Universidade Federal de Minas Gerais
UFMG

Caio Teodoro de Magalhães Alves

Orientador: Serguei Popov

Desacoplamento condicional para os entrelaçamentos aleatórios

Tese de doutorado

Resumo

O modelo dos entrelaçamentos aleatórios, um modelo de percolação dependente em $\mathbb{Z}^d$, é tal que a correlação entre os estados dos vértices de dois conjuntos disjuntos $A_1, A_2 \subset \mathbb{Z}^d$ decai polinomialmente como função da distância entre A_1 e A_2. Tal dependência é um dos fatores que dificulta a prova de vários teoremas clássicos de percolação nesse novo contexto. Serguei Popov e Augusto Teixeira criaram um novo método denominado 'tempos locais suaves' para contornar esse problema e desacoplar o estado do conjunto A_1 do estado do conjunto A_2. Utilizando também os tempos locais suaves, provaremos nessa tese um desacoplamento condicional. Isto é, mostraremos que o conhecimento sobre o estado dos vértices de A_2 praticamente não influencia a distribuição do estado dos vértices de A_1.

1 Introdução

O modelo dos entrelaçamentos aleatórios foi desenvolvido por Sznitman em [2] , motivado pelo estudo da figura local que a trajetória de um passeio aleatório simples no toro $\mathbb{Z}^d/n\mathbb{Z}^d$ faz em um subconjunto pequeno $A \subsetneq \mathbb{Z}^d/n\mathbb{Z}^d$ (ver [8] e [9]). Trata-se de um modelo de percolação de sítios dependente em $\mathbb{Z}^d$. Essencialmente transportamos para $\mathbb{Z}^d$ a realização de um processo de Poisson em um espaço cujos elementos são trajetórias duplamente infinitas de passeios aleatórios simples em $\mathbb{Z}^d$. A densidade de trajetórias a ser considerada é controlada por um parâmetro real $u > 0$. Chamamos de o conjunto de entrelaçamentos no nível u o conjunto de pontos de $\mathbb{Z}^d$ que fazem parte dessa nuvem de trajetórias com densidade controlada por u, e de conjunto vacante no nível u o seu complementar. Denotaremos esse conjunto de entrelaçamentos por $\mathcal{I}^u$. Estudaremos também o conjunto $\mathcal{V}^u := \mathbb{Z}^d \setminus \mathcal{I}^u$, o chamado conjunto vacante.

Podemos ver esse modelo como um modelo de percolação dependente em $\mathbb{Z}^d$ ao considerarmos os sítios de $\mathcal{I}^u$ como fechados e os de $\mathcal{V}^u$ como abertos. O artigo original de Sznitman [2] já mostra a ergodicidade do modelo. Juntamente com [3], tal artigo também mostra que o processo de percolação em $\mathcal{V}^u$ exibe transição de fase não trivial, isto é, existe um u_*, com $0 < u_* < \infty$, de modo que

$$\sup\{u \geq 0 : \mathcal{V}^u \text{ possui uma componente conexa infinita}\} = u_*.$$

Posteriormente, Sznitman mostrou em [4] e [5] que

$$\lim_d \frac{u_*}{\log d} = 1,$$

em concordância com a hipótese que diz que a percolação do conjunto vacante em $\mathbb{Z}^d$ para d grande se comporta como a percolação do conjunto vacante em uma árvore $2d$-regular (ver Proposição 5.2 de [14]).

Outros muitos resultados foram então provados nos últimos anos, como a propriedade FKG [14], unicidade do aglomerado infinito [15] , decaimento exponencial da função conectividade em uma parte da fase subcrítica [1].

Existem também resultados relacionando a estrutura de $\mathcal{I}^u$ com a de $\mathbb{Z}^d$. Černý e Popov mostraram em [6] que a distância química (também chamada de distância no grafo) de $\mathcal{I}^u$ é comparável a de $\mathbb{Z}^d$, além de provar um teorema de forma para a bola induzida por essa distância. Ráth e Sapozhnikov em [12] e Procaccia e Tykesson em [7] mostraram usado métodos diferentes que é possível conectar quaisquer dois pontos pertencentes a $\mathcal{I}^u$ usando no máximo $\lceil \frac{d}{2} \rceil$ trajetórias de passeio aleatório que compõem $\mathcal{I}^u$.

Resultados sobre passeios aleatórios simples tanto em $\mathcal{I}^u$ quanto em $\mathcal{V}^u$ foram obtidos. Ráth e Sapozhnikov mostraram em [12] que o passeio aleatório em $\mathcal{I}^u$ é transiente para $u \in (0, \infty)$. Alexander Drewitz e Dirk Erhard mostraram em [13] que a componente infinita de $\mathcal{V}^u$ é transiente para quase toda a fase supercrítica.

Uma das maiores dificuldades de se trabalhar com os entrelaçamentos aleatórios vem de sua dependência de longo alcance, como veremos em (2.11): para $x, y \in \mathbb{Z}^d$, temos

$$\mathrm{Cov}(1_{x \in \mathcal{I}^u}, 1_{y \in \mathcal{I}^u}) \sim \frac{c_d u}{\mathrm{dist}(x, y)^{d-2}}.$$

Ou seja, a covariância entre o estado de dois vértices decai como um polinômio da distância entre eles. Essse tipo de decaimento lento das covariâncias é um grande empecilho para o estudo do modelo. Ao estudar a percolação de sítios de Bernoulli independente por exemplo, nós podemos sem problemas estudar separadamente a distribuição do conjunto de sítios abertos em dois conjuntos disjuntos. Isso já se torna um problema para o estudo dos entrelaçamentos aleatórios, já que existe uma dependência relativamente grande entre o conjunto de entrelaçamentos em conjuntos disjuntos.

Com esse problema em mente, Augusto Teixeira e Serguei Popov criaram em seu artigo 'Soft local times and decouple of random interlacements' [1] uma técnica para desacoplar as distribuições do conjunto de entrelaçamentos em conjuntos disjuntos. O método por eles batizado de 'tempos locais suaves' permite usar um processo de Poisson em um espaço de estados adequado para simular sequências de elementos aleatórios. Em termos gerais, esse método lhes permitiu simular os pedaços de trajetória que intersectam um dado conjunto A_1 sem tomar conhecimento do estado do conjunto de entrelaçamentos em um outro conjunto dado A_2 disjunto de A_1. Isso lhes permitiu provar o seguinte resultado:

Teorema (2.1 de [1])**.** *Sejam A_1, A_2 dois conjuntos disjuntos de $\mathbb{Z}^d$, sendo que ao menos um deles é finito. Seja $s = \mathrm{dist}(A_1, A_2)$ e r o menor entre os diâmetros dos conjuntos A_1 e A_2. Existem então constantes positivas γ_0 e γ_1 (dependendo apenas da dimensão d) tal que para todo $u > 0$ e $\varepsilon \in (0, 1)$ existe um acoplamento $\mathbb{Q}$ entre $\mathcal{I}^u$ e dois processos de entrelaçamentos aleatórios independentes, $(\mathcal{I}_1^u)_{u \geq 0}$ e $(\mathcal{I}_2^u)_{u \geq 0}$ tais que*

(1.1)
$$\mathbb{Q}\big[\mathcal{I}_k^{u(1-\varepsilon)} \cap A_k \subseteq \mathcal{I}^u \cap A_k \subseteq \mathcal{I}_k^{u(1+\varepsilon)} \cap A_k,\ k = 1, 2\big] \geq 1 - \gamma_0 (r+s)^d \exp(-\gamma_1 \varepsilon^2 u s^{d-2}),$$

em particular, se D_1 é um evento crescente $\{0,1\}^{A_1}$-mensurável e D_2 é um evento crescente $\{0,1\}^{A_2}$-mensurável, vale

$$\mathbb{Q}\big[(\mathcal{I}^u \in D_1) \cap (\mathcal{I}^u \in D_2)\big]$$
$$\leq \mathbb{Q}\big[\mathcal{I}^{u(1-\varepsilon)} \in D_1\big]\mathbb{Q}\big[\mathcal{I}^{u(1-\varepsilon)} \in D_1\big] + \gamma_0(r+s)^d \exp(-\gamma_1\varepsilon^2 u s^{d-2}).$$

Nessa tese, trabalhamos para expandir esse resultado em casos mais específicos. Estaremos interessados em particular no problema do desacoplamento condicional. Isto é, já conhecendo o conjunto de entrelaçamentos em um determinado conjunto A_2, estaremos interessados na distribuição condicional do conjunto de entrelaçamentos em um conjunto A_1 de modo que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Vamos enunciar o resultado principal desta tese (Teorema 5.4). Sejam $r, s \geq 0$ números inteiros positivos grandes, relacionados de modo que $s \leq r \leq s^{b(d)}$, onde $1 < b < 2 - \frac{2}{d}$ e $a = a(d) := 2d - 2 - bd$. Seja $\epsilon > 0$ um número real qualquer. Considere agora A_1 e A_2 como sendo os conjuntos

$$A_1 = \{x \in \mathbb{Z}^d; \mathrm{dist}(0,x) < r\},$$

$$A_2 = \{x \in \mathbb{Z}^d; \mathrm{dist}(0,x) > r + 2s\}.$$

Consideramos então $\mathcal{I}^u_{A_1|A_2}$ como sendo a distribuição do conjunto de entrelaçamentos no nível u intersectado com a bola A_1, condicionada ao estado do conjunto de entrelaçamentos no conjunto A_2.

Usando o método dos tempos locais suaves, construiremos um processo $(\widehat{\mathcal{I}}^u_{A_1}, u \geq 0)$ que tem a mesma distribuição que o conjunto de entrelaçamentos aleatórios na bola A_1, mas é acoplado com $\mathcal{I}^u_{A_1|A_2}$ de forma que, para $c_3, c_4, c_5, c_6 > 0$ constantes que dependem apenas de d, nós tenhamos

$$(1.2)\quad \mathcal{P}\big[\hat{\mathcal{I}}^{u(1-\epsilon)}_{A_1} \subseteq \mathcal{I}^u_{A_1|A_2} \subseteq \hat{\mathcal{I}}^{u(1+\epsilon)}_{A_1}, \mathcal{G}\big] \geq 1 - c_5(r+s)^{2(d-1)} \exp\big(-c_6\epsilon^2 u s^a\big).$$

onde $\mathcal{G}$ é um conjunto construído no espaço do acoplamento de forma que

$$\mathbb{P}\big[\mathcal{G}\big] \geq 1 - c_3(r+s)^{2(d-1)} \exp\big(-c_4\epsilon^2 u s^a\big),$$

Isso implica que para qualquer função $f : \{0,1\}^{A_1} \mapsto \mathbb{R}$ crescente no conjunto de entrelaçamentos em A_1, nós teremos

(1.3)
$$f(\widehat{\mathcal{I}}^{u(1-\epsilon)}_{A_1})1_{\mathcal{G}} - c_5(r+s)^{2(d-1)}e^{\left(-c_6\epsilon^2 u s^a\right)} \leq \mathbb{E}(f(\mathcal{I}^u_{A_1})|\mathcal{I}^u_{A_2})1_{\mathcal{G}}$$
$$\leq f(\widehat{\mathcal{I}}^{u(1+\epsilon)}_{A_1})1_{\mathcal{G}} + c_5(r+s)^{2(d-1)}e^{\left(-c_6\epsilon^2 u s^a\right)}.$$

Mostraremos então que com grande probabilidade, a distribuição condicional $\mathcal{I}^u_{A_1|A_2}$ se assemelha à distribuição incondicional $\widehat{\mathcal{I}}^u_{A_1}$ quando s é grande.

Uma aplicação na qual pretendemos utilizar esse resultado diz respeito a processos em que o conjunto de entrelaçamentos é explorado sistematicamente, como por exemplo uma partícula descrevendo passeio aleatório no conjunto vacante. Sempre que essa partícula se aproximar de uma área ainda não explorada, podemos usar esse resultado para calcular a distribuição dos entrelaçamentos nessa nova área a ser visitada.

Para finalizar essa introdução, mencionamos o processo dos campos gaussianos livres, processo esse que possui uma estreita relação com os entrelaçamentos aleatórios, e cujos avanços recentes aumentam a esperança de que um resultado de desacoplamento mais forte pode ser obtido para os entrelaçamentos aleatórios.

O campo gaussiano livre é definido como um campo gaussiano $\varphi = (\varphi_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ (ou seja, uma normal multivariada com infinitas entradas indexadas pelos elementos de $\mathbb{Z}^d$), de modo que $\mathbb{E}(\varphi_x\varphi_y) = g(x,y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Z}^d$, onde g denota a função de Green do passeio aleatório simples em $\mathbb{Z}^d$:

$$g(x,y) = \sum_{i\geq 0} \mathbb{P}_x\big[X_i = y\big],$$

ou seja, a matriz de covariância é dada pela função de Green. Sznitman mostrou em [3] a existência de uma relação estreita entre os entrelaçamentos aleatórios e o campo gaussiano livre. Consideramos agora o modelo de entrelaçamentos aleatórios onde as trajetórias consideradas são de passeios aleatórios simples a tempo contínuo, ou seja, cada trajetória permanece um certo tempo aleatório em cada sítio antes de saltar para o próximo sítio. Definimos

$$L_{x,u}(\omega) = \begin{array}{l}\text{o tempo em que as trajetórias em } \omega \\ \text{com rótulo no máximo } u \text{ permanecem em } x.\end{array}$$

Consideramos P^G como a lei de φ e $\tilde{Q}$ como a lei dos entrelaçamentos aleatórios a tempo contínuo. O Teorema 0.1 de [3] nos diz então que para cada $u \geq 0$, vale que

$$(L_{x,u} + \frac{1}{2}\varphi_x^2)_{x\in\mathbb{Z}^d}$$

sob $\tilde{Q} \otimes P^G$ tem a mesma lei que

$$(\frac{1}{2}(\varphi_x + \sqrt{2u})^2)$$

sob P^G.

Serguei Popov e Balázs Ráth então provaram em [10] um desacoplamento condicional para o campo gaussiano livre. Para $K \subseteq \mathbb{Z}^d$, considere φ_K como o campo restrito a K. Sejam $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{Z}^d$ tais que pelo menos um desses conjuntos é finito, e seja r o diâmetro do menor entre esses conjuntos. Considere também s como sendo a distância entre K_1 e K_2. Em [10] foi obtido o seguinte resultado:

Teorema (1.1 de [10])**.** *Suponha $f_2 : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \mapsto [0,1]$ crescente e com suporte em K_2. Para todo $\delta > 0$, vale q.c.*

$$\mathbb{E}(f_2(\varphi - \delta) - P^G\big[G_\delta^C\big])1_{G_\delta} \leq \mathbb{E}(f_2(\varphi|\varphi_{K_1}))1_{G_\delta} \leq \mathbb{E}(f_2(\varphi + \delta) + P^G\big[G_\delta^C\big])1_{G_\delta},$$

onde G_δ é um evento definido de forma que (Proposição 1.3 de [10])

$$P^G\big[G_\delta^C\big] \leq 2(r+s)^d \exp(-c\delta^2 s^{d-2}). \tag{1.4}$$

Observamos a similaridade do lado direito da desigualdade acima com o lado direito de (1.1). Lembrando a relação existente entre os modelos dos entrelaçamentos aleatórios e o campo gaussiano livre, e observando que o expoente de s é $d-2$ tanto em em (1.4) quanto em (1.1), gostaríamos de futuramente investigar a possibilidade de melhorar a cota obtida em (1.2), substituíndo $s^{a(d)}$ por s^{d-2}.

2 Entrelaçamentos Aleatórios

Nesta seção definiremos o modelo dos entrelaçamentos aleatórios, além das notações que iremos usar ao longo desta tese. Seguimos a construção de Černý e Teixeira [16], que além de ser bem simples e objetiva, será mais completa que a construção aqui feita.

Os entrelaçamentos aleatórios são definidos em

$$\mathbb{Z}^d := \{(x_1, ..., x_d); x_i \in \mathbb{Z}\ \forall i = 1, \dots, d\},$$

com $d \geq 3$. Para $x = (x_1, ..., x_d)$ e $y = (y_1, ..., y_d)$ em $\mathbb{Z}^d$, denotaremos por $\mathrm{dist}(x, y)$ a distância euclidiana entre x e y: $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_d - y_d)^2}$. Vemos $\mathbb{Z}^d$ como um grafo, considerando x vizinho de y quando $\mathrm{dist}(x, y) = 1$, o dito grafo dos primeiros vizinhos em $\mathbb{Z}^d$. Para $A \subseteq \mathbb{Z}^d$, denotamos por $|A|$ a cardinalidade de A, $A^C = \mathbb{Z}^d \setminus A$ o complemento de A, $\partial A = \{x \in A^C,$ existe $y \in A$ tal que $\mathrm{dist}(x, y) = 1\}$ a fronteira de A, $\overline{A} = A \cup \partial A$ o fecho de A, e $\mathring{A} = A \setminus \partial(A^C)$ o interior de A. Para $r > 0$ e $x \in \mathbb{Z}^d$, definimos também o conjunto

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{Z}^d, \text{dist}(x, y) < r\},$$

a bola discreta de raio r.

Queremos definir um modelo de percolação dependente em $\mathbb{Z}^d$, essencialmente trasportando para $\mathbb{Z}^d$ a realização de um processo de Poisson em um espaço cujos pontos são trajetórias duplamente infinitas de passeios aleatórios simples em $\mathbb{Z}^d$. Começamos por definir esse processo de Poisson.

Vamos definir o conjunto de todos os caminhos de primeiros vizinhos duplamente infinitos em $\mathbb{Z}^d$ que retornam no máximo finitas vezes a qualquer conjunto finito:

$$\mathbb{W} = \left\{ \begin{array}{c} \varrho : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}^d;\ \text{dist}(\varrho(n), \varrho(n-1)) = 1\ \forall n \in \mathbb{Z}, \\ \text{e } \{n : \varrho(n) = y\} \text{ é finito para todo } y \in \mathbb{Z}^d. \end{array} \right\}.$$

Definimos também um conjunto análogo ao acima quando cada caminho é infinito em apenas uma direção:

$$\mathbb{W}_+ = \left\{ \begin{array}{c} \varrho_+ : \mathbb{Z}_+ \mapsto \mathbb{Z}^d;\ \text{dist}(\varrho(n), \varrho(n-1)) = 1\ \forall n \in \mathbb{Z}_+, \\ \text{e } \{n : \varrho(n) = y\} \text{ é finito para todo } y \in \mathbb{Z}^d. \end{array} \right\}.$$

Denotamos por X_n, $n \in \mathbb{Z}$ (respectivamente $n \in \mathbb{Z}_+$), as coordenadas padrão em $\mathbb{W}$ (respectivamente em $\mathbb{W}_+$), ou seja, $X_n(\varrho) = \varrho(n)$. Precisamos também definir o shift em k coordenadas, $\theta_k : \mathbb{W} \mapsto \mathbb{W}$ (respectivamente $\mathbb{W}_+ \mapsto \mathbb{W}_+$),

$$X_n(\theta_k(\varrho)) = \varrho(n+k), \text{ para } k \in \mathbb{Z} \text{ (respectivamente para } k \geq 0)$$

Consideramos com $\mathbb{W}$ a σ-álgebra $\mathcal{W}$ gerada pelas funções coordenadas $X_n : \mathbb{W} \mapsto \mathbb{Z}^d$. Dado $A \subseteq \mathbb{Z}^d$, definimos os tempos de entrada e saída

$$H_A(\varrho) = \inf\{n \in \mathbb{Z} \text{ (respectivamente } \mathbb{Z}_+) : X_n(\varrho) \in A\},$$

$$T_A(\varrho) = \inf\{n \in \mathbb{Z} \text{ (respectivamente } \mathbb{Z}_+) : X_n(\varrho) \notin A\}.$$

Definimos também o tempo de chegada

$$\tilde{H}_A(\varrho) = \inf\{n \geq 1 : X_n(\varrho) \in A\}.$$

Se $|A| < \infty$, podemos considerar o subconjunto de $\mathbb{W}$ composto pelas trajetórias que entram em A alguma vez:

$$\mathbb{W}_A = \{\varrho \in \mathbb{W} : X_n(\varrho) \in A \text{ para algum } n \in \mathbb{Z}\},$$

$$\mathbb{W}_A = \bigcup_n \mathbb{W}_A^n, \text{ onde } \mathbb{W}_A^n = \{\varrho \in \mathbb{W}, H_A(\varrho) = n\}.$$

Vamos começar o trabalho de construir uma medida relevante sobre esses conjuntos de trajetórias. Começamos com Q_A, uma medida em $(\mathbb{W}, \mathcal{W})$. Para $F, G \in \mathbb{W}_+$ e $x \in \mathbb{Z}^d$, definimos

(2.1)
$$Q_A[(X_{-n})_{n\geq 0} \in F, X_0 = x, (X_n)_{n\geq 0} \in G] = \mathbb{P}_x[F \mid \tilde{H}_A = \infty]\mathbb{P}_x[G]e_A(x),$$

onde $\mathbb{P}_x$ é a medida do passeio aleatório simples começando em x, e $e_A(x)$ é a medida harmônica em A avaliada no conjunto $\{x\}$:

$$e_A(x) = \mathbb{P}_x\big[\tilde{H}_A = \infty\big]1_A(x)$$

Note que Q_A dá medida total a $\mathbb{W}_A^0$, ou seja, o instante em que a trajetória entra em A é importante para a medida Q_A. Como queremos futuramente construir uma medida que não se importa com o conjunto A, isso se torna um problema para nós. Resolvemos tal problema considerando a relação de equivalência

$$\varrho \sim \varrho' \text{ se e só se existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \theta_k(\varrho) = \varrho'$$

Definimos então o quociente $\mathbb{W}^* = \mathbb{W}/\sim$, juntamente com a projeção canônica $\pi^* : \mathbb{W} \mapsto \mathbb{W}^*$ e a σ-álgebra $\mathcal{W}^*$ induzida por π^* em $\mathcal{W}$. Denotamos por $\mathbb{W}_A^*$ o conjunto $\pi^*(\mathbb{W}_A)$. Nesse novo conjunto $\mathbb{W}^*$ os elementos são dados por trajetórias de passeio aleatório sem um parâmetro de tempo absoluto, tais trajetórias registram uma sequência de pontos de $\mathbb{Z}^d$ sem que nenhum desses pontos seja um referencial especial.

Os entrelaçamentos aleatórios serão definidos a partir de um processo de Poisson no espaço $(\mathbb{W}^* \otimes \mathbb{R}_+, \mathcal{W}^* \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$, onde $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ denota a σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}_+$. Começamos por definir o conjunto das medidas pontuais:

$$(2.2) \quad \mathfrak{O} = \left\{ \omega = \sum_{i\geq 1} \delta_{(\varrho_i^*, u_i)} \middle| \begin{array}{c} \varrho_i^* \in W^*, u_i \in \mathbb{R}_+ \text{ e } \omega(W_K^* \times [0,u]) < \infty \\ \text{para todo } K \subset \mathbb{Z}^d, |K| < \infty, \text{ e } u \geq 0. \end{array} \right\}$$

Fazendo o produto de $\mathbb{W}^*$ por $\mathbb{R}_+$, ganhamos uma variável $u \geq 0$ que controla a quantidade de trajetórias ϱ_i^* a ser considerada. Por exemplo, dado um $\omega \in \mathfrak{O}$, em geral fixaremos $u \geq 0$ e consideraremos apenas as trajetórias

ϱ_i^* tais que o número u_i correspondente em ω é menor do que u. Diremos nesse caso que estamos olhando o processo no nível u.

Para construir o processo de Poisson no espaço $\mathfrak{O}$, definimos a σ-álgebra $\mathcal{A}$ gerada pelos mapas $\omega \mapsto \omega(D)$, com $D \in \mathcal{W}^* \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$; e uma medida de intensidade $\nu \otimes \mathrm{d}u$, onde $\mathrm{d}u$ é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}_+$. Nos resta definir uma medida ν em $\mathbb{W}^*$ que, de preferência, seja simples de ser calculada para subconjuntos de W_A^*. É essa a motivação do próximo teorema.

Teorema 2.1. *Existe uma única medida σ-finita ν no espaço $(\mathbb{W}, \mathcal{W})$ satisfazendo, para cada conjunto finito $A \subset \mathbb{Z}^d$,*

$$\nu(\mathbb{W}_A^* \cap \cdot) = Q_A\big[\pi^{*-1}(\cdot)\big]. \tag{2.3}$$

Demonstração. A unicidade vem do fato que, se pegarmos uma sequência $A_k \uparrow \mathbb{Z}^d$, vale $\mathbb{W}^* = \cup_k \mathbb{W}_{A_k}^*$. Basta então usar um argumento de continuidade da medida.

Para provar a existência, basta provarmos que, dados $A \subset A' \subset \mathbb{Z}^d$, com $|A| < \infty$ vale

$$Q_{A'}\big[\mathbb{W}_A \cap \pi^{*-1}(\cdot)\big] = Q_A\big[\pi^{*-1}(\cdot)\big], \tag{2.4}$$

uma espécie de compatibilidade de medidas no sentido do Teorema de Extensão de Kolmogorov. Usando (2.4), escrevemos para uma sequência $A_k \uparrow \mathbb{Z}^d$ dada

$$\nu(\cdot) = \sum_k Q_{A_k}\big[\pi^{*-1}((\mathbb{W}_{A_k}^* \setminus \mathbb{W}_{A_{k-1}}^*) \cap \cdot)\big].$$

Vamos provar que ν definida acima satisfaz (2.3). Observamos que

$$\begin{aligned}\nu(\mathbb{W}_A^* \cap \cdot) &= \sum_k Q_{A_k}\big[\pi^{*-1}((\mathbb{W}_{A_k}^* \setminus \mathbb{W}_{A_{k-1}}^*) \cap \mathbb{W}_A^* \cap \cdot)\big] \\ &= \sum_k Q_{A_k}\big[(\mathbb{W}_{A_k} \setminus \mathbb{W}_{A_{k-1}}) \cap \pi^{*-1}(\mathbb{W}_A^* \cap \cdot)\big].\end{aligned}$$

Notando que $\mathbb{W}_{A_{k-1}} \subset \mathbb{W}_{A_k}$, e que Q_{A_k} dá medida total a W_{A_k}, conseguimos escrever o k-ésimo termo da soma acima como

$$Q_{A_k}\big[\pi^{*-1}(\mathbb{W}_A^* \cap \cdot)\big] - Q_{A_k}\big[\mathbb{W}_{A_{k-1}} \cap \pi^{*-1}(\mathbb{W}_A^* \cap \cdot)\big].$$

Com (2.4) o termo acima vira

$$Q_{A_k}\big[\mathbb{W}_A \cap \pi^{*-1}(\cdot)\big] - Q_{A_{k-1}}\big[\mathbb{W}_A \cap \pi^{*-1}(\cdot)\big].$$

Seja k_0 tal que $A \subset A_{k_0}$. Podemos então decompor a soma da seguinte forma

$$\begin{aligned}\nu(\mathbb{W}_A^* \cap \cdot) = &\sum_{k>k_0} Q_{A_k}\big[\pi^{*-1}((\mathbb{W}_{A_k}^* \setminus \mathbb{W}_{A_{k-1}}^*) \cap \mathbb{W}_A^* \cap \cdot)\big] \\ &+ \sum_{k\le k_0} Q_{A_k}\big[\mathbb{W}_A \cap \pi^{*-1}(\cdot)\big] - Q_{A_{k-1}}\big[\mathbb{W}_A \cap \pi^{*-1}(\cdot)\big].\end{aligned}$$

A soma para $k > k_0$ será igual a 0, já que é impossível um passeio aleatório chegar a A sem antes passar por A_{k_0}. Os termos da soma para $k \le k_0$ irão se anular exceto por

$$Q_{A_{k_0}}\big[\mathbb{W}_A \cap \pi^{*-1}(\cdot)\big].$$

Usando (2.4) novamente, conseguimos mostrar (2.3).

Como já mostramos a unicidade, a fórmula acima não depende da sequência $A_k \uparrow \mathbb{Z}^d$ escolhida. Vamos à prova de (2.4). Definimos o espaço

$$\mathbb{W}_{A,A'} = \{\varrho \in \mathbb{W}_A : H_{A'}(\varrho) = 0\}$$

e a bijeção $s_{A,A'} : \mathbb{W}_{A,A'} \mapsto \mathbb{W}_{A,A}$ definida por

$$X_n(s_{A,A'}(\varrho)) = X_{n+H_A(\varrho)}(\varrho) \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Para demonstrar (2.4), só precisamos provar

$$Q_{A'}\big[\mathbb{W}_{A,A'} \cap s_{A,A'}^{-1}(\cdot)\big] = Q_A\big[\,\cdot\,\big]. \tag{2.5}$$

Com efeito, como $Q_{A'}$ dá medida total a $\mathbb{W}_{A'}^0$ obtemos que

$$Q_{A'}\big[\mathbb{W}_{A,A'} \cap \cdot\big] = Q_{A'}\big[\mathbb{W}_A \cap \cdot\big],$$

e (2.4) segue ao fazermos o pull back por π^* em ambos os lados de (2.5).

Para mostrar (2.5), consideramos o conjunto $\mathfrak{S}$ dos caminhos finitos $\sigma : \{0, \dots, N_\sigma\} \mapsto \mathbb{Z}^d$ tais que $\sigma(0) \in A'$, $\sigma \notin A$ para $n < N_\sigma$, e $\sigma(N_\sigma) \in A$. Nós separamos o lado esquerdo de (2.5) particionando $\mathbb{W}_{A,A'}$ nos conjuntos

$$\mathbb{W}_{A,A'}^\sigma = \{w \in \mathbb{W}_{A,A'} : w \text{ restrito a } \{0, \dots, N_\sigma\} \text{ é igual a } \sigma\}.$$

Para $\varrho \in \mathbb{W}_{A,A'}^\sigma$, nós temos $H_A(\varrho) = N_\sigma$, de modo que podemos escrever

$$Q_{A'}\big[\mathbb{W}_{A,A'} \cap s_{A,A'}^{-1}(\cdot)\big] = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}} Q_{A'}\big[\mathbb{W}_{A,A'} \cap \theta_{N_\sigma}^{-1}(\cdot)\big]$$

ou seja, podemos trocar o pull back pela função $s_{A,A'}$ por um pull back pelo shift θ_{N_σ}, quando sabemos exatamente qual caminho cada trajetória ϱ faz entre A e A'.

Para provar (2.5), nós consideramos uma coleção arbitrária de conjuntos $A_i \subseteq \mathbb{Z}^d$, com $i \in \mathbb{Z}$, de modo que $A_i \neq \mathbb{Z}^d$ para apenas um número finito de $i \in \mathbb{Z}$. Ou seja, vamos provar que a expressão (2.5) vale para conjuntos cilíndricos e os teoremas clássicos de extensão de medida farão o resto do trabalho. Escrevemos então, usando a fórmula acima,

$$
\begin{aligned}
&Q_{A'}\big[\mathbb{W}_{A,A'} \cap s_{A,A'}^{-1}(X_i \in A_i, \forall i \in \mathbb{Z})\big] \\
&\quad= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} Q_{A'}\big[X_{i+N_\sigma}(\varrho) \in A_i, i \in \mathbb{Z}, \varrho \in \mathbb{W}^\sigma_{A,A'}\big] \\
&\quad= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} Q_{A'}\big[X_i(\varrho) \in A_{i-N_\sigma}, i \in \mathbb{Z}, \varrho \in \mathbb{W}^\sigma_{A,A'}\big].
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

Usando (2.1), o fato de $e_A(x)\mathbb{P}_x\big[\cdot \mid \tilde{H}_A = \infty\big] = \mathbb{P}_x\big[\cdot, \tilde{H}_A = \infty\big]$ quando x está no suporte de $e_A(\cdot)$, e a propriedade de Markov, conseguimos a partir da expressão acima

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x \in supp(e_{A'})} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \mathbb{P}_x\big[X_j \in A_{-j-N_\sigma}, j \geq 0, \tilde{H}_{A'} = \infty\big] \\
&\times \mathbb{P}_x\big[X_n = \sigma(n) \in A_{n-N_\sigma}, 0 \leq n \leq N_\sigma\big] \\
&\times \mathbb{P}_{\sigma(N_\sigma)}\big[X_n \in A_n, n \geq 0\big] \\
&= \sum_{x \in supp(e_{A'})} \sum_{y \in A} \sum_{\sigma : \sigma(N_\sigma) = y} \mathbb{P}_x\big[X_j \in A_{-j-N_\sigma}, j \geq 0, \tilde{H}_{A'} = \infty\big] \\
&\times \mathbb{P}_x\big[X_n = \sigma(n) \in A_{n-N_\sigma}, 0 \leq n \leq N_\sigma\big]\mathbb{P}_y\big[X_n \in A_n, n \geq 0\big].
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

Dado x no suporte de $e_A(\cdot)$ e $y \in A$, nós usamos a reversibilidade do passeio aleatório simples e propriedade de Markov para conseguir

$$\sum_{\sigma:\sigma(N_\sigma)=y} \mathbb{P}_x\big[X_j \in A_{-j-N_\sigma}, j \geq 0, \tilde{H}_{A'} = \infty\big]$$
$$\times \mathbb{P}_x\big[X_n = \sigma(n) \in A_{n-N_\sigma}, 0 \leq n \leq N_\sigma\big]$$
$$= \sum_{\substack{\sigma:\sigma(N_\sigma)=y\\ \sigma(0)=x}} \mathbb{P}_x\big[X_j \in A_{-j-N_\sigma}, j \geq 0, \tilde{H}_{A'} = \infty\big]$$
$$\times \mathbb{P}_y\big[X_m = \sigma(N_\sigma - m) \in A_{-m}, 0 \leq m \leq N_\sigma\big]\ . \tag{2.8}$$
$$= \sum_{\substack{\sigma:\sigma(N_\sigma)=y\\ \sigma(0)=x}} \mathbb{P}_y\left[\begin{array}{c} X_m = \sigma(N_\sigma - m) \in A_{-m}, 0 \leq m \leq N_\sigma \\ X_m \in A_{-m}, m \geq N_\sigma, \tilde{H}_{A'} \circ \theta_{N_\sigma} = \infty \end{array}\right]$$
$$= \mathbb{P}_y\left[\begin{array}{c} \tilde{H}_A = \infty,\ x \text{ é o último vértice que o} \\ \text{passeio visita em } A', X_m \in A_{-m}, m \geq 0 \end{array}\right]$$

Substituíndo (2.8) em (2.7), nós obtemos

$$\begin{aligned}
&Q_{A'}\big[\mathbb{W}_{A,A'} \cap s^{-1}_{A,A'}(X_i \in A_i, \forall i \in \mathbb{Z})\big] \\
&= \sum_{y \in A} \mathbb{P}_y\big[\tilde{H}_A = \infty, X_m \in A_{-m}, m \geq 0\big]\mathbb{P}_y\big[X_m \in A_m, m \geq 0\big] \\
&= Q_A\big[X_m \in A_m, m \in \mathbb{Z}\big],
\end{aligned} \tag{2.9}$$

o que prova (2.5) e conclui a prova da existência da medida ν. Para provar que ν é σ-finita, basta observar que $\nu(\mathbb{W}^*_A) < \infty$ para todo $A \subset \mathbb{Z}^d$, com $|A| < \infty$.

□

Resta ver esse processo de Poisson no espaço $(\mathbb{W}, \mathcal{W})$ como um processo de percolação em $\mathbb{Z}^d$. Seja $\mathfrak{Q}$ a lei do processo de Poisson em $(\mathbb{W}, \mathcal{W})$ com medida de intensidade $\nu \otimes \mathrm{d}v$. Usando a identificação padrão entre medidas pontuais e subconjuntos, vemos $\omega \in \mathfrak{O}$ como uma nuvem aleatória infinita de trajetórias de passeios aleatórios duplamente infinitos em $\mathbb{Z}^d$ (modulo shift temporal), cada trajetória com um número real não negativo como rótulo associado.

Definimos, para $\omega = \sum_{i\geq 0} \delta_{(\varrho_i^*, u_i)}$ o conjunto de entrelaçamentos aleatórios no nível u, ou seja, a imagem em $\mathbb{Z}^d$ de todas as trajetórias que compõem ω tal que o rótulo real positivo associado seja menor do que u:

$$\mathcal{I}^u = \sum_{u_i \le u} Imagem(\varrho_i^*),$$

e seu complemento, o chamado conjunto vacante no nível u:

$$\mathcal{V}^u = \mathbb{Z}^d \setminus \mathcal{I}^u$$

Consideramos em $\mathbb{Z}^d$ a σ-álgebra gerada pelas coordenadas canônicas $(Y_x : x \in \mathbb{Z}^d)$. Mapeamos o espaço de probabilidade do processo de Poisson em $(\mathbb{W}, \mathcal{W})$ no espaço de probabilidade $(\mathbb{Z}^d, \mathcal{Y})$, usando a função

$$\Pi^u(\omega) = (1_{x \in \mathcal{V}(\omega)} : x \in \mathbb{Z}^d)$$

que leva de $\mathfrak{O}$ a $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$. Dado $A \subset \mathbb{Z}^d$ finito, temos que $A \subseteq \mathcal{V}^u$ se e somente se $\omega(\mathbb{W}_A^* \times [0,u]) = 0$. Dessa forma podemos calcular $\Pi^u(\omega)$ em qualquer conjunto cilíndrico, o que mostra que Π^u é mensurável. Finalmente, consideramos a lei Q^u do conjunto vacante no nível u como sendo

$$Q^u = \mathfrak{Q}(\Pi^{u-1}(\cdot)).$$

Introduzimos a seguinte notação, que necessitaremos mais tarde. Definimos a função $s_A : \mathbb{W}_A^* \mapsto \mathbb{W}$

$$s_A(\varrho^*) = \varrho^0, \text{ onde } \varrho^0 \text{ é o único elemento em } W_A^0 \text{ tal que } \pi(\varrho^0) = \varrho^*.$$

Vamos agora mostrar uma propriedade básica do processo que acabamos de contruir. Definimos a função de Green para o passeio aleatório simples:

$$g(x,y) = \mathbb{E}_x(\sum_{n \ge 0} 1_{\{X_n = y\}}) = \sum_{n \ge 0} \mathbb{P}_x\big[X_n = y\big].$$

Denotando por $N_{x,y}$ a variável aleatória que conta o número de visitas que o passeio aleatório que começa em x faz a y, conseguimos escrever a função de Green como

$$g(x,y) = \mathbb{E}(N_{x,y}).$$

Denotamos $g(x,0)$ por $g(x)$ e observamos que a reversibilidade do passeio aleatório simples implica $g(x,y) = g(y,x)$. Pelo teorema 4.3.1 de [17], temos, para contantes $c, c' > 0$,

$$\frac{c'}{1 + |x+y|^{d-2}} \le g(x,y) \le \frac{c}{|x+y|^{d-2}}.$$

Definimos para $A \subset \mathbb{Z}^d$, com $|A| < \infty$, a função capacidade de A, dada por

$$\mathrm{cap}(A) = \sum_{x \in A} e_A(x).$$

A Proposição 6.5.2 nos garante então que

$$\mathrm{cap}(B(0,r)) = c'' r^{d-2} + O(n^{d-1}).$$

O Lema seguinte mostra como calcular a probabilidade de certos conjuntos serem contidos pelo conjunto vacante.

Lema 2.2. *Para todo $u \geq 0$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$, e $A \subset Z^d$ tal que $|A| < \infty$, vale*

$$\mathbb{P}\big[A \subset \mathcal{V}^u\big] = \exp\big\{-u\,\mathrm{cap}(A)\big\},$$

$$\mathbb{P}\big[x \in \mathcal{V}^u\big] = \exp\big\{-\frac{u}{g(0)}\big\},$$

$$\mathbb{P}\big[\{x,y\} \subset \mathcal{V}^u\big] = \exp\big\{-\frac{2u}{g(0)+g(x-y)}\big\}.$$

Demonstração. $\{A \subset \mathcal{V}^u\}$ é o evento em que não existe nenhum ponto selecionado em $\mathbb{W}^*_A \times [0,u]$ pelo processo de Poisson em $\mathbb{W}^* \times \mathbb{R}_+$. Como $\nu(\mathbb{W}^*_A \cap \cdot) = Q_A\big[\pi^{*-1}(\cdot)\big]$, temos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big[A \subset \mathcal{V}^u\big] &= \exp\big\{-\nu(\mathbb{W}^*_A)\mathrm{d}v([0,u])\big\}\\ &= \exp\big\{-ue_A(\mathbb{Z}^d)\big\}\\ &= \exp\big\{-u\,\mathrm{cap}(A)\big\}.\end{aligned}$$

Resta então calcular $\mathrm{cap}(\{x\})$ e $\mathrm{cap}(\{x,y\})$. Usando a propriedade forte de Markov nós conseguimos

$$\begin{aligned}g(0) &= \mathbb{E}_x(N_{x,x}) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}_x\big[N_{x,x} \geq k\big]\\ &= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}_x\big[\tilde{H}_x < \infty\big]^k = \frac{1}{1 - \mathbb{P}_x\big[\tilde{H}_x < \infty\big]}\\ &= \frac{1}{\mathbb{P}_x\big[\tilde{H}_x = \infty\big]} = \mathrm{cap}(\{x\})^{-1},\end{aligned}$$

o que prova a segunda parte do Lema.

Seja $L = L(A) = \sup\{n \geq 0, X_n \in A\}$ o último instante em que o passeio aleatório estave em A. Então

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_x\big[H_A < \infty\big] &= \mathbb{P}_x\big[L \geq 0\big] = \sum_{x' \in A} \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_x\big[L = n, X_L = x'\big] \\
&= \sum_{x' \in A} \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_x\big[X_n = x', X_k \notin A \text{ para } k > n\big] \\
&= \sum_{x' \in A} \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_x\big[X_n = x'\big] e_A(x') = \sum_{x' \in A} g(x, x') e_A(x').
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

Escrevemos

$$e_{\{x,y\}}(\cdot) = \rho_x 1_x(\cdot) + \rho_y 1_y(\cdot),$$

onde ρ_x e ρ_y são constantes reais. Com essa notação, temos

$$\mathrm{cap}(\{x, y\}) = \rho_x + \rho_y.$$

Mas (2.10) implica

$$1 = \mathbb{P}_x\big[H_{\{x,y\}} < \infty\big] = g(x, y)\rho_y + g(x, x)\rho_x$$

e

$$1 = \mathbb{P}_y\big[H_{\{x,y\}} < \infty\big] = g(y, y)\rho_y + g(y, x)\rho_x.$$

Usando a homogeneidade do passeio aleatório simples, vemos que $g(x, x) = g(y, y) = g(0)$, e $g(x, y) = g(y, x) = g(x - y)$. Substituindo esses valores e resolvendo o sistema acima, vemos que

$$2 = (g(x - y) + g(0))\,\mathrm{cap}(\{x, y\}),$$

ou seja

$$\mathrm{cap}(\{x, y\}) = \frac{2}{g(x - y) + g(0)}.$$

Isso termina a prova do Lema.

□

Para terminar a seção, vamos calcular a covariância entre as variáveis aleatórias $1_{x \in \mathcal{V}^u}$ e $1_{y \in \mathcal{V}^u}$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(1_{x \in \mathcal{V}^u}, 1_{y \in \mathcal{V}^u}) &= Q^u\big[x, y \in \mathcal{V}^u\big] - Q^u\big[x \in \mathcal{V}^u\big] Q^u\big[y \in \mathcal{V}^u\big] \\
&= \exp\Big\{ - \frac{2u}{g(0) + g(x - y)} \Big\} - \exp\Big\{ - \frac{2u}{g(0)} \Big\}.
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

Usando o fato que $g(x-y)$ possui ordem $|x-y|^{-(d-2)}$ quando $|x-y| \to \infty$ e a fórmula de Taylor, a expressão acima fica próxima de

$$g(x-y)\frac{\mathrm{d}\exp\left\{-\frac{2u}{g(0)+t}\right\}}{\mathrm{d}t}\Bigg|_{t=0} = g(x-y)\frac{2u}{g(0)^2}\exp\left\{-\frac{2u}{g(0)}\right\}.$$

Logo, $Cov(1_{x\in\mathcal{V}^u}, 1_{y\in\mathcal{V}^u})$ possui a mesma ordem que $g(x,y)$ quando $|x-y| \to \infty$, ou seja, $Cov(1_{x\in\mathcal{V}^u}, 1_{y\in\mathcal{V}^u})$ possui ordem $|x-y|^{-(d-2)}$.

3 Tempos Locais Suaves

Nesta seção definiremos os chamados tempos locais suaves, uma ferramenta introduzida por Popov e Teixeira em [1] que nos permite simular sequências de variáveis aleatórias usando uma realização de um processo de Poisson em um espaço adequado. A possibilidade de simular sequências de variáveis aleatórias com leis distintas utilizando uma única realização do processo de Poisson será crucial para o desacoplamento no resultado principal desta tese.

Começamos com as definições necessárias. Seja Σ um espaço métrico polonês localmente compacto, $\mathcal{B}(\Sigma)$ sua σ-álgebra de Borel e μ uma medida de Radon sobre Σ (ou seja, todo conjunto compacto poussui medida μ finita). Esses são os pré-requisitos padrão para a construção de um processo de Poisson em Σ. Para tal, consideramos o espaço de medidas pontuais de Radon em $\Sigma \times \mathbb{R}_+$

(3.1)
$$L = \Big\{\eta = \sum_{\lambda\in\Lambda} \delta_{(z_\lambda, v_\lambda)}; z_\lambda \in \Sigma, v_\lambda \in \mathbb{R}_+ \text{ and } \eta(K) < \infty \text{ para todo } K \text{ compacto}\Big\},$$

dotado da σ-álgebra $\mathcal{D}$ gerada pelas funções $d_S : \eta \mapsto \mathbb{N}$, $d_S(\eta) = \eta(S)$, com $S \in \mathcal{B}(\Sigma) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

Apesar de o conjunto de índices Λ ser necessariamente enumerável, não o ordenaremos a princípio já que os próprios pontos (z_λ, v_λ) serão ordenados no decorrer da construção dos tempos locais suaves.

Podemos agora construir de forma canônica um processo de Poisson η no espaço $(L, \mathcal{D}, \mathbb{Q})$ com intensidade $\mu \otimes \mathrm{d}v$, onde $\mathrm{d}v$ é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}_+$. Tal construção é feita em detalhes na Proposição 3.6 de [18].

A próxima proposição, tirada da seção 4 de [1], é o resultado principal na construção dos tempos locais suaves, ela nos permite simular um elemento aleatório de Σ usando o processo η.

Proposição 3.1. *Seja $g : \Sigma \to \mathbb{R}_+$ uma função mensurável com $\int g(z)\mu(\mathrm{d}z) = 1$. Para $\eta = \sum_{\lambda\in\Lambda} \delta_{(z_\lambda,v_\lambda)} \in L$, definimos*

$$\xi = \inf\{t \geq 0;\ \textit{existe}\ \lambda \in \Lambda\ \textit{tal que}\ tg(z_\lambda) \geq v_\lambda\}. \tag{3.2}$$

Então, de acordo com a lei $\mathbb{Q}$ do processo η,

(i) existe q.c. um único $\hat{\lambda} \in \Lambda$ tal que $\xi g(z_{\hat{\lambda}}) = v_{\hat{\lambda}}$,

(ii) $(z_{\hat{\lambda}}, \xi)$ é distribuído como $g(z)\mu(dz) \otimes \mathrm{Exp}(1)$,

(iii) $\eta' := \sum_{\lambda\neq\hat{\lambda}} \delta_{(z_\lambda,v_\lambda-\xi g(z_\lambda))}$ tem a mesma lei que η e é independente de $(\xi, \hat{\lambda})$.

Demonstração. Dado $A \subseteq \Sigma$, definimos a variável aleatória

$$\xi^A = \inf\{s \geq 0,\ \text{existe}\ \lambda \in \Lambda\ \text{tal que}\ s1_A g(z_\lambda) \geq v_\lambda\},$$

e, para $t \geq 0$, o conjunto

$$D_{A,t} = \{(z, v) \in A \times \mathbb{R}_+,\ tg(z) \geq v\}.$$

Temos então

$$\mathbb{Q}\big[\xi^A \geq t\big] = \mathbb{Q}\big[\eta(D_{A,t} = 0)\big] = e^{-t\int_A g(z)\mu(dz)},$$

o que implica que ξ_A tem distribuição exponencial com parâmetro $\int_A g(z)\mu(dz)$. Além disso, se $A, B \subseteq \Sigma$ são disjuntos, o fato de $\eta(D_{A,t})$ ser independente de $\eta(D_{B,s})$ para todo $t, s \geq 0$ implica que ξ^A e ξ^B são independentes.

Usamos o fato de Σ ser separável para encontrar uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $x_n \in \Sigma$ para todo $n \in \mathbb{N}$, densa em Σ. Definimos os conjuntos

$$A_{n,k} = \big\{z \in \Sigma,\ d_\Sigma(z, x_n) \leq \frac{1}{k}\big\},$$

onde d_Σ é a distancia no espaço métrico Σ. Então a probabilidade de que (i) não valha é menor do que

$$\mathbb{Q}\big[\bigcup_{\substack{n_1,k_1,n_2,k_2:\\ A_{n_1,k_1}\cap A_{n_2,k_2}=\emptyset}} \xi^{A_{n_1,k_1}} = \xi^{A_{n_2,k_2}}\big].$$

Como a união acima é enumerável e como a probabilidade de que duas variáveis aleatórias exponenciais independentes tenham o mesmo valor é 0, temos que (i) ocorre quase certamente.

Notamos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}\big[\xi \geq \alpha, z_{\hat{\lambda}} \in A\big] &= \mathbb{Q}\big[\xi^{\Sigma\setminus A} > \xi^{A} \geq \alpha\big] \\
&= \mathbb{Q}\big[\xi^{A} = \min\{\xi^{A}, \xi^{\Sigma\setminus A}\}, \min\{\xi^{A}, \xi^{\Sigma\setminus A}\} \geq \alpha\big] \\
&= \mathbb{Q}\big[\xi^{A} = \min\{\xi^{A}, \xi^{\Sigma\setminus A}\}\big]\mathbb{Q}\big[\min\{\xi^{A}, \xi^{\Sigma\setminus A}\} \geq \alpha\big] \\
&= \frac{\int_A g(z)\mu(dz)}{\int_A g(z)\mu(dz) + \int_{\Sigma\setminus A} g(z)\mu(dz)} e^{-(\int_A g(z)\mu(dz) + \int_{\Sigma\setminus A} g(z)\mu(dz))\alpha} \\
&= e^{-\alpha} \int_A g(z)\mu(dz),
\end{aligned}$$

onde utilizamos propriedades bem conhecidas do mínimo de variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial. Com isso, provamos (ii).

Para provar (iii), usamos a propriedade forte de Markov para processos de Poisson e observamos que $\{(z,v) \in \Sigma \times \mathbb{R}_+; v \leq \xi g(z)\}$ é um conjunto de parada (ver Teorema 4 de [20]). Desse modo, vemos que dado ξ, $\eta'' := \sum_{\lambda \neq \hat{\lambda}} \delta_{(z_\lambda, v_\lambda)}$ é um processo de Poisson, independente de $z_{\hat{\lambda}}$ e, quando condicionado em ξ, com medida de intensidade $1_{v > \xi g(z)} \cdot \mu \otimes \mathrm{d}v$. η' será então um mapeamento de η'' (no sentido de [19], Proposição 3.7) que leva a medida $1_{v > \xi g(z)} \cdot \mu \otimes \mathrm{d}v$ na medida $\mu \otimes \mathrm{d}v$. Como essa última distribuição não depende de ξ, fica provado o item (iii).

□

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ variáveis aleatórias em Σ tais que X_1 tem distribuição absolutamente contínua em relação a μ e, para todo $i = 2, \ldots, n, \ldots$, a medida de probabilidade gerada por X_i condicionada nos valores de $X_1, \ldots, X_{i-1}$ é absolutamente contínua em relação a μ. Usando o processo η construído acima, juntamente com a Proposição 3.1, nós definimos

$$\begin{aligned}
& g_1 : \Sigma \mapsto \mathbb{R}_+, \text{ a função densidade de } X_1 \text{ com respeito a } \mu, \\
& \xi_1 := \inf\big\{t \geq 0;\ \text{existe } \lambda \in \Lambda \text{ tal que } t g_1(z_\lambda) \geq v_\lambda\big\}, \\
& G_1(z) := \xi_1\, g_1(z),\ \text{ para } z \in \Sigma, \\
& (z_{\lambda_1}, v_{\lambda_1}), \text{ o único par em } \big\{(z_\lambda, v_\lambda)\big\}_{\lambda \in \Lambda} \text{ com } G_1(z_{\lambda_1}) = v_{\lambda_1}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Nós definimos então $g_2 : \Sigma \mapsto \mathbb{R}_+$ como sendo a função densidade de X_2 condicionada no evento $\{X_1 = z_{\lambda_1}\}$. Usando o fato que $\eta_1 := \sum_{\lambda \neq \hat{\lambda}_1} \delta_{(z_\lambda, v_\lambda - \xi_1 g_1(z_\lambda))}$ tem a mesma lei que η e é independente de (ξ_1, λ_1), nós definimos

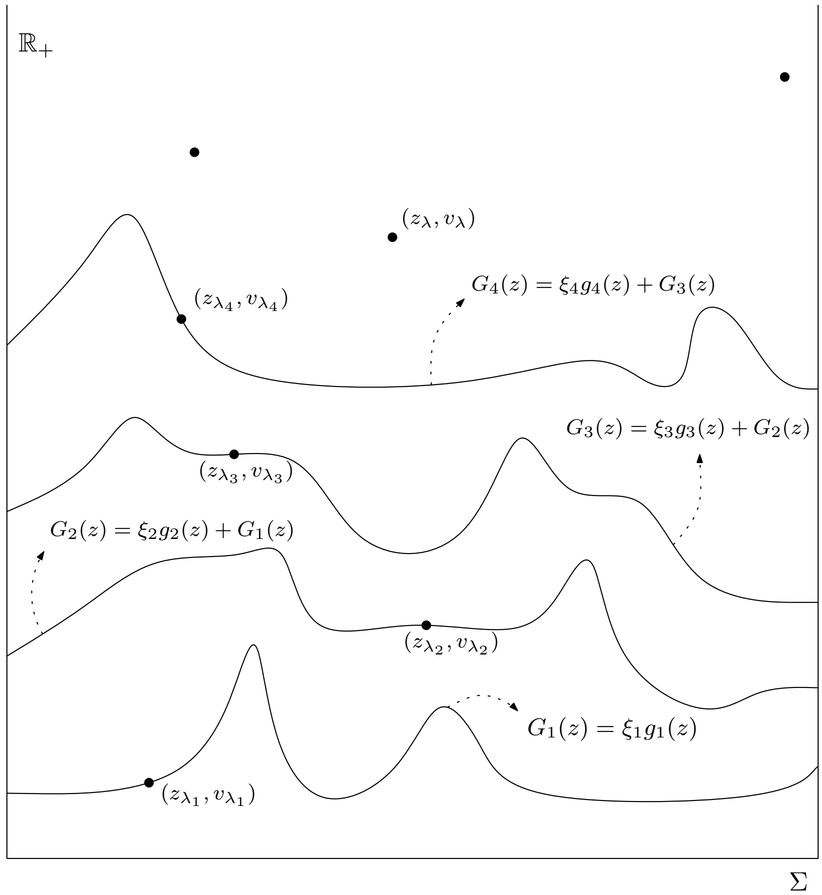

Figura 1: Um exemplo mostrando a construção dos tempos locais suaves. Sob condições brandas conseguimos usar a Proposition 3.1 para simular uma sequência de variáveis aleatórias em Σ.

$$
\begin{aligned}
&\xi_2 := \inf\big\{t \geq 0;\ \text{existe } \lambda \in \Lambda \text{ tal que } tg_2(z_\lambda) + G_1(z_\lambda) \geq v_\lambda\big\},\\
(3.4)\qquad &G_2(z) := \xi_2\, g_2(z) + G_1(z),\ \text{ para } z \in \Sigma,\\
&(z_{\lambda_2}, v_{\lambda_2}),\ \text{o único par } \{(z_\lambda, v_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda} \text{ com } G_2(z_{\lambda_2}) = v_{\lambda_2}.
\end{aligned}
$$

E definimos recursivamente, para $1 \leq k \leq n$, $g_k : \Sigma \mapsto \mathbb{R}_+$ como a função densidade de X_k condicionada no evento $\{X_1 = z_{\lambda_1}, \ldots, X_{k-1} = z_{\lambda_{k-1}}\}$,

$$
\begin{aligned}
&\xi_k := \inf\big\{t \geq 0;\ \text{existe } \lambda \in \Lambda \text{ tal que } tg_k(z_\lambda) + G_{k-1}(z_\lambda) \geq v_\lambda\big\},\\
(3.5)\qquad &G_k(z) := \xi_k\, g_k(z) + G_{k-1}(z),\ \text{ para } z \in \Sigma,\\
&(z_{\lambda_k}, v_{\lambda_k}),\ \text{o único par em } \{(z_\lambda, v_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda} \text{ com } G_k(z_{\lambda_k}) = v_{\lambda_k}.
\end{aligned}
$$

Veja a figura 1. Usando a Proposição 3.1 juntamente com a construção acima, provamos a seguinte proposição:

Proposição 3.2. *O vetor* $(z_{\lambda_1}, \ldots, z_{\lambda_n})$ *tem a mesma distribuição que* $(X_1, \ldots, X_n)$.

Nós chamamos a função $G_n(z)$ de o tempo local suave da sequência

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)$$

até o tempo n com respeito à medida μ, ou simplesmente de o tempo local suave. Se T é tempo de parada com respeito à fitração canônica gerada pelas X_i, podemos construir analogamente $G_T(z)$, o tempo local suave até o tempo T.

Observamos que se formos capazes de controlar os valores dos tempos locais suaves, conseguiremos controlar também os valores que a sequência de variáveis aleatórias associada assume, como o próximo corolário sumariza:

Corolário 3.3. *Para qualquer função mensurável* $h : \Sigma \to \mathbb{R}_+$ *nós temos, usando a mesma notação que acima,*

(3.6)

$$\mathbb{Q}\Big[\{z_1, \ldots, z_T\} \subseteq \{z_\lambda; v_\lambda \leq h(z_\lambda)\}\Big] \geq \mathbb{Q}\big[G_T(z) \leq h(z),\ \textit{para } \mu\textit{-quase todo } z \in \Sigma\big],$$

para qualquer tempo de parada finito $T \geq 1$.

4 Simulando Excursões

Nesta seção nós mostraremos um modo de simular a interseção do conjunto de entrelaçamentos aleatórios no nível u, $\mathcal{I}^u$, com uma bola fechada de uma maneira que fique explícita a dependência que cada excursão que um passeio aleatório faz na bola possui com seus pontos de entrada e saída em tal bola.

Mais especificamente, para $r, s > 0$, sejam $A_1 := B(0, r)$ a bola discreta de raio r centrada na origem, $A_2 := B(0, r+2s)$ a bola discreta de raio $r+2s$ centrada na origem, e $V := \partial B(0, r+s)$, a esfera de raio $r+s$ centrada na origem.

O que pretendemos é estudar $\mathcal{I}^u_{A_1} = \mathcal{I}^u \cap A_1$, mostrando que tal conjunto não depende muito do conjunto de entrelaçamentos aleatórios em A_2, $\mathcal{I}^u_{A_2} = \mathcal{I}^u \cap A_2$. Deixaremos claro o que queremos dizer com isso nas seções seguintes. Por enquanto, observamos apenas que a única "informação" que $\mathcal{I}^u_{A_2}$ dá a $\mathcal{I}^u_{A_1}$ é a localização dos pontos de entrada e saída das excursões dos passeios aleatórios em A_2^C.

Faremos as contas com r e s a arbitrários a princípio. Observamos que quanto menor s em relação a r, mais forte seria esse resultado de "independência" entre $\mathcal{I}^u_{A_2}$ e $\mathcal{I}^u_{A_1}$: com uma pequena zona de buffer entre A_1 e A_2 já conseguiríamos garantir essa "independência" procurada. Mostraremos mais tarde que, apesar de não conseguirmos escolher r e s arbitrários, conseguiremos mostrar o resultado desejado com $s = o(r)$.

Vamos mostrar então como simular $\mathcal{I}^u_{A_1}$ sem descobrir a configuração de $\mathcal{I}^u_{A_2}$. Do Teorema 2.1 vem o fato que, para simular o conjunto dos entrelaçamentos aleatórios no nível u em um subconjunto limitado $K \subset \mathbb{Z}^d$, precisamos apenas de $N^u_K \sim Poisson(u\,\mathrm{cap}(K))$ pontos em ∂K, cada ponto escolhido de acordo com $\overline{e}_K(\cdot)$, e, a partir de cada ponto desses, gerar um passeio aleatório simples.

Primeiramente nós geramos os pontos de entrada em V e saída em ∂A_2 de cada excursão em V que um passeio aleatório dado faz. Esses pontos serão o varal onde penduraremos os pedaços de trajetória que entram em A_1, faremos isso utilizando o método dos tempos locais suaves.

Vamos definir os tempos sucessivos de entrada e saída entre V e A_2. Dada uma trajetória que começa em V, nós definimos

$$\begin{aligned} &D_0 = 0, && R_1 = H_{\partial A_2}, \\ &D_1 = H_V \circ \theta_{R_1} + R_1, && R_2 = H_{\partial A_2} \circ \theta_{D_1} + D_1, \\ &D_2 = H_V \circ \theta_{R_2} + R_2 && \text{e assim por diante.} \end{aligned}$$

Também definimos o tempo de parada

$$T_\Delta = \inf\{k \geq 1; D_k = \infty\}, \tag{4.1}$$

que é quase certamente finito, já que o passeio é transiente quando $d \geq 3$.

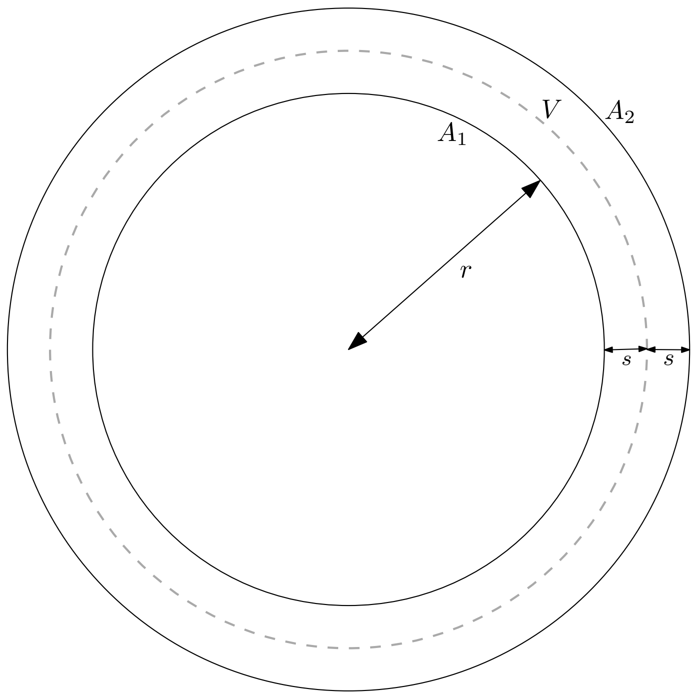

Figura 2: Definição dos conjuntos A_1, A_2 e V.

Seja X_n a n-ésima entrada desse passeio aleatório simples começando em V. Nós definimos o par $(W_1, Y_1) \in V \times \partial A_2$ como tendo a mesma lei que (X_{D_0}, X_{R_1}). Em geral, se $1 \leq k < T_\Delta$, nós definimos $(W_k, Y_k) \in V \times \partial A_2$ como tendo a mesma lei que $(X_{D_{k-1}}, X_{R_k})$

No tempo T_Δ nós matamos o processo $((W_k, Y_k))_{k\geq 1}$, já que o passeio nunca retorna a V, e para todo $k \geq T_\Delta$ nós diremos que (W_k, Y_k) está no estado Δ, um estado artificial introduzido para denotar a morte do processo.

É então simples de verificar que o processo $((W_k, Y_k))_{k\geq 1}$ herda a propriedade de Markov do passeio aleatório simples. Nós chamaremos $((W_k, Y_k))_{k\geq 1}$ de o processo varal começando em W_1. Quando não houver risco de confusão nós também denotaremos por $\mathbb{P}_{w_0}$ a medida de probabilidade associada ao processo varal começando em um ponto $w_0 \in V$ dado.

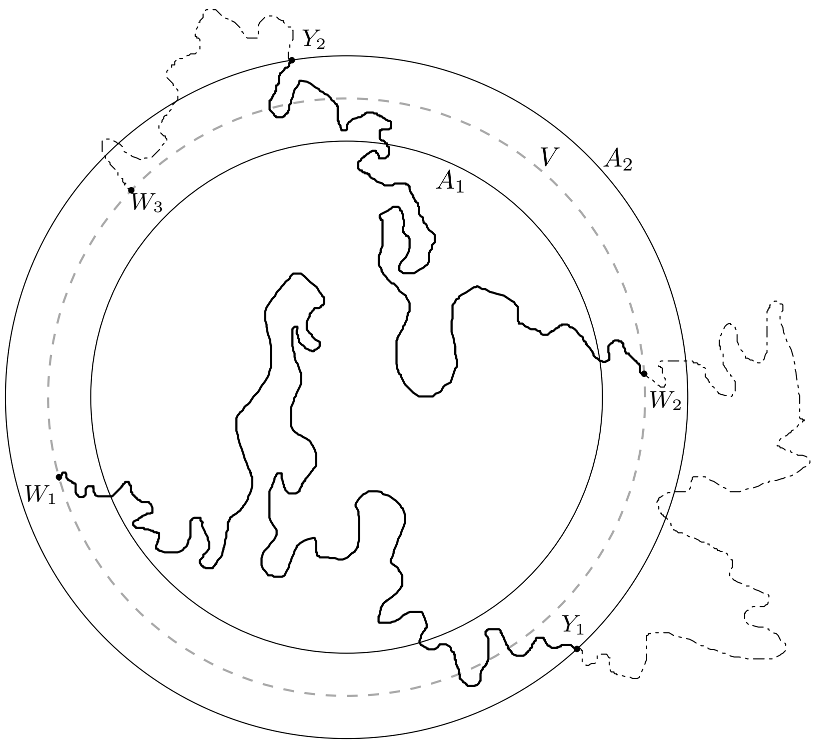

Figura 3: Um exemplo do processo varal $((W_k, Y_k))_{k\geq 1}$.

Vamos agora usar o método dos tempos locais suaves para gerar as trajetórias dentro de A_1, dados os pontos de entrada e saída $((W_k, Y_k))_{k\geq 1}$. Primeiro definiremos o espaço Σ onde os nossos pedaços de trejetória viverão. Seja $\mathcal{K}$ o conjunto de caminhos finitos de primeiros vizinhos em $(\mathring{A}_2^C)$ com o primeiro ponto em ∂A_1 e o último em V.

(4.2)

$$\mathcal{K} := \big\{(x_0, x_1, \ldots, x_n); n \in \mathbb{N}, x_i \in (\mathring{A}_2^C) \text{ para } 1 \le i \le n, x_0 \in \partial A_1, x_n \in V\big\}.$$

Nós introduzimos outro estado artifical Θ por motivos que serão esclarecidos em breve. Definimos $\Sigma := \mathcal{K} \cup \{\Theta\}$ e definimos μ como uma medida em Σ tal que para cada $A \subseteq \Sigma$,

$$\mu(A) := \sum_{(x_0,\ldots,x_n)\in A} \mathbb{P}_{(x_0,x_n)}[X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n] + 1_{\{\Theta \in A\}}, \tag{4.3}$$

onde $\mathbb{P}_{(x_0,x_n)}$ é a medida do passeio aleatório simples condicionada no evento em que x_0 é o ponto inicial do passeio e x_n é o último ponto que o passeio visita em V antes de chegar a ∂A_2. Note que $\mu(\{\Theta\}) = 1$.

Usando a construção acima nós queremos selecionar aleatoriamente um pedaço de trajetória em Σ dado o ponto inicial da trajetória em V e o ponto final da trajetória em ∂A_2. Dado $w \in V$ e $y \in \partial A_2$ nós definimos o elemento aleatório $\sigma_{w,y} \in \Sigma$ como sendo ou Θ, no evento em que o passeio aleatório começando em w e saindo em y não chega a atingir A_1, ou uma trajetória de passeio aleatório simples $(x_0^{w,y}, x_1^{w,y}, \ldots, x_{k(w,y)}^{w,y}) \in \mathcal{K}$ distribuída de modo que $x_0^{w,y}$ é o primeiro ponto em A_1 depois do começo da trajetória em w, e $x_{k(w,y)}^{w,y}$ é o último ponto em V antes que a trajetória atinja y em ∂A_2. Nós definimos então $g_{(w,y)} : \Sigma \mapsto \mathbb{R}_+$ como sendo a μ-densidade de $\sigma_{w,y}$. Veja a figura 4.

Dado $(w, y) \in V \times \partial A_2$ nós definimos $\mathbb{P}_{w,y}$ como a medida de probabilidade do passeio aleatório simples começando em w condicionada no evento em que y é o primeiro ponto que o passeio atinge em ∂A_2,ou seja:

$$\mathbb{P}_{w,y}[\cdot] := \mathbb{P}_w[\ \cdot \mid X_{H_{\partial A_2}} = y] \tag{4.4}$$

Dado $z = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathcal{K}$ nós denotamos por $\Omega(z)$ o par (x_0, x_n), o par de pontos das extremidades da trajetória. Também definimos $\Omega(\Theta) = \Theta$, de modo que $\Omega(z)$ esteja definido para todo $z \in \Sigma$. Para $(w, y) \in V \times \partial A_2$ nós definimos $\Omega(w, y)$ como o par de pontos aleatório $\Omega(\sigma_{w,y})$.

Vamos calcular $g_{(w,y)}$ usando a notação acima. Dado $A \subseteq \Sigma$ nós queremos

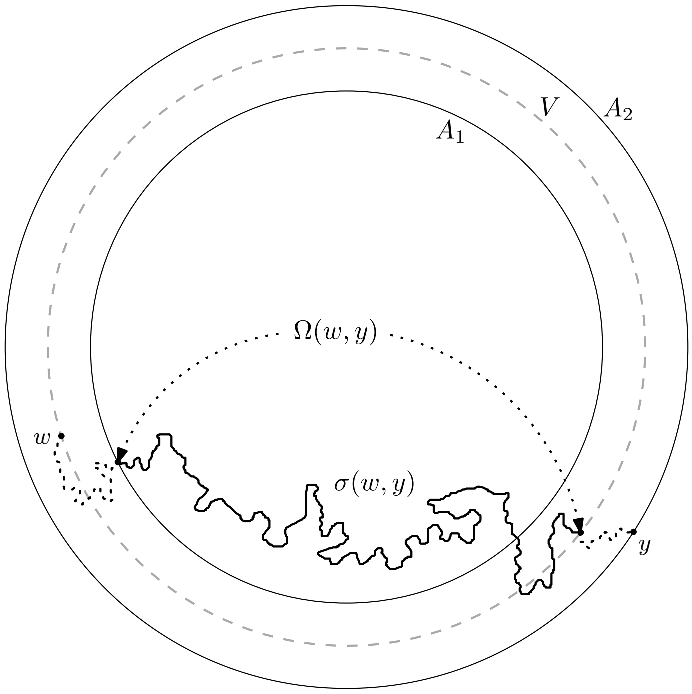

Figura 4: A definição de $\sigma(w, y)$ e $\Omega(w, y)$.

expressar a probabilidade $\mathbb{P}[\sigma_{w,y} \in A]$ como uma μ-integral sobre A.

(4.5)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\sigma_{w,y} \in A] &= \sum_{a \in A} \mathbb{P}[\sigma_{w,y} = a] \\ &= 1_{\{\Theta \in A\}} \mathbb{P}_{w,y}[\Omega(w,y) = \Theta] + \sum_{\substack{a \in A \\ a \neq \Theta}} \mathbb{P}_{w,y}[\Omega(w,y) = \Omega(a)] \mathbb{P}_{\Omega(a)}[a] \\ &= \sum_{a \in A} \mathbb{P}_{w,y}[\Omega(w,y) = \Omega(a)] \mu(a) = \int_A \mathbb{P}_{w,y}[\Omega(w,y) = \Omega(z)] \mu(\mathrm{d}z),\end{aligned}$$

de modo que $g_{(w,y)}(z) = \mathbb{P}_{w,y}[\Omega(w,y) = \Omega(z)]$. Observe que a função $g_{(w,y)}(z)$ depende apenas do par $\Omega(z)$, as extremidades do caminho z.

Seja $(L, \mathcal{D}, \mathbb{Q})$ o espaço de medida do processo de Poisson no espaço $\Sigma \times \mathbb{R}_+$ com a medida de intensidade $\mu \otimes \mathrm{d}v$, onde $\mathrm{d}v$ é a medida de Lesbesgue em $\mathbb{R}_+$ Nós iremos querer substituir o índice fixo (w, y) em $g_{(w,y)}$ por um processo varal $((W_k, Y_k))_{k \geq 1}$, e então usar as funções resultantes como tempos locais suaves para simular os pedaços de trajetória que precisamos. Como a definição dos entrelaçamentos aleatórios dentro de V requer um número $N_V^u \sim Poisson(u \operatorname{cap}(V))$ de passeios aleatórios independentes, precisaremos desse mesmo número de processos varal independentes. Para essa tarefa, necessitaremos de um espaço de probabilidade bem maior, facilmente definido como o produto do espaço do processo de Poisson com um produtório infinito e independente de espaços de probabilidade de passeio aleatório simples começando em V. Nós chamamos esse espaço de espaço de probabilidade global e denotamos por $\mathcal{P}$ sua medida de probabilidade, que chamamos de 'probabilidade global'.

Dado um processo varal $((W_k, Y_k))_{k\geq 1}$, definimos o tempo local suave da trajetória associada:

$$G(z) = \sum_{k=1}^{T_\Delta} \xi_k g_{(W_k,Y_k)}(z). \tag{4.6}$$

Precisaremos também considerar o tempo local suave até um tempo aleatório $T \leq T_\Delta$:

$$G_T(z) = \sum_{k=1}^{T} \xi_k g_{(W_k,Y_k)}(z). \tag{4.7}$$

Também fazemos uma definição análoga para qualquer tempo determinístico $n \geq 1$

$$G_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k g_{(W_k,Y_k)}(z) \tag{4.8}$$

e denotamos por z_k o k-ésimo pedaço de trajetória aleatoriamente selecionado pelo tempo local suave até o tempo $k \geq 1$, G_k.

Como vimos anteriormente, precisaremos de um número $N_V^u \sim Poisson(u\,\mathrm{cap}(V))$ de processos varal e tempos locais suaves associados para simular $\mathcal{I}_{A_1}^u$. Para $j = 1, \ldots, N_V^u$, nós definimos $((W_k^j, Y_k^j))_{k\geq 1}$ como sendo um processo varal começando em W_1^j de modo que $((W_k^j, Y_k^j))_{k\geq 1}$ é independente de $((W_k^i, Y_k^i))_{k\geq 1}$ quando $i \neq j$, e de modo que W_1^j tem a mesma lei que $\overline{e}_V(\cdot)$. Seja T_Δ^j o tempo de morte associado ao processo $((W_k^j, Y_k^j))_{k\geq 1}$. Nós denotamos por

$$G^j(z) = \sum_{k=1}^{T_\Delta^j} \xi_k^j g_{(W_k^j,Y_k^j)}(z) \tag{4.9}$$

o tempo local suave associado com o j-ésimo processo varal. Pela proposição 3.2, deve ser claro que conseguimos simular todos os elementos aleatórios

$(\sigma_{W_k^j,Y_k^j})_{j,k\geq 1}$ ao mesmo tempo utilizando apenas uma única realização do processo de Poisson em $\Sigma\times\mathbb{R}_+$. Como mostra o Corolário 3.3, para controlar os valores de $(\sigma_{W_k^j,Y_k^j})_{j,k\geq 1}$ precisamos apenas controlar a função

$$G_u^{\Sigma}(z) = \sum_{j=1}^{N_V^u} G^j(z), \tag{4.10}$$

o tempo local suave associado com todo o processo. Com tal objetivo em mente nossa motivação se torna estimar os momentos desse tempo local suave. Primeiramente mostramos um jeito mais simples de expressar a esperança de G(z).

Teorema 4.1. *Usando a mesma notação que acima, nós temos*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(G(z)) &= \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{T_\Delta} g_{(W_k,Y_k)}(z)\Big) = \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{T_\Delta} \mathbb{P}_{W_k,Y_k}[\Omega(W_k,Y_k)=\Omega(z)]\Big)\\ &= \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{T_\Delta} 1_{\{\Omega(W_k,Y_k)=\Omega(z)\}}\Big) = \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{T_\Delta} 1_{\{\Omega(X_{D_{k-1}},X_{R_k})=\Omega(z)\}}\Big).\end{aligned} \tag{4.11}$$

Temos então que a esperança de $G(z)$, para $z\neq\Theta$, é a mesma que a esperança de quantas vezes o passeio aleatório começando em W_1 fará uma excursão em A_2^C com os pontos de entrada e saída dados por $\Omega(z)$.

É claro que a mesma conta funciona para qualquer distribuição inicial de W_1. Dado $y\in\partial A_2$ nós definimos $\beta_y(\cdot)$ como sendo a medida de chegada em V de um passeio aleatório simples que começa em y. Podemos então tomar $\beta_y(\cdot)$ como a distribuição inicial de W_1. Definimos $\mathcal{P}_{\beta_y}$ como a medida global do processo quando a distribuição inicial do processo varal é dada por $\beta_y(\cdot)$, e denotamos por $\mathbb{E}_{\beta_y}$ a esperança associada. Precisaremos permitir nesse caso que o processo comece no estado cemitério Δ, denotando o evento em que o passeio aleatório começando em y nunca chega a V. Em uma definição análoga, denotamos $\mathcal{P}_{w_0}$ a medida global do processo com $w_0\in V$ sendo o ponto inicial do processo varal, e denotamos $\mathbb{E}_{w_0}$ a esperança associada.

O próximo teorema, adaptado de [1], nos dá uma cota superior para o segundo momento $\mathbb{E}(G(z))^2$.

Teorema 4.2. *Para qualquer $w_0\in V$,*

$$\mathbb{E}_{w_0}\big(G(z)\big)^2 \leq 2\mathbb{E}_{w_0}\big(G(z)\big)\Big(\sup_{w'\in V}\mathbb{E}_{w'}G(z)+\sup_{w,y} g_{(w,y)}(z)\Big). \tag{4.12}$$

Demonstração. Dado $z \in \Sigma$ e $n \geq 1$, podemos escrever (lembramos que a esperança de $(\mathrm{Exp}(1))^2$ é igual a 2)

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{w_0}\big(G_n(z)\big)^2 = \\
&\quad = \mathbb{E}_{w_0}\Big(\sum_{k=1}^{n} \xi_k g_{(W_k,Y_k)}(z)\Big)^2 \\
&\quad = \mathbb{E}_{w_0}\Big(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 g^2_{(W_k,Y_k)}(z)\Big) + \mathbb{E}_{w_0}\Big(2\sum_{k<k'\leq n} \xi_k\xi_{k'} g_{(W_k,Y_k)}(z) g_{(W_{k'},Y_{k'})}(z)\Big) \\
&\quad \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\xi_k^2 \sup_{w,y} g_{(w,y)}(z)\mathbb{E}_{w_0} g_{(W_k,Y_k)}(z) + 2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{k'=k+1}^{n} \mathbb{E}_{w_0}\big(g_{(W_k,Y_k)}(z) g_{(W_{k'},Y_{k'})}(z)\big) \\
&\quad \leq 2\sup_{w,y} g_{(w,y)}(z)\mathbb{E}_{w_0} G_n(z) + 2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{k'=k+1}^{n} \mathbb{E}_{w_0}\big(g_{(W_k,Y_k)}(z)\mathbb{E}_{w_0}(g_{(W'_k,Y'_k)}(z) \mid W_k, Y_k)\big) \\
&\quad \leq 2\sup_{w,y} g_{(w,y)}(z)\mathbb{E}_{w_0} G_n(z) + 2\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}_{w_0}\Big(g_{(W_k,Y_k)}(z)\mathbb{E}_{\beta_{Y_{k-1}}}\Big(\sum_{m=1}^{n-k} g_{(W_m,Y_m)}(z)\Big)\Big) \\
&\quad \leq 2\sup_{w,y} g_{(w,y)}(z)\mathbb{E}_{w_0} G_n(z) + 2\sup_{w'} \mathbb{E}_{w'}\Big(\sum_{m=1}^{n-k} g_{(W_m,Y_m)}(z)\Big)\mathbb{E}_{w_0}\Big(\sum_{k=1}^{n-1} g_{(W_k,Y_k)}(z)\Big) \\
&\quad \leq 2\mathbb{E}_{w_0}\big(G_n(z)\big)\big(\sup_{w'} \mathbb{E}_{w'} G_n(z) + \sup_{w,y} g_{(w,y)}(z)\big),
\end{aligned}
$$

provando o resultado para o tempo determinístico n. Fazemos então n tender ao infinito e usamos o teorema da convergência monótona para provar o teorema para o tempo T_Δ. $\square$

Para os resultados dessa tese, será essencial uma estimativa dos momentos exponenciais de G. O próximo teorema, novamente adaptado de [1], nos dá tal estimativa.

Teorema 4.3. *Dado $\hat{z} \in \Sigma$ e um subconjunto mensurável $\Gamma \subset \Sigma$, sejam*

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \inf\Big\{\frac{g_{(w,y)}(z')}{g_{(w,y)}(\hat{z})}; (w,y) \in V \times \partial A_2, z' \in \Gamma, g_{(w,y)}(\hat{z}) > 0\Big\}, \\
N(\Gamma) &= \#\{k \leq T_\Delta; z_k \in \Gamma\}, \ \text{ e} \\
\ell &\geq \sup_{(w,y)\in V\times\partial A_2} g_{(w,y)}(\hat{z}).
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Então, para qualquer $v \geq 2$,

$$
\mathcal{P}[G(\hat{z}) \geq v\ell] \leq \mathcal{P}[G(\hat{z}) \geq \ell]\Big(\exp\big\{-\big(\tfrac{v}{2}-1\big)\big\} + \sup_{w'} \mathcal{P}_{w'}\big[\eta(\Gamma\times[0, \tfrac{1}{2}v\ell\alpha]) \leq N(\Gamma)\big]\Big)
$$

(observe que $\eta(\Gamma \times [0, \frac{1}{2}v\ell\alpha])$ *é uma variável aleatória com distribuição* $\mathrm{Poisson}\big(\frac{1}{2}v\ell\alpha\mu(\Gamma)\big)$*).*

Primeiramente damos uma idéia de o que cada termo na cota acima representa. O primeiro termo no produto é explicado pelo fato que, para que $G(\hat{z})$ ultrapasse $v\ell$, ela primeiro tem que ultrapassar ℓ. Os dois termos dentro do parênteses correspondem respectivamente à probabilidade de $G(\hat{z})$ ultrapassar $v\ell$ a partir de um número menor que ℓ de uma só vez, e um termo de grandes desvios. Podemos esperar que o segundo termo decaia rapidamente conforme v cresce, já que $N(\Gamma)$ se torma muito menor do que o valor esperado de $\eta(\Gamma \times [0, \frac{1}{2}v\ell\alpha])$.

Demonstração. Defina o tempo de parada (com respeito à filtração $\mathcal{F}_n = \sigma((W_k, Y_k),$
$\xi_k, k \leq n))$

$$T_\ell = \inf\{k \geq 1; G_k(\hat{z}) \geq \ell\}. \tag{4.14}$$

Agora, para qualquer $v \geq 2$, podemos cotar $\mathcal{P}[G(\hat{z}) \geq v\ell]$ por

$$\mathcal{P}\big[T_\ell < \infty,\ G_{T_\ell}(\hat{z}) \geq \tfrac{v}{2}\ell\big] + \mathcal{P}\big[T_\ell < \infty,\ G_{T_\ell}(\hat{z}) < \tfrac{v}{2}\ell,\ G(\hat{z}) - G_{T_\ell}(\hat{z}) > \tfrac{v}{2}\ell\big] \tag{4.15}$$

(observe que $\mathcal{P}[G(\hat{z}) \geq \ell] = \mathcal{P}[T_\ell < \infty]$). Começamos estimando o primeiro termo da soma, que é igual a (usando a propriedade da perda de memória da distribuição exponencial)

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\Big(G_{n-1}(\hat{z}) < \ell, \mathcal{P}\big[\xi_n g_{(W_n,Y_n)}(\hat{z}) > \tfrac{v}{2}\ell - G_{n-1}(\hat{z}) \mid W_{n-1}, Y_{n-1}, G_{n-1}\big]\Big) \\
&\qquad \leq \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\Big(G_{n-1}(\hat{z}) < \ell, \mathcal{P}[\xi_1 g_{(W_n,Y_n)}(\hat{z}) > \ell - G_{n-1}]\, \mathcal{P}\big[\xi_1 g_{(W_n,Y_n)}(\hat{z}) > \big(\tfrac{v}{2} - 1\big)\ell\big]\Big) \\
&\qquad \leq \mathcal{P}[T_\ell < \infty] \sup_{(w',y')} \mathcal{P}\big[\xi_1 g_{(w',y')}(\hat{z}) > \big(\tfrac{v}{2} - 1\big)\ell\big] \\
&\qquad \leq \mathcal{P}[T_\ell < \infty] \exp\big\{-\big(\tfrac{v}{2} - 1\big)\big\}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Focamos agora na cota para o segundo termo em (4.15), que é

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big(T_\ell < \infty,\ G_{T_\ell}(\hat{z}) < \tfrac{v}{2}\ell, \mathcal{P}[G(\hat{z}) - G_{T_\ell}(\hat{z}) > \tfrac{v}{2}\ell \mid G_1, \dots, G_{T_\ell}]\big) \\
&\qquad \leq \mathcal{P}\big[T_\ell < \infty\big] \sup_{w'} \mathcal{P}_{w'}[G(\hat{z}) > \tfrac{v}{2}\ell].
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Usando agora que para todo $z' \in \Sigma$

$$G(z') = \sum_{k=1}^{T_\Delta} \xi_k g_{(W_k,Y_k)}(z') \geq \sum_{k=1}^{T_\Delta} \alpha \xi_k g_{(W_k,Y_k)}(\hat{z}) 1_\Gamma(z') = \alpha G(\hat{z}) 1_\Gamma(z'). \tag{4.18}$$

nós obtemos que para todo z'

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\big[G(\hat{z}) \geq \tfrac{v}{2}\ell\big] &\leq \mathcal{P}\Big[G(z') \geq \frac{1}{2}v\ell\alpha, \text{ para todo } z' \in \Gamma\Big] \\ &\leq \mathcal{P}\big[\eta(\Gamma \times [0, \tfrac{1}{2}v\ell\alpha]) \leq N(\Gamma)\big]. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Juntando (4.15) com (4.16), (4.17) e a conta acima nós obtemos o resultado desejado. □

5 Desacoplamento Condicional

Vamos reunir os resultados já apresentados para mostrar nosso resultado principal, a tal "independência" entre $\mathcal{I}^u_{A_1}$ e $\mathcal{I}^u_{A_2}$. Já adiantamos aqui de maneira informal o que queremos dizer com "independência". Iremos simular o conjunto de entrelaçamentos em A_1 no nível u de duas maneiras. Na primeira construiremos $\mathcal{I}^u_{A_1}$ usando o tempo local suave G^{Σ}_u, ou seja, simularemos $\mathcal{I}^u_{A_1}$ usando os tempos locais suaves indexados pelos processos varal. Na segunda maneira, construiremos um conjunto composto de trajetórias de passeios aleatórios em A_1 de uma maneira similar a da construção de $\mathcal{I}^u_{A_1}$, a única diferença será que os tempos locais suaves usados nessa segunda construção serão indexados por uma sequência dada $\hat{\varpi}$ de pares de pontos pertencentes a $V \times \partial A_2$. Denotaremos esse segundo conjunto aleatório por $\mathcal{I}^u_{A_1|\hat{\varpi}}$, e mostraremos usando o método dos tempos locais suaves que com alta probabilidade $\mathcal{I}^{u_1}_{A_1|\hat{\varpi}}$ e $\mathcal{I}^{u_2}_{A_1}$ são muito parecidos para u_1 e u_2 arbitrariamente próximos. Provaremos em seguida um resultado similar quando os pares de pontos que compõem a sequência dada pertencem todos a $\partial A_2 \times \partial A_2$.

Começamos com a seguinte cota:

$$\sup_{\substack{w' \in V \\ y' \in \partial A_2}} \mathbb{P}_{w',y'}\big[\Omega(w',y') = (w_0,y_0)\big] \leq \zeta_3 s^{-2(d-1)}, \tag{5.1}$$

cuja prova é técnica e portanto será adiada para a subseção 6.2 do apêndice.

Seja $z \in \Sigma$ tal que $\Omega(z) = (w_0, y_0)$, e seja $h := \mathrm{dist}(w_0, y_0)$. Escreveremos $F(w_0, y_0)$ no lugar de $G(z)$, deixando explícita a dependência do tempo local suave com os pontos extremais $\Omega(z)$. Definimos

$$\pi(w_0, y_0) := \mathbb{E}(F(w_0, y_0)). \tag{5.2}$$

O próximo lema, cuja prova também adiamos para o apêndice (seção 6.2), nos dá uma estimativa para $\pi(w_0, y_0)$.

Lema 5.1. *Usando a notação definida acima, nós temos, para constantes* $\zeta_5, \zeta_6, c_1 > 0$*:*

(i) $\zeta_5 \operatorname{cap}(V)^{-1} s h^{-d} \leq \pi(w_0, y_0) \leq \zeta_6 \operatorname{cap}(V)^{-1} s h^{-d}$,

(ii) $\mathbb{E}(F(w_0, y_0)^2) \leq c_1 \operatorname{cap}(V)^{-1} s^{-2d+4} h^{-d}$.

Além disso, como $\operatorname{dist}(w_0, y_0) \geq s$*, nós temos*

(iii) $\sup_{w_0, y_0} \pi(w_0, y_0) \leq \zeta_6 \operatorname{cap}(V)^{-1} s^{-(d-1)}$.

Vamos agora mostrar uma cota de grandes desvios para $F(w_0, y_0)$.

Lema 5.2. *Existem constantes* $\zeta_7, \zeta_8 > 0$ *tais que para todo* $(w_0, y_0) \in V \times \partial A_2$*, nós temos*

$$\mathcal{P}\big[F(w_0, y_0) > v\zeta_3 s^{-2(d-1)}\big] \leq \zeta_7 s^{2(d-1)} h^{-d} \operatorname{cap}(V)^{-1} e^{-\zeta_8 v} \tag{5.3}$$

para qualquer $v \geq 2$ *(podemos também supor* $\zeta_8 \leq 1$ *sem perda de generalidade).*

Demonstração. Usaremos o Teorema 4.3 para $F(w_0, y_0)$, com

$$\Gamma_{w_0, y_0} := \{(w_0', y_0') \in \partial A_1 \times V; \max\{||w_0' - w_0||, ||y_0' - y_0||\} \leq \frac{s}{4}\}.$$

Usando a mesma notação que o Teorema 4.3, observamos que (5.1) implica

$$l \leq \zeta_3 s^{-2(d-1)}$$

e notamos que que $\mu(\Gamma_{w_0, y_0}) \geq c_2 s^{2(d-1)}$ para alguma constante $c_2 > 0$. Além disso, como podemos ver na seção 6.3 do apêndice, nós temos

$$\alpha \geq \zeta_4 > 0.$$

A desigualdade de Chebyshev juntamente ao lema 5.1 implicam então

$$\mathcal{P}\big[T_l < \infty\big] = \mathcal{P}\big[F(w_0, y_0) > \zeta_3 s^{-2(d-1)}\big] \leq \frac{\pi(w_0, y_0)}{\zeta_3 s^{-2(d-1)}} \leq \zeta_3^{-1} \zeta_6 s^{2d-1} h^{-d} \operatorname{cap}(V)^{-1}. \tag{5.4}$$

Denotamos por $N(\Gamma_{w_0, y_0})$ o número de vezes que a trajetória de passeio aleatório associada a $F(w_0, y_0)$ faz uma excursão da forma $z' \in \Sigma$ em A_2^C tal que $\Omega(z') = (w', y') \in \Gamma_{w_0,y_0}$. Definimos também η_{w_0,y_0} como o número de pontos do processo de Poisson associado aos nossos tempos locais suaves que pertencem a $\Omega^{-1}(\Gamma_{w_0,y_0}) \times [0, \frac{1}{2}v\zeta_3\zeta_4 s^{-2(d-1)}]$. Notamos que ambas definições são consistentes com a notação do Teorema 4.3 e escrevemos

$$\mathcal{P}\big[\eta_{w_0,y_0} \leq N(\Gamma_{w_0,y_0})\big] \leq \mathcal{P}\big[\eta_{w_0,y_0} \leq \frac{\zeta_3\zeta_4 c_2 v}{4}\big] + \mathcal{P}\big[N(\Gamma_{w_0,y_0}) \geq \frac{\zeta_3\zeta_4 c_2 v}{4}\big].$$

Afirmamos que ambos os termos do lado direito da desigualdade acima são exponencialmente pequenos em v. Com efeito:

- η_{w_0,y_0} possui distribuição de Poisson com parâmetro maior ou igual a $\frac{\zeta_3\zeta_4 c_2 v}{2}$, e

- toda vez que o passeio aleatório associado a $F(w_0, y_0)$ atinge ∂A_2, com probabilidade uniformemente positiva esse passeio nunca mais atinge Γ_{w_0,y_0} novamente. Desse modo $N(\Gamma_{w_0,y_0})$ é dominada por uma variável aleatória geométrica de parâmetro c_3, para alguma constante $c_3 < 1$.

Juntamente a (5.4) e ao Teorema 4.3, isso conclui a prova do lema. □

Seja $\Psi_{w_0,y_0}(\lambda) = \mathbb{E}(e^{\lambda F(w_0,y_0)})$ a função geradora de momentos de $F(w_0, y_0)$. Vamos usar as cotas acima para estimar Ψ_{w_0,y_0}.É elementar obter que $e^t - 1 \leq t + t^2$ para $t \in [0, 1]$. Com essa observação em mente, nós escrevemos para $0 \leq \lambda \leq \frac{\zeta_8 s^{2(d-1)}}{2\zeta_3}$

$$
\begin{aligned}
&(5.5)\\
&\Psi_{w_0,y_0}(\lambda)-1 = \mathbb{E}(e^{\lambda F(w_0,y_0)}-1)1_{\lambda F(w_0,y_0)\le 1}+\mathbb{E}(e^{\lambda F(w_0,y_0)}-1)1_{\lambda F(w_0,y_0)>1}\\
&\qquad\le \mathbb{E}(\lambda F(w_0,y_0)+\lambda^2 F(w_0,y_0)^2)+\mathbb{E}(e^{\lambda F(w_0,y_0)}-1)1_{\lambda F(w_0,y_0)>1}\\
&\qquad\le \lambda\pi(w_0,y_0)+c_1\lambda^2\operatorname{cap}(V)^{-1}s^{-2d+4}h^{-d}+\mathbb{E}(e^{\lambda F(w_0,y_0)}-1)1_{\lambda F(w_0,y_0)>1}\\
&\qquad\le \lambda\pi(w_0,y_0)+c_1\lambda^2\operatorname{cap}(V)^{-1}s^{-2d+4}h^{-d}+\lambda\int_{\lambda^{-1}}^{\infty} e^{\lambda y}\mathcal{P}\big[F(w_0,y_0)>y\big]\mathrm{d}y\\
&\qquad\le \lambda\pi(w_0,y_0)+c_1\lambda^2\operatorname{cap}(V)^{-1}s^{-2d+4}h^{-d}+\lambda\zeta_7 s^{2d-1}h^{-d}\operatorname{cap}(V)^{-1}+\\
&\qquad +\int_{\lambda^{-1}}^{\infty} e^{(\frac{-\zeta_8 s^{2(d-1)}y}{2\zeta_3})}\mathrm{d}y\\
&\qquad\le \lambda\pi(w_0,y_0)+c_1\lambda^2\operatorname{cap}(V)^{-1}s^{-2d+4}h^{-d}+c_4\lambda s h^{-d}\operatorname{cap}(V)^{-1}e^{(\frac{-\zeta_8 s^{2(d-1)}\lambda^{-1}}{2\zeta_3})}\\
&\qquad\le \lambda\pi(w_0,y_0)+c_5\lambda^2\operatorname{cap}(V)^{-1}s^{-2d+4}h^{-d},
\end{aligned}
$$

onde usamos o Lema 5.1 e o Lema 5.2. Como $e^{-t}-1\le -t+t^2$ para todo $t\ge 0$, nós obtemos para $\lambda\ge 0$

$$
(5.6)\qquad \Psi_{w_0,y_0}(-\lambda)-1\le -\lambda\pi(w_0,y_0)+c_6\lambda^2\operatorname{cap}(V)^{-1}s^{-2d+4}h^{-d}
$$

(a cota de grandes desvios do Lema 5.2 não é necessária nesse caso).

Observe que se $(\chi_k, k\ge 1)$ são variáveis aleatórias i.i.d. com momento exponencial Ψ e N é uma variável aleatória de Poisson independente com parâmetro θ, então

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(\exp\big(\lambda\sum_{k=1}^{N}\chi_k\big)\big) &= \sum_{n\geq 0}\mathbb{E}\big(\exp\big(\lambda\sum_{k=1}^{n}\chi_k\big)1_{N=n}\big) \\
&= \sum_{n\geq 0}\prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}\big(\exp\big(\lambda\chi_k\big)\big)\mathbb{P}\big[N=n\big] \\
&= \sum_{n\geq 0}\Psi(\lambda)^n\mathbb{P}\big[N=n\big] \\
&= \sum_{n\geq 0}e^{-\theta}\frac{(\theta\Psi(\lambda))^n}{n!} \\
&= e^{(\theta(\Psi(\lambda)-1))}.
\end{aligned}
$$

Seja $F_k(w_0,y_0)$ a esperança $\mathbb{E}(G^k(z))$ definida em (4.9), quando $z\in\Sigma$ é tal que $\Omega(z)=(w_0,y_0)$. Usando o Lema 5.1 e (5.5), nós temos, para $N_{\hat{u}}^V\sim Poisson(\hat{u}\,\mathrm{cap}(V))$ e todo $\delta>0$

(5.7)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}\big[G_{\hat{u}}^{\Sigma}(z)\geq(1+\delta)\hat{u}\,\mathrm{cap}(V)\pi(w_0,y_0)\big] &= \mathcal{P}\big[\sum_{k=1}^{N_{\hat{u}}^V}F_k(w_0,y_0)\geq(1+\delta)\hat{u}\,\mathrm{cap}(V)\pi(w_0,y_0)\big] \\
&\leq \frac{\mathbb{E}(\exp\big(\lambda\sum_{k=1}^{N_{\hat{u}}^V}F_k(w_0,y_0)\big))}{\exp\big(\lambda(1+\delta)\hat{u}\,\mathrm{cap}(V)\pi(w_0,y_0)\big)} \\
&\leq \exp\big(-\lambda(1+\delta)\hat{u}\,\mathrm{cap}(V)\pi(w_0,y_0)+\hat{u}\,\mathrm{cap}(V)(\Psi_{w_0,y_0}(\lambda) \\
&\leq \exp\big(-(\lambda\delta\hat{u}\,\mathrm{cap}(V)\pi(w_0,y_0)-c_5\lambda^2\hat{u}s^{-2d+4}h^{-d})\big) \\
&\leq \exp\big(-(\lambda\delta\hat{u}\zeta_5 sh^{-d}-c_5\lambda^2\hat{u}s^{-2d+4}h^{-d})\big).
\end{aligned}
$$

Analogamente, com (5.6) no lugar de (5.5), nós obtemos.

(5.8)
$$
\mathcal{P}\big[G_{\hat{u}}^{\Sigma}(z)\leq(1-\delta)\hat{u}\,\mathrm{cap}(V)\pi(w_0,y_0)\big]\leq\exp\big(-(\lambda\delta\hat{u}\zeta_5 sh^{-d}-c_6\lambda^2\hat{u}s^{-2d+4}h^{-d})\big).
$$

Escolhemos $\lambda=c_7\delta s^{2d-3}$ com c_7 pequeno o suficiente de forma que $\lambda\leq\frac{\zeta_8 s^{2(d-1)}}{2\zeta_3}$. Considere $b=b(d)$ de forma que $1<b<2-\frac{2}{d}$ e seja $a=a(d):=$

$2d-2-bd$. Para $s \leq r \leq s^b$, nós obtemos, cotando pela soma a união de todos os possíveis pares de pontos $(w_0, y_0) \in \partial A_1 \times V$ (note que $\partial A_1 \times V$ possui $O((r+s)^{2(d-1)})$ elementos), e observando que $h \leq 2r$,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\big[(1-\delta)\hat{u}\,\mathrm{cap}(V)\pi(\Omega(z)) \leq G^{\Sigma}_{\hat{u}}(z) \leq (1+\delta)\hat{u}\,\mathrm{cap}(V)\pi(\Omega(z)),\ \forall\ z \in \mathcal{K}\big] \geq \\ \geq 1 - c_8(r+s)^{2(d-1)}\exp\big(-c_9\delta^2\hat{u}s^a\big).\end{aligned} \tag{5.9}$$

Observe que podemos supor $c_8 \leq 1$ sem perda de generalidade. Definimos o intervalo

$$I^{\delta}_{\hat{u},z} := [(1-\delta)\hat{u}\,\mathrm{cap}(V)\pi(\Omega(z)), (1+\delta)\hat{u}\,\mathrm{cap}(V)\pi(\Omega(z))]$$

e o evento

$$D^{\delta}_{\hat{u}} := \{G^{\Sigma}_{\hat{u}} \in I^{\delta}_{\hat{u},z} \text{ para todo } z \in \mathcal{K}\}.$$

Usando (5.9) e cotando a união dos eventos pela soma, nós obtemos

$$\mathcal{P}\big[D^{\frac{\epsilon}{4}}_{u}, D^{\frac{\epsilon}{4}}_{u(1-\epsilon)}, D^{\frac{\epsilon}{4}}_{u(1+\epsilon)}\big] \geq 1 - c_{10}(r+s)^{2(d-1)}\exp\big(-c_{11}\epsilon^2 u s^a\big). \tag{5.10}$$

O que precisamos de mostrar agora é que quando nos são dados os pontos de entrada em V e saída em ∂A_2 de um número $\tilde{N}^V_u \sim Poisson(u\,\mathrm{cap}(V))$ de trajetórias de passeio aleatório simples, cada trajetória começando em um ponto escolhido de acordo com $\bar{e}_V(\cdot)$; e nós usamos esses pares de pontos como os índices das funções $g_{(w,y)}$ definidas na seção 4, o tempo local suave resultante está contido no intervalo $[G^{\Sigma}_{u(1-\epsilon)}(z), G^{\Sigma}_{u(1+\epsilon)}(z)]$ para cada $z \in \mathcal{K}$ com grande probabilidade.

Mais precisamente, seja $\varpi_1 := ((w^1_1, y^1_1), \ldots, (w^1_{T^1_\Delta}, y^1_{T^1_\Delta}))$ uma sequência finita de pares de pontos de entrada em V e pontos de saída em ∂A_2 de uma trajetória de passeio aleatório simples começando em um ponto w^1_1 escolhido de acordo com $\bar{e}_V(\cdot)$. Nós definimos analogamente a sequência i.i.d. de elementos aleatórios $\varpi_2, \ldots, \varpi_k, \ldots$ e definimos $\tilde{N}^V_u$ como sendo uma variável aleatória independente de Poisson com média $u\,\mathrm{cap}(V)$. Definimos $\hat{\varpi} := (\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_{\tilde{N}^V_u})$ e $(((V \times \partial A_2)^{(\infty)})^{(\infty)}, P(((V \times \partial A_2)^{(\infty)})^{(\infty)}), \mathbb{P}_{V \times \partial A_2})$, o espaço de probabilidade onde tais $\hat{\varpi}$ estão definidos.

Usando o mesmo processo de pontos de Poisson definido na seção 4, nós definimos os tempos locais suaves

$$G^{\varpi_j}(z) := \sum_{k=1}^{\tilde{T}^j_\Delta} \tilde{\xi}^j_k g_{(w^j_k, y^j_k)}(z),$$

e

$$G^{\hat{\varpi}}(z) := \sum_{k=1}^{\tilde{N}_u^V} G^{\varpi_k}(z).$$

O próximo teorema é o penúltimo passo na prova do resultado principal.

Teorema 5.3. *Existe um conjunto $\mathcal{A} \in \mathbb{X}$ tal que*

$$\mathbb{P}_{V\times\partial A_2}\big[\mathcal{A}\big] \geq 1 - c_{12}(r+s)^{2(d-1)} \exp\big(-c_{13}\epsilon^2 u s^a\big),$$

e para todo $\hat{\varpi} \in \mathcal{A}$ fixo,

$$\mathcal{P}\big[G^{\Sigma}_{u(1-\epsilon)}(z) \leq G^{\hat{\varpi}}(z) \leq G^{\Sigma}_{u(1+\epsilon)}(z) \text{ para todo } z \in \mathcal{K}\big] \geq \\ \geq 1 - c_{12}(r+s)^{2(d-1)} \exp\big(-c_{13}\epsilon^2 u s^a\big).$$

Demonstração. Observe que (5.9) implica

(5.11)
$$\int \mathcal{P}\big[G^{\hat{\varpi}}(z) \in I^{\frac{\epsilon}{4}}_{u,z} \text{ para todo } z \in \mathcal{K}\big]\mathbb{P}_{V\times\partial A_2}\big[\mathrm{d}\hat{\varpi}\big] \geq 1 - c_8(r+s)^{2(d-1)} \exp\big(-c_9\epsilon^2 \hat{u} s^a\big).$$

Seja

$$\mathcal{A} := \{\hat{\varpi} \in X, \mathcal{P}\big[G^{\hat{\varpi}}(z) \in I^{\frac{\epsilon}{4}}_{u,z} \text{ para todo } z \in \mathcal{K}\big] \geq 1 - c_8(r+s)^{2(d-1)} \exp\big(-\frac{c_9}{2}\epsilon^2 \hat{u} s^a\big)\}.$$

Então (5.11) implica

$$\mathbb{P}_{V\times\partial A_2}\big[\mathcal{A}\big] \geq 1 - c_8(r+s)^{2(d-1)} \exp\big(-\frac{c_9}{2}\epsilon^2 \hat{u} s^a\big).$$

Usando (5.10) e cotando a união pela soma, isso termina a prova do teorema. □

Dado $\hat{\varpi} \in ((V \times \partial A_2)^{(\infty)})^{(\infty)}$ nós definimos $\mathcal{I}^u_{A_1|\hat{\varpi}}$ como sendo o conjunto de entrelaçamentos no nível u intersectado com A_1 quando os pontos iniciais e finais das trajetórias de passeio aleatório que compõem o conjunto de entrelaçamentos são dadas por $\hat{\varpi}$. O Teorema 5.3 implica que, para $\hat{\varpi} \in \mathcal{A}$, existe um processo $(\hat{\mathcal{I}}^u_{A_1}, u \geq 0)$ distribuído como o conjunto de entrelaçamentos intersectado com A_1, e um acoplamento $\mathcal{P}$ tal que, para todo $\epsilon > 0$ e $s > 0$ suficientemente grandes, nós temos

$$\mathcal{P}\big[\hat{\mathcal{I}}^{u(1-\epsilon)}_{A_1} \subseteq \mathcal{I}^u_{A_1|\hat{\varpi}} \subseteq \hat{\mathcal{I}}^{u(1+\epsilon)}_{A_1}\big] \geq 1 - c_{12}(r+s)^{2(d-1)} \exp\big(-c_{13}\epsilon^2 u s^a\big). \tag{5.12}$$

Mas $\hat{\varpi}$ carrega informação não contida em $\mathcal{I}^u_{A_2}$: os pontos de entrada em V das excursões dos passeios aleatórios em A_2^C. Tivemos que simular

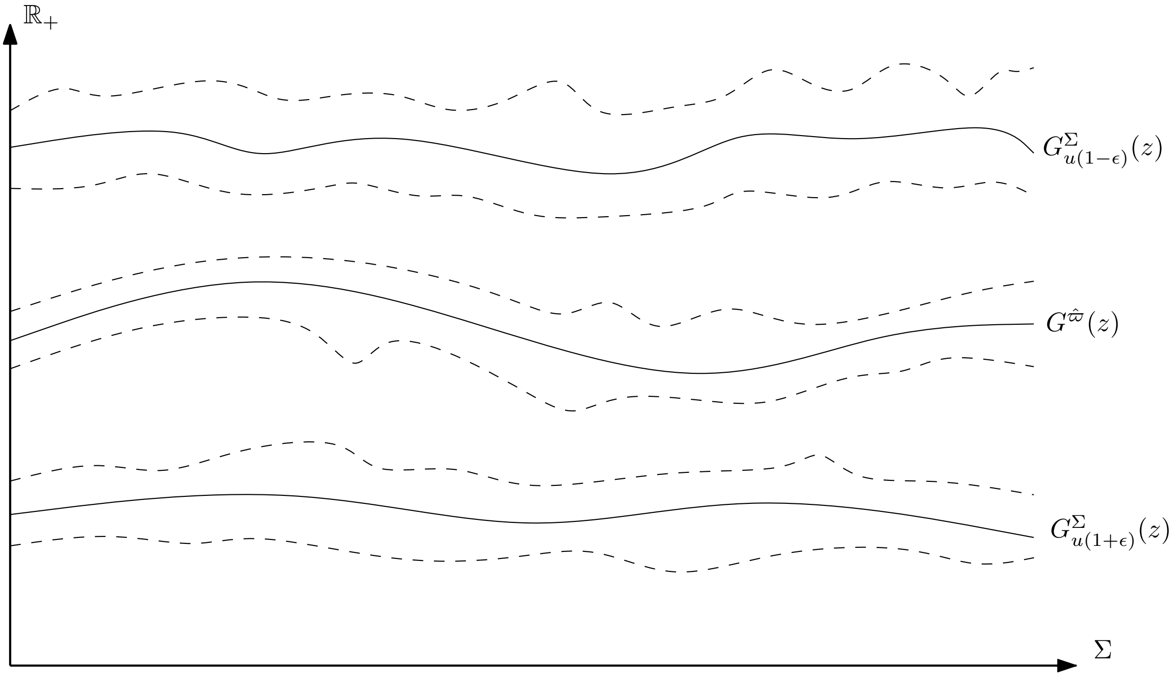

Figura 5: Uma ilustração de como os tempos locais suaves se comportariam para $\hat{\varpi} \in \mathcal{A}$. As linhas tracejadas representam os seguintes intervalos, de baixo para cima: $I^{\frac{\epsilon}{4}}_{u(1-\epsilon),z}$, $I^{\frac{\epsilon}{4}}_{u,z}$ e $I^{\frac{\epsilon}{4}}_{u(1+\epsilon),z}$. Observe que, pelo corolário 3.3, o fato de $G^{\hat{\varpi}}(z)$ estar sempre entre $G^{\Sigma}_{u(1-\epsilon)}$ e $G^{\Sigma}_{u(1+\epsilon)}$ implica $\hat{\mathcal{I}}^{u(1-\epsilon)}_{A_1} \subseteq \mathcal{I}^{u}_{A_1|\hat{\varpi}} \subseteq \hat{\mathcal{I}}^{u(1+\epsilon)}_{A_1}$.

as trajetórias dessa maneira porque se os pontos de entrada e saída das trajetórias pertencessem a ∂A_2 nós veríamos excursões de passeios aleatórios em A_2^C que entrariam e sairiam de ∂A_2 em pontos arbitrariamente próximos, o que impossibilitaria os cálculos aqui feitos. Como nós queremos desacoplar $\mathcal{I}_{A_2}^u$ de $\mathcal{I}_{A_1}^u$, nós precisamos de provar uma desigualdade similar a (5.12) para conjuntos $\hat{\psi}$ de pares de pontos de entrada em ∂A_2 e saída em ∂A_2 de trajetórias de passeios aleatórios, numa definição análoga a de $\hat{\varpi}$.

Nós definimos $\psi_1 := ((v_1^1, y_1^1), \ldots, (v_{T_\Delta^1}^1, y_{T_\Delta^1}^1))$ como sendo uma sequência finita de pares de pontos de entrada e saída em ∂A_2 de uma trajetória de passeio aleatório simples que começa em um ponto v_1^1 escolhido de acordo com $\bar{e}_{\partial A_2}(\cdot)$. Nós analogamente definimos a sequência de elementos aleatórios i.i.d. $\psi_2, \ldots, \psi_k, \ldots$ e consideramos $\tilde{N}_u^{\partial A_2}$ como uma variável aleatória de Poisson independente com média $u\,\mathrm{cap}(\partial A_2)$. Definimos $\hat{\psi} := (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{\tilde{N}_u^{\partial A_2}})$ e $(((\partial A_2 \times \partial A_2)^{(\infty)})^{(\infty)}, P(((\partial A_2 \times \partial A_2)^{(\infty)})^{(\infty)}), \mathbb{P}_{\partial A_2 \times \partial A_2})$, o espaço de probabilidade onde tais $\hat{\psi}$ são definidos.

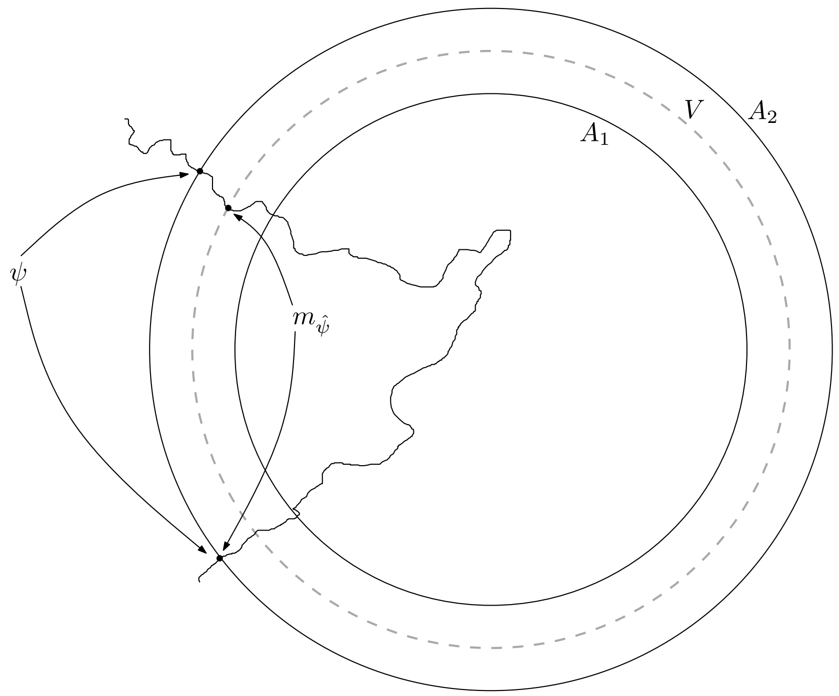

Figura 6: Representação visual do elemento $m_{\hat{\psi}}$.

Defina $m_{\hat{\psi}}$ como sendo um elemnto aleatório de $(((V \times \partial A_2)^{(\infty)})^{(\infty)}$ distribuído como os pares de pontos de entrada em V e pontos de saída em A_2 das trajetórias de passeio aleatório que compõem o conjunto de entrelaçamentos em A_1. quando os pontos de entrada em ∂A_2 de tais trajetórias são dados por $\hat{\psi}$. Definimos também $\mathcal{I}^u_{A_1|\hat{\psi}}$ de uma maneira completamente análoga à definição de $\mathcal{I}^u_{A_1|\hat{\varpi}}$, ou seja, definimos $\mathcal{I}^u_{A_1|\hat{\psi}}$ como sendo o conjunto de entrelaçamentos no nível u intersectado com A_1 quando os pontos de entrada e os pontos de saída em ∂A_2 das trajetórias de passeio aleatório que compõe tal conjunto de entrelaçamentos são dados por $\hat{\psi}$.

Temos então, para $\hat{\psi} \in (((\partial A_2 \times \partial A_2)^{(\infty)})^{(\infty)}$,

(5.13)

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\big[\hat{\mathcal{I}}^{u(1-\epsilon)}_{A_1} \subseteq \mathcal{I}^u_{A_1|\hat{\psi}} \subseteq \hat{\mathcal{I}}^{u(1+\epsilon)}_{A_1}\big] &= \sum_{\hat{\varpi}} \mathcal{P}\big[\hat{\mathcal{I}}^{u(1-\epsilon)}_{A_1} \subseteq \mathcal{I}^u_{A_1|\hat{\psi}} \subseteq \hat{\mathcal{I}}^{u(1+\epsilon)}_{A_1} | m_{\hat{\psi}} = \hat{\varpi}\big] \mathcal{P}\big[m_{\hat{\psi}} = \hat{\varpi}\big] \\
&= \sum_{\hat{\varpi}} \mathcal{P}\big[\hat{\mathcal{I}}^{u(1-\epsilon)}_{A_1} \subseteq \mathcal{I}^u_{A_1|\hat{\varpi}} \subseteq \hat{\mathcal{I}}^{u(1+\epsilon)}_{A_1}\big] \mathcal{P}\big[m_{\hat{\psi}} = \hat{\varpi}\big] \\
&\geq (1 - c_{12}(r+s)^{2(d-1)} \exp\big(-c_{13}\epsilon^2 u s^a\big))(1 - \mathcal{P}\big[m_{\hat{\psi}} \in \mathcal{A}\big])
\end{aligned}$$

Seja $\mathcal{E} \subseteq (((V \times \partial A_2)^{(\infty)})^{(\infty)}$ o conjunto de todos os $\hat{\psi}$ tais que

$$\mathcal{P}\big[m_{\hat{\psi}} \in \mathcal{A}\big] \geq \sqrt{\mathbb{P}_{V \times \partial A_2}\big[\mathcal{A}\big]}.$$

Como

$$\int \mathcal{P}\big[m_{\hat{\psi}} \in \mathcal{A}\big] \mathbb{P}_{\times \partial A_2}\big[\mathrm{d}\hat{\psi}\big] = \mathbb{P}_{V \times \partial A_2}\big[\mathcal{A}\big],$$

nós temos

$$\mathbb{P}_{\partial A_2 \times \partial A_2}\big[\mathcal{E}\big] \leq \sqrt{\mathbb{P}_{V \times \partial A_2}\big[\mathcal{A}\big]}.$$

Nós acabamos de provar o teorema principal desta tese:

Teorema 5.4. *Dado $b \in \mathbb{R}$ de modo que $1 < b < 2 - \frac{2}{d}$, consideramos $a = a(d) := 2d - 2 - bd$. Sejam $r, s \in \mathbb{Z}_+$ de modo que $s \leq r \leq s^b$. Considere*

$$A_1 = \{x \in \mathbb{Z}^d; \mathrm{dist}(0, x) < r\},$$

$$A_2 = \{x \in \mathbb{Z}^d; \mathrm{dist}(0, x) > r + 2s\}.$$

conseguimos o seguinte resultado: usando a mesma notação que acima, nós temos que, para contantes $c_{14}, c_{15} > 0$, existe um conjunto $\mathcal{G}$ tal que

$$\mathbb{P}_{\partial A_2 \times \partial A_2}\big[\mathcal{G}\big] \geq 1 - c_{14}(r+s)^{2(d-1)} \exp\big(-c_{15}\epsilon^2 u s^a\big),$$

e para todo $\hat{\psi} \in \mathcal{G}$,

$$(5.14)\quad \mathcal{P}\big[\hat{\mathcal{I}}^{u(1-\epsilon)}_{A_1} \subseteq \mathcal{I}^u_{A_1|\hat{\psi}} \subseteq \hat{\mathcal{I}}^{u(1+\epsilon)}_{A_1}\big] \geq 1 - c_{14}(r+s)^{2(d-1)} \exp\big(-c_{15}\epsilon^2 u s^a\big).$$

Além disso, para qualquer função crescente f no conjunto de entrelaçamentos intersectado com A_1, nós temos

(5.15)

$$\begin{aligned} f(\hat{\mathcal{I}}^{u(1-\epsilon)}_{A_1})1_{\mathcal{G}} - c_{14}(r+s)^{2(d-1)}e^{\left(-c_{15}\epsilon^2 u s^a\right)} &\leq \mathbb{E}(f(\mathcal{I}^u_{A_1})|\mathcal{I}^u_{A_2})1_{\mathcal{G}} \\ &\leq f(\hat{\mathcal{I}}^{u(1+\epsilon)}_{A_1})1_{\mathcal{G}} + c_{14}(r+s)^{2(d-1)}e^{\left(-c_{15}\epsilon^2 u s^a\right)}. \end{aligned}$$

6 Estimativas Técnicas

6.1 Estimando as Probabilidades Relevantes

Sejam $w, y_0 \in V$, $w_0 \in \partial A_1$ e $y \in \partial A_2$. Ao longo da tese necessitaremos de cotas para a seguinte probabilidade

$$(6.1)\qquad \mathbb{P}_{w,y}\big[\Omega(w,y) = (w_0, y_0)\big]$$

que já vimos ser a probabilidade de que a trajetória aleatória selecionada por $\sigma_{w,y}$ tenha w_0 e y_0 como pontos de extremidade. Precisaremos por exemplo, de uma cota superior para o supremo

$$(6.2)\qquad \sup_{\substack{w' \in V \\ y' \in \partial A_2}} \mathbb{P}_{w',y'}\big[\Omega(w',y') = (w_0, y_0)\big].$$

Começamos a tarefa introduzindo uma notação mais leve para trabalhar com os eventos de interesse.

$w \xrightarrow{1} w_0$; o evento em que o passeio aleatório simples começando em w atinge ∂A_1 antes de chegar em ∂A_2, e seu ponto de entrada em ∂A_1 é w_0.

$w_0 \xrightarrow{2} y_0$; o evento em que y_0 é o último ponto em V que o passeio começando em w_0 visita antes de atingir ∂A_2.

$y_0 \xrightarrow{3} y$; o evento em que o passeio aleatório simples começando em y_0 atinge ∂A_2 antes de retornar a V e seu ponto de entrada em ∂A_2 é y.

$w \xrightarrow{4} y$; o evento em que o ponto de entrada em ∂A_2 do passeio aleatório simples que começa em w é y.

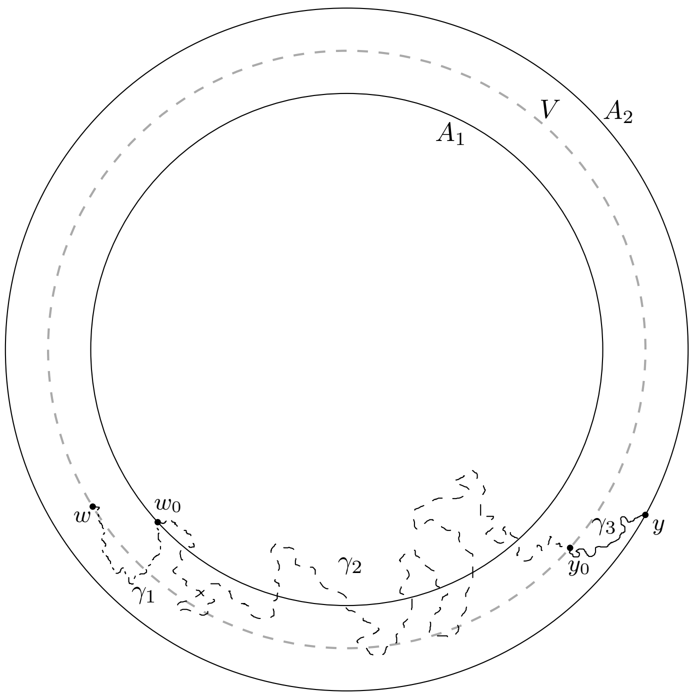

Figura 7: γ visto como a concatenação dos três caminhos γ_1, γ_2 and γ_3.

Também denotamos por $w \xrightarrow{1} w_0 \xrightarrow{2} y_0 \xrightarrow{3} y$ a "concatenação" dos três primeiros eventos, onde o ponto final do primeiro evento se torna o ponto inicial do segundo e assim por diante. Com nossa nova notação a probabilidade (6.1) se torna

$$\mathbb{P}_w\big[w \xrightarrow{1} w_0 \xrightarrow{2} y_0 \xrightarrow{3} y | w \xrightarrow{4} y\big] = \frac{\mathbb{P}_w\big[w \xrightarrow{1} w_0 \xrightarrow{2} y_0 \xrightarrow{3} y\big]}{\mathbb{P}_w\big[w \xrightarrow{4} y\big]}. \tag{6.3}$$

Vamos tentar separar essa probabilidade em pedaços que sejam mais simples de trabalhar. Dado γ um caminho finito de primeiros vizinhos em $\mathbb{Z}^d$, denotaremos por $|\gamma|$ sua cardinalidade. Abusaremos um pouco a notação dizendo que γ pertence a um evento E sempre que as primeiras coordenadas de γ forem uma escolha válida para as $|\gamma|$ primeiras coordenadas do evento E. Também denotaremos por $\mathbb{P}_x[\gamma]$ a probabilidade de que as $|\gamma|$ primeiras coordenadas do passeio aleatório simples começando em x sejam as mesmas que as de γ. Se $\gamma \in w \xrightarrow{1} w_0 \xrightarrow{2} y_0 \xrightarrow{3} y$, é elementar ver que γ é a concatenação de três caminhos distintos: $\gamma_1 \in w \xrightarrow{1} w_0$, $\gamma_2 \in w_0 \xrightarrow{2} y_0$ e $\gamma_3 \in y_0 \xrightarrow{3} y$. Temos então

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_w\big[w \xrightarrow{1} w_0 \xrightarrow{2} y_0 \xrightarrow{3} y\big] &= \sum_{\gamma \in w \xrightarrow{1} w_0 \xrightarrow{2} y_0 \xrightarrow{3} y} \frac{1}{2^{|\gamma|}} \\ &= \sum_{\gamma_1 \in w \xrightarrow{1} w_0} \frac{1}{2^{|\gamma_1|}} \sum_{\gamma_2 \in w_0 \xrightarrow{2} y_0} \frac{1}{2^{|\gamma_2|}} \sum_{\gamma_3 \in y_0 \xrightarrow{3} y} \frac{1}{2^{|\gamma_3|}}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Vamos focar no segundo somatório $\sum_{\gamma_2 \in w_0 \xrightarrow{2} y_0} \frac{1}{2^{|\gamma_2|}}$ por um momento. Cada caminho $\gamma_2 \in w_0 \xrightarrow{2} y_0$ pode ser visto como a concatenação de um caminho γ_2^0 responsável pela primeira visita que o passeio faz a y_0 e uma sequência de caminhos $\gamma_2^1, \dots, \gamma_2^k$ associada aos retornos sucessivos que o passeio faz a y_0 antes de chegar em ∂A_2, ver a figura 8. Dessa forma,

$$\sum_{\gamma_2} \mathbb{P}_{w_0}\big[\gamma_2\big] = \sum_{\gamma_2^0} \mathbb{P}_{w_0}\big[\gamma_2^0\big] \sum_{k \geq 1} \sum_{\gamma_2^1, \dots, \gamma_2^k} \mathbb{P}_{y_0}\big[\gamma_2^1\big] \dots \mathbb{P}_{y_0}\big[\gamma_2^k\big]. \tag{6.5}$$

Mas para $k_0 \geq 0$ fixo, a soma $\sum_{k_0 \geq 1} \sum_{\gamma_2^1, \dots, \gamma_2^{k_0}} \mathbb{P}_{y_0}\big[\gamma_2^1\big] \dots \mathbb{P}_{y_0}\big[\gamma_2^{k_0}\big]$ é igual a probabilidade de que o passeio aleatório simples começando em y_0 retorne a y_0 ao menos k_0 vezes antes de atingir ∂A_2. Como o passeio é transiente,

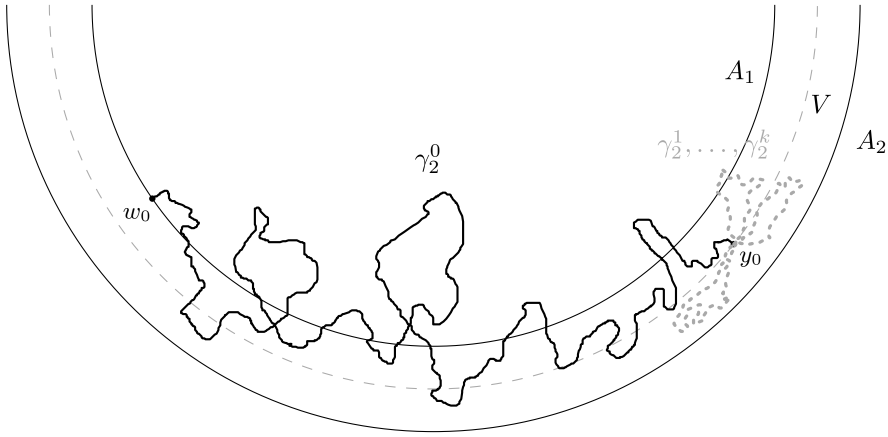

Figura 8: γ_2 como a concatenação dos caminhos $\gamma_2^0, \gamma_2^1, \ldots, \gamma_2^k$.

podemos usar a propriedade forte de Markov para mostrar que existe uma constante $0 < c_1 < 1$ tal que.

$$\sum_{k_0 \geq 1} \sum_{\gamma_2^1, \ldots, \gamma_2^{k_0}} \mathbb{P}_{y_0}\big[\gamma_2^1\big] \ldots \mathbb{P}_{y_0}\big[\gamma_2^{k_0}\big] < c_1^{k_0}. \tag{6.6}$$

Mostramos então a existencia de uma constante ζ_2 tal que

$$\sum_{\gamma_2} \mathbb{P}_{w_0}\big[\gamma_2\big] \leq \zeta_2 \sum_{\gamma_2^0} \mathbb{P}_{w_0}\big[\gamma_2^0\big] \tag{6.7}$$

onde γ_2^0 representa qualquer caminho de primeiros vizinhos que começa em w_0 e termina em sua única visita a y_0, sem nunca chegar a ∂A_2. Vamos atualizar a definição dos nossos eventos em vista dessa última conta. Denotamos por

$w_0 \xrightarrow{2'} y_0$; o evento em que o passeio aleatório simples começando em w_0 visita y_0 antes de atingir ∂A_2.

Juntando (6.4) com (6.7), conseguimos

$$\mathbb{P}_w\big[w \xrightarrow{1} w_0 \xrightarrow{2} y_0 \xrightarrow{3} y\big] \leq \zeta_2 \mathbb{P}_w\big[w \xrightarrow{1} w_0\big] \mathbb{P}_{w_0}\big[w_0 \xrightarrow{2'} y_0\big] \mathbb{P}_{y_0}\big[y_0 \xrightarrow{3} y\big]. \tag{6.8}$$

Nosso trabalho agora consitirá em dar cotas superiores para essas probabilidades, além de dar uma cota inferior para $\mathbb{P}_w\big[w \xrightarrow{4} y\big]$.

Usaremos extensivamente três resultados sobre o passeio aleatório simples. O primeiro, que pode ser visto como consequência da Proposição 6.5.4 de [17], essencialmente nos diz que a probabilidade de que o passeio aleatório simples começando a uma distância h_0 de uma esfera de raio também h_0

atinge tal esfera em um ponto específico é de ordem $h_0^{-(d-1)}$. O segundo resultado é uma aplicação simples do Teorema de parada opcional para supermartingais e submartingais, e pode ser vista na prova do Lema 7.5 de [1]. O enunciamos aqui oara a conveniência do leitor.

Lema 6.1. *Sejam* $0 < \rho_1 < \rho_2$ *números reais suficientemente grandes, e seja* $x \in B(0, \rho_2) \setminus B(0, \rho_1)$. *Então*
(6.9)

$$\frac{|x|^{-(d-\frac{5}{2})} - (\rho_2 - 1)^{-(d-\frac{5}{2})}}{(\rho_1 + 1)^{-(d-\frac{5}{2})} - (\rho_2)^{-(d-\frac{5}{2})}} \leq \mathbb{P}_x\left[H_{B(0,\rho_1)} < H_{B(0,\rho_2)}\right] \leq \frac{|x|^{-(d-1)} - (\rho_2)^{-(d-1)}}{(\rho_1 - 1)^{-(d-1)} - (\rho_2)^{-(d-1)}}$$

O terceiro resultado é o Princípio de Harnack (Teorema 6.3.9 de [17]), e essencialmente nos garante que os valores de uma função harmônica avaliada em dois ponto suficientemente longe da fronteira são comparáveis. Como a probabilidade de que o passeio aleatório simples começando dentro de um conjunto finito K atinja determinado ponto em ∂K é uma função harmônica em K, a utilidade de tal princípio logo fica clara. Uma vez ou outra faremos referência ao princípio da invariância de Donsker (Teorema 3.4.2 de [17]), que nos garante que o limite em distribuição do passeio aleatório simples em $\delta\mathbb{Z}^d$ quando $\delta \to 0$ é o movimento browniano padrão em $\mathbb{R}^d$. Isso nos permitirá fazer afirmações sobre a probabilidade de que o passeio aleatório simples saia de um conjunto por um determinado subconjunto da fronteira, nos baseando apenas em propriedades da solução do problema de Dirichlet.

Vamos ao trabalho de cotar as probabilidades relevantes.

$\boldsymbol{w} \xrightarrow{\mathbf{1}} \boldsymbol{w_0}$: Seja $h_1 = \operatorname{dist}(w, w_0)$. Veremos $\mathbb{Z}^d$ como um subconjunto de $\mathbb{R}^d$. Seja $e_1, \ldots, e_d$ a base canônica de $\mathbb{R}^d$. Sem perda de generalidade, podemos supor w e w_0 pertencentes ao plano gerado por e_1 e e_2. Se $\rho, \Phi_1, \ldots, \Phi_{d-1}$ são as coordenadas esféricas correspondentes em $\mathbb{R}^d$, definimos para $i_1 = 1, \ldots, \lfloor \frac{2\pi r}{s} \rfloor$ e $i_k = 1, \ldots, \lfloor \frac{\pi r}{s} \rfloor$, $k = 2, \ldots, d-1$:

(6.10)

$$E_{i_1,\ldots,i_{d-1}} = \begin{array}{l} \{(\rho, \Phi_1, \ldots, \Phi_{d-1}) \in \mathbb{R}^d,\ r \leq \rho \leq r + 2s,\ \frac{(i_1-1)s}{2\pi r} \leq \Phi_1 \leq \frac{i_1 s}{2\pi r}, \\ \frac{(i_k-1)s}{\pi r} \leq \Phi_k \leq \frac{i_k s}{\pi r}\ \forall\ k = 2, \ldots, d-1\} \end{array}$$

Definimos também C_1 como a bola discreta de raio s contida em A_1 de modo que $C_1 \cap A_1 = \{w_0\}$. Essa bola será ligeiramente diferente de $B(0, s)$, mas é simples ver que essa diferença não altera a veracidade do Lemma 6.1 e da Proposição 6.5.4 de [17]. Existe uma constante c_1 tal que o passeio aleatório começando em w terá que cruzar ao menos $\frac{c_1 h_1}{s}$ conjuntos da forma $E_{i_1,\ldots,i_{d-1}}$ para atingir w_0 sem tocar nem ∂A_1 nem ∂A_2. Cada vez que o passeio chega a um conjunto $E_{i'_1,\ldots,i'_{d-1}}$, a probabilidade de que ele chegará

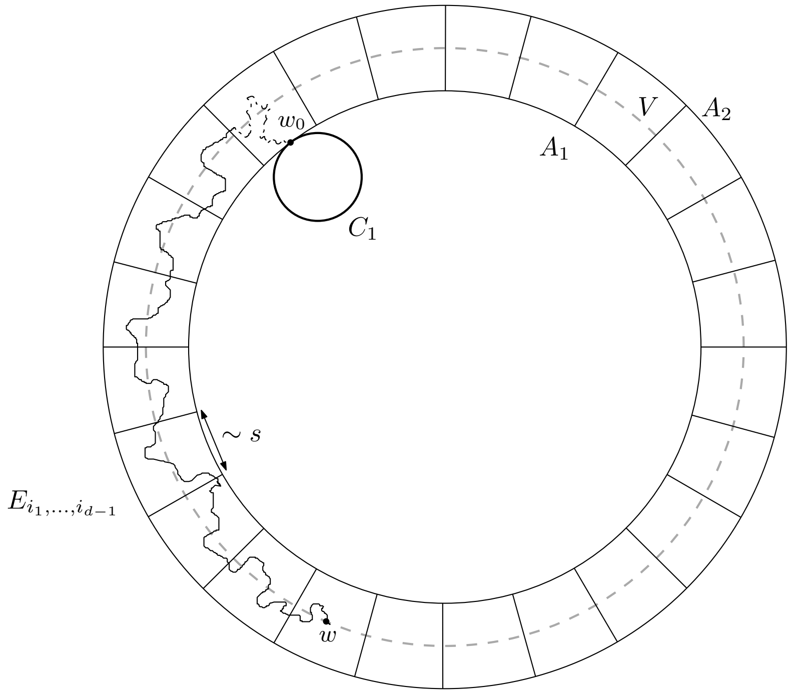

Figura 9: Um caminho pertencente a $w \xrightarrow{1} w_0$ deve cruzar $\frac{c_1 h_1}{s}$ conjuntos da forma $E_{i_1,\ldots,i_{d-1}}$ antes de atingir w_0 em C_1.

a outro conjunto da forma $E_{i_1,\ldots,i_{d-1}}$ a uma distancia de pelo menos s de $E_{i'_1,\ldots,i'_{d-1}}$ antes de atingir tanto ∂A_1 quanto ∂A_2 é limitada superiormente por uma constante $0 < c_2 < 1$, como pode ser visto usando o princípio da invariância de Donsker. Usando a propriedade forte de Markov podemos mostrar que a probabilidade de que o passeio começando em w cruze ao menos $\frac{c_1 h_1}{s}$ conjuntos da forma $E_{i_1,\ldots,i_{d-1}}$ antes de atingir $\partial A_1 \cup \partial A_2$ é menor do que $c_2^{\frac{c_1 h_1}{s}}$.

Observamos que é mais difícil o passeio começando em w atingir w_0 antes do que qualquer outro ponto em ∂A_1 do que o passeio atingir w_0 antes de qualquer outro ponto em ∂C_1,

$$\mathbb{P}_w\big[X_{H_{\partial A_1}} = w_0\big] \leq \mathbb{P}_w\big[X_{H_{\partial C_1}} = w_0\big].$$

Já observamos que a probabilidade de um passeio aleatório que começa a uma distancia s de uma esfera de raio também s atingir tal esfera em um ponto específico é de ordem $s^{-(d-1)}$. Juntamente com o argumento do último parágrafo, isso implica a existência de uma constante $c_3 > 0$ tal que

$$\mathbb{P}_w\big[w \xrightarrow{1} w_0\big] \le e^{\frac{-c_3 h_1}{s}} s^{-(d-1)}. \tag{6.11}$$

$\boldsymbol{y_0 \xrightarrow{3} y}$: Definimos $y \xrightarrow{3'} y_0$ como o evento em que o passeio começando em y atinge y_0 em V antes de atingir qualquer outro ponto em V ou em ∂A_2. Da reversibilidade do passeio aleatório simples vem

$$\mathbb{P}_y\big[y \xrightarrow{3'} y_0\big] = \mathbb{P}_{y_0}\big[y_0 \xrightarrow{3} y\big]. \tag{6.12}$$

Usamos o Lema 6.1 e um pouco de cálculo para mostrar que, se o passeio aleatório simples começa em y, a probabilidade de que ele atinja $\partial B(0, r+\frac{3s}{2})$ antes de atingir ∂A_2 é de ordem s^{-1}. Com efeito, se $x \in \mathbb{Z}^d$ é tal que $r + 2s - 2 \le |x| < r + 2s - 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x\big[H_{\partial B(0,r+\frac{3s}{2})} < H_{\partial B(0,r+2s)}\big] &\le \frac{|x|^{-(d-1)} - (r+2s)^{-(d-1)}}{(r+\frac{3s}{2}-1)^{-(d-1)} - (r+2s)^{-(d-1)}} \\ &\le \frac{(\frac{r+2s-2}{r+2s})^{-(d-1)} - 1^{-(d-1)}}{(\frac{r+2s-\frac{s}{2}}{r+2s})^{-(d-1)} - 1^{-(d-1)}}. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Usando a fórmula de Taylor para a função $t \mapsto (1+t)^{-(d-1)}$, a expressão acima fica menor do que

$$\frac{\frac{-(d-1)}{r+2s} + c_1' \frac{1}{r+2s}^2}{c_2' \frac{-s}{r+2s} + c_3' \frac{s}{r+2s}^2}$$

para constantes $c_1', c_2', c_3' > 0$ apropriadas. Supondo $s = o(r)$, conseguimos

$$\mathbb{P}_x\big[H_{\partial B(0,r+\frac{3s}{2})} < H_{\partial B(0,r+2s)}\big] = O(s^{-1}).$$

Fazendo uma conta análoga para a cota inferior, conseguimos o resultado desejado. A prova para a cota superior para $\mathbb{P}_w\big[y \xrightarrow{3} y_0\big]$ continua do mesmo modo que a prova da cota para $\mathbb{P}_w\big[w \xrightarrow{1} w_0\big]$. Seja $h_3 = \mathrm{dist}(y_0, y)$. Então existe uma constante $c_4 > 0$ tal que

$$\mathbb{P}_w\big[y \xrightarrow{3} y_0\big] \le e^{\frac{-c_4 h_3}{s}} s^{-(d-1)} s^{-1}. \tag{6.14}$$

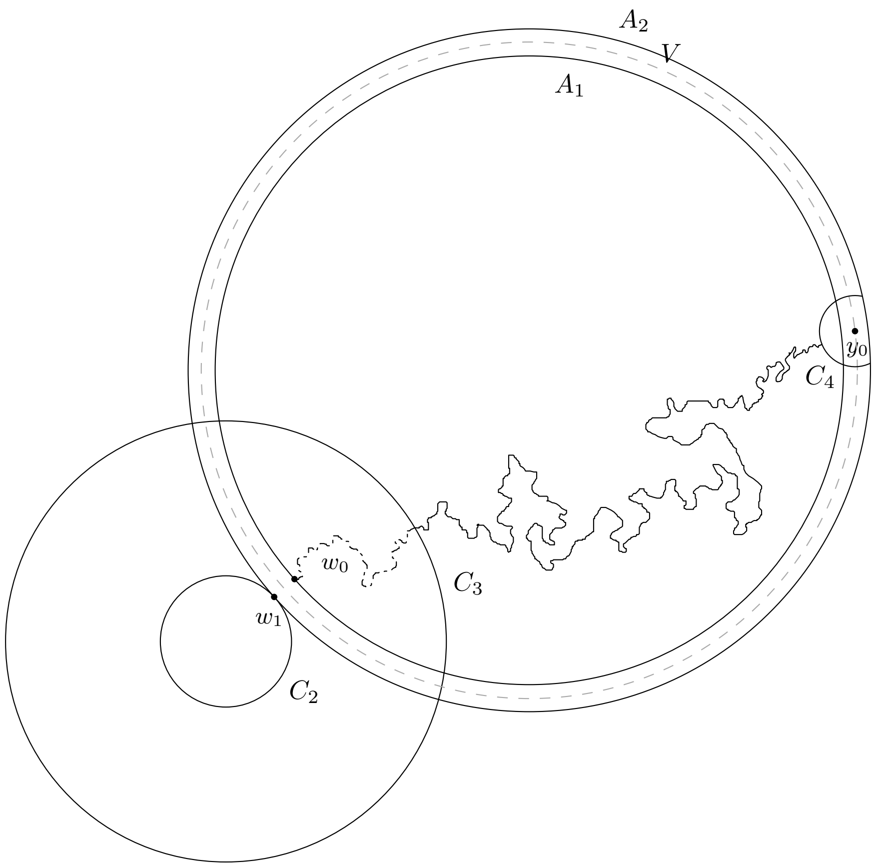

Figura 10: O passeio começando em w_0 tem que chegar em ∂C_3 antes de ∂C_2 e então atingir $C_4 \setminus A_2$ para conseguir visitar y_0.

$\boldsymbol{w_0 \xrightarrow{2'} y_0}$: Denotamos por h a distância euclidiana entre w_0 e y_0. Suponha $h > 20s$. Seja w_1 o ponto em ∂A_2 mais próximo de w_0. Seja C_2 a bola discreta de raio $\frac{h}{6}$ que intersecta ∂A_2 apenas em w_1 e está contida em $\overline{A_2}$. Seja C_3 a bola discreta de raio $\frac{h}{3}$ concêntrica com C_2. Para que o passeio começando em w_0 visite y_0 sem sair de $(\mathring{A}_2^C)$, ele necessariamente tem que chegar a ∂C_3 antes de chegar a ∂C_2. Fazendo uma conta similar a (6.13), vemos que tal evento tem probabilidade da ordem de $\frac{s}{h}$.

Para que o passeio chegue a y_0, ele primeiro tem que atingir uma esfera C_4 de raio $3s$ centrada em y_0. Condicionada no evento em que ∂C_4 é atingida antes que o passeio atinja ∂A_2, a probabilidade de que o passeio chega a y_0 antes de atingir ∂A_2 é menor do que $c_6 s^{-(d-2)}$, como podemos ver usando a função de Green.

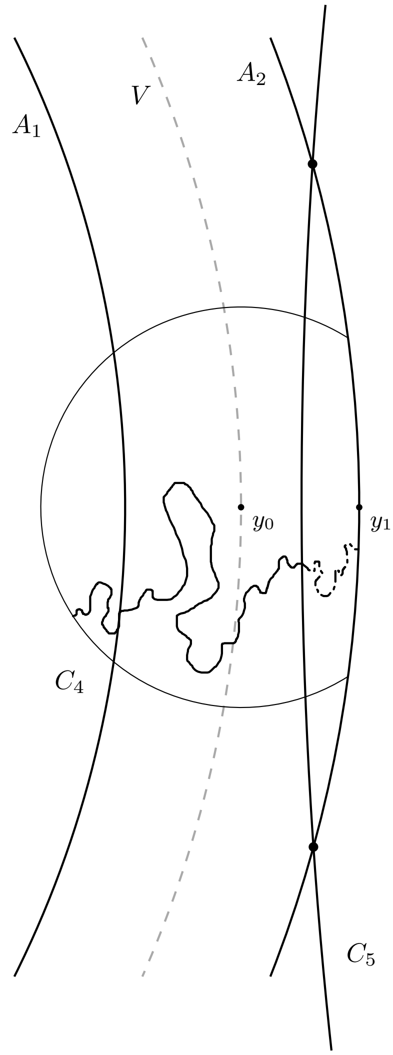

Figura 11: Mostramos que a probabilidade de atingir $C_4 \setminus A_2$ vindo de um ponto distante w_2 e a probabilidade de atingir $C_5 \cap A_2^C$ vindo de w_2 são comparáveis.

Seja y_1 o ponto em ∂A_2 mais próximo de y_0, Seja C_5 uma bola discreta de raio h tal que a interseção $C_5 \cap \partial A_2$ tem diâmetro $6s$ e centro tão próximo quanto o possível de y_1. Pelo princípio da invariância de Donsker, existe uma contante $c_6 > 0$ tal que o passeio aleatório simples começando em qualquer ponto de $\partial C_4 \cap A_2$ tem probabilidade ao menos c_6 de atingir $C_5 \cap \partial A_2$ antes de $\partial A_2 \setminus C_5$. Seja $w_2 \in A_2$ um ponto qualquer a distancia ao menos $\frac{h}{2}$ de y_0. Para um passeio aleatório simples começando em w_2, definimos os eventos:

$D_{C_5 \cap \partial A_2}$; o evento em que o passeio aleatório simples atinge $C_5 \cap \partial A_2$

antes de atingir qualquer outro ponto em ∂A_2.

$D_{\partial C_5 \cap A_2^C}$; o evento em que o passeio aleatório simples atinge $\partial C_5 \cap A_2^C$ antes de atingir qualquer outro ponto em ∂A_2.

$D_{C_4 \setminus A_2}$; o evento em que o passeio aleatório simples atinge $C_4 \setminus A_2$ antes de atingir qualquer outro ponto em ∂A_2.

D_{y_0}; o evento em que o passeio aleatório simples atinge y_0 antes de atingir ∂A_2.

Da discussão acima fica claro que:

$$\mathbb{P}_{w_2}\big[D_{C_5 \cap \partial A_2}\big] \leq \mathbb{P}_{w_2}\big[D_{\partial C_5 \cap A_2^C}\big], \tag{6.15}$$

$$\mathbb{P}_{w_2}\big[D_{y_0}\big] = \mathbb{P}_{w_2}\big[D_{y_0} | D_{C_4 \setminus A_2}\big]\mathbb{P}_{w_2}\big[D_{C_4 \setminus A_2}\big], \tag{6.16}$$

$$\mathbb{P}_{w_2}\big[D_{C_4 \setminus A_2}\big] \leq \frac{1}{c_6}\mathbb{P}_{w_2}\big[D_{C_5 \cap \partial A_2}\big]. \tag{6.17}$$

Usando a proposição 6.5.4 de [17], mostramos que existe uma constante $c_7 > 0$ tal que

$$\mathbb{P}_{w_2}\big[D_{\partial C_5 \cap A_2}\big] \leq c_7 \frac{s^{d-1}}{h^{d-1}}. \tag{6.18}$$

Juntando todos os resultados e usando a propriedade forte de Markov, conseguimos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{w_0}\big[w_0 \xrightarrow{2'} y_0\big] &\leq \frac{s}{h} \sup_{\substack{w_2 \in A_1 \\ dist(w_2, y_0) \geq \frac{h}{2}}} \mathbb{P}_{w_2}\big[D_{y_0}\big] \\
&\leq \frac{s}{h}\frac{1}{c_6} \sup_{\substack{w_2 \in A_1 \\ dist(w_2, y_0) \geq \frac{h}{2}}} \mathbb{P}_{w_2}\big[D_{y_0} | D_{C_4 \setminus A_2}\big] \sup_{\substack{w_2 \in A_1 \\ dist(w_2, y_0) \geq \frac{h}{2}}} \mathbb{P}_{w_2}\big[D_{C_5 \cap \partial A_2}\big].
\end{aligned}$$

Cotando $\mathbb{P}_{w_2}\big[D_{y_0} | D_{C_4 \setminus A_2}\big]$ pela função de Green, conseguimos mostrar a existência de uma constante $c_8 > 0$ tal que

$$\mathbb{P}_{w_0}\big[w_0 \xrightarrow{2'} y_0\big] \leq c_8 \frac{s^2}{h^d}. \tag{6.19}$$

Se $h < 20s$ o resultado segue de uma aplicação da função de Green.

Vamos mostrar uma cota inferior para $\mathbb{P}_{w_0}\big[w_0 \xrightarrow{2'} y_0\big]$, que será necessária mais tarde. Suponha $h < \frac{r}{2}$. Seja C_3' uma bola discreta de raio $2h$ contida em A_2^C tal que $C_3' \cap \partial A_2 = \{w_1\}$. Seja C_2' uma bola discreta de raio $\frac{h}{2}$ concênctrica com C_3'. Vamos descrever um evento de probabilidade maior do que $c_{10}\frac{s^2}{h^d}$, para alguma contante $c_{10} > 0$, que está contido em $w_0 \xrightarrow{2'} y_0$. Primeiramente o passeio necessita atingir $\partial C_2'$ antes de atingir $\partial C_3'$. A probabilidade de tal evento é da ordem de $\frac{s}{h}$, como podemos ver após fazermos uma conta similar a (6.13). Denotamos por w_2 o ponto em que o passeio atinge $\partial C_3'$.

Definimos C_5' como a bola discreta de raio $2h$ tal que seu centro fica dentro de A_2^C e a interseção $C_5' \cap \partial A_2$ coincide com $C_4 \cap \partial A_2$. Além de todos os eventos definidos na prova da cota superior para $\mathbb{P}_{w_0}\big[w_0 \xrightarrow{2'} y_0\big]$, definimos o evento para o passeio aleatório simples começando em w_2:

$D_{\partial C_5' \setminus A_2^C}$;o evento em que o passeio aleatório simples atinge $\partial C_5' \setminus A_2^C$ antes de atingir $\partial A_2 \setminus C_5'$.

Observamos que w_2 pertence ao interior de C_5' e que $D_{\partial C_5' \setminus A_2^C} \subset D_{\partial C_4 \setminus A_2}$. Temos então:

(6.20)
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{w_0}\big[w_0 \xrightarrow{2'} y_0\big] &\geq \sum_{w_2 \in \partial C_2'} \mathbb{P}_{w_0}\big[H_{\partial C_2'} < H_{\partial C_3'}, X_{H_{\partial C_2'}} = w_2\big]\mathbb{P}_{w_2}\big[D_{y_0}\big] \\
&= \sum_{w_2 \in \partial C_2'} \mathbb{P}_{w_0}\big[H_{\partial C_2'} < H_{\partial C_3'}, X_{H_{\partial C_2'}} = w_2\big]\mathbb{P}_{w_2}\big[D_{y_0} | D_{C_4 \setminus A_2}\big]\mathbb{P}_{w_2}\big[D_{C_4 \setminus A_2}\big] \\
&\geq \sum_{w_2 \in \partial C_2'} \mathbb{P}_{w_0}\big[H_{\partial C_2'} < H_{\partial C_3'}, X_{H_{\partial C_2'}} = w_2\big]\mathbb{P}_{w_2}\big[D_{y_0} | D_{C_4 \setminus A_2}\big]\mathbb{P}_{w_2}\big[D_{\partial C_5' \setminus A_2^C}\big].
\end{aligned}$$

Usando o princípio de Harnack, conseguimos mostrar a existencia de uma contante $c_{10} > 0$ tal que

$$\mathbb{P}_{w_2}\big[D_{\partial C_5' \setminus A_2}\big] \geq c_{10}\frac{s^{d-1}}{h^{d-1}}. \tag{6.21}$$

Com isso e (6.20) conseguimos achar uma constante $c_{13} > 0$ tal que

$$\mathbb{P}_{w_0}\big[w_0 \xrightarrow{2'} y_0\big] \geq c_{13}\frac{s^2}{h^d}. \tag{6.22}$$

Se $h \geq \frac{r}{2}$ nós substituímos as bolas C_3' e C_5' por A_2^C e continuamos a prova identicamente.

$\boldsymbol{w \xrightarrow{4} y}$: Seja w_3 o ponto de ∂A_2 mais próximo de w. Seja $h_4 = \text{dist}(w, y)$, suponha $h_4 \leq \frac{r}{2}$.Seja C_6 uma bola discreta de raio $2h_4$ contida em A_2^C tal que $C_6 \cap \partial A_2 = \{w_3\}$. Seja C_7 uma bola discreta de raio $\frac{h}{2}$ concêntrica com C_6. Então novamente uma conta similar a (6.13) mostra que a probabilidade de que o passeio aleatório simples começando em w atinja ∂C_7 antes de atingir ∂C_6 é menor do que a probabilidade de que tal passeio atinja ∂C_7 antes de atingir ∂A_2, e maior do que $c_{11}\frac{s}{h_4}$, para uma constante $c_{11} > 0$.

Seja C_8 uma bola discreta de raio $2h_4$ contida em A_2^C que intersecta ∂A_2 apenas em y. Seja y_3 um ponto qualquer de ∂C_7. Então, a probabilidade de que o passeio aleatório simples começando em y_3 atinja y antes do que qualquer outro ponto em ∂C_8 é menor do que a probabilidade de que tal passeio atinja y antes do que qualquer outro ponto em ∂A_2, e menor do que $\frac{c_{12}}{h_4^{d-1}}$, para uma constante $c_{12} > 0$, pelo princípio de Harnack. As figuras 12 and 13 ilustram o argumento. Usando a propriedade forte de Markov, nós conseguimos

$$\mathbb{P}_{w_0}\left[w \xrightarrow{4} y\right] \geq c_{12}\frac{s}{h_4}h_4^{-(d-1)}. \tag{6.23}$$

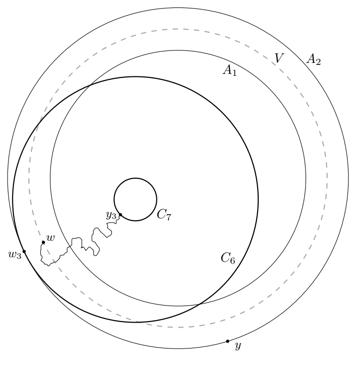

Figura 12:

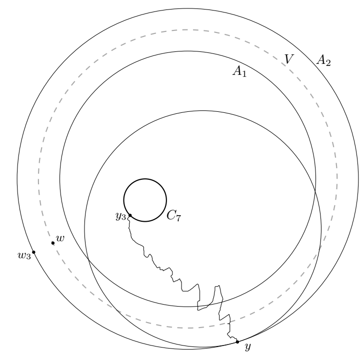

Figura 13: Cotamos $\mathbb{P}_{w_0}\big[w \xrightarrow{4} y\big]$ inferiormente ao descrever o evento em que o passeio começando em w atinge uma pequena bola C_6 antes de atingir ∂C_7 e então atinge y antes do que qualquer outro ponto em ∂C_8.

Se $h_4 \geq \frac{r}{2}$ nós substituímos as bolas C_6 e C_8 por A_2^C e continuamos a prova identicamente.

Vamos mostrar uma cota superior para $\mathbb{P}_{w_0}\big[w \xrightarrow{4} y\big]$, que usaremos mais tarde. Seja C_6' uma bola discreta de raio $\frac{h_4}{3}$ contida em $\overline{A_2}$ de modo que $C_6' \cap A_2^C = \{w_3\}$. Seja C_7' uma bola discreta de raio $\frac{h_4}{6}$ concêntrica com C_6'. Finalmente, seja $C_8' \subset \overline{A_2}$ uma bola discreta de raio h_4 tal que $C_8' \cap A_2 = \{y\}$.

Então, para que o passeio aleatório simples começando em w atinja y antes de qualquer outro ponto de ∂A_2, ele primeiro tem que atingir $\partial C_7'$ antes de $\partial C_6'$ e então atingir y antes do que qualquer outro ponto de $\partial C_8'$. Como já vimos, a probabilidade de que o primeiro evento ocorra é da ordem de $\frac{s}{h_4}$ e a probabilidade do segundo é de ordem $h_4^{-(d-1)}$. Dessa forma, encontramos uma constante $c_{13} > 0$ tal que:

$$\mathbb{P}_{w_0}\big[w \xrightarrow{4} y\big] \leq c_{13} \frac{s}{h_4} h_4^{-(d-1)}. \tag{6.24}$$

Finalmente, usando (6.14) e (6.15), vemos que o supremo em (6.2) é atingido quando h_1 e h_3 são da ordem de s. Dessa forma, h tem que ter a mesma ordem que h_4. Juntando as cotas (6.14), (6.15), (6.19) e (6.23) nós temos, para uma constante $\zeta_3 > 0$

$$\sup_{\substack{w \in V \\ y \in \partial A_2}} \mathbb{P}_w\big[w \xrightarrow{1} w_0 \xrightarrow{2} y_0 \xrightarrow{3} y | w \xrightarrow{4} y\big] \leq \zeta_3 s^{-2(d-1)}. \tag{6.25}$$

Acabamos de provar a seguinte proposição:

Proposição 6.2. *Usando a notação definida acima, temos que, para contantes c_3, c_4, c_8, c_{10}, c_{12}, $c_{13} > 0$, as seguintes cotas são válidas.*

$$\mathbb{P}_w\big[w \xrightarrow{1} w_0\big] \le e^{\frac{-c_3 h_1}{s}} s^{-(d-1)},$$

$$\mathbb{P}_w\big[y \xrightarrow{3} y_0\big] \le e^{\frac{-c_4 h_3}{s}} s^{-(d-1)} s^{-1},$$

$$c_{10}\frac{s^2}{h^d} \le \mathbb{P}_{w_0}\big[w_0 \xrightarrow{2'} y_0\big] \le c_8 \frac{s^2}{h^d},$$

$$c_{12}\frac{s}{h_4^d} \le \mathbb{P}_{w_0}\big[w \xrightarrow{4} y\big] \le c_{13}\frac{s}{h_4^d}.$$

Além disso, para um $\zeta_3 > 0$, nós temos:

$$\sup_{\substack{w \in V \\ y \in \partial A_2}} \mathbb{P}_w\big[w \xrightarrow{1} w_0 \xrightarrow{2} y_0 \xrightarrow{3} y | w \xrightarrow{4} y\big] \le \zeta_3 s^{-2(d-1)}.$$

6.2 Prova do Lema 5.1

Seja $z \in \Sigma$ tal que $\Omega(z) = (w_0, y_0)$. Novamente, denotamos por $h = \mathrm{dist}(w_0, y_0)$. Dada uma trajetória de passeio aleatório simples ϱ começando em um conjunto B que contém V, definimos $\mathcal{C}^B_{w_0,y_0}(\varrho)$ como a função que conta o número de vezes que a trajetória ϱ faz uma excursão em A_2^C que entra em A_1 pelo ponto w_0 e y_0 é o último ponto que tal excursão visita em V antes de chegar a ∂A_2. Seja $\mathcal{C}^B_{w_0,y_0} := \mathcal{C}^B_{w_0,y_0}(\bar{\varrho})$, quando o primeiro ponto de $\bar{\varrho}$ é escolhido de acordo com $\bar{e}_B$. O Teorema 4.1 então implica

$$\pi(w_0, y_0) = \mathbb{E}(\mathcal{C}^V_{w_0,y_0}).$$

Seja $\tilde{V} := \partial B(0, 3(r+s))$, a esfera discreta de raio $3(r+s)$ centrada na origem. Dada uma trajetória $\varrho^* \in W^*$, é elementar ver que

$$\mathcal{C}^{\tilde{V}}_{w_0,y_0}(s_{\tilde{V}}(\varrho^*)) = \mathcal{C}^V_{w_0,y_0}(s_V(\varrho^*)).$$

Definimos $\tilde{\pi}(w_0, y_0) := \mathbb{E}(\mathcal{C}^{\tilde{V}}_{w_0,y_0})$. A equação acima então implica

$$u\,\mathrm{cap}(\tilde{V})\mathbb{E}(\mathcal{C}^{\tilde{V}}_{w_0,y_0}) = u\,\mathrm{cap}(V)\mathbb{E}(\mathcal{C}^V_{w_0,y_0}).$$

Como $\mathrm{cap}(\tilde{V}) \asymp \mathrm{cap}(V)$, se conseguirmos estimar $\tilde{\pi}(w_0, y_0)$ nós automaticamente conseguiremos uma estimativa para $\pi(w_0, y_0)$. Mudamos o problema de estimar $\pi(w_0, y_0)$ para estimar $\tilde{\pi}(w_0, y_0)$ para que a distância entre o ponto inicial do passeio aleatório simples e w_0 não seja causa de complicação dos cálculos.

Notamos que $\mathcal{C}^{\tilde{V}}_{w_0,y_0}$ é dominada por uma variável aleatória geométrica de parâmetro $c_1 < 1$. Com efeito, sempre que o passeio chegar a ∂A_2, com probabilidade uniformemente maior do que uma constante $1-c_1 > 0$ o passeio jamais retorna a w_0. Dessa maneira, será suficiente para os nossos propósitos estimar a probabilidade $\mathcal{P}[\mathcal{C}^{\tilde{V}}_{w_0,y_0} \geq 1]$.

Para que um passeio que começa em $\tilde{V}$ atinja w_0, ele primeiro tem que atingir ∂C_9, uma esfera discreta de raio $\frac{s}{2}$ centrada em w_0. A probabilidade de tal evento possui ordem $\frac{s^{d-2}}{(r+s)^{d-2}}$, como podemos ver na proposição 6.4.2 de [17].

Seja C_{10} uma bola discreta de raio s contida em $\overline{A}_1$ de modo que $\partial A_1 \cap C_{10} = \{w_0\}$. Usando a Proposição 6.5.4 de [17] temos, para qualquer $x' \in \partial C_9$ e uma constante $c_2 > 0$:

$$\mathbb{P}_{x'}\big[X_{H_{A_1}} = w_0\big] \leq \mathbb{P}_{x'}\big[X_{H_{C_{10}}} = w_0\big] \leq c_2 s^{-(d-1)}.$$

Usando então a cota superior para $\mathbb{P}_{w_0}\big[w_0 \xrightarrow{2'} y_0\big]$ na Propisção 6.2 e a propriedade forte de Markov, nós conseguimos, para uma constante $\zeta_6 > 0$:

$$\pi(w_0, y_0) \leq \zeta_6 \operatorname{cap}(V)^{-1} \frac{s}{h^d}. \tag{6.26}$$

Para a cota inferior, definimos B_{w_0} como sendo uma bola discreta de raio $\frac{s}{4}$ contida em $A_2^C \setminus B(0, r+s)$ tal que para todo $x \in B_{w_0}$, a distância entre x e w_0 é menor do que $2s$. Definimos também C_{11}, uma bola discreta de raio $2s$ contida em A_1^C de modo que $C_{11} \cap \partial A_1 = \{w_0\}$. Usando a propriedade forte de Markov, temos

$$\mathcal{P}\big[\mathcal{C}^{\tilde{V}}_{w_0,y_0} \geq 1\big] \geq \inf_{x \in \tilde{V}} \mathbb{P}_x\big[H_{B_{w_0}} < \infty\big] \inf_{x'' \in B_{w_0}} \mathbb{P}_x\big[X_{C_{11}} = w_0\big]\mathbb{P}_{w_0}\big[w_0 \xrightarrow{2'} y_0\big].$$

de modo que, usando a Proposição 6.4.2 de [17] e a cota inferior para $\mathbb{P}_{w_0}\big[w_0 \xrightarrow{2'} y_0\big]$ na Proposição 6.2, nós temos, para uma constante $\zeta_5 > 0$,

$$\pi(w_0, y_0) \geq \zeta_5 \operatorname{cap}(V)^{-1} \frac{s}{h^d}.$$

A parte (ii) segue então de (i), de (6.2) e da Proposição 4.2 .

6.3 Cota inferior para α

Novamente, seja $z \in \Sigma$ tal que $\Omega(z) = (w_0, y_0)$. Sejam

$$\Gamma_{w_0,y_0} := \{(w_0', y_0') \in V \times \partial A_2; \max\{||w_0' - w_0||, ||y_0' - y_0||\} \leq \frac{s}{4}\}$$

e

$$\alpha := \inf\left\{\frac{g_{(w,y)}(z')}{g_{(w,y)}(\hat{z})}; (w,y) \in V \times \partial A_2, z' \in \Gamma_{w_0,y_0}, g_{(w,y)}(\hat{z}) > 0\right\}$$

definidos da mesma maneira que no Lema 5.2. Precisamos achar uma cota inferior maior do que 0 para α. Conseguiremos tal cota se cotarmos as razões:

$$(6.27) \qquad \inf_{||w_0'-w_0|| \leq \frac{s}{4}} \frac{\mathbb{P}_w\big[w \xrightarrow{1} w_0'\big]}{\mathbb{P}_w\big[w \xrightarrow{1} w_0\big]}, \inf_{||y_0'-y_0|| \leq \frac{s}{4}} \frac{\mathbb{P}_y\big[y \xrightarrow{3'} y_0'\big]}{\mathbb{P}_y\big[y \xrightarrow{3'} y_0\big]}$$

já que os outros termos do produto

$$\mathbb{P}_w\big[w \xrightarrow{1} w_0\big]\mathbb{P}_{w_0}\big[w_0 \xrightarrow{2'} y_0\big]\mathbb{P}_y\big[y \xrightarrow{3'} y_0\big]\mathbb{P}_w\big[w \xrightarrow{4} y\big]^{-1} = g_{(w,y)}(z)$$

já possuem cotas superiores e inferiores da mesma ordem. Como as razões em (6.27) são definidas similarmente, daremos uma cota inferior apenas para a primeira razão. Definimos:

$$D = \left\{x \in \mathbb{Z}^d \setminus A_1 : \operatorname{dist}(x, A_1) \leq \frac{s}{8} \text{ e } \max\{\operatorname{dist}(x, w_0) \operatorname{dist}(x, w_0')\} \leq \frac{s}{4}\right\},$$

e

$$\hat{D} = \{x \in D : \text{existe } v \in \mathbb{Z}^d \setminus (A_1 \cup D) \text{ tal que } x \leftrightarrow v\}.$$

$\hat{D}$ pode ser descrito como a parte da fronteira interna de D que não é adjacente a A_1.

Primeiro provaremos que, começando em qualquer ponto em $\hat{D}$, a probabilidade de que o ponto de entrada em A_1 do passeio aleatório simples seja w_0 é comparável com a probabilidade de que tal passeio entre em A_1 por um ponto próximo $w_0' \in \partial A_1$, ou seja

$$(6.28) \qquad \inf_{\substack{x \in \hat{D} \\ \mathbb{P}_x[X_{H_{A_1 \cup A_2}} = w_0'] > 0}} \frac{\mathbb{P}_x[X_{H_{A_1 \cup A_2}} = w_0]}{\mathbb{P}_x[X_{H_{A_1 \cup A_2}} = w_0']} > c_1 > 0.$$

Para $x \in \hat{D}$, consideramos $s' := \operatorname{dist}(x, A_1)$, e escolhemos $x' \in \partial A_1$ de modo que $s' = \operatorname{dist}(x, x')$. Queremos mostrar as seguintes cotas:

$$\mathbb{P}_x\big[X_{H_{A_1\cup A_2}} = w_0\big] \le c_2\frac{s'}{s^d} \tag{6.29}$$

$$\mathbb{P}_x\big[X_{H_{A_1\cup A_2}} = w_0'\big] \ge c_3\frac{s'}{s^d} \tag{6.30}$$

para constantes $c_2, c_3 > 0$.

Para provar a primeira cota, consideramos C_{12} como sendo uma bola discreta de raio $\frac{s}{16}$ contida em $\overline{A}_1$ de modo que $C_{12}\cap\partial A_1 = \{x'\}$, e C_{13}, uma bola discreta de raio $\frac{s}{8}$ concêntrica com C_{12}. Definimos também C_{14} uma bola discreta de raio s contida em $\overline{A}_1$ de modo que $C_{14}\cap\partial A_1 = \{w_0\}$. Então, como já vimos diversas vezes nas seções anteriores, a probabilidade de que o passeio aleatório simples começando em x atinja w_0 antes do que qualquer outro ponto em ∂A_1 é menor do que a probabilidade de que o mesmo passeio atinja ∂C_{13} antes de atingir ∂C_{12} e então, a partir de ∂C_{13}, o passeio atinja w_0 antes do que qualquer outro ponto em ∂C_{14}. A probabilidade desse evento é da ordem de $\frac{s'}{s^d}$, o que prova (6.29).

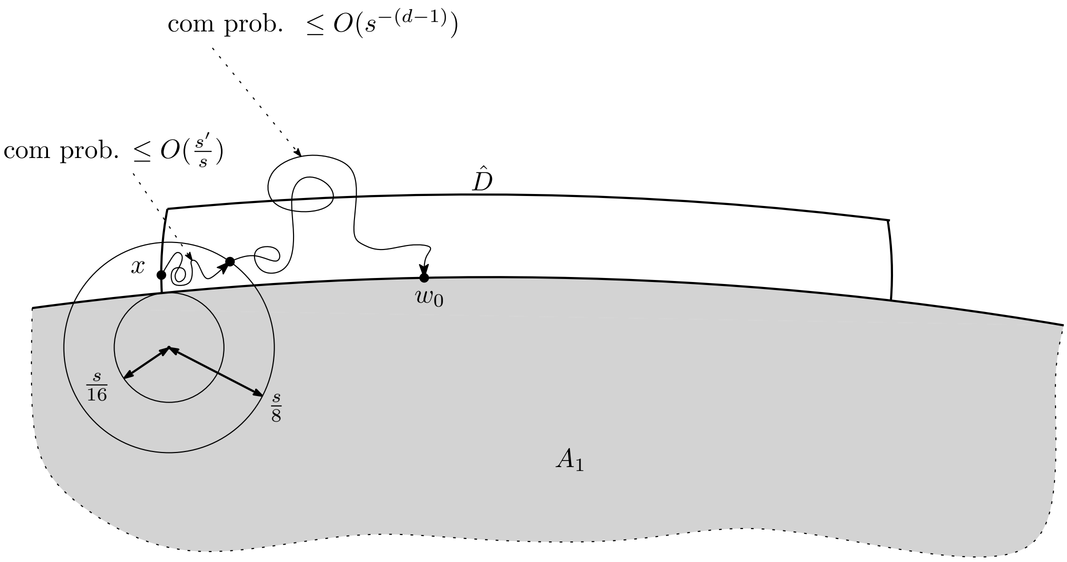

Figura 14: Figura ilustrando a prova de (6.29).

Para a segunda cota, consideramos C'_{12} como sendo uma bola discreta de raio $\frac{s}{2}$ contida em A_1^C de modo que $C'_{12}\cap\partial A_1 = \{x'\}$, e C'_{13}, uma bola discreta de raio $\frac{s}{4}$ concêntrica com C'_{12}. Definimos também C'_{14}, uma bola discreta de raio $\frac{s}{2}$ contida em A_1^C de modo que $C'_{14} \cap \partial A_1 = \{w'_0\}$. Finalmente, definimos C''_{14} como sendo uma bola discreta de raio $\frac{s}{4}$ concêntrica com C'_{14}. Note que com probabilidade uniformemente maior do que 0, um passeio aleatório começando em $\partial C'_{13}$ atinge $\partial C''_{14}$ antes de atingir $A_1 \cup A_2$. Analogamente ao parágrafo acima, a probabilidade de que o passeio aleatório simples começando em x atinja w'_0 antes do que qualquer outro ponto em ∂A_1 é maior do que a probabilidade de que o mesmo passeio atinja $\partial C'_{13}$ antes de atingir $\partial C'_{12}$ e então, a partir de $\partial C'_{13}$, o passeio atinja $\partial C''_{14}$ antes do que $A_1 \cup A_2$, e, finalmente, a partir de $\partial C''_{14}$, o passeio atinja w'_0 antes do que qualquer outro ponto em $\partial C'_{14}$. A probabilidade desse evento é da ordem de $\frac{s'}{s^d}$, o que prova (6.30).

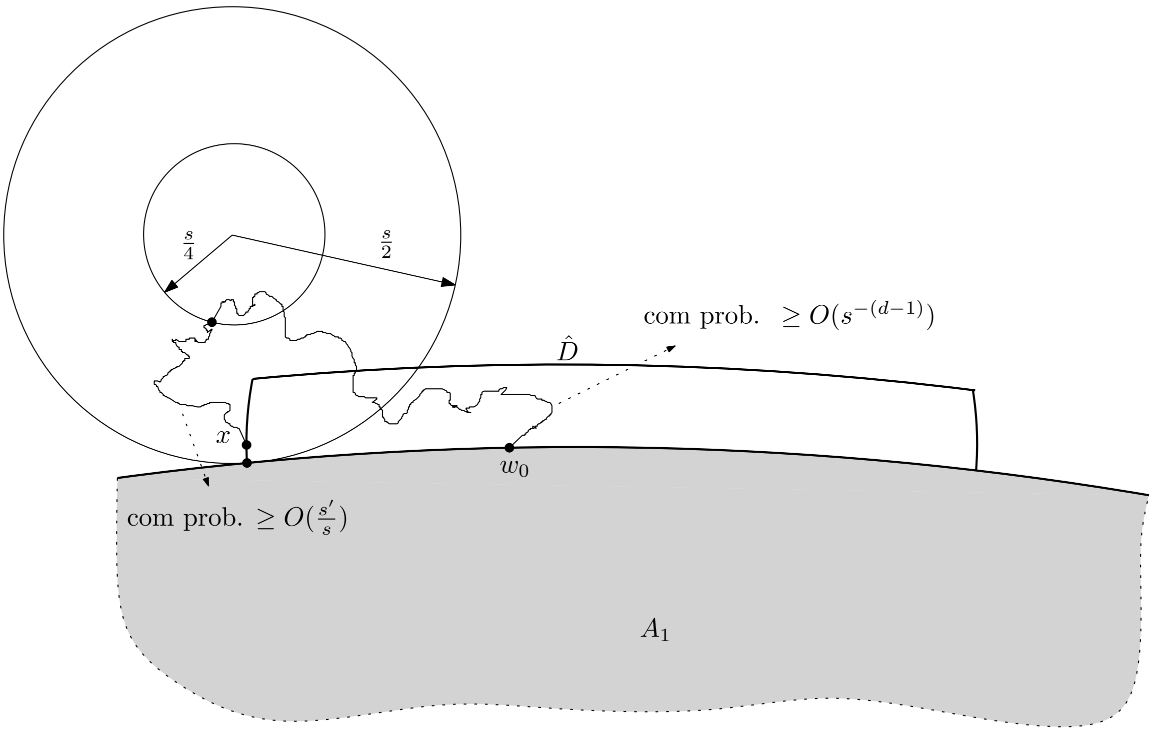

Figura 15: Figura ilustrando a prova de (6.30).

Reescrevemos então as probabilidades:

$$\frac{\mathbb{P}_w\big[w \xrightarrow{1} w_0\big]}{\mathbb{P}_w\big[w \xrightarrow{1} w'_0\big]} = \frac{\mathbb{P}_w[X_{H_{A_1\cup A_2}} = w_0]}{\mathbb{P}_w[X_{H_{A_1\cup A_2}} = w'_0]}. \tag{6.31}$$

Usando a propriedade forte de Markov nós separamos tais probabilidades na razão das somas:

$$\frac{\sum_{x\in\hat{D}} \mathbb{P}_w[X_{H_{\hat{D}}} = x]\mathbb{P}_x[X_{H_{A_1\cup A_2}} = w_0]}{\sum_{x\in\hat{D}} \mathbb{P}_w[X_{H_{\hat{D}}} = x]\mathbb{P}_x[X_{H_{A_1\cup A_2}} = w_0']}. \tag{6.32}$$

Usando (6.28) novamente, nós conseguimos

$$\inf_{w_0':||w_0'-w_0||} \frac{\mathbb{P}_w\big[w \xrightarrow{1} w_0\big]}{\mathbb{P}_w\big[w \xrightarrow{1} w_0'\big]} \geq c_1 > 0. \tag{6.33}$$

o que implica, juntamente com os argumentos apresentados, a existência de uma constante $\zeta_4 > 0$ tal que

$$\alpha \geq \zeta_4. \tag{6.34}$$

Referências

[1] Popov, Serguei e Augusto Teixeira (2013) Soft local times and decoupling of random interlacements. arXiv:1212.1605

[2] Sznitman, Alain-Sol Sznitman Vacant set of random interlacements and percolation. *Ann. of Math. (2)*, 171(3):2039–2087, 2010.

[3] Sidoravicius, Vladas, e Alain-Sol Sznitman. Percolation for the vacant set of random interlacements. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 62.6 (2009): 831-858.

[4] Sznitman, Alain-Sol. A lower bound on the critical parameter of interlacement percolation in high dimension. *Probability theory and related fields* 150.3-4 (2011): 575-611.

[5] Sznitman, Alain-Sol. On the critical parameter of interlacement percolation in high dimension. *The Annals of Probability* 39.1 (2011): 70-103.

[6] Serguei Popov e Jiří Černý On the internal distance in the interlacement set. *Electron. J. Probab*, 17 artigo 29. MR-2915665.

[7] Procaccia, Eviatar B., e Johan Tykesson. Geometry of the random interlacement. *Electron. J. Probab*, 16.528-544 (2011): 76.

[8] Windisch, David. Random walk on a discrete torus and random interlacements. *Electronic Communications in Probability*, 13 (2008): 140-150.

[9] Teixeira, Augusto e David Windisch. On the fragmentation of a torus by random walk. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 64.12 (2011): 1599-1646.

[10] Popov, Serguei e Balázs Ráth On decoupling inequalities and percolation of excursion sets of the Gaussian free field. arXiv preprint arXiv:1307.2862 (2013).

[11] Ráth, Balázs e Artëm Sapozhnikov. Connectivity properties of random interlacement and intersection of random walks. arXiv preprint arXiv:1012.4711 (2010).

[12] Ráth, Balázs e Artëm Sapozhnikov. On the transience of random interlacements. *Electronic Communications in Probability* 16: 379-391.

[13] Drewitz, Alexander e Dirk Erhard Transience of the vacant set for near-critical random interlacements in high dimensions arXiv preprint arXiv:1312.2980 (2013).

[14] Augusto Teixera Interlacement percolation on transient weighted graphs *Electron. J. Probab* 14 (2009): 1604-1627.

[15] Teixeira, Augusto. On the uniqueness of the infinite cluster of the vacant set of random interlacements. *The Annals of Applied Probability* 19.1 (2009): 454-466.

[16] Černý, Jiří e Augusto Teixeira. From random walk trajectories to random interlacements *Ensaios Matemáticos*, SBM, volume 23, 2012

[17] Lawler, Gregory F. Lawler e Vlada Limic. *Random walk: a modern introduction*, volume 123 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[18] Resnick, Sidney I. *Extreme values, regular variation and point processes*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, New York, 2008. Reprint of the 1987 original.

[19] Ráth Balázs, e Artëm Sapozhnikov. On the transience of random interlacements. *Electron. Commun. Probab.*, 16:379–391, 2011.

[20] Rozanov., Yu. A. *Markov random fields*. Applications of Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1982. Translated from Russian by Constance M. Elson.