UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MONOGRAFIA

INDETERMINAÇÕES NO CÁLCULO

Aluna: Rogele Passos Marinho David Sousa

Orientador: Prof. Paulo Antônio Fonseca Machado

18 de Março de 2014

AGRADEDIMENTOS

Agradeço a Deus, sempre, todos os dias, pela vida e pela oportunidade de vivê-la!

Aos meus pais não tenho palavras para descrever a imensa gratidão que sinto. Obrigada pelo carinho, apoio e incentivo!

Agradeço aos meus filhos que souberam ingenuamente compreender minha ausência e me apoiaram com belos sorrisos e olhares de admiração. Vocês são a minha fonte de inspiração... Vocês são minha vida!

Agradeço ao Professor Paulo, que soube conduzir com sabedoria esse trabalho.

E de modo geral, a todos que me acompanharam nessa conquista. Meu marido, meus irmãos, sobrinhos, parentes e amigos.

Muito obrigada!!

RESUMO

Nesse trabalho iremos estudar as formas indeterminadas do Cálculo. Formas do tipos $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty - \infty$, dentre outras.
A princípio essas formas serão analisadas e resolvidas através de cálculos, técnicas, estratégias algébricas e análises de gráficos.

Em seguida iremos estudar a Regra de L´Hopital e constatar formas de resolvê-las.

Sumário:

1 – Um breve histórico do Cálculo

O cálculo é uma das descobertas supremas do pensamento humano. No cálculo combinam-se e interligam-se ideias geométricas com ideias analíticas, construindo-se instrumentos poderosos para a resolução e interpretação de problemas e fenômenos.

A resolução de determinados problemas, que só foi possível com a criação do cálculo, veio aumentar de uma forma significativa o poder da Matemática.

Na Antiguidade foram introduzidas algumas ideias do cálculo integral, embora não tenha havido um desenvolvimento dessas ideias de forma rigorosa e sistemática. A função básica do cálculo integral, calcular volumes e áreas, pode ser remontada ao Papiro Egípcio de Moscou (1850 A.C.), no qual um egípcio trabalhou o volume de um *frustum* piramidal. Eudoxo de Cnido, ou Eudoxus, (408-355 a.C.) usou o método da exaustão para calcular áreas e volumes. Arquimedes (287-212 a.C.) levou essa ideia além, inventando a heurística, que se aproxima do cálculo integral. Algumas idéias do Cálculo também em trabalhos do inicio do século dezessete por René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), John Wallis (1616-1703) e Isaac Barrow (1630-1677). Entretanto a descoberta do Cálculo é frequentemente atribuída a Sir Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) pois eles começaram a efetuar a generalização e unificação do assunto. Havia outros matemáticos do século dezessete e dezoito que contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo; alguns deles foram Jakob Bernoulli (1654-1705), Johann Bernoulli (1667-1748), Leonhard Euler (1707-1783) e Joseph Lagrange (1736-1813). No entanto, não foi antes do século dezenove que os processos do Cálculo receberam fundamentação sólida por parte de matemáticos como Bernhard Bolzano (1781-1848), Augustin L. Cauchy (1789-1857), Karl Weierstrass (1815-1897) e Richard Dedekind (1831-1916).

O Cálculo Diferencial e Integral desenvolveu-se numa integração íntima com vários ramos da Ciência – sobretudo a Física – desde os tempos de Galileu. Seus conceitos fundamentais, de uma extraordinária fertilidade e riqueza, levaram ao desenvolvimento de técnicas surpreendentes apropriadas, primeiro nos estudos de Mecânica e Astronomia no século dezoito, depois nas investigações dos fenômenos elétricos e magnéticos do século dezenove, culminando na mais perfeita adequação de Física moderna no século vinte.

O Cálculo é hoje instrumento de físicos e engenheiros, químicos e biólogos, estatísticos, economistas e cientistas sociais, penetrando os mais variados ramos da ciência e da tecnologia. Mas seus conceitos são profundos e sutis, por isso o Cálculo deve ser apresentado com um mínimo de formalismo, com apelo à intuição e aos problemas de Física e Geometria que lhe deram origem.

Nesse trabalho iremos concentrar os estudo nas formas indeterminadas, abordando o problema e em seguida exemplificando sempre que possível.

2 - **As Indeterminações**

Concentrando os estudo no Cálculo percebemos a indeterminação através do Quociente de Newton, na derivada de uma função.

Para definir a derivada de uma função num ponto x_0 de seu domínio, utilizamos o limite:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Suponha que se queira encontrar a derivada de uma função $f(x)$, em x. Se aumentamos x em uma quantidade pequena, Δx, pode-se calcular $f(x + \Delta x)$.

Uma aproximação da inclinação da tangente à curva é dada por $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$,

que é uma forma de dizer: a mudança de f dividida pela mudança em x. Quanto menor Δx ficar, melhor a aproximação será.

Matematicamente, se define a derivada como sendo o limite da razão acima quando Δx tende a zero.

Como a substituição simples de Δx por 0 resulta em divisão por zero, o numerador deve ser simplificado de tal forma que Δx possa ser fatorado e então cancelado com o denominador. A função resultante, $f'(x)$, é a derivada de $f(x)$.

Como em alguns momentos nos deparamos com o quociente onde tanto o numerador quanto o denominador são nulos nos encontramos diante de uma situação do que fazer?

Em diversos exemplos sobre o cálculo de limites nos defrontamos com situações desse tipo e "escapamos" delas através de manipulações algébricas. Não podemos esquecer que o limite do quociente é o quociente dos limites somente quando **os limites do numerador e do denominador existem, sendo o do denominador diferente de zero**.

Uma expressão da forma $\frac{0}{0}$ é denominada, muitas vezes, uma "indeterminação".

Essa denominação advém do fato que se um limite é dessa forma, **a priori**, não sabemos qual é o resultado... Pode ser qualquer um...

Vejamos:

$\lim_{x \to 0} \frac{2x}{2x} = 1$, se x $\neq 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0$, se x $\neq 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = 0$ que não existe, pois $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$ e $\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$

e, assim por diante. Podemos construir exemplos simples, dando qualquer resultado!

Devemos ficar atentos que a representação $\frac{0}{0}$ e outras a seguir é apenas simbólica e representa uma idéia.

Existem também outras formas "**indeterminadas**":

a) $\infty - \infty$;

b) $0.\infty$;

c) $\frac{\infty}{\infty}$;

d) 1^{∞};

e) 0^0;

f) ∞^0.

Então o que pensar a respeito de uma situação de indeterminação? Como resolver? As respostas para estes questionamentos estão nas analises que iremos fazer no decorrer do trabalho.

2.1 - Indeterminações $\frac{0}{0}$; $\frac{k}{0} (k \neq 0)$; 0^0:

Sabemos que o denominador de um número não pode ser zero, mas como lidar com situações, por exemplo, $\frac{x}{3x}$,$\frac{3x}{x}$ ou x^x quando x se aproxima de zero?

Sabe-se que se $\lim_{x \to a} f(x) = A$ e $\lim_{x \to a} g(x) = B$ então $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, desde que B ≠ 0. Por outro lado, se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ nada se pode garantir a respeito do limite do quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ quando x se aproxima de a. Dependendo das funções f e g que se escolham, pode se conseguir que o quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ tenha como limite qualquer valor c dado de antemão, ou mesmo que não tenda para limite algum. Por exemplo, se tomarmos f(x) = c(x-a) e g(x) = x – a então $\frac{f(x)}{g(x)} = c$ para todo x ≠ a, logo $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$, para todo *c*. Por esse motivo se diz que $\frac{0}{0}$ é uma expressão indeterminada.

Analogamente, dado a priori qualquer número real c > 0, podemos achar funções f, g tais que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, enquanto $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = c$. Basta, por exemplo, tomar f(x) = x e $g(x) = \frac{\log c}{\log x}$; isto faz com que $f(x)^{g(x)} = x^{\frac{\log c}{\log x}}$, pois sabendo que $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$ (através da mudança de base) então podemos dizer que $f(x)^{g(x)} = x^{\frac{\log c}{\log x}} = x^{\log_x c} = c$, para todo x > 0, logo $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = c$. Portanto, quando $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ então $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)}$ pode ter qualquer valor c, dado de antemão, desde que escolhamos convenientemente as funções f e g. Então também dizemos que 0^0 é uma expressão indeterminada.

A seguir estaremos escrevendo os símbolos $\frac{0}{0}$, $\frac{k}{0}$, 0^0 e outros apenas como uma notação simbólica para representar uma ideia, cientes que essa situação não é formal e não existe.

Abordando essa análise sobre uma nova ótica, temos que, de acordo com a definição de divisão, $\frac{a}{b} = c$ significa que $a = b.c$. Então vamos examinar algumas situações do quociente $\frac{0}{0}$ e $\frac{1}{0}$. Se escrevêssemos $\frac{0}{0} = x$ ou $\frac{1}{0} = y$, estas igualdades significariam que 0 = 0.x e 1 = 0.y. **Todo** número x é tal que 0.x = 0 e **nenhum** número y é tal que 0.y = 1. Por isso se diz que $\frac{0}{0}$ é uma expressão indeterminada e que $\frac{1}{0}$ é uma divisão impossível, ou seja, toda divisão do tipo $\frac{k}{0}$, com k ≠ 0 é impossível (tendo o limite no infinito).

Considerando o símbolo 0^0, vamos verificar que o expoente zero atende a fórmula $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, para a ≠ 0. Supondo $\frac{b}{b} = b^0$, logo $b^0 = 1$. No caso de b = 0 a igualdade tomaria a forma $\frac{0}{0} = 0^0$, o que leva a considerar 0^0 uma expressão indeterminada, como vimos anteriormente.

2.2 - Análise de alguns exemplos através de estimativas e observações

Vamos agora ver um caso onde será estimado o valor de $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$. Observe que a função $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ não está definida para x = 1, mas de acordo com a definição de $\lim_{x \to a} f(x)$ diz que devemos considerar valores de x que estão próximos de ***a***, mas não iguais a ***a*.**

As tabelas dão os valores de f(x) (corretos até a sexta casa decimal) para os valores de x que tendem a 1 (mas não são iguais a 1).

x < 1	f(x)
0,5	0,666667
0,9	0,526316
0,99	0,502513
0,999	0,500250
0,9999	0,500025

x > 1	f(x)
1,5	0,400000
1,1	0,476190
1,01	0,497512
1,001	0,499750
1,0001	0,499975

Com base nesses valores podemos conjecturar que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0{,}5$$

Algebricamente podemos perceber que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

Também podemos perceber que $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0{,}5$ através da análise do gráfico a seguir. (Figura 1)

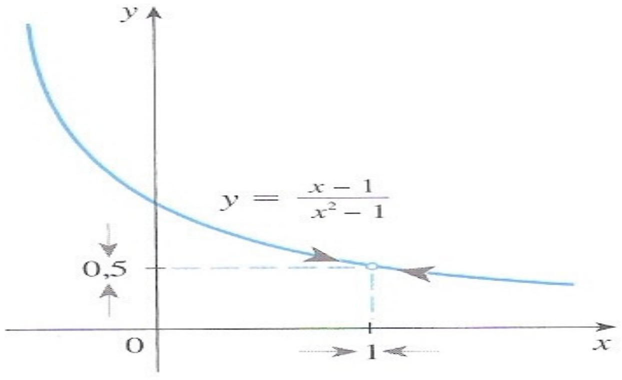

Figura 1

No próximo exemplo vamos analisar o $\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{\pi}{x}\right)$. Percebemos que esta não é uma forma indeterminada, mas esse exemplo nos mostra que algumas vezes as estimativas nos induzem a erros.

Mais uma vez a função $f(x) = sen\left(\frac{\pi}{x}\right)$ não está definida em x = 0. Calculando a função para alguns valores pequenos de x, temos:

$f(1) = sen\pi = 0$ $\qquad$ $f(\frac{1}{2}) = sen2\pi = 0$

$f(\frac{1}{3}) = sen3\pi = 0$ $\qquad$ $f(\frac{1}{4}) = sen4\pi = 0$

$f(0{,}1) = sen10\pi = 0$ $\qquad$ $f(0{,}01) = sen100\pi = 0$

Da mesma forma, f(0,001) = f(0,0001) = 0. Com base nessas informações ficaríamos tentados a conjecturar que

$$\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$$

Dessa vez, no entanto, nossa conjectura está errada. Ao analisar o gráfico da função (Figura 2) percebemos que as curvas tracejadas perto do eixo y indicam que os valores de $sen\left(\frac{\pi}{x}\right)$ oscilam entre -1 e 1 infinitas vezes quanto x tende a 0. Uma vez que os valores de f(x) não tendem a um número fixo quando x tende a 0, podemos concluir que $\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{\pi}{x}\right)$ não existe.

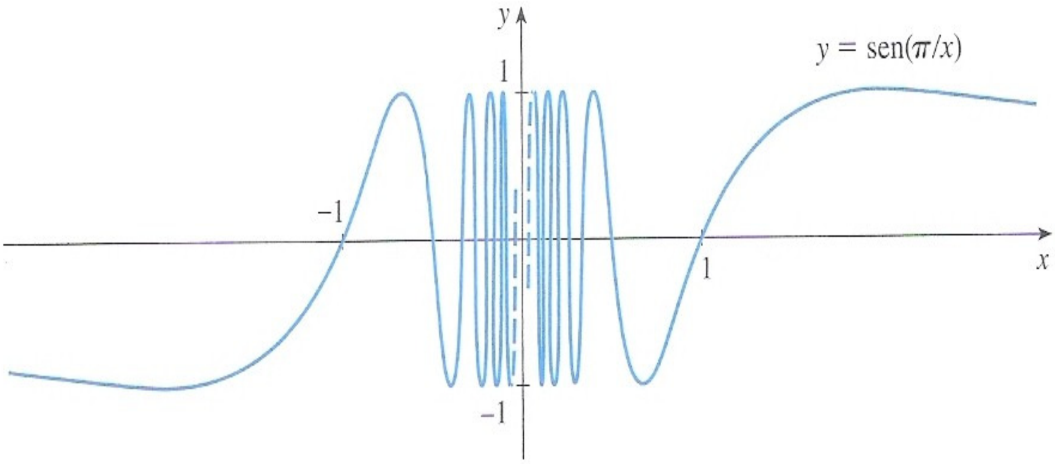

Figura 2

Vamos agora analisar o caso em que f(x) = x^2 e g(x) = x. Ainda que ambas as funções tendam a zero com x → 0, mas de maneira diferente; à medida que x se aproxima de zero, g(x) vai se tornando infinitamente grande em comparação com f(x), ou, o que é o mesmo, f(x) torna-se infinitamente pequena em comparação com g(x). Percebemos esse comportamento no gráfico da Figura 3.

Logo:

$\lim_{x\to 0+} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$ e $\lim_{x\to 0-} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

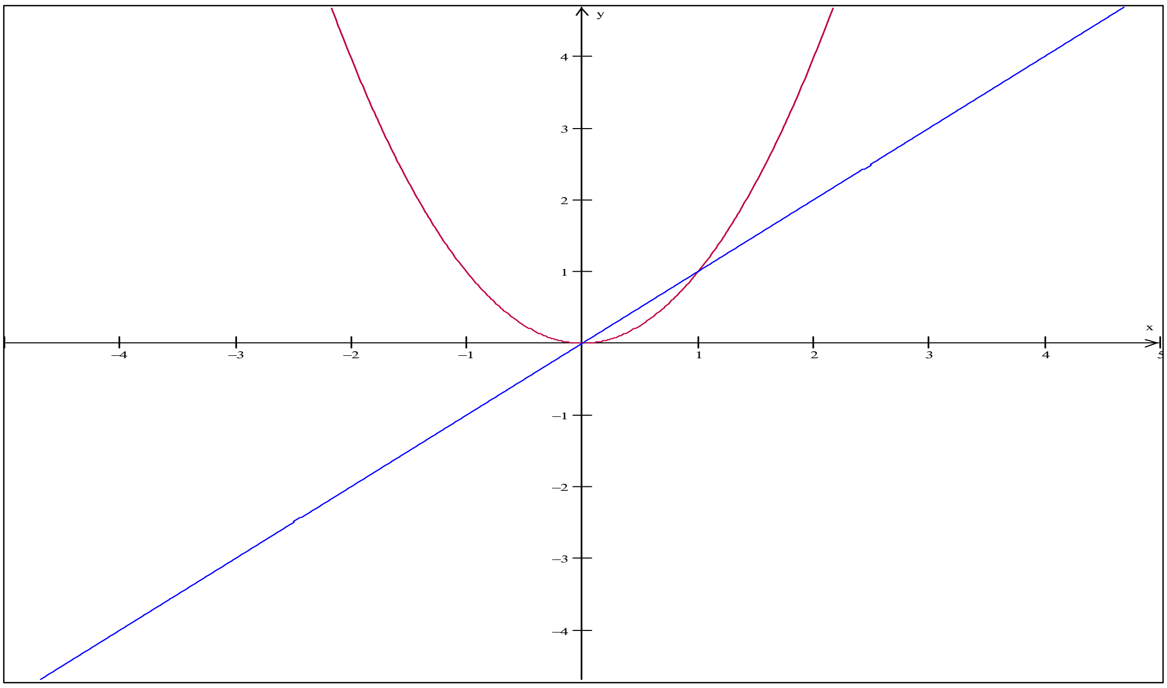

Figura 3

Ao analisar que $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$, também podemos perceber esse comportamento através do gráfico da Figura 4.

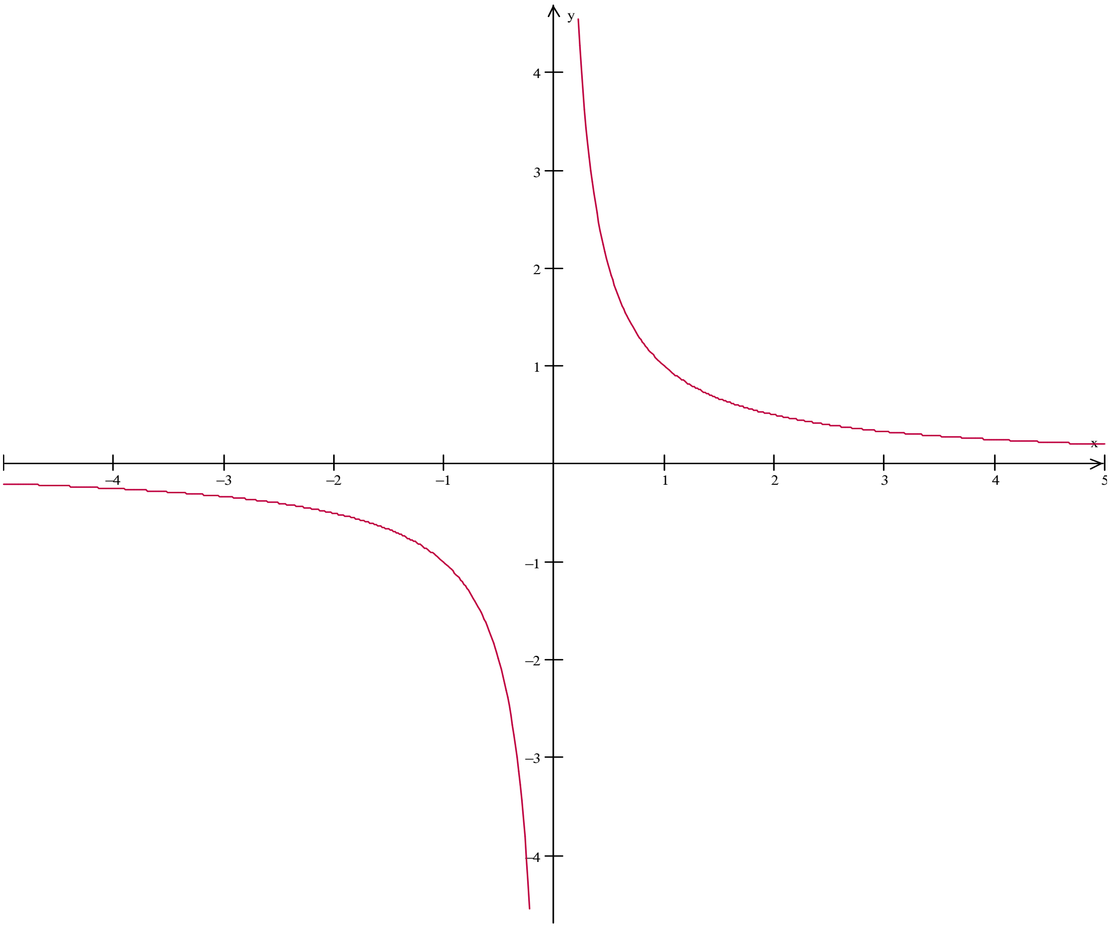

Figura 4

3 – Casos particulares onde $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} f(x) = k$, quando k é uma constante diferente de zero.

De acordo com as propriedades do limite, sabemos que o limite de um quociente é o quociente dos limites (desde que o limite do denominador não seja zero)

Essa propriedade, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ se g(x) ≠ 0, será muito explorada e analisada nos estudos que se seguem, visto que uma das principais indeterminações está associada a um quociente $\left(\frac{0}{0}\right)$.

A todo o momento percebemos nas definições a observação de g(x) ≠ 0, ou seja, denominador diferente de zero. Mas o que acontece se o denominador for igual a zero?

Vamos analisar o exemplo a seguir:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x}{x-1}$$

$\lim_{x\to 1^-} 2x = 2$ e $\lim_{x\to 1^-}(x-1) = 0$

Queremos determinar se temos $+\infty$ ou $-\infty$. Como x → 1^-, vamos tomar um valor de x próximo e menor que 1; por exemplo, seja x = 0,9.

Então:

$$\frac{2x}{x-1}=\frac{2(0{,}9)}{0{,}9-1}\Leftrightarrow\frac{2x}{x-1}=-18$$

O quociente negativo nos leva a suspeitar que

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x}{x-1}=-\infty$$

Quando x → 1^-, x – 1 está tendendo a zero por valores negativos.

Para x → 1^+, vamos tomar x = 1,1. Então

$$\frac{2x}{x-1}=\frac{2(1{,}1)}{1{,}1-1}\Leftrightarrow\frac{2x}{x-1}=22$$

Como o quociente é positivo, suspeitamos que

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x}{x-1}=+\infty$$

Quando x → 1^+, x – 1 está tendendo a zero por valores positivos.

Podemos perceber esses resultados através do gráfico da função $f(x)=\frac{2x}{x-1}$, na Figura 5.

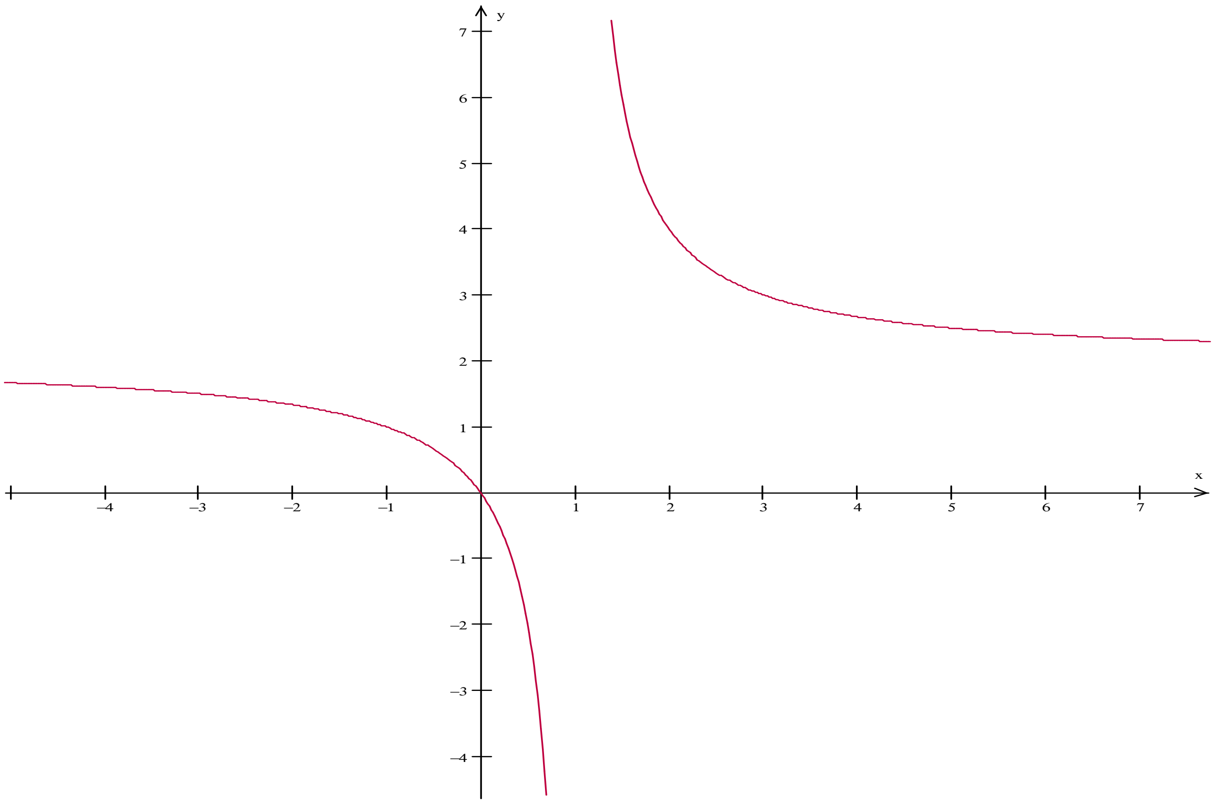

Figura 5

Existe um teorema que pode ser aplicado se $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} f(x) = k$, onde k é uma constante diferente de zero.

Teorema:

Se a for um número real qualquer e se $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ *e* $\lim_{x \to a} f(x) = k$ *onde k é uma constate não nula, então*

(i) *Se k > 0 e se g(x) → 0 por valores positivos de g(x),*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

(ii) *Se k > 0 e se g(x) → 0 por valores negativos de g(x),*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

(iii) *Se k < 0 e se g(x) → 0 por valores positivos de g(x),*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

(iv) *Se k < 0 e se g(x) → 0 por valores negativos de g(x),*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$$

O teorema será válido se " x → a" for substituído por "x → a⁺" ou "x → a⁻"

Aplicando esse teorema, podemos frequentemente obter uma indicação de que o resultado será $+\infty$ ou $-\infty$, tomando um *valor adequado* de x próximo de a para nos assegurarmos de que o quociente é positivo ou negativo.

Mas às vezes, quando vamos calcular um limite, o desenvolvimento da conta resulta em uma fração do tipo zero sobre zero ou infinito sobre infinito. É importante entender que, quando isso acontece, não estamos diante da resposta final, mas, sim, de uma situação conflitante, geralmente causada porque o denominador cresce indefinidamente e o numerador decresce ou porque numerador e denominador possuem termos em comum. Neste caso, precisamos de nos utilizar de artifícios para obter a resposta correta.

4 – Formas indeterminadas $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0.\infty,\infty-\infty$.

4.1 - Forma do tipo $\frac{0}{0}$

Se f e g forem duas funções tais que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, então a função f / g tem a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ em a. Essas situações acontecem frequentemente, principalmente ao calcularmos derivadas através da definição, então se torna extremamente necessário o uso de técnicas para calculá-los.

1) $\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-9}{h}$, se usarmos uma simplificação algébrica encontraremos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-9}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(9+6h+h^2)-9}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+6h}{h}=\lim_{h\to 0}(h+6)=6$$

2) $\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$, não podemos usar a propriedade do quociente de imediato, uma vez que o limite do denominador é zero. Aqui as operações algébricas preliminares consistem em racionalizar o numerador.

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{(\sqrt{t^2+9}-3)}{t^2}.\frac{(\sqrt{t^2+9}+3)}{\sqrt{t^2+9}+3}=\lim_{t\to 0}\frac{(t^2+9)-9}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{t^2+9}+3}=\frac{1}{6}$$

3) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 - 3x - 4}$

Aqui, $\lim\limits_{x \to 4} x^2 - x - 12 = 0$ e $\lim\limits_{x \to 4} x^2 - 3x - 4 = 0$. Entretanto, o numerador e o denominador podem ser fatorados, resultando em

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 3x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)(x+3)}{(x-4)(x+1)} = \lim_{x \to 4} \frac{x+3}{x+1} = \frac{7}{5}$$

4) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{1+h} - 1}{h}$. Podemos perceber que essa situação será resolvida se multiplicarmos o numerador e denominador pelo conjugado $\left(\sqrt{1+h} + 1\right)$, logo,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{1+h} - 1\right)\left(\sqrt{1+h} + 1\right)}{h\left(\sqrt{1+h} + 1\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{1+h} + 1\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1} = \frac{1}{2}$$

5) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{2}$

6) $\lim\limits_{t \to \frac{1}{2}} \dfrac{2t^2 + t - 1}{6t^2 - 13t + 5} = \lim\limits_{t \to \frac{1}{2}} \dfrac{2(t - \frac{1}{2})(t+1)}{6(t - \frac{1}{2})(t - \frac{5}{3})} = \lim\limits_{t \to \frac{1}{2}} \dfrac{t+1}{3t-5} = \dfrac{-3}{7}$

7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^4}{2x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{2} = 0$

8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$

9) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$. Utilizando a fórmula do arco metade $\cos x = 1 - sen\left(\dfrac{x}{2}\right)$, temos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} - \frac{2sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$$. (Substituindo $\theta = \dfrac{x}{2}$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}-\frac{2sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=-\lim_{\theta\to 0}\frac{sen\theta}{\theta}sen\theta\ ;$$

O limite de $\frac{sen\theta}{\theta}$ não é tão óbvio, a seguir com base em evidências numérica e gráfica será demonstrado que $\boxed{\lim_{\theta\to 0}\frac{sen\theta}{\theta}=1}$.

Logo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}-\frac{2sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=-\lim_{\theta\to 0}\frac{sen\theta}{\theta}sen\theta=-(1).(0)=0$$

4.1.1 - Função Trigonométrica Seno

No cálculo da derivada da função seno, aparece a indeterminação do tipo $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}$, como está sendo estudado a seguir.

Considerando a função f(x) = senx, de acordo com definição de derivada temos:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)-senx}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{senx.\cosh+\cos x.senh-senx}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{senx.\cosh-senx}{h}+\frac{\cos x.senh}{h}\right]=\lim_{h\to 0}\left[senx.\left(\frac{\cosh-1}{h}\right)+\cos x.\left(\frac{senh}{h}\right)\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}senx.\lim_{h\to 0}\frac{\cosh-1}{h}+\lim_{h\to 0}\cos x.\lim_{h\to 0}\frac{senh}{h}$$

Dois desses limites são fáceis de calcular. Uma vez que consideramos x uma constante quando calculamos um limite quando h→0, temos

$$\lim_{h\to 0}senx=senx \qquad \text{e} \qquad \lim_{h\to 0}\cos x=\cos x$$

Já o limite de $\frac{senh}{h}$ não é tão óbvio, e com base em evidências numérica e gráfica será demonstrado que

$$\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1 .$$

Então considerando $\lim_{h \to 0} \frac{senh}{h} = 1$ temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} senx . \lim_{h \to 0} \frac{\cosh - 1}{h} + \lim_{h \to 0} \cos x . \lim_{h \to 0} \frac{senh}{h} = (senx).0 + (\cos x).1 = \cos x$$

Podemos perceber que a derivada da função senx é igual a cosx, mas para que essa demonstração fosse possível tivemos que considerar que $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$

Fazendo uma análise a respeito desse limite, percebemos que, quando x tende a zero, sen x também tende a zero, de forma que não sabemos, de imediato, o valor do limite. Considerando f(x) = $\frac{senx}{x}$ e sabendo que é uma função par, basta estudar o seu limite com x → 0+; o limite pela esquerda terá o mesmo valor.

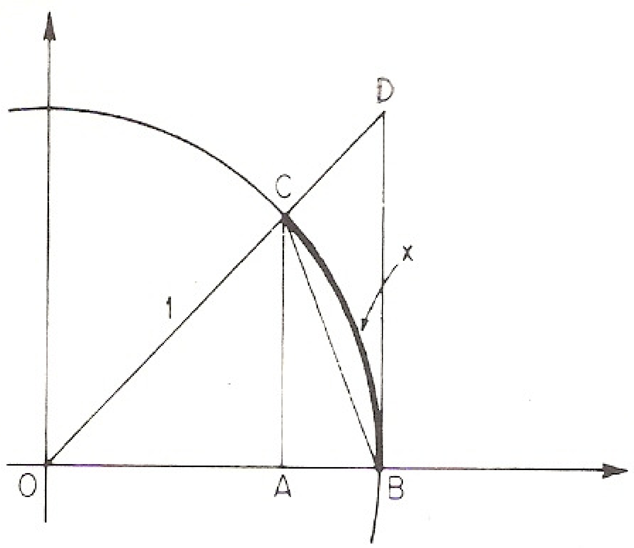

Figura 6

De acordo com a Figura 6, podemos considerar x entre o e $\frac{\pi}{2}$ de acordo com a figura. A área do triângulo 0BC é menor que a área do setor circular 0BC, a qual é menor que a área do triângulo 0BD, isto é,

$$\frac{0B.AC}{2} < \frac{x.0B}{2} < \frac{0B.BD}{2}$$

Tomando o raio 0B = 1, teremos:

0A = cos x;   AC = sen x; $BD = \frac{BD}{0B} = \frac{AC}{0A} = \frac{senx}{\cos x}$

Portanto essas desigualdades nos dão

$$senx < x < \frac{senx}{\cos x}$$

Dividindo por sen x, teremos

$$1 < \frac{x}{senx} < \frac{1}{\cos x}$$

Invertendo os três membros dessa desigualdade, elas mudarão de sentido:

$$1 > \frac{senx}{x} > \cos x$$

Como cos x → 1 com x → 0, e aplicando o Teorema do Confronto, o membro do meio também deve tender para o valor 1, isto é, $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$

É interessante interpretar esse resultado, geometricamente, analisando os gráficos das funções f(x) = senx e g(x) = x, na Figura 7.

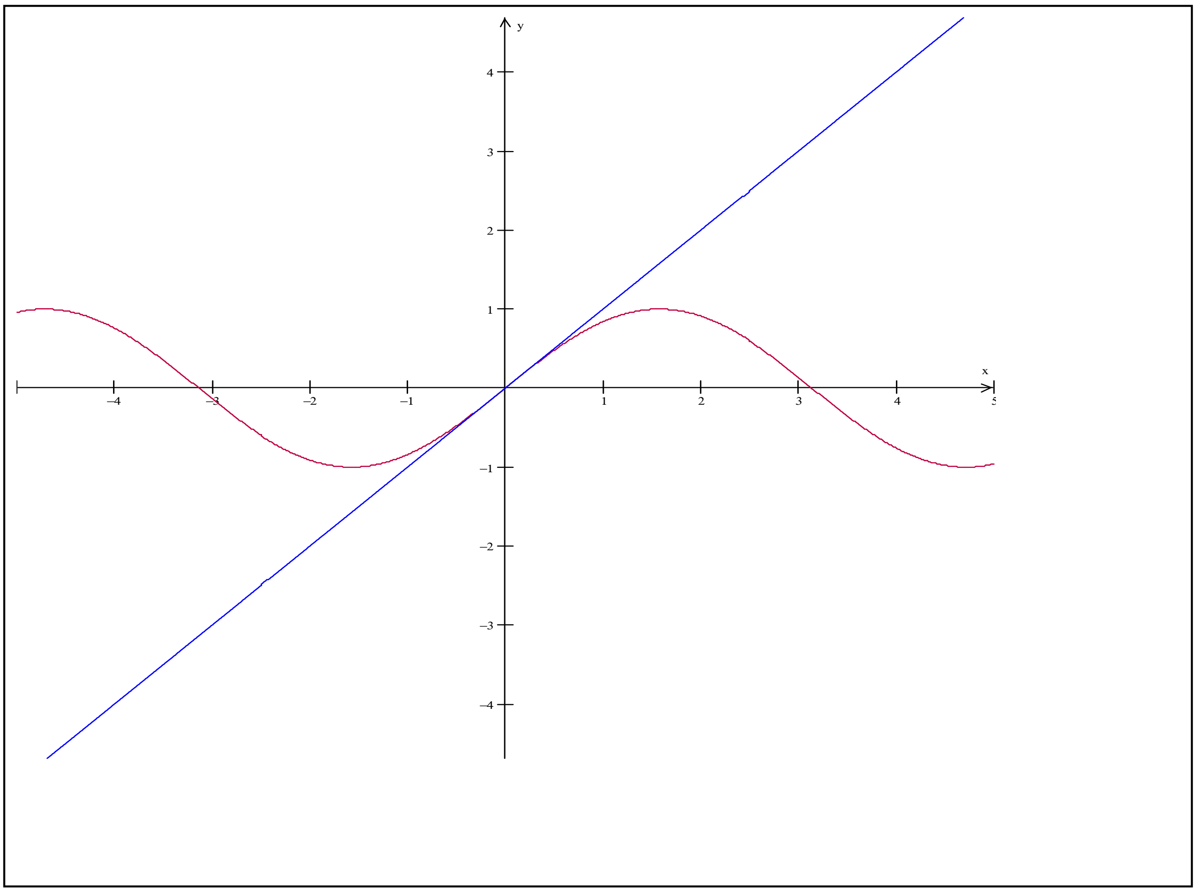

Figura 7

A reta y = x é tangente ao gráfico de y = senx na origem, de forma que, à medida que x → 0, as ordenadas dos dois gráficos tendem a se confundir, embora ambas tendam a zero. Isso explica por que o quociente tem limite 1.

Esse resultado se torna mais fácil de ser percebido através da análise do gráfico (Figura 8) da função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{senx}{x}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$ representado a seguir:

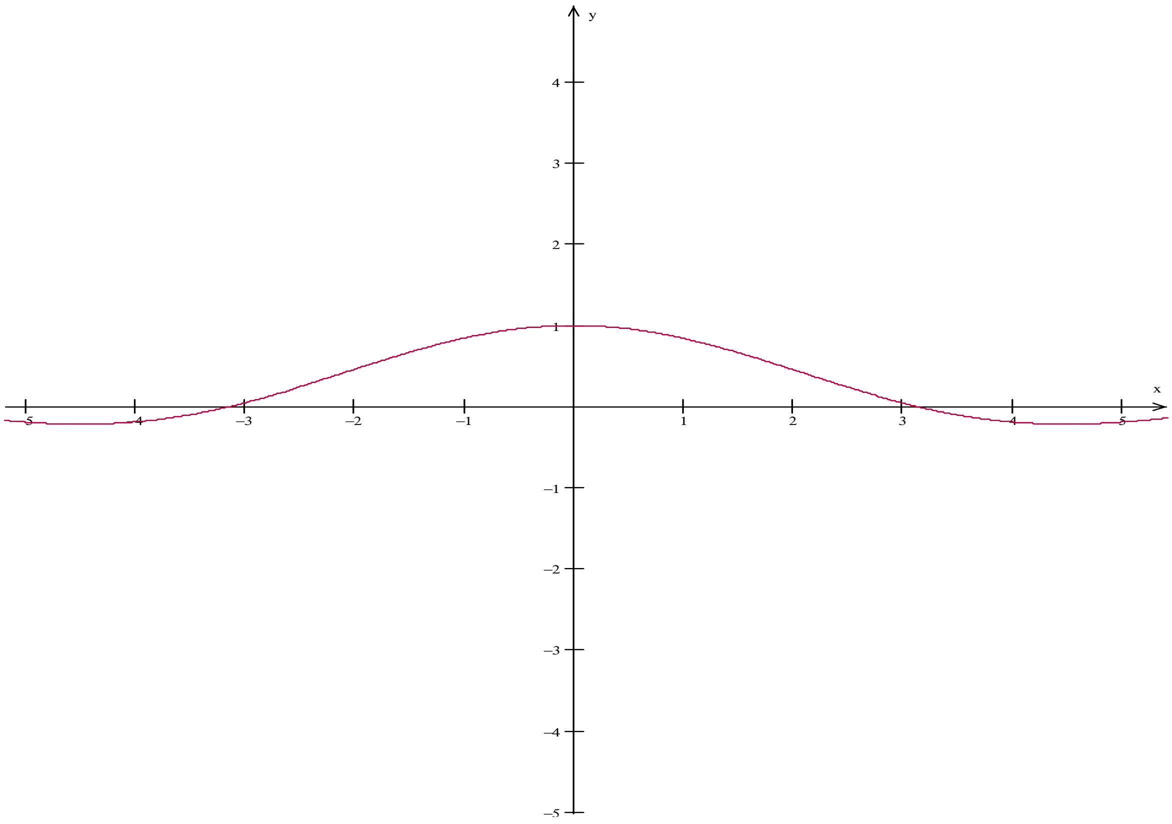

Figura 8

4.2- Forma do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$

Observe que a indeterminação da forma $\dfrac{\infty}{\infty}$ pode ser entendida como $\dfrac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}}$, ou seja, podendo ser reduzida a forma $\dfrac{0}{0}$.

Outra situação de indeterminação ocorre quando lidamos com quociente de dois polinômios com $x \to \pm\infty$. Por exemplo, no caso da função

$$\frac{8x^2 - 3}{2x^2 + 5x - 7}$$

Dividimos o numerador e o denominador por x^2 e notamos que $3/x^2$. $5/x^2$ e $7/x^2$ tendem a zero quando $x \to \infty$.

Logo

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8x^2-3}{2x^2+5x-7}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8-3/x^2}{2+5/x-7/x^2}=\frac{8}{2}=4$$

De maneira análoga, temos:

1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{x^3-4x^2-7}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3-5/x+1/x^2}{x+4-7/x^2}=0$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2}{x^3-3x+9}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2/x^3}{1-3/x^2+9/x^3}=\infty$

3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^3-5x^2+4}{3x^3+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2-5/x+4/x^3}{3+1/x^3}=\dfrac{2}{3}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2-x}{x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x-1}{1+2/x}=-\infty$

Esses limites são chamados *formas indeterminadas do tipo* $\frac{\infty}{\infty}$**.** Como podemos perceber, para calcular o valor do limite, em cada caso, dividimos os polinômios – numerador e denominador – pela mesma potência de x – aquela cujo expoente é o grau mais baixo, entre os graus do numerador e denominador.

Observamos que o comportamento de um polinômio no infinito é ditado pelo termo de mais alto grau, chamado o *termo dominante*. Por exemplo, no polinômio

$$5x^4+2x^3-4x^2+3$$

$5x^4$ domina todos os outros termos quando $x \to \infty$. Basta notar que ele tende a infinito mais rapidamente que $2x^3$, visto que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4}{2x^3}=\frac{5x}{2}\to\infty$$

Do mesmo modo, $2x^3$ domina $-4x^2$, que domina o termo constante 3. Em vista disso, o valor do limite do quociente de dois polinômios é determinado pelos termos dominantes. A situação é análoga em outros casos. Por exemplo,

5) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^2 - x\cos x}{5x^2 + xsenx} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{3-\dfrac{\cos x}{x}}{5+\dfrac{senx}{x}} = \dfrac{3}{5}$

6) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{5x^2\sqrt{x^2-1}-10}{4x^2-5} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{5\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-\frac{10}{x^2}}{4-\frac{5}{x^2}} = \dfrac{5}{4}$

7) Quando consideramos o comportamento de um polinômio, para x → 0, a importância de seus termos se manifesta na ordem inversa daquela para x → ∞. Assim, no polinômio

$$3x^4 - 2x^3 + 7x + 10,$$

O termo constante 10 domina 7x quando x → 0 pois

$$\lim_{x\to 0\pm}\frac{10}{7x} = \pm\infty$$

7x domina $2x^3$ que domina $3x^4$; 10 é então, o termo dominante do polinômio quando x → 0.

Voltando ao exemplo inicial $\dfrac{8x^2-3}{2x^2+5x-7}$ podemos perceber que a forma $\dfrac{\infty}{\infty}$ pode se reduzir a forma $\dfrac{0}{0}$ pois se considerarmos essa função escrita na forma $\dfrac{\dfrac{1}{2x^2+5x-7}}{\dfrac{1}{8x^2-3}}$ quando $x\to\pm\infty$ temos a indeterminação $\dfrac{0}{0}$ para esse mesmo exemplo. Isso também ocorre para os demais exemplos.

Agora vamos analisar o seguinte exemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}$$

Vamos observar o gráfico da função, na Figura 9, $y=\dfrac{e^x}{x^2}$ e verificar que x tende para o infinito.

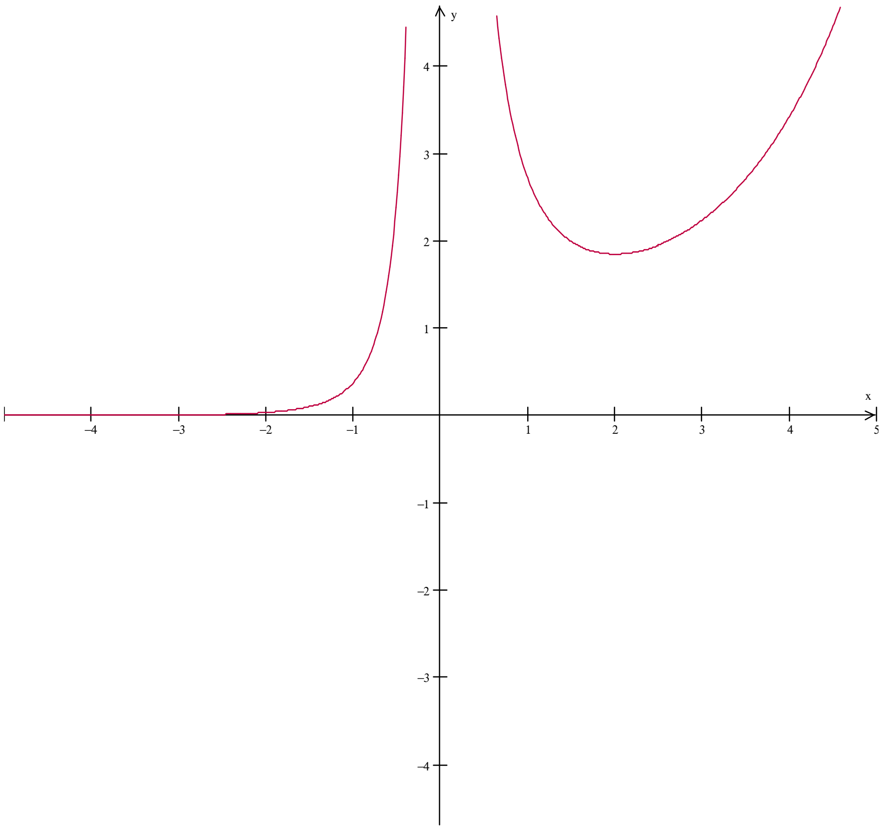

Figura 9

Notamos que a função exponencial cresce muito mais rapidamente que a função potência, logo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty$$

4.3- Forma do tipo $0.\infty$

Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ ou $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ (ou - ∞), verifique que esta forma também pode ser representada por $\infty.0 = \infty.\frac{1}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$, visto que $\frac{1}{\infty} = 0$

Então não está claro qual será o valor de $\lim_{x\to a} f(x).g(x)$, se houver algum. Dizemos que o produto f(x) . g(x) está associado a forma de indeterminação ∞.0 em a. Há uma disputa entre f e g, podendo a resposta ser 0 ou ∞ dependendo da que vencer. Pode também ocorrer um equilíbrio, nesse caso a resposta será um número finito diferente de zero. Podemos trabalhar com o produto f.g através de um quociente, convertendo o limite dado na forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemplos:

1) $\lim\limits_{x\to 0} x.\dfrac{1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

Obs: Devemos ficar atentos, pois de acordo com o domínio da função a mesma não está definida para x igual a zero, ou seja, zero não está no domínio da função.

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

O limite dado é indeterminado, pois, quando x tende a zero , lnx tende a - ∞.

O gráfico a seguir representa a função y = x. lnx, devemos observar que a função não está definida para x = 0, pois de acordo com o domínio da função devemos ter sempre o logaritmando x > 0

Logo o gráfico da Figura 10 nunca atinge a origem .

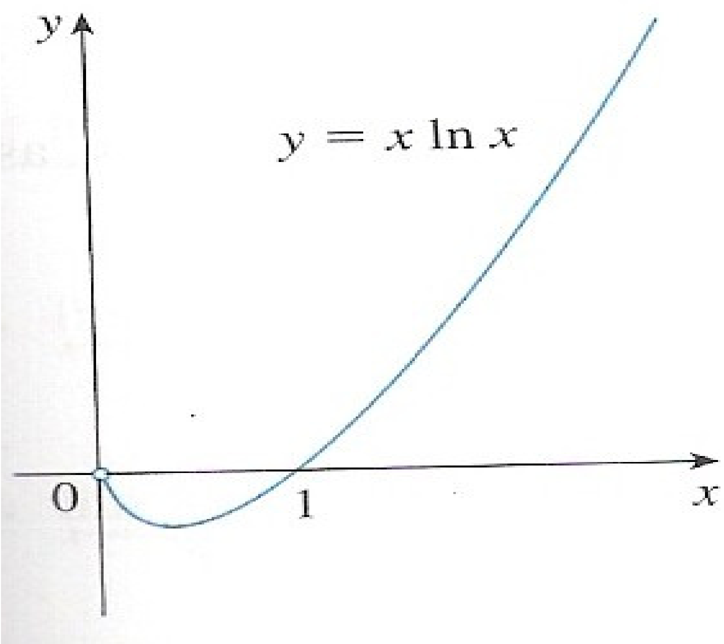

Figura 10

De acordo com o gráfico da Figura 10, podemos perceber que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$

4.4 - Forma do tipo $\infty - \infty$

Podemos entender $\infty - \infty$ da seguinte forma:

$$\infty - \infty = \infty(1-1) = \infty.0 = \infty.\frac{1}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$$

Então mais uma vez temos a indeterminação na forma $\frac{0}{0}$.

Outro tipo de indeterminação acontece quando ocorre uma diferença f – g quando as duas funções tendem ao infinito. Para darmos um exemplo bem simples dessa situação sejam $f(x) = k + \frac{1}{x^2}$ e $g(x) = \frac{1}{x^2}$, onde k é uma constante arbitrária. Logo

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = \infty$ e $\lim_{x \to 0} [f(x) - g(x)] = k$

Esse exemplo nos mostra que é possível obter como limite de formas do tipo ∞ - ∞, qualquer número k. Mas o limite também pode ser infinito.

Como já vimos anteriormente, se $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, então o limite $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)]$ é chamado **forma indeterminada do tipo ∞ - ∞**. Novamente há uma disputa entre as funções f e g. Será a resposta ∞, ou será -∞, ou então um número finito?

Para descobrir, tentamos converter a diferença em um quociente – usando um denominador comum ou racionalização, ou colocando em evidência um fator comum de maneira a termos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemplos:

1) $\lim_{x \to \pm\infty} (7x^4 - 5x^2) = \lim_{x \to \pm\infty} x^2(7x^2 - 5) = \infty$

2) $\lim_{x \to \pm\infty} [(5x^3 - 2x^2 + 7) - (4x^4 + 7x^2 - 1] = \lim_{x \to \pm\infty} x^4(-4 + \frac{5}{x} - \frac{9}{x^2} + \frac{8}{x^4}) = -\infty$

3) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}(1 - x) = \infty$

4) $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x}) = \lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x+a} - \sqrt{x}).(\sqrt{x+a} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{a}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} = 0$

Como percebemos alguns casos de indeterminações foram resolvidos através de observações dos comportamentos dos termos ou através do uso de técnicas matemáticas, mas será que existe alguma outra forma de resolver casos de indeterminação? Sim!

Existe um método sistemático, conhecido como *Regra de L'Hôpital*, para cálculo de formas indeterminadas do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ que iremos estudar a seguir.

5 - Regra de L´Hôpital

A Regra de L' Hôpital foi publicada pela primeira vez em 1696, no livro *Analyse des Infiniment Petits*, do marquês de L' Hôpital, mas na verdade ela foi descoberta em 1694 pelo matemático suíço John (Johann) Bernoulli. A explicação para esse fato é que esses dois matemáticos fizeram um curioso acordo, que dava ao marquês de L'Hôpital os direitos das descobertas de Bernoulli. Os detalhes desse acordo, inclusive a tradução da carta de L' Hôpital para Bernoulli propondo o arranjo, podem ser encontrados no livro de Eves (EVES, Howard. *In Mathematical Circles* – Volume 2).

O livro *Analyse des Infiniment Petits* foi o primeiro *livro texto* de cálculo a ser publicado e o exemplo que o marquês usou para ilustrar a regra foi encontrar o limite da função $y = \dfrac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$, quando x tende a a, onde a > 0. (Naquela época era comum escrever aa em vez de a^2.

***Regra de L´Hôpital:* Suponha que f e g sejam deriváveis e g' (x) ≠ 0 em um intevalo aberto I que contém a (exceto possivelmente em a). Suponha que**

$\lim_{x \to a} f(x) = 0$ ***e*** $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

ou que

$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ ***e*** $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$

Em outras palavras, temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ***ou*** $\frac{\infty}{\infty}$***.***

Então $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \dfrac{f´(x)}{g´(x)}$, ***se os limites existirem.***

A Regra de L’ Hôpital diz que o limite de uma função quociente é igual aos limites dos quocientes de suas derivadas, desde que as condições dadas estejam satisfeitas. É especialmente importante verificar as condições relativa dos limites de f e g antes de usar a Regra de L’ Hôpital.

A Regra de L’ Hôpital é válida também para os limites laterais e para os limites no infinito ou no infinito negativo; isto é, “x → a” pode ser substitído por quaisquer dos símbolos a seguir: $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$.

Todas as indeterminações, sejam elas na forma de produto ou de diferença, devem ser transformadas em quocientes para aplicar L’ Hôpital.

A seguir vamos analisar alguns exemplos das indeterminações já estudadas e iremos resolvê-las usando a Regra de L’ Hôpital.

Exemplos:

01) Encontre $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$.

Uma vez que $\lim\limits_{x\to 1}\ln x = \ln 1 = 0$ e $\lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$
podemos aplicar a regra de L’ Hôpital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = 1$$

02) Determinar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{e^x - 1}$

Quando x tende 0, o quociente $\dfrac{2x}{e^x - 1}$ toma a forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$.
Aplicando a Regra de L´Hôpital, vem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{e^x} = \frac{2}{e^0} = 2$$

03) Determinar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx - x}{e^x + e^{-x} - 2}$

Nesse caso temos a indeterminação $\dfrac{0}{0}$. Aplicando a Regra de L’ Hôpital uma vez temos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx - x}{e^x + e^{-x} - 2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{e^x - e^{-x}}$$

Como o último limite ainda toma a forma indeterminada $\frac{0}{0}$, podemos aplicar novamente a Regra de L' Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{senx - x}{e^x + e^{-x} - 2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \to 0} \frac{-senx}{e^x + e^{-x}} = \frac{-0}{2} = 0$$

04) Calcule $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2}$

Temos que $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$ e $\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$, logo a Regra de L'Hôpital fornece

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{d}{dx}(e^x)}{\frac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x}$$

Uma vez que $e^x \to \infty$ e $2x \to \infty$ quando $x \to \infty$ iremos aplicar novamente a Regra de L'Hôpital.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

Notemos que a função exponencial cresce muito mais rapidamente do que a função potência, logo percebemos um resultado esperado.

Vamos analisar o gráfico da função $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ e verificar esse resultado na Figura 11, ou seja, quando x tende a infinito a função também tende ao infinito.

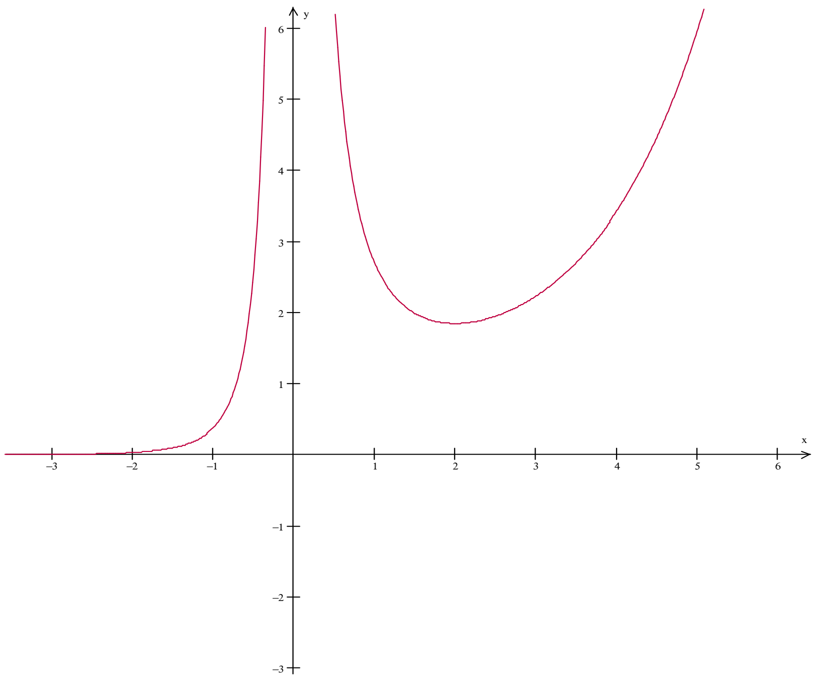

Figura 11

Logo podemos dizer que $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$ para todo n inteiro positivo. Isso mostra que a função exponencial tende mais rapidamente ao infinito que qualquer potência de x.

05) Calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

Uma vez que ln x →∞ e $\sqrt[3]{x} \to \infty$ quando x →∞, a Regra de L' Hôspital pode ser aplicada.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}}.$$

Observe que o lado direito é indeterminado do tipo $\frac{0}{0}$. Mas ao invés de aplicarmos a Regra de L'Hôpital novamente, simplificamos a expressão e percebemos que é desnecessário uma segunda aplicação da regra.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0$$

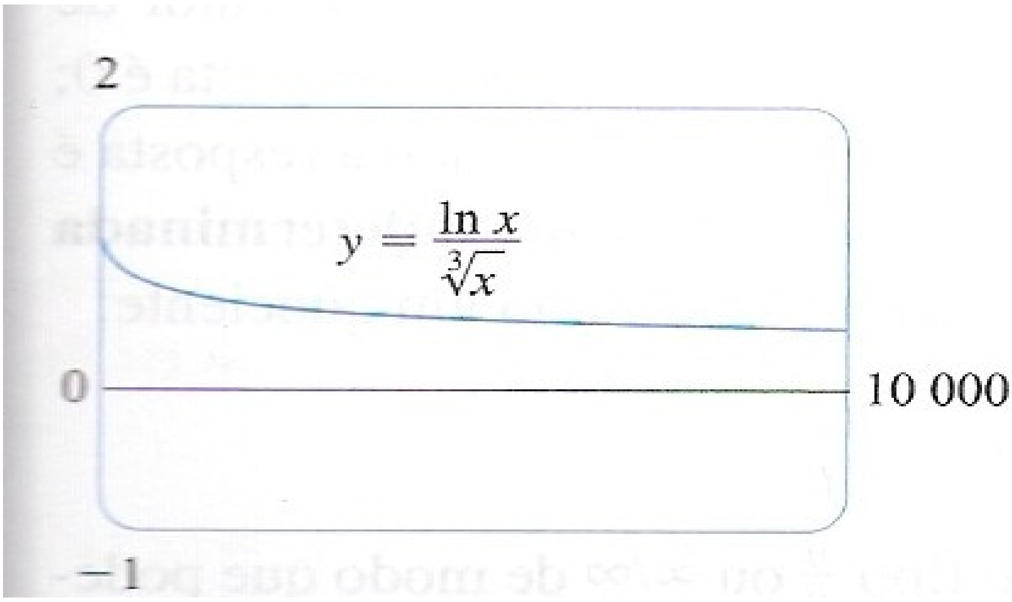

Figura 12

Sabemos que os logaritmos tem um crescimento lento, então percebemos através do gráfico da Figura 12 que essa razão tende a zero quando x →∞.

06) Encontre $\lim_{x\to 0} \frac{tgx - x}{x^3}$

Observando que tgx – x → 0 e x^3 → 0, usaremos a Regra de L' Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

Uma vez que o limite do lado direito continua indeterminado do tipo $\frac{0}{0}$, aplicamos novamente a Regra de L' Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x.tgx}{6x}$$

Pelo fato de $\lim_{x\to 0}\sec^2 x = 1$, simplificamos da seguinte forma

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x.tgx}{6x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\sec^2 x \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}$$

Podemos calcular este último limite usando a Regra de L'Hôpital novamente ou escrevendo tgx como $\frac{senx}{\cos x}$ e usando os conhecimentos dos limites trigonométricos.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x.tgx}{6x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\sec^2 x \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x}{1} = \frac{1}{3}$$

Verifiquem o gráfico da função $y = \frac{tgx - x}{x^3}$

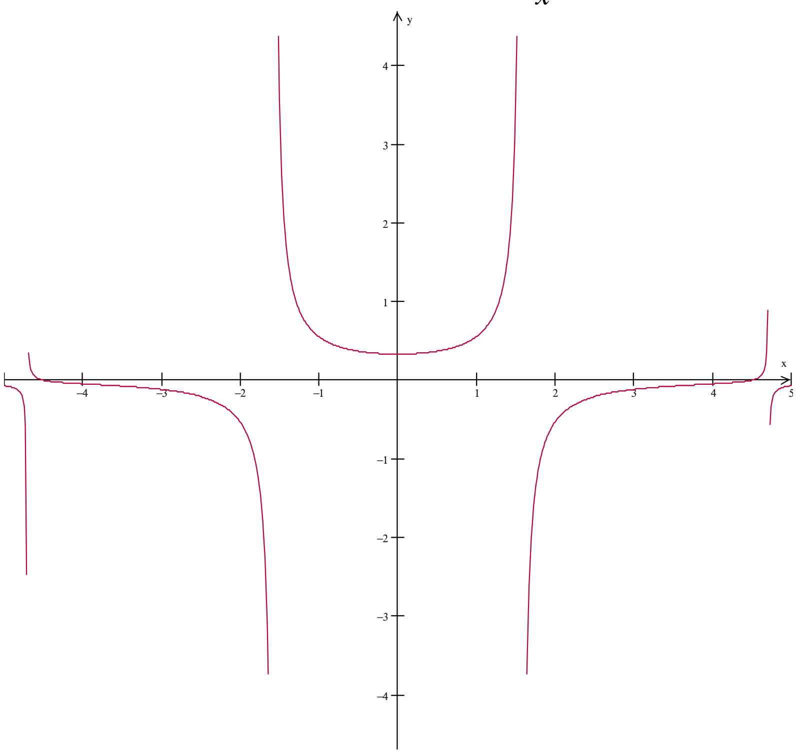

Figura 13

Se analisarmos o gráfico dessa função (Figura 13) percebemos um confirmação visual do resultado.

07) $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$

Se escrevermos $x = \dfrac{1}{\frac{1}{x}}$, temos que $\dfrac{1}{x} \to \infty$, quando x → 0^+; logo, através da Regra de L' Hôspital temos:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

08) $\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\sec x - tgx)$

Observe primeiro que sec x → ∞ e tg x → ∞ quando $x \to (\pi/2)^-$, logo o limite é indeterminado. Ao usarmos um denominador comum temos:

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\sec x - tgx) = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{senx}{\cos x}\right) = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{1-senx}{\cos x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{-\cos x}{-senx} = 0$$

O uso da Regra de L'Hôpital é justificado, pois 1 – sen x → 0 e cos x → 0 quando $x \to (\pi/2)^-$.

08) Calcule $\lim_{x\to 0^+}\left(\csc x - \frac{1}{x}\right)$

Se fizermos $\cos x = \dfrac{1}{senx}$ e subtrairmos teremos

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\csc x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{senx} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x - senx}{xsenx}$$

A fração está associada à forma 0/0 em a. Aplicando duas vezes a Regra de L' Hôpital, obtemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x-senx}{xsenx} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{senx + x\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{senx}{2\cos x - xsenx} = \frac{0}{2} = 0$$

09) Encontre $\lim_{x\to\pi^-} \dfrac{senx}{1-\cos x}$

Se usarmos cegamente a Regra de L'Hôpital, obteremos

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{senx}{1-\cos x} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos x}{senx} = -\infty$$

Isto está errado! Embora o numerador sen x → 0 quando $x \to \pi^-$, perceba que o denominador (1 – cos x) não tende a zero; logo, não podemos aplicar a Regra de L'Hôspital.

Vejamos que a função é contínua em π e o denominador é diferente de zero:

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{senx}{1-\cos x} = \frac{sen\pi}{1-\cos\pi} = \frac{0}{1-(-1)} = 0$$

Esse exemplo mostra o que pode acontecer se usarmos impensadamente a Regra de L'Hôpital. Assim, quando calcular qualquer limite, considere outros métodos antes de usar a Regra de L'Hôspital.

A seguir iremos utilizar a Regra de L'Hôpital para resolver exemplos de potências indeterminadas.

6 - Potências indeterminadas

Várias formas indeterminadas surgem do limite

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$$

1. $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ tipo 0^0
2. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ tipo ∞^0
3. $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ tipo 1^∞

Cada um dos três casos pode ser tratado tanto tomando o logaritmo natural:

Seja $y = [f(x)]^{g(x)}$, então $\ln y = g(x)\ln f(x)$

Quanto escrevendo a função como uma exponencial:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

Vamos usar a Regra de L'Hôpital para nos auxiliar na resolução dos exemplos a seguir.

Exemplos:

1) Calcule $\lim_{x \to 0^+} (1 + sen4x)^{\cot x}$.

Observe que quando $x \to 0^+$, temos $1 + sen4x \to 1$ e $\cot gx \to \infty$, assim, o limite dado é indeterminado. Seja

$$y = (1 + sen4x)^{\cot gx}$$

Então

$$\ln y = \ln\left[(1 + sen4x)^{\cot gx}\right] = \cot gx . \ln(1 + sen4x)$$

Logo, a Regra de L' Hôpital fornece

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1 + sen4x)}{tgx} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{4\cos 4x}{1 + sen4x}}{\sec^2 x} = 4$$

Até então calculamos o limite de $\ln y$, mas o que nos interessa é o limite de y. Para achá-lo usamos o fato de que $y = e^{\ln y}$:

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + sen4x)^{\cot x} = \lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln y} = e^4$$

2) Calcule $\lim_{x \to 0^+} x^x$

Esse limite é indeterminado, pois $0^x = 0$, para todo x > 0, mas $x^0 = 1$, para todo x ≠ 0. Podemos escrever a função como uma exponencial:

$$x^x = \left(e^{\ln x}\right)^x = e^{x \ln x}$$

Como vimos no exemplo 07, usamos a Regra de L' Hôpital para mostrar que

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

Portanto

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$$

Observe o gráfico da Figura 14 da função $y = x^x$, x > 0. Embora 0^0 não esteja definido, os valores tendem a 1 quando x → 0^+.

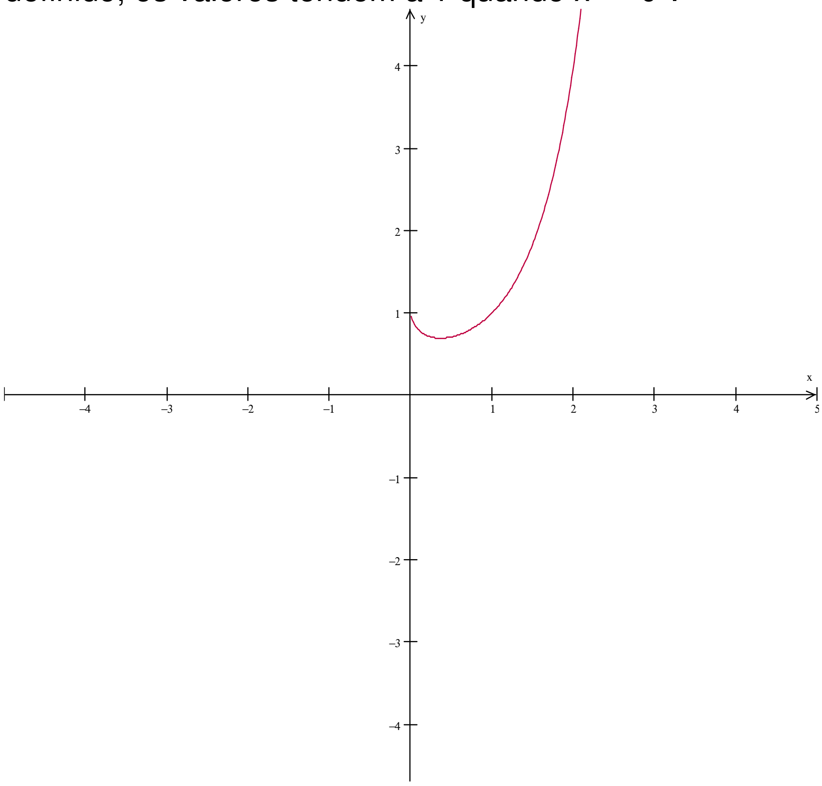

Figura 14

7 – Conclusão

Em vários momentos dos cálculos de limites e derivadas nos deparamos com algum tipo de indeterminação. A princípio convém fazer uma análise da indeterminação para decidirmos o melhor método a ser usado para resolvê-la, pois de antemão não sabemos o resultado de uma indeterminação.

Alguns casos podemos perceber o resultado estudando a função ou através de análises de gráficos, em outros a utilização de métodos e técnicas matemáticas se tornam um ótimo recurso, mas existem casos que esses mecanismos não funcionam de imediato. Aí precisamos recorrer a Regra de L`Hopital, que é um instrumento muito útil par tratar indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, para as outras indeterminações aplicamos técnicas para transformá-las em indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, de modo que a Regra de L`Hopital possa ser igualmente utilizada.

Mas o que pude perceber com esse trabalho é que, na verdade, a indeterminação básica é a do tipo $\frac{0}{0}$, sendo que podemos reduzir as outras indeterminações a essa forma.

8 – Referências Bibliográficas:

[01] STEWART, James. *Cálculo tradução da 6ª edição norte-americana*. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

[02] MALTA Iaci, PESCO Sinésio e LOPES Hélio. *Cálculo a uma Variável*, Vol. 1. São Paulo: Edições Loyola, 2006.

[03] MUNEM Mustafa e FOULIS David, *Cálculo*, Vol 1. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois S.A., 1982

[04] THOMAS, George B., WEIR Maurice D. e HASS Joel, *Cálculo*, Vol. 1. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

[05] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Cálculo*, Vol. 1. Rio de Janeiro: LTC, 2008

[06] LEITHOLD, L. *O Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: Editora Harper e Row do Brasil Ltda, 1977.

[07] FLEMMING, Diva Marília e GONÇALVES, Mirian Buss. Cálculo A. São Paulo: Perason Education do Brasil, 2006.