x, v_x) = \frac{v_x^2}{4} + 1 - \cos 2\pi x$$

a fim de estudarmos a função α_0 de Mather. A função energia é dada por

$$E_0(x, v_x) = \frac{v_x^2}{4} - 1 + \cos 2\pi x$$

Repetindo os argumentos de Sorrentino obtemos

$$\alpha_0(\mu) = \begin{cases} 0, \mu \in \left[-\frac{4\sqrt{2}}{\pi}, \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\right] \\ E(|\mu|), |\mu| > \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \end{cases} ,$$

onde $E : \left(\frac{4\sqrt{2}}{\pi}, +\infty\right) \rightarrow (0, +\infty)$ é a inversa de $c^+ : (0, +\infty) \rightarrow \left(\frac{4\sqrt{2}}{\pi}, +\infty\right)$ que é a cohomologia da órbita periódica (superior) de energia E . Observe que temos denotado por μ a classe de cohomologia da 1-forma $\eta_\mu(x) = \mu dx$. Logo

$$L_{-2\mu} = L_0 - \eta_\mu - \mu^2,$$

de modo que o valor crítico de $L_{-2\mu}$ é

$$c(L_{-2\mu}) = \mu^2 + \alpha_0(\mu).$$

Portanto o valor crítico de $L_{-2\mu}$ é uma função estritamente convexa, superlinear e simétrica em μ . Em particular $c(L_{-2\mu}) \geq 0$ com

$$c(L_{-2\mu}) = 0 \Leftrightarrow \mu = 0.$$

Logo a equação de Hamilton-Jacobi

$$H_{-2\mu}(x, d_x u) = c(H) = 0,$$

admite solução apenas para $\mu = 0$, uma vez que $c(H_{-2\mu}) \geq 0$ com $c(H_{-2\mu}) = 0$ se e somente se $\mu = 0$. Assim obtemos, a menos de constante, as seguinte KAM fracas reduzidas:

$$u_0^\pm(x) = \begin{cases} \mp \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cos(\pi x), & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \pm \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cos(\pi x), & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Portanto $u^\pm(\theta_1, \theta_2) = u_0^\pm(\theta_1 - \theta_2)$ são KAM fracas para H . Também temos que a medida m_0 com suporte em $(0, 0) \in TS^1$ é a única medida de Mather reduzida, de modo que medidas m com suporte em $(\theta_1, \theta_1, 0, 0) \in TT^2$ serão as únicas medidas de Mather para L .

Capítulo 3

O teorema KAM fraco para o problema de N -corpos em variedades

Provaremos nesse capítulo que os resultados obtidos por E. Maderna [17] são válidos também para variedades de curvatura seccional não-positiva completas e simplesmente conexas.

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana completa simplesmente conexa de curvatura seccional não-positiva de dimensão n e $M^N = M \times \dots \times M$ a variedade produto, onde $n \geq 1$ e N é o número de corpos. O caso $n = 1$ será pensado como uma variedade unidimensional com uma métrica conforme (uma densidade). Considere o Lagrangiano $L : TM^N \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$L(x, v) \mapsto \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i g(x_i, v_i) + U_\kappa(x),$$

onde $U_\kappa(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{[d(x_i, x_j)]^{2\kappa}}$ com $\kappa \in (0, 1)$ e d denota a distância dada pela métrica g . A fim de generalizarmos o teorema KAM fraco para N corpos em espaços euclidianos de E. Maderna (ver [17]) para o nosso caso, provaremos o seguinte resultado:

Teorema 3.0.1. *Sejam $R > 0$ e $B(r, R) = \{z \in M^N \mid d(z_i, r) \leq R, i = 1, \dots, N\}$. Dados $x, y \in B(r, R)$ e $T > 0$ existe $\Gamma \in C(x, y, T)$ tal que*

$$\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{\Gamma}(t)|^2 dt \leq \frac{\alpha R^2}{T} \text{ e } \int_0^T U_\kappa(\Gamma(t)) dt \leq \frac{\beta T}{R^{2\kappa}},$$

onde α e β são constantes que dependem apenas do número de corpos, da massa total e do grau de homogeneidade da função potencial U_κ .

Antes de iniciarmos a prova do teorema recordaremos alguns resultados de geometria Riemanniana e estabeleceremos uma notação compatível à utilizada por E. Maderna (ver [17], proposição 4). Denotaremos uma configuração $x = (r_1, \dots, r_N)$ em M^N por $\tilde{x} = (\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_N)$. Considere o mapa exponencial de um ponto $\tilde{r} \in M$,

$$\exp_{\tilde{r}} : T_{\tilde{r}}M \rightarrow M.$$

Com nossas hipóteses, pelo teorema de Hadamard (ver [11], teorema 3.1, página 165) $\exp_{\tilde{r}}$ é um difeomorfismo global. Se $\tilde{\sigma} \in M$ denotaremos por $\sigma = (\exp_{\tilde{r}})^{-1}(\tilde{\sigma})$. Faremos uso de uma consequência do teorema de comparação de Rauch (ver [11], proposição 5, página 241):

Proposição 3.0.2. *Sejam M^n e \tilde{M}^n variedades Riemannianas e suponhamos que para todo $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$, $\vartheta \subset T_pM$, $\tilde{\vartheta} \subset T_{\tilde{p}}\tilde{M}$, se tenha que*

$$\tilde{K}_{\tilde{p}}(\tilde{\vartheta}) \geq K_p(\vartheta).$$

Sejam $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$ e fixe uma isometria linear $i : T_pM \rightarrow T_{\tilde{p}}\tilde{M}$. Seja $r > 0$ tal que a restrição $\exp_p|_{B_r(0)}$ seja um difeomorfismo e $\exp_{\tilde{p}}|_{\tilde{B}_r(0)}$ seja não-singular. Seja

$$c : [0, a] \rightarrow \exp_p(B_r(0)) \subset M$$

uma curva diferenciável e defina uma curva

$$\tilde{c} : [0, a] \rightarrow \exp_{\tilde{p}}(\tilde{B}_r(0)) \subset \tilde{M}$$

por $\tilde{c}(s) = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1}(c(s))$, $s \in [0, a]$. Então

$$l(c) \geq \tilde{l}(\tilde{c}).$$

Essa proposição nos diz que, quanto menor a curvatura, maior o comprimento.

Prova do Teorema. Conforme notação estabelecida acima, seja $\tilde{x} = (\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_N)$ uma configuração em M^N tal que

$$d(\tilde{r}_i, \tilde{r}) \leq R, i = 1, \dots, N.$$

Considere a configuração $x = (r_1, \dots, r_N) = (\exp_p^{-1}(\tilde{r}_1), \dots, \exp_p^{-1}(\tilde{r}_N)) \in (T_rM)^N$. Como $d(\tilde{r}_i, \tilde{r}) \leq R$,

$$R \geq d(\tilde{r}_i, \tilde{r}) = \tilde{l}(\tilde{\delta}_i) \geq l(\delta_i) \geq \|r_i - r\|,$$

onde $\tilde{\delta}_i$ é geodésica minimizante e δ_i é uma curva ligando r_i a r . Logo existe uma curva

$$z_x(t) = x + \psi_x(t)(p - x)$$

tal que

$$\frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{z}_x(t)|^2 dt \leq 160 \frac{1+\kappa}{1-\kappa} MN^4 R^2$$

e

$$\int_0^1 \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{\|z_x^i(t) - z_x^j(t)\|^{2\kappa}} dt \leq 2 \frac{1+\kappa}{1-\kappa} M^2 N^{(4\kappa+2)} R^{-2\kappa},$$

em que $p = (p_1, \dots, p_N)$ e ψ_x satisfazem:

- $p_i = r + (i - 1)v$, com $i = 1, \dots, N$ e $\|v\| = 6R$.
- $\psi_x : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é um homeomorfismo crescente absolutamente contínuo tal que

$$\int_0^1 \dot{\psi}_x(t) dt \leq 5N^2 \frac{1+\kappa}{1-\kappa}$$

e, para cada $i < j$ existe $s_{ij} \in \mathbb{R}$ tal que

$$|\psi_x(t) - t_{ij}| \geq N^{-2} |t - s_{ij}|^{1/(1+\kappa)},$$

para $t \in [0, 1]$ e t_{ij} conforme em [17]. Defina agora

$$\tilde{z}_{\tilde{x}}(t) = \exp_{\tilde{r}}(z_x(t)).$$

Pela proposição 3.0.2, se $i < j$,

$$d(\tilde{z}_{\tilde{x}}^i(t), \tilde{z}_{\tilde{x}}^j(t)) = \tilde{l}(\tilde{\delta}_{ij}(t)) \geq l(\delta_{ij}(t)) \geq \|z_x^i(t) - z_x^j(t)\|,$$

onde $\tilde{\delta}_{ij}(t)$ é geodésica minimizante ligando $\tilde{z}_{\tilde{x}}^i(t)$ a $\tilde{z}_{\tilde{x}}^j(t)$ e $\delta_{ij}(t) = (\exp_{\tilde{r}})^{-1}(\tilde{\delta}_{ij}(t))$ é uma curva ligando $z_x^i(t)$ a $z_x^j(t)$. Portanto

$$\int_0^1 U_\kappa(\tilde{z}_{\tilde{x}}(t)) dt \leq \int_0^1 \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{\|z_x^i(t) - z_x^j(t)\|^{2\kappa}} dt \leq 2 \frac{1+\kappa}{1-\kappa} M^2 N^{(4\kappa+2)} R^{-2\kappa}.$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{dt} \tilde{z}_{\tilde{x}}^i(t) = d(\exp_{\tilde{r}})_{z_x^i(t)}(\dot{\psi}_x(t)(p_i - x_i)).$$

Como $z_x([0, 1]) \subset B(r, 6NR)$ e $\|p_i - x_i\| \leq 8NR$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 \left| d(\exp_{\tilde{r}})_{z_x^i(t)}(\dot{\psi}_x(t)(p_i - x_i)) \right|^2 dt &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|p_i - x_i\|^2 \int_0^1 \dot{\psi}_x(t) dt \\ &\leq 32 [K(6NR)]^2 MN^2 R^2 \left(5N^2 \frac{1+\kappa}{1-\kappa} \right) \\ &= 160 [K(6NR)]^2 \frac{1+\kappa}{1-\kappa} MN^4 R^2, \end{aligned}$$

onde $K(6NR) := \max_{\|w\| \leq 6NR} |d(\exp_{\tilde{r}})_w| < \infty$. Se $\tilde{y} = (\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_N)$ é outra configuração em $\tilde{B}(\tilde{r}, R)$ defina $\tilde{\gamma} \in C(\tilde{x}, \tilde{y}, 2)$ por

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \tilde{z}_{\tilde{x}}(t), & t \leq 1 \\ \tilde{z}_{\tilde{y}}(2-t), & t \geq 1 \end{cases}.$$

Logo

$$A_L(\tilde{\gamma}) = A_L(\tilde{z}_{\tilde{x}}) + A_L(\tilde{z}_{\tilde{y}}) \leq 320 [K(6NR)]^2 \frac{1+\kappa}{1-\kappa} MN^4 R^2 + 4 \frac{1+\kappa}{1-\kappa} M^2 N^{(4\kappa+2)} R^{-2\kappa}.$$

Para finalizar basta considerar a curva $\tilde{\Gamma}(t) = \tilde{\gamma}(\frac{2t}{T})$ e obter o resultado com

$$\alpha = 640 [K(6NR)]^2 \frac{1+\kappa}{1-\kappa} MN^4 \text{ e } \beta = 2 \frac{1+\kappa}{1-\kappa} M^2 N^{(4\kappa+2)}.$$

□

A partir de agora se $\tilde{x} \in M^N$ denotaremos \tilde{x} simplesmente por x . Considere a distância $\tilde{d}: M^N \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{d}(x, y) = \max_{1 \leq i \leq N} \{d(x_i, y_i)\}.$$

Os resultados seguintes são adaptações dos argumentos de E. Maderna. Lembramos que, para $T > 0$,

$$\phi(x, y, T) = \inf \{A(\gamma) : \gamma \in C(x, y, T)\}$$

e

$$\phi(x, y) = \inf_{T>0} \{\phi(x, y, T)\} = \inf \{A(\gamma) : \gamma \in C(x, y)\}.$$

Lema 3.0.3. *Dados $x, y \in M^N$, temos que $\phi(x, y) = 0$ se e só se $x = y$.*

Demonstração. Sejam $x, y \in M^N$ e $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N) \in C(x, y)$. Se $d = \tilde{d}(x, y)$ e γ é definida em $[0, T]$, então existe $T_0 \in [0, T]$ tal que

$$\tilde{d}(\gamma(T_0), x) = d \text{ e } \tilde{d}(\gamma(t), x) \leq d,$$

para $t \in [0, T_0]$. Para algum $k \in \{1, \dots, N\}$ teremos

$$\tilde{d}(\gamma_k(T_0), x_k) = d.$$

Se $T_0 \geq 1$,

$$A(\gamma) \geq \int_0^{T_0} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{d(\gamma_i(t), \gamma_j(t))} dt \geq T_0 C > 0,$$

onde $C = \min \left\{ \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{d(z_i, z_j)} : \tilde{d}(z, x) \leq d \right\}$. Se $T_0 \leq 1$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$A(\gamma) \geq \frac{m_k}{2} \int_0^{T_0} \|\dot{\gamma}_k(t)\|^2 dt \geq \frac{md^2}{2},$$

onde $m = \min \{m_1, \dots, m_N\}$. Portanto, se $\phi(x, y) = 0$ teremos $T_0 \leq 1$ e $d = 0$, de modo que $x = y$. Reciprocamente, se $x \in M^N$ tome $\delta : [0, 1] \rightarrow M^N$ tal que

$$\delta(0) = x \text{ e } A(\delta) < +\infty.$$

Isso é possível pelo Teorema 3.0.1 anterior. Para cada $T \in (0, 2]$ defina $\gamma_T \in C(x, x, T)$ por

$$\gamma_T(t) = \begin{cases} \delta(t), & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ \delta(T-t), & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}.$$

Por uma mudança de variáveis concluímos que

$$A(\gamma_T) \rightarrow 0 \text{ quando } T \rightarrow 0,$$

de modo que $\phi(x, x) = 0$. □

Dado $\lambda > 1$ dizemos que $\{x_1, \dots, x_k\} \subset M$ define uma partição λ -cluster de tamanho $R > 0$ de $A \subset M$ se:

- $d(x_i, x_j) \geq 2\lambda R$ para $1 \leq i < j \leq k$;
- $A \subset \bigcup_{i=1}^k B(x_i, R)$, onde $B(r, R) = \{s \in M : d(s, r) \leq R\}$.

Lema 3.0.4. *Dados $\lambda > 1$, $A = \{x_1, \dots, x_N\} \subset M$ e $\epsilon > 0$ existem $A' \subset A$ e $R(\epsilon) > 0$ tais que*

1. $\epsilon \leq R(\epsilon) < (2\lambda)^N \epsilon$;
2. A' define uma partição λ -cluster de tamanho $R(\epsilon)$ de A .

Demonstração. Seja $A'_1 = A$. Se A'_1 não define uma partição λ -cluster de tamanho ϵ de A , então existem $r_1, s_1 \in A'_1$ tais que

$$d(r_1, s_1) < 2\lambda\epsilon.$$

Assim defina $A'_2 = A'_1 \setminus \{s_1\}$. Se A'_2 não define uma partição λ -cluster de tamanho $2\lambda\epsilon$ de A , então existem $r_2, s_2 \in A'_2$ tais que

$$d(r_2, s_2) < (2\lambda)^2 \epsilon.$$

Procedendo dessa forma, se $A'_j = A'_{j-1} \setminus \{s_{j-1}\} = A \setminus \{s_1, \dots, s_{j-1}\}$ não define uma partição λ -cluster de tamanho $(2\lambda)^{j-1} \epsilon$ de A , então existem $r_j, s_j \in A'_j$ tais que

$$d(r_2, s_2) < (2\lambda)^j \epsilon.$$

Este processo finaliza para $j = N$. □

Proposição 3.0.5. *Dados $x, y \in M^N$ e $T > 0$ existem constantes $\alpha, \beta > 0$ tais que*

$$\phi(x, y, T) \leq \frac{\alpha\epsilon^2}{T} + \frac{\beta T}{\epsilon},$$

onde $\epsilon > \tilde{d}(x, y)$.

Demonstração. Fixe $x = (x_1, \dots, x_N) \in M^N$ e denote por $A_x = \{x_1, \dots, x_N\} \subset M$. Seja $y = (y_1, \dots, y_N)$ outra configuração. Pelo Lema anterior, tomando $A = A_x$, $\epsilon > \tilde{d}(x, y)$ e $\lambda = 24N$ teremos

$$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\} \subset A_x \text{ e } R(\epsilon) > 0$$

tais que

1. $\epsilon \leq R(\epsilon) < (48N)^N \epsilon$;
2. $d(x_{i_j}, x_{i_l}) \geq 48NR(\epsilon)$ para $1 \leq j < l \leq k$;
3. $A_x \subset \bigcup_{j=1}^k B(x_{i_j}, R(\epsilon))$.

De 2. e 3. temos que

$$B(x_{i_j}, R(\epsilon)) \cap B(x_{i_l}, R(\epsilon)) = \emptyset \text{ se } j \neq l$$

e

$$A_y \subset B(x_{i_j}, 2R(\epsilon)),$$

pois

$$d(y_l, x_l) \leq \tilde{d}(x, y) < \epsilon \leq R(\epsilon),$$

de modo que, se $l = i_j$, $j = 1, \dots, k$, então $y_l \in B(x_{i_j}, 2R(\epsilon))$. Caso contrário $x_l \in B(x_{i_j}, R(\epsilon))$ para algum j , logo

$$d(y_l, x_{i_j}) \leq d(y_l, x_l) + d(x_l, x_{i_j}) < \epsilon + R(\epsilon) \leq 2R(\epsilon).$$

Portanto $A_x \cup A_y \subset \bigcup_{j=1}^k B_j$, onde $B_j = B(x_{i_j}, 2R(\epsilon))$. Considere agora a partição

$$\{1, \dots, N\} = I_1 \cup \dots \cup I_k$$

tal que $i \in I_j$ se são se $x_i, y_i \in B_j$. Denote por N_j o número de corpos em B_j e por M_j a massa total, ou seja,

$$M_j = \sum_{i \in I_j} m_i.$$

Logo $N = N_1 + \dots + N_k$ e $M = M_1 + \dots + M_k$. Considere agora o problema de N_j corpos nas bolas B_j . Dado $T > 0$, pela teorema 3.0.1 obtemos $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N) \in C(x, y, T)$ tal que, para $j = 1, \dots, k$:

$$1. T_j = \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i \in I_j} m_i \|\dot{\gamma}_i(t)\|^2 dt \leq \frac{10^6}{T} [K(12NR(\epsilon))]^2 \frac{1+\kappa}{1-\kappa} M_j N_j^6 R(\epsilon)^2;$$

$$2. W_j = \int_0^T \sum_{i, l \in I_j, i < l} \frac{m_i m_l}{[d(\gamma_i(t), \gamma_l(t))]^{2\kappa}} dt \leq 2 \frac{1+\kappa}{1-\kappa} M_j^2 12^{-2\kappa} N_j^{(2\kappa+2)} R^{-2\kappa} T.$$

Note que

$$A(\gamma) = \sum_{j=1}^k T_j + \sum_{j=1}^k W_j + W_0,$$

onde

$$W_0 = \int_0^T \sum_{i \in I_j, l \in I_p, 1 \leq j < p \leq k} \frac{m_i m_l}{d(\gamma_i(t), \gamma_l(t))} dt.$$

Como as bolas $B(x_{i_j}, 24NR(\epsilon))$ são disjuntas, obtemos

$$W_0 \leq \frac{M^2 N^2 T}{[24NR(\epsilon)]^{2\kappa}}.$$

Usando que $R(\epsilon) < (48N)^N \epsilon$ obteremos constantes $\alpha_1, \beta_1 > 0$ tais que

$$A(\gamma) < \frac{\alpha_1}{T} \epsilon^2 + \frac{\beta_1 T}{\epsilon^{2\kappa}}.$$

□

Corolário 3.0.6. *Existe uma constante $\mu > 0$ tal que, para todo $x \in M^N$*

$$\phi(x, x, T) \leq \mu T^{\frac{1-\kappa}{1+\kappa}}.$$

Demonstração. Tome $\epsilon = T^{\frac{1}{1+\kappa}}$ na proposição 3.0.5, logo

$$\begin{aligned}\phi(x, x, T) &\leq \frac{\alpha_1}{T} \left(T^{\frac{1}{1+\kappa}}\right)^2 + \frac{\beta_1 T}{\left(T^{\frac{1}{1+\kappa}}\right)^{2\kappa}} \\ &\leq \alpha_1 T^{\frac{1-\kappa}{1+\kappa}} + \beta_1 T^{\frac{1-\kappa}{1+\kappa}} \\ &= \mu T^{\frac{1-\kappa}{1+\kappa}},\end{aligned}$$

onde $\mu = \alpha_1 + \beta_1$. □

Teorema 3.0.7. *Existe uma constante $\eta > 0$ tal que, para todo $x, y \in M^N$*

$$\phi(x, y) \leq \eta \left(\tilde{d}(x, y)\right)^{1-\kappa}.$$

Demonstração. Vimos que, $\phi(x, y) = 0$ se só se $x = y$. Se $x \neq y$, pela proposição 3.0.5

$$A(\gamma) < \frac{\alpha_1}{T} \epsilon^2 + \frac{\beta_1 T}{\epsilon^{2\kappa}}$$

para todo $T > 0$ e para todo $\epsilon > \tilde{d}(x, y) > 0$. Pela continuidade da função

$$\epsilon \mapsto \frac{\alpha_1}{T} \epsilon^2 + \frac{\beta_1 T}{\epsilon^{2\kappa}}$$

temos que

$$\phi(x, y, T) \leq \frac{\alpha_1}{T} \left(\tilde{d}(x, y)\right)^2 + \frac{\beta_1 T}{\left(\tilde{d}(x, y)\right)^{2\kappa}}.$$

Fazendo $T = \left(\tilde{d}(x, y)\right)^{1+\kappa}$ obteremos

$$\begin{aligned}\phi(x, y, T) &\leq \alpha_1 \left(\tilde{d}(x, y)\right)^{1-\kappa} + \beta_1 \left(\tilde{d}(x, y)\right)^{1-\kappa} \\ &= \eta \left(\tilde{d}(x, y)\right)^{1-\kappa},\end{aligned}$$

onde $\eta = \alpha_1 + \beta_1$. □

O teorema KAM fraco invariante de E. Maderna afirma existir uma função $u : E^N \rightarrow \mathbb{R}$ dominada e invariante tal que

$$u = T_t^- u \text{ para todo } t \geq 0,$$

onde $T_t^- u(x) = \inf \{u(y) + \phi(x, y, t) \mid y \in E^N\}$ e

$$u(x_1, \dots, x_N) = u(Rx_1 + r, \dots, Rx_N + r),$$

para todo $r \in E$ e R transformação ortogonal de E . No nosso caso invariante significa invariante por isometrias de (M, g) , ou seja, $u : M^N \rightarrow \mathbb{R}$ é invariante se

$$u(x_1, \dots, x_N) = u(f(x_1), \dots, f(x_N))$$

para toda isometria f de M . Uma função $u : M^N \rightarrow \mathbb{R}$ é dita dominada se

$$u(x) - u(y) \leq \phi(x, y), \forall x, y \in M^N.$$

Logo o teorema fica:

Teorema 3.0.8. *Existe $u : M^N \rightarrow \mathbb{R}$ dominada e invariante tal que*

$$u = T_t^- u \text{ para todo } t \geq 0.$$

Denotaremos o espaço das funções dominadas por

$$\mathcal{H} = \{u : M^N \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é dominada}\}.$$

Muniremos \mathcal{H} com a topologia gerada pelos conjuntos

$$U_K(u, \epsilon) = \{v \in \mathcal{H} \mid |v(x) - u(x)| < \epsilon, \forall x \in K\},$$

onde $u \in \mathcal{H}$, $K \subset M^N$ é compacto e $\epsilon > 0$. Restringiremos T_t^- ao espaço \mathcal{H} e observaremos que

$$T_t^- u \in \mathcal{H}, \forall u \in \mathcal{H},$$

pois, $u \in \mathcal{H}$ se e somente se $u \leq T_t^- u$ para $t \geq 0$ e, por outro lado

$$u \leq v \Rightarrow T_t^- u \leq T_t^- v.$$

Estamos interessados em provar que:

Proposição 3.0.9. $T^- : \mathcal{H} \times [0, \infty) \rightarrow \mathcal{H}$ dado por $T^-(u, t) = T_t^- u$ é contínua.

Antes provaremos o seguinte lema:

Lema 3.0.10. *Dados $x, y \in M^N$ e $T > 0$ temos que*

$$\phi(x, y, T) \geq \frac{m}{2T} \left(\tilde{d}(x, y) \right)^2,$$

onde $m = \min \{m_1, \dots, m_N\}$.

Demonstração. Se $r, s \in M$ e $\sigma \in C(r, s, T)$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$d(r, s) \leq \int_0^T \|\dot{\sigma}(t)\| dt \leq T^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|\dot{\sigma}(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo

$$(d(r, s))^2 \leq T \int_0^T \|\dot{\sigma}(t)\|^2 dt.$$

Se $x = (x_1, \dots, x_N)$, $y = (y_1, \dots, y_N)$ e $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N) \in C(x, y, T)$ com $\tilde{d}(x, y) = d(x_i, y_i)$, então

$$A_L(\gamma) \geq \frac{m_i}{2} \int_0^T \|\dot{\gamma}_i(t)\|^2 dt \geq \frac{m_i}{2T} (d(x_i, y_i))^2 \geq \frac{m}{2T} (\tilde{d}(x, y))^2.$$

Pela definição de ϕ o lema está provado. \square

Prova da Proposição 3.0.9. Primeiramente provaremos que, dados $R > 0$ e $t > 0$ existe uma constante $k(R, t) > 0$ tal que

$$T_t^- u(x) = \inf \left\{ u(y) + \phi(x, y, t) \mid \tilde{d}(x, y) \leq k(R, t) \right\}$$

para $u \in \mathcal{H}$ e $x \in M^N$ em alguma bola fechada de raio R . De fato, fixados $R > 0$, $t > 0$, $u \in \mathcal{H}$ e x , suponha que $y \in M^N$ é tal que

$$\tilde{d}(x, y) > 1 \text{ e } u(y) + \phi(x, y, t) \leq u(x) + \phi(x, x, t).$$

Pelo lema 3.0.10 e o teorema 3.0.7,

$$\frac{m}{2t} (\tilde{d}(x, y))^2 \leq \phi(x, y, t) \leq \eta (\tilde{d}(x, y))^{1-\kappa} + \phi(x, x, t).$$

Como $\tilde{d}(x, y) > 1$, logo $\tilde{d}(x, y) \geq (\tilde{d}(x, y))^{1-\kappa}$. Pelo teorema 3.0.1,

$$\phi(x, x, t) \leq \frac{\alpha R^2}{t} + \frac{\beta T}{R^{2\kappa}}.$$

Portanto

$$m (\tilde{d}(x, y))^2 \leq 2\eta t \tilde{d}(x, y) + 2\alpha R^2 + 2\beta t^2 R^{-2\kappa},$$

de modo que

$$\left(\tilde{d}(x, y) - \frac{\eta t}{m} \right)^2 \leq \frac{\eta^2 t^2}{m^2} + \frac{2\alpha R^2}{m} + \frac{2\beta t^2}{m R^{2\kappa}}.$$

Assim

$$\tilde{d}(x, y) \leq k_0(R, t),$$

onde $k_0(R, t) = \frac{\eta t}{m} + \left(\frac{\eta^2 t^2}{m^2} + \frac{2\alpha R^2}{m} + \frac{2\beta t^2}{mR^{2\kappa}} \right)^{\frac{1}{2}}$. Fazendo $k(R, t) = \max\{1, k_0(R, t)\}$ temos

$$u(y) + \phi(x, y, t) > u(x) + \phi(x, x, t),$$

se $\tilde{d}(x, y) > k(R, t)$. Logo

$$\begin{aligned} T_t^- u(x) &= \inf \{u(y) + \phi(x, y, t) \mid y \in M^N\} \\ &= \inf \{u(y) + \phi(x, y, t) \mid \tilde{d}(x, y) \leq k(R, t)\}. \end{aligned}$$

Agora sejam $u, v \in \mathcal{H}$, $t > 0$, $R > 0$ e $K \subset M^N$ um compacto. Se

$$K_t = \bigcup_{x \in K} \{y \in M^N \mid \tilde{d}(x, y) \leq k(R, t)\},$$

então, para todo $x \in K$,

$$T_t^- v(x) = \inf \{v(y) + \phi(x, y, t) \mid y \in K_t\}.$$

Por outro lado, para todo $y \in K_t$,

$$v(y) \leq u(y) + \sup_{y \in K_t} \{|u(y) - v(y)|\},$$

de modo que

$$T_t^- v(x) \leq \inf \{u(y) + \phi(x, y, t) \mid y \in K_t\} + \sup_{y \in K_t} \{|u(y) - v(y)|\}.$$

Portanto

$$T_t^- v(x) - T_t^- u(x) \leq \sup_{y \in K_t} \{|u(y) - v(y)|\},$$

para todo $x \in K$. Como u e v são arbitrárias,

$$|T_t^- v(x) - T_t^- u(x)| \leq \sup_{y \in K_t} \{|u(y) - v(y)|\} \forall x \in K.$$

Pela compacidade de K_t segue a continuidade de T_t^- para cada $t \geq 0$. Resta provar a continuidade com respeito a t . Pela propriedade de semigrupo basta provar a continuidade em $t = 0$. Dado $u \in \mathcal{H}$ temos que

$$0 \leq T_t^- u(x) - u(x) \leq \phi(x, x, t) \leq \mu t^{\frac{1-\kappa}{1+\kappa}}, \forall x \in M^N,$$

pelo corolário 3.0.6. Portanto $T_t^- u$ converge uniformemente para u quando $t \rightarrow 0$, concluindo a demonstração. \square

Prova do Teorema 3.0.8. Seja $\widehat{\mathcal{H}}$ o espaço quociente de \mathcal{H} pelo subespaço das funções constantes. Então $\widehat{\mathcal{H}}$ é homeomorfo a $\mathcal{H}_0 = \{u \in \mathcal{H} | u(x_0) = 0\}$, fixado $x_0 \in M^N$. Pelo teorema 3.0.7,

$$u(x) - u(y) \leq \phi(x, y) \leq \eta \left(\tilde{d}(x, y) \right)^{1-\kappa}, \forall u \in \mathcal{H}_0, \forall x, y \in M^N,$$

de modo que \mathcal{H}_0 é equicontínuo. Além disso, para cada $y \in M^N$ o conjunto $\{u(y) \in \mathbb{R} : u \in \mathcal{H}_0\}$ é compacto, pois é fechado e limitado:

$$|u(y)| = |u(y) - u(x_0)| \leq \eta \left(\tilde{d}(y, x_0) \right)^{1-\kappa} := \eta_y,$$

onde η_y é uma constante que depende apenas de y . Pelo teorema de Arzelà-Ascoli (veja [1], página 267) \mathcal{H}_0 é compacto, de modo que $\widehat{\mathcal{H}}$ é um subconjunto compacto, convexo e não-vazio de $\widehat{C}^0(M^N, \mathbb{R})$ o quociente do espaço das funções contínuas de M^N em \mathbb{R} pelas funções constantes. Lembramos que um espaço vetorial topológico E é localmente convexo se, dados $v \in E$ e $U(v)$ uma vizinhança de v em E , existir um convexo V tal que

$$v \in V \subset U(v).$$

Como $\widehat{C}^0(M^N, \mathbb{R})$ é munido da topologia quociente da topologia compacto aberta em $C^0(M^N, \mathbb{R})$, dados $\widehat{u} \in \widehat{C}^0(M^N, \mathbb{R})$ e $U(\widehat{u})$ uma vizinhança de \widehat{u} , logo

$$U(\widehat{u}) = \left\{ \widehat{v} \in \widehat{\mathcal{H}} : |\widehat{v}(x) - \widehat{u}(x)| < \epsilon, \forall x \in K \right\},$$

para algum compacto $K \subset M^N$. Tome $\widehat{v} \in U(\widehat{u})$ diferente de \widehat{u} , então, para $t \in [0, 1]$

$$|[t\widehat{v}(x) + (1-t)\widehat{u}(x)] - \widehat{u}(x)| = t|\widehat{v}(x) - \widehat{u}(x)| < \epsilon,$$

de modo que a reta ligando \widehat{v} a \widehat{u} está contida em $U(\widehat{u})$. Portanto $\widehat{C}^0(M^N, \mathbb{R})$ é localmente convexo. Por outro lado,

$$T_t^-(u + c) = T_t^-u + c, \forall c \in \mathbb{R}.$$

Logo T^- define um semigrupo contínuo $\widehat{T}_t^- : \widehat{\mathcal{H}} \rightarrow \widehat{\mathcal{H}}$. Se aplicamos o teorema de Tychonoff (veja [1], página 414), obteremos um ponto fixo de \widehat{T}_t^- , ou seja, uma função $u \in \mathcal{H}$ tal que

$$T_t^-u = u + c(t),$$

onde $c : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Nesse momento utilizamos que é conhecido que a propriedade de semigrupo e a continuidade de T_t^- nos fornece

$$c(t) = tc(1).$$

Como $u \leq T_t^- u = u + tc(1)$, então $c(1) \geq 0$. Provaremos que $c(1) = 0$. Temos que

$$u(x) = T_t^- u - tc(1) \leq \phi(x, y, t) + u(y) - tc(1).$$

Pela proposição 3.0.5,

$$u(x) - u(y) \leq \phi(x, y, t) - tc(1) \leq \frac{\alpha\epsilon^2}{t} + \left(\frac{\beta}{\epsilon} - c(1)\right)t,$$

onde $\epsilon > \tilde{d}(x, y)$. Como t e ϵ podem ser tomados arbitrariamente grandes, devemos ter $c(1) = 0$. Logo

$$T_t^- u = u, \forall t \geq 0.$$

Isso mostra que existem pontos fixos de T^- . Nos resta provar que existem pontos fixos que são invariantes. Defina \mathcal{H}_{inv} o subconjunto de \mathcal{H} das funções que são invariantes. Assim \mathcal{H}_{inv} é fechado, convexo e não-vazio, pois contém as funções constantes. Podemos tomar o quociente de \mathcal{H}_{inv} pelas funções constantes e obter $\widehat{\mathcal{H}}_{inv}$ que também é fechado, convexo e não-vazio. Além disso, se $u \in \mathcal{H}_{inv}$, f é uma isometria de M e denotarmos $f(x) = (f(x_1), \dots, f(x_N))$, então

$$\begin{aligned} T_t^- u(f(x)) &= \inf \{u(f(y)) + \phi(f(x), f(y), t) : f(y) \in M^N\} \\ &= \inf \{u(f(y)) + \phi(x, y, t) : y \in M^N\}, \end{aligned}$$

pois $\phi(f(x), f(y), t) = \phi(x, y, t)$. Portanto T_t^- leva função invariante em função invariante. Assim podemos definir

$$\widehat{T}_t^- : \widehat{\mathcal{H}}_{inv} \rightarrow \widehat{\mathcal{H}}_{inv}.$$

Pelo argumento anterior obteremos um ponto fixo, ou seja, uma função invariante u tal que

$$T_t^- u = u, \forall t \geq 0.$$

□

Daremos agora um exemplo no qual o teorema KAM fraco invariante se aplica. Apesar de não termos uma forma explícita para calcular soluções da equação de Hamilton-Jacobi, podemos usar a invariância por isometrias a fim obter certos tipos de KAM fracas.

Exemplo 3.0.11. *Consideremos o caso $N = 2$, $m_1 = m_2 = 1$, $\kappa = 1/2$ e $M = \mathbb{R}_+$ com a métrica*

$$\langle v, w \rangle_x = \frac{vw}{x^2}.$$

A distância associada a essa métrica é dada por $d(x, y) = \left| \ln \frac{x}{y} \right|$. (\mathbb{R}_+, d) é conhecida como linha hiperbólica. Pois bem, queremos obter $u : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{1}{2} \|du(x_1, x_2)\|^2 - \frac{1}{d(x_1, x_2)} = 0.$$

Logo

$$x_1^2 u_{x_1}^2 + x_2^2 u_{x_2}^2 = \frac{2}{|\ln x_2/x_1|}.$$

Como estamos buscando por u invariante, então $u(x_1, x_2) = f(d(x_1, x_2)) = f(|\ln x_2/x_1|)$.

Resolvendo a equação para f obteremos

$$df(y)^2 = \frac{1}{y},$$

com $y = |\ln x_2/x_1|$. Então $f(y) = \pm 2\sqrt{y}$, de modo que obtivemos

$$u_{\pm}(x_1, x_2) = \pm 2\sqrt{|\ln x_2/x_1|}.$$

3.1 Teorema KAM fraco para o Problema de N corpos em variedades de curvatura constante

Provaremos agora que o teorema KAM fraco também é válido para o problema de N corpos sobre variedades hiperbólicas de curvatura seccional constante igual a $-\frac{1}{R^2}$ com o potencial cotangente hiperbólica da distância. Considerando o modelo de Poincaré na bola euclidiana de raio R , trataremos de Hamiltonianos do tipo

$$H_R(x, p) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{\lambda(x_j)}{m_j} \langle p_j, p_j \rangle - \frac{1}{2} \sum_{j < k} m_j m_k \text{ctn}_R(d_R(x_j, x_k)),$$

onde $\lambda(x_j) = \frac{(R^2 - \|x_j\|^2)^2}{4R^4}$, $\text{ctn}_R(d_R(x_j, x_k)) = \frac{1}{R} \coth\left(\frac{d_R(x_j, x_k)}{R}\right)$ e d_R denota a distância. Na verdade o problema de N corpos em espaços de curvatura constante e negativa é dada por esse Hamiltoniano, conforme Diacu, Perez-Chavela, Reyes Victoria [18] e Shchepetilov [12]. Observe que, se $r > 0$ e $\kappa \in (\frac{1}{2}, 1)$,

$$\coth r \leq 1 + r^{-2\kappa}.$$

Logo

$$\coth \frac{r}{R} \leq 1 + \left(\frac{R}{r}\right)^{2\kappa},$$

de modo que

$$\sum_{j < k} m_j m_k \coth \left(\frac{d_R(x_j, x_k)}{R} \right) \leq \sum_{j < k} m_j m_k \left(1 + \left(\frac{R}{r} \right)^{2\kappa} \right), \kappa \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right).$$

Pelo Teorema 3.0.1, dados x e y em uma bola de raio $r > 0$ (na distância d_R) e $T > 0$ existe $\Gamma \in C(x, y, T)$ tal que

$$\int_0^T U_\kappa(\Gamma(t)) dt \leq \frac{\beta T}{r^{2\kappa}},$$

onde β depende apenas do número N de corpos, da massa total M e do grau de homogeneidade da função U_κ dada por

$$U_\kappa(x) = \sum_{j < k} \frac{m_j m_k}{[d(x_j, x_k)]^{2\kappa}}.$$

Logo, se $\kappa \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{j < k} m_j m_k \text{ctn}_R(d_R(\Gamma_j(t), \Gamma_k(t))) dt &\leq \frac{1}{2R} \int_0^T \sum_{j < k} m_j m_k \left[1 + \left(\frac{R}{d_R(\Gamma_j(t), \Gamma_k(t))} \right)^{2\kappa} \right] \\ &\leq \frac{T}{2R} \sum_{j < k} m_j m_k + \frac{R^{2\kappa-1}}{2} \int_0^T U_\kappa(\Gamma(t)) dt \\ &\leq \frac{T}{2} \left(\frac{M^2 N^2}{R} + \frac{\beta R^{2\kappa-1}}{r^{2\kappa}} \right). \end{aligned}$$

Isso nos permite concluir que dados x e y em uma bola de raio $r > 0$ e $T > 0$ existe $\Gamma \in C(x, y, T)$ tal que

$$\frac{1}{2} \int_0^T \left| \dot{\Gamma}(t) \right|^2 dt \leq \frac{\alpha r^2}{T} \text{ e } \int_0^T U_\kappa(\Gamma(t)) dt \leq \frac{\tilde{\beta} T}{r^{2\kappa}},$$

onde α e $\tilde{\beta}$ são constantes que dependem apenas do número de corpos, da massa total, do grau de homogeneidade da função potencial U_κ e do raio r . De posse desse resultado consegue-se provar a condição Holder (Teorema 3.0.7) para esse novo Hamiltoniano de maneira análoga. Finalmente teremos:

Teorema 3.1.1. *Seja $H_R(x, p) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{\lambda(x_j)}{m_j} \langle p_j, p_j \rangle - \frac{1}{2} \sum_{j < k} m_j m_k \text{ctn}_R(d_R(x_j, x_k))$ o Hamiltoniano para o problema de N corpos sobre a variedade hiperbólica M de curvatura seccional constante igual a $-\frac{1}{R^2}$. Existe $u : M^N \rightarrow \mathbb{R}$ dominada e invariante tal que*

$$T_t^- u = u, \text{ para todo } t \geq 0.$$

A prova desse teorema será novamente análoga.

Exemplo 3.1.2. Consideremos o caso $N = 2$, $m_1 = m_2 = 1$, $R = 1$ e $M = \mathbb{R}_+$ com a métrica

$$\langle v, w \rangle_x = \frac{vw}{x^2},$$

ou seja, estamos escolhendo o modelo do semi-plano superior. Já sabemos que a distância associada a essa métrica é dada por

$$d(x, y) = \left| \ln \frac{x}{y} \right|.$$

Queremos obter $u : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ invariante tal que

$$\frac{1}{2} \|du(x_1, x_2)\|^2 - \frac{1}{2} \coth d(x_1, x_2) = 0.$$

Logo

$$x_1^2 u_{x_1}^2 + x_2^2 u_{x_2}^2 = \left| \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 - x_2^2} \right|.$$

Como estamos buscando por u invariante, então $u(x_1, x_2) = f(d(x_1, x_2)) = f(|\ln x_2/x_1|)$.

Resolvendo a equação para f obteremos

$$2df(y)^2 = \coth y,$$

com $y = |\ln x_2/x_1|$. Então

$$f(y) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^y \sqrt{\coth s} ds.$$

Logo temos, a menos de constantes

$$u_{\pm}(x_1, x_2) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{|\ln x_2/x_1|} \sqrt{\coth s} ds.$$

Capítulo 4

Aplicações

Nesse capítulo tratamos do problema de 2 corpos e 3 corpos restrito, ambos no plano hiperbólico real de curvatura -1 . No problema de 3 corpos restrito consideramos o movimento de dois corpos de mesma massa sobre um círculo e o terceiro corpo tendo sua massa desprezada. O problema de N corpos em espaços hiperbólicos foi considerado primeiramente por Lobachevsky ([18]). Desde então vários outros autores trataram do problema, não apenas em espaços hiperbólicos, como em variedades de curvatura seccional constante positiva ([12]). Buscaremos aqui aplicar alguns resultados de redução simplética, repetir alguns argumentos válidos para o caso euclidiano e, principalmente, aplicar nossos resultados sobre KAM fracas reduzidas (teorema 2.2.2). Primeiramente, observaremos um caso de redução que se aplicará ao problema de 2 corpos.

Considere um grupo de Lie G agindo em uma variedade Q livre e propriamente. Assim

$$Q \rightarrow^G Q/G = M$$

é um fibrado principal. Suponha este fibrado trivial, ou seja,

$$Q \simeq^\psi M \times G.$$

Isso ocorre, por exemplo, quando M é simplesmente conexa e o fibrado principal está equipado com uma conexão flat (de curvatura nula). Observe que ψ induz uma ação em $M \times G$ que fixa o primeiro fator, pois

$$g \cdot ([q], h) = ([g \cdot q], g \cdot h) = ([q], g \cdot h).$$

Supondo T^*Q com a estrutura simplética canônica Ω_{can}^Q e tomando a estrutura simplética $(T^*\psi)^* \Omega_{can}^Q$ em $T^*(M \times G)$, fazemos de $T^*\psi$ um symplectomorfismo.

Observaremos que

$$(T^*\psi)^* \Omega_{can}^Q = \Omega_{can}^{M \times G}.$$

Para isso provaremos que $T^*\psi$ preserva a 1-forma de Liouville. Em particular preservará a estrutura canônica.

Lema 4.0.3. *Dado um difeomorfismo $f : Q_1 \rightarrow Q_2$ entre as variedades Q_1 e Q_2 , considere o levantamento $T^*f : T^*Q_2 \rightarrow T^*Q_1$. Então*

$$(T^*f)^* \Theta_1 = \Theta_2,$$

onde Θ_i denota a forma de Liouville em T^*Q_i .

Demonstração. Basta observar que $f \circ \pi_{Q_1} \circ T^*f : T^*Q_2 \rightarrow Q_2$ é a projeção em Q_2 . Dados $\beta \in T^*Q_2$ e $V \in T_\beta(T^*Q_2)$,

$$\begin{aligned} (T^*f)^* \Theta_1(\beta) \cdot V &= \Theta_1(T^*f(\beta)) \cdot T_\beta(T^*f)V \\ &= \langle T^*f(\beta), T_{T^*f(\beta)}\pi_{Q_1} \cdot T_\beta(T^*f)V \rangle \\ &= \langle \beta, T_\beta(f \circ \pi_{Q_1} \circ T^*f) \cdot V \rangle \\ &= \langle \beta, T_\beta\pi_{Q_2} \cdot V \rangle. \end{aligned}$$

□

No nosso caso $f = \psi$, $Q_1 = Q$ e $Q_2 = M \times G$, de modo que a estrutura simplética em $T^*(M \times G)$ será

$$(T^*\psi)^* \Omega_{can}^Q = (T^*\psi)^* (-d\Theta_Q) = -d((T^*\psi)^* \Theta_Q) = -d\Theta_{M \times G} = \Omega_{can}^{M \times G}.$$

Como $T^*(M \times G) \simeq T^*M \times T^*G$, então $\Omega_{can}^{M \times G} = \Omega_{can}^M \oplus \Omega_{can}^G$.

Seja $\tilde{H} : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ um Hamiltoniano de Tonelli invariante pela ação levantada de G ao fibrado cotangente T^*Q . Logo

$$H = \tilde{H} \circ T^*\psi^{-1} : T^*M \times T^*G \rightarrow \mathbb{R}$$

é G invariante. De fato, pelo o que vimos no capítulo de preliminares, basta verificarmos a G invariância para o Lagrangiano associado. Sejam $L : TM \times TG \rightarrow \mathbb{R}$ e $\tilde{L} : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ os Lagrangianos associados a H e \tilde{H} , respectivamente. Dado $h \in G$,

$$h \cdot (x, v_x, g, v_g) = (T\psi \circ Th \circ T\psi^{-1})(x, v_x, g, v_g),$$

então

$$L(h \cdot (x, v_x, g, v_g)) = \tilde{L}((Th \circ T\psi^{-1})(x, v_x, g, v_g)) = \tilde{L}((T\psi^{-1})(x, v_x, g, v_g)) = L((x, v_x, g, v_g)).$$

Para fixar idéias, iremos supor que G age à esquerda em $M \times G$ no segundo fator, ou seja,

$$\Psi_h(x, g) = (x, hg).$$

O mapa momento $\tilde{J} : T^*M \times T^*G \rightarrow \mathcal{G}^*$ é submersão (pois a ação é livre) e satisfaz

$$\begin{aligned} \langle \tilde{J}(\alpha_x, \alpha_g), \xi \rangle &= \langle (\alpha_x, \alpha_g), \xi_{M \times G}(g) \rangle \\ &= \left\langle (\alpha_x, \alpha_g), \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (x, \exp(t\xi)g) \right\rangle \\ &= \langle \alpha_g, T_e R_g(\xi) \rangle, \end{aligned}$$

de modo que $\tilde{J}(\alpha_x, \alpha_g) = T_e^* R_g(\alpha_g)$. Tomando a trivialização à esquerda $\lambda_L : T^*G \rightarrow G \times \mathcal{G}^*$ dada por

$$\lambda_L(\alpha_g) = (g, T_e^* L_g(\alpha_g))$$

temos que a ação de G em $G \times \mathcal{G}^*$ é dada por

$$h \cdot (g, \mu) = (hg, \mu).$$

Assim $J : T^*M \times (G \times \mathcal{G}^*) \rightarrow \mathcal{G}^*$ satisfaz

$$J(\alpha_x, (g, \mu)) = Ad_{g^{-1}}^* \mu.$$

Calculamos a estrutura simplética induzida em $G \times \mathcal{G}^*$ por λ , ou seja,

$$(\lambda_L^{-1})^* \Omega_{can}^G.$$

Temos que

$$(\lambda_L^{-1})^* \Omega_{can}^G = -d((\lambda^{-1})^* \Theta_G).$$

Observe que $(T_e^* L_g)^{-1} = T_g^* L_{g^{-1}}$. Se $\pi_G : T^*G \rightarrow G$ é a projeção, $V_1 \in T_g G$ e $V_2 \in T_\mu \mathcal{G}^*$,

$$\begin{aligned} ((\lambda_L^{-1})^* \Theta_G)_{(g, \mu)}(V_1, V_2) &= \left\langle \lambda_L^{-1}(g, \mu), T_{\lambda^{-1}(g, \mu)} \pi_G \cdot T_{(g, \mu)}^{-1} \lambda_L(V_1, V_2) \right\rangle \\ &= \left\langle T_g^* L_{g^{-1}}(\mu), T_{(g, \mu)}(\pi_G \circ \lambda_L^{-1})(V_1, V_2) \right\rangle \\ &= \left\langle \mu, T_{(g, \mu)}(L_{g^{-1}} \circ \pi_G \circ \lambda_L^{-1})(V_1, V_2) \right\rangle \\ &= \left\langle \mu, g^{-1} V_1 \right\rangle, \end{aligned}$$

onde $(L_{g^{-1}} \circ \pi_G \circ \lambda_L^{-1})(h, \mu) = g^{-1}h$ e $g^{-1}V_1 \in \mathcal{G}$. Para calcular $d((\lambda_L^{-1})^* \Theta_G)$ temos que

$$d((\lambda_L^{-1})^* \Theta_G)(X, Y) = X((\lambda_L^{-1})^* \Theta_G(Y)) - Y((\lambda_L^{-1})^* \Theta_G(X)) - (\lambda_L^{-1})^* \Theta_G([X, Y]).$$

Sejam $X(g, \mu) = (g\xi_1, V_2)$ e $Y(g, \mu) = (g\eta_1, W_2)$ com $\xi_1, \eta_1 \in \mathcal{G}$ e $V_2, W_2 \in T_\mu \mathcal{G}^* \simeq \mathcal{G}^*$.

Assim

$$(\lambda_L^{-1})^* \Theta_G(X) = \langle \mu, \xi_1 \rangle, (\lambda_L^{-1})^* \Theta_G(Y) = \langle \mu, \eta_1 \rangle \text{ e } [X, Y] = (g[\xi_1, \eta_1], [V_2, W_2]).$$

Logo

$$(\lambda_L^{-1})^* \Omega_{can}^G(X, Y) = -d((\lambda_L^{-1})^* \Theta_G)(X, Y) = -(\langle V_2, \eta_1 \rangle - \langle V_1, \xi_1 \rangle - \langle \mu, [\xi_1, \eta_1] \rangle).$$

Lembramos que uma Hamiltoniano $H : N \rightarrow \mathbb{R}$ com n graus de liberdade é dito fracamente integrável ([16]) se existem f_1, \dots, f_n integrais primeiras satisfazendo:

(i) $\{f_i, H\} = 0$ para $i = 1, \dots, n$.

(ii) f_1, \dots, f_n são linearmente independentes em um aberto e denso de N .

Considere H sobre $T^*M \times (G \times \mathcal{G}^*)$ com a estrutura simplética $\Omega_{can}^M \oplus \Omega_{G \times \mathcal{G}^*}$. O campo Hamiltoniano X_H dado por $(\Omega_{can}^M \oplus \Omega_{G \times \mathcal{G}^*})(X_H, \cdot) = dH(\cdot)$ terá a forma

$$\begin{cases} \dot{x} = H_p \\ \dot{p} = -H_x \\ \dot{g} = -g \frac{\delta H}{\delta \mu} \\ \dot{\mu} = ad_{\frac{\delta H}{\delta \mu}}^* \mu \end{cases},$$

onde $\left\langle \frac{\delta H}{\delta \mu}, \nu \right\rangle = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} H(x, p, \mu + t\nu)$.

Identificando \mathcal{G}^* com \mathbb{R}^k , considere o mapa momento energia

$$H \times J : T^*M \times (G \times \mathcal{G}^*) \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}.$$

Caso M seja unidimensional e $H \times J$ seja submersão em quase todo ponto (no sentido de (ii) na definição de fracamente integrável), o sistema será fracamente integrável. Resumidamente temos:

Teorema 4.0.4. *Seja G um grupo de Lie agindo livre e propriamente sobre uma variedade Q . Considere T^*Q com a estrutura canônica. Se $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ é um Hamiltoniano de Tonelli G invariante, $J : T^*Q \rightarrow \mathcal{G}^*$ é o mapa momento associado e $Q \simeq^\psi M \times G$, então existe uma trivialização $\lambda : T^*G \rightarrow G \times \mathcal{G}^*$ tal que J definido sobre $T^*M \times (G \times \mathcal{G}^*)$ é projeção no último fator. Além disso, H sobre $T^*M \times (G \times \mathcal{G}^*)$ será G invariante e o campo X_H será dado por*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = H_p \\ \dot{p} = -H_x \\ \dot{g} = -g(H_{\mu_1}\zeta_1 + \dots + H_{\mu_k}\zeta_k) \\ \dot{\mu} = 0 \end{array} \right. .$$

Corolário 4.0.5. *Nas hipóteses do teorema anterior, X_H é fracamente integrável, desde que, para cada $\mu \in \mathcal{G}^*$ fixado, for fracamente integrável*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = H_p(x, p, e, \mu) \\ \dot{p} = -H_x(x, p, e, \mu) \end{array} \right.$$

com integrais primeiras em involução com $J_i(x, p, g, \mu) = \mu_i$.

Demonstração. Suponha F_1, \dots, F_{n-k} integrais tais que $F_1 \times \dots \times F_{n-k} : T^*M \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ seja submersão em quase todo ponto. Logo $D(F_1 \times \dots \times F_{n-k} \times J)$ tem posto n em quase todo ponto. \square

Em termos de redução simplética pensemos H mecânico. Para cada $\mu \in \mathcal{G}^*$, considere sua órbita coadjunta \mathcal{O}_μ . Sabemos que

$$J^{-1}(\mu)/G_\mu \simeq P_\mu \text{ e } G/G_\mu \simeq \mathcal{O}_\mu.$$

Como $J^{-1}(\mu) \simeq T^*M \times G$, logo $P_\mu \simeq T^*M \times \mathcal{O}_\mu$. Nesse caso temos que os fibrados

$$J^{-1}(\mu) \rightarrow^{G_\mu} P_\mu \text{ e } J^{-1}(\mathcal{O}_\mu) \rightarrow^G P_\mu$$

são triviais. Se $G_\mu = G$ (em particular para $\mu = 0$), então

$$P_\mu \simeq T^*M.$$

Considere o Hamiltoniano reduzido $H_\mu : T^*M \times \mathcal{O}_\mu \rightarrow \mathbb{R}$. Como H é mecânico, se a curvatura da conexão mecânica for nula (em particular para $\dim M = 1$) teremos a estrutura simplética em $T^*M \times \mathcal{O}_\mu$ dada por

$$\Omega_{can}^M \oplus \omega_{\mathcal{O}_\mu},$$

onde $\omega_{\mathcal{O}_\mu}$ é a forma de Kirillov. Apesar de $\Omega_{can}^M \oplus \omega_{\mathcal{O}_\mu}$ ser desacoplada não podemos garantir que o campo reduzido X_{H_μ} seja desacoplado (por exemplo, quando a métrica em $M \times G$ depende de $x \in M$).

A reconstrução da dinâmica torna-se mais simples nesse caso: se $c_\mu(t) = (q_\mu(t), p_\mu(t), \nu(t))$ é solução de X_{H_μ} , estamos interessados em obter $c(t)$ em $J^{-1}(\mu)$ solução de X_H . Tome $\zeta(t) = \mathcal{I}^{-1}(q_\mu(t))(\nu(t)) \in \mathcal{G}_\mu$ e encontre $g(t) \in G_\mu$ tal que

$$g'(t) = g(t)\zeta(t).$$

Assim $c(t) = (q_\mu(t), p_\mu(t), g(t))$. Se $G_\mu = G$ (ou seja, $\mathcal{O}_\mu = \{\mu\}$), então $c_\mu(t) = (q_\mu(t), p_\mu(t), \mu)$ solução de X_{H_μ} será levantada em $c(t) = (q_\mu(t), p_\mu(t), g(t))$, em que $g(t)$ é obtida por

$$\zeta(t) = \mathcal{I}^{-1}(q_\mu(t))(\mu) \in G.$$

O caso $\mu = 0$ implica em $g(t) = g_0$ fixo.

4.1 O Problema de 2-Corpos no Plano Hiperbólico Real

Seja $H^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}z > 0\}$ o plano hiperbólico com a métrica

$$ds^2 = \frac{-4}{(z - \bar{z})^2} dz d\bar{z}$$

de curvatura -1 . Estamos interessados no problema de 2 corpos em H^2 . Mais precisamente, estudaremos o Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} H(w, p) &= \frac{1}{2} \|p\|^2 - m_1 m_2 \coth d(w_1, w_2) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m_1} \langle p_1, p_1 \rangle_{w_1} + \frac{1}{m_2} \langle p_2, p_2 \rangle_{w_2} \right] - m_1 m_2 \coth d(w_1, w_2), \end{aligned}$$

em que $w = (w_1, w_2) \in Q = (H^2)^2 \setminus \Delta$, Δ é a diagonal e m_l são as massas positivas. Consideremos $SL(2, \mathbb{R}) = \{A \in GL(2, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ e a função

$$f : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow Iso(H^2)$$

que associa a cada matriz de $SL(2, \mathbb{R})$ uma isometria de H^2 da seguinte maneira:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto f_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1.$$

Observe que $f_A = f_{-A}$. Se $G = PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R}) / \{I, -I\}$, consideremos a ação de G em Q , $\Phi : G \times Q \rightarrow Q$, dada por

$$(A, w) \mapsto (f_A(w_1), f_A(w_2)).$$

Temos que, para todo $A \in G$,

$$H(\Phi(A, w), p) = H(w, p \circ d\Phi(A, w)), \forall w \in M, \forall p \in T_{\Phi(A, w)}^* M,$$

de modo que H é invariante pela ação levantada de G em T^*Q . Denotemos agora por \mathcal{G} a álgebra de Lie de G . Logo

$$\mathcal{G} = \{X \in M(2, \mathbb{R}) \mid \text{tr} X = 0\}.$$

Tomemos a base de \mathcal{G} :

$$\left\{ \zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \xi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Observe que a ação Φ é livre, de modo que J é uma submersão. De fato,

$$\Phi_A(w) = w \Leftrightarrow \frac{aw_j + b}{cw_j + d} = w_j, \text{ com } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ e } j = 1, 2.$$

Logo w_1 e w_2 devem ser raízes do polinômio complexo com coeficientes reais

$$p(z) = cz^2 + (d - a)z - b.$$

Como $\text{Im} w_j > 0$ e as raízes de $p(z)$ são conjugadas, devemos ter $w_1 = w_2$, o que não é possível em M .

Temos que $\psi : (\mathbb{R}_+ \times G) \rightarrow Q$ dado por

$$\psi(r, A) = (f_A(i), f_A(ie^r))$$

é um difeomorfismo. A injetividade de ψ é equivalente a ação Φ ser livre. A sobrejetividade pode ser obtida da seguinte maneira: dados w_1 e w_2 , tome $B_2 \in G$ tal que

$$f_{B_2}(w_1) = i.$$

Em seguida seja $B_1 \in G_i = \{B \in G : f_B(i) = i\}$ tal que $f_{B_1}(f_{B_2}(w_2))$ tenha parte real nula. Assim existe

$$(r, A) = (d(w_1, w_2), B_1 B_2).$$

A ação induzida por ψ será $\tilde{\Phi} : G \times (\mathbb{R}_+ \times G) \rightarrow \mathbb{R}_+ \times G$ dada por

$$\tilde{\Phi}(B, (r, A)) = (r, BA).$$

A métrica induzida em $\mathbb{R}_+ \times G$ será

$$\langle\langle (v, V), (v', V') \rangle\rangle_{(r,A)} = \langle T_{(r,A)}\psi(v, V), T_{(r,A)}\psi(v', V') \rangle_{(f_A(i), f_A(ie^r))},$$

com $(v, V), (v', V') \in T_r\mathbb{R}_+ \times T_A G$. Observe que $\tilde{\Phi}$ age à direita apenas em G , logo, basta determinar a métrica em (r, I) e usar translação à esquerda.

Temos que, se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, então

$$\psi(r, A) = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{1}{c^2 + d^2}, \frac{bd + ace^{2r}}{d^2 + c^2 e^{2r}} + i \frac{e^r}{d^2 + c^2 e^{2r}} \right).$$

Assim

$$T_{(r,I)}\psi(v, V) = (2v_2 + 2iv_1, v_2(1 + e^{2r}) + v_3(1 - e^{2r}) + ie^r(2v_1 - v)),$$

onde $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 + v_3 \\ v_2 - v_3 & -v_1 \end{pmatrix}$. Considere $\{(1, 0), (0, \zeta), (0, \eta), (0, \xi)\}$ base de $T_r\mathbb{R}_+ \times \mathcal{G}$, com ζ, η, ξ dados acima. Usando translação à esquerda temos que $\{(1, 0), (0, A\zeta), (0, A\eta), (0, A\xi)\}$ é base de $T_r\mathbb{R}_+ \times T_A G$. Logo

$$\begin{aligned} \langle\langle (1, 0), (1, 0) \rangle\rangle_{(r,I)} &= m_2 \\ \langle\langle (1, 0), (0, \zeta) \rangle\rangle_{(r,I)} &= -2m_2 \\ \langle\langle (1, 0), (0, \eta) \rangle\rangle_{(r,I)} &= \langle\langle (1, 0), (0, \xi) \rangle\rangle_{(r,I)} = 0 \\ \langle\langle (0, \zeta), (0, \zeta) \rangle\rangle_{(r,I)} &= 4(m_1 + m_2) \\ \langle\langle (0, \zeta), (0, \eta) \rangle\rangle_{(r,I)} &= \langle\langle (0, \zeta), (0, \xi) \rangle\rangle_{(r,I)} = 0 \\ \langle\langle (0, \eta), (0, \eta) \rangle\rangle_{(r,I)} &= 4m_1 + m_2 \frac{(1 + e^{2r})^2}{e^{2r}} \\ \langle\langle (0, \eta), (0, \xi) \rangle\rangle_{(r,I)} &= m_2 \frac{1 - e^{4r}}{e^{2r}} \\ \langle\langle (0, \xi), (0, \xi) \rangle\rangle_{(r,I)} &= m_2 \frac{(1 - e^{2r})^2}{e^{2r}}. \end{aligned}$$

Usando translação à esquerda por $L_{A^{-1}}$ e a base $\{(1, 0), (0, A\zeta), (0, A\eta), (0, A\xi)\}$ teremos

$$\langle\langle (v, (v_1, v_2, v_3)), (v', (v'_1, v'_2, v'_3)) \rangle\rangle_{(r,A)} = \langle\langle (v, (v_1, v_2, v_3)), (v', (v'_1, v'_2, v'_3)) \rangle\rangle_{(r,I)},$$

de modo a matriz da métrica nessa base será

$$[g_{ij}] = \begin{pmatrix} m_2 & -2m_2 & 0 & 0 \\ -2m_2 & 4(m_1 + m_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4(m_1 + m_2 \cosh^2 r) & -2m_2 \sinh 2r \\ 0 & 0 & -2m_2 \sinh 2r & 4m_2 \sinh^2 r \end{pmatrix}$$

e da métrica dual

$$[g^{ij}] = \begin{pmatrix} \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} & \frac{1}{2m_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2m_1} & \frac{1}{4m_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4m_1} & \frac{\coth r}{4m_1} \\ 0 & 0 & \frac{\coth r}{4m_1} & \frac{\operatorname{cosech}^2 r}{4m_2} + \frac{\coth^2 r}{4m_1} \end{pmatrix}.$$

Portanto o Hamiltoniano $H : T^*\mathbb{R}_+ \times T^*G \rightarrow \mathbb{R}$ se escreve nessas coordenadas por

$$H(r, p_r, A, P) = \frac{1}{2} [(p_r, P)]^T [g^{ij}] [(p_r, P)] - m_1 m_2 \coth r.$$

Podemos identificar \mathcal{G} com \mathcal{G}^* da seguinte maneira: a cada $\sigma \in \mathcal{G}$ associamos $\hat{\sigma} : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\hat{\sigma}(\vartheta) = \frac{1}{4} \operatorname{tr}((ad_\sigma)(ad_\vartheta)),$$

em que $ad_\sigma : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ é definido por $ad_\sigma(\vartheta) = [\sigma, \vartheta]$. Temos que

$$ad_\zeta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$ad_\eta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$ad_\xi = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo $\operatorname{tr}((ad_\sigma)(ad_\vartheta)) = 0$ para $\sigma \neq \vartheta$, com $\sigma, \vartheta = \zeta, \eta, \xi$, e

$$\operatorname{tr}((ad_\zeta)(ad_\zeta)) = \operatorname{tr}((ad_\eta)(ad_\eta)) = -\operatorname{tr}((ad_\xi)(ad_\xi)) = 8,$$

de modo que

$$\hat{\zeta}(\zeta) = \hat{\eta}(\eta) = -\hat{\xi}(\xi) = 2 \text{ e } \hat{\zeta}(\eta) = \hat{\zeta}(\xi) = \hat{\eta}(\zeta) = \hat{\eta}(\xi) = \hat{\xi}(\zeta) = \hat{\xi}(\eta) = 0.$$

Logo $\hat{\zeta} = 2\zeta^*$, $\hat{\eta} = 2\eta^*$ e $\hat{\xi} = -2\xi^*$. Assim identificamos \mathcal{G}^* com \mathcal{G} pelo pairing

$$\langle \mu, \sigma \rangle = \frac{1}{4} \text{tr} ((ad\mu)(ad\sigma)).$$

Se $\mu \in \mathcal{G}^*$, com $\mu = 2\mu_1\zeta^* + 2\mu_2\eta^* - 2\mu_3\xi^*$, associamos $\mu_1\zeta + \mu_2\eta + \mu_3\xi \in \mathcal{G}$.

Observemos que a estrutura simplética induzida por ψ em $T^*\mathbb{R}_+ \times T^*G$ é a canônica. Sabemos que levantamento de difeomorfismo ao fibrado cotangente preserva forma de Liouville, logo $T^*\psi^{-1}$ preserva forma canônica. Portanto o mapa momento $J : T^*\mathbb{R}_+ \times T^*G \rightarrow \mathcal{G}^*$ será dado por

$$\begin{aligned} \langle J(\alpha_r, \alpha_A), \sigma \rangle &= \langle (\alpha_r, \alpha_A), \sigma_{\mathbb{R}_+ \times G}(r, A) \rangle \\ &= \langle \alpha_A, T_I R_A(\sigma) \rangle \\ &= \langle T_I^* R_A(\alpha_A), \sigma \rangle, \end{aligned}$$

de modo que $J(\alpha_r, \alpha_A) = T_I^* R_A(\alpha_A)$. Usando trivialização à esquerda

$$\lambda_L : T^*G \rightarrow G \times \mathcal{G}^*$$

tal que $\lambda_L(\alpha_A) = (A, T_I^* L_A(\alpha_A))$, temos que

$$J(\alpha_r, A, \mu) = T_I^* R_A(T_A^* L_{A^{-1}}(\mu)) = Ad_{A^{-1}}^*(\mu).$$

Como a ação de G em $G \times \mathcal{G}^*$ atua apenas em G , logo

$$(G \times \mathcal{G}^*) / G \simeq \mathcal{G}^*$$

Assim, o Hamiltoniano reduzido será $h = H|_{T^*\mathbb{R}_+ \times G \times \mathcal{G}^*}$ é dado por

$$h(r, p_r, \mu) = H(r, p_r, A, \mu),$$

ou seja,

$$h(r, p_r, \mu) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\mu_1 p_r}{m_1} - \frac{\mu_2 \mu_3 \coth r}{m_1} + \frac{\mu_3^2 \text{cosech}^2 r}{2m} + \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_3^2}{2m_1} + \frac{\mu_3^2}{m_1} - m_1 m_2 \coth r,$$

onde $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ e $\mu = 2\mu_1\zeta^* + 2\mu_2\eta^* - 2\mu_3\xi^*$.

O campo será dado por

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\partial h}{\partial p_r} \\ \dot{p}_r = -\frac{\partial h}{\partial r} \\ \dot{\mu} = ad_{\frac{\partial h}{\partial \mu}}^* \mu \end{cases}.$$

Como $\left\langle \mu, \left[\sigma, \frac{\delta h}{\delta \mu} \right] \right\rangle = \left\langle -ad_{\frac{\delta h}{\delta \mu}}^* \mu, \sigma \right\rangle$, basta calcularmos $\left[\sigma, \frac{\delta h}{\delta \mu} \right]$ para $\sigma = \zeta, \eta, \xi$. Primeiramente, temos que

$$\left\langle \frac{\delta h}{\delta \mu}, \nu \right\rangle = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} h(r, p_r, \mu + t\nu).$$

Assim, se $\frac{\delta h}{\delta \mu} = a\zeta + b\eta + c\xi$ e $\mu = \mu_1\hat{\zeta} + \mu_2\hat{\eta} + \mu_3\hat{\xi}$, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \mu_1} &= \left\langle \frac{\delta h}{\delta \mu}, \zeta \right\rangle = 2a \\ \frac{\partial h}{\partial \mu_2} &= \left\langle \frac{\delta h}{\delta \mu}, \eta \right\rangle = 2b \\ \frac{\partial h}{\partial \mu_3} &= \left\langle \frac{\delta h}{\delta \mu}, \xi \right\rangle = -2c \end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{\delta h}{\delta \mu} = \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial \mu_1} \zeta + \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial \mu_2} \eta - \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial \mu_3} \xi.$$

Daí

$$\begin{aligned} \left[\frac{\delta h}{\delta \mu}, \zeta \right] &= \frac{\partial h}{\partial \mu_3} \eta - \frac{\partial h}{\partial \mu_2} \xi \\ \left[\frac{\delta h}{\delta \mu}, \eta \right] &= -\frac{\partial h}{\partial \mu_3} \zeta + \frac{\partial h}{\partial \mu_1} \xi \\ \left[\frac{\delta h}{\delta \mu}, \xi \right] &= -\frac{\partial h}{\partial \mu_2} \zeta + \frac{\partial h}{\partial \mu_1} \eta \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} 2\dot{\mu}_1 &= \left\langle \mu, \left[\zeta, \frac{\delta h}{\delta \mu} \right] \right\rangle = 2 \left(\mu_2 \frac{\partial h}{\partial \mu_3} + \mu_3 \frac{\partial h}{\partial \mu_2} \right) \\ 2\dot{\mu}_2 &= \left\langle \mu, \left[\eta, \frac{\delta h}{\delta \mu} \right] \right\rangle = 2 \left(-\mu_1 \frac{\partial h}{\partial \mu_3} - \mu_3 \frac{\partial h}{\partial \mu_1} \right) \\ -2\dot{\mu}_3 &= \left\langle \mu, \left[\xi, \frac{\delta h}{\delta \mu} \right] \right\rangle = 2 \left(-\mu_1 \frac{\partial h}{\partial \mu_2} + \mu_2 \frac{\partial h}{\partial \mu_1} \right) \end{aligned}$$

Portanto o campo será da forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = \frac{p_r}{m} + \frac{\mu_1}{m_1} \\ \dot{p}_r = \frac{(m_1\mu_3^2 \coth r - m\mu_2\mu_3 - m\mu_1^2 m_2) \operatorname{cosech}^2 r}{m_1 m} \\ \dot{\mu}_1 = \frac{\mu_2\mu_3 \operatorname{cosech}^2 r}{m} - \frac{\coth r (\mu_2^2 + \mu_3^2) - 2\mu_2\mu_3}{m_1} \\ \dot{\mu}_2 = \frac{\mu_1\mu_2 \coth r - \mu_3 p_r - 2\mu_1\mu_3}{m_1} - \frac{\mu_1\mu_3 \operatorname{cosech}^2 r}{m} \\ \dot{\mu}_3 = \frac{-\mu_2 p_r - \mu_1\mu_3 \coth r}{m_1} \end{array} \right. ,$$

onde $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

Note que $\mu_1 \dot{\mu}_1 + \mu_2 \dot{\mu}_2 - \mu_3 \dot{\mu}_3 = 0$, de modo que

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_3^2 = k,$$

com k constante.

4.1.1 Equilíbrios Relativos

Buscaremos agora soluções de equilíbrio do sistema reduzido. De maneira equivalente, $(r_0, A_0, p_{r_0}, \mu_0)$ é um equilíbrio relativo se existe $X \in \mathcal{G}$ tal que

$$\mu_0 = \mathcal{I}(r_0, A_0)(X),$$

onde $\mathcal{I}(r_0, A_0)$ denota o locked inertia tensor.

Tomando $A_0 = I$ e usando a Ad^* -equivariância da identificação

$$\mu = 2\mu_1\zeta^* + 2\mu_2\eta^* - 2\mu_3\xi^* \mapsto \hat{\mu} = \mu_1\zeta + \mu_2\eta + \mu_3\xi \in \mathcal{G},$$

temos que

$$ad_X^* \mu = [X, \hat{\mu}].$$

Daí, se $X = x_1\zeta + x_2\eta + x_3\xi$ e $\mu_0 = \mathcal{I}(r_0, A_0)(X)$, então

$$\hat{\mu}_0 = (2x_1(m_1 + m_2))\zeta + (2m_1x_2 - m_2x_3 \sinh 2r_0 + 2m_2x_2 \cosh^2 r_0)\eta + (m_2(x_2 \sinh 2r_0 - 2x_3 \sinh^2 r_0))\xi$$

pois

$$\mathcal{I}(r_0, I) = \begin{pmatrix} 4(m_1 + m_2) & 0 & 0 \\ 0 & 4(m_1 + m_2 \cosh^2 r_0) & -2m_2 \sinh 2r_0 \\ 0 & -2m_2 \sinh 2r_0 & 4m_2 \sinh^2 r_0 \end{pmatrix}.$$

Assim

$$[X, \hat{\mu}] = 0$$

se só se

$$\begin{cases} m_2(\sinh 2r_0)(x_2^2 + x_3^2) - 2(m_1 + m_2 \cosh 2r_0)x_2x_3 = 0 \\ x_1(m_2x_2 \sinh 2r_0 - 2(m_1 + m_2 \cosh^2 r_0)x_3) = 0 \\ x_1(2m_2x_2 \sinh^2 r_0 - m_2x_3 \sinh 2r_0) = 0 \end{cases}.$$

É fácil ver que $x_1 \neq 0$ não admite solução não trivial. Logo $x_1 = 0$ fornece

$$m_2(x_2^2 + x_3^2) \sinh 2r_0 - 2(m_1 + m_2 \cosh 2r_0)x_2x_3 = 0.$$

Como $\dot{p}_{r_0} = 0$,

$$m_1\mu_3^2 \coth r_0 - m\mu_2\mu_3 - mm_1^2m_2 = 0.$$

De $\mu_2 = 2m_1x_2 + 2m_2 \cosh r_0(x_2 \cosh r_0 - x_3 \sinh r_0)$ e $\mu_3 = 2m_2 \sinh r_0(x_2 \cosh r_0 - x_3 \sinh r_0)$,

segue que

$$(\cosh r_0)(\sinh r_0)^3 x_3^2 - (\sinh r_0)^2 (\cosh 2r_0)x_2x_3 + (\cosh r_0)(\sinh r_0)^3 x_2^2 = \frac{m_1}{4}.$$

Portanto

$$\begin{cases} m_2 (\sinh 2r_0) (x_2^2 + x_3^2) - 2 (m_1 + m_2 \cosh 2r_0) x_2 x_3 = 0 \\ (\cosh r_0) (\sinh r_0)^3 (x_3^2 + x_2^2) - (\sinh r_0)^2 (\cosh 2r_0) x_2 x_3 = \frac{m_1}{4} \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por $\frac{-\sinh^2 r_0}{m_2}$ temos

$$\begin{cases} -(\cosh r_0) (\sinh r_0)^3 (x_3^2 + x_2^2) + \frac{(\sinh r_0)^2}{m_2} (m_1 + m_2 \cosh 2r_0) x_2 x_3 = 0 \\ (\cosh r_0) (\sinh r_0)^3 (x_3^2 + x_2^2) - (\sinh r_0)^2 (\cosh 2r_0) x_2 x_3 = \frac{m_1}{4} \end{cases}$$

Logo

$$x_2 x_3 = \frac{m_2}{4 \sinh^2 r_0}.$$

Note que, se $x_2 = x_3 = \frac{\sqrt{m_2}}{2 \sinh r_0}$, como

$$m_2 (\sinh 2r_0) (x_2^2 + x_3^2) - 2 (m_1 + m_2 \cosh 2r_0) x_2 x_3 = 0,$$

então

$$(m_1 + m_2 e^{-2r_0}) = 0,$$

que é um absurdo.

Portanto existem equilíbrios relativos

$$(r_0, 0, I, \mu_0),$$

onde $\mu_0 = 2 (2m_1 x_2 - m_2 x_3 \sinh 2r_0 + 2m_2 x_2 \cosh^2 r_0) \eta^* - 2m_2 (x_2 \sinh 2r_0 - 2x_3 \sinh^2 r_0) \xi^*$ e $x_2 x_3 = \frac{m_2}{4 \sinh^2 r_0}$, dos tipos elíptico e hiperbólico, quando $|x_2| < |x_3|$ e $|x_2| > |x_3|$, respectivamente. Se

$$x_2^2 - x_3^2 = k,$$

a reconstrução é da forma:

Proposição 4.1.1. 1. $A(t) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{-kt} & \frac{(x_2+x_3)}{\sqrt{-k}} \sin \sqrt{-kt} \\ \frac{(x_2-x_3)}{\sqrt{-k}} \sin \sqrt{-kt} & \cos \sqrt{-kt} \end{pmatrix}$, se $k < 0$ (Elíptico);

2. $A(t) = \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{kt} & \frac{(x_2+x_3)}{\sqrt{k}} \sinh \sqrt{kt} \\ \frac{(x_2-x_3)}{\sqrt{k}} \sinh \sqrt{kt} & \cosh \sqrt{kt} \end{pmatrix} A_0$, se $k > 0$ (Hiperbólico).

Para tal basta calcular

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & t(x_2 + x_3) \\ t(x_2 - x_3) & 0 \end{pmatrix}.$$

4.1.2 Outras soluções

Existem soluções com μ constante e r não constante: $\mu_1 = k, \mu_2 = \mu_3 = 0$. Assim

$$\frac{\delta h}{\delta \mu} = \frac{1}{2} \left(\frac{p_r + \mu_1}{m_1} \right) \zeta,$$

onde $\dot{p}_r = -m_1 m_2 \operatorname{cosech}^2 r$. Como $A(t)$ é solução de

$$\dot{A} = \left(\frac{p_r + \mu_1}{2m_1} \right) A \zeta$$

e $\dot{r} = \frac{p_r}{m} + \frac{\mu_1}{m_1}$, logo

$$\left(\frac{p_r + \mu_1}{2m_1} \right) = \frac{1}{2(m_1 + m_2)} (m_2 \dot{r} + \mu_1).$$

Portanto, se $A_0 = I$

$$\begin{aligned} A(t) &= e^{\left(\frac{1}{2(m_1+m_2)} (m_2 r + \mu_1 t) \right) \zeta} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2(m_1+m_2)} (m_2 r + \mu_1 t)} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-1}{2(m_1+m_2)} (m_2 r + \mu_1 t)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

No plano hiperbólico essa classe de soluções representa o movimento de dois corpos de forma radial que se afastam, segundo a distância hiperbólica, no passado ou futuro.

Vimos acima que, se $\mu = \mu_0$ constante com

$$\hat{\mu}_0 = (2x_1 (m_1 + m_2)) \zeta + (2m_1 x_2 - m_2 x_3 \sinh 2r_0 + 2m_2 x_2 \cosh^2 r_0) \eta + (m_2 (x_2 \sinh 2r_0 - 2x_3 \sinh^2 r_0))$$

e $x_1 \neq 0$, então

$$\begin{cases} m_2 (\sinh 2r_0) (x_2^2 + x_3^2) - 2(m_1 + m_2 \cosh 2r_0) x_2 x_3 = 0 \\ x_1 (m_2 x_2 \sinh 2r_0 - 2(m_1 + m_2 \cosh^2 r_0) x_3) = 0 \\ x_1 (2m_2 x_2 \sinh^2 r_0 - m_2 x_3 \sinh 2r_0) = 0 \end{cases}$$

implica em $x_2 = x_3 = 0$, ou seja, se r é não constante e μ é constante, então

$$\mu_1 = 4x_1 (m_1 + m_2), \mu_2 = \mu_3 = 0.$$

Note que, nesse caso, μ_0 pertence ao hiperbolóide de 1 folha.

Outra classe de soluções são obtidas com $r = r_0$ constante. Assim $\frac{p_r}{m} + \frac{\mu_1}{m_1} = 0$, de modo que

$$\dot{\mu}_1 = \frac{-m_1}{m} \dot{p}_{r_0} = -\frac{(m_1 \mu_3^2 \coth r - m \mu_2 \mu_3 - m m_1^2 m_2)}{m^2 \sinh^2 r_0},$$

ou seja,

$$-m^2 \mu_2^2 \sinh^2 r_0 \coth r_0 + \mu_3^2 (\coth r_0) (m_1^2 - m^2 \sinh^2 r_0) + 2m^2 \mu_2 \mu_3 \sinh^2 r_0 = mm_1^3 m_2.$$

Derivando em relação a t e usando $\dot{\mu}_2$ e $\dot{\mu}_3$ conforme acima obtemos

$$\mu_1 (B_1 \dot{\mu}_2^2 + B_2 \dot{\mu}_2 \dot{\mu}_3 + B_3 \dot{\mu}_3^2) = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{-m_2 + (m_1 + m_2) \coth^2 r_0}{m_1 (m_1 + m_2)} \\ B_2 &= -\frac{\coth r_0}{m_1^2 m_2} \left(\frac{2m_1 (m_1 + m_2)}{\sinh^2 r_0} + m_1 m_2 - m (m_1 - m_2) \right) \\ B_3 &= \frac{\coth^2 r_0}{m^2 \sinh^2 r_0} \left(1 - \frac{m^2 \sinh^2 r_0}{m_1} \right) + \frac{1}{m_1 m_2} \left(m_2 + m + \frac{m_1 + m_2}{\sinh r_0} \right) \end{aligned}$$

Após alguns cálculos é possível notar que são incompatíveis:

1. $\mu_1 \neq 0$ com $\mu_2 = \mu_3 = 0$;
2. $\mu_1 \neq 0$ com $\mu_2 = 0$, $\mu_3 \neq 0$ e $B_3 = 0$;
3. $\mu_1 \neq 0$ com $\mu_3 = 0$, $\mu_2 \neq 0$ e $B_1 = 0$.

Como já tratamos o caso $\mu_1 = 0$ (Equilíbrios Relativos), o sistema reduzido admite solução $r = r_0$ constante se, e somente se

$$(B_2)^2 - 4B_1 B_3 \geq 0.$$

4.1.3 Momento Nulo

O Hamiltoniano reduzido para $\mu = 0$ é

$$h_0(r, p_r) = h(r, p_r, 0) = \frac{p_r^2}{2m} - m_1 m_2 \coth r,$$

Os níveis λ são dados por

$$p_r^2 = 2m (\lambda + m_1 m_2 \coth r).$$

Observe que o valor crítico de h_0 é

$$c(h_0) = -m_1 m_2,$$

logo as KAM fracas reduzidas serão soluções de

$$dv(r) = \pm \frac{2m_1m_2}{\sqrt{m_1+m_2}} \left(\frac{1}{e^{2r}-1} \right)^{\frac{1}{2}},$$

ou seja,

$$u_{\pm}^0(r) = \pm \frac{2m_1m_2}{\sqrt{m_1+m_2}} \arctan \sqrt{e^{2r}-1},$$

a menos de constante. Logo $u_{\pm} : \mathbb{R}_+ \times G \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$u_{\pm}(r, A) = \pm 2m_2 \sqrt{m_1} \arctan \sqrt{e^{2r}-1},$$

são KAM fracas invariantes para o problema de 2 corpos.

Note que tem-se integrabilidade nesse caso. De fato, os níveis de h_0 são do tipo Kepler. A reconstrução da dinâmica fornece movimento dos corpos sobre uma mesma geodésica hiperbólica. Se $\lambda < c(h_0)$ temos aproximação dos corpos do passado e futuro. Caso $\lambda \geq c(h_0)$ os corpos se afastam (aproximam) no passado e aproximam (afastam) no futuro.

4.2 O Problema de 3-Corpos Restritos no Plano Hiperbólico Real

Consideremos $D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ o disco de Poincaré com a métrica

$$ds^2 = \frac{4}{(1-|z|^2)^2} dz d\bar{z}.$$

Seja o Lagrangiano:

$$L(w, v) = 2 \left[\frac{m_1 |v_1|^2}{(1-|w_1|^2)^2} + \frac{m_2 |v_2|^2}{(1-|w_2|^2)^2} \right] + m_1 m_2 \coth d(w_1, w_2),$$

em que $w = (w_1, w_2) \in M = (D^2)^2 \setminus \Delta$, Δ é a diagonal, d é a distância na métrica acima e m_i são as massas positivas. De acordo com Diacu, Perez-Chavela, Reyes Victoria [18], temos a seguinte solução periódica para o problema:

$$\gamma(t) = (\alpha e^{it}, -\alpha e^{it}), \quad \alpha \in (0, 1),$$

no caso $m_1 = m_2$.

Estamos agora interessados, a partir do Lagrangiano

$$L(w, v) = \frac{1}{2} \sum_{j=1,2,3} \frac{4m_j |v_j|^2}{(1 - |w_j|^2)^2} + \sum_{k>j, j=1,2,3} m_j m_k \coth d(w_j, w_k),$$

para o problema de 3 corpos, em restringir o movimento dos dois primeiros corpos sobre γ e anular a massa do terceiro corpo. Analogamente ao caso euclidiano, a partir da equação de segunda ordem para o terceiro corpo utilizaremos coordenadas elípticas a fim de obter uma equação autônoma. Inicialmente temos:

$$\ddot{w}_3 = -\frac{2\bar{w}_3 \dot{w}_3^2}{1 - |w_3|^2} + \frac{(1 - |w_3|^2)^2}{4} \frac{\partial}{\partial \bar{w}_3} \left\{ \sum_{j=1,2} m_j \coth d(w_j, w_3) \right\}.$$

Vamos supor $m_1 = m_2 = 1$, $w_1 = \alpha e^{it}$, $w_2 = -\alpha e^{it}$ e fazer $w_3 = z e^{it}$. Logo $\dot{w}_3 = (\dot{z} + iz)e^{it}$ e $\ddot{w}_3 = (\ddot{z} + 2i\dot{z} - z)e^{it}$. Assim

$$(\ddot{z} + 2i\dot{z} - z)e^{it} = -\frac{2\bar{z}e^{-it}(\dot{z} + iz)^2 e^{2it}}{1 - |z|^2} + \frac{(1 - |z|^2)^2}{4} \frac{\partial U_\alpha}{\partial \bar{z}} e^{it},$$

onde $\frac{\partial U_\alpha}{\partial \bar{z}} = \frac{2(\alpha-z)(1-\alpha^2)^2(1-|z|^2)(1+\alpha z)}{\left\{ [2\alpha(z+\bar{z}) - (1+|z|^2)(1+\alpha^2)]^2 - (1-|z|^2)^2(1-\alpha^2)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} - \frac{2(\alpha+z)(1-\alpha^2)^2(1-|z|^2)(1+\alpha z)}{\left\{ [2\alpha(z+\bar{z}) + (1+|z|^2)(1+\alpha^2)]^2 - (1-|z|^2)^2(1-\alpha^2)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}$, conforme Diacu, Perez-Chavela, Reyes Victoria. Portanto obtemos a equação

$$\ddot{z} + 2i\dot{z} - z = -\frac{2\bar{z}(\dot{z} + iz)^2}{1 - |z|^2} + \frac{(1 - |z|^2)^2}{4} \frac{\partial U_\alpha}{\partial \bar{z}}.$$

Considere o campo $X_\alpha(z, \bar{z}, \dot{z}, \dot{\bar{z}})$ dado abaixo:

$$\begin{cases} \dot{z} = \dot{z} \\ \dot{\bar{z}} = \dot{\bar{z}} \\ \ddot{z} = z - 2i\dot{z} - \frac{2\bar{z}(\dot{z} + iz)^2}{1 - |z|^2} + \frac{(1 - |z|^2)^2}{4} \frac{\partial U_\alpha}{\partial \bar{z}} \\ \ddot{\bar{z}} = \bar{z} + 2i\dot{\bar{z}} - \frac{2z(\dot{\bar{z}} - i\bar{z})^2}{1 - |z|^2} + \frac{(1 - |z|^2)^2}{4} \frac{\partial U_\alpha}{\partial z} \end{cases}.$$

Temos que este é o campo de Euler-Lagrange do Lagrangiano Magnético

$$L_\alpha(z, \bar{z}, \dot{z}, \dot{\bar{z}}) = \frac{2|\dot{z}|^2}{(1 - |z|^2)^2} - 2i \frac{\dot{z}\bar{z} - \dot{\bar{z}}z}{(1 - |z|^2)^2} + \hat{U}_\alpha(z, \bar{z}),$$

em que $\hat{U}_\alpha(z, \bar{z}) = \frac{2|z|^2}{(1 - |z|^2)^2} + U_\alpha(z, \bar{z})$ com $U_\alpha(z, \bar{z}) = \coth d(z, \alpha) + \coth d(z, -\alpha)$. $(0, 0, 0, 0)$ é solução de equilíbrio. Fazendo $z = x + iy$ teremos $X_\alpha(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x} \\ \dot{y} = \dot{y} \\ \ddot{x} = x + 2\dot{y} + \frac{2}{1-x^2-y^2} \{x[(\dot{y} + x)^2 - (\dot{x} - y)^2] - 2y(\dot{x} - y)(\dot{y} + x)\} + F_\alpha^1(x, y) \\ \ddot{y} = y + 2\dot{x} + \frac{2}{1-x^2-y^2} \{2x(\dot{y} + x)(y - \dot{x}) + y[(\dot{x} - y)^2 - (\dot{y} + x)^2]\} - yF_\alpha^2(x, y) \end{cases}$$

em que

$$F_\alpha^1(x, y) = \frac{[(1-x^2-y^2)^3(1-\alpha^2)^2]}{2} \left[\frac{(\alpha-x)(1-\alpha x) - \alpha y^2}{g_\alpha(x, y)} - \frac{(\alpha+x)(1+\alpha x) - \alpha y^2}{h_\alpha(x, y)} \right]$$

e

$$F_\alpha^2(x, y) = \frac{[(1-x^2-y^2)^3(1-\alpha^2)^2]}{2} \left[\frac{(1-2\alpha x + \alpha^2)}{g_\alpha(x, y)} - \frac{(1+2\alpha x + \alpha^2)}{h_\alpha(x, y)} \right]$$

com

$$g_\alpha(x, y) = \left\{ [4\alpha x - (1+x^2+y^2)(1+\alpha^2)]^2 - (1-x^2-y^2)^2(1-\alpha^2)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}$$

e

$$h_\alpha(x, y) = \left\{ [4\alpha x + (1+x^2+y^2)(1+\alpha^2)]^2 - (1-x^2-y^2)^2(1-\alpha^2)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}.$$

Calculando $DX_\alpha(0, 0, 0, 0)$ temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1+a & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1-b & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

onde $a = \frac{(1-\alpha^2)^2(1+\alpha^2)}{4\alpha^3}$ e $b = \frac{(1-\alpha^2)^2(1+3\alpha^2)}{8\alpha^3}$. Assim os autovalores serão

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left\{ 2(a-b-2) + 2[a^2+b^2+2ab-8a+8b]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2} \left\{ 2(a-b-2) + 2[a^2+b^2+2ab-8a+8b]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2} \left\{ 2(a-b-2) - 2[a^2+b^2+2ab-8a+8b]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \lambda_4 &= -\frac{1}{2} \left\{ 2(a-b-2) - 2[a^2+b^2+2ab-8a+8b]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Temos que, para $\alpha = 1$, $a = b = 0$, de modo que $\lambda_1 = \lambda_3 = i$ e $\lambda_2 = \lambda_4 = -i$. Por uma análise é possível mostrar que existem α_1, α_2 com

$$\alpha_1 \approx 0,49 \text{ e } \alpha_2 \approx 0,61$$

tais que: se $\alpha \in I_1 = (0, \alpha_1)$ teremos λ_1 e λ_2 reais não nulos e λ_3 e λ_4 imaginários puros; se $\alpha \in I_2 = (\alpha_1, \alpha_2)$ teremos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e λ_4 imaginários puros; se $\alpha \in I_3 = (\alpha_2, 1)$ teremos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e λ_4 complexos com parte real não nula. Portanto temos:

Lema 4.2.1. *Conforme α pertença a I_1, I_2 ou I_3 definidos acima teremos que $(0, 0, 0, 0)$ será parcialmente hiperbólico, elíptico ou hiperbólico, respectivamente.*

Analisaremos agora o caso $\alpha = 1$, ou seja, estudaremos o Hamiltoniano

$$H_1(z, \bar{z}, p, \bar{p}) = \frac{(1 - |z|^2)^2 |p|^2}{2} - i(pz - \bar{p}\bar{z}) - 2.$$

Proposição 4.2.2. *O Hamiltoniano H_1 é fracamente integrável, ou seja, possui 2 integrais primeiras em involução que são linearmente independentes, exceto em $(0, 0, 0, 0)$. O valor crítico $c(H_1)$ é -2 , as constantes são as únicas KAM fracas e a seção nula é um gráfico Lagrangiano folheado por órbitas periódicas minimizantes.*

Demonstração. Considere a ação $\Phi : S^1 \times D^2 \rightarrow D^2$ dada por $\Phi(\theta, z) = ze^{i\theta}$ e observe que H_1 é invariante pela ação levantada de Φ . Note que essa ação não é livre em 0. Assim teremos o mapa momento associado

$$J(z, p) = i(pz - \bar{p}\bar{z}),$$

em que $0 \in \mathbb{R}$ não é valor regular. Logo $\{H_1, J\} = 0$ e não é difícil de se verificar que dH_1 e dJ_1 são linearmente independentes, exceto em $(0, 0, 0, 0)$. Observe que nossa variedade não é compacta e que H_1 não é uniformemente limitado. Utilizaremos a definição de valor crítico dada em [14]. Considere a equação de Hamilton-Jacobi

$$H_1(z, du_z) = -2.$$

Note que as funções constantes são soluções invariantes pela ação de S^1 , de modo que $c_{inv}(H_1) \leq -2$. Como $Hom(S^1, \mathbb{R}) = \{\rho : S^1 \rightarrow \mathbb{R} | \rho \text{ homomorfismo}\} = \{0\}$, logo

$$c_{S^1, \min}(H_1) = c_{inv}(H_1).$$

Pelo teorema 7.4 de [14] (em que a condição de limitação uniforme não é utilizada), como S^1 é amenable,

$$c(H_1) = c_{S^1, \min}(H_1) = c_{inv}(H_1).$$

Resta observar que $c_{inv}(H_1) = -2$. Se $z = re^{i\phi}$ com $r \in [0, 1)$ e $\phi \in [0, 2\pi]$, então $J(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}) = \frac{4r^2(\dot{\phi}+1)}{(1-r^2)^2} = \mu$. Nessas coordenadas o Lagrangiano associado será

$$L_1(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}) = \frac{2 \left[\dot{r}^2 + r^2 (\dot{\phi} + 1)^2 \right]}{(1 - r^2)^2} + 2$$

e a energia

$$E_1(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}) = \frac{2 \left[\dot{r}^2 + r^2 (\dot{\phi}^2 - 1) \right]}{(1 - r^2)^2} - 2.$$

Agora, com a hipótese de $r \in (0, 1)$, para cada $\mu \neq 0$ teremos o Lagrangiano reduzido

$$L_\mu(r, \dot{r}) = \frac{2\dot{r}^2}{(1 - r^2)^2} + \frac{(1 - r^2)^2}{8r^2} \mu^2 + 2,$$

cujo valor crítico é $c(L_\mu) = -2$. O Hamiltoniano reduzido associado é dado por

$$H_\mu(r, p_r) = \frac{(1 - r^2)^2 p_r^2}{8} - \frac{(1 - r^2)^2}{8r^2} \mu^2 - 2.$$

Resolvendo a equação de Hamilton-Jacobi $H_\mu(r, p_r) = -2$ obteremos

$$u_\mu^\pm(r) = \pm [|\mu| \ln r + c_\mu],$$

onde c_μ é uma constante para cada $\mu \neq 0$. Observe que $u_\mu^\pm(r)$ não pode se estender continuamente a uma função $\tilde{u}_\mu^\pm : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, de modo que não pode ser levantada a uma KAM fraca para o Hamiltoniano H_1 . Desse modo, o caso $\mu = 0$ nos fornece as soluções invariantes u_0 constantes e, para $\mu \neq 0$, não teremos soluções invariantes. Se tivéssemos v uma solução invariante de

$$H_1(z, du_z) = c,$$

para $c < -2$, logo teríamos uma solução reduzida de

$$H_\mu(r, du_r) = c$$

para algum μ , o que seria um absurdo. Portanto $c(H_1) = -2$ e a seção nula de T^*D^2 é um gráfico Lagrangiano. Pela Transformada de Legendre $p = \frac{2(\bar{z} - iz)}{(1 - |z|^2)^2}$, $p = 0$ fornece $\dot{z} = -iz$, de modo que

$$z(t) = r_0 e^{-it}, r_0 \in [0, 1).$$

Logo $(z(t), 0)$ são soluções periódicas que folheiam a seção nula de T^*D^2 . É fácil observar que $A_{L_1-2}(z) = 0$. □

Observação 4.2.3. *Como as soluções periódicas são minimizantes, logo as medidas com suporte nessas órbitas serão medidas minimizantes. Nesse caso, temos que o conjunto de Mather $\tilde{\mathcal{M}} \subset T^*D^2$ é a seção nula.*

Analisaremos agora as soluções para diferentes valores de E e μ dados:

1. $\mu < 0$: Nesse caso $\dot{\phi} \leq -1$ (pois $\dot{\phi} = \frac{\mu(1-r^2)^2}{4r^2} - 1$) e $E > -2$ com

$$\frac{2 \left[\dot{r}^2 + r^2 (\dot{\phi}^2 - 1) \right]}{(1-r^2)^2} - 2 = E \Rightarrow \dot{r}^2 + r^2 (\dot{\phi}^2 - 1) = \frac{(2+E)}{2} (1-r^2)^2.$$

Para cada $r \in (0, 1)$ constante teremos elipses ($r = 0$ duas retas e $r = 1$ um círculo unitário). Para cada $\dot{\phi} \leq -1$ teremos \dot{r}^2 côncava e decrescente em $[0, r_{\min}^{(E,\mu)}]$, onde $r_{\min}^{(E,\mu)} < 1$ é solução única de

$$\frac{(1-r^2)^2}{r^2} = \frac{2(\dot{\phi}^2 - 1)}{2+E}$$

em que $\dot{\phi} = 1 + \frac{2(2+E)}{\mu}$. Logo $J^{-1}(\mu) \cap E_1^{-1}(E)$ é uma curva fechada que passa pelos pontos $(r_{\min}^{(E,\mu)}, 1 + \frac{2(2+E)}{\mu}, 0)$ e $(1, -1, 0)$ no espaço $r, \dot{\phi}, \dot{r}$. Assim obtemos curvas fechadas no plano r, \dot{r} que passam por $(r_{\min}^{(E,\mu)}, 0)$ e $(1, 0)$. Essas curvas fornecem cilindros "singulares" (na curva $(1, \phi, 0)$) no espaço r, ϕ, \dot{r} que se projetam em anéis $R_{(E,\mu)}$ no disco com

$$R_{(E,\mu)} = \left\{ (r, \phi) \mid r_{\min}^{(E,\mu)} \leq r \leq 1 \right\}.$$

Como $\dot{\phi} < 0$, se $\dot{r} > 0$ teremos soluções $z(t)$ no disco que espiralam no sentido horário, cujo α -limite é o círculo $r = r_{\min}^{(E,\mu)}$ e o ω -limite é o círculo $r = 1$ (o bordo). Se $\dot{r} < 0$ teremos soluções $z(t)$ no disco que espiralam no sentido horário, cujo α -limite é o círculo $r = 1$ e o ω -limite é o círculo $r = r_{\min}^{(E,\mu)}$.

2. $\mu = 0$: Nesse caso $\dot{\phi} = -1$ e $E \geq -2$ com

$$\dot{r}^2 = \frac{(2+E)(1-r^2)^2}{2}.$$

Logo

$$r_{\pm}(t) = \frac{ke^{\pm\sqrt{2(2+E)t}} - 1}{ke^{\pm\sqrt{2(2+E)t}} + 1},$$

onde k é uma constante. Para $E > -2$ obtemos soluções espiralantes (no sentido horário) que passam pela origem, que se auto-interceptam e cujos α, ω -limites são o bordo do disco. Para $E = -2$ teremos as soluções periódicas obtidas anteriormente.

3. $\mu > 0$: Nesse caso $\dot{\phi} = \frac{\mu(1-r^2)^2}{4r^2} - 1$ é convexa decrescente, de modo que existe um único $r_{\mu} \in (0, 1)$ tal que $\dot{\phi} = 0$. Com respeito a E teremos:

- $E < -2$: Como $\dot{r}^2 = r^2 (1 - \dot{\phi}^2) + \frac{(2+E)}{2} (1 - r^2)^2$, logo $|\dot{\phi}| \leq 1$. Se $\dot{\phi} = 1 + \frac{2(2+E)}{\mu}$, então $\dot{r} = 0$ em $r_{\min}^{(E,\mu)}$ solução de

$$\frac{(1 - r^2)^2}{r^2} = \frac{-2(1 - \dot{\phi}^2)}{2 + E}$$

como visto acima. Isso nos permite obter que $-2 - \mu < E < -2$ e que $r \in [r_{\min}^{(E,\mu)}, 1]$. Para cada $r \in (r_{\min}^{(E,\mu)}, 1)$ teremos elipses, em $r = r_{\min}^{(E,\mu)}$ a reta $\dot{r} = 0$ e em $r = 1$ o círculo unitário. Para cada $|\dot{\phi}| \leq 1$ teremos curvas que partem da reta $\dot{r} = 0$ ao círculo unitário em $r = 1$. Logo $J^{-1}(\mu) \cap E_1^{-1}(E)$ é uma curva fechada que passa pelos pontos $(r_{\min}^{(E,\mu)}, 1 + \frac{2(2+E)}{\mu}, 0)$ e $(1, -1, 0)$ no espaço $r, \dot{\phi}, \dot{r}$. Analogamente ao caso $\mu < 0$, essas curvas fechadas fornecem anéis $R_{(E,\mu)}$ no disco com

$$R_{(E,\mu)} = \left\{ (r, \phi) \mid r_{\min}^{(E,\mu)} \leq r \leq 1 \right\}.$$

Seja r_μ tal que $\dot{\phi}(r_\mu) = 0$. Se $r_{\min}^{(E,\mu)} < r_\mu$, ou seja, se $\mu > -2(2 + E) > 0$, então

$$r \in (r_{\min}^{(E,\mu)}, r_\mu) \Rightarrow \dot{\phi} > 0$$

e

$$r \in (r_\mu, 1) \Rightarrow \dot{\phi} < 0.$$

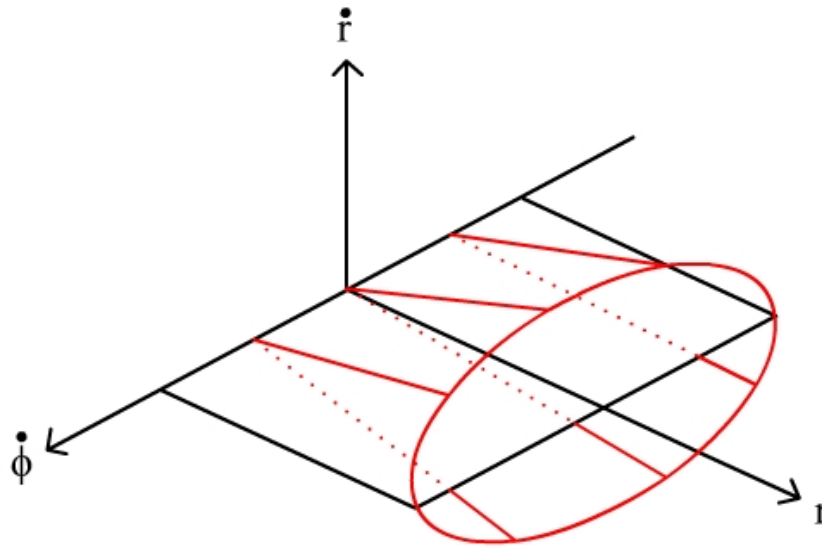
Logo, para $\dot{r} > 0$ teremos soluções $z(t)$ no disco, cujo α -limite é o círculo $r = r_{\min}^{(E,\mu)}$ e o ω -limite é o círculo $r = 1$, que espiralam no sentido anti-horário, para r entre $r_{\min}^{(E,\mu)}$ e r_μ , e no sentido horário, para r entre r_μ e 1. Para $\dot{r} < 0$ teremos soluções $z(t)$ no disco, cujo α -limite é o círculo $r = 1$ e o ω -limite é o círculo $r = r_{\min}^{(E,\mu)}$, que espiralam no sentido anti-horário, para r entre $r_{\min}^{(E,\mu)}$ e r_μ , e no sentido horário, para r entre r_μ e 1. Por outro lado, se $r_{\min}^{(E,\mu)} \geq r_\mu$, ou seja, se $0 < \mu \leq -2(2 + E)$, então $\dot{\phi} \leq 0$. Logo, para $\dot{r} > 0$, teremos soluções $z(t)$ espiralando no sentido horário, cujo α -limite é o círculo $r = r_{\min}^{(E,\mu)}$ e o ω -limite é o círculo $r = 1$. Para $\dot{r} < 0$ teremos soluções $z(t)$ espiralando no sentido horário, cujo α -limite é o círculo $r = 1$ e o ω -limite é o círculo $r = r_{\min}^{(E,\mu)}$.

- $E = -2$: Esse é o nível crítico dado por

$$\dot{r}^2 = r^2 (1 - \dot{\phi}^2).$$

Para cada $\dot{\phi}$ constante, entre -1 e 1 , temos retas e, cada r constante, elipses. Logo $J^{-1}(\mu) \cap E_1^{-1}(E)$ é uma curva fechada no espaço $r, \dot{\phi}, \dot{r}$ que passa pelos pontos

$(1, -1, 0)$ e $(r_{\min}^{(-2, \mu)}, 1, 0)$, em que $r_{\min}^{(-2, \mu)}$ satisfaz $\dot{\phi}(r_{\min}^{(-2, \mu)}) = 1$. Novamente obteremos curvas fechadas no plano r, \dot{r} que passam por $(r_{\min}^{(-2, \mu)}, 0)$ e $(1, 0)$. Como $r_{\min}^{(-2, \mu)} < r_{\mu}$ (lembrando que $\dot{\phi}(r_{\mu}) = 0$), então, para $\dot{r} > 0$ teremos soluções $z(t)$, cujo α -limite é o círculo $r = r_{\min}^{(-2, \mu)}$ e o ω -limite é o círculo $r = 1$, que espiralam no sentido anti-horário, para r entre $r_{\min}^{(-2, \mu)}$ e r_{μ} , e no sentido horário, para r entre r_{μ} e 1. Para $\dot{r} < 0$ teremos soluções $z(t)$, cujo α -limite é o círculo $r = 1$ e o ω -limite é o círculo $r = r_{\min}^{(-2, \mu)}$, que espiralam no sentido horário, para r entre r_{μ} e 1 e no sentido anti-horário, para r entre $r_{\min}^{(-2, \mu)}$ e r_{μ} .



$$E = -2$$

- $E > -2$: Teremos

$$\dot{r}^2 = r^2 (1 - \dot{\phi}^2) + \frac{(2 + E)}{2} (1 - r^2)^2$$

Para cada $r \in (0, 1)$ constante teremos elipses ($r = 0$ duas retas e $r = 1$ o círculo unitário). Para cada $|\dot{\phi}| \leq 1$ teremos curvas que partem das retas $\dot{r} = \pm\sqrt{2+E}$ ao círculo unitário em $r = 1$. Essas curvas mudam algumas características à medida que $E > -2$ aumenta. Por exemplo, se $E = -1$, na parte $\dot{r} > 0$ (na parte $\dot{r} < 0$ segue por simetria), teremos curvas que são gráficos de funções convexas em r que admitem um mínimo em $[0, 1]$ (esses mínimos variam de 0 a 1 à medida que $|\dot{\phi}|$ varia de 1 a 0). Para cada $|\dot{\phi}| > 1$ teremos \dot{r}^2 côncava e decrescente em $[0, r_{\min}]$,

onde $r_{\min}^{(E,\mu)} < 1$ é solução (única) de

$$\frac{(1-r^2)^2}{r^2} = \frac{2(\dot{\phi}^2 - 1)}{2+E}$$

em que $\dot{\phi} = 1 + \frac{2(2+E)}{\mu}$. Logo $J^{-1}(\mu) \cap E_1^{-1}(E)$ é uma curva fechada que passa pelos pontos $(r_{\min}^{(E,\mu)}, 1 + \frac{2(2+E)}{\mu}, 0)$ e $(1, -1, 0)$ no espaço $r, \dot{\phi}, \dot{r}$. Analogamente ao caso $E = -2$ visto acima, teremos anéis $R_{(E,\mu)}$ no disco com

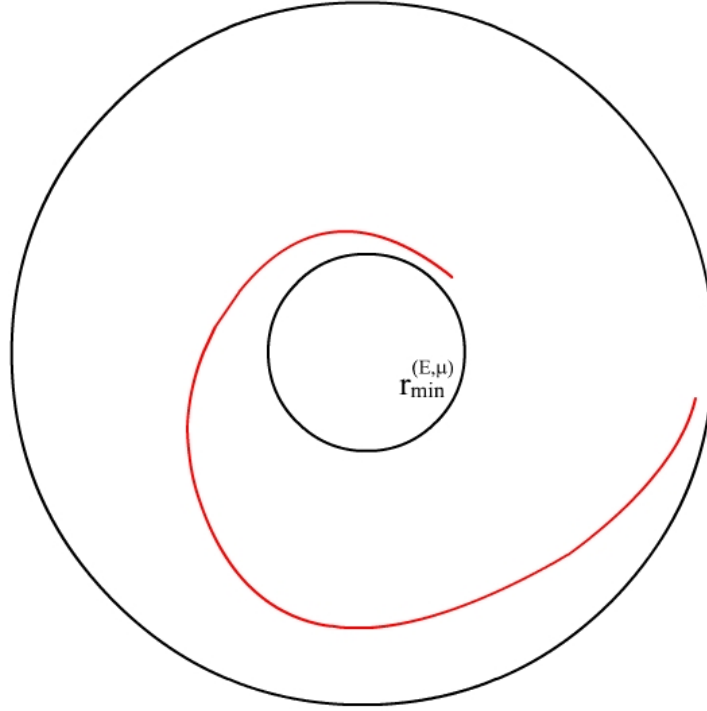
$$R_{(E,\mu)} = \left\{ (r, \phi) \mid r_{\min}^{(E,\mu)} \leq r \leq 1 \right\}.$$

As soluções nesse caso serão totalmente análogas ao caso $E = -2$, ou seja: para $\dot{r} > 0$ teremos soluções $z(t)$, cujo α -limite é o círculo $r = r_{\min}^{(E,\mu)}$ e o ω -limite é o círculo $r = 1$, que espiralam no sentido anti-horário, para r entre $r_{\min}^{(E,\mu)}$ e r_μ , e no sentido horário, para r entre r_μ e 1. Para $\dot{r} < 0$ teremos soluções $z(t)$, cujo α -limite é o círculo $r = 1$ e o ω -limite é o círculo $r = r_{\min}^{(E,\mu)}$, que espiralam no sentido horário, para r entre r_μ e 1 e no sentido anti-horário, para r entre $r_{\min}^{(E,\mu)}$ e r_μ .

Em resumo teremos:

Proposição 4.2.4. *Com respeito às soluções em cada nível de energia E que se projetam em D^2 temos a seguinte caracterização:*

1. $E < -2$: Para cada $0 < \mu \leq -2(2+E)$ teremos soluções espiralantes, cujo α -limite é o bordo (ou o círculo $r = r_{\min}^{(E,\mu)}$) e o ω -limite é o círculo $r = r_{\min}^{(E,\mu)}$ (ou o bordo), que chamaremos de soluções do tipo *I*; para cada $\mu > -2(2+E)$ teremos soluções espiralantes como anteriormente, porém com uma mudança no sentido de rotação a partir de um certo raio r_μ (ocorrendo de maneira suave tangente a um diâmetro), que chamaremos de soluções do tipo *II*;
2. $E = -2$: Se $\mu = 0$ teremos soluções periódicas $r = r_0$; para cada $\mu > 0$ teremos soluções do tipo *II* e soluções periódicas do tipo $(r_{\min}^{(E,\mu)}, t + \phi_0, 0, 1)$;
3. $E > -2$: Para cada $\mu < 0$ teremos soluções do tipo *I*; se $\mu = 0$ teremos soluções espiralantes que passam tangentes a um diâmetro na origem, cujo α, ω -limites são o bordo, que chamaremos de soluções do tipo *III*; para cada $\mu > 0$ teremos soluções do tipo *II*.



Tipo I

Lema 4.2.5. Dado $E \in \mathbb{R}$ considere as funções $\mu \mapsto r_\mu$ e $\mu \mapsto r_{\min}^{(E,\mu)}$. Temos que:

a) r_μ é crescente em $(0, +\infty)$ com

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} r_\mu = 0 \text{ e } \lim_{\mu \rightarrow +\infty} r_\mu = 1.$$

b) Sobre $r_{\min}^{(E,\mu)}$ temos:

1. Se $E < -2$, então $r_{\min}^{(E,\mu)}$ é decrescente em $(-(2+E), -2(2+E))$ e crescente em $(-2(2+E), +\infty)$ com

$$\lim_{\mu \rightarrow -(2+E)^+} r_{\min}^{(E,\mu)} = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} r_{\min}^{(E,\mu)} = 1$$

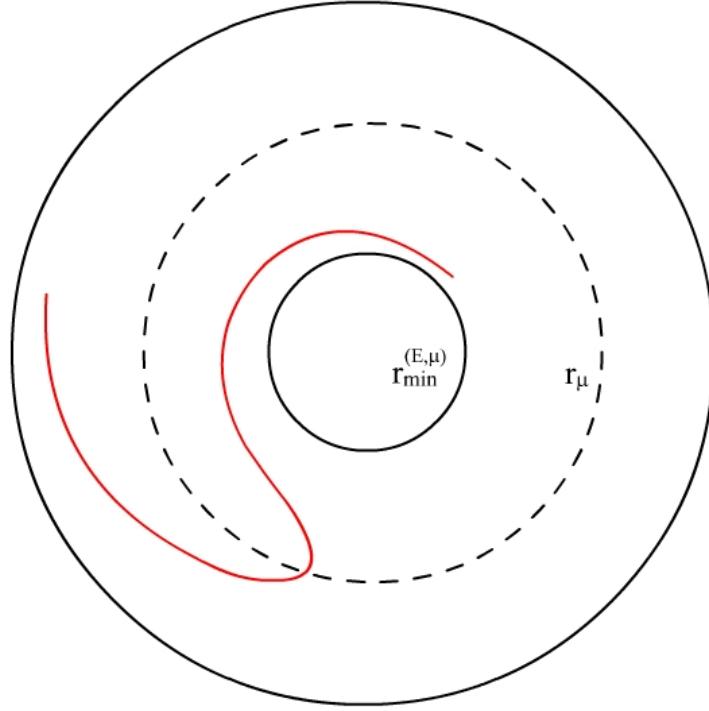
$$\text{e } r_{\min}^{(E,-2(2+E))} = r_{-2(2+E)} > 0 \text{ (} r_\mu \text{ em } \mu = -2(2+E)\text{)};$$

2. Se $E = -2$, então $r_{\min}^{(-2,\mu)}$ é crescente em $(0, +\infty)$ com

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} r_{\min}^{(-2,\mu)} = 0 \text{ e } \lim_{\mu \rightarrow +\infty} r_{\min}^{(-2,\mu)} = 1;$$

3. Se $E > -2$, então $r_{\min}^{(E,\mu)}$ é decrescente em $(-(2+E), 0)$ e crescente em $(0, +\infty)$ com

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^\pm} r_{\min}^{(E,\mu)} = r_{\min}^{(E,0)} = 0 \text{ e } \lim_{\mu \rightarrow -(2+E)^+} r_{\min}^{(E,\mu)} = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} r_{\min}^{(E,\mu)} = 1.$$



Tipo II

Demonstração. Considere $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(r) = \frac{(1-r^2)^2}{r^2}$. Temos que

$$f(r_\mu) = \frac{4}{\mu}.$$

Derivando implicitamente em relação a μ teremos

$$(df_{r_\mu})(r'_\mu) = -\frac{4}{\mu^2}.$$

Como f é decrescente, então r_μ é crescente em $(0, +\infty)$. Os limites seguem dos limites

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r) = +\infty \text{ e } \lim_{r \rightarrow 1^-} f(r) = 0.$$

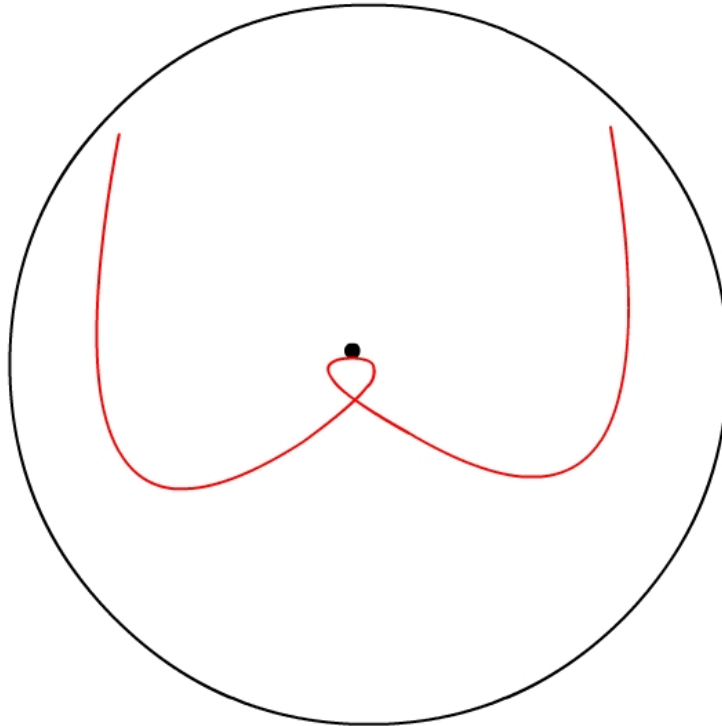
Por outro lado temos que

$$f\left(r_{\min}^{(E,\mu)}\right) = \frac{2(\phi^2 - 1)}{2 + E} = \frac{8}{\mu^2}(2 + E + \mu).$$

Derivando implicitamente em relação a μ teremos

$$\left(df_{r_{\min}^{(E,\mu)}}\right)\left(\frac{d}{d\mu}r_{\min}^{(E,\mu)}\right) = \left(-\frac{8}{\mu^3}\right)[\mu + 2(2 + E)].$$

Portanto, se $E < -2$, devemos ter $r_{\min}^{(E,\mu)}$ definida para $\mu \in [-(2 + E), +\infty)$, decrescente em $(-(2 + E), -2(2 + E))$ e crescente em $(-2(2 + E), +\infty)$, de modo que $r_{\min}^{(E,-2(2+E))}$



Tipo III

será um valor de mínimo para esse caso. Se $E = -2$, então $r_{\min}^{(-2,\mu)}$ é crescente em $(0, +\infty)$. Se $E > -2$, teremos $r_{\min}^{(E,\mu)}$ definida em $[-(2+E), 0) \cup (0, +\infty)$. Assim $r_{\min}^{(E,\mu)}$ será decrescente em $-(2+E), 0)$ e crescente em $(0, +\infty)$. \square

Note que, para $E > -2$, $r_{\min}^{(E,\cdot)} : (-(2+E), +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Por outro lado $r_{\mu} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ não se estende continuamente em $\mu = 0$.

Sobre o problema de 3 corpos restrito no plano hiperbólico temos as seguintes perguntas:

1. O que podemos dizer para α próximo de 1? Observe que a perturbação em α altera a variedade.
2. Sobre as variedades estável e instável de $(0, 0, 0, 0)$ para α próximo de 1, existe interseção transversal entre elas?

Referências Bibliográficas

- [1] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, (1966).
- [2] R. Abraham, J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*. Addison-Wesley, second edition, (1978).
- [3] J. P. PIER, *Amenable locally compact groups*, Pure and applied mathematics, John Wiley Sons, New York, 1984.
- [4] J. N. Mather, Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems. *Math. Z.* 207, 169-207 (1991).
- [5] J. E. Marsden, *Lectures on Mechanics*. London Mathematical Society, Lecture Note Series, 174 (1992).
- [6] A. F. Beardon, *The Geometry of Discrete Groups*, Springer-Verlag, second edition, (1995).
- [7] G. Contreras, R. Iturriaga, G. P. Paternain, M. Paternain, Lagrangian graphs, minimizing measures and Mañé's critical values, *Geom. Funct. Anal.* 8 (1998).
- [8] J. E. Marsden and T. S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Springer-Verlag. Second Edition, (1999).
- [9] G. Contreras, Action potential and weak KAM solutions, *Calc. Var.* 13, 427-458 (2001).
- [10] E. Maderna, Invariance of global solutions of the Hamilton-Jacobi equation, *Bull. Soc. math. France*, (2002).
- [11] A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian Systems: Geometry, Topology, Classification*, CRC Press, (2004).

- [12] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, (2005).
- [13] A. V. Shchepetilov, Nonintegrability of the two-body problem in constant curvature spaces, *J. Phys. A: Math. Gen.* 39, 5787-5806, (2006).
- [14] A. Fathi, Weak KAM Theorem in Lagrangian Dynamics, Workshop and School on Conservative Dynamics, (2006).
- [15] A. Fathi, E. Maderna, Weak KAM Theorem on non compact manifolds, *NoDEA*, (2007).
- [16] A. Sorrentino, Lecture notes on Mather's theory for Lagrangian systems, preliminary version, (2010).
- [17] L. T. Butler and A. Sorrentino, Weak Liouville-Arnold Theorems and Their Implications. *Communications in Mathematical Physics.* 315, 109-133, (2012).
- [18] E. Maderna, On weak KAM theory for N-body problems, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Vol. 32, pp 1019-1041, (2012).
- [19] F. Diacu, E. Perez-Chavela, J.G. Reyes Victoria. An intrinsic approach in the curved n-body problem: the negative curvature case, *J. Differential Equations* 252, 4529-4562, (2012).