



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG

INSTITUTO DE CIENCIAS EXACTAS - ICEX

CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

**Fluxo de Ricci: Existência, Estimativas de Curvatura,  
Compacidade de Hamilton e Aplicações**

**Julio César Matute Calderón**

Belo Horizonte - MG

2014



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG

INSTITUTO DE CIENCIAS EXACTAS - ICEX

CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

**Julio César Matute Calderón**

Orientador:

Prof. Marcos da Silva Montenegro

# **Fluxo de Ricci: Existência, Estimativas de Curvatura, Compacidade de Hamilton e Aplicações**

Dissertação submetida à banca examinadora,  
designada pelo Programa  
de Pós-Graduação em Matemática da  
UFMG, como requisito parcial para a  
obtenção do título de mestre em Matemática.

Belo Horizonte - MG

2014



# Agradecimentos

Aos meus pais, Julio e Carmen, por o sustento, por suas orações e pela confiança que sempre me oferecem. Ao meus irmãos Richard e Karol, por conviver com minha ausência. Aos meus tios, primos e meus avós por ser parte da minha inspiração para continuar esforçando-me cada dia. Obrigado pelo apoio emocional e espiritual, apesar de que pelo destino, não possa compartilhar o cotidiano. Ao meu orientador Marcos da Silva Montenegro pela confiança e pela disposição, paciência e o jeito eficaz de me orientar até a conclusão desta dissertação. Aos professores que compartilharam os seus conhecimentos nas materias que cursei: Lorena, Ana, Emerson, Arturo, Marcelo T., Fabio e Paulo. Aos colegas Jose A., Carlos, Miguel, Roy, Renato, Edwin, Tauan e Victor pelo companheirismo. A CAPES e REUNI pela bolsa de estudos.

# Resumo

Neste trabalho estudamos o fluxo de Ricci dada por Hamilton abordando existência e unicidade, obtendo assim uma solução definida em um intervalo de tempo, em seguida, dar algumas estimativas de Bernstein-Bando-Shi, onde será demonstrado que a norma da curvatura de Riemann explode num tempo finito. Depois estudaremos a noção de convergência dado por Cheeger e Gromov de variedades Riemannianas pontuadas para enunciar o teorema de compacidade de Hamilton dando assim uma demonstração da conjectura de Poincaré no caso em que o tensor de Ricci é positivo.



# Abstract

In this work we study the Ricci flow given by Hamilton addressing existence and uniqueness, thus obtaining a solution defined in a time interval, then give some estimates of Bernstein-Bando-Shi, which will be shown that the norm of the Riemann curvature explodes a finite time. Then we study the notion of convergence given by Cheeger and Gromov of pointed Riemannian manifolds for state the compactness theorem of Hamilton thus giving a demonstration of the Poincaré conjecture in the case where the Ricci tensor is positive.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Noções de Geometria Riemanniana</b>	<b>3</b>
1.1 Vetores, Tensores e Métricas . . . . .	3
1.2 A Derivada Covariante . . . . .	9
1.3 A Derivada de Lie . . . . .	12
1.4 Curvatura . . . . .	13
1.5 Topologia da Geometria . . . . .	18
1.6 Métricas Evoluindo no Tempo . . . . .	19
<b>2 Teoria De Existência Para O Fluxo De Ricci</b>	<b>23</b>
2.1 Teoria De Existência Para EDPs Parabólicas . . . . .	23
2.1.1 EDP Linear Escalar . . . . .	23
2.1.2 O Símbolo Principal . . . . .	24
2.1.3 Generalização a Fibrados Vectoriais . . . . .	25
2.2 Fluxo de Ricci não é parabólico . . . . .	27
2.2.1 A linearização do Tensor de Ricci . . . . .	27
2.3 O Truque Deturck . . . . .	28
2.3.1 Existência dos Difeomorfismos de DeTurck . . . . .	32
<b>3 As Estimativas de Bernstein-Bando-Shi e Explosão de Curvatura em Singularidades</b>	<b>34</b>
3.1 Evolução das Quantidades Geométricas Sob o Fluxo de Ricci . . . . .	34
3.2 Equações de Evolução para Derivadas da Curvatura . . . . .	35
3.3 Estimativas de Bernstein-Bando-Shi . . . . .	38
3.4 Explosão de Curvatura em Singularidades com Tempo Finito . . . . .	40
<b>4 Compacidade de Variedades Riemannianas e Fluxos</b>	<b>47</b>
4.1 Convergência e Compacidade de Variedades . . . . .	47
4.2 Convergência e Compacidade para Fluxos . . . . .	49
4.3 Blow Up em uma Singularidade . . . . .	50

<b>5</b>	<b>Variedades Tridimensionais com Curvatura de Ricci Positiva</b>	<b>53</b>
5.1	Teorema de Hamilton . . . . .	53
	<b>Apêndice</b>	<b>55</b>

# Introdução

Hamilton publicou um artigo inovador ([9]), em 1982, introduzindo o conceito do fluxo de Ricci. Se você tem uma variedade  $M$  de Riemann com métrica  $g_0$ , o fluxo de Ricci é uma E.D.P que evolui o tensor métrico:

$$(*) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2Ric_{g(t)}, & t \in (0, T) \\ g(0) = g_0 \end{cases}$$

onde  $Ric(g(t))$  denota a curvatura de Ricci da métrica  $g(t)$ .

Como o fluxo é quasilinear e apenas fracamente parabólico, a existência local não resulta da teoria parabólica clássica. Originalmente, Hamilton utilizou o teorema da função implícita de Nash-Moser para estabelecer a existência local. Posteriormente, uma demonstração muito mais simples foi dada por Dennis DeTurck. Precisamente, o resultado de existência é enunciado como:

**Teorema 0.1** *Se  $(M^n, g_0)$  é uma variedade Riemanniana fechada  $n$ -dimensional. Então existe uma única solução  $g(t)$  do fluxo de Ricci (\*) definida em algum intervalo de tempo  $[0, \epsilon)$ .*

Outro ingrediente importante que compõe a teoria de fluxo de Ricci é o seguinte resultado devido a:

**Teorema 0.2** *(Estimativas de Bernstein-Bando-Shi). Seja  $(M^n, g(t))$  uma solução de fluxo de Ricci numa variedade fechado  $n$ -dimensional. Então, para cada  $\alpha > 0$  e  $m \in \mathbb{N}$ , existe uma constante  $C_m$  dependendo só de  $m, n$  e  $\max\{\alpha, 1\}$  tal que se*

$$|Rm(x, t)|_{g(t)} \leq K \quad \forall t \in [0, \frac{\alpha}{K}] \tag{1}$$

então

$$|\nabla^m Rm(x, t)|_{g(t)} \leq \frac{C_m K}{t^{m/2}} \quad \forall t \in (0, \frac{\alpha}{K}] \tag{2}$$

Graças a estas estimativas é possível demonstrar que a norma da curvatura de Riemann deve explodir em um tempo finito, isto é quando  $t$  se aproxima de  $T$ . Em resumo, dada uma métrica  $g_0$

sobre uma variedade fechada  $n$ -dimensional  $M^n$ , então o fluxo de Ricci (\*) tem uma única solução  $g(t)$  definida em algum intervalo de tempo maximal  $t \in [0, T)$ , onde  $T \leq \infty$ . Se  $T < \infty$ , então

$$\lim_{t \rightarrow T} (\sup_{x \in M} |Rm(x, t)|_{g(t)}) = +\infty \quad (3)$$

Outra parte importante da teoria diz respeito à noção de convergência de variedades Riemannianas pontuadas, introduzidas por Cheeger e Gromov, e o teorema de compacidade de Hamilton.

**Teorema 0.3** *Sejam  $(M_i, g_i(t), p_i)$  variedades Riemannianas completas marcadas evoluindo para  $-\infty \leq a < t < b \leq \infty$ , onde  $g_i(t)$  é um fluxo de Ricci sobre  $M_i$ . Se*

$$(i) \sup_i \sup_{x \in M_i} |Rm(g_i(t))|_{(x)} < \infty, \\ t \in (a, b)$$

$$(ii) \inf_i inj(M_i, g_i(0), p_i) > 0,$$

*então existe uma variedade Riemanniana completa marcada  $(M, g(t), p)$  evoluindo para  $t \in (a, b)$ , onde  $g(t)$  é um fluxo de Ricci sobre  $M$ , tal que*

$$(M_i, g_i(t), p_i) \longrightarrow (M, g(t), p)$$

*quando  $i \longrightarrow \infty$ , a menos de subsequência.*

Além de apresentar a parte da teoria descrita acima de maneira clara e detalhada, também acrescentamos a demonstração da Conjetura de Poincaré no caso em que o tensor de Ricci é positivo devido a Hamilton. Precisamente:

**Teorema 0.4** *(Hamilton). Seja  $M^3$  uma variedade Riemanniana fechada de dimensão 3 que admite uma métrica Riemanniana suave com curvatura de Ricci estritamente positivo. Então  $M^3$  também admite uma métrica suave de curvatura constante positiva.*

Em particular, se  $M^3$  é simplesmente conexa, então a variedade é difeomorfa à esfera  $S^3$ .

# Capítulo 1

## Noções de Geometria Riemanniana

Vamos apresentar os conceitos básicos de geometria Riemanniana neste capítulo, com conceitos que serão importantes para o fluxo de Ricci. A maioria das provas se descuidará por brevidade, já que o ponto principal do capítulo é estabelecer convenções. As fórmulas particularmente úteis foram coletadas no Apêndice. Nós também na Seção 1.5 falamos de como a geometria pode ser usado para tirar conclusões topológicos. O material neste capítulo é apresentado em muito mais detalhe em muitos textos por exemplo, [14] apresenta os conceitos básicos de variedades, vetores tangentes, tensores e da derivada de Lie. O livro [8] é um excelente lugar para aprender a teoria da curvatura.

### 1.1 Vetores, Tensores e Métricas

Um espaço topológico  $M^n$  é uma  $n$ -variedade, se ele se parece com o espaço euclidiano ( $\mathbb{R}^n$ ), perto de cada ponto. A definição formal tem algumas outras condições técnicas, bem como, para evitar certas patologias que podem surgir:

**Definição 1.1 (Variedad Topológica)**

*Um espaço topológico  $M^n$  é uma variedade topológica  $n$ -dimensional se:*

1. *Para cada  $p \in M^n$  existe uma vizinhança aberta  $U$  de  $p$  e um homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  em um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ . O par  $(U, \varphi)$  é chamado uma carta de coordenadas. Nós frequentemente vai escrever  $\varphi(q) = (x^1(q), x^2(q), \dots, x^n(q))$ . Estes  $x^i(q)$  são referidos como coordenadas locais para  $M^n$ .*
2.  *$M^n$  é Hausdorff.*
3.  *$M^n$  é paracompacto (ver [13, vol. I, App. A, cap. 1] para uma discussão sobre esta condição).*

Nós geralmente vai escrever  $M$  para uma variedade genérica, e  $M^n$  para um  $n$ -variedade se a dimensão é de particular relevância. Neste projeto nós vamos lidar com variedades suaves, que

têm mais estrutura do que variedades topológicas. A fim de definir o que é uma variedade suave é, devemos primeiro definir o conceito de uma função suave entre subconjuntos de espaço euclidiano.

**Definição 1.2** *Uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , onde  $U$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ , é chamado suave ou  $C^\infty$  se todos os seus derivados parciais existem e são contínuas em  $U$ .*

Agora podemos definir o conceito de uma variedade suave.

**Definição 1.3** *Dado dois cartas coordenadas  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  em uma variedade  $M$ , com  $U \cap V \neq \emptyset$ , tal que  $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  é um homeomorfismo de um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$  para outro conjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$ . Nós fazemos as definições:*

1.  $M$  é chamado suave ou  $C^\infty$  se todos os  $\psi \circ \varphi^{-1}$  são suaves.
2.  $M$  é orientável, se todos os  $\psi \circ \varphi^{-1}$  são de preservação da orientação.

Agora é possível definir o conceito de uma aplicação suave entre variedades.

**Definição 1.4** *Seja  $f : M \rightarrow N$ , onde  $M$  e  $N$  são variedades suaves.  $f$  é chamado suave se, para cada par de cartas coordenadas  $(U, \varphi)$  de  $M$  e  $(V, \psi)$  de  $N$ , a função*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \psi(f(U) \cap V)$$

*é suave.*

Como um caso especial, podemos estabelecer  $N = \mathbb{R}$ , o qual tem uma estrutura natural de variedade suave. O conjunto de todas as funções suaves reais  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é denotado  $C^\infty(M)$ .

Dois variedades topológicas são equivalentes se eles são homeomorfas. A noção de equivalência em variedades suaves é um pouco mais sutil

**Definição 1.5** *Dois variedades suaves  $M, N$  são equivalentes se existe uma função suave  $f : M \rightarrow N$  que tem um inversa suave. Vamos chamar essa função  $f$  de um difeomorfismo e dizer que  $M$  e  $N$  são difeomorfas.*

Em três dimensões, variedades topológicas e suaves são essencialmente equivalentes. Ou seja, qualquer variedade topológica é homeomorfa a uma variedade suave único, e vice-versa. Este resultado não é verdadeiro para dimensões mais elevadas. Entretanto, a maioria dos resultados deste projeto tratará 3-manifolds, por isso é interessante notar que não perdemos qualquer generalidade, assumindo que os nossos 3-variedades são suaves.

Agora que sabemos o que é uma variedade, gostaríamos de definir um vetor tangente a nossa variedade  $M$  em um ponto  $p \in M$ .

**Definição 1.6** *Um vetor tangente a uma variedade  $M$  suave em um ponto  $p \in M$  é uma derivação, isto é, uma função  $\mathbb{R}$ -linear  $X : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo a regra do produto:*

$$X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g).$$

*O conjunto de todos os vetores tangentes a uma  $n$ -variedade  $M$  em  $p$  forma um espaço vectorial  $n$ -dimensional  $T_pM$ .*

Fazemos notar que esta definição está relacionada com a noção mais intuitiva de um vector tangente como um vector de velocidade de uma curva  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  na variedade. Se  $\gamma(0) = p$  então nós associamos ao vector velocidade de  $\gamma$  em  $p$  a derivação  $X \in T_pM$ , onde

$$X(f) = \frac{d}{dt}f(\gamma(t))|_{t=0}.$$

Então nós escrevemos  $X = \dot{\gamma}(0)$ .

Se  $(x^i)$  é um sistema de coordenadas local sobre  $p$  em uma  $n$ -variedade  $M$ , então o conjunto de derivações  $\{\partial/\partial x^i, i = 1, 2, \dots, n\}$  constitui uma base para  $T_pM$ . Para evitar inconvenientes de notação muitas vezes vai escrever  $\partial_i$  por  $\partial/\partial x^i$  se não pode haver confusão sobre o sistema de coordenadas a ser utilizado. O conjunto de todos os vectores tangente a todos os pontos de  $M$  forma uma  $(2n)$ -variedade conhecido como o fibrado tangente, e denotado  $TM$ .

Notamos de passagem que há alguma estrutura adicional para  $TM$  na parte superior da estrutura de espaço vectorial em  $T_pM$ : dados dois campos de vectores  $X, Y$  em  $M$ , podemos formar seu *colchete de Lie*  $[X, Y]$ , definido por

$$[X, Y]f = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

(verifica-se que o  $[X, Y]$  assim definida é um vector tangente no sentido de ser uma derivação tal como descrito acima, embora isso não seja imediatamente evidente).

O exemplo de vectores tangentes é um caso específico de uma construção mais geral sobre uma variedade, conhecida como *fibrado vectorial*. A ideia é que se associa a um espaço vectorial para cada ponto de a variedade  $M$ , então cola esses espaços vectoriais juntos, de modo a obter uma nova variedade, de dimensão superior.

**Definição 1.7** Um fibrado vetorial  $k$ -dimensional é uma variedade  $\mathcal{E}$  (o espaço total) junto com a variedade  $M$  (o espaço base) e uma aplicação surjective  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow M$  (a projecção) tal que

1. Para cada  $p \in M$ , o conjunto  $\mathcal{E}_p := \pi^{-1}(p)$  (a fibra de  $\mathcal{E}$  sobre  $p$ ) tem uma estrutura de espaço vectorial  $k$ -dimensional.
2. Para cada  $p \in M$  existe uma vizinhança aberta  $U$  de  $p$  e um difeomorfismo suave  $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$  (trivialização Local) tal que  $\varphi$  leva cada fibra  $\mathcal{E}_p$  a fibra correspondente  $\{p\} \times \mathbb{R}^k$  por um isomorfismo linear.

Uma seção de  $\mathcal{E}$  é uma aplicação  $F : M \rightarrow \mathcal{E}$  tal que  $\pi \circ F = Id_M$ . O espaço de seções de  $\mathcal{E}$  é denotado  $\Gamma(\mathcal{E})$ .

O fibrado tangente é um fibrado vectorial  $n$ -dimensional com espaço base  $M$  e projecção definida por  $\pi(X) = p$  se  $X \in T_pM$ . Um campo vectorial é uma seção do fibrado tangente.

Outro exemplo importante de um fibrado vectorial é o fibrado dual do fibrado tangente, conhecido como o fibrado co-tangente,  $T^*M$ . a fibra  $T_p^*M = (T_pM)^*$  consiste de todos os funcionais lineares que atuam sobre o espaço vectorial  $T_pM$  (Os covectores ou 1-formas em  $p$ ). Dado um sistema de coordenadas local  $(x^i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  sobre  $p$  em uma  $n$ -variedade  $M$ , o conjunto de covectores  $\{dx^i, i = 1, 2, \dots, n\}$  (onde  $dx^i(X) := X(x^i)$ ) constitui uma base para  $T_p^*M$ .

Este método de construção de novos fibrados vetoriais pode ser generalizada. Seja  $\mathcal{V}$  a categoria de espaços vetoriais reais de dimensão finita. Dado fibrados vetoriais  $\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2, \dots, \mathcal{E}^k$  sobre  $M$  e um functor covariante  $T : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \dots \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ , é possível formar um único fibrado vetorial  $\mathcal{E} = T(\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2, \dots, \mathcal{E}^k)$  sobre  $M$  Tendo fibras  $\mathcal{E}_p = T(\mathcal{E}_p^1, \mathcal{E}_p^2, \dots, \mathcal{E}_p^k)$  (ver [6], capítulo 3). O fibrado cotangente surge no caso  $k = 1$ ,  $\mathcal{E}^1 = TM$ , e  $T(V) = V^*$ .

Desta forma, podemos formar o produto tensorial de fibrados vetoriais, fazendo  $T$  o functor produto tensorial em espaços vetoriais. Nós definimos um  $\binom{k}{l}$ -campo tensorial a ser uma seção de

$$T_l^k(M) := \overbrace{T^*M \otimes T^*M \otimes \dots \otimes T^*M}^{k \text{ cópias}} \otimes \overbrace{TM \otimes TM \otimes \dots \otimes TM}^{l \text{ cópias}}.$$

Dado um sistema de coordenadas local  $(x^i)$  about  $p \in M$ , podemos expressar qualquer  $\binom{k}{l}$ -campo tensorial  $F$  no sistema de coordenadas como

$$F = F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(p) \partial_{j_1} \otimes \dots \otimes \partial_{j_l} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}. \quad (1.1)$$

Nesta equação somamos em cada índice  $j_p, i_p$  repetido duas vezes, uma vez levantada e abaixada, isto é conhecido como a Convenção sobre a soma do Einstein. Quase sempre, vamos utilizar esta representação coordenada da tensores porque faz cálculos técnicos mais fácil, e muitas vezes vamos escrever  $F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}$  quando queremos dizer  $F$ .

**Definição 1.8** *Dada uma aplicação entre variedades  $\phi : M \rightarrow N$ , definimos a aplicação derivada entre os espaços tangentes correspondentes,  $\phi_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  por*

$$(\phi_* V)(f) = V(f \circ \phi)$$

para  $V \in T_p M$  e  $f \in C^\infty(N)$ . Definindo  $\phi_*(A \otimes B) := \phi_*(A) \otimes \phi_*(B)$ , podemos estender esta definição para aplicar-se a todos  $\binom{0}{k}$ -tensores.

De uma maneira semelhante pode-se definir a aplicação derivada de entre os espaços cotangente correspondentes,  $\phi^* : T_{f(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$ , por

$$(\phi^* \omega)(V) = \omega(\phi_* V)$$

para  $V \in T_p M$ ,  $\omega \in T_{f(p)}^* N$ . Por um modo semelhante ao acima, podemos estender  $\phi^*$  para aplicar a todos  $\binom{k}{0}$ -tensores.

Dado um tensor  $F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} \in T_l^k(M)$  podemos tomar o **traço** mais de um elevado e um baixo índice de como se segue:

$$(tr F)_{i_2 \dots i_k}^{j_2 \dots j_l} = F_{p i_2 \dots i_k}^{p j_2 \dots j_l}$$

para obter um elemento de  $T_{l-1}^{k-1}(M)$ . Observe o uso da convenção de soma de Einstein: o índice  $p$  é somado sobre. Obviamente, o traço depende de qual você escolher os índices para traçar sobre-aqui traçamos sobre o  $j_1$  e  $i_1$  índices. Embora não seja imediatamente óbvio, o tensor resultante não dependem do sistema de coordenadas local que você está trabalhando dentro.

A  $k$ -forma sobre  $M$  é uma seção de  $\wedge^k T^* M$ , ou seja,  $\binom{k}{0}$ -campo tensor que é completamente anti-simétrica em todos os seus índices. O  $k$ -campo vetorial sobre  $M$  é uma seção de  $\wedge^k T M$ .

**Definição 1.9** Para o  $\binom{2}{0}$ -tensor  $A$  nós escrevemos  $A > 0$  ( $A \geq 0$ ) se

$$A(V, V) > 0 \text{ (} A(V, V) \geq 0 \text{)}$$

para tudo  $V \in TM, V \neq 0$ . Podemos escrever da mesma forma  $A > B$  ( $A \geq B$ ) se  $A - B > 0$  ( $A - B \geq 0$ ).

**Definição 1.10** Uma **métrica Riemanniana** em uma variedade suave  $M$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p$  de  $M$  um produto interno no espaço tangente  $T_pM$ , que varia suavemente, ou seja, o  $\binom{2}{0}$ -campo tensor simétrico e que é positiva definida em cada ponto de  $M$ . Normalmente vamos escrever  $g$  para métrica Riemanniana, e  $g_{ij}$  para sua representação em coordenadas. Dado tal  $g$ , há uma norma induzida em cada  $T_pM$  que escrevemos

$$|X|_g := \sqrt{g(X, X)} \tag{1.2}$$

para  $X \in T_pM$ . Uma variedade junto com uma métrica Riemanniana  $(M, g)$  é chamado uma **variedade Riemanniana**.

Quando há apenas uma métrica em questão, eles costumam negligenciar o subscrito  $g$  na equação (1.2), mas haverá algumas situações no estudo do fluxo de Ricci, onde teremos de distinguir entre as Normas induzidas por diferentes métricas. Às vezes, usamos a notação  $\langle X, Y \rangle$  para  $g(X, Y)$ .

Note-se que uma métrica Riemanniana realmente não é uma métrica (embora muitas vezes dizer métrica em vez métrica Riemanniana para resumir, em contextos em que a confusão é possível).

**Definição 1.11** Dada uma métrica Riemanniana  $g$  podemos definir o comprimento de uma curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$   $C^1$  por partes por

$$l(\gamma) := \int_0^1 \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt$$

onde  $\dot{\gamma}(t) := d\gamma/dt$ .

Isso nos permite definir uma métrica  $d$  em  $M$  induzida pela métrica  $g$  :

$$d(p, q) := \inf \{ l(\gamma) : \gamma \text{ é uma curva } C^1 \text{ por partes em } M \text{ a partir de } p \text{ e terminando no } q \}.$$

Alguns vão usar a notação espaço métrico para a bola: se  $(M, g)$  é uma variedade Riemanniana,  $p \in M$  e  $r > 0$ , então

$$B(p, r) := \{ q \in M : d(p, q) < r \}$$

em que  $d$  é a métrica induzida por  $g$ .

Finalmente, dizemos que uma aplicação  $\phi : M \rightarrow N$  entre variedades Riemannianas  $(M, g)$  e  $(N, h)$  é uma **isometria** se é um difeomorfismo e  $\phi^*h = g$ . Neste caso, dizemos que os dois são variedades Riemannianas **isométricas**.

Não é difícil ver que uma isometria entre variedades Riemannianas no sentido apenas definido também é uma isometria espaço-métrico entre as variedades, se vê-los como espaços métricos com as métricas induzidas pelas métricas Riemannianas correspondente.

Notamos que qualquer variedade suave, em virtude que é paracompacto, admite uma métrica Riemanniana suave. Então, não perde nenhuma generalidade abordando propriedades topológicas de variedades suaves do ponto de vista da geometria Riemanniana.

Dada uma variedade Riemanniana  $(M, g)$  e uma variedade  $N$  mergulhada em  $M$  (uma subvariedade de  $M$ ), existe uma métrica Riemanniana induzida  $\bar{g}$  em  $N$  definido pela restrição  $g$  de  $T_p M$  em cada ponto  $p \in N$ .

Adá a métrica  $g_{ij}$ , que é uma matriz simétrica definida positiva, em cada ponto de  $M$ , nós definimos o inverso da métrica  $g^{ij}$  a ser a matriz inversa em cada ponto, satisfazendo  $g^{ij}g_{jk} = \delta_k^i$  onde  $\delta_k^i$  é o delta de Kronecker. Qualquer produto interno em um espaço vetorial dá um isomorfismo naturais  $V \cong V^*$ , via  $X \rightarrow X^b$ , onde  $X^b(Y) = \langle X, Y \rangle$ . Em coordenadas,  $(X^b)_i = g_{ij}X^j$ . Em geral, podemos baixar um índice  $i$  em um tensor  $F_{pq}^{ijk}$ , por exemplo, através da definição

$$F_{ipq}^{jk} := g_{im}F_{pq}^{mjk}.$$

Isto leva-nos a partir de um elemento de  $T_l^k(M)$  a algo em  $T_{l-1}^{k+1}$ . Podemos semelhante elevar um índice usando  $g^{ij}$ . Usando o inverso da métrica também podemos definir uma norma sobre o espaço dos tensores, por exemplo

$$|F_{pq}^{ijk}|^2 := g_{i_1 i_2} g_{j_1 j_2} g_{k_1 k_2} g^{p_1 p_2} g^{q_1 q_2} F_{p_1 q_1}^{i_1 j_1 k_1} F_{p_2 q_2}^{i_2 j_2 k_2}.$$

Faremos uso freqüente do muito conveniente  $*$ -notação em capítulos posteriores. Dado dois tensores  $A, B$ , a expressão  $A*B$  significa uma combinação linear de traços de  $A \otimes B$  com coeficientes que não dependem de  $A$  ou  $B$ . Por exemplo se temos  $A = A_{ij}^{klm}$ ,  $B = B_{pqr}^s$ , então  $A*B$  pode representar

$$17A_{ij}^{kil} B_{lqr}^j - n!A_{qi}^{lrs} B_{isr}^k$$

onde  $n$  é a dimensão da variedade, ou

$$A_{ij}^{ijk} B_{klm}^l.$$

O significado é, obviamente, muito amplo, e é de uso mais quando queremos obter limites sobre combinações complicadas de quantidades tensoriais (como veremos em capítulos posteriores). A propriedade mais útil deste notação é que, para qualquer dada forma de expressão  $A*B$ , existe uma constante  $C$  que não depende de  $A$  ou  $B$  de tal forma que

$$|A*B| \leq C|A||B|$$

pela desigualdade de Cauchy-Schwarz. Como um caso especial, que vamos usar com freqüência, temos

**Lema 1.1** *Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  então*

$$|A|^2 \geq \frac{1}{n}(tr A)^2.$$

O  $*$ - notação pode, obviamente, ser estendida a várias  $*$ -produtos como  $A*B*...*Z$  ou potências  $A^{*n} := A*A*A*...*A$ . Também definimos  $*(A, B, \dots, Z)$  a significar qualquer combinação de  $*$ -produtos de quaisquer potências de  $A, B, \dots, Z$ , por exemplo

$$B^{*3} * Z + A^{*2} * Z^{*4}.$$

Nos próximos capítulos, vamos utilizar a notação

$$\begin{aligned} * \quad (A_i) &:= *(A_1, A_2, \dots, A_n). \\ 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

## 1.2 A Derivada Covariante

Podemos diferenciar funções escalares em uma variedade  $M$ , sem qualquer problema: para encontrar a taxa de mudança de uma função  $f$  na direcção do vector tangente  $X$ , simplesmente calcular  $X(f)$ . Devemos também ser capaz de diferenciar campos de vetores, ou, mais geralmente uma seção  $Y$  de um fibrado vetorial arbitrário, na direcção de um vetor tangente dado  $X$ .

**Definição 1.12** *Dado um fibrado vetorial  $\mathcal{E}$  sobre  $M$ , uma **conexão** em  $\mathcal{E}$  é uma aplicação*

$$\nabla : C^\infty(TM) \times C^\infty(\mathcal{E}) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{E})$$

com as seguintes propriedades:

1.  $\nabla_X Y$  é linear sobre  $C^\infty(M)$  em  $X$ .
2.  $\nabla_X Y$  é linear sobre  $\mathbb{R}$  em  $Y$ .
3.  $\nabla$  satisfaz a regra do produto:

$$\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y.$$

chamamos  $\nabla(X, Y)$  a **derivada covariante** de  $Y$  na direcção  $X$ . Costumamos escrever  $\nabla_X Y$  em vez de  $\nabla(X, Y)$ .

É possível calcular  $\nabla_X Y(p)$  se  $X$  é dado e e os valores de  $Y$  ao longo de uma curva  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$  tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = X_p$ . Uma seção  $Y$  de  $\mathcal{E}$  definido ao longo de uma curva  $\gamma$  em  $M$  é dito para ser **paralelo** ao longo  $\gamma$  se  $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} Y = 0$  ao longo de  $\gamma$ .

A conexão do fibrado vetorial  $\mathcal{E}$  está completamente especificado por seus símbolos de **símbolos de Christoffel**  $\Gamma_{ij}^k$  num sistema de coordenadas local  $(x^i)$  com uma base local  $(E_j)$  para  $\mathcal{E}$ , definido por:

$$\nabla_{\partial_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k.$$

Como um caso especial muito importante, podemos considerar conexões em fibrados  $T_l^k(M)$

**Lema 1.2** *Dada uma conexão  $\nabla$  no fibrado tangente  $TM$ , podemos definir as conexões em todos os fibrados de tensores  $T_l^k(M)$  (que também vamos denotar  $\nabla$ ) satisfazendo:*

1.  $\nabla$  é a conexão dada no  $TM$ .
2. Para uma função escalar  $f$ ,  $\nabla_X f = X(f)$ .
3.  $\nabla_X(F \otimes G) = (\nabla_X F) \otimes G + F \otimes (\nabla_X G)$ .
4.  $\nabla_X$  comuta com todos os traços:

$$\nabla_X(\text{tr}Y) = \text{tr}(\nabla_X Y)$$

para todos os traços (sobre quaisquer índices) do tensor  $Y$ .

Se  $F$  é um  $\binom{k}{l}$ -campo tensorial em  $M$  que é dada em coordenadas locais pela equação (1.1), vamos escrever a forma de coordenadas do derivada covariante  $\nabla F$  como

$$(\nabla_X F) := (\nabla_p F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}) \partial_{j_1} \otimes \dots \otimes \partial_{j_l} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k} X^p.$$

Podemos escrever a forma coordenada  $\nabla$  explicitamente:

$$\nabla_p F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = \partial_p F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} + \sum_{s=1}^l F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots q \dots j_l} \Gamma_{pq}^{j_s} - \sum_{s=1}^k F_{i_1 \dots q \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} \Gamma_{p i_s}^q. \quad (1.3)$$

No segundo termo da equação acima, o índice  $q$  superior ocupa a posição normalmente ocupada por  $j_s$ , e no terceiro termo no índice inferior  $q$  ocupa a posição normalmente ocupada por  $i_s$ .

Note-se que a equação (1.3) pode ser expressa usando a  $*$ -notação como

$$\nabla F = \partial F + \Gamma * F. \quad (1.4)$$

Podemos generalizar esta observação:

**Lema 1.3** *Seja  $\nabla^m F$  denota el  $m$ -ésimo iterada derivada covariante de  $F$  e  $\partial^m F$  denota la expresión em coordenadas*

$$(\partial^m F)_{i_1 \dots i_m} := \partial_{i_1 \dots i_m} F$$

em algum sistema de coordenadas local  $(x^i)$  definido em um aberto  $U$  na variedade  $M$ . Então

$$\nabla^m F = \partial^m F + \sum_{i=0}^{m-1} \left( \underset{j \leq m-1}{*} (\partial^j \Gamma) \right) * \nabla^i F$$

em  $U$ .

**Demostração:**

O resultado resulta da equação (1.4) por indução.

Embora existam muitas conexões possíveis sobre o fibrado tangente  $TM$ , se  $M$  é equipado com uma métrica Riemanniana então há um em particular, que tem mais significado geométrico.

**Lema 1.4** *Dada uma métrica Riemanniana  $g_{ij}$  em  $M$ , existe uma única conexão  $\nabla$  sobre  $TM$  que satisfaz*

1.  $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$  ( $\nabla$  é **compatível** com  $g$ ). Isto é equivalente a  $\nabla g = 0$  onde  $\nabla g$  é definido pelo Lema 1.2.

2. **O tensor de torção**  $\nabla$ ,

$$\tau(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X; Y]$$

é identicamente 0.

Esta conexão é conhecida como a conexão de **conexão de Levi-Civita** da métrica  $g$ . Seus símbolos de Christoffel são dadas em coordenadas locais por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}). \quad (1.5)$$

Usando a conexão de Levi-Civita, podemos definir o Laplaciano:

**Definição 1.13** *O Laplaciano é uma família de operadores*

$$\Delta : C^\infty(T_l^k M) \longrightarrow C^\infty(T_l^k M)$$

(onde  $(M, g)$  é uma variedade Riemanniana) definido por

$$\Delta F := g^{ij} \nabla_i \nabla_j F,$$

onde  $\nabla$  é a conexão de Levi-Civita da métrica  $g$ . Se  $F$  tem a forma coordenada dada na equação (1.1), vamos escrever

$$\Delta F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}$$

para

$$(\Delta F)_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}.$$

Se nos é dada uma conexão em  $TM$  (que geralmente será usando a conexão de Levi-Civita por alguma métrica  $g_{ij}$ ) podemos definir **geodésicas** como os caminhos que você pode se mover ao longo de uma variedade “sem sentir qualquer força”. Isto é, um caminho  $\gamma : [0, 1] \longrightarrow M$  é uma geodésica se  $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) = 0$  em cada ponto. Dado um ponto inicial e da velocidade (ou equivalentemente um elemento de  $TM$ ), existe uma única geodésica em  $M$  partindo a partir desse ponto, com a determinada velocidade inicial. Se  $M$  é completo (em especial, se estiver fechada, como será para todas as nossas aplicações), a geodésica vai existir para sempre.

**Definição 1.14** *Suponha que  $M$  é completa e não tem fronteira. Dado  $v \in T_p M$ , Seja  $\gamma_v : [0, 1] \longrightarrow M$  ser a única geodésica em  $M$ , que começa em  $p$  com vetor velocidade inicial  $v$ . Ou seja,  $\gamma_v(0) = p$  e  $\gamma'_v(0) = v$ . Nós definimos aplicação exponencial  $exp : TM \longrightarrow M$  por  $exp(v) = \gamma_v(1)$ . Denotamos por  $exp_p$  aplicação exponencial restrito a  $T_p M$ . Aplicação exponencial é suave.*

Porque  $exp_p$  é localmente um difeomorfismo na origem de  $T_p M$ , é possível escolher uma vizinhança aberta  $U$  de  $p$  que é um difeomorfismo via  $exp_p$  para um conjunto aberto em  $T_p M = \mathbb{R}^n$ , pelo teorema da função inversa. Nós escolhemos as coordenadas  $(x_i), i = 1, \dots, n$  em  $T_p M$  de modo a que os vetores base  $\{\partial_i : i = 1, \dots, n\}$  são ortonormais com respeito à métrica  $g$  em  $p$ . Temos então, uma carta de coordenadas  $(U, (exp_p)^{-1})$ . Estas coordenadas são chamadas **coordenadas normais** cerca de  $p$  e tem algumas propriedades que os tornam muito conveniente para fazer cálculos:

**Lema 1.5** *Em coordenadas normais cerca de  $p$ , temos*

1.  $g_{ij} = \delta_{ij}$  em  $p$ .
2. Se  $v \in \mathbb{R}^m$  então a curva  $\gamma_v(t) = tv$  é uma geodésica enquanto ela existir.
3.  $\partial_k g_{ij} = 0$  e  $\Gamma_{ij}^k$  em  $p$ . Assim

$$\nabla_k F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = \partial_k F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}$$

em  $p$ , pela fórmula (1.3).

**Definição 1.15** *O raio de injetividade  $inj(p)$  em um ponto  $p \in M$  é definido por*

$$inj(p) := \sup\{r > 0 : exp_p : B(0, r) \longrightarrow M \text{ é injetora}\}.$$

O raio de injetividade de uma variedade  $M$  com métrica  $g$  é definida por

$$\text{inj}(M, g) := \inf\{\text{inj}(p) : p \in M\}.$$

Pode-se interpretar o raio injetividade em  $p \in M$  como se segue: imagine que existe uma cinza de luz em  $p$  em algum momento. Os raios de luz se propagam em todas as direções - o raio de injetividade é a menor distância um desses raios tem que viajar antes que colide com outro raio de luz. O raio de injetividade é um conceito fundamental no estudo da convergência de manifolds, como veremos no Capítulo 4.

### 1.3 A Derivada de Lie

A derivada covariante dá um jeito de diferenciar campos tensores. Vamos agora olhar para uma forma diferente, que pode ser definida puramente a partir da estrutura de variedade de  $M$ , sem qualquer referência a uma métrica riemanniana ou a estrutura extra de uma conexão

Dado um campo vetorial  $X$  em uma variedade  $M$ , definimos uma família dependente do tempo de difeomorfismos  $\varphi_t : M \rightarrow M$  para  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , tal que  $\varphi_0$  é a identidade e

$$\frac{d}{dt}\varphi_t = X$$

em cada ponto (a existência de tal  $\varphi_t$  decorre teoremas básicos existência de equações diferenciais, ver [5, cap. 6-2] para este argumento e outros detalhes relativos à derivada de Lie). Isto é para ser interpretado como um fluxo de uma variedade na direção do campo vetorial  $X$ . Agora definir a derivada de alguns  $\binom{k}{l}$ - campo tensorial  $F$  na direção de  $X$  como a variação do  $F$  quando nos movemos um pequeno passo na direção de  $X$ . Ao invés de fazer essa comparação usando uma conexão como antes, nós torná-lo, empurrando o valor de  $F$  no ponto de volta para o ponto original usando o difeomorfismo  $\varphi_t$ .

Nós definimos

$$(*\varphi_t)F_p(X_1, \dots, X_k, \omega^1, \dots, \omega^l) := F_{\varphi_t(p)}(\varphi_{t*}X_1(p), \dots, \varphi_{t*}(X_k(p)), (\varphi_t^{-1})^*(\omega^1_p), \dots, (\varphi_t^{-1})^*(\omega^l_p)).$$

Note-se que  $(*\varphi_t)F_p \in T_l^k M_p$  para todo  $t$ . É agora possível definir a **derivada de Lie** de  $F$  na direção de  $X$  como

$$\mathcal{L}_X F = \left( \frac{d}{dt}(*\varphi_t)F \right)_{t=0}$$

**Lema 1.6** *A derivada de Lie é bem definido. Ele obedece semelhantes condições satisfeitas pela derivada covariante, conforme descrito no Lema 1.2, com uma exceção importante:*

1. Para uma função escalar  $f$ ,  $\mathcal{L}_X f = X(f)$ .
2. Se  $Y$  é um campo vetorial então  $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ .
3.  $\mathcal{L}_X (F \otimes G) = (\mathcal{L}_X F) \otimes G + F \otimes (\mathcal{L}_X G)$ .
4.  $\mathcal{L}_X$  comuta com todos os traços:

$$\mathcal{L}_X (\text{tr} Y) = \text{tr}(\mathcal{L}_X Y)$$

para todos os traços (qualquer índice) do tensor  $Y$ .

**Demonstração:**

Ver [5, Sec. 6-2].

**Lema 1.7** *Em uma variedade Riemanniana  $(M, g)$ , temos*

$$(\mathcal{L}_X g)_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i.$$

onde  $\nabla$  denota a conexão de Levi-Civita da métrica  $g$ , para qualquer campo vetorial  $X$ .

**Demonstração:**

Ver [3, Sec. 1-3].

## 1.4 Curvatura

A generalização para variedades de dimensão superior deste conceito de curvatura não é de todo óbvio, e foi pela primeira vez alcançado por Riemann. Sua idéia era que a curvatura, de forma intuitiva, é a obstrução para a “planura” de uma variedade.

Coordenadas normais cerca de  $p$  são, em certo sentido, “o mais próximo que podemos chegar” a uma métrica Euclidiana numa vizinhança de  $p$ : sabemos do Lema 1.5 que em coordenadas normais sobre  $p$ ,  $g_{ij}(p) = \delta_{ij}(p)$  e  $\partial_k g_{ij}(p) = 0$ . No entanto, em geral, as derivadas de segunda e de ordem superior da métrica em  $p$  pode ser diferente de zero.

Isto motiva a definição do  $\binom{4}{0}$  **tensor curvatura de Riemann**, que detém todas as informações sobre as derivadas de segunda ordem de  $g$ . É definida como sendo o  $\binom{4}{0}$ -tensor com coordenadas  $R_{ipqj}$  tal que, em coordenadas normais sobre  $p$ ,

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \frac{1}{3} R_{ipqj} x^p x^q + (\text{termos de terceira e de ordem superior em } x). \quad (1.6)$$

O fator de  $1/3$  é introduzido para que essa definição está de acordo com a alternativa que apresentamos a seguir.

Desde o trabalho original de Riemann, verificou-se que o tensor da curvatura de Riemann pode ser definida de outra forma, usando a conexão de Levi-Civita  $\nabla$ . O  $\binom{3}{1}$  tensor curvatura do Riemann é  $\binom{3}{1}$ -tensor que pode ser definida para campos vetoriais  $X, Y, Z$  e uma 1-forma  $\omega$  por

$$Rm(X, Y, Z, \omega) := \omega(R(X, Y)Z) \quad (1.7)$$

onde

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla^2 Z(X, Y) - \nabla^2 Z(Y, X) \\ &= \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]} Z. \end{aligned}$$

Note aqui que

$$(\nabla^2 Z)(X, Y) \neq \nabla_X(\nabla_Y Z).$$

De facto,

$$(\nabla^2 Z)(X, Y) = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_{\nabla_X Y} Z.$$

Existe uma distinção, porque, por  $\nabla^2 Z$ , nós realmente queremos dizer a derivada covariante do  $\binom{1}{1}$ -tensor  $\nabla Z$ . Assim  $\nabla^2 Z$  é um  $\binom{2}{1}$ -tensor.

Definitivamente, não é óbvia (mas pode facilmente ser verificado) que este é de fato um  $\binom{3}{1}$ -tensor (em particular que, por exemplo,)  $Rm(X, Y, fZ, \omega) = fRm(X, Y, Z, \omega)$  para qualquer  $f \in C^\infty(M)$ ). Nós representamos em termos de coordenadas locais como  $R_{ijk}^l$ . O  $\binom{3}{1}$  tensor curvatura  $R_{ijk}^l$  definido pela equação (1.7) é obtido a partir do  $\binom{4}{0}$  tensor de curvatura  $R_{ijkl}$  definido pela equação (1.6) através do aumento do índice final.

As coordenadas do  $Rm$  pode ser explicitamente calculado mediante a aplicação da equação (1.3) com a conexão de Levi-Civita  $\nabla$  :

**Lema 1.8** *O tensor curvatura de Riemann tem a forma explícita*

$$R_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^p \Gamma_{ip}^l - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{jp}^l.$$

$Rm$  tem muitas simetrias, que pode ser comprovada por meio da manipulação da equação que define (1.7):

**Lema 1.9** *(Simetrias do tensor de curvatura)*

*O tensor de curvatura de Riemann tem as seguintes propriedades:*

1.  $R_{ijkl} = R_{klij} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}$
2. *A primeira identidade Bianchi:*

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$$

3. *A segunda identidade Bianchi:*

$$\nabla_p R_{ijkl} + \nabla_i R_{jpkl} + \nabla_j R_{pikl} = 0 \tag{1.8}$$

**Demostração:** Ver [7, Prop. 7.4].

A primeira dessas simetrias nos permite ver  $Rm$  como uma seção do fibrado

$$\wedge^2 T^* M \otimes_s \wedge^2 T^* M$$

de formas bilineares simétricas no espaço de 2-vetores. Se  $\phi = \phi^{ij} \partial_i \wedge \partial_j$  são 2-vetores então definir a ação do operador curvatura em  $p$ ,  $\mathcal{R}_p : \wedge^2 T_p M \otimes \wedge^2 T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{R}(\phi, \psi) = R_{ijkl} \phi^{ij} \psi^{lk}$$

(todos avaliados em  $p$ ). Note-se que o operador de curvatura é definida em 2-vetores pelo antisimetria nos dois primeiros e nos dois últimos índices de  $Rm$ , e é simétrico por causa da simetria  $R_{ijkl} = R_{klij}$ .

Podemos, agora, explicar a relação com curvatura de Gauss. Se existe um elemento 2-plano  $\phi \in \wedge^2 T_p M$  representando um subespaço 2-dimensional  $\Pi$  de  $T_p M$ , podemos imaginar a subvariedade 2-dimensional de  $M$  que é a imagem sob aplicação exponencial  $exp_p$  de  $\Pi$  (perto de  $p$ ). A curvatura Gaussian deste subvariedade 2-dimensional em  $p$  é chamada a curvatura seccional de  $M$  associado com  $\Pi$ , e denotado  $K(\Pi)$ .

**Lema 1.10** Se  $\Pi$  é um 2-plano em  $T_pM$  gerado pelos vetores  $X, Y \in T_pM$ , e  $\phi = X \wedge Y$ , então

$$K(\Pi) = \frac{\mathcal{R}(\phi, \phi)}{|\phi|^2},$$

onde  $|\phi|^2 = g_{ik}g_{jl}\phi^{ij}\phi^{kl}$ .

**Demonstração:** Ver [7, Prop. 8.8].

Porque um 4 tensor é um pouco incômodo para trabalhar, vamos definir algumas quantidades mais simples, tomando o traço de  $R_{ijk}^l$  :

**Definição 1.16** O tensor de curvatura de Ricci,  $Rc$ , é o  $\binom{2}{0}$ -tensor com expressão de coordenadas

$$R_{ij} := R_{pij}^p.$$

É simétrico:  $R_{ij} = R_{ji}$ .

A curvatura escalar é o traço do tensor de Ricci,

$$R := g^{ij}R_{ij}.$$

Em uma 2-variedade, é igual a duas vezes a curvatura de Gauss.

O curvatura de Ricci e escalar pode ser interpretada em termos de curvaturas seccional:

**Lema 1.11** Seja  $X \in T_pM$  um vetor unitário. Suponha que  $X$  está contido em alguma base ortonormal para  $T_pM$ .  $Rc(X, X)$  é então a soma das curvaturas seccional de planos gerado por  $X$  e outros elementos de base.

Dada uma base ortonormal para  $T_pM$ , a curvatura escalar em que  $p$  é a soma de todas as curvaturas seccional de planos gerado por pares de elementos de base.

**Demonstração:** Ver [7, final do Cap.8].

A curvaturas de Ricci e escalares também pode ser expressa em termos do operador curvatura.

**Lema 1.12** Em uma variedade Riemanniana 3-dimensional  $(M^3, g)$ , vamos diagonalizar operador curvatura  $\mathcal{R}$  com relação a uma base  $\{e_1 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2\}$  de  $\wedge^2 TM^3$ , onde  $\{e_1, e_2, e_3\}$  é uma base ortonormal de  $TM^3$  (isto é possível porque  $\mathcal{R}$  é simétrica). Suponha-se que, com respeito a esta base,  $\mathcal{R}$  é uma matriz diagonal com entradas  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  por baixo da diagonal. Então com respeito à base  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , o tensor de Ricci toma a forma

$$Rc = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_2 + \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 + \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

e a curvatura escalar é

$$R = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (1.10)$$

**Demostração:** Observe que, para  $i \neq j$ ,  $|e_i \wedge e_j|^2 = |e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i|^2 = 1^2 + 1^2 = 2$  (se nós escolhemos uma norma diferente sobre  $\wedge^2 TM^3$  o resultado do Lema 1.10 mudaria). Assim, com o resultado de Lema 1.11, utilizando Lema 1,10 para calcular as curvaturas seccionais, temos

$$\begin{aligned} Rc(e_1, e_1) &= \frac{1}{2}(\mathcal{R}(e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_2) + \mathcal{R}(e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_3)) \\ &= \frac{1}{2}(\lambda_3 + \lambda_2). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Similarly,  $Rc(e_2, e_2) = (\lambda_1 + \lambda_3)/2$  e  $Rc(e_3, e_3) = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ . Isso explica as entradas da diagonal da matriz de  $Rc$ .

Precisamos agora de mostrar que os elementos da matriz fora da diagonal de  $Rc$  são zero, por exemplo, que  $Rc(e_1, e_2) = 0$ . Nós temos

$$Rc(e_1, e_2) = \frac{Rc(e_1 + e_2, e_1 + e_2) - Rc(e_1, e_1) - Rc(e_2, e_2)}{2},$$

portanto, é suficiente mostrar que

$$Rc(e_1 + e_2, e_1 + e_2) = Rc(e_1, e_1) + Rc(e_2, e_2). \quad (1.12)$$

Para fazer isso, notamos que

$$\left\{ \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_1 - e_2}{\sqrt{2}}, e_3 \right\}$$

também é uma base ortonormal para  $T_p M^3$ . Podemos voltar a aplicar a fórmula (1.11) para esta nova base para o cálculo  $Rc(e_1 + e_2, e_1 + e_2)$ . O resultado é como na equação (1.12), portanto,  $Rc$  tem a forma indicada. A fórmula para  $R$  segue tomando o traço de  $Rc$ .

**Definição 1.17** *O tensor de Einstein em uma  $n$ -variedade Riemanniana  $(M^n, g)$  é o tensor*

$$E_{ij} := R_{ij} - \frac{1}{n} Rg_{ij}.$$

A métrica  $g$  é chamado **Einstein** se o seu tensor de Einstein é identicamente 0.

Na dimensão 3, o tensor de Einstein tem um significado especial. Registramos aqui um resultado que mostra que, para variedades em 3 dimensões, o tensor da curvatura de Riemann pode ser expressa simplesmente em termos do tensor de Einstein ea curvatura escalar

**Lema 1.13** *Em uma 3-variedade,*

$$Rm = \frac{R}{4}(g \odot g) + E \odot g,$$

onde denota  $\odot$  produto Kulkarni-Nomizu de tensores simétricos:

$$(P \odot Q)_{ijkl} = P_{il}Q_{jl} - P_{ik}Q_{jl} - P_{jl}Q_{ik}.$$

**Demostração:** Este resultado resulta da decomposição de  $Rm$ , que possui em qualquer  $n$ -variedade:

$$Rm = \frac{R}{2(n-1)(n-2)}(g \odot g) + \frac{1}{n-2}(E \odot g) + W, \quad (1.13)$$

em que  $W$  é o chamado tensor “Weyl”, que é definido pela equação (1.13). O tensor de Weyl desaparece em dimensão 3 (ver [9,sec.8] para uma prova simples, utilizando as simetrias de  $W$ ), a partir do qual o resultado segue.

Na dimensão 3, as métricas de Einstein são muito especial.

**Lema 1.14** *Uma métrica de Einstein em uma variedade de dimensão  $n \geq 3$  tem curvatura escalar constante. Se  $n = 3$ , a métrica tem curvatura seccional constante.*

**Demonstração:** Considere a segunda identidade Bianchi (1.8). Se elevarmos os índices  $k, l$  obtemos

$$\nabla_p R_{ij}^{kl} + \nabla_i R_{jp}^{kl} + \nabla_j R_{pi}^{kl} = 0.$$

Tomando o traço sobre os índices  $i, l$  e usando as simetrias do tensor curvatura obtemos

$$\nabla_p R_j^k - \nabla_i R_{jp}^{ik} - \nabla_j R_p^k = 0.$$

Tomando o traço sobre o índice  $j, k$  agora nos dá

$$\nabla_p R = \nabla_i R_p^i + \nabla_i R_p^i,$$

ou equivalentemente

$$g^{ij} \nabla_i R_{jp} = \frac{1}{2} \nabla_p R.$$

Assim, temos

$$g^{ij} \nabla_i E_{jp} = g^{ij} \nabla_i \left( R_{jp} - \frac{1}{n} R g_{jp} \right) = \frac{1}{2} \nabla_p R - \frac{1}{n} \nabla_p R = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) \nabla_p R \quad (1.14)$$

(usando  $\nabla g = 0$ ). Se a métrica é Einstein então  $E_{jp} = 0$ , de modo

$$\left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) \nabla_p R = 0.$$

Porque  $n \neq 2$  isto significa  $\nabla R = 0$ , portanto,  $R$  é constante.

Se  $n = 3$ , podemos aplicar a fórmula (1.9) do Lema 1.12 e deduzir que

$$Rc = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_2 + \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 + \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} = \frac{R}{3} g = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

onde  $C = \frac{1}{3}R$  é uma constante ao longo de toda a variedade. Portanto, os valores próprios de curvatura  $\lambda_i$  são todos iguais ao valor da constante  $C$ , do qual resulta que o colector tem curvatura seccional constante.

Se uma métrica tem curvatura seccional constante, chamamos isso de uma **métrica de curvatura constante**. Existem três possibilidades essencialmente distintos: o valor das curvaturas seccional pode ser positiva, nula ou negativa. Nós temos os seguintes exemplos:

**Definição 1.18** *métrica de curvatura constante.*

*N-espaço euclidiano*,  $\mathbb{E}^n := \mathbb{R}^n$  com a métrica padrão, tem curvatura seccional constante 0.  
*A esfera de raio R n-dimensional*,

$$\mathbb{S}_R^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = R\}$$

com a métrica induzida como uma subvariedade de  $\mathbb{E}^{n+1}$ , tem curvatura seccional constante  $1/R^2$ .  
*n-espaço hiperbólico de raio R*,  $\mathbb{H}_R^n$ , é a bola aberta de raio R em  $\mathbb{R}^n$  com a métrica

$$g_{ij}(x) = \frac{4R^4 \delta_{ij}}{(R^2 - |x|^2)^2}.$$

Tem curvatura seccional constante  $-1/R^2$  (existem outras formas equivalentes de representar esta variedade Riemanniana).

Veja [7, final do cap. 8] para mais detalhes, incluindo uma prova de que esses espaços têm curvatura constante

Usando a teoria dos campos de Jacobi (ver [7, cap. 10]), pode-se provar muitos teoremas de comparação, bem como os resultados sobre métricas de curvatura constante. Por exemplo pode-se provar que a estrutura local de uma métrica com curvatura seccional constante  $C$  é único (ver [7, Prop 10,9])- veremos um resultado mais geral no Teorema 1.16. Pode-se também provar o seguinte:

**Teorema 1.1** *O teorema de comparação do volume de Bishop-Günther.* Vamos denotar por  $V_n^k(r)$  o volume da esfera de raio  $r$  no espaço  $n$ -dimensional completo simplesmente conexa de curvatura seccional constante  $k$  (isso vai ser  $\mathbb{S}_R^n, \mathbb{E}^n$  ou  $\mathbb{H}_R^n$ ). Suponha que  $(M^n, g)$  é uma  $n$ -variedade Riemanniana e  $p \in M^n$ . Então

1. Se existe uma constante  $a > 0$  de tal forma que  $Rc \geq (n-1)ag$  então

$$\text{Vol}(B(p, r)) \leq V_n^a(r).$$

2. Se existe uma constante  $b$  de tal forma que todas as curvaturas seccionais da  $(M^n; g)$  são limitadas acima por  $b$ , e aplicação exponencial é injetiva na bola  $B(p, r)$ , então

$$\text{Vol}(B(p, r)) \geq V_n^b(r).$$

**Demonstração:** Veja [8, Teorema 3.101].

## 1.5 Topologia da Geometria

A ideia central da conjectura de geometrização é que a topologia de uma variedade e o tipo de geometria pode ter a variedade estão intimamente relacionadas. Aqui vamos escrever alguns dos teoremas que relacionam a estrutura geométrica de uma variedade para a topologia

**Teorema 1.2** *Seja  $(M^n, g)$  uma  $n$ -variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa com curvatura seccional constante  $C$ . Então  $M^n$  é isométrica a um dos  $\mathbb{E}^n$  (se  $C = 0$ ),  $\mathbb{S}_R^n$  (se  $C = 1/R^2$ ) ou  $\mathbb{H}_R^n$  (se  $C = -1/R^2$ ).*

**Demonstração:** Veja [7, Teorema 11.12].

Em particular, qualquer variedade simplesmente conexa com curvatura seccional constante não-positivo é difeomorfa para  $\mathbb{R}^n$  e qualquer variedade simplesmente conexa com curvatura seccional constante positiva é difeomorfa para  $\mathbb{S}^n$ .

Isso também nos permite caracterizar variedades não simplesmente conexa de curvatura constante aplicando o Teorema 1.16 para o espaço de cobertura universal, vemos que qualquer uma destas variedades deve ser um quociente de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{S}^n$ , ou  $\mathbb{H}^n$ . por um grupo discreto de isometrias atuando livremente.

Também pode derivar informação topológicas a partir de limites sobre as curvaturas, como os seguintes teoremas mostram:

**Teorema 1.3 Teorema de Myers** *Suponha que  $(M^n, g)$  é uma  $n$ -variedade Riemanniana completa e conexa cujo tensor Ricci satisfaz*

$$Rc \geq (n - 1)Hg$$

*para alguma constante  $H$ . Então  $M^n$  é compacta com grupo fundamental finito e diâmetro no máximo  $\pi H^{-\frac{1}{2}}$*

**Demonstração:** Veja [7, Teorema 11.8].

**Teorema 1.4** *Dizemos que uma variedade Riemanniana  $(M, g)$  é **estritamente**  $\delta$ -pinched (para algum  $\delta > 0$ ) se existe uma constante  $K > 0$  de tal modo que todas as curvaturas seccionais de  $M$  está no intervalo de  $(\delta K, K]$ .*

*Se  $M^n$  é uma variedade completa, simplesmente conexa e estritamente  $1/4$ -pinched então  $M^n$  é homeomorfa a  $\mathbb{S}^n$ .*

**Demonstração:** Ver [15]

## 1.6 Métricas Evoluindo no Tempo

Quando as nossas métricas são dependentes do tempo, como é o fluxo de Ricci, queremos saber como diversas quantidades geométricas evoluir quando evolui as métricas.

**Lema 1.15** *Suponhamos que  $g_{ij}(t)$  é uma métrica Riemanniana dependente do tempo, e*

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij}(t) = h_{ij}(t).$$

*Em seguida, as diversas quantidades geométricas evoluem de acordo com as seguintes equações:*

1. *Métrica inversa:*

$$\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} = -h^{ij} - g^{ik} g^{jl} h_{kl}. \quad (1.16)$$

2. *Símbolos de Christoffel:*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}(\nabla_i h_{jl} + \nabla_j h_{il} - \nabla_l h_{ij}). \quad (1.17)$$

3. *Tensor de curvatura de Riemann:*

$$\frac{\partial}{\partial t}R_{ijk}^l = \frac{1}{2}g^{lp} \left\{ \nabla_i \nabla_j h_{kp} + \nabla_i \nabla_k h_{jp} - \nabla_i \nabla_p h_{jk} - \nabla_j \nabla_i h_{kp} - \nabla_j \nabla_k h_{ip} + \nabla_j \nabla_p h_{ik} \right\}. \quad (1.18)$$

4. *Tensor de Ricci:*

$$\frac{\partial}{\partial t}R_{ij} = \frac{1}{2}g^{pq}(\nabla_q \nabla_i h_{jp} + \nabla_q \nabla_j h_{ip} - \nabla_q \nabla_p h_{ij} - \nabla_i \nabla_j h_{qp}). \quad (1.19)$$

5. *Curvatura escalar:*

$$\frac{\partial}{\partial t}R = \Delta H + \nabla^p \nabla^q h_{pq} - h^{pq} R_{pq} \quad (1.20)$$

onde  $H = g^{pq} h_{pq}$ .

5. *Elemento de volume:*

$$\frac{\partial}{\partial t}d\mu = \frac{H}{2}d\mu. \quad (1.21)$$

7. *Volume de uma variedade*

$$\frac{d}{dt} \int_M d\mu = \int_M \frac{H}{2} d\mu. \quad (1.22)$$

8. *Curvatura escalar total em uma variedade  $M$  fechada:*

$$\frac{d}{dt} \int_M R d\mu = \int_M \left( \frac{1}{2}RH - h^{ij} R_{ij} \right) d\mu. \quad (1.23)$$

**Demonstração:**

**A prova de (1.16):** Temos  $g^{ij}g_{jk} = \delta_k^i = \text{constante}$ . Diferenciando,

$$\begin{aligned} \partial_t(g^{ij}g_{jk}) &= 0 \\ (\partial_t g^{ij})g_{jk} + g^{ij}(\partial_t g_{jk}) &= 0 \\ \partial_t g^{ij} &= -h^{ij}. \end{aligned}$$

**A prova de (1.17):** Nós usamos a fórmula (1.5), que produz

$$\partial_t \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}(\partial_t g^{kl})(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) + \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_i \partial_t g_{jl} + \partial_j \partial_t g_{il} - \partial_l \partial_t g_{ij}).$$

Agora vamos trabalhar em coordenadas normais cerca de um ponto  $p$ . Pelo Lema 1.5 temos  $\partial_i g_{jk} = 0$  em  $p$ , e  $\partial_t A = \nabla_i A$  em  $p$  para algum tensor  $A$ . Daí

$$\partial_t \Gamma_{ij}^k(p) = \frac{1}{2}g^{kl}(\nabla_i h_{jl} + \nabla_j h_{il} - \nabla_l h_{ij})(p).$$

Agora, embora os símbolos de Christoffel não são as coordenadas de uma quantidade tensor, sua derivada é. Assim dois lados desta equação são as coordenadas de quantidades tensoriais, por isso não importa o que as coordenadas que avaliá-los dentro. Em particular, a equação é verdadeira para quaisquer coordenadas, e não apenas as coordenadas normais, e sobre qualquer ponto  $p$ .

**A prova de (1.18):** Nós usamos o resultado do Lema 1.8. Cada termo pode ser expressa usando o resultado da fórmula (1.17):

$$\begin{aligned} R_{ijk}^l &= \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^p \Gamma_{ip}^l - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{jp}^l \\ \partial_t R_{ijk}^l &= \partial_i (\partial_t \Gamma_{jk}^l) - \partial_j (\partial_t \Gamma_{ik}^l) + (\partial_t \Gamma_{jk}^p) \Gamma_{ip}^l + \Gamma_{jk}^p (\partial_t \Gamma_{ip}^l) - (\partial_t \Gamma_{ik}^p) \Gamma_{jp}^l - \Gamma_{ik}^p (\partial_t \Gamma_{jp}^l). \end{aligned}$$

Mais uma vez, trabalhar em coordenadas normais, de modo que  $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ . Isso nos dá

$$\partial_t R_{ijk}^l(p) = \nabla_i (\partial_t \Gamma_{jk}^l)(p) - \nabla_j (\partial_t \Gamma_{ik}^l)(p).$$

Mais uma vez, os dois lados são tensores de modo a equação é válida em quaisquer coordenadas. O resultado da fórmula (1.17) no lado direito produz o resultado.

**A prova de (1.19):** Este segue a partir da fórmula (1.18), tomando o traço sobre os índices  $i, l$ .

**A prova de (1.20):** Este segue a partir da fórmula (1.19) e (1.16):

$$\begin{aligned} \partial_t R &= \partial_t (g^{ij} R_{ij}) \\ &= (\partial_t g^{ij}) R_{ij} + g^{ij} (\partial_t R_{ij}) \\ &= -h^{ij} R_{ij} + g^{ij} \left( \frac{1}{2} g^{pq} (\nabla_q \nabla_i h_{jp} + \nabla_q \nabla_j h_{ip} - \nabla_q \nabla_p h_{ij} - \nabla_i \nabla_j h_{qp}) \right) \\ &= -\Delta H + \nabla^p \nabla^q h_{pq} - h^{pq} R_{pq} \end{aligned}$$

(lembre-se que  $\nabla g = 0$  e  $\Delta = g^{ij} \nabla_i \nabla_j$ ).

**A prova de (1.21):** Nós vamos usar a fórmula

$$d\mu = \sqrt{\det g_{ij}} x^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$$

(ver [14, 7.5] na forma de volume).

Primeiro nós precisamos para calcular a variação do determinante de uma matriz  $\det A$ , quando a matriz  $A$  em si varia. Porque  $A$  vai acabar sendo uma métrica, podemos assumir que é simétrica e, portanto, podemos escolher uma base em que  $A$  é diagonalizada com valores próprios  $\lambda_i \neq 0$ . Então  $A_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ , e  $\det A = \prod_i \lambda_i$ . Se então variar a entrada  $A_{ij}$ , o determinante não mudará a menos que  $i = j$ . Se  $i = j$ , temos

$$\frac{\partial \det A}{\partial A_{ij}} = \frac{\partial (\prod_j \lambda_j)}{\partial \lambda_i} = \frac{1}{\lambda_i} \prod_j \lambda_j = \frac{1}{\lambda_i} \det A.$$

Portanto pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \det A &= \sum_{i,j=0}^n \left( \frac{\partial \det A}{\partial A_{ij}} \right) \frac{dA_{ij}}{dt} \\
&= \sum_{i,j=0}^n \delta_{ij} \frac{1}{\lambda_i} \det A \frac{dA_{ij}}{dt} \\
&= (A^{-1})^{ij} \left( \frac{dA_{ij}}{dt} \right) \det A
\end{aligned}$$

onde observamos que  $(A^{-1})^{ij} = \delta^{ij}/\lambda_i$  e agora estamos usando a convenção de soma de Einstein. Segue-se agora pela regra da cadeia que

$$\begin{aligned}
\partial_t d\mu &= \partial_t \sqrt{\det g_{ij}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\det g_{ij}}} g^{ij} h_{ij} \det g_{ij} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\
&= \frac{H}{2} d\mu
\end{aligned}$$

onde  $H = g^{ij} h_{ij}$ .

**A prova de (1.22):** Este segue a partir da fórmula (1.21) tomando a derivada sob integral.

**A prova de (1.23):** Este segue a partir da fórmula (1.21) e (1.20):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \int_M R D\mu &= \int_M (\partial_t R) d\mu + R (\partial_t d\mu) \\
&= \int_M (-\Delta H + \nabla^p \nabla^q h_{pq} - h^{pq} R_{pq} + \frac{1}{2} R H) d\mu \\
&= \int_M \left( \frac{1}{2} R H - h^{pq} R_{pq} \right) d\mu.
\end{aligned}$$

Aqui nós usamos o Teorema de Stokes (ver [14, cap. 7,5]) para livrar-se dos dois primeiros termos do integrante.

## Capítulo 2

# Teoria De Existência Para O Fluxo De Ricci

### 2.1 Teoria De Existência Para EDPs Parabólicas

No próximo capítulo, vamos tentar justificar a existência do fluxo de Ricci, definida em algum intervalo de tempo, começando com uma determinada métrica inicial suave, em uma variedade fechada  $M$ . Fazemos isso através da redução do problema para a solução de uma equação parabólica.

Neste capítulo, vamos descrever como reconhecer uma equação parabólica, e enunciar o teorema de existência e unicidade para equações parabólicas.

#### 2.1.1 EDP Linear Escalar

Considere a equação diferencial parcial de ordem 2 em  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  para uma função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  da forma

$$\frac{\partial}{\partial t} u = a_{ij} \partial_i \partial_j u + b_i \partial_i u + cu$$

onde  $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$  e  $a_{ij}, b_i, c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  são coeficientes suaves. Esta equação é chamada parabólica se  $a_{ij}$  é uniformemente positiva definida, isto é, se existe  $\lambda > 0$  tal que

$$a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Por exemplo, a equação do calor  $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$  é uma E.D.P parabólica.

Esta noção se estende para variedades. Seja  $M$  uma variedade compacta  $n$ -dimensional.

#### Definição 2.1

Um operador diferencial linear de ordem 2 de  $C^\infty(M)$  em  $C^\infty(M)$  é uma aplicação linear  $L : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  que pode ser escrito em um sistema de coordenadas locais como

$$L(u) = a_{ij} \partial_i \partial_j u + b_i \partial_i u + cu,$$

onde  $a_{ij}, b_i$  e  $c$  são funções reais localmente definidas e suaves.

**Definição 2.2**

Um operador diferencial linear  $L$  de ordem 2 é dito fortemente elíptico se existe  $\lambda > 0$  tal que

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Sejam  $L$  um operador diferencial linear de ordem 2 uniformemente elíptico e  $u : M \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. Considere o problema

$$(*) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u = Lu, & M \times (0, T] \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot), & M, \end{cases}$$

onde  $u_0 : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave. Existe uma teoria bem sucedida sobre existência e unicidade de solução de  $(*)$  em  $C(M \times [0, T]) \cap C^\infty(M \times (0, T))$ . Tal teoria é denominada de semigrupo. Um método alternativo para existência é o método de expansão de auto-funções.

**2.1.2 O Símbolo Principal**

Sejam  $M$  uma variedade compacta  $n$ -dimensional e  $L$  um operador diferencial linear de ordem 2. Sejam  $\{\partial_i\}$  uma base de  $T_p M$  em uma carta  $(U, \Psi)$  e  $\{dx^j\}$  a base dual de  $T_p^* M$ .

**Definição 2.3** O símbolo principal de  $L$  é a função  $\sigma(L) : T^* M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\sigma(L)(x, \xi) = a_{ij}(x)\xi_i\xi_j.$$

Pode-se concluir facilmente que esta definição não depende da escolha da carta  $(U, \Psi)$  de  $M$ . Uma definição alternativa de símbolo principal é a seguinte:

**Definição 2.4** Dado  $(x, \xi) \in T^* M$  e  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  funções suaves com  $d\phi(x) = \xi$ , definimos

$$\sigma(L)(x, \xi)f(x) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{-2} e^{-s\phi(x)} L(e^{s\phi} f)(x)$$

Para verificar que estas duas definições estão relacionadas, vamos expressar a segunda definição em um acarta  $(U, \Psi)$  de  $M$  :

$$\partial_i(e^{s\phi} f)(x) = s\partial_i\phi(x)(e^{s\phi} f)(x) + e^{s\phi}\partial_i f(x),$$

$$e^{-s\phi}\partial_{ij}(e^{s\phi} f)(x) = s^2\partial_i\phi(x)\partial_j\phi(x)f(x) + s(\dots) + s^0(\dots),$$

logo

$$e^{-s\phi} L(e^{s\phi} f)(x) = s^2 a_{ij}\partial_i\phi(x)\partial_j\phi(x)f(x) + s(\dots) + s^0(\dots),$$

então

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^{-2} e^{-s\phi(x)} L(e^{s\phi} f)(x) = a_{ij}\partial_i\phi(x)\partial_j\phi(x)f(x) = a_{ij}\xi_i\xi_j f(x).$$

Notar que em particular a segunda definição é independente de a escolha de  $\phi$  e  $f$  (com  $d\phi(x) = \xi$ ).

Assim uma definição alternativa de operador uniformemente elíptico é que  $\sigma(L)(x, \xi) > 0, \forall (x, \xi) \in T^* M, \xi \neq 0$ .

**Exemplo 2.1** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana compacta. Então o operador de Laplace-Beltrami*

$$\Delta_g = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j) = g^{ij} \partial_i \partial_j + \text{termos de ordem inferior}$$

onde  $|g| = \det g_{ij}$  e  $a_{ij} = g^{ij}$  é um operador diferencial linear de ordem 2 uniformemente elíptico, pois por definição,

$$\sigma(\Delta)(x, \xi) = g^{ij} \xi_i \xi_j = |\xi|^2 > 0.$$

Em particular,  $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_g u$  é parabólico neste contexto.

### 2.1.3 Generalização a Fibrados Vectoriais

A teoria de equações parabólicas se estende sob varias generalizações do conceito de parabólica. Por exemplo, pode-se generalizar para:

- i) Equações de maior ordem
- ii) O caso de menos regularidade para os coeficientes  $a_{ij}$  etc. e menos regularidade de  $u_0$ ;

e mais importante para nos:

- iii) Dependência do tempo para  $a_{ij}$ ;
- iv) Seções de fibrados vectoriais  $u$ ;
- v) Equação não linear.

Vamos agora dar uma olhada no caso (iv)

Seja  $\mathcal{E}$  um fibrado vetorial suave em uma variedade fechada  $M$ . Considerando que, anteriormente, olhamos para funções  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ , consideramos agora seções  $v \in \Gamma(\mathcal{E})$ . Localmente podemos escrever  $v = v^\alpha e_\alpha$  para um referencial local  $\{e_\alpha\}$ . Considere a equação

$$\frac{\partial v}{\partial t} = L(v) \tag{2.1}$$

Onde  $L$  é um operador diferencial linear de ordem 2, o que queremos dizer que  $L : \Gamma(\mathcal{E}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E})$  pode ser escrito em termos de coordenadas locais  $\{x^i\}$  em  $M$  e um referencial local  $\{e_\alpha\}$  em  $\mathcal{E}$ , como:

$$L(v) = [a_{\alpha\beta}^{ij} \partial_i \partial_j v^\beta + b_{\alpha\beta}^i \partial_i v^\beta + c_{\alpha\beta} v^\beta] e_\alpha.$$

Podemos definir novamente o principal símbolo - agora  $\sigma(L) : \Pi^*(\mathcal{E}) \rightarrow \Pi^*(\mathcal{E})$  é um homomorfismo de fibrados vectoriais, onde  $\Pi : T^*M \rightarrow M$  denota a projecção de fibrados. Note-se que  $\Pi^*(\mathcal{E})$  é um fibrado vetorial sobre  $T^*M$  cujas fibras no  $(x, \xi) \in T^*M$  é  $\mathcal{E}_x$ . Nós definimos:

$$\sigma(L)(x, \xi)v = (a_{\alpha\beta}^{ij} \xi_i \xi_j v^\beta) e_\alpha$$

Novamente, existe uma definição independente de coordenadas:

**Definição 2.5** Dado  $(x, \xi) \in T^*M$ , para todo  $v \in \Gamma(\mathcal{E})$  e  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  com  $d\phi(x) = \xi$ , definimos

$$\sigma(L)(x, \xi)v = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{-2} e^{-s\phi(x)} L(e^{s\phi}v)(x)$$

**Definição 2.6** O operador  $L$  é dito fortemente elíptico se existe  $\lambda > 0$  tal que

$$\langle \sigma(L)(x, \xi)v, v \rangle \geq \lambda |\xi|^2 |v|^2$$

para todo  $(x, \xi) \in T^*M$  e  $v \in \Gamma(\mathcal{E})$ .

Da mesma forma, dado um operador diferencial linear de ordem 2 fortemente elíptico  $L : \Gamma(\mathcal{E}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E})$ , a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(u)$$

é dita parabólica (ou fortemente parabólica). Para nossos propósitos, necessitaremos da noção de equação parabólica do tipo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(u), \tag{2.2}$$

onde  $P$  é um operador diferencial quasilinear de segundo ordem, o que queremos dizer  $P : \Gamma(\mathcal{E}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E})$  pode ser dada localmente, em termos de coordenadas locais  $\{x^i\}$  em  $M$  e um referencial local  $\{e_\alpha\}$  em  $\mathcal{E}$ , como:

$$P(v) = [a_{\alpha\beta}^{ij}(x, v, \nabla v) \partial_i \partial_j v^\beta + b^\alpha(x, v, \nabla v)] e_\alpha.$$

O fluxo de Ricci:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2Ric(g),$$

se enquadra nesta categoria de problemas.

**Definição 2.7** Dada uma seção  $v \in \Gamma(\mathcal{E})$  (independente de  $t$ ), dizemos que (2.2) é fortemente parabólico em  $v$ , se a linearização de (2.2) em  $v$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = [DP(v)]u,$$

é parabólica, como acabamos de definir.

**Teorema 2.1** Assuma que  $a_{\alpha\beta}^{ij}$  e  $b^\alpha$  são suaves. Se (2.2) é fortemente parabólico em  $v$ , então existem  $\epsilon > 0$  e uma família suave  $u(t) \in \Gamma(\mathcal{E})$  para  $t \in [0, \epsilon]$  tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u = Pu, & t \in (0, \epsilon] \\ u(0) = v \end{cases}$$

Além disso, temos unicidade: Se  $u_1$  e  $u_2$  satisfazem  $\frac{\partial}{\partial t} u = Pu$  em  $(0, \epsilon]$ . Se qualquer  $u_1(0) = u_2(0)$  ou  $u_1(\epsilon) = u_2(\epsilon)$ , então  $u_1(t) = u_2(t)$ ,  $\forall t \in [0, \epsilon]$ .

## 2.2 Fluxo de Ricci não é parabólico

Antes de podermos fazer qualquer coisa com o fluxo de Ricci, devemos mostrar que existe uma solução para um intervalo de tempo. Nós gostaríamos de aplicar o teorema de existência e unicidade para equações diferenciais parciais parabólicas no capítulo anterior ( Teorema 2.1 ) para o sistema

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2Rc(g(t))$$

$$g(0) = g_0.$$

Precisamos verificar se o sistema é fortemente parabólico. Este capítulo é baseado em [2, cap. 3] e [1, cap. 5].

### 2.2.1 A linearização do Tensor de Ricci

A primeira coisa a fazer é trabalhar a linearização do tensor de Ricci, no sentido descrito na secção anterior. Lembre-se que, se temos um tensor métrico dependente do tempo  $g_{ij}(t)$  (não estamos supondo que essa métrica dependente do tempo satisfaz o fluxo de Ricci ou qualquer outra equação específica), nós definimos a linearização do tensor de Ricci  $D[Rc] : \Gamma(S_2T^*M) \rightarrow \Gamma(S_2T^*M)$  de modo que

$$D[Rc]\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}Rc(g_{ij}(t))$$

**Lema 2.1** *A linearização do tensor de Ricci é dada por*

$$D[Rc](h)_{ij} = \frac{1}{2}g^{pq}(-\nabla_p\nabla_q h_{ij} - \nabla_i\nabla_j h_{pq} + \nabla_q\nabla_i h_{jp} + \nabla_q\nabla_j h_{ip})$$

**Demonstração:** Isto resulta da equação (1.19). Temos trocado os índices  $p$  e  $q$  em alguns lugares, o que podemos fazer, porque o inverso da métrica  $g^{pq}$  é simétrica.

Para verificar se o sistema é fortemente parabólico, devemos calcular o símbolo principal. O símbolo pode ser calculado facilmente a partir da linearização:

**Corolário 2.1** *O símbolo principal de operador diferencial  $-2Rc$  (como uma função da métrica  $g$ ) é:*

$$\sigma[-2Rc](x, \xi)h_{ij} = g^{pq}(\xi_p\xi_q h_{ij} + \xi_i\xi_j h_{pq} - \xi_q\xi_i h_{jp} - \xi_q\xi_j h_{ip})$$

Agora vamos a lembrar que o fluxo de Ricci é fortemente parabólico se existe  $\lambda > 0$  de tal modo que para todo  $(x, \xi) \in T^*M$  e todo (simétrico)  $h_{ij} \neq 0$

$$\langle \sigma[-2Rc](x, \xi)h, h \rangle \geq \lambda|\xi|^2|h|^2$$

ou pelo corolário (2.1) :

$$g^{pq}(\xi_p\xi_q h_{ij} + \xi_i\xi_j h_{pq} - \xi_q\xi_i h_{jp} - \xi_q\xi_j h_{ip})h^{ij} \geq \lambda\xi_k\xi^k h_{rs}h^{rs}$$

No entanto, se escolhermos  $h_{ij} = \xi_i\xi_j$ , é claro que o lado esquerdo desta equação é 0, assim a desigualdade não pode segurar. Portanto, o fluxo de Ricci não é fortemente parabólico.

## 2.3 O Truque Deturck

Porque o fluxo de Ricci não é fortemente parabólico, não podemos aplicar imediatamente o teorema (2.1). Hamilton, em seu artigo original, usou o teorema da função inversa de Nash-Moser para estabelecer a existência e unicidade local. Posteriormente, uma demonstração muito mais simples foi dada por Dennis Deturck. Nesta seção, vamos mostrar como se faz o "Truque Deturck."

Primeiro, reescrever a linearização do tensor de Ricci para ver que termos estão fazendo isso não parabólico.

**Lema 2.2** *A linearização de  $-2Rc$  é igual :*

$$D[-2Rc](h_{ij}) = g^{pq}\nabla_p\nabla_q h_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i + \text{termos de ordem inferior em } h \quad (2.3)$$

onde:

$$V_i = g^{pq}\left(\frac{1}{2}\nabla_i h_{pq} - \nabla_q h_{pi}\right).$$

**Demonstração:** Do lema (2.1), temos

$$D[-2Rc](h)_{ij} = g^{pq}(\nabla_p\nabla_q h_{ij} + \nabla_i\nabla_j h_{pq} - \nabla_q\nabla_i h_{jp} - \nabla_q\nabla_j h_{ip}) \quad (2.4)$$

Aplicando a formula (5.3) para comutar ás derivadas covariantes, obtemos:

$$\begin{aligned} \nabla_q\nabla_i h_{jp} &= \nabla_i\nabla_q h_{jp} - R_{qij}^r h_{rp} - R_{qip}^r h_{jm} \\ &= \nabla_i\nabla_q h_{jp} + \text{termos de ordem inferior em } h. \end{aligned}$$

Os termos de ordem inferior em  $h$  não contribuem para o principal símbolo. Portanto, no que respeita à símbolo principal, derivanda covariante comuta. Portanto, podemos reorganizar a equação (2.4) pelo comutação da derivadas covariantes para dar:

$$\begin{aligned} D[-2Rc](h)_{ij} &= g^{pq}\nabla_p\nabla_q h_{ij} + \nabla_i\left(\frac{1}{2}\nabla_j h_{pq} - \nabla_q h_{jp}\right) + \\ &\quad \nabla_j\left(\frac{1}{2}\nabla_i h_{pq} - \nabla_q h_{ip}\right) + \text{termos de ordem inferior em } h \\ &= g^{pq}\nabla_p\nabla_q h_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i + \text{termos de ordem inferior em } h \end{aligned}$$

(lembrando que  $\nabla g = 0$ .)

Os termos de ordem inferior em  $h$  não contribuem para o principal símbolo. O primeiro termo da equação (2.3) é um bom termo (podemos identificá-lo como um Laplaciano, que tem uma principal símbolo estritamente positivo), mas os termos em  $V$  são ruins: eles fazem o fluxo de Ricci não-parabólica.

Nós procuramos um sistema

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{g}_t = P(\bar{g}_t) \quad (2.5)$$

que é parabólico, e um difeomorfismo  $\varphi_t$  dependente do tempo de nossa variedade  $M$  sob ela, com  $\varphi_0 = id$ , de modo que a métrica

$$g_t = \varphi_t^* \bar{g}_t$$

é uma solução para o fluxo de Ricci. Podemos calcular

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} g_t &= \frac{\partial(\varphi_t^* \bar{g}_t)}{\partial t} \\
 &= \left( \frac{\partial(\varphi_{t+s}^* \bar{g}_{t+s})}{\partial s} \right)_{s=0} \\
 &= \left( \varphi_t^* \frac{\partial \bar{g}_{t+s}}{\partial s} \right)_{s=0} + \left( \frac{\partial(\varphi_{t+s}^* \bar{g}_t)}{\partial s} \right)_{s=0} \\
 &= \varphi_t^* P(\bar{g}_t) + \varphi_t^* \mathcal{L} \frac{\partial \varphi_t \bar{g}_t}{\partial t}
 \end{aligned}$$

Aqui nós usamos a regra do produto e, em seguida, a regra para a derivada de Lie sobre tensores (ver Secção 1.3). Nós escolhemos  $\varphi_t$  para satisfazer a

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t = W(t) \\ \varphi_0 = id \end{cases} \quad (2.6)$$

para algum campo vetorial  $W(t)$  dependente do tempo (este sistema terá uma solução  $\varphi_t$  enquanto  $W(t)$  existe ver [Lema 2.3]). O problema agora se reduz a encontrar um operador diferencial  $P$  de tal modo que o sistema (2.5) é fortemente parabólico, e o campo vetorial  $W(t)$  dependente do tempo tal que, se definimos a família 1– parâmetro de difeomorfismos que satisfaz (2.6), então

$$\varphi_t^* P(\bar{g}_t) + \varphi_t^* \mathcal{L}_{W(t)} \bar{g}_t = -2Rc(\varphi_t^* \bar{g}_t) = -2\varphi_t^* Rc(\bar{g}_t).$$

(usando a invariância de difeomorfismo do tensor de Ricci). Isto é equivalente a

$$P(\bar{g}_t) = -2Rc(\bar{g}_t) - \mathcal{L}_{W(t)} \bar{g}_t.$$

Agora pelo Lema 1.7 temos

$$(\mathcal{L}_{W(t)} \bar{g}_t)_{ij} = \nabla_i W_j + \nabla_j W_i$$

Portanto, podemos usar o Lema 2.2 para escrever a linearização de  $P$  como:

$$D[P](h) = \bar{g}^{pq} \nabla_p \nabla_q h_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i + \text{termos de ordem inferior em } h \quad (2.7)$$

$$-D[\nabla_i W_j + \nabla_j W_i](h). \quad (2.8)$$

Lembre-se que o primeiro termo da equação (2.7) é um bom termo: se os demais termos de segunda ordem são cancelados então a linearização iria satisfazer a condição de parabolicidade. Assim, nosso objetivo é escolher  $W$  de modo que a parte dos termos de segunda ordem (2.8) é cancelada pelos termos de segundo ordem em  $V$ . Isso acontecerá se a parte principal da linearização de  $W_i$  é igual à de  $V_i$ .

Nós definimos  $V$  por:

$$\begin{aligned}
 V_i &= \bar{g}^{pq} \left( \frac{1}{2} \nabla_i h_{pq} - \nabla_p h_{qi} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \bar{g}^{pq} (\nabla_p h_{qi} + \nabla_q h_{pi} - \nabla_i h_{pq}).
 \end{aligned}$$

Recordamos da fórmula (1.17) que

$$D[\Gamma_{ij}^k](h) = \frac{\partial}{\partial t}(\Gamma_{ij}^k(\bar{g}(t))) = \frac{1}{2}\bar{g}^{kl}(\nabla_i h_{jl} + \nabla_j h_{il} - \nabla_l h_{ij})$$

onde  $h_{ij} = \frac{\partial}{\partial t}g_{ij}$ . Isso parece bastante semelhante à forma de  $V$ , então podemos tentar

$$W_i = -\bar{g}^{pq}\bar{g}_{ij}\Gamma_{pq}^j.$$

Precisamos ter cuidado, porém, essa expressão depende das coordenadas que nós escolhemos, porque o símbolo de Cristoffel  $\Gamma$  não é um tensor. No entanto, a diferença entre duas conexões é um tensor, assim, podemos fixar uma conexão constante com o símbolo de Christoffel  $\widehat{\Gamma}_{ij}^k$  e definir

$$W_i = -\bar{g}^{pq}\bar{g}_{ij}(\Gamma_{pq}^j - \widehat{\Gamma}_{pq}^j)$$

que é a forma de coordenadas de um campo vetorial de coordenadas independente. A conexão fixa, porque é independente da métrica, não fará nenhuma contribuição para o símbolo de  $W$ , então o símbolo principal de  $W_i$  será igual à de  $V_i$ , e todos os termos de segunda ordem diferente da primeira equação (2.7) é cancelada.

Assim, fazer essa escolha de  $W$ , o símbolo principal da linearização de  $P$  é:

$$\sigma(D[P])(x, \xi)(h)_{ij} = \bar{g}^{pq}\xi_p\xi_q h_{ij}$$

por isso temos

$$\langle \sigma(D[P])(x, \xi)(h), (h) \rangle = |\xi|^2 |h|^2.$$

Assim, o fluxo de Ricci-DeTurck é definido por:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\bar{g}_{ij} = P(\bar{g})_{ij} = -2\bar{R}_{ij} + \nabla_i W_j + \nabla_j W_i \\ \bar{g}(0) = g_0. \end{cases} \quad (2.9)$$

é fortemente parabólica e, portanto, tem uma solução para um intervalo de tempo pelo teorema (2.1).

Uma vez que esta solução existe, o campo vetorial  $W(t)$  existe, e os difeomorfismos dependentes do tempo pode ser obtido por resolução da E.D.O (2.6). Uma vez que sabemos que  $\varphi_t$  existe, os calculos acima mostram que o pull-back da métricas  $g_t = \varphi_t^* \bar{g}_t$  satisfazem a equação do fluxo de Ricci. Assim, o fluxo de Ricci tem uma solução para um intervalo de tempo. De fato a solução é também única.

Vamos argumentar mais com a unicidade, como os símbolos de Christoffel de pull-back de uma métrica em coordenadas locais  $\{x^i\}$  em  $M$  são:

$$\Gamma_{ij}^\gamma(g) \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial x^i \partial x^j} + \Gamma(\bar{g})_{pq}^k \frac{\partial \varphi^p}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^q}{\partial x^j}$$

e

$$\bar{g}^{pq} = (\varphi^* \bar{g})^{ij} \frac{\partial \varphi^p}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^q}{\partial x^j},$$

então:

$$-\bar{g}^{pq}\Gamma(\bar{g})_{pq}^k = -g^{ij}\frac{\partial\varphi^p}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^q}{\partial x^j}\Gamma(\bar{g})_{pq}^k = -g^{ij}\Gamma_{ij}^\gamma(g)\frac{\partial\varphi^k}{\partial x^\gamma} + g^{ij}\frac{\partial^2\varphi^k}{\partial x^i\partial x^j}$$

e

$$\bar{g}^{pq}\widehat{\Gamma}_{pq}^k = g^{ij}\widehat{\Gamma}_{pq}^k\frac{\partial\varphi^p}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^q}{\partial x^j}$$

logo o sistema (2.6) pode ser escrita:

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi^k}{\partial t} = g^{ij}\left(\frac{\partial^2\varphi^k}{\partial x^i\partial x^j} - \Gamma_{ij}^\gamma(g)\frac{\partial\varphi^k}{\partial x^\gamma} + \widehat{\Gamma}_{pq}^k\frac{\partial\varphi^p}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^q}{\partial x^j}\right) \\ \varphi^k(x, 0) = x^k. \end{cases} \quad (2.10)$$

Notando que este sistema é fortemente parabólico em  $\varphi(x, 0) = x$ , assim temos existência e unicidade para  $\varphi_t$  pelo sistema (2.10).

Agora seja uma métrica fixa  $\widehat{g}$  em  $M$ . Se a solução do fluxo de Ricci existe, denotar por  $g(t)$  neste caso. Seja  $\varphi_t$  denotam a solução do sistema (2.10) em relação a  $g(t)$  e  $\widehat{g}$ . Note-se que, a priori, só sabemos que  $\varphi_t$  existe e permanecem difeomorfismos por um tempo curto se  $g(t)$  existe.

Observe-se que se  $g(t)$  existe, então

$$\bar{g}(t) = (\varphi_t^{-1})^*g(t)$$

é uma solução do fluxo de Ricci-DeTurck. De fato, usando (2.6) calculamos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\bar{g}(t) &= \frac{\partial}{\partial t}((\varphi_t^{-1})^*g(t)) \\ &= (\varphi_t^{-1})^*\left(\frac{\partial}{\partial t}g(t)\right) + \mathcal{L}_{(\varphi_t)_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t\right)}[(\varphi_t^{-1})^*g(t)] \\ &= (\varphi_t^{-1})^*(-2Rc(g(t))) + \mathcal{L}_{(\varphi_t)_*(\varphi_t^*[W(t)])}(g(t)) \\ &= -2Rc(\bar{g}(t)) + \mathcal{L}_{W(t)}[\bar{g}(t)]. \end{aligned}$$

Mas desde que (2.9) é fortemente parabólico, sabemos que a única solução  $\bar{g}(t)$  existe. E uma vez que temos  $\bar{g}(t)$ , podemos obter os difeomorfismos  $\varphi_t$  resolvendo a E.D.O não-autônoma (2.6) em cada ponto. Assim,

$$g(t) = \varphi_t^*\bar{g}(t)$$

existe, a final de contas, e resolve o fluxo de Ricci.

Então, nós agora mostraremos que a solução do fluxo de Ricci é unicamente determinado por seus dados iniciais. Suponhamos que  $g_1(t)$  e  $g_2(t)$  são duas soluções do fluxo de Ricci em um intervalo de tempo comum. Seja  $(\varphi_1)_t$  denota a solução de (2.10) com relação a  $g_1(t)$  e  $\widehat{g}$  e seja também  $(\varphi_2)_t$  a solução de (2.10) com relação a  $g_2(t)$  e  $\widehat{g}$ .

Então

$$\bar{g}_1(t) = ((\varphi_1)_t^{-1})^*g_1(t) \text{ e } \bar{g}_2(t) = ((\varphi_2)_t^{-1})^*g_2(t)$$

ambas soluções do fluxo de Ricci-DeTurck (2.9). Porque  $\bar{g}_1(0) = \bar{g}_2(0)$  e (2.9) goza de soluções únicas, temos que  $\bar{g}_1(t) = \bar{g}_2(t) = \bar{g}(t)$  enquanto ambos existem. Mas então ambos  $(\varphi_1)_t$  e  $(\varphi_2)_t$  são soluções da E.D.O.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_i)_t(p) = W((\varphi_i)_t(p), t) \quad i=1,2$$

gerado pelo mesmo campo vetorial

$$W^k(t) = \bar{g}^{pq}(t)(-\Gamma(\bar{g}(t))_{pq}^k + \Gamma(\hat{g}_{pq}^k))$$

voltando a equação (2.10) concluímos que  $(\varphi_1)_t = (\varphi_2)_t$  enquanto ambas sejam definidas, o que implica em particular que

$$g_1(t) = (\varphi_1)_t^* \bar{g}_1(t) = (\varphi_2)_t^* \bar{g}_2(t) = g_2(t)$$

então temos o seguinte resultado:

**Teorema 2.2** *Dado uma métrica Riemanniana suave  $g_0$  em uma variedade fechada  $M$ , existe um intervalo de tempo máximo  $[0, T)$  tal que a solução  $g(t)$  do fluxo de Ricci, com  $g(0) = g_0$ , existe e é suave em  $[0, T)$ , e esta solução é única.*

### 2.3.1 Existência dos Difeomorfismos de DeTurck

Nesta subseção, estabelecemos a existência de uma família  $\{\varphi_t\}$  de difeomorfismos solução da E.D.O (2.6).

**Lema 2.3** *Se  $\{X_t : 0 \leq t < T < \infty\}$  é uma família dependente de tempo contínuo de campos vetoriais em uma variedade compacta  $M^n$ , então existe uma família de um parâmetro de difeomorfismos  $\{\varphi_t : M^n \rightarrow M^n : 0 \leq t < T \leq \infty\}$  definida no mesmo intervalo de tempo tal que*

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial t}(x) = X_t[\varphi_t(x)] \quad (2.11)$$

$$\varphi_0(x) = x \quad (2.12)$$

para todo  $x \in M^n$  e  $t \in [0, T)$ .

**Demonstração:** Podemos supor que há  $t_0 \in [0, T)$  tal que  $\varphi_s(y)$  existe para todo  $0 \leq s \leq t_0$  e  $y \in M^n$ . Seja  $t_1 \in (t_0, T)$  é dado. Vamos mostrar que  $\varphi_t$  existe para todo  $t \in [t_0, t_1]$ . Como  $t_1$  é arbitrário, isso implica o lema. Dado qualquer  $x_0 \in M^n$ , escolher um sistemas de coordenadas locais  $(U, x)$  e  $(V, y)$  tal que  $x_0 \in U$  e  $\varphi_{t_0}(x_0) \in V$ . Enquanto  $x \in U$  e  $\varphi_t(x) \in V$ , a equação (2.11) é equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}[y \circ \varphi_t \circ x^{-1}(p)] &= y_* \left[ \frac{\partial \varphi_t}{\partial t}[x^{-1}(p)] \right] \\ &= (y_* X_t \circ y^{-1})(y \circ \varphi_t \circ x^{-1}(p)) \end{aligned}$$

para  $p \in x(U)$  tal que  $\varphi_t \circ x^{-1}(p) \in V$ . Tomando  $z_t = y \circ \varphi_t \circ x^{-1}$  e  $F_t = y_* X_t \circ y^{-1}$ , obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} z_t = F_t(z_t)$$

onde  $z_t$  e  $F_t$  são aplicações dependentes do tempo entre os subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ . Assim, vemos que (2.11) é localmente equivalente a uma E.D.O não linear em  $\mathbb{R}^n$ . Assim, para todo  $x \in U$  tal que  $\varphi_{t_0}(x) \in V$ , existe uma solução única para (2.11) por um tempo curto  $t \in [t_0, t_0 + \epsilon)$ . Desde que

o campos vectoriais  $X_t$  são uniformemente limitado no conjunto compacto  $M^n \times [t_0, t_1]$ , existe uma  $\bar{\epsilon} > 0$  independente de  $x \in M^n$  e  $t \in [t_0, t_1]$  tal que a solução única  $\varphi_t(x)$  existe para todo  $t \in [t_0, t_0 + \bar{\epsilon}]$ . Uma vez que a mesma afirmação é válida para a partida de fluxo de  $\varphi_{t+\bar{\epsilon}}(x)$ , uma iteração simples termina o argumento.

## Capítulo 3

# As Estimativas de Bernstein-Bando-Shi e Explosão de Curvatura em Singularidades

Neste capítulo vamos usar o princípio do máximo em algumas maneiras criativas para obter limites em derivadas da curvatura e métrica evoluindo sob o fluxo de Ricci. Iremos em seguida, utilizar as nossas estimativas para mostrar que a curvatura deve explodir medida que nos aproximamos de uma singularidade em tempo finito no fluxo de Ricci.

### 3.1 Evolução das Quantidades Geométricas Sob o Fluxo de Ricci

Para aplicar os argumentos do princípio do máximo para a curvatura, precisamos saber o que as equações que descrevem a evolução das quantidades de curvatura sob o fluxo de Ricci é. Nós já fizemos a maior parte dos cálculos no Lema 1.20: as equações de evolução para o fluxo de Ricci estão substituindo  $h_{ij} = -2R_{ij}$  nessas fórmulas.

**Lema 3.1** *Suponha-se que  $g(t)$  é uma solução do fluxo de Ricci:*

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2R_{ij}.$$

*Então, as várias quantidades geométricas evoluem de acordo com as seguintes equações:*

1. *Inverso da métrica:*

$$\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} = 2R^{ij}.$$

2. *Símbolos de Christoffel:*

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}^k = -g^{kl} (\nabla_i R_{jl} + \nabla_j R_{il} - \nabla_l R_{ij})$$

3. Tensor da curvatura de Riemann:

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{ijkl} = \Delta R_{ijkl} + 2(B_{ijkl} - B_{ijlk} + B_{ikjl} - B_{iljk}) - (R_i^p R_{pjkl} + R_j^p R_{ipkl} + R_k^p R_{ijpl} + R_l^p R_{ijkp}),$$

onde

$$B_{ijkl} \equiv -R_{pij}^q R_{qlk}^p.$$

Veja a definição 1.13 para a definição do Laplaciano  $\Delta$ .

4. Tensor de Ricci:

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{ij} = \Delta R_{ij} + 2R_{pijq} R^{pq} - 2R_i^p R_{pj}.$$

5. Curvatura escalar:

$$\frac{\partial}{\partial t} R \equiv \Delta R + 2|Rc|^2.$$

6. Elemento de volume:

$$\frac{\partial}{\partial t} d\mu = -Rd\mu.$$

7. Volume de uma variedade:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_M d\mu = - \int_M Rd\mu.$$

8. Curvatura escalar total (em uma variedade fechada):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_M Rd\mu = \int_M (-R^2 + 2|Rc|^2)d\mu.$$

**Demostração:** A maioria deles segue facilmente do Lema 1.20, mas alguns requerem um pouco de mexer mais para colocá-los em uma forma agradável. A prova da equação para o tensor da curvatura de Riemann em particular, é bastante demorado e está contido (juntamente com as dos  $Rc$  e  $R$ ) em [2, cap. 6.1]. A técnica principal consiste em utilizar a identidade (5.3), comutar as derivadas covariantes, em seguida, utilizar as identidades Bianchi.

## 3.2 Equações de Evolução para Derivadas da Curvatura

Temos como objectivo obter limites sobre as derivadas da curvatura, ou seja, em quantidades de forma  $|\nabla^k Rm|^2$  (aqui o  $k$  não é um índice elevado, indica o  $k$ -ésimo derivada covariante). Nossa esperança é de aplicar o princípio do máximo o Teorema 3.2 para obter tais limites, mas antes de podermos aplicar este teorema, devemos ter algumas EDPs que descrevem a evolução das quantidades.

**Lema 3.2** *Se  $A$  é uma quantidade tensor que satisfaz uma equação do tipo de calor:*

$$\frac{\partial}{\partial t} A = \Delta A + F$$

*sob o fluxo de Ricci (onde  $F$  é um tensor do mesmo tipo que  $A$ ), então, o quadrado da sua norma satisfaz a equação do tipo de calor*

$$\frac{\partial}{\partial t} |A|^2 = \Delta |A|^2 - 2|\nabla A|^2 + F * A + Rc * A^{*2}$$

**Demostração:** Usamos  $g_t$  para denotar a métrica no tempo  $t$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g_t(A, A) &= 2g_t\left(\frac{\partial}{\partial t} A, A\right) + \frac{\partial g_t}{\partial t}(A, A) \\ &= 2g_t(\Delta A + F, A) + Rc * A^{*2} \\ &= \Delta|A|^2 - 2|\nabla A|^2 + F * A + Rc * A^{*2} \end{aligned}$$

onde o termo final na segunda linha vem a partir da derivada da métrica (que é  $-2Rc$  para o fluxo de Ricci) e usamos a identidade

$$\Delta|A|^2 = 2 \langle \Delta A, A \rangle + 2|\nabla A|^2$$

**Lema 3.3** *Se  $A$  é uma quantidade tensor que satisfaz uma equação do tipo de calor:*

$$\frac{\partial}{\partial t} A = \Delta A + F$$

*sob o fluxo de Ricci (onde  $F$  é um tensor do mesmo tipo que  $A$ ), então sua derivada covariante satisfaz uma equação do tipo calor*

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla A = \Delta(\nabla A) + \nabla F + Rm * \nabla A + \nabla Rc * A.$$

**Demostração:** Lembre a fórmula (1.3), que  $\nabla A$  tem a forma

$$\nabla A = \partial A + f(\Gamma, A)$$

onde  $f(\Gamma, A)$  é uma expressão da forma  $\Gamma * A$ , o qual depende do tipo de tensor de  $A$ . Além disso, pelo Lema 3.1 temos

$$\partial_t \Gamma = (g^{-1}) * \nabla Rc.$$

Daqui resulta que

$$\begin{aligned} \partial_t \nabla A &= \partial_t \partial A + \partial_t f(\Gamma, A) \\ &= \partial \partial_t A + f(\Gamma, \partial_t A) + f(\partial_t \Gamma, A) \text{ (pela regra do produto)} \\ &= \nabla(\partial_t A) + f(g^{-1} * \nabla Rc, A) \text{ (porque } \partial_t A \text{ é um tensor do mesmo tipo como } A) \\ &= \nabla(\Delta A + F) + \nabla Rc * A \\ &= (\Delta \nabla A + Rm * \nabla A + \nabla Rc * A) + \nabla F + \nabla Rc * A \\ &= \Delta \nabla A + \nabla F + Rm * \nabla A + \nabla Rc * A. \end{aligned}$$

Nós usamos a fórmula

$$[\nabla, \Delta]A := \nabla \Delta A - \Delta \nabla A = Rm * \nabla A + \nabla Rc * A,$$

que se segue a partir de uma utilização cuidadosa de fórmula (5.3), seguido pela segunda identidade de Bianchi (1.8) (ver [2, p. 227]).

Agora notamos que a fórmula para a evolução do tensor curvatura de Riemann sob a fluxo de Ricci dada no Lema 3.1 se traduz em notação  $*$  como

$$\frac{\partial}{\partial t} Rm = \Delta Rm + Rm^{*2}. \quad (3.1)$$

Isso nos permite usar os lemas anteriores para calcular equações de evolução para as derivadas covariante da métrica.

**Lema 3.4** *A equação de evolução para a  $k$ -ésima derivada covariante do tensor curvatura de Riemann sob o fluxo de Ricci é:*

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^k Rm = \Delta \nabla^k Rm + \sum_{j=0}^k \nabla^j Rm * \nabla^{k-j} Rm.$$

**Demonstração:** Provamos o resultado por indução. A equação de evolução para  $Rm$  é dado acima na equação (3.1) é o caso base  $k = 0$ . Nós assumimos a relação vale para um determinado  $k$  e aplicar o Lema 3.3 com  $A = \nabla^k Rm$  e

$$F = \sum_{j=0}^k \nabla^j Rm * \nabla^{k-j} Rm.$$

Isso nos diz que

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \nabla^k Rm = \Delta(\nabla \nabla^k Rm) + \nabla F + Rm * \nabla(\nabla^k Rm) + \nabla Rc * \nabla^k Rm. \quad (3.2)$$

É evidente que todos os termos do lado direito são da forma  $\nabla^i Rm * \nabla^j Rm$  onde  $i + j = k + 1$ , portanto

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^{k+1} Rm = \Delta \nabla^{k+1} Rm + \sum_{j=0}^{k+1} \nabla^j Rm * \nabla^{k+1-j} Rm,$$

completando o passo indutivo.

**Corolário 3.1** *O quadrado da norma da derivada covariante  $k$ -ésima do tensor de curvatura de Riemann satisfaz a equação do tipo calor*

$$\frac{\partial}{\partial t} |\nabla^k Rm|^2 = \Delta |\nabla^k Rm|^2 - 2|\nabla^{k+1} Rm|^2 + \sum_{j=0}^k \nabla^j Rm * \nabla^{k-j} Rm * \nabla^k Rm. \quad (3.3)$$

**Demonstração:** Nós simplesmente aplicar o Lema 3.2 com  $A = \nabla^k Rm$  e

$$F = \sum_{j=0}^k \nabla^j Rm * \nabla^{k-j} Rm,$$

pelo resultado do Lema 3.4. O resultado é

$$\frac{\partial}{\partial t} |\nabla^k Rm|^2 = \Delta |\nabla^k Rm|^2 - 2|\nabla^{k+1} Rm|^2 + F * \nabla^k Rm + Rc * (\nabla^k Rm)^{*2}$$

É evidente que todos os termos da esquerda, excepto os primeiros dois são da forma  $\nabla^i Rm * \nabla^j Rm * \nabla^k Rm$  onde  $i + j = k$ , e portanto

$$\frac{\partial}{\partial t} |\nabla^k Rm|^2 = \Delta |\nabla^k Rm|^2 - 2|\nabla^{k+1} Rm|^2 + \sum_{j=0}^k \nabla^j Rm * \nabla^{k-j} Rm * \nabla^k Rm$$

conforme necessário.

### 3.3 Estimativas de Bernstein-Bando-Shi

Agora vamos aplicar o princípio do máximo às equações de evolução obtidos na seção anterior para os limites de derivadas de curvatura. Nosso objetivo é obter esses limites sob a suposição de que a própria curvatura é limitada superiormente por uma constante,  $|Rm| < K$ . Há dois problemas que enfrentamos na tentativa de aplicar o princípio da máxima para a equação de evolução que deriva para as derivadas covariantes da curvatura: em primeiro lugar, não podemos garantir qualquer condição iniciais sobre os derivados da curvatura se nós só são dadas limites no curvatura e, segundo a equação de evolução tem alguns termos em que ela não tem certeza de como controlar (ou seja, os termos da soma na equação (3.3))

Nós por passar o primeiro problem provando dependentes do tempo limites superiores que divergem em  $t = 0$  (portanto, eles só nos dão informações úteis após  $t = 0$ .) Veremos como passar a segunda no processo da prova.

**Teorema 3.1** *Estimativas de Bernstein-Bando-Shi.* *Seja  $(M^n, g(t))$  uma solução de fluxo de Ricci numa variedade fechado  $n$ -dimensional. Então, para cada  $\alpha > 0$  e  $m \in \mathbb{N}$ , existe uma constante  $C_m$  dependendo só de  $m, n$  e  $\max\{\alpha, 1\}$  tal que se*

$$|Rm(x, t)|_{g(t)} \leq K \quad \forall t \in [0, \frac{\alpha}{K}]$$

então

$$|\nabla^m Rm(x, t)|_{g(t)} \leq \frac{C_m K}{t^{m/2}} \quad \forall t \in (0, \frac{\alpha}{K}]$$

**Demonstração:** Provamos o resultado por indução em  $m$ . Para  $m = 0$  o resultado é verdadeiro por hipótese, com  $C_0 = 1$ . Suponha que o resultado é verdadeiro para todos  $p \leq m - 1$ . O resultado do Corolário 3.1 nos diz que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla^m Rm|^2 &= \Delta |\nabla^m Rm|^2 - 2|\nabla^{m+1} Rm|^2 + \sum_{j=0}^m \nabla^j Rm * \nabla^{m-j} Rm * \nabla^m Rm \\ &\leq \Delta |\nabla^m Rm|^2 - 2|\nabla^{m+1} Rm|^2 + \sum_{j=0}^m c_{mj} |\nabla^j Rm| |\nabla^{m-j} Rm| |\nabla^m Rm| \\ &\leq \Delta |\nabla^m Rm|^2 - 2|\nabla^{m+1} Rm|^2 + \left( \sum_{j=1}^{m-1} c_{mj} \frac{C_j}{t^{j/2}} \frac{C_{m-j}}{t^{(m-j)/2}} \right) K^2 |\nabla^m Rm| + (c_{m0} + c_{mm}) K |\nabla^m Rm|^2 \\ &\leq \Delta |\nabla^m Rm|^2 - 2|\nabla^{m+1} Rm|^2 + C'_m K |\nabla^m Rm|^2 + \frac{C''_m}{t^{m/2}} K^2 |\nabla^m Rm| \end{aligned}$$

para  $t \in (0, \frac{\alpha}{K}]$ , onde  $C'_m, C''_m$  são constantes dependendo somente  $m$  e  $n$ . Usámos a hipótese indutiva para ir da segunda para a terceira linha. Podemos completar o quadrado (na variável  $|\nabla^m Rm|$ ) no lado direito em seguida usar a desigualdade  $(a + b)^2/2 \leq a^2 + b^2$  para obter

$$\frac{\partial}{\partial t} |\nabla^m Rm|^2 \leq \Delta |\nabla^m Rm|^2 - 2|\nabla^{m+1} Rm|^2 + \bar{C}_m K (|\nabla^m Rm|^2 + \frac{K^2}{t^m}) \quad (3.4)$$

para alguma constante  $\bar{C}_m$ .

Para obter o limite desejado, precisamos encontrar um limite superior para  $t^m |\nabla^m Rm|^2$ . Esta quantidade tem claramente um limite superior no  $t = 0$  porque é igual 0. Então, para aplicar o princípio da máxima e obter um limite superior só precisamos mostrar que os termos de reação na equação de evolução estão diminuindo. O problema que temos é que essa quantidade satisfaz a desigualdade diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t}(t^m |\nabla^m Rm|^2) \leq \Delta(t^m |\nabla^m Rm|^2) - 2t^m |\nabla^{m+1} Rm|^2 + \quad (3.5)$$

$$(\bar{C}_m K t + m)t^{m-1} |\nabla^m Rm|^2 + \bar{C}_m K^3, \quad (3.6)$$

e os termos de reação (3,6) não são negativo. Este é o "segundo problema" mostrada no início desta secção.

Para corrigir esse problema, fazemos uso do termo  $-2|\nabla^{k+1}$  na equação evolução de corolário 3.5. Pela adição a quantidade correta de  $t^{m-1} |\nabla^{m-1} Rm|^2$  (o que sabemos pela nossa hipótese indutiva é limitada acima por uma constante) podemos cancelar fora os termos reacionários envolvendo  $t^m |\nabla^m Rm|^2$ . Ao fazer isso, vamos introduzir novos termos  $t^{m-1} |\nabla^{m-1} Rm|^2$ , por isso temos de adicionar a quantidade certa da próxima derivada para baixo e assim por diante. Definimos

$$G = t^m |\nabla^m Rm|^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{mj} t^j |\nabla^j Rm|^2,$$

onde vamos determinar as constantes  $\alpha_{mj}$  de modo que todos os termos são cancelados como queremos.

Pela equação (3.5), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} G &\leq \Delta G + (\bar{C}_m K t + m)t^{m-1} |\nabla^m Rm|^2 + \bar{C}_m K^3 \\ &\quad + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{mj} \{-2t^j |\nabla^{j+1} Rm|^2 + (\bar{C}_j K t + j)t^{j-1} |\nabla^j Rm|^2 + \bar{C}_j K^3\}. \end{aligned}$$

Pela hipótese indutiva há números  $D_j$  dependendo apenas de  $j, n$  para  $1 \leq j \leq m-1$  tal que

$$\bar{C}_j K t^j |\nabla^j Rm|^2 + \bar{C}_j K^3 \leq D_j K^3$$

para  $\forall t \in (0, \frac{\alpha}{K}]$ . Assim, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} G &\leq \Delta G + (\bar{C}_m K t + m)t^{m-1} |\nabla^m Rm|^2 + \bar{C}_m K^3 \\ &\quad + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{mj} \{-2t^j |\nabla^{j+1} Rm|^2 + jt^{j-1} |\nabla^j Rm|^2 + D_j K^3\} \\ &= \Delta G + (\bar{C}_m K t + m - 2\alpha_{m,m-1})t^{m-1} |\nabla^m Rm|^2 \\ &\quad + \sum_{j=0}^{m-1} \{j\alpha_{mj} - 2\alpha_{m,j-1}\}t^{j-1} |\nabla^j Rm|^2 \\ &\quad + \bar{C}_m K^3 + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{mj} D_j K^3. \end{aligned}$$

Agora vamos escolher  $\alpha_{mj}$  de modo que os termos desta equação são cancelados: escolha  $\alpha_{m,m-1}$  tal que

$$0 = \bar{C}_m \alpha + m - 2\alpha_{m,m-1} \geq \bar{C}_m K t + m - 2\alpha_{m,m-1},$$

onde o segundo passo segue, porque estamos trabalhando com  $t \in (0, \alpha/K]$ . Agora definir  $\alpha_{m,m-2}, \alpha_{m,m-3}, \dots, \alpha_{m0}$ , segundo esta ordem, em cada passo

$$j\alpha_{mj} - 2\alpha_{m,j-1} = 0.$$

Se agora definir

$$B_m := \bar{C}_m + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{mj} D_j$$

então nossa evolução pode ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial t} G \leq \Delta G + B_m K^3.$$

O termo reação é simplesmente uma constante, assim que dá um crescimento linear no pior dos casos. Porque  $G = \alpha_{m0} |Rm|^2 \leq \alpha_{m0} K^2$  em  $t = 0$ , o princípio do máximo (Teorema A.1) nos diz que

$$G \leq \alpha_{m0} K^2 + B_m K^3 t \leq (\alpha_{m0} + B_m \alpha) K^2 := C_m^2 K^2$$

para  $t \in (0, \frac{\alpha}{K}]$ , onde  $C_m$  é uma constante que depende somente de  $m, n$  e  $\max\{\alpha, 1\}$ .

Portanto, temos

$$|\nabla^m Rm| \leq \sqrt{\frac{G}{t^m}} \leq \frac{C_m K}{t^{m/2}} \text{ para } t \in (0, \frac{\alpha}{K}].$$

como requerido.

### 3.4 Explosão de Curvatura em Singularidades com Tempo Finito

Esta seção será dedicada a provar que, se o fluxo de Ricci se torna singular em tempo finito, a curvatura deve explodir quando nos aproximamos do momento singular  $T$ .

**Teorema 3.2** *Se  $g_0$  é uma métrica suave sobre uma variedade compacta  $n$ -dimensional  $M^n$ , então o fluxo de Ricci tem uma única solução  $g(t)$  definida em algum intervalo de tempo maximal  $t \in [0, T)$ , onde  $T \leq \infty$ . Se  $T < \infty$ , então*

$$\lim_{t \rightarrow T} (\sup_{x \in M} |Rm(x, t)|_{g(t)}) = +\infty$$

A prova de que a curvatura deve explodir quando  $t \rightarrow T$  segue o esquema seguinte. Ou seja, vamos supor que  $|Rm|_g$  é limitada acima por uma constante  $K$ , e mostrar que a métrica  $g(t)$  converge suavemente para uma métrica suave  $g(T)$ . É então possível utilizar o resultado de existência em um intervalo de tempo ( Teorema 2.2 ), com métrica inicial  $g(T)$  estender a solução passado  $T$ . Isto contradiz a escolha de  $T$  como o tempo máximo de modo a que o fluxo de Ricci existe em  $[0, T)$ .

Um elemento importante da prova é o seguinte teorema e seu corolário, que mostram que um limite métrica  $g(T)$  existe e é contínua:

**Teorema 3.3** *Seja  $M$  uma variedade fechada e  $g(t)$  uma métrica suave tempo-dependente em  $M$ , definida para  $t \in (0, T]$ . Se existe uma constante  $C < \infty$  tal que*

$$\int_0^T \left| \frac{\partial}{\partial t} g(x, t) \right|_{g(t)} dt \leq C \quad (3.7)$$

para todo  $x \in M$ , então a métrica  $g(t)$  converge uniformemente quando  $t \rightarrow T$  para uma métrica contínua  $g(T)$  tal que

$$e^{-C} g(x, 0) \leq g(x, T) \leq e^C g(x, 0).$$

Note-se que isto significa que  $g(T)$  é uniformemente equivalente ao  $g(0)$ .

**Demonstração:**

Seja  $x \in M$ ,  $t_0 \in [0, T)$ ,  $V \in T_x M$  arbitrária, então

$$\begin{aligned} \left| \log \left( \frac{g(x, t_0)(V, V)}{g(x, 0)(V, V)} \right) \right| &= \left| \int_0^{t_0} \frac{\partial}{\partial t} [\log g(x, t)(V, V)] dt \right| \\ &= \left| \int_0^{t_0} \frac{\frac{\partial}{\partial t} g(x, t)(V, V)}{g(x, t)(V, V)} dt \right| \\ &\leq \int_0^{t_0} \left| \frac{\partial}{\partial t} g(x, t) \left( \frac{V}{|V|_{g(t)}}, \frac{V}{|V|_{g(t)}} \right) \right| dt \\ &\leq \int_0^{t_0} \left| \frac{\partial}{\partial t} g(x, t) \right|_{g(t)} dt \\ &\leq C \end{aligned}$$

em que o penúltimo passo, como segue  $|A(U, U)| \leq |A|_g$  para qualquer 2-tensor  $A$  e um vetor unitário  $u$ . Exponencializando ambos lados dessa desigualdade nos dá:

$$e^{-C} g(x, 0)(V, V) \leq g(x, t_0)(V, V) \leq e^C g(x, 0)(V, V)$$

para qualquer  $V$ . Assim

$$e^{-C} g(x, 0) \leq g(x, t_0) \leq e^C g(x, 0) \quad (3.8)$$

então as métricas  $g(t)$  são uniformemente equivalentes.

Assim, temos

$$\int_0^T \left| \frac{\partial}{\partial t} g(x, t) \right|_{g(0)} dt \leq C' \quad (3.9)$$

para algum  $C' > 0$ . Note-se a diferença da equação (3.7): a norma é tomada com respeito a uma métrica constante  $g(0)$  em vez de uma dependente do tempo  $g(t)$ .

Vamos agora definir

$$g(x, T) = g(x, 0) + \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} g(x, t) dt.$$

Esta integral existe, como as métricas são suaves e o integrando é absolutamente integrável com respeito à norma induzida pela  $g(0)$ , pela equação (3.9). Agora

$$|g(x, t) - g(x, T)|_{g(0)} \leq \int_t^T \left| \frac{\partial}{\partial t} g(x, t) \right|_{g(0)} dt \longrightarrow 0$$

quando  $t \longrightarrow T$  para cada  $x \in M$ . Porque  $M$  é compacta, essa convêrncia é uniforme em  $M$ . Assim  $g(t) \longrightarrow g(T)$  uniformemente, então  $g(T)$  é contínua. Ao tomar o limite sa equação (3.8) podemos mostrar que

$$e^{-C} g(x, 0) \leq g(x, T) \leq e^C g(x, 0),$$

daí que  $g(T)$  é definida positiva.

Portanto, a métrica  $g(t)$  converge uniformemente para uma métrica Riemanniana contínua  $g(T)$  que é equivalente a  $g(0)$ .

**Corolário 3.2** *Seja  $(M, g(t))$  uma solução do fluxo de Ricci em uma variedade fechada. Se  $|Rm|_g$  é limitado em  $[0, T)$  (onde  $T < \infty$ ) então  $g(t)$  converge uniformemente quando  $t \longrightarrow T$  a uma métrica contínua  $g(T)$  a qual é uniformemente equivalente a  $g(0)$ .*

**Demostração:**

Qualquer limite em  $|Rm|_g$  implica um em  $|Rc|_g$  e, portanto, em  $|\frac{\partial}{\partial t} g|_g$  (pela equação do fluxo de Ricci). A integral (3.7), é então uma integral de uma quantidade limitada durante um intervalo finito, e é, portanto, limitada. Assim, aplica-se o Teorema 3.3.

Nós agora temos um ponto de apoio: temos mostrado que há uma métrica limitada  $g(T)$ , e é contínua. Queremos agora mostrar que essa métrica é suave, porque precisamos esta se vamos a usar o resultado de existência de tempo curto do teorema 2.2 para estender nossa solução passado  $T$ . Para fazer isso, é preciso garantir que as derivadas espaciais de  $g$  perto do tempo  $T$  não estão explodindo - precisamos limites sobre eles. O primer passo é um limite aos derivadas da curvatura. Fazemos isso por meio das estimativas de Bernstein-Bando-Shi (Teorema 3.1), que geram limites sobre as derivadas da curvatura sob o pressuposto de curvatura limitada. Recorde-se que as estimativas de Bernstein-Bando-Shi não tem muita utilidade em  $t = 0$  (como se poderia esperar, por limites sobre um tensor curvatura arbitrária não nos dizem nada sobre os seus derivadas - é só depois de um período de Ricci fluindo que os derivados começam a ser trazido sob controle.) Isso é ótimo para nós, porque estamos interessados em estimativas perto  $t = T$ . Podemos usar o Teorema 3.1 para obter tais estimativas, considerando o nosso fluxo de Ricci como a partir de algum tempo pouco antes de  $T$ . Isso nos dá

**Corolário 3.3** *(do Teorema 3.1)*

*Seja  $(M, g(t))$  uma solução do fluxo de Ricci em uma variedade compacta. Se existem  $\beta, K > 0$  tal que*

$$|Rm(x, t)|_{g(t)} \leq K \quad \forall t \in [0, T]$$

onde  $T > \beta/K$ , então para cada  $m \in \mathbb{N}$  existe uma constante  $B_m$  dependendo apenas  $m, n$  e  $\min\{\beta, 1\}$  tal que

$$|\nabla^m Rm(x, t)|_{g(t)} \leq B_m K^{1+\frac{m}{2}} \quad \forall t \in [\frac{\min\{\beta, 1\}}{K}, T].$$

**Demonstração:**

Nós usamos o resultado do Teorema 3.1. Seja  $\beta_1 = \min\{\beta, 1\}$ . Agora, dado um tempo  $t_0 \in [\beta_1/K, T]$ , considerarmos o fluxo de Ricci como começando no momento  $T_0 = t_0 - \beta_1/K$ . Aplicando o teorema de 3.1 a este fluxo de Ricci, com  $\alpha = \beta_1$ , nos diz que

$$|\nabla^m Rm| \leq \frac{C_m K}{(t - T_0)^{m/2}}$$

onde  $C_m$  depende apenas de  $m, n$  e  $\min\{\alpha, 1\}$ . Daí em  $t = t_0$  temos

$$|\nabla^m Rm| \leq \frac{C_m K}{(\frac{\beta_1}{K})^{m/2}} = \frac{C_m}{\beta_1^m} K^{1+m/2},$$

a partir da qual o resultado segue.

Usando este limite sobre os derivados de curvatura perto  $t = T$ , podemos seguir para o limite das derivadas da métrica  $g$  perto do  $t = T$ . O seguinte corolário e sua prova é uma reformulação do argumento encontrado em [2, Prop 6,48].

**Corolário 3.4** *Seja  $(M, g(t))$  uma solução do fluxo de Ricci em uma variedade fechada, e seja  $(x^i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  um sistema de coordenadas local definido em alguma carta de coordenadas  $U \subset M$ . Se existe  $K > 0$  tal que*

$$|Rm(x, t)|_{g(t)} \leq K \quad \forall t \in [0, T)$$

então para cada  $m \in \mathbb{N}$  existe uma constante  $C_m, C'_m$  dependendo apenas da escolha da carta de coordenadas tal que

$$|\partial^m g(x, t)| \leq C_m$$

e

$$|\partial^m Rc(x, t)| \leq C'_m$$

para tudo  $(x, t) \in U \times [0, T)$ , onde as normas são tomadas em relação à métrica euclidiana no sistema de coordenadas  $(x^i)$ .

Devemos explicar um pouco da notação usada. Por  $\partial^m g$  queremos dizer a  $\binom{m+2}{0}$  - tensor, definido somente na carta de coordenadas  $U$ , que tem coordenadas

$$\partial_{i_1 \dots i_m} g_{pq}$$

com respeito ao sistema de coordenadas  $(x^i)$ . A métrica Euclidiana, que também é definido apenas em  $U$ , é a métrica, que tem coordenadas  $\delta_{ij}$  com respeito ao sistema de coordenadas  $(x^i)$ .

**Demostração:**

Ao longo desta prova, vamos tratar os símbolos Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  como as coordenadas, com relação ao sistema de coordenadas  $(x^i)$ , de um tensor  $\Gamma$  ( $\Gamma$  é definido apenas em  $U$ ).

Note-se que pelo Corolário 3.3, para cada  $m \in \mathbb{N}$  existe um limite superior uniforme em  $|\nabla^m Rc|$  num intervalo de tempo  $(\beta/K, T)$ . Há também um limite superior na mesma quantidade no intervalo  $[0, \beta/K]$  porque o intervalo é compacto, de modo que a quantidade é limitada para todo  $m$  :

$$|\nabla^m Rc| \leq D_m \quad (3.10)$$

para todo  $x \in M$  e  $t \in [0, T)$ , onde  $D_m$  é uma constante, dependendo do  $m$  e particular do fluxo de Ricci  $(M, g(t))$ .

Agora vamos provar por indução forte que existem constantes  $P_m, Q_m, R_m$  para cada  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  tal que

1.  $|\partial^{m-1}\Gamma| \leq P_m$  (Nós só provar isso para  $m \geq 1$ );

2.  $|\partial^m Rc| \leq Q_m$ ;

3.  $|\partial^m g| \leq R_m$

para todo  $t \in [0, T)$ .

Para o caso base  $m = 0$ , (2) resulta do o limite  $|Rm| \leq K$  e (3) segue do Corolário 3.2.

Suponha (1)-(3) é satisfeito por tudo  $m \leq p-1$ . Vamos provar que são verdadeiras para  $m = p$ , a partir de (1). Note-se que existe uma constante  $C$  tal que  $|\partial^{p-1}\Gamma| \leq C$  em  $t = 0$ , porque a variedade  $M$  é compacto.

Limites sobre  $|\partial^m g|$  implica limites sobre  $|\partial^m(g^{-1})$  pela diferenciação da fórmula  $g^{ij}g_{jk} = \delta_k^i$ ,  $m$  vezes. Lembrando a fórmula para  $\partial_t \Gamma$  do Lema 3.1, podemos provar:

$$\begin{aligned} \partial_t \partial^{p-1} \Gamma &= \partial^{p-1}(\partial_t \Gamma) \\ &= \partial^{p-1}(g^{-1} * \nabla Rc) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \partial^{p-i-1}(g^{-1}) * \partial^i \nabla Rc. \end{aligned}$$

Temos limites sobre os derivados de  $g^{-1}$ , por isso, só precisa limite os demais termos. Para  $i \leq p-1$  que temos, pelo Lema 1.3 (recordando a notação a partir do final da Seção 1.1),

$$\begin{aligned} \partial^i \nabla Rc &= \nabla^{i+1} Rc + \quad * \quad (\partial^j \Gamma, \partial^k Rc). \\ &\quad 0 \leq j \leq i-1 \\ &\quad k \leq i \end{aligned}$$

Note-se que temos um limite em  $\nabla^{i+1} Rc$  pela equação (3.10), e um indutivo limite superior sobre todos os outros termos no lado direito, porque  $j \leq i-1 \leq p-2$  e  $k \leq i \leq p-1$ . Daí  $|\partial^i \nabla Rc| \leq C$

para  $i \leq p - 1$ , portanto

$$|\partial_t \partial^{p-1} \Gamma| \leq C$$

para alguma constante  $C$  ( $C$  este é diferente do anterior - há tantos limites constantes uniformes em jogo neste e argumentos subseqüentes que vamos nos referir a maioria deles como ‘ $C$ ’ por conveniência, e espero que isso não causa muita confusão). Assim  $|\partial^{p-1} \Gamma|$  é limitada em  $t = 0$  e experiências, na pior das hipóteses, o crescimento linear no intervalo finito de tempo  $[0, T]$ . Portanto  $|\partial^{p-1} \Gamma| \leq P_p$  por alguma constante  $P_p$ . Isto conclui a prova de (1).

Agora podemos calcular (novamente pelo Lema 1.3)

$$\partial^p R_c = \nabla^p R_c + \sum_{\substack{j \leq p-1 \\ k \leq p-1}} * (\partial^j \Gamma, \partial^k R_c).$$

Todos os termos do lado direito são limitados por indução (com exceção de  $\partial^{p-1} \Gamma$ , qual nós apenas mostrou foi limitado como parte do passo indutivo), por isso temos  $|\partial^p R_c| \leq Q_p$  para alguma constante  $Q_p$ . Isto conclui a prova de (2).

Finalmente,

$$|\partial_t \partial^p g| = |-2\partial^p R_c| \leq C$$

pela segunda parte da etapa indutiva, então porque estamos em um intervalo de tempo finito,  $|\partial^p g| \leq R_p$  para alguma constante  $R_p$ . Isto prova (3), completando o passo de indução.

Portanto, o resultado é verdadeiro por indução.

**Corolário 3.5** *A métrica  $g(T)$  do Corolário 3.2 é suave, e as métricas  $g(t)$  convergem uniformemente em cada norma  $C^k$  para  $g(T)$  quando  $t \rightarrow T$ .*

**Demonstração:**

Para mostrar que  $g(T)$  é suave devemos tomar derivadas em relação a algum sistema de coordenadas que só podemos escolher arbitrariamente, por isso tome alguma coordenar  $U$  de  $M$ . Temos, a partir da equação de fluxo de Ricci,

$$g_{ij}(x, T) = g_{ij}(x, t) - 2 \int_t^T R_{ij}(x, \tau) d\tau$$

para qualquer  $t \in [0, T]$ .

Agora, se  $\alpha$  é qualquer multi-índice, então o Corolário 3.4 nos diz que  $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} g_{ij}$  e  $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} R_{ij}$  são uniformemente limitada em  $U \times [0, T]$ , e, portanto, para que possamos tomar a derivada sob o sinal de integral:

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} g_{ij}(x, T) = \left( \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} g_{ij} \right)(x, t) - 2 \int_t^T \left( \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} R_{ij} \right)(x, \tau) d\tau \quad (3.11)$$

para qualquer  $x \in U$ . Em particular, o lado esquerdo da equação acima existe para todo  $\alpha$ , então  $g(T)$  é suave.

Agora vamos mostrar que a convergência é uniforme em todas as normas  $C^m$  no seguinte sentido: podemos escolher cartas coordenadas que cobrem  $M$ , tal que para qualquer multi-índice  $\alpha$ , e qualquer  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} g_{ij}(x, T) - \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} g_{ij}(x, t) \right|_{g(x, T)} < \epsilon \quad (3.12)$$

em qualquer dos cartas coordenados escolhidos, para qualquer  $t \in [T - \delta, T)$  e  $x \in M$ .

Porque  $M$  é compacta, podemos escolher um conjunto finito de cartas coordenadas tais que as bolas fechadas unitários das cartas coordenadas cobrem  $M$ . Porque as bolas unitários fechadas são compactas, a métrica euclidiana em cada é equivalente a  $g(T)$ . Porque há um número finito de cartas coordenadas, as métricas euclidianas são uniformemente equivalente a  $g(T)$ . Assim, basta que se prove que a equação (3.12) é válida se considerarmos a norma em relação a uma das métricas euclidianas em cada ponto  $x$ , em vez da relação ao  $g(x, T)$ .

Pelo Corolário 3.4, para cada uma das cartas coordenadas que escolhemos existe  $C'_m$  tal que  $|\partial^m Rc| \leq C'_m$  com respeito à norma euclidiana nesse carta. Se escolhermos  $C$  ser a maior destes  $C'_m$  onde  $m = |\alpha|$  ( $C$  finito, porque há apenas um número finito de cartas coordenadas), então a equação (3.11) nos dá

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} g_{ij}(x, T) - \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} g_{ij}(x, t) \right| &= \left| 2 \int_t^T \left( \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} R_{ij} \right)(x, \tau) d\tau \right| \\ &\leq 2 \int_t^T |\partial^m Rc(x, \tau)| d\tau \\ &\leq 2C(T - t). \end{aligned}$$

Segue-se que  $g(t) \rightarrow g(T)$  uniformemente em qualquer norma  $C^m$  quanto  $t \rightarrow T$ .

Vamos agora provar o Teorema 3.2. Assumimos, por uma contradição, que  $|Rm(x, t)|_g$  é limitada por cima por  $K$ . Conclui-se a partir de corolários 3.2 e 3.5 que as métricas  $g(t)$  convergem uniformemente em qualquer norma  $C^k$  a uma métrica suave  $g(T)$ .

Porque  $g(t)$  é suave, é possível encontrar uma solução para o fluxo de Ricci com métrica inicial  $g(T)$ , com o resultado do teorema 2.2. Assim, nossa solução para o fluxo de Ricci pode ser estendido além  $t = T$ . Esta extensão é suave, porque todos os seus derivadas espaciais são contínua em  $t = T$  (por convergência de  $g(t)$  em qualquer norma  $C^k$ ). Segue-se que todas as derivadas de espaço-tempo são contínuos em  $t = T$ , porque a equação de fluxo de Ricci nos permite escrever derivadas temporais de quantidades relacionadas com a métrica em termos de derivados de espaço de tais quantidades, e o espaço-derivados têm sido mostrados como sendo contínuas. Portanto, a solução pode ser estendida além do tempo  $t = T$ , então o tempo  $T$  não poderia ter sido máximo. Isto é uma contradição, de modo que o suposição inicial de que  $|Rm(x, t)|_g$  é limitada deve estar incorreta. Isto completa a prova do Teorema 2.2.

## Capítulo 4

# Compacidade de Variedades Riemannianas e Fluxos

Este capítulo é baseado em [1, cap. 6, 7, 8].

### 4.1 Convergência e Compacidade de Variedades

Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana. Uma marcação sobre  $M$  é uma escolha de um ponto  $p \in M$  o qual é chamado de origem. A tripla  $(M, g, p)$  é denominada de variedade Riemanniana marcada.

A teoria dos limites e convergência de variedades foi desenvolvido por Gromov, Cheeger, Peters, Greene e Wu, entre outros, com base na idéia da convergência de Hausdorff em espaços métricos. A definição que se usa é como se segue:

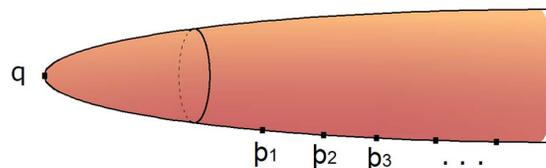
**Definição 4.1** (*Convergência de Cheeger-Gromov de variedades marcadas*)

Uma seqüência  $(M_i, g_i, p_i)$  de variedades Riemannianas suaves marcadas é dita convergir (suavemente) a uma variedade Riemanniana marcada  $(M, g, p)$  quando  $i \rightarrow \infty$  se existem

- (i) uma seqüência de conjuntos compactos  $\Omega_i \subset M$  tal que  $\Omega_i \subset \Omega_{i+1}$  e  $\bigcup_i \Omega_i = M$  e  $p \in \text{int}(\Omega_i)$
- (ii) uma seqüência de aplicações suaves  $\phi_i : \Omega_i \rightarrow M_i$  as quais são difeomorfismos sobre suas imagens e  $\phi_i(p) = p_i$  tal que  $\phi_i^* g_i \rightarrow g$  em compactos.

Para melhor compreender esta definição considere o seguinte exemplo:

Considere a superfície  $M$  com métrica herdada de  $\mathbb{R}^3$ .



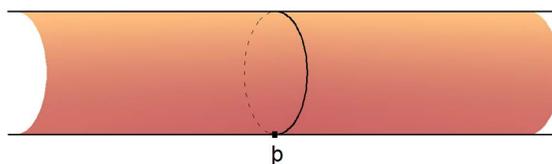
Seja  $(M_i, g_i) = (M, g)$ . Em particular,

$$(M_i, g_i, q) \longrightarrow (M, g, q).$$

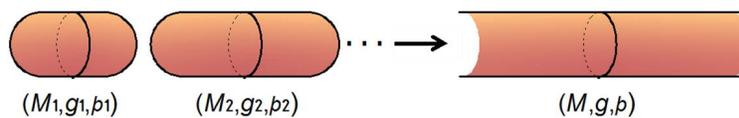
Por outro lado,

$$(M_i, g_i, p_i) \longrightarrow (N, h, p),$$

onde  $(N, h, p)$  é o cilindro apontado



**Observação 4.1** *É possível termos  $M_i$  compacta para todo  $i$  e  $M$  ser não compacta.*



**Observação 4.2** *Dois conseqüências da convergência  $(M_i, g_i, p_i) \longrightarrow (M, g, p)$  são*

(i) *para cada  $s > 0$  e  $k \in \mathbb{N}$ , tem-se*

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \sup_{B_{g_i}(p_i, s)} |\nabla^k Rm(g_i)| < \infty$$

(ii)

$$\inf_i inj(M_i, g_i, p_i) > 0,$$

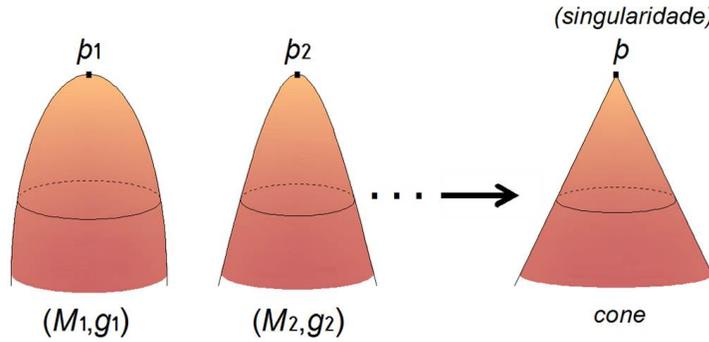
onde  $inj(M_i, g_i, p_i)$  é o raio de injetividade de  $(M_i, g_i)$  em  $p_i$ .

**Teorema 4.1** (Hamilton):

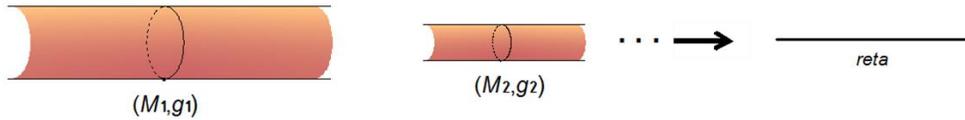
Sejam  $(M_i, g_i, p_i)$  variedades Riemannianas completas satisfazendo (i) e (ii). Então existe uma variedade Riemanniana marcada completa  $(M, g, p)$  tal que, a menos de subsequência,

$$(M_i, g_i, p_i) \longrightarrow (M, g, p).$$

As convergências envolvidas em nosso problema exigirão algum controle de curvaturas para que situação como



não ocorre e também um controle no raio de injetividade para que situação como



## 4.2 Convergência e Compacidade para Fluxos

Do teorema de compacidade acima para variedades Riemannianas marcadas, podemos obter um teorema de compacidade para fluxos.

**Definição 4.2** *Seja  $(M_i, g_i(t), p_i)$  uma seqüência de variedades Riemannianas completas marcadas evoluindo para  $-\infty \leq a < t < b \leq \infty$ . Dizemos que  $(M_i, g_i(t), p_i) \rightarrow (M, g(t), p)$  quando  $i \rightarrow \infty$  se existem*

- (i) *uma seqüência de conjuntos compactos  $\Omega_i \subset M$  tal que  $\Omega_i \subset \Omega_{i+1}$  e  $\bigcup_i \Omega_i = M$  e  $p \in \text{int}(\Omega_i)$*
- (ii) *uma seqüência de aplicações suaves  $\phi_i : \Omega_i \rightarrow M_i$  as quais são difeomorfas sobre suas imagens e  $\phi_i(p) = p_i$  tal que*

$$\phi_i^* g_i(t) \rightarrow g(t), \quad i \rightarrow \infty$$

*uniformemente em compactos de  $M \times (a, b)$*

**Observação 4.3** *Também faz sentido falar de convergência em (por exemplo) o intervalo de tempo  $(-\infty, 0)$ , mesmo quando os fluxos são definidos apenas para  $(-T_i, 0)$  com  $T_i \rightarrow \infty$ .*

Hamilton então conseguiu provar o seguinte resultado [11], com base no Teorema 4.1.

**Teorema 4.2** (Hamilton): *Sejam  $(M_i, g_i(t), p_i)$  variedades Riemannianas completas marcadas evoluindo para  $-\infty \leq a < t < b \leq \infty$ , onde  $g_i(t)$  é um fluxo de Ricci sobre  $M_i$ . Se*

$$(i) \sup_i \sup_{\substack{x \in M_i \\ t \in (a, b)}} |Rm(g_i(t))|_{(x)} < \infty,$$

(ii)  $\inf_i \text{inj}(M_i, g_i(0), p_i) > 0$ ,  
então existe uma variedade Riemanniana completa marcada  $(M, g(t), p)$  evoluindo para  $t \in (a, b)$ , onde  $g(t)$  é um fluxo de Ricci sobre  $M$ , tal que

$$(M_i, g_i(t), p_i) \longrightarrow (M, g(t), p)$$

quando  $i \longrightarrow \infty$ , a menos de subsequência.

**Demostração:** Ver [4]

### 4.3 Blow Up em uma Singularidade

Nosso objetivo agora é aplicar o teorema de compacidade de Hamilton sobre fluxos para rescalonamentos de fluxos de Ricci próximo de uma singularidade.

Seja  $M$  uma variedade compacta e  $g(t)$  um fluxo de Ricci sobre  $M$  definido no intervalo maximal  $[0, T)$  com  $T < \infty$ . Do teorema de explosão de curvatura em uma singularidade, segue que

$$\sup_M |Rm|(\cdot, t) \longrightarrow \infty$$

quando  $t \longrightarrow T$ . Escolha pontos  $p_i \in M$  e tempos  $t_i \longrightarrow T$  tal que

$$|Rm|(p_i, t_i) = \sup_{\substack{x \in M \\ t \in [0, t_i]}} |Rm|(x, t) \longrightarrow \infty$$

(note que podemos tomar  $(p_i, t_i)$  um ponto máximo de  $|Rm|$  sobre  $M \times [0, T - \frac{1}{i}]$ . Considere o fluxo rescalonado definido por

$$g_i(t) = |Rm|(p_i, t_i) g\left(t_i + \frac{t}{|Rm|(p_i, t_i)}\right).$$

Este fluxo é de Ricci sobre  $M$  e está definido para

$$[-t_i |Rm|(p_i, t_i), (T - t_i) |Rm|(p_i, t_i)].$$

Notemos que  $|Rm(g_i(0))|(p_i) = 1$  e para  $t \leq 0$ , tem-se

$$\sup_M |Rm(g_i(t))| \leq 1$$

Pelo teorema 3.2.11 do Topping, segue que

$$|Rm(g_i(t))| \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2}c(n)t}$$

$\forall t \in [0, \min\{\frac{2}{c(n)}, T_i\})$ . Assim,  $T_i \geq \frac{2}{c(n)}$ .

Logo, para todo  $a < 0$  e algum  $b > 0$ , os fluxos  $g_i(t)$  estão definidos em  $(a, b)$  para  $i$  grande e

$$\sup_{\substack{x \in M, \\ t \in (a, b), \\ i}} |R(g_i(t))| \leq M < \infty,$$

$M = M(n) > 0$ . Escolha  $r \in (0, M^{-\frac{1}{2}})$ . Então,  $|R(g_i(0))| \leq r^{-2}$ . Convertendo para o fluxo original, temos  $|R(g(t_i))| \leq r^{-2}$ , se  $0 < r \leq \frac{1}{2(M|Rm|(p_i, t_i))^{-\frac{1}{2}}}$ . Pelo teorema 8.3.1 do Topping, para todo  $p \in M$ ,  $0 < r \leq \frac{1}{2(M|Rm|(p_i, t_i))^{-\frac{1}{2}}}$ , tem-se

$$\frac{\nu(p, r)}{r^n} > \xi > 0 \text{ no tempo } t = t_i,$$

onde  $\xi = \xi(n, g(0), T) > 0$ . Retornando ao fluxo rescalonado  $g_i(t)$ , temos

$$\frac{\nu(p, r)}{r^n} \geq \xi > 0 \text{ com respeito a } g_i(0)$$

para  $r \in (0, M^{-\frac{1}{2}}]$ .

Seja  $\bar{r} > 0$  como no Lema 8.4.1 do Topping e coloque  $r = \min\{M^{-\frac{1}{2}}, \bar{r}\} > 0$ . Por esse lema, temos

$$inj(M, g_i(0)) \geq \frac{r}{\eta} \frac{\nu(p, r)}{r^n} \geq \frac{r\xi}{\eta} > 0$$

para todo  $i$  grande.

Portanto pelo Teorema 4.2 nos permite passar para uma subsequência para dar a seguinte conclusão.

**Teorema 4.3** (*Blow up em uma singularidade*)

Seja  $M$  uma variedade fechada, e  $g(t)$  o fluxo de Ricci em um intervalo maximal  $[0, T)$  com  $T < \infty$ . Então existem seqüências  $p_i \in M$  e  $t_i \uparrow T$  com

$$|Rm|(p_i, t_i) = \sup_{\substack{x \in M \\ t \in [0, t_i]}} |Rm(x, t)| \longrightarrow \infty,$$

tal que, se

$$g_i(t) = |Rm|(p_i, t_i)g\left(t_i + \frac{t}{|Rm|(p_i, t_i)}\right),$$

existe  $b = b(n) > 0$ , o fluxo de Ricci completo  $(N, \widehat{g}(t))$  para  $t \in (-\infty, b)$ , e  $p_\infty \in N$  tal que

$$(M, g_i(t), p_i) \longrightarrow (N, \widehat{g}(t), p_\infty)$$

quando  $i \longrightarrow \infty$ . Além disso  $|Rm(\widehat{g}(0))|(p_\infty) = 1$ , e  $|Rm(\widehat{g}(t))| \leq 1$  para  $t \leq 0$ .

## Capítulo 5

# Variedades Tridimensionais com Curvatura de Ricci Positiva

### 5.1 Teorema de Hamilton

**Teorema 5.1** *Seja  $(M, g_0)$  é uma variedade Riemanniana de dimensão 3 com curvatura de Ricci positiva. Então o fluxo de Ricci  $g(t)$ , com  $g(0) = g_0$ , definido em um intervalo maximal  $[0, T)$  finito e existen*

- (a) *uma métrica  $\hat{g}$  sobre  $M$  de curvatura seccional positiva constante*
- (b) *uma seqüência  $t_i \uparrow T$*
- (c) *um ponto  $\hat{p} \in M$  e uma seqüência  $\{p_i\} \in M$  tal que se*

$$g_i(t) = |Rm|(p_i, t_i)g(t_i + \frac{t}{|Rm|(p_i, t_i)}), t \leq 0,$$

*então*

$$(M, g_i(t), p_i) \longrightarrow (M, (c - t)\hat{g}, \hat{p})$$

*sobre o intervalo  $(-\infty, 0]$  para algum  $c > 0$ .*

**Demonstração:**

A positividade do 2-tensor simétrico  $Ric(g_0)$  permite tomarmos  $0 < \beta \leq B < \infty$  tal que

$$\beta g_0 \leq Ric(g_0) \leq B g_0,$$

desde que  $M$  é compacta. Em particular,

$$R(g_0) \geq 3\beta > 0.$$

Aplicando o Teorema 3.2.1 do Topping, tenemos

$$R(g(t)) \geq \frac{3\beta}{1 - 2\beta t}$$

como  $\beta > 0$ , esta desigualdade implica que

$$T \leq \frac{1}{2\beta},$$

e, em particular,  $g(t)$  desenvolve singularidade.

Pelo Teorema 4.3, existem uma constante  $b > 0$ , seqüências  $p_i \in M$  e  $t_i \uparrow T$  tal que para o fluxo rescalonado  $g_i(t)$ , a seqüência  $(M, g_i(t), p_i)$  a  $(N, \hat{g}(t), \hat{p})$  sobre  $(-\infty, b)$

Pelo Teorema 9.7.8 do Topping aplicando a  $g(t)$ , encontramos para rodo  $\epsilon > 0$ , uma constante  $M(\epsilon, \beta, B)$  tal que

$$|\text{Ric}(g(t)) - \frac{1}{3}R(g(t))g(t)| \leq \epsilon R(g(t)) + M(\epsilon, \beta, B).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |\text{Ric}(g_i(0)) - \frac{1}{3}R(g_i(0))g_i(0)| &= \frac{1}{|\text{Rm}|(p_i, t_i)} |\text{Ric}(g(t_i)) - \frac{1}{3}R(g(t_i))g(t_i)| \\ &\leq \epsilon \frac{1}{|\text{Rm}|(p_i, t_i)} R(g(t_i)) + \frac{M(\epsilon, \beta, B)}{|\text{Rm}|(p_i, t_i)} \\ &= \epsilon R(g_i(0)) + \frac{M(\epsilon, \beta, B)}{|\text{Rm}|(p_i, t_i)}. \end{aligned}$$

Tomando  $i \rightarrow \infty$ , segue que

$$|\text{Ric}(\hat{g}(0)) - \frac{1}{3}R(\hat{g}(0))\hat{g}(0)| \leq \epsilon R(\hat{g}(0)),$$

$\forall \epsilon > 0$ , tal que

$$\text{Ric}(\hat{g}(0)) - \frac{1}{3}R(\hat{g}(0))\hat{g}(0) = 0$$

Tendo assim que  $(N, \hat{g}(0))$  é Einstein, portanto  $R(\hat{g}(0))$  é constante. Como  $N$  é tridimensional, segue então que  $\hat{g}(0)$  tem curvatura seccional constante. Por outro lado  $R(g_i(0)) > 0$  implica que  $R(\hat{g}(0)) \geq 0$ . Isto implica que a curvatura seccional de  $\hat{g}(0)$  é não-negativo. Como  $|\text{R}(\hat{g}(0))|(\hat{p}) = 1$ , se segue que essa curvatura seccional de  $\hat{g}(0)$  é positiva, tal que  $\text{Ric}(\hat{g}(0)) > 0$ . Pelo Teorema de Myer, segue que o diâmetro de  $N$  com respeito à  $\hat{g}(0)$  é limitado. Portanto,  $N$  é compacta. Isto implica que  $N$  é difeomorfa à  $M$ .

Como  $\hat{g}(t)$  é um fluxo de Ricci e  $\hat{g}(0)$  é Einstein; segue que  $\hat{g}(t) = (1 - 2\lambda t)\hat{g}(0) = (c - t)\hat{g}$  onde  $\hat{g}$  é algum múltiplo positivo de  $\hat{g}(0)$ .

**Corolário 5.1** *Qualquer variedade Riemanniana com curvatura de Ricci positiva de dimensão 3, admite uma métrica de curvatura seccional positiva constante. Em particular, se a variedade é simplesmente conexa, então a variedade é difeomorfa à esfera  $\mathbb{S}^3$*

# Apêndice

## Geometria Diferencial Fórmulas

1. Símbolos de Christoffel, para a conexão de Levi-Civita da métrica  $g_{ij}$  :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$$

2. Em coordenadas normais sobre o ponto  $p$  :

(a)  $\gamma_V(t) = (tV^1, tV^2, \dots, tV^n)$  é uma geodésica

(b)  $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$

(c)  $\Gamma_{ij}^k(p) = 0, \partial_i g_{jk}(p) = 0$

3. Derivada covariante:

$$\nabla_p F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = \partial_p F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} + \sum_{s=1}^l F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots q \dots j_l} \Gamma_{pq}^{j_s} - \sum_{s=1}^k F_{i_1 \dots q \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} \Gamma_{p i_s}^q \quad (5.1)$$

4. Tensor curvatura de Riemann:

$$[\nabla_i, \nabla_j]X^l \equiv R_{ijk}^l X^k$$

5. Simetrias do tensor curvatura de Riemann:

$$R_{ijkl} = R_{klij} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}$$

6. Primeira identidade de Bianchi:

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$$

7. Segunda identidade de Bianchi:

$$\nabla_p R_{ijkl} + \nabla_i R_{jpkl} + \nabla_j R_{pikl} = 0 \quad (5.2)$$

8. Curvatura escalar e Ricci:

$$R_{ij} \equiv R_{mjk}^m, R \equiv R_i^i$$

9. Contrainha a segunda identidade de Bianchi:

$$\nabla^j R_{ij} = \frac{1}{2} \nabla_i R$$

10. Comutação derivadas covariantes:

$$[\nabla_p, \nabla_q] F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = \sum_{s=1}^l R_{pqm}^{j_s} F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots m \dots j_l} - \sum_{s=1}^k R_{pq i_s}^m F_{i_1 \dots m \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} \quad (5.3)$$

11. Forma coordenar do tensor da curvatura de Riemann:

$$R_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^p \Gamma_{ip}^l - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{jp}^l$$

## O Princípio do máximo

**Teorema A1:** Seja  $(M, g(t))$  uma variedade fechada com uma métrica Riemanniana dependente do tempo  $G(t)$ . Suponhamos que  $u : M \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &\leq \Delta_{g(t)} u + \langle X(t), \nabla u \rangle + F(u) \\ u(x, 0) &\leq C \text{ para todo } x \in M, \end{aligned}$$

para alguma constante  $C$ , onde  $X(t)$  é um campo vectorial dependente do tempo em  $M$  e  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é localmente Lipschitz. Suponha-se que  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é solução da E.D.O associada:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= F(\phi) \\ \phi(0) &= C. \end{aligned}$$

Então

$$u(x, t) \leq \phi(t)$$

para todo  $x \in M$  e  $t \in [0, T]$  tal que  $\phi(t)$  existe.

**Teorema 3.2.1** (do Topping):

Suponha que  $g(t)$  é um fluxo de Ricci em uma variedade fechada  $M$ , para  $t \in [0, T]$ . Se  $R \geq \alpha \in \mathbb{R}$  no momento  $t = 0$ , então para todos os tempos  $t \in [0, T]$ ,

$$R \geq \frac{\alpha}{1 - \left(\frac{2\alpha}{n}\right)t}.$$

**Teorema 3.2.11** (do Topping):

Suponha que  $g(t)$  é um fluxo de Ricci em uma variedade fechada  $M$ , para  $t \in [0, T]$ , e que para  $t = 0$  temos  $|Rm| \leq M$ . Então para todo  $t \in (0, T]$ ,

$$|Rm| \leq \frac{M}{1 - \frac{1}{2}CMt},$$

onde  $C$  é uma constante resultante do Corolário (3.1).

**Teorema 8.3.1** (do Topping):

Suponha que  $g(t)$  é um fluxo de Ricci em uma variedade fechada  $M$ , para  $t \in [0, T]$ . Trabalhando com respeito à métrica  $g(T)$ , se  $p \in M$ , e  $r > 0$  é suficientemente pequeno para que  $|R| \leq r^{-2}$  em  $B(p, r)$ , então

$$\mathcal{K}(p, r) := \frac{\mathcal{V}(p, r)}{r^n} > \xi$$

para algum  $\xi > 0$  dependendo de  $n$ ,  $g(0)$ , e os limites superiores para  $r$  e  $T$ .

**Lema 8.4.1** (do Topping):

Existem  $\bar{r} > 0$  e  $\eta > 0$  dependendo da dimensão  $n$  tal que se  $(M^n, g)$  é uma variedade Riemanniana fechada satisfazendo  $|Rm| \leq 1$ , então existe  $p \in M$  tal que

$$\frac{\mathcal{V}(p, r)}{r^n} \leq \frac{\eta}{r} \text{inj}(M),$$

para todo  $r \in (0, \bar{r}]$ .

**Teorema 9.7.8** (do Topping):

Para quaisquer  $0 < \beta < B < \infty$  e  $\gamma > 0$  (pequeno) existe  $M = M(\beta, B, \gamma) < \infty$  tal que sempre que  $g(t)$  é um fluxo de Ricci em uma variedade tridimensional fechada, para  $t \in [0, T]$ , com  $\beta g(0) \leq Ric(g(0)) \leq Bg(0)$ , temos

$$\left| Ric - \frac{1}{3}Rg \right| \leq \gamma R + M,$$

para todo  $t \in [0, T]$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] Peter Topping. “*Lectures on the Ricci Flow*”. L.M.S. Lecture note Series 325 C.P.U., 2006.
- [2] B. Chow and D. Knopf. “*The Ricci Flow: An Introduction*”. American Mathematical Society, 2004.
- [3] N. Sheridan “*Hamilton’s Ricci Flow*”. Honours Thesis, November 2006.
- [4] B. Andrews and C. Hopper. “*The Ricci Flow in Riemannian Geometry*”. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011.
- [5] S.S. Chern, W.H. Chen, and K.S. Lam. “*Lectures on Differential Geometry*”. World Scientific, 2000.
- [6] John Milnor and James Stasheff. “*Characteristic Classes*”. Princeton University Press, 1974.
- [7] John M. Lee. “*Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*”. Springer-Verlag, 1997.
- [8] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. “*Riemannian Geometry*”. Springer-Verlag, 1987.
- [9] Richard Hamilton. “*Three-manifolds with positive Ricci curvature*”. J. Diff. Geo. 17:255-306, 1982.
- [10] James R. Munkres. “*Topology, 2nd Ed*”. Prentice Hall, 2000
- [11] R. S. HAMILTON, “*A compactness property for solutions of the Ricci flow*”. Amer. J. Math. 117 (1995) 545-572.

- [12] John W. Morgan and Gang Tian. “*Ricci flow and the Poincaré conjecture*” 2006.
- [13] Michael Spivak. “*A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*”. Publish or Perish, 1979.
- [14] Noel J. Hicks. “*Notes on Differential Geometry*”. Van Nostrand, 1965.
- [15] J. Cheeger and D. Ebin. “*Comparison theorems in Riemannian Manifolds*”. North-Holland, 1975.