

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

KLEDILSON PETER RIBEIRO HONORATO

TRÊS MODELOS PARA A GEOMETRIA HIPERBÓLICA

BELO HORIZONTE - MG

2014

|| ICEx - 2014 ||

TRÊS MODELOS PARA A GEOMETRIA HIPERBÓLICA

|| UFMG ||

KLEDILSON PETER RIBEIRO HONORATO

TRÊS MODELOS PARA A GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Monografia apresentada à Universidade Federal de Minas Gerais, como parte das exigências do Curso de Pós-Graduação Lato Sensu em Matemática, para a obtenção do título de Especialista em Matemática Para Professores - Ênfase em Cálculo.

Orientador: Prof. Dr. Alberto Berly Sarmiento Vera

BELO HORIZONTE - MG

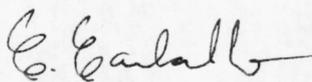
2014

ATA DA 158ª MONOGRAFIA DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA PARA PROFESSORES, APRESENTADO PELO ALUNO KLEDILSON PETER RIBEIRO HONORATO

Aos vinte e oito dias de maio de 2014, às 10h00, na Sala 3060, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pela Comissão do Curso de Especialização em Matemática para Professores, para julgar a apresentação da monografia do aluno **Kledilson Peter Ribeiro Honorato**, intitulada: "*Três modelos para a geometria hiperbólica*", como requisito para obtenção do Grau de Especialista em Matemática, com ênfase em Cálculo. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Alberto Berly Sarmiento Vera, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares, passou a palavra ao aluno para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do aluno. Após a defesa, os membros da Comissão Examinadora reuniram-se sem a presença do aluno e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o aluno foi considerado **Aprovado**, por unanimidade, com nota 95 e conceito A. O resultado final foi comunicado publicamente ao aluno pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ata, que será assinada por todos os membros participantes da Comissão Examinadora. Belo Horizonte, 28 de maio de 2014.



Prof. Alberto Berly Sarmiento Vera
Orientador



Prof. Carlos Maria Carballo
Examinador



Prof. Seme Gebara Neto
Examinador

A Deus, meus familiares e aos
meus amigos...
companheiros de todas as horas...

Agradecimentos

A Deus por minha vida, família e amigos.

À minha mãe (Ana Lúcia) e aos meus irmãos (Jamilson e Clebson), pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

À Andreia, noiva do meu irmão Clebson, pelo o apoio.

À Secretaria Municipal de Educação de Contagem (SEDUC) pela liberação do trabalho nos dias de orientação desta monografia.

À Universidade Federal de Minas Gerais pela oportunidade de fazer o curso.

Aos alunos do curso de Especialização em Matemática para Professores.

À Andréa, Secretária da Pós-Graduação em Matemática, pela atenção e a eficiência nos atendimentos.

Ao professor André Gimenez Bueno pela dedicação e o empenho ao curso.

À professora e coordenadora do curso Jussara de Matos Moreira pela dedicação, competência, profissionalismo e também pelas conversas e o apoio.

Ao meu orientador o professor Alberto Berly Sarmiento Vera – que é um verdadeiro mestre – pela paciência, o apoio, a confiança e seus conhecimentos repassados durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores Carlos Maria Carballo e Seme Gebara Neto pela disponibilidade de participarem da banca examinadora e pelas considerações acerca da monografia.

Aos professores do curso de Especialização em Matemática para Professores.

"A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza - uma beleza fria e austera, como a da escultura."

Bertrand Russell

Resumo

O objetivo deste trabalho foi estudar a geometria hiperbólica construindo um modelo que imita a construção do modelo da geometria da esfera no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Para isso, iniciamos fazendo um resumo de cunho histórico do surgimento das geometrias não euclidianas (a geometria hiperbólica e a geometria esférica). Em seguida, no capítulo 1 apresentamos as noções básicas, definições e resultados, relevantes para o entendimento dos dois próximos capítulos. No capítulo 2, estudamos a geometria esférica determinando a métrica esférica (induzida da métrica euclidiana do espaço – em diferentes coordenadas de \mathbb{S}^2), as geodésicas na esfera e as isometrias. Já no capítulo 3, estudamos a geometria hiperbólica de forma semelhante ao capítulo 2, isto é, determinando a métrica hiperbólica (nos modelos de Minkowski ($\mathbb{H}_{\mathcal{M}}^2$), do disco de Poincaré ($\mathbb{H}_{\mathcal{D}}^2$) e do semiplano de Poincaré ($\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^2$)), as geodésicas de $\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^2$ e as isometrias de $\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^2$. Finalizamos este trabalho com o apêndice A que aborda alguns resultados importantes referentes as relações métricas hiperbólicas tais como: a distância hiperbólica entre dois pontos de \mathbb{C}_+ , as versões do teorema de Pitágoras, leis dos senos e dos cossenos para a geometria hiperbólica e a área de um triângulo hiperbólico.

Palavras-chave: Geometria Não Euclidiana, Métrica, Geodésica e Isometria.

Abstract

The objective of this work was to study the hyperbolic geometry building a model that mimics the construction of the model of the geometry of the sphere in Euclidean space \mathbb{R}^3 . For this, we begin by doing a summary of historical nature of the emergence of the non-Euclidean geometries (the hyperbolic geometry and the spherical geometry). Then, in Chapter 1 we presented the basics notions, definitions and results, relevant to the understanding of the next two chapters. In chapter 2, we study the spherical geometry determining the spherical metric (induced of the metric Euclidean of the space – on different coordinates of \mathbb{S}^2), the geodesics in the sphere and the isometries. Already in chapter 3, we study the hyperbolic geometry similarly to the chapter 2, this is, determining the hyperbolic metric (in the models of Minkowski ($\mathbb{H}_{\mathcal{M}}^2$), of the disk of Poincaré ($\mathbb{H}_{\mathcal{D}}^2$) and of the semiplane of Poincaré ($\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^2$)) the geodesics of $\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^2$ and the isometries of $\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^2$. We end this work with the Appendix A that approach some important results referents the hyperbolic metrics relations such as: the hyperbolic distance between two points of \mathbb{C}_+ , the versions of the Pythagorean theorem, laws of the sines and of the cosines to the hyperbolic geometry and area of a triangle hyperbolic.

Keywords: Non-Euclidean Geometry, Metric, Geodesic and Isometry.

Sumário

Introdução	17
1 Noções Básicas	21
1.1 Grupos, Subgrupos e Homomorfismo de grupos	21
1.2 Espaços Vetoriais, Transformações Lineares, Produto Interno e Formas Bi-lineares	22
1.3 Homeomorfismo, Difeomorfismo e o Teorema da Aplicação Inversa	28
1.4 Números Complexos e a Derivada de uma Função Complexa	32
1.5 Superfície Regular, Plano Tangente, Métrica Riemanniana e Isometria	36
2 Geometria Esférica	41
2.1 A Esfera \mathbb{S}^2	41
2.1.1 Métrica Riemanniana de \mathbb{S}^2 em Coordenadas Cartesianas	42
2.1.2 Métrica Riemanniana de \mathbb{S}^2 em Coordenadas Esféricas	44
2.2 Isometrias de \mathbb{S}^2	48
2.3 Geodésicas de \mathbb{S}^2	53
3 Geometria Hiperbólica	55
3.1 Modelos para a Geometria Hiperbólica	55
3.1.1 $\mathbb{H}_{\mathcal{M}}^2$: Modelo de Minkowski	55
3.1.2 $\mathbb{H}_{\mathcal{D}}^2$: Modelo do Disco de Poincaré	58
3.1.3 $\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^2$: Modelo do Semiplano de Poincaré	65
3.2 Geometria Hiperbólica em $\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^2$	69
3.2.1 Reflexões em $\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^2$	69
3.2.2 Geodésicas de $\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^2$	76
3.2.3 Isometrias de $\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^2$	80
Conclusão	89
A Relações Métricas Hiperbólicas	91
A.1 Distância Hiperbólica em $\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^2$	91
A.2 Relações Métricas em Triângulos Hiperbólicos	97

A.2.1	Relações Métricas em um Triângulo Hiperbólico Retângulo	100
A.2.2	Relações Métricas em um Triângulo Hiperbólico Qualquer	105
A.3	Área de um Triângulo Hiperbólico	112

Referências Bibliográficas	117
-----------------------------------	------------

Introdução

A geometria (do grego **geo**: terra e **metria**: medida) surgiu a partir da necessidade do homem em resolver situações práticas tais como marcações, medições, cálculos de áreas e volumes de regiões. As primeiras civilizações que começaram a estudar a geometria foram a egípcia, a babilônica e a grega na antiguidade por volta do século XX a.C.

Em 306 a.C. com Ptolomeu I (367 – 283 a.C.) no comando do Egito foi criado em Alexandria um instituto científico chamado de *Museu* que reunia todo o saber da época. Para o Museu foram chamados, como professores, sábios de notável importância e entre eles estava Euclides (325 – 265 a.C.), que já tinha publicado *Os Elementos* (*Stoichia*), a obra referência para matemática na época, que sistematizava todo o conhecimento matemático que se tinha, onde Euclides procurou estabelecer uma ordem lógica na distribuição dos conteúdos. Os Elementos¹ é dividido em treze livros e foi o primeiro tratado científico, pois passou a ser modelo para os outros ramos da ciência.

A geometria para Euclides era uma ciência que podia ser deduzida a partir de cinco axiomas (para Euclides noções comuns) e cinco postulados. Segundo Barbosa (2002, p. 2 – 3):

1. Noções comuns

- (a) Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais.
- (b) Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais.
- (c) Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
- (d) Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais.
- (e) O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

¹Os Elementos é dividido em: **Livro I – Os fundamentos da geometria plana; Livro II – Álgebra geométrica; Livro III – Teoria da circunferência; Livro IV – Figuras inscritas e circunscritas; Livro V – Teoria das proporções abstratas; Livro VI – Figuras geométricas semelhantes e proporcionais; Livro VII – Fundamentos da teoria dos números; Livro VIII – Continuação de proporção e teoria dos números; Livro IX – Teoria dos números; Livro X – Classificação dos incomensuráveis; Livro XI – Geometria dos sólidos; Livro XII – Medição de figuras e Livro XIII – Sólidos regulares.**

2. Postulados

- I. Pode-se traçar uma (única) reta ligando quaisquer dois pontos.
- II. Pode-se continuar (de uma única maneira) qualquer reta finita continuamente em uma reta.
- III. Pode-se traçar uma círculo com qualquer centro e com qualquer raio.
- IV. Todos os ângulos retos são iguais.
- V. É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

A geometria desenvolvida a partir destas noções comuns e postulados recebeu o nome de *Geometria Euclidiana*.

O quinto postulado de Euclides era visto com desconfiança pelos matemáticos, pois eles achavam que ele poderia ser deduzido a partir dos quatro primeiros postulados. Durante 2000 anos vários matemáticos tentaram demonstrá-lo, mas sem sucesso. Com as tentativas de demonstrar o quinto postulado obteve-se várias proposições equivalentes ao quinto postulado que foram chamados de *substitutos*. O substituto do quinto postulado mais famoso é o do matemático escocês John Playfair (1748 – 1819): *Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada* – o que acabou batizando o 5º Postulado de *Postulado das Paralelas*.

Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) na tentativa de provar o Postulado das Paralelas, através do método de redução ao absurdo, foi o primeiro a perceber a existência de uma nova geometria, em que veio a chamar de *Geometria Não Euclidiana*. Mas temendo retaliações por parte da Igreja Católica (da Inquisição) Gauss preferiu não publicar seus resultados, pois a Igreja Católica tinha adotado as ideias de Immanuel Kant (1724 – 1804) sobre geometria (Euclidiana) como dogma.

Ao contrário de Gauss, o matemático Johann Bolyai (1802 – 1860), filho do húngaro e amigo de Gauss – Wolfgang Bolyai (1775 – 1856), publicou em 1832 um apêndice do *Tentamen*, livro publicado em 1804 em dois volumes de Wolfgang em que colocou suas ideias sobre a teoria das paralelas. Nele Johann Bolyai publica suas ideias e descobertas ao negar o 5º Postulado (**negação:** *por um ponto não contido em uma reta dada, passa mais de uma ou nenhuma reta paralela a reta dada*) chegando a resultados que direcionavam a uma *Geometria Geral* em que a Geometria Euclidiana era um caso particular.

Mas o primeiro matemático a publicar seus trabalhos referentes a negação do 5º Postulado de Euclides (que não continham contradições e tinha clareza do que aquilo representava) foi o russo Nikolai Ivanovich Lobachewsky (1793 – 1856) em 1829, onde ele admite a existência de uma nova geometria em que nesta geometria *por um ponto fora de*

uma reta dada passam pelo menos duas retas paralelas a reta dada e a soma dos ângulos de qualquer triângulo é menor do que dois ângulos retos. O reconhecimento desta nova geometria só veio após a morte de Lobachewsky em 1868 quando Eugenio Beltrami (1835 – 1900) provou que o 5º Postulado não poderia ser provado e que esta nova geometria era tão consistente quanto a Geometria Euclidiana. Em 1871 Felix Christian Klein (1849 – 1925) deu o nome de *Geometria Hiperbólica* a esta nova geometria que surgira. Dessa forma, Lobachewsky é considerado o pai da Geometria Hiperbólica.

Com a descoberta desta nova geometria a comunidade matemática se perguntava se além das geometrias Euclidiana e Hiperbólica era possível a existência de outra geometria, mas este questionamento foi esclarecido em 1851 na aula inaugural do matemático Georg Bernhard Riemann (1826 – 1866) na Universidade de Göttingen, em que ele expôs os seus resultados obtidos ao negar o 5º Postulado mostrando uma geometria que se passava na superfície de uma esfera e que não possuía retas paralelas. Esta geometria recebeu o nome de *Geometria de Riemann* ou *Geometria Esférica*.

Agora, após este breve resumo da história do nascimento das Geometrias Não Euclidianas: Esférica e Hiperbólica, vejamos como será desenvolvida esta monografia. Em primeiro lugar, o nosso objetivo neste trabalho é estudar a geometria hiperbólica construindo uma modelo que imita a construção do modelo da geometria da esfera no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Para isso, utilizaremos três capítulos: Noções Básicas, Geometria Esférica e Geometria Hiperbólica. Neste trabalho também consta um apêndice intitulado de Relações Métricas Hiperbólicas.

No Capítulo 1, Noções Básicas, procuraremos apresentar alguns resultados importantes para o desenvolvimento dos dois próximos capítulos.

No Capítulo 2, Geometria Esférica, começaremos definindo o espaço, a esfera \mathbb{S}^2 , onde se passa a geometria esférica e, em seguida, parametrizaremos a esfera \mathbb{S}^2 – determinando a sua métrica (induzida pela métrica de \mathbb{R}^3) em coordenadas cartesianas e esféricas. Concluiremos, o capítulo 2, determinando as isometrias e as geodésicas de \mathbb{S}^2 .

No Capítulo 3, Geometria Hiperbólica, apresentaremos três modelos para a geometria hiperbólica – com destaque para o modelo do semiplano de Poincaré $\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2$ – determinando a métrica hiperbólica em cada um deles. Finalizaremos, o capítulo 3, obtendo as geodésicas e as isometrias em $\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2$.

Concluiremos este trabalho com o apêndice A em que trataremos das relações métricas hiperbólicas, ou seja, determinaremos a distância hiperbólica entre dois pontos de \mathbb{C}_+ , apresentaremos e provaremos as versões do teorema de Pitágoras, das leis dos senos e dos cossenos para a geometria hiperbólica e determinaremos a expressão que fornece a área de um triângulo hiperbólico.

Capítulo 1

Noções Básicas

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados (de grupos, transformações lineares, teorema da aplicação inversa, derivada de um função complexa, superfície regular, métrica riemanniana, etc.) que serão úteis para o entendimento dos capítulos 2 e 3 desta monografia. O leitor pode encontrar mais detalhes das temáticas abordadas neste capítulo nas obras [6], [7], [11], [13], [16], [23], [26], [34] e [36].

1.1 Grupos, Subgrupos e Homomorfismo de grupos

DEFINIÇÃO 1.1: *Sejam G um conjunto não vazio e $*$ uma operação tal que*

$$* : G \times G \rightarrow G .$$

$(x,y) \rightsquigarrow x*y$

*Dizemos que $(G, *)$ é um grupo se, e somente se, $*$ goza das propriedades:*

- (i) **(Associativa)** $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in G.$
- (ii) **(Existência de elemento neutro)** *Existe $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a, \forall a \in G.$*
- (iii) **(Existência de inverso)** *Para cada $a \in G, \exists b \in G$ tal que $a * b = b * a = e$ (denotaremos b por a^{-1}).*

É comum representar o grupo $(G, *)$, simplesmente, por G .

EXEMPLO 1.1: $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo.

EXEMPLO 1.2: Sejam $G = \{A \in M_2(\mathbb{R}); \det A \neq 0\}$ e \cdot a operação de multiplicação de matrizes. Então, (G, \cdot) é um grupo.

Se um grupo $(G, *)$ goza da igualdade

$$a * b = b * a, \forall a, b \in G,$$

então dizemos que $(G, *)$ é um *grupo abeliano*.

Note que, o grupo do exemplo 1.1 é um grupo abeliano. Já o grupo do exemplo 1.2 não é um grupo abeliano.

DEFINIÇÃO 1.2: *Sejam $(G, *)$ um grupo e $\emptyset \neq H \subset G$. Dizemos que $(H, *)$ é um subgrupo de $(G, *)$, se $(H, *)$ é um grupo. Denotaremos $(H, *) \leq (G, *)$.*

PROPOSIÇÃO 1.1: *Sejam $(G, *)$ e $H \subset G$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $(H, *)$ é um subgrupo de $(G, *)$.
- (ii) **a.** $\forall a, b \in H$ tem-se $a * b \in H$.
b. $\forall a \in H$ tem-se $a^{-1} \in H$.
- (iii) $H \neq \emptyset$ e $\forall a, b \in H$ tem-se $a * b^{-1} \in H$.

EXEMPLO 1.3: Seja $H = \mathbb{Z} \cdot m_0 = \{zm_0; z \in \mathbb{Z} \text{ e } m_0 \text{ é um número inteiro fixo}\}$. Então, $(H, +) \leq (\mathbb{Z}, +)$.

EXEMPLO 1.4: Sejam $(H_i, *)$, para $i = 1, 2, \dots, n$, subgrupos de um grupo $(G, *)$. Então,

$$(H, *) \leq (G, *),$$

onde $H = \bigcap_{i=1}^n H_i$.

DEFINIÇÃO 1.3: *Sejam os grupos $(G, *)$ e (G', \bullet) . Dizemos que a função $f : G \rightarrow G'$ é um homomorfismo de G em G' se, e somente se, $f(x * y) = f(x) \bullet f(y)$, $\forall x, y \in G$.*

EXEMPLO 1.5: Sejam os grupos (\mathbb{C}^*, \cdot) e (\mathbb{R}_+^*, \cdot) . A função $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ dada por $f(z) = |z|$ é um homomorfismo de grupos.

DEFINIÇÃO 1.4: *Um grupo G atua num conjunto X se existe um homomorfismo de G no conjunto das bijeções de X . Dizemos que G atua transitivamente em X se $\forall x, y \in X$, $\exists g \in G$ tal que $g(x) = y$.*

LEMA 1.1: *Sejam G um grupo que atua sobre um conjunto X e x_0 em X . Se $\forall y \in X$ $\exists g \in G$ tal que $g(y) = x_0$, então G atua transitivamente sobre X .*

1.2 Espaços Vetoriais, Transformações Lineares, Produto Interno e Formas Bilineares

DEFINIÇÃO 1.5: *Sejam V um conjunto não vazio e \mathbb{K} um corpo. Dizemos que V é um espaço vetorial sobre \mathbb{K} se, e somente se, as operações $+$ (soma) e \cdot (produto por escalar) estiverem definidas em V de modo que:*

- (i) $\forall u, v \in V$ tem-se $u + v \in V$.

1.2. ESPAÇOS VETORIAIS, TRANSFORMAÇÕES LINEARES, PRODUTO INTER23

- a. $u + v = v + u, \forall u, v \in V$ (*propriedade comutativa*).
 - b. $(u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in V$ (*propriedade associativa*).
 - c. *Existe o elemento* $0 \in V$ (*vetor nulo*) *tal que* $u + 0 = u, \forall u \in V$ (*elemento neutro da soma*).
 - d. *Para cada* $u \in V$ *existe* $v \in V$ *tal que* $u + v = 0$ (*denotaremos* v *por* $-u$).
- (ii) $\forall u \in V$ e $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ *tem-se* $\alpha \cdot u \in V$.
- a. $(\alpha\beta) \cdot u = \alpha(\beta \cdot u), \forall u \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ (*propriedade associativa*).
 - b. *Existe o elemento* $1 \in \mathbb{K}$ *tal que* $1 \cdot u = u, \forall u \in V$ (*elemento neutro da operação* \cdot).
- (iii) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v, \forall u, v \in V$ e $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.
- (iv) $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u, \forall u \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Daqui em diante, trabalharemos, apenas, com espaços vetoriais sobre \mathbb{R} .

EXEMPLO 1.6: Temos que,

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_n = \{(a_1, \dots, a_n); a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n\}, \text{ para } n \in \mathbb{N}^* \text{ fixo,}$$

é um espaço vetorial com as operações de $+$ e \cdot tais que

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n),$$

$\forall (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ e

$$\alpha \cdot (a_1, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n),$$

$\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO 1.6: *Seja* V *um espaço vetorial.*

- (i) *Dizemos que um vetor* $v \in V$ *é uma combinação linear dos vetores* $v_1, \dots, v_n \in V$ *se existirem escalares* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i.$$

- (ii) *Se* \mathcal{A} *é um subconjunto de* V , *então dizemos que* \mathcal{A} *gera* V *se todo elemento de* V *for uma combinação linear de um número finito de elementos de* \mathcal{A} .

DEFINIÇÃO 1.7: *Sejam V um espaço vetorial e \mathcal{A} um subconjunto de V .*

(i) \mathcal{A} é linearmente independente (l.i.) se, e somente se,

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0, \text{ para } v_1, \cdots, v_n \in \mathcal{A} \text{ e } \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

(ii) \mathcal{A} é linearmente dependente (l.d.) se \mathcal{A} não é linearmente independente.

DEFINIÇÃO 1.8: *Sejam V um espaço vetorial e \mathcal{A} um subconjunto de V . Dizemos que \mathcal{A} é uma base de V se, e somente se,*

(i) \mathcal{A} gera V ; e

(ii) \mathcal{A} é l.i.

EXEMPLO 1.7: O conjunto

$$\mathcal{A} = \{(1, 0, 0, \cdots, 0), (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, (0, 0, 0, \cdots, 1)\}$$

é uma base de \mathbb{R}^n (chamada de *base canônica* de \mathbb{R}^n).

Chamamos de *dimensão* do espaço vetorial V o número de elementos de uma base \mathcal{A} deste espaço vetorial. Se a base \mathcal{A} tem infinitos elementos, então a dimensão do espaço vetorial é infinita. Denotaremos a dimensão do espaço vetorial V por $\dim V$. No exemplo 1.7, $\dim \mathbb{R}^n = n$.

PROPOSIÇÃO 1.2: *Sejam V um espaço vetorial, onde $\dim V = n \geq 1$, e \mathcal{A} um subconjunto de V . As afirmações, a seguir, são equivalentes:*

(i) \mathcal{A} é uma base de V .

(ii) Cada elemento de V se escreve de maneira única como combinação linear de elementos de \mathcal{A} .

Seja V um espaço vetorial tal que $\dim V = n \geq 1$. Se $\mathcal{A} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ é uma base de V e $v \in V$, então $\exists \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i.$$

Pela unicidade do item (ii) da proposição 1.2, podemos representar v com relação à base \mathcal{A} como

$$[v]_{\mathcal{A}} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{A}},$$

1.2. ESPAÇOS VETORIAIS, TRANSFORMAÇÕES LINEARES, PRODUTO INTER25

onde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são as coordenadas de v na base \mathcal{A} .

DEFINIÇÃO 1.9: *Sejam V um espaço vetorial e W um subconjunto de V . Dizemos que W é um subespaço vetorial de V se, e somente se, W é um espaço vetorial com as operações de V .*

PROPOSIÇÃO 1.3: *Sejam V um espaço vetorial e W um subconjunto de V . Então, W é um subespaço vetorial de V se, e somente se, são satisfeitas as seguintes condições:*

- (i) *se $u, v \in W$, então $u + v \in W$.*
- (ii) *se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in W$, então $\lambda \cdot u \in W$.*

EXEMPLO 1.8: *Sejam V um espaço vetorial e $\mathbb{R} \cdot u_0 := \{\alpha \cdot u_0; \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } u_0 \text{ é elemento fixo de } V\}$. Note que, $\mathbb{R} \cdot u_0$ é um subespaço vetorial de V .*

DEFINIÇÃO 1.10: *Sejam U e V espaços vetoriais e $T : U \rightarrow V$ uma aplicação. Dizemos que T é uma transformação linear se, e somente se,*

- (i) $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2), \forall u_1, u_2 \in U$; e
- (ii) $T(\lambda u) = \lambda T(u), \forall u \in U \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

LEMA 1.2: *Sejam U e V espaços vetoriais. A aplicação $T : U \rightarrow V$ é uma transformação linear se, e somente se, $T(\lambda u_1 + u_2) = \lambda T(u_1) + T(u_2), \forall u_1, u_2 \in U \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{R}$.*

EXEMPLO 1.9: *Sejam $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. A aplicação $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

é uma transformação linear.

DEFINIÇÃO 1.11: *Sejam U e V espaços vetoriais e $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear.*

- (i) *Se T é bijetora, então dizemos que T é um isomorfismo.*
- (ii) *Se T é um isomorfismo, então dizemos que U e V são espaços vetoriais isomorfos ($U \simeq V$).*

PROPOSIÇÃO 1.4: *Se uma transformação linear é bijetora, então a sua inversa também é uma transformação linear.*

PROPOSIÇÃO 1.5: *Sejam U e V espaços vetoriais, onde $\dim U = \dim V = n \geq 1$, e $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear. Então, as afirmações, a seguir, são equivalentes:*

- (i) *T é um isomorfismo.*
- (ii) *T é injetora.*

(iii) T é sobrejetora.

TEOREMA 1.1: *Sejam U e V espaços vetoriais tais que $\dim U = \dim V = n \geq 1$. Então, $U \simeq V$.*

DEFINIÇÃO 1.12: *Sejam V um espaço vetorial e $T : V \rightarrow V$ um operador linear.*

- (i) Chamamos de autovalor de T um elemento $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que existe $0 \neq v \in V$ em que $T(v) = \lambda v$.
- (ii) Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ um autovalor de T . Chamamos cada vetor $0 \neq v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$ de autovetor de T associado a λ .
- (iii) Suponha que $\dim V = n \geq 1$. Dizemos que T é diagonalizável se existe uma base de V formada por autovetores de T .

DEFINIÇÃO 1.13: *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Considere \mathcal{A} como uma base de V . Chamamos de polinômio característico da transformação T , denotado por $p_T(x)$, o polinômio*

$$\det([T]_{\mathcal{A}} - xI).$$

Temos que o polinômio característico de T não depende da base.

DEFINIÇÃO 1.14: *Sejam V um espaço vetorial e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Se W é um subespaço de V e $T(w) \in W, \forall w \in W$, então dizemos que W é um subespaço T -invariante de V .*

DEFINIÇÃO 1.15: *Seja V um espaço vetorial. Um produto interno sobre V é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:*

- (i) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \forall u, v, w \in V$.
- (ii) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle, \forall u, v \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- (iii) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \forall u, v \in V$.
- (iv) $\langle u, u \rangle > 0$, se $u \neq 0$.

EXEMPLO 1.10: A função $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

é um produto interno sobre \mathbb{R}^n . Este produto interno é chamado de *produto interno canônico* ou *produto interno euclidiano* em \mathbb{R}^n .

EXEMPLO 1.11: A função $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\langle (x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2) \rangle = 2x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 + w_1w_2$$

é um produto interno de \mathbb{R}^4 .

DEFINIÇÃO 1.16: *Seja V um espaço vetorial com produto interno. Dizemos que uma base $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V é ortonormal se*

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ 1 & , i = j \end{cases}.$$

A base canônica de \mathbb{R}^n (ver exemplo 1.7) é uma base ortonormal de \mathbb{R}^n (considerando o produto interno canônico em \mathbb{R}^n).

DEFINIÇÃO 1.17: *Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$.*

- (i) *Se $A = A^t$ dizemos que A é uma matriz simétrica.*
- (ii) *Se $A \cdot A^t = A^t \cdot A = I$ dizemos que A é uma matriz ortogonal ($A^{-1} = A^t$).*

EXEMPLO 1.12: As matrizes

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

são exemplos, respectivamente, de matriz ortogonal e de matriz simétrica.

TEOREMA 1.2: *Se A é uma matriz ortogonal, então $\det A = \pm 1$.*

DEFINIÇÃO 1.18: *Se V é um espaço vetorial com produto interno, α é uma base ortonormal de V e $T : V \rightarrow V$ é um operador linear, então T é chamado um:*

- (i) *operador autoadjunto se $[T]_\alpha$ é uma matriz simétrica.*
- (ii) *operador ortogonal se $[T]_\alpha$ é uma matriz ortogonal.*

TEOREMA 1.3: *Se $T : V \rightarrow V$ é um operador autoadjunto, então existe uma base ortonormal de V formada por autovetores de T .*

TEOREMA 1.4: *Sejam V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *T é um operador ortogonal.*
- (ii) *T transforma bases ortonormais em bases ortonormais.*
- (iii) *$\langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle, \forall u, v \in V$ (T preserva produto interno).*

(iv) $\|Tv\| = \|v\|, \forall v \in V$ (T preserva norma).

DEFINIÇÃO 1.19: *Sejam U e V espaços vetoriais. Uma função $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de forma bilinear de $U \times V$ em \mathbb{R} se satisfaz as condições:*

(i) $f(\lambda u_1 + u_2, v) = \lambda f(u_1, v) + f(u_2, v), \forall u_1, u_2 \in U, \forall v \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) $f(u, \lambda v_1 + v_2) = \lambda f(u, v_1) + f(u, v_2), \forall u \in U, \forall v_1, v_2 \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Denotamos por $B(U, V)$ o conjunto formado por todas as formas bilineares de $U \times V$ em \mathbb{R} . Se $U = V$, então escreveremos, simplesmente, $B(V)$. Note que, $B(U, V)$ é um espaço vetorial.

DEFINIÇÃO 1.20: *Sejam V um espaço vetorial e $f \in B(V)$. Dizemos que f é uma forma bilinear simétrica se $f(u, v) = f(v, u), \forall u, v \in V$.*

Representaremos por $B_S(V)$ o conjunto formado por todas as formas bilineares simétricas de V^2 em \mathbb{R} . Note que, $B_S(V)$ é um subespaço de $B(V)$.

EXEMPLO 1.13: Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^n . O produto interno euclidiano (ver exemplo 1.10) de \mathbb{R}^n é uma forma bilinear simétrica sobre \mathbb{R}^n .

DEFINIÇÃO 1.21: *Sejam V um espaço vetorial e $f \in B(V)$. Chamamos de forma quadrática associada a f a função $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $q(v) = f(v, v)$.*

A forma quadrática associada ao produto interno euclidiano, do exemplo 1.13, é

$$q(v) = \langle v, v \rangle = v_1^2 + \dots + v_n^2 = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_{\text{can}}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{\text{can}} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_{\text{can}} = [v]_{\text{can}}^t \cdot I \cdot [v]_{\text{can}},$$

onde $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ (ver corolário 1.1).

TEOREMA 1.5: *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $f \in B_S(V)$. Então, existe uma base \mathcal{A} de V tal que $[f]_{\mathcal{A}}$ é uma matriz diagonal.*

COROLÁRIO 1.1: *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita, $f \in B_S(V)$ e $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ a forma quadrática associada a f . Então, existem $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ e uma base $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V tais que $f(v_i, v_j) = \lambda_i \delta_{ij}$ para cada $1 \leq i, j \leq n$ e $q(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2$ para cada $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in V$.*

Note que, para conhecer $f \in B_S(V)$ basta conhecer f em uma base de V .

1.3 Homeomorfismo, Difeomorfismo e o Teorema da Aplicação Inversa

Seja $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ um vetor de \mathbb{R}^n . A norma euclidiana de x é dada por

1.3. HOMEOMORFISMO, DIFEOMORFISMO E O TEOREMA DA APLICAÇÃO IN29

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

DEFINIÇÃO 1.22: *Sejam $a \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$.*

(i) *Chamamos de bola aberta o conjunto*

$$B(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| < r\}.$$

(ii) *Chamamos de bola fechada o conjunto*

$$B[a; r] = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| \leq r\}.$$

Seja $a \in A \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que a é um *ponto interior* de A se existe uma bola aberta $B(a; r)$, onde $r > 0$, tal que $B(a; r) \subset A$. O conjunto formado por todos os pontos interiores de A é denotado por $\text{int } A$ e, conseqüentemente, está contido em A . E ainda, diz-se que A é uma *vizinhança* de a .

DEFINIÇÃO 1.23: *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. O conjunto A é chamado de aberto se, e somente se, $A = \text{int } A$.*

Sejam $a \in \mathbb{R}^n$ e $A \subset \mathbb{R}^n$. Diz-se que o ponto a é *aderente* ao conjunto A se existe uma seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $a_n \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $\lim a_n = a$. O conjunto formado por todos os pontos aderentes de A é chamado de *fecho* de A e é denotado por \bar{A} .

DEFINIÇÃO 1.24: *Diz-se que um conjunto F é fechado quando $F = \bar{F}$.*

TEOREMA 1.6: *Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se, e somente se, seu complementar $\mathbb{R}^n - F$ é aberto.*

Dizemos que $a \in \mathbb{R}^n$ é um *ponto de acumulação* de $X \subset \mathbb{R}^n$ se $\forall r > 0$ tem-se $B(a; r) \cap X \setminus \{a\} \neq \emptyset$.

Sejam $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação de X . Diz-se que $b \in \mathbb{R}^n$ é o *limite de $f(x)$ quando x tende para a* se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 ; x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon.$$

Representamos o limite de $f(x)$ quando x tende para a por $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Seja uma aplicação $f : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)).$$

Chamamos as funções reais $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$, para $i = 1, 2, \cdots, n$, de *funções coordenadas* de f .

DEFINIÇÃO 1.25: *Seja $a \in A \subset \mathbb{R}^m$. Dizemos que $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua em a se*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 ; x \in A, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Se $f : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua em todos os pontos de A , então diremos que f é contínua em A .

TEOREMA 1.7: *Seja uma aplicação $f : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por*

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)).$$

A aplicação f é contínua no ponto $a \in A$ se, e somente se, suas funções coordenadas $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$, para $i = 1, 2, \dots, n$, são contínuas em a .

DEFINIÇÃO 1.26: *Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$ e $B \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que a aplicação $f : A \rightarrow B$ é um homeomorfismo se:*

- (i) *f é uma bijeção contínua; e*
- (ii) *sua inversa f^{-1} , também, é uma aplicação contínua.*

EXEMPLO 1.14: A bola aberta $B(0; 1) \subset \mathbb{R}^n$ é homeomorfa a \mathbb{R}^n , pois $f : B(0; 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{1 - |x|}x$$

é um bijeção contínua em $B(0; 1)$ tal que sua inversa

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{1 + |x|}x,$$

também, é contínua em \mathbb{R}^n .

Seja uma aplicação $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $A \subset \mathbb{R}^m$ é um aberto. Chamamos de *derivada parcial* de f em $a \in A$ o vetor

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}, \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, m,$$

caso exista. É claro que se $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, então

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(a) \right), \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, m.$$

Se as funções $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} : A \rightarrow \mathbb{R}$ forem contínuas em A dizemos que f é uma *aplicação de classe C^1* . De modo geral, se $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ possui, em cada ponto de A , todas as derivadas parciais de ordem k tal que todas elas são contínuas em A , então dizemos que f é uma aplicação de classe C^k ($f \in C^k$). Note que, toda aplicação de Classe C^1 é contínua.

Seja uma aplicação $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $A \subset \mathbb{R}^m$ é um aberto. Diz-se que a aplicação f é *diferenciável* em $a \in A$ se satisfaz as condições:

1.3. HOMEOMORFISMO, DIFEOMORFISMO E O TEOREMA DA APLICAÇÃO IN31

(i) As derivadas parciais $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$, para $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$, existem.

(ii) Para todo $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ tal que $a + v \in A$ tem-se

$$f_j(a + v) - f_j(a) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \cdot \alpha_i + r_j(v) \text{ com } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r_j(v)}{|v|} = 0,$$

para cada $j = 1, 2, \dots, n$.

Se $f : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável em todos os pontos de A , então dizemos que f é diferenciável em A .

A matriz $Jf(a) = (a_{ji})_{n \times m}$ tal que $a_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$ é chamada de *matriz jacobiana* de f em a .

DEFINIÇÃO 1.27: A derivada da aplicação f em a é a transformação linear $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $[f'(a)]_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = Jf(a)$, onde \mathcal{A} e \mathcal{B} são as bases canônicas, respectivamente, de \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n .

Como a *derivada direcional* da aplicação f em a , na direção do vetor v , é

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t},$$

então

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = f'(a) \cdot v.$$

Temos que, toda aplicação de Classe C^1 é diferenciável.

DEFINIÇÃO 1.28: Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ abertos. Dizemos que a aplicação $f : A \rightarrow B$ é um *difeomorfismo* entre A e B se:

(i) f é uma bijeção diferenciável; e

(ii) sua inversa f^{-1} também é uma aplicação diferenciável.

Se $f : A \rightarrow B$ é um difeomorfismo, onde $A, B \subset \mathbb{R}^n$ são abertos, então a derivada de f é um isomorfismo.

Diz-se que uma aplicação $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $A \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, é um *difeomorfismo local*, quando para cada $a \in A$ existe uma bola aberta $B = B(a; \delta) \subset A$ tal que f é um difeomorfismo de B sobre um aberto V contendo $f(a)$.

Note que, um difeomorfismo local $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $A \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, é um difeomorfismo de A sobre o aberto $f(A) \subset \mathbb{R}^n$ se, e somente se, f é uma aplicação injetiva.

TEOREMA 1.8: (TEOREMA DA APLICAÇÃO INVERSA) *Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k ($k \geq 1$), onde $A \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto. Se $a \in A$ tal que $f'(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é invertível, então existe uma bola aberta $B = B(a; \delta) \subset A$ tal que $f|_B$ é um difeomorfismo de B sobre um aberto V contendo $f(a)$.*

1.4 Números Complexos e a Derivada de uma Função Complexa

DEFINIÇÃO 1.29: Um número complexo z é um par ordenado de números reais $z = (x, y)$ satisfazendo as regras

(i) da soma:

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \text{ e}$$

(ii) do produto:

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1) (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

As operações da soma e do produto de números complexos têm as seguintes propriedades:

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ e $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (propriedade comutativa).
2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ e $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (propriedade associativa).
3. $(0, 0)$ é o elemento neutro da soma, isto é, $z + (0, 0) = z$, $\forall z$ complexo.
4. $(1, 0)$ é o elemento identidade do produto, isto é, $z (1, 0) = z$, $\forall z$ complexo.
5. $-z = (-x, -y)$ é o elemento simétrico aditivo de $z = (x, y)$, ou seja, $z + (-z) = (0, 0)$, $\forall z$ complexo.
6. Todo $(0, 0) \neq z = (x, y)$ tem um inverso multiplicativo $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right)$, ou seja, $z (z^{-1}) = (1, 0)$.
7. $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (propriedade distributiva do produto em relação à soma).

Representamos por \mathbb{C} o conjunto formado pelos números complexos. Como o conjunto \mathbb{C} munido das operações de soma e de produto, da definição 1.29, satisfaz as propriedades de 1 a 7, então dizemos que \mathbb{C} é um corpo.

O número complexo $(x, 0)$ é identificado como o número real x e o número complexo $(0, 1)$ é denotado por i (*unidade imaginária*). Temos que,

$$i^2 = ii = (0, 1) (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$$

e

$$(y, 0) (0, 1) = (y \cdot 0 - 0 \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0, y).$$

Donde vem que,

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + yi.$$

Em um número complexo $z = (x, y) = x + yi$ chamamos x de *parte real* e y de *parte imaginária*. Denotamos

$$x = \operatorname{Re} z \text{ e } y = \operatorname{Im} z.$$

Geometricamente representamos um número complexo $z = (x, y) = x + yi$ como na figura 1.1.

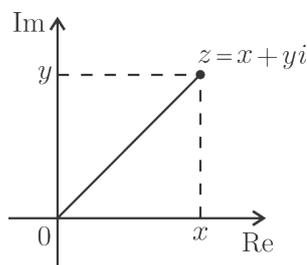


FIGURA 1.1.

O *módulo* de um número complexo $z = (x, y) = x + yi$ é a distância do ponto z à origem $(0, 0)$ do plano complexo, ou seja,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

Dessa forma,

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

O *conjugado* de um número complexo $z = (x, y) = x + yi$ é o número complexo obtido através da reflexão de z em relação ao eixo real. Denotamos o conjugado do número complexo z por \bar{z} . Assim,

$$\bar{z} = (x, -y) = x - yi.$$

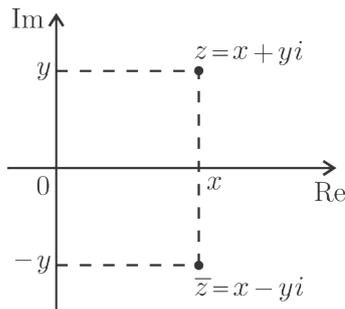


FIGURA 1.2.

Vejam algumas propriedades que envolvem z e \bar{z} :

- (i) $z\bar{z} = |z|^2$.
- (ii) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$.
- (iii) $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.
- (iv) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$.
- (v) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.
- (vi) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.
- (vii) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

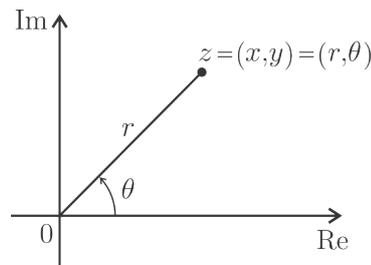


FIGURA 1.3.

O número complexo $z = (x, y)$ em coordenadas polares é dado por (r, θ) , onde $r = |z|$ e θ (*argumento* de z denotado por $\arg z$) é o ângulo, em radianos, formado pelo segmento de reta de extremos na origem e em z com o eixo real (parte positiva) – medido no sentido anti-horário. Se o número complexo $z = (r, \theta)$ em coordenadas polares, então, em coordenadas cartesianas,

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} \text{ – forma polar de } z.$$

Uma *função complexa* $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma correspondência que associa a um número complexo z um único número complexo w , isto é, $f(z) = w$. Se $z = x + yi = (x, y)$, então $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$.

DEFINIÇÃO 1.30: *Sejam $A \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa de variável z . Dizemos que o limite de f quando z tende a $z_0 \in A$ é o número complexo w_0 se, e somente se, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que se $z \in A$ e $0 < |z - z_0| < \delta$ tem-se $|f(z) - w_0| < \epsilon$. Escrevemos*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0.$$

PROPOSIÇÃO 1.6: *Sejam $A \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$ funções complexas. Se $z_0 \in A$, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_1$ e $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = w_2$, então:*

- (i) $\lim_{z \rightarrow z_0} cf(z) = cw_1$, onde $c \in \mathbb{C}$.
- (ii) $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = w_1 + w_2$.
- (iii) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = w_1w_2$.
- (iv) $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{w_1}$, se $w_1 \neq 0$.

DEFINIÇÃO 1.31: *Sejam $A \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa. Dizemos que f é uma função contínua em $z_0 \in A$ se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. Se f é contínua em todos os pontos de A , então dizemos que f é contínua em A .*

PROPOSIÇÃO 1.7: *Sejam $A, B \subset \mathbb{C}$ abertos, $f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$ e $h : B \rightarrow \mathbb{C}$ funções complexas, onde $f(A) \subset B$. Se f e g são contínuas em $z_0 \in A$ e h é contínua em $f(z_0)$, então:*

- (i) as funções cf , $f + g$ e fg são contínuas em z_0 , onde $c \in \mathbb{C}$.
- (ii) a função $\frac{1}{f}$ é contínua em z_0 , se $f(z_0) \neq 0$.
- (iii) a função $h \circ f$ é contínua em z_0 .

DEFINIÇÃO 1.32: *Sejam $A \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa. Se $z_0 \in A$ e o*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe, então chamamos este limite de derivada de f em z_0 e denotamos por $f'(z_0)$.

PROPOSIÇÃO 1.8: *Se f é derivável em z_0 , então f é contínua em z_0 .*

PROPOSIÇÃO 1.9: *Se f e g são deriváveis em z_0 , então as funções cf (onde $c \in \mathbb{C}$), $f + g$, fg e $\frac{1}{f}$ (com $f(z_0) \neq 0$), também, são deriváveis em z_0 . Além disso, temos que:*

- (i) $(cf)'(z_0) = cf'(z_0)$.
- (ii) $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$.
- (iii) $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$.
- (iv) $\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{[f(z_0)]^2}$.

PROPOSIÇÃO 1.10: (REGRA DA CADEIA) *Sejam $A, B \subset \mathbb{C}$ abertos, $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : B \rightarrow \mathbb{C}$ funções complexas, onde $f(A) \subset B$. Se f é derivável em $z_0 \in A$ e g é derivável em $f(z_0)$, então $g \circ f$ é derivável em z_0 e $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$.*

PROPOSIÇÃO 1.11: (CONDIÇÕES DE CAUCHY-RIEMANN) *Se a função complexa $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ é derivável em $z_0 = (x_0, y_0)$, então*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \end{cases}.$$

Da demonstração da proposição acima, obtemos que

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

e

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

DEFINIÇÃO 1.33: *Sejam $A \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa. Dizemos que f é holomorfa em A se $f'(z)$ existe para todo ponto $z \in A$.*

O conceito de função complexa anti-holomorfa é semelhante ao de função holomorfa, mas distinta, pois f , agora, é derivável com respeito a \bar{z} , ou seja:

DEFINIÇÃO 1.34: *Sejam $A \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa de variável \bar{z} . Então, f é anti-holomorfa em A se $f'(\bar{z})$ existe para todo ponto $\bar{z} \in A$.*

1.5 Superfície Regular, Plano Tangente, Métrica Riemanniana e Isometria

DEFINIÇÃO 1.35: *Seja S um subconjunto de \mathbb{R}^3 . Dizemos que S é uma superfície regular se, $\forall p \in S$, existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$, onde $U \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto, tal que:*

1. X é diferenciável;
2. X é um homeomorfismo; e
3. $\forall q \in U$ tem-se $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ injetora.

A aplicação X é chamada de uma parametrização ou um sistema de coordenadas.

1.5. SUPERFÍCIE REGULAR, PLANO TANGENTE, MÉTRICA RIEMANNIANA E37

Seja $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. A condição 3 da definição 1.35 é equivalente as seguintes afirmações:

$$(i) \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{ou} \\ \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{vmatrix} \neq 0.$$

(ii) os vetores $X_u(q) := \frac{\partial X}{\partial u}(q)$ e $X_v(q) := \frac{\partial X}{\partial v}(q)$ são linearmente independentes.

(iii) $X_u(q) \times X_v(q) \neq 0$.

Assim, para verificar a condição 3 da definição 1.35 basta verificar uma destas afirmações.

Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Temos que o gráfico de f é uma superfície regular cuja parametrização é dada por $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$, para $(u, v) \in U$.

PROPOSIÇÃO 1.12: *Sejam S uma superfície regular, $p \in S$ e $X : U \rightarrow V \cap S$ uma aplicação bijetora que satisfaz as condições 1 e 3 da definição 1.35, onde $U \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto, $p \in X(U)$ e V é uma vizinhança de p . Então, X^{-1} é contínua.*

DEFINIÇÃO 1.36: *Sejam S uma superfície regular, $p \in S$ e $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ uma curva parametrizada diferenciável tal que $\alpha(0) = p$. Diz-se que $\alpha'(0)$ é um vetor tangente a S em p .*

O conjunto formado por todos os vetores tangentes a S em p é chamado de *plano tangente* a S em p e é notado por $T_p S$.

TEOREMA 1.9: *Seja S uma superfície regular. Então, $T_p S$ é um subespaço vetorial de dimensão 2 em \mathbb{R}^3 .*

Para mais detalhes sobre o teorema 1.9 ver a referência [26].

PROPOSIÇÃO 1.13: *Seja S uma superfície regular tal que $X : U \rightarrow V \cap S$ é uma parametrização em $X(q) = p$, onde $U \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto, $q \in U$ e V é uma vizinhança de p . Então, $dX_q(\mathbb{R}^2) \equiv T_p S$.*

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular tal que $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ é uma parametrização de S , onde U é um aberto. Vamos induzir o produto interno euclidiano de \mathbb{R}^3 em S , isto é, para cada $p \in S$ tomaremos $(S, \langle \cdot, \cdot \rangle_p |_{T_p S})$, onde o subespaço vetorial $T_p S \subset T_p \mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{R}^3$ (ver figura 1.4).

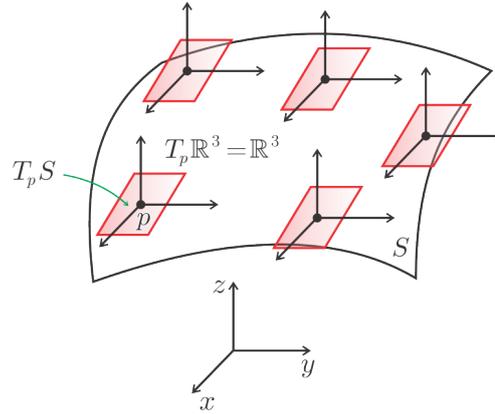


FIGURA 1.4.

Temos que, os vetores $\frac{\partial X}{\partial x_1}(q)$ e $\frac{\partial X}{\partial x_2}(q)$ são linearmente independentes, ou seja, $\mathcal{B} = \left\{ \frac{\partial X}{\partial x_1}(q), \frac{\partial X}{\partial x_2}(q) \right\}$ é uma base de $T_p S$, onde $q = (q_1, q_2) \in U$ e $X(q) = p$.

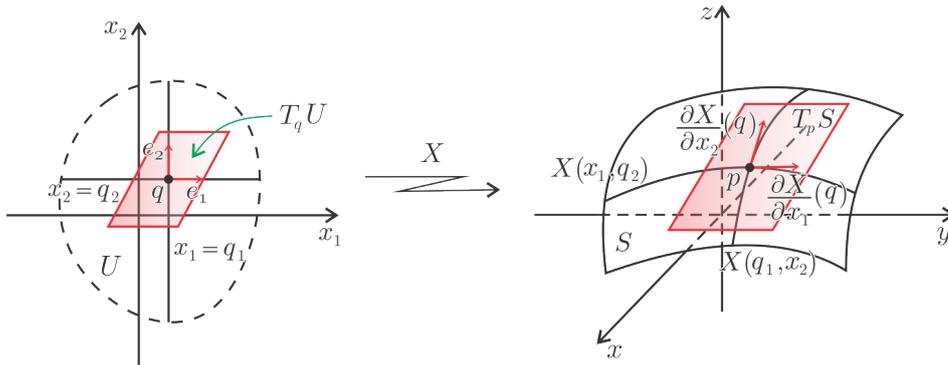


FIGURA 1.5.

Dado $w \in T_p S$, então $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $w = \alpha \frac{\partial X}{\partial x_1}(q) + \beta \frac{\partial X}{\partial x_2}(q)$. Assim,

$$\begin{aligned} \langle w, w \rangle &= \left\langle \alpha \frac{\partial X}{\partial x_1}(q) + \beta \frac{\partial X}{\partial x_2}(q), \alpha \frac{\partial X}{\partial x_1}(q) + \beta \frac{\partial X}{\partial x_2}(q) \right\rangle \\ &= \alpha^2 \left\langle \frac{\partial X}{\partial x_1}(q), \frac{\partial X}{\partial x_1}(q) \right\rangle + 2\alpha\beta \left\langle \frac{\partial X}{\partial x_1}(q), \frac{\partial X}{\partial x_2}(q) \right\rangle + \beta^2 \left\langle \frac{\partial X}{\partial x_2}(q), \frac{\partial X}{\partial x_2}(q) \right\rangle \\ &= \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \right]^t \cdot \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial X}{\partial x_1}(q), \frac{\partial X}{\partial x_1}(q) \right\rangle & \left\langle \frac{\partial X}{\partial x_1}(q), \frac{\partial X}{\partial x_2}(q) \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial X}{\partial x_1}(q), \frac{\partial X}{\partial x_2}(q) \right\rangle & \left\langle \frac{\partial X}{\partial x_2}(q), \frac{\partial X}{\partial x_2}(q) \right\rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Chamamos este produto interno de *primeira forma fundamental da geometria diferencial*. Podemos estender esta noção com a seguinte definição:

1.5. SUPERFÍCIE REGULAR, PLANO TANGENTE, MÉTRICA RIEMANNIANA E39

DEFINIÇÃO 1.37: Uma métrica riemanniana em uma superfície regular S é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in S$ um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (uma forma bilinear simétrica e positiva definida) em $T_p S$ cuja dependência em relação à p é diferenciável, isto é, se $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ é um sistema de coordenadas locais em p , onde $X(q) = p \in X(U)$ e $\frac{\partial X}{\partial x_i}(q) = dX_q \cdot e_i$ para $i = 1, 2$, então $g_{ij}(q) = \left\langle \frac{\partial X}{\partial x_i}(q), \frac{\partial X}{\partial x_j}(q) \right\rangle_p$, para cada $i, j = 1, 2$, é uma função diferenciável em U .

Representaremos a métrica riemanniana em S por $g_p^S(u, v)$, onde $p \in S$ e $u, v \in T_p S$.

EXEMPLO 1.15: Como exemplo de uma métrica riemanniana em uma superfície regular S podemos destacar a 1ª forma fundamental de S :

$$g_p^S = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial X}{\partial x_1}(q), \frac{\partial X}{\partial x_1}(q) \right\rangle & \left\langle \frac{\partial X}{\partial x_1}(q), \frac{\partial X}{\partial x_2}(q) \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial X}{\partial x_1}(q), \frac{\partial X}{\partial x_2}(q) \right\rangle & \left\langle \frac{\partial X}{\partial x_2}(q), \frac{\partial X}{\partial x_2}(q) \right\rangle \end{pmatrix}.$$

Um exemplo fora deste contexto é:

EXEMPLO 1.16: Seja $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ (semiplano superior). Agora, considere $S = \mathbb{R}_+^2$ e $p = (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$. Temos que,

$$g_p^{\mathbb{R}_+^2} = \frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é uma métrica riemanniana² em \mathbb{R}_+^2 .

Note que, a métrica riemanniana em \mathbb{R}_+^2 , do exemplo 1.16, depende do ponto (mais precisamente, da ordenada do ponto).

DEFINIÇÃO 1.38: Sejam S uma superfície regular, $g_p^S : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ uma métrica riemanniana e $\gamma : [t_0, t_1] \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ um segmento de uma curva diferenciável. O comprimento deste segmento é dado por

$$\ell_{t_0}^{t_1}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_p^S(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt.$$

Podemos estender a noção de comprimento para curvas seccionalmente diferenciáveis.

DEFINIÇÃO 1.39: Sejam $\Omega \subset U \subset \mathbb{R}^2$ e $g_q^U : T_q U \times T_q U \rightarrow \mathbb{R}$ uma métrica riemanniana. Então, a área da região Ω é dada por

$$A(\Omega) = \iint_{\Omega} \sqrt{\det(g_q^U)} dx dy.$$

²Estudaremos esta métrica riemanniana com mais detalhes no capítulo 3.

DEFINIÇÃO 1.40: *Sejam M uma superfície regular, $p, q \in M$ e $S(p, q) = \{\alpha : [t_0, t_1] \rightarrow M ; \alpha(t_0) = p \text{ e } \alpha(t_1) = q\}$ o conjunto formado pelos segmentos de curvas contínuas que passam por p e q . Considere $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ uma curva parametrizada diferenciável tal que $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma(t_1) = q$. Dizemos que γ é uma geodésica de M ligando os pontos p e q se*

$$\ell_{t_0}^{t_1}(\gamma) = \min \{ \ell_{t_0}^{t_1}(\alpha) ; \alpha \in S(p, q) \}.$$

Na geometria euclidiana a reta é a curva que fornece o segmento de menor comprimento, ou seja, a reta é a geodésica na geometria euclidiana.

DEFINIÇÃO 1.41: *Sejam S uma superfície regular e g_p^S a métrica definida sobre S . Um difeomorfismo $f : S \rightarrow S$ é chamado uma isometria se*

$$g_{f(p)}^S(df_p \cdot u, df_p \cdot v) = g_p^S(u, v),$$

para todo $p \in S$ e $u, v \in T_p S$.

DEFINIÇÃO 1.42: *Uma geometria é um par (Ω, g) tal que Ω é um espaço e g é uma métrica riemanniana definida sobre Ω .*

Capítulo 2

Geometria Esférica

A geometria esférica é um exemplo de uma geometria que não satisfaz o 5º Postulado de Euclides (geometria não euclidiana), ou seja, dada uma reta e um ponto fora dela não existe uma reta que passa por esse ponto e é paralela a reta dada (nesta geometria as retas são concorrentes ou coincidentes). É esta geometria que vamos estudar neste capítulo. Começaremos definindo a esfera \mathbb{S}^2 e, em seguida, determinaremos a métrica induzida de \mathbb{R}^3 sobre \mathbb{S}^2 em duas parametrizações (em coordenadas cartesianas e em coordenadas esféricas) de \mathbb{S}^2 . Depois, encontraremos as isometrias de \mathbb{S}^2 e finalizaremos o capítulo determinando as geodésicas de \mathbb{S}^2 .

2.1 A Esfera \mathbb{S}^2

Neste capítulo consideraremos o produto interno euclidiano de \mathbb{R}^3 , ou seja, se $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ são vetores do \mathbb{R}^3 , então

$$\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Chamamos de *esfera unitária* o lugar geométrico do \mathbb{R}^3 formado pelo conjunto de pontos cuja distância à origem é igual a 1. E a representaremos por \mathbb{S}^2 . Assim,

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \|(x, y, z)\| = 1\}.$$

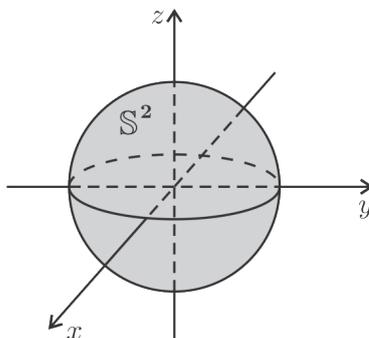


FIGURA 2.1: A esfera \mathbb{S}^2 .

Sejam $p, q \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Sabemos que a curva que realiza o menor comprimento entre os pontos p e q em \mathbb{R}^3 é a reta que passa por esses pontos. Mas, queremos encontrar a curva, que está sobre \mathbb{S}^2 , que realiza o menor comprimento entre os pontos p e q . Para isso, utilizaremos a métrica euclidiana de \mathbb{R}^3 induzida sobre \mathbb{S}^2 . Uma forma de fazer isso é trabalhando com parametrizações de superfície.

2.1.1 Métrica Riemanniana de \mathbb{S}^2 em Coordenadas Cartesianas

Em coordenadas cartesianas, temos que a esfera \mathbb{S}^2 é dada pelo conjunto de pontos, do \mathbb{R}^3 , que satisfaz a equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

As aplicações

$$\begin{aligned} X_1(u, v) &= \left(u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)} \right), \\ X_2(u, v) &= \left(u, v, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)} \right), \\ X_3(u, v) &= \left(\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, u, v \right), \\ X_4(u, v) &= \left(-\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, u, v \right), \\ X_5(u, v) &= \left(u, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v \right) \end{aligned}$$

e

$$X_6(u, v) = \left(u, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v \right),$$

onde $(u, v) \in U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u^2 + v^2 < 1\}$, são parametrizações de \mathbb{S}^2 que cobrem, totalmente, a esfera \mathbb{S}^2 . Vamos verificar que $X_1 : U \rightarrow \mathbb{S}^2$ é uma parametrização de \mathbb{S}^2 . Temos que, X_1 é diferenciável em U (X_1 é contínua em U). Como

$$d(X_1)_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{u_0}{\sqrt{1 - (u_0^2 + v_0^2)}} & -\frac{v_0}{\sqrt{1 - (u_0^2 + v_0^2)}} \end{pmatrix}, \text{ onde } q = (u_0, v_0) \in U,$$

então $d(X_1)_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora em U . Note que, $X_1 : U \rightarrow X_1(U)$ é bijetora. Com efeito, se $X_1(u_1, v_1) = X_1(u_2, v_2)$ tem-se $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$, $\forall (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in U$. A inversa de X_1 é a aplicação $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\pi(x, y, z) = (x, y)$, restrita a $X_1(U)$, ou seja, $(X_1)^{-1} = \pi|_{X_1(U)}$. Perceba que, $(X_1)^{-1}$ é contínua em $X_1(U)$. De maneira análoga, prova-se que X_2, X_3, X_4, X_5 e X_6 , também, são parametrizações de \mathbb{S}^2 . Com isto, \mathbb{S}^2 é uma superfície regular.

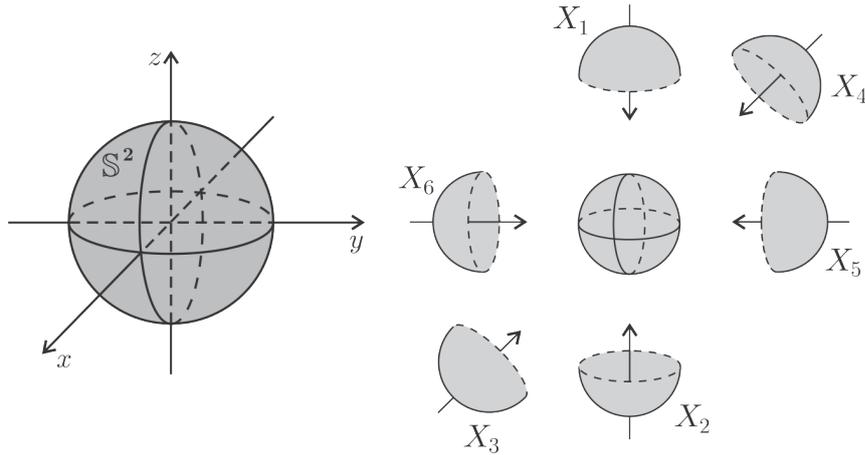


FIGURA 2.2.

Vamos encontrar a métrica riemanniana esférica para os pontos de $X_1(U) \subset \mathbb{S}^2$. Seja $q = (u_0, v_0) \in U$ tal que $X_1(q) = p$. Os vetores

$$(X_1)_u(u_0, v_0) = \left(1, 0, -\frac{u_0}{\sqrt{1 - (u_0^2 + v_0^2)}} \right)$$

e

$$(X_1)_v(u_0, v_0) = \left(0, 1, -\frac{v_0}{\sqrt{1 - (u_0^2 + v_0^2)}} \right)$$

são, vetores em $T_p\mathbb{S}^2$, linearmente independentes. Assim, o conjunto $\mathcal{A} = \{(X_1)_u(q), (X_1)_v(q)\}$ é uma base para o espaço vetorial $T_p\mathbb{S}^2$.

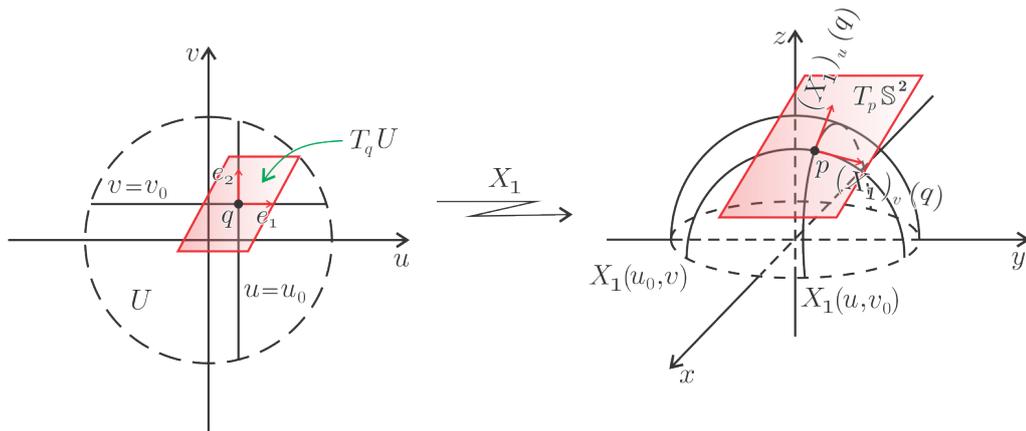


FIGURA 2.3.

Sendo $w_1, w_2 \in T_p\mathbb{S}^2$, então $\exists \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ tais que $w_i = \alpha_i (X_1)_u(q) + \beta_i (X_1)_v(q)$, para $i = 1, 2$. Assim, pela definição 1.37,

$$\begin{aligned} & g_p^{\mathbb{S}^2}(w_1, w_2) \\ &= \left[\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{A}}^t \cdot \begin{pmatrix} \langle (X_1)_u(q), (X_1)_u(q) \rangle & \langle (X_1)_u(q), (X_1)_v(q) \rangle \\ \langle (X_1)_u(q), (X_1)_v(q) \rangle & \langle (X_1)_v(q), (X_1)_v(q) \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \Big|_{\mathcal{A}}. \end{aligned}$$

Como

$$g_{11} = \langle (X_1)_u(q), (X_1)_u(q) \rangle = 1 + \frac{u_0^2}{1 - (u_0^2 + v_0^2)} = \frac{1 - (u_0^2 + v_0^2) + u_0^2}{1 - (u_0^2 + v_0^2)} = \frac{1 - v_0^2}{1 - (u_0^2 + v_0^2)}$$

$$g_{12} = g_{21} = \langle (X_1)_u(q), (X_1)_v(q) \rangle = \frac{u_0 v_0}{1 - (u_0^2 + v_0^2)}$$

e

$$g_{22} = \langle (X_1)_v(q), (X_1)_v(q) \rangle = \frac{1 - u_0^2}{1 - (u_0^2 + v_0^2)}.$$

Logo, a métrica riemanniana esférica induzida pela métrica euclidiana de \mathbb{R}^3 para a carta (U, X_1) é dada por

$$g_p^{\mathbb{S}^2} = \frac{1}{1 - (u_0^2 + v_0^2)} \begin{pmatrix} 1 - v_0^2 & u_0 v_0 \\ u_0 v_0 & 1 - u_0^2 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Perceba que a métrica riemanniana esférica depende do ponto. De maneira análoga, pode-se obter a métrica riemanniana esférica para os pontos de \mathbb{S}^2 no hemisfério sul e no equador, para isto, basta considerar as cartas correspondentes (note que, elas terão a mesma forma de (2.1)).

2.1.2 Métrica Riemanniana de \mathbb{S}^2 em Coordenadas Esféricas

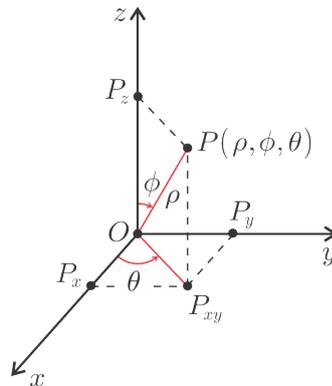


FIGURA 2.4: Sistema de coordenadas esféricas.

O ponto P é dado em coordenadas esféricas pelo terno ordenado (ρ, ϕ, θ) , onde $\rho = \|\overrightarrow{OP}\|$, ϕ (*colatitude* - complemento da latitude) é o ângulo formado pelos os vetores $\overrightarrow{OP_z}$ e \overrightarrow{OP} e θ (*longitude*) é o ângulo polar associado à projeção P_{xy} (ver figura acima). Note que, $\rho \geq 0$, $0 \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

A esfera \mathbb{S}^2 , em coordenadas esféricas, é dada por

$$\rho = 1. \quad (2.2)$$

O nosso objetivo, aqui, é trabalhar com a esfera \mathbb{S}^2 em coordenadas cartesianas, mas com os parâmetros das coordenadas esféricas – isto é, uma nova parametrização para \mathbb{S}^2 . Para isto, vamos, primeiro, encontrar a relação entre os dois sistemas de coordenadas.

Temos que,

$$x = \left\| \overrightarrow{OP_{xy}} \right\| \cos \theta, \quad y = \left\| \overrightarrow{OP_{xy}} \right\| \sin \theta \quad \text{e} \quad z = \rho \cos \phi.$$

Mas,

$$\left\| \overrightarrow{OP_{xy}} \right\| = \left\| \overrightarrow{P_z P} \right\| = \rho \sin \phi.$$

Logo, as coordenadas cartesianas e esféricas estão relacionadas através das relações

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \\ \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases}. \quad (2.3)$$

Passando (2.2) para o sistema de coordenadas cartesianas através das relações de (2.3) obtemos

$$\begin{cases} x = \sin \phi \cos \theta \\ y = \sin \phi \sin \theta \\ z = \cos \phi \end{cases} \quad \text{com } 0 \leq \phi \leq \pi \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Assim, podemos definir a seguinte aplicação para \mathbb{S}^2

$$X(\phi, \theta) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi).$$

Mas, a fim de que tenhamos uma parametrização devemos restringir o domínio de X ao conjunto $V = \{(\phi, \theta); 0 < \phi < \pi \text{ e } 0 < \theta < 2\pi\}$. Com efeito, X é uma aplicação diferenciável em V (contínua). Temos que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(\phi, \theta)} &= \det \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta & -\sin \phi \sin \theta \\ \cos \phi \sin \theta & \sin \phi \cos \theta \end{pmatrix} = \sin \phi \cos \phi \cos^2 \theta + \sin \phi \cos \phi \sin^2 \theta \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\phi, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(x, z)}{\partial(\phi, \theta)} = \det \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta & -\sin \phi \sin \theta \\ -\sin \phi & 0 \end{pmatrix} = -\sin^2 \phi \sin \theta$$

e

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(\phi, \theta)} = \det \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta & \sin \phi \cos \theta \\ -\sin \phi & 0 \end{pmatrix} = \sin^2 \phi \cos \theta.$$

Se $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\phi, \theta)} = 0$, então $\phi = \frac{\pi}{2}$. Agora, supondo que $\frac{\partial(x, z)}{\partial(\phi, \theta)} = 0$ devemos ter $\theta = \pi$.

Dessa forma, $\frac{\partial(y, z)}{\partial(\phi, \theta)} = -1 \neq 0$, em $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Como os três determinantes jacobianos não

são, simultaneamente, iguais a zero em V , então concluímos que dX_q é injetora, $\forall q \in V$. Note que, $X|_V$ é bijetora. Como já sabemos que \mathbb{S}^2 é uma superfície regular, então, pela proposição 1.12, X^{-1} é contínua. Com isso, fica verificado que $X|_V$ é uma parametrização de \mathbb{S}^2 .

Perceba que, $X|_V$ não cobre totalmente \mathbb{S}^2 , ou seja, fica sem cobertura os pontos de $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2; 0 \leq x \leq 1 \text{ e } y = 0\}$. Para cobrir C basta tomar a parametrização $Y(\phi, \theta) = (\sin \phi \cos \theta, \cos \phi, \sin \phi \sin \theta)$, onde $0 < \phi < \pi$ e $-\pi < \theta < \pi$ (ver figura abaixo).

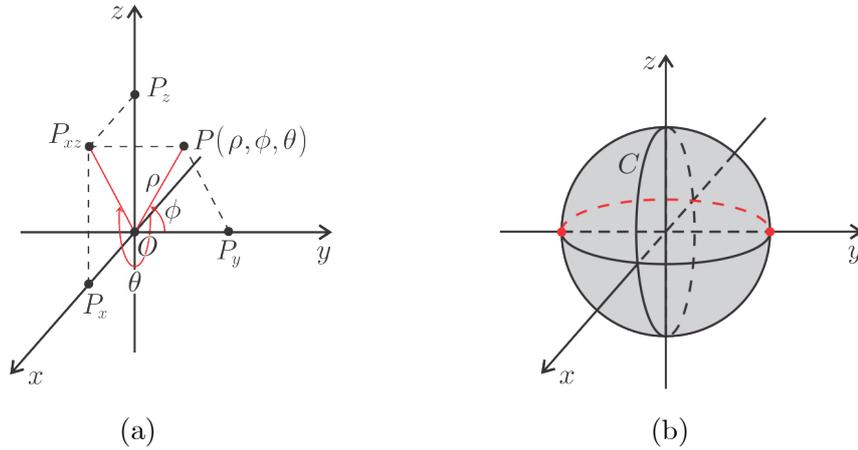


FIGURA 2.5.

Agora, vamos encontrar a expressão da métrica induzida (riemanniana) $g_p^{\mathbb{S}^2}$ em coordenadas esféricas. Seja $p \in \mathbb{S}^2 \setminus C$ tal que $X(q) = p$, onde $q = (\phi_0, \theta_0) \in V$.

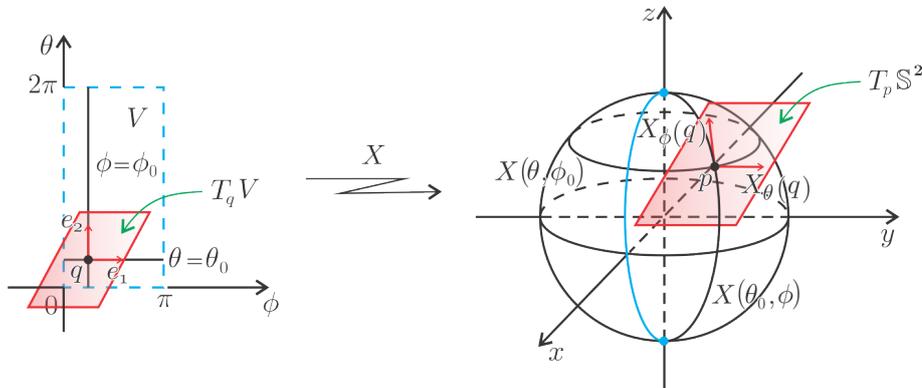


FIGURA 2.6.

Sendo

$$X_\phi(q) = (\cos \phi_0 \cos \theta_0, \cos \phi_0 \sin \theta_0, -\sin \phi_0)$$

e

$$X_\theta(q) = (-\sin \phi_0 \sin \theta_0, \sin \phi_0 \cos \theta_0, 0),$$

então $\mathcal{A} = \{X_\phi(q), X_\theta(q)\}$ é uma base de $T_p \mathbb{S}^2$. Sejam $w_1, w_2 \in T_p \mathbb{S}^2$ tal que

$$w_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} \text{ e } w_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{A}}.$$

Como

$$g_{11} = \langle X_\phi(q), X_\phi(q) \rangle = \cos^2 \phi_0 \cos^2 \theta_0 + \cos^2 \phi_0 \sin^2 \theta_0 + \sin^2 \phi_0 = 1,$$

$$g_{12} = g_{21} = \langle X_\phi(q), X_\theta(q) \rangle = -\frac{1}{4} \sin 2\phi_0 \sin 2\theta_0 + \frac{1}{4} \sin 2\phi_0 \sin 2\theta_0 = 0$$

e

$$g_{22} = \langle X_\theta(q), X_\theta(q) \rangle = \sin^2 \phi_0 \sin^2 \theta_0 + \sin^2 \phi_0 \cos^2 \theta_0 = \sin^2 \phi_0,$$

temos que, a métrica riemanniana esférica de \mathbb{S}^2 , para a carta (V, X) , em coordenadas esféricas é dada por

$$\begin{aligned} g_p^{\mathbb{S}^2}(w_1, w_2) &= \left[\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{A}}^t \cdot \begin{pmatrix} \langle X_\phi(q), X_\phi(q) \rangle & \langle X_\phi(q), X_\theta(q) \rangle \\ \langle X_\phi(q), X_\theta(q) \rangle & \langle X_\theta(q), X_\theta(q) \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} \\ &= \left[\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{A}}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \phi_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} \\ &= \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 \sin^2 \phi_0. \end{aligned}$$

A aplicação linear $dX_q : T_q V \rightarrow T_p \mathbb{S}^2$ é um isomorfismo. Dessa forma, podemos definir a métrica riemanniana esférica em V , ou seja,

$$g_q^V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \phi_0 \end{pmatrix}.$$

Agora, vamos encontrar a expressão que fornece o comprimento de um segmento de uma curva parametrizada diferenciável sobre \mathbb{S}^2 e, em seguida, a expressão da área de uma região de \mathbb{S}^2 .

Seja uma curva $\gamma : [t_0, t_1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2$ dada por $\gamma(t) = X(\phi(t), \theta(t))$. Agora, considere a curva $\beta(t) = (\phi(t), \theta(t))$, com $t \in [t_0, t_1]$. O comprimento esférico de γ é

$$\begin{aligned} \ell_{t_0}^{t_1}(\gamma) &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{\gamma(t)}^{\mathbb{S}^2}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{\beta(t)}^V(\beta'(t), \beta'(t))} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\theta'(t)]^2 \sin^2 \phi(t)} dt. \end{aligned}$$

Vamos determinar o comprimento de uma circunferência máxima de \mathbb{S}^2 . Considere³ $\beta(t) = \left(\frac{\pi}{2}, t\right)$, onde $t \in (0, 2\pi)$ ($\gamma(t) = X\left(\frac{\pi}{2}, t\right)$ é a circunferência máxima). Temos que, $\phi'(t) = 0$ e $\theta'(t) = 1$. Daí vem que,

$$\begin{aligned} \ell_0^{2\pi}(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{0^2 + 1^2 \sin^2 \frac{\pi}{2}} dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

³Veremos na próxima seção que a aplicação linear rotação de \mathbb{R}^3 é uma isometria de \mathbb{S}^2 .

Note que, a métrica esférica sobre a linha do equador, em $\left(\frac{\pi}{2}, \theta\right)$, coincide com a métrica euclidiana de \mathbb{R}^2 .

Sejam $\Omega_{\mathbb{S}^2} \subset \mathbb{S}^2$ e $\Omega_V \subset V$ tais que $X(\Omega_V) = \Omega_{\mathbb{S}^2}$. A área esférica da região $\Omega_{\mathbb{S}^2}$ é

$$\begin{aligned} A(\Omega_{\mathbb{S}^2}) &= A(\Omega_V) \\ &= \iint_{\Omega_V} \sqrt{\det(g_q^V)} d\theta d\phi \\ &= \iint_{\Omega_V} \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \phi \end{vmatrix}} d\theta d\phi \\ &= \iint_{\Omega_V} \sin \phi d\theta d\phi. \end{aligned}$$

Calculando a área de \mathbb{S}^2 obtemos

$$\begin{aligned} A(\mathbb{S}^2) &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \phi d\theta d\phi \\ &= 2\pi \int_0^\pi \sin \phi d\phi \\ &= 2\pi [-\cos \phi]_0^\pi \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

2.2 Isometrias de \mathbb{S}^2

Representaremos por $\text{Isom}(\mathbb{S}^2)$ o conjunto formado por todas as isometrias de \mathbb{S}^2 e por O_3 o conjunto $\{T ; T \text{ é um operador linear ortogonal de } \mathbb{R}^3\}$.

PROPOSIÇÃO 2.1: (O_3, \circ) é um grupo.

PROVA. Vamos verificar a definição 1.1.

(i) Sejam $T_1, T_2 \in O_3$ tais que $T_1(u) = [T_1]_\beta \cdot u$ e $T_2(u) = [T_2]_\beta \cdot u$, onde β é uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 . Temos que, $T_1(T_2(u)) = [T_1]_\beta \cdot T_2(u) = [T_1]_\beta \cdot ([T_2]_\beta \cdot u) = ([T_1]_\beta \cdot [T_2]_\beta) \cdot u$. Como $([T_1]_\beta \cdot [T_2]_\beta)^t \cdot [T_1]_\beta \cdot [T_2]_\beta = ([T_2]_\beta)^t \left[([T_1]_\beta)^t \cdot [T_1]_\beta \right] \cdot [T_2]_\beta = ([T_2]_\beta)^t \cdot I \cdot [T_2]_\beta = I$, então $T_1 \circ T_2 \in O_3$.

(ii) Sejam $T_1, T_2, T_3 \in O_3$ tais que $T_1(u) = [T_1]_\beta \cdot u$, $T_2(u) = [T_2]_\beta \cdot u$ e $T_3(u) = [T_3]_\beta \cdot u$, onde β é uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 . Então,

$$\begin{aligned} T_1((T_2 \circ T_3)(u)) &= T_1\left(\left([T_2]_\beta \cdot [T_3]_\beta\right) \cdot u\right) \\ &= [T_1]_\beta \cdot \left([T_2]_\beta \cdot [T_3]_\beta\right) \cdot u \\ &= \left([T_1]_\beta \cdot [T_2]_\beta\right) \cdot [T_3]_\beta \cdot u \\ &= (T_1 \circ T_2)(T_3(u)). \end{aligned}$$

(iii) Como $T_0(u) = u \in O_3$ e $T_0(T(u)) = T(u) = T(T_0(u))$, então T_0 é o elemento identidade de (O_3, \circ) .

(iv) Seja $T \in O_3$. Temos que, $T^{-1} = T^t$. □

TEOREMA 2.1: $\text{Isom}(\mathbb{S}^2) = O_3$.

PROVA. Primeiramente, mostraremos que $O_3 \subset \text{Isom}(\mathbb{S}^2)$. Seja $T \in O_3$. Temos que T preserva produto interno, ou seja,

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle, \forall u, v \in \mathbb{R}^3.$$

Assim, $T|_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ está bem definida. Com efeito, se $p \in \mathbb{S}^2$, então $\|T(p)\| = \sqrt{\langle T(p), T(p) \rangle} = \sqrt{\langle p, p \rangle} = \|p\| = 1$, isto é, $T(p) \in \mathbb{S}^2$. Como T é uma transformação linear, então T é diferenciável e $T(u) = dT_p \cdot u$. E, ainda, como T é um operador ortogonal, então T é um isomorfismo, $T^{-1}(u) = (dT_p)^t \cdot u$. A aplicação T^{-1} é uma transformação linear e, conseqüentemente, é diferenciável. Donde vem que, T é um difeomorfismo de \mathbb{S}^2 sobre \mathbb{S}^2 . Sejam $u, v \in T_p\mathbb{S}^2$. Então,

$$\begin{aligned} g_{T(p)}^{\mathbb{S}^2}(dT_p \cdot u, dT_p \cdot v) &= g_{T(p)}^{\mathbb{S}^2}(T(u), T(v)) \\ &= \langle T(u), T(v) \rangle \\ &= \langle u, v \rangle \\ &= g_p^{\mathbb{S}^2}(u, v). \end{aligned}$$

Logo, T é uma isometria de \mathbb{S}^2 , ou seja, $O_3 \subset \text{Isom}(\mathbb{S}^2)$. Reciprocamente, considere uma base ortonormal $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbb{R}^3 e uma aplicação $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{S}^2)$. Como $\varphi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ é diferenciável e a aplicação linear $d\varphi$ preserva a métrica esférica e, conseqüentemente, o produto interno, então φ , também, preserva o produto interno (a prova deste fato pode ser encontrada em [32]). Agora, defina a aplicação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(u) = \begin{cases} \|u\| \varphi\left(\frac{u}{\|u\|}\right) & , u \neq 0 \\ 0 & , u = 0 \end{cases}.$$

A aplicação T é linear. De fato, sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$. Observe que, $\gamma = \{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 . Então, se $u \neq 0$,

$$\begin{aligned} a_1 T(e_1) + a_2 T(e_2) + a_3 T(e_3) &= T(u) \\ \Rightarrow a_1 \langle T(e_1), T(e_1) \rangle + a_2 \langle T(e_2), T(e_1) \rangle + a_3 \langle T(e_3), T(e_1) \rangle &= \langle T(u), T(e_1) \rangle \\ \Rightarrow a_1 \langle \varphi(e_1), \varphi(e_1) \rangle + a_2 \langle \varphi(e_2), \varphi(e_1) \rangle + a_3 \langle \varphi(e_3), \varphi(e_1) \rangle &= \left\langle \|u\| \varphi\left(\frac{u}{\|u\|}\right), \varphi(e_1) \right\rangle \\ \Rightarrow a_1 \langle e_1, e_1 \rangle + a_2 \langle e_2, e_1 \rangle + a_3 \langle e_3, e_1 \rangle &= \|u\| \left\langle \frac{u}{\|u\|}, e_1 \right\rangle \\ \Rightarrow a_1 &= \langle u, e_1 \rangle. \end{aligned}$$

De forma geral, $a_i = \langle u, e_i \rangle$, para $i = 1, 2, 3$ (verifica-se que esta relação é válida, também, para $u = 0$). Assim,

$$T(u) = \sum_{i=1}^3 \langle u, e_i \rangle T(e_i), \forall u \in \mathbb{R}^3.$$

Daí vem que,

$$\begin{aligned} T(ku + v) &= \sum_{i=1}^3 \langle ku + v, e_i \rangle T(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^3 [k \langle u, e_i \rangle + \langle v, e_i \rangle] T(e_i) \\ &= k \sum_{i=1}^3 \langle u, e_i \rangle T(e_i) + \sum_{i=1}^3 \langle v, e_i \rangle T(e_i) \\ &= kT(u) + T(v). \end{aligned}$$

Segue que T é um operador linear. Temos que, se $u \neq 0$,

$$\begin{aligned} \|T(u)\| &= \sqrt{\langle T(u), T(u) \rangle} \\ &= \sqrt{\left\langle \|u\| \varphi\left(\frac{u}{\|u\|}\right), \|u\| \varphi\left(\frac{u}{\|u\|}\right) \right\rangle} \\ &= \|u\| \sqrt{\left\langle \varphi\left(\frac{u}{\|u\|}\right), \varphi\left(\frac{u}{\|u\|}\right) \right\rangle} \\ &= \|u\| \sqrt{\left\langle \frac{u}{\|u\|}, \frac{u}{\|u\|} \right\rangle} \\ &= \|u\| \left\| \frac{u}{\|u\|} \right\| \\ &= \|u\|. \quad (\text{vale, também, para } u = 0) \end{aligned}$$

Com isso, T preserva a norma. Dessa forma, T é um operador ortogonal. Note que, $T(u) = \varphi(u)$, $\forall u \in \mathbb{S}^2$. Assim, $\varphi = T|_{\mathbb{S}^2} \in O_3$, isto é, $\text{Isom}(\mathbb{S}^2) \subset O_3$. Portanto, $\text{Isom}(\mathbb{S}^2) = O_3$. □

Sendo β uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 e T uma isometria de \mathbb{S}^2 , então $\det[T]_\beta = \pm 1$, ou seja, as isometrias de \mathbb{S}^2 são de dois tipos: as que preservam orientação ($\det[T]_\beta = 1$) e as que invertem orientação ($\det[T]_\beta = -1$). O conjunto formado pelas isometrias que preservam orientação munido com a operação de composição de funções forma um subgrupo de $(\text{Isom}(\mathbb{S}^2), \circ)$.

DEFINIÇÃO 2.1: *Seja $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal de um plano π em \mathbb{R}^3 . Considere $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ como a base ortonormal de \mathbb{R}^3 , onde $e_3 = e_1 \times e_2$. Chamamos de:*

- (i) *rotação de um ângulo θ sobre π a transformação linear $R_\theta^\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que rota um ângulo θ , no sentido anti-horário, em relação ao vetor e_3 . Temos que,*

$$[R_\theta^\pi]_\beta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) reflexão sobre π a transformação linear $r_\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação a base β é dada por

$$[r_\pi]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A rotação (preserva orientação, pois $\det [R_\theta^\pi]_\beta = 1$) e a reflexão (inverte orientação, pois $\det [r_\pi]_\beta = -1$) são exemplos de isometrias de \mathbb{S}^2 .

PROPOSIÇÃO 2.2: *Seja $T \in \text{Isom}(\mathbb{S}^2)$. Então,*

(i) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ fixa uma direção em \mathbb{R}^3 .

(ii) existe uma base ortonormal β e um ângulo $\theta \in \mathbb{R}$ tais que

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } [T]_\beta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

PROVA.

(i) Basta mostrar que T possui pelo menos um autovalor λ . O polinômio característico de T é dado por

$$p_T(\lambda) = \det([T]_{can} - \lambda I) = -\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$$

e como todo polinômio real de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real, então T fixa uma direção em \mathbb{R}^3 . E mais, como T é um operador ortogonal, então

$$\langle T(u), T(u) \rangle = \langle \lambda u, \lambda u \rangle \Rightarrow \lambda^2 \langle u, u \rangle = \langle u, u \rangle \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1,$$

onde $u \neq 0$ é um autovetor associado ao autovalor λ . Dessa forma, $T(u) = \pm u$.

(ii) Temos dois casos a considerar.

1º caso: $\lambda = -1$:

Sejam e_3 o autovetor unitário associado ao autovalor -1 e $W \subset \mathbb{R}^3$ o plano, ortogonal a e_3 , que passa pela origem (subespaço vetorial de \mathbb{R}^3). Como $T \in \text{Isom}(\mathbb{S}^2)$, então, para $w \in W$,

$$\begin{aligned} \langle T(w), e_3 \rangle &= -\langle T(w), -e_3 \rangle \\ &= -\langle T(w), T(e_3) \rangle \\ &= -\langle w, e_3 \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

e, conseqüentemente, $T(w) \in W$, $\forall w \in W$, isto é, W é um subespaço T -invariante de \mathbb{R}^3 . Considere $\alpha = \{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal de W e $T|_W : W \rightarrow W$. Assim, $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 . Temos que,

$$\begin{aligned} W \ni T(e_1) &= a_{11} \cdot e_1 + a_{21} \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 \\ W \ni T(e_2) &= a_{12} \cdot e_1 + a_{22} \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 \\ T(e_3) &= 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + (-1) \cdot e_3 \end{aligned}$$

assim,

$$[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} [T|_W]_{\alpha} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $T|_W$ é uma transformação linear e preserva produto interno em W , então $T|_W$ é um operador ortogonal. E, ainda, como $W \simeq \mathbb{R}^2$ (pois, $\dim W = 2$) e para toda matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ ortogonal existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \text{ (ver [17])},$$

temos que

$$[T|_W]_{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

ou

$$[T|_W]_{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Se ocorrer (2.4), segue o resultado. Caso ocorra (2.5), basta observar que os autovalores de $[T|_W]_{\alpha}$ são -1 e 1 , distintos, o que implica que existe uma base α' de autovetores tal que

$$[T|_W]_{\alpha'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que, $T|_W$ é autoadjunto. Então, existe uma base, $\alpha'' = \{e_1'', e_2''\}$, ortonormal de autovetores de $T|_W$ tal que $[T|_W]_{\alpha''} = [T|_W]_{\alpha'}$. Assim, tomando a base ortonormal $\beta' = \{e_1'', e_3, e_2''\}$ de \mathbb{R}^3 ,

$$[T]_{\beta'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \pi & -\sin \pi & 0 \\ \sin \pi & \cos \pi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2º caso: $\lambda = 1$:

É análogo ao caso anterior, mas pode ser encontrada em [17].

□

COROLÁRIO 2.1: *Toda isometria de \mathbb{S}^2 é uma rotação ou uma composição de uma rotação com uma reflexão sobre planos que passam pela origem de \mathbb{R}^3 .*

2.3 Geodésicas de \mathbb{S}^2

Denotaremos por M_0 o *meridiano* descrito pela semicircunferência $\{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2; y = 0 \text{ e } x \leq 0\}$.

Vamos mostrar que dados dois pontos (não antipodas) em M_0 o menor comprimento, dentre todas as curvas sobre \mathbb{S}^2 que ligam esses pontos, é dado pelo comprimento do arco de circunferência, de extremos nesses pontos, que está sobre o meridiano M_0 .

Seja $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow M_0$ uma curva parametrizada diferenciável dada por $\gamma(t) = (-\sin \phi(t), 0, \cos \phi(t))$, onde $0 < \phi(t) < \pi$, $\forall t \in [t_0, t_1]$. Então, o comprimento esférico desta curva é

$$\begin{aligned} \ell_{t_0}^{t_1}(\gamma) &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[\phi'(t)]^2 + 0^2 \sin^2 \phi(t)} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} |\phi'(t)| dt. \end{aligned}$$

LEMA 2.1: *Sejam p e $q \in M_0$ tais que p e q não são pontos antipodas. A geodésica ligando p a q descreve um segmento de M_0 .*

PROVA. Considere $\alpha : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{S}^2$ uma curva parametrizada diferenciável dada por $\alpha(t) = (\sin \phi(t) \cos \theta(t), \sin \phi(t) \sin \theta(t), \cos \phi(t))$ tal que $\alpha(t_0) = p$ e $\alpha(t_1) = q$, onde p e q não são pólos. Então,

$$\ell_{t_0}^{t_1}(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\theta'(t)]^2 \sin^2 \phi(t)} dt \geq \int_{t_0}^{t_1} |\phi'(t)| dt = \ell_{t_0}^{t_1}(\gamma), \text{ onde } \gamma \subset M_0.$$

Portanto, segue o resultado. □

TEOREMA 2.2: *Sejam p e $q \in \mathbb{S}^2$ tais que p e q não são pontos antipodas. Então, existe uma única geodésica (circunferência máxima) de \mathbb{S}^2 que passa por p e q .*

PROVA. Temos que, existe uma isometria $T : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ tal que $T(p)$ e $T(q)$ pertencem ao meridiano M_0 . Assim, pelo lema 2.1, a geodésica que liga $T(p)$ a $T(q)$ descreve um segmento de M_0 . Dessa forma, a geodésica que passa por $T(p)$ e $T(q)$ é uma circunferência máxima, que denotaremos por C_0 . Pelo corolário 2.1, $T^{-1}(C_0)$ é uma circunferência máxima. Logo, a geodésica de \mathbb{S}^2 que passa por p e q é uma circunferência máxima. □

Note que, se p e $q \in \mathbb{S}^2$ são pontos antipodas, então existem infinitas circunferências máximas que passam por p e q . E estas circunferências máximas são geodésicas de \mathbb{S}^2 que passam por p e q . Com isso, o primeiro postulando de Euclides não se verifica nesta geometria, ou seja, a geometria esférica não é uma geometria de incidência. Pode-se

contornar este problema fazendo uma alteração na geometria esférica (que não será feita aqui), isto é, considera-se como ponto o par de pontos antípodas em \mathbb{S}^2 (esta geometria chama-se de *geometria elíptica* e esta modificação foi proposta por Felix Klein em 1871 – ver detalhes em [14]).

Pelo que foi exposto acima, temos que na geometria esférica não existem retas esféricas (circunferências máximas) paralelas. Assim, fica claro que o quinto postulado de Euclides não vale na geometria esférica.

Perceba que, dados dois pontos distintos de \mathbb{S}^2 temos que a geodésica de \mathbb{S}^2 que passa por esses pontos é obtida através da interseção de um plano que passa pela origem e por esses pontos com a esfera \mathbb{S}^2 . A geodésica de \mathbb{S}^2 , também, é chamada de *equador*.

Capítulo 3

Geometria Hiperbólica

Ao considerarmos as noções comuns, os quatro primeiros postulados de Euclides e a afirmação de que “*por um ponto fora de uma reta dada passam pelo menos duas retas paralelas a reta dada*” temos a Geometria Hiperbólica (que é tão consistente quanto a Geometria Euclidiana). Esta geometria será estudada, neste capítulo, através de três modelos – com destaque para o modelo do semiplano de Poincaré. Primeiro obteremos a métrica hiperbólica nestes três modelos e, em seguida, determinaremos as geodésicas e as isometrias hiperbólicas no modelo do semiplano de Poincaré.

3.1 Modelos para a Geometria Hiperbólica

Iremos apresentar três modelos para a geometria hiperbólica: o modelo de Minkowski, o modelo do disco de Poincaré e o modelo do semiplano, também, de Poincaré.

3.1.1 $\mathbb{H}_{\mathcal{M}}^2$: Modelo de Minkowski

Sejam p um ponto do \mathbb{R}^3 e $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ vetores do \mathbb{R}^3 . Definimos o *pseudoproduto interno* como

$$\widetilde{\langle u, v \rangle}_p = -u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3.$$

Pode-se verificar que o pseudoproduto interno satisfaz as três relações a seguir.

- (i) $\widetilde{\langle u + v, w \rangle}_p = \widetilde{\langle u, w \rangle}_p + \widetilde{\langle v, w \rangle}_p, \forall u, v, w \in \mathbb{R}^3.$
- (ii) $\widetilde{\langle \lambda u, v \rangle}_p = \lambda \widetilde{\langle u, v \rangle}_p, \forall u, v \in \mathbb{R}^3 \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}.$
- (iii) $\widetilde{\langle u, v \rangle}_p = \widetilde{\langle v, u \rangle}_p, \forall u, v \in \mathbb{R}^3.$

Observe que o pseudoproduto interno não é um produto interno, pois $\widetilde{\langle \cdot, \cdot \rangle}_p$ não é positivo definido (se $u = (1, 0, 0)$ tem-se $\widetilde{\langle u, u \rangle}_p = -1$).

DEFINIÇÃO 3.1: O conjunto de pontos do \mathbb{R}^3 acima do plano- xy cuja pseudonorma é igual a 1 é chamado de pseudoesfera. Representaremos a pseudoesfera por \mathbb{H}_+^2 .

Podemos escrever a definição 3.1 como

$$\mathbb{H}_+^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \|\widetilde{(x, y, z)}\|_p = 1, \text{ onde } z > 0 \right\},$$

ou ainda, como

$$\mathbb{H}_+^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - z^2 = -1, \text{ onde } z > 0\}.$$

Note que, a pseudoesfera corresponde a folha superior de um hiperbolóide de duas folhas com o eixo ao longo do eixo- z .

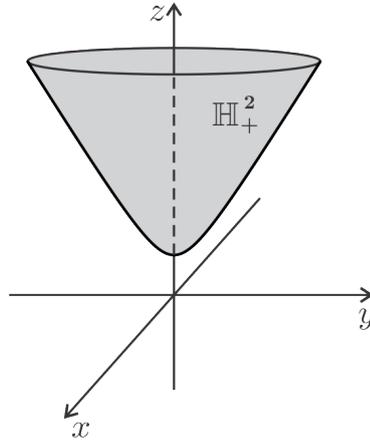


FIGURA 3.1: Pseudoesfera.

Veremos na subseção 3.1.2 que o pseudoproduto interno sobre $T_p\mathbb{H}_+^2$ é negativo definido para todo $p \in \mathbb{H}_+^2$. Dessa forma, temos a seguinte definição:

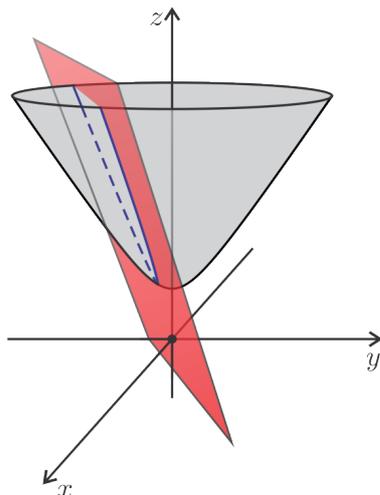
DEFINIÇÃO 3.2: Seja a função $\langle \cdot, \cdot \rangle_p^{\mathcal{M}} : T_p\mathbb{H}_+^2 \times T_p\mathbb{H}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Então, $\langle u, v \rangle_p^{\mathcal{M}} = -\langle \widetilde{u}, v \rangle_p$, onde $u, v \in T_p\mathbb{H}_+^2$.

Note que, $\langle \cdot, \cdot \rangle_p^{\mathcal{M}}$ é um produto interno sobre $T_p\mathbb{H}_+^2$, $\forall p \in \mathbb{H}_+^2$. Chamaremos este produto interno de *produto interno de Minkowski*.

Para cada ponto $p \in \mathbb{H}_+^2$ associaremos $\langle \cdot, \cdot \rangle_p^{\mathcal{M}}$ em $T_p\mathbb{H}_+^2$. Com isso, temos um outro exemplo de métrica riemanniana que chamamos de *métrica hiperbólica sobre \mathbb{H}_+^2* e representamos por $g_p^{\mathbb{H}_+^2}$.

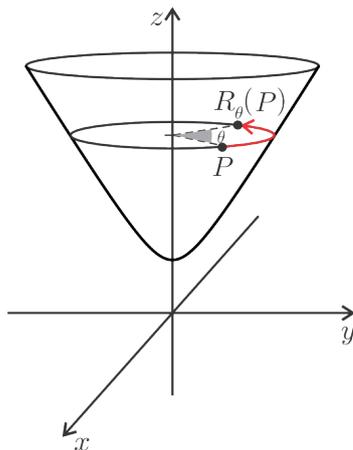
DEFINIÇÃO 3.3: $\mathbb{H}_{\mathcal{M}}^2 = (\mathbb{H}_+^2, g_p^{\mathbb{H}_+^2})$ é o modelo de Minkowski para a geometria hiperbólica.

Assim como na geometria esférica, as geodésicas da geometria hiperbólica, no modelo de Minkowski, são obtidas através da interseção de \mathbb{H}_+^2 com os planos que passam pela origem (ver [33]).

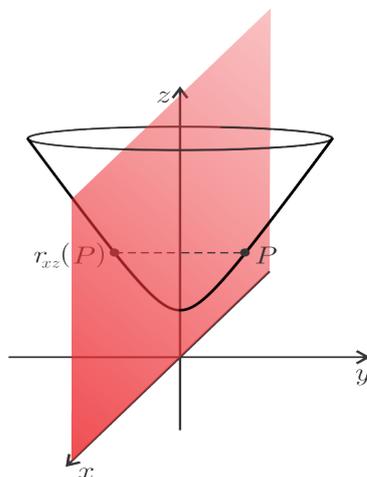
FIGURA 3.2: Geodésica de $\mathbb{H}_{\mathcal{M}}^2$.

Como exemplos de isometrias de $\mathbb{H}_{\mathcal{M}}^2$ podemos citar as transformações:

- i. $R_{\theta}(x, y, z) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z)$ chamada de rotação em torno do eixo- z .

FIGURA 3.3: Rotação em torno do eixo- z .

- ii. $r_{xz}(x, y, z) = (x, -y, z)$ chamada de reflexão em relação ao plano- xz .

FIGURA 3.4: Reflexão em relação ao plano- xz .

3.1.2 \mathbb{H}_D^2 : Modelo do Disco de Poincaré

Vamos parametrizar a pseudoesfera. Para isso, utilizaremos a projeção estereográfica de \mathbb{H}_+^2 sobre o plano- xy , isto é, o ponto $P \in \mathbb{H}_+^2$ é projetado no plano- xy , em P' , através da reta \overleftrightarrow{AP} , onde $A = (0, 0, -1)$.

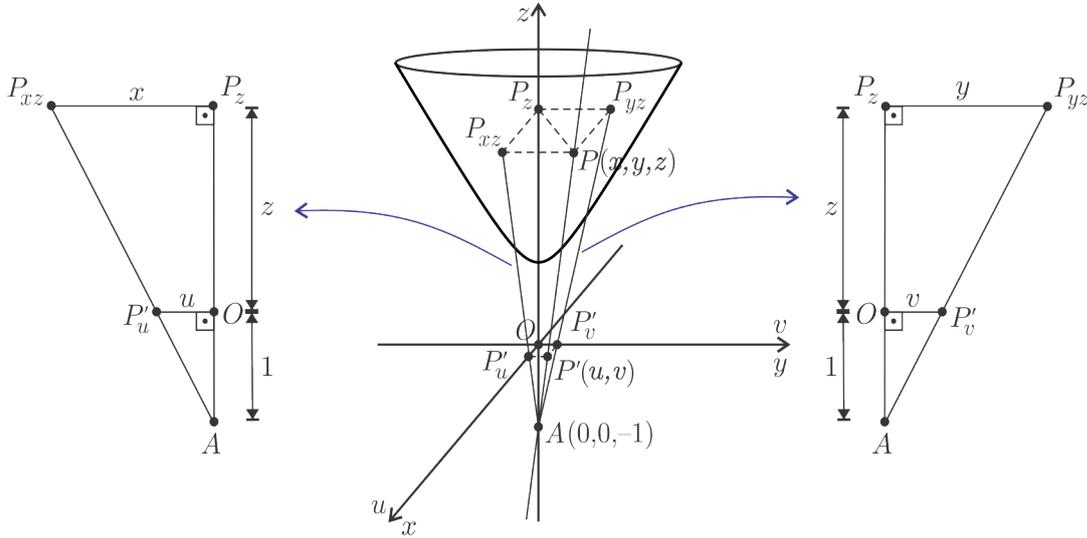


FIGURA 3.5: Projeção estereográfica de \mathbb{H}_+^2 .

Considere um ponto $P(x, y, z) \in \mathbb{H}_+^2$ tal que $x, y \neq 0$, conseqüentemente, $u, v \neq 0$ (ver figura 3.5). Como $\triangle AP_z P_{xz} \sim \triangle AOP'_u$ e $\triangle AP_z P_{yz} \sim \triangle AOP'_v$ (\sim significa semelhante), então

$$\begin{cases} \frac{x}{u} = z + 1 \\ \frac{y}{v} = z + 1 \end{cases}.$$

Donde vem que,

$$x = \frac{y}{v} \cdot u \text{ e } z = \frac{y}{v} - 1.$$

Assim, substituindo as expressões correspondentes a x e z na equação cartesiana de \mathbb{H}_+^2 , obtemos a equação

$$[(-1 + u^2 + v^2)y + 2v] \cdot \frac{y}{v^2} = 0.$$

Como $\frac{y}{v} \neq 0$, então

$$(1 - u^2 - v^2)y = 2v.$$

Observe que, $u^2 + v^2 \neq 1$. Destarte,

$$y = \frac{2v}{1 - u^2 - v^2}, \quad (3.1)$$

conseqüentemente,

$$x = \frac{2u}{1 - u^2 - v^2} \text{ e } z = \frac{1 + u^2 + v^2}{1 - u^2 - v^2}. \quad (3.2)$$

Agora, vamos analisar o caso que desconSIDERAMOS no início deste processo, ou seja, se P é $(0, 0, 1)$. As relações (3.1) e (3.2) são válidas para $P = (0, 0, 1)$, pois se $x = y = 0$, então, pela projeção estereográfica, $u = v = 0$ e se utilizarmos as relações (3.1) e (3.2) para estes valores de u e v obtemos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 1$.

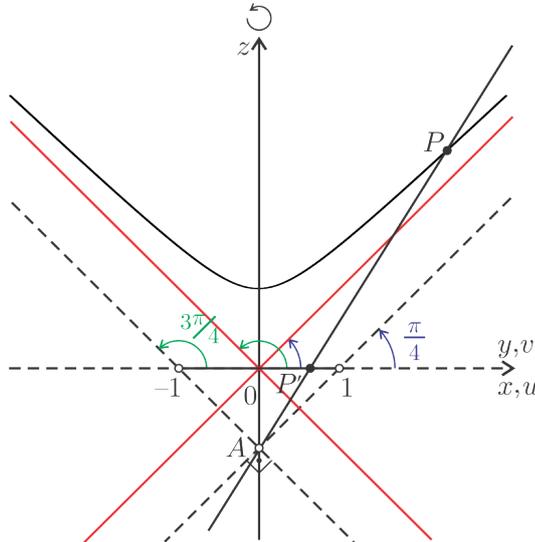


FIGURA 3.6: Seções verticais dos planos xz e yz com \mathbb{H}_+^2 .

Observe que, os pontos da pseudoesfera são projetados no disco aberto $\mathbb{D}^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u^2 + v^2 < 1\}$ (isto será provado em seguida) que chamaremos de *disco de Poincaré*. Dessa forma, uma parametrização para \mathbb{H}_+^2 é a aplicação $\varphi : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{H}_+^2$ dada por

$$\varphi(u, v) = \frac{1}{1 - u^2 - v^2} (2u, 2v, 1 + u^2 + v^2).$$

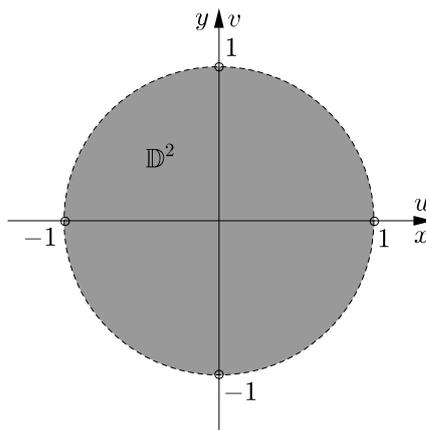


FIGURA 3.7: Pontos de \mathbb{H}_+^2 projetados no plano- xy .

Note que, φ está bem definida, pois se $(u, v) \in \mathbb{D}^2$, então

$$\frac{1 + u^2 + v^2}{1 - (u^2 + v^2)} > 0$$

e

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\varphi}(u, v)\|_p &= \frac{1}{1 - u^2 - v^2} \sqrt{-(2u)^2 - (2v)^2 + (1 + u^2 + v^2)^2} \\
&= \frac{1}{1 - u^2 - v^2} (1 - u^2 - v^2) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Assim, $\varphi(\mathbb{D}^2) \subset \mathbb{H}_+^2$.

A aplicação $\varphi : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{H}_+^2$ é bijetora. De fato:

(i) sabemos que por dois pontos passa uma única reta. Como todas as retas que projetam os pontos da pseudoesfera no plano- xy têm um ponto em comum (o ponto A), então se $\varphi(u_1, v_1) = \varphi(u_2, v_2)$ tem-se $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$, pois as retas são coincidentes. Logo, φ é injetora.

(ii) note que, a reta que passa por um ponto da pseudoesfera e o ponto A forma um ângulo entre $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$ com a sua projeção ortogonal no plano- xy . Como as retas que passam pelo ponto A e pela fronteira de \mathbb{D}^2 formam um ângulo de $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4}$ com a sua, respectiva, projeção ortogonal no plano- xy , então todo ponto da pseudoesfera tem um ponto correspondente no disco \mathbb{D}^2 (ver figura 3.6). Assim, φ é sobrejetora.

Agora, vamos mostrar que φ é, efetivamente, uma parametrização da pseudoesfera. Antes, note que $\mathbb{H}_+^2 = \left\{ (x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3; f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \right\}$ é uma superfície regular.

Seja $p \in \mathbb{H}_+^2$. Tome, o próprio, \mathbb{R}^3 como uma vizinhança de p em \mathbb{R}^3 e a aplicação $\varphi : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{H}_+^2$ (pois φ é bijetora). A primeira condição da definição 1.35 está satisfeita, pois φ é diferenciável em \mathbb{D}^2 . Temos que, $d\varphi_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dada por

$$d\varphi_q = \frac{1}{[1 - (u^2 + v^2)]^2} \begin{pmatrix} 2(1 + u^2 - v^2) & 4uv \\ 4uv & 2(1 - u^2 + v^2) \\ 4u & 4v \end{pmatrix}.$$

Como

$$\frac{4}{[1 - (u^2 + v^2)]^4} \begin{vmatrix} 1 + u^2 - v^2 & 2uv \\ 2uv & 1 - u^2 + v^2 \end{vmatrix} = \frac{4(1 + u^2 + v^2)}{[1 - (u^2 + v^2)]^3} \neq 0,$$

$\forall q = (u, v) \in \mathbb{D}^2$, então $d\varphi_q$ é injetiva $\forall q \in \mathbb{D}^2$ – isto é, a terceira condição da definição 1.35 está satisfeita. Como \mathbb{H}_+^2 é uma superfície regular e φ é uma aplicação bijetora que satisfaz as condições 1 e 3 da definição 1.35, então, pela proposição 1.12, a aplicação φ^{-1} é contínua. Assim, φ é um homeomorfismo e a segunda condição da definição 1.35 está satisfeita. Portanto, a aplicação φ é uma parametrização de \mathbb{H}_+^2 .

Vamos induzir o pseudoproduto interno de \mathbb{R}^3 em \mathbb{H}_+^2 . Seja $q = (u_0, v_0) \in \mathbb{D}^2$ tal que $\varphi(q) = p \in \mathbb{H}_+^2$. Como os vetores

$$\varphi_u(u_0, v_0) = \frac{1}{[1 - (u_0^2 + v_0^2)]^2} (2(1 + u_0^2 - v_0^2), 4u_0v_0, 4u_0)$$

e

$$\varphi_v(u_0, v_0) = \frac{1}{[1 - (u_0^2 + v_0^2)]^2} (4u_0v_0, 2(1 - u_0^2 + v_0^2), 4v_0)$$

são vetores linearmente independentes, então o conjunto $\mathcal{A} = \{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$ é uma base para o espaço vetorial $T_p\mathbb{H}_+^2$.

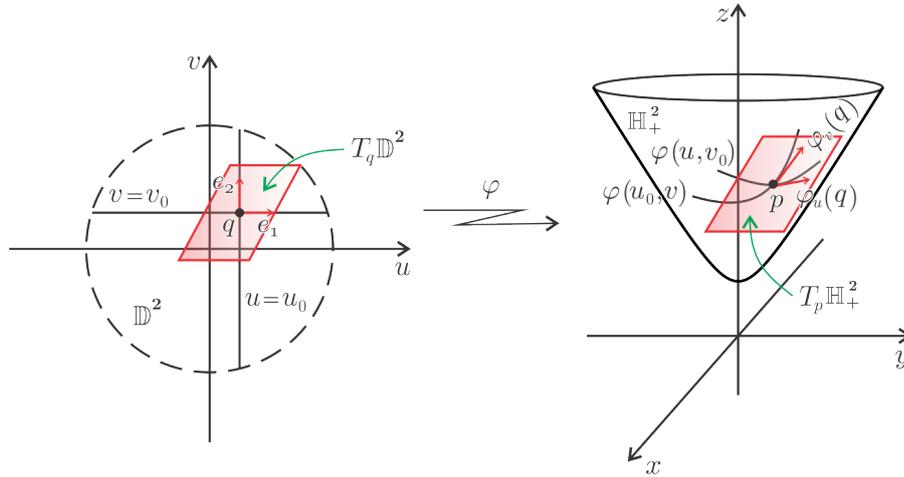


FIGURA 3.8.

Sejam $w_1, w_2 \in T_p\mathbb{H}_+^2$. Assim,

$$w_1 = \alpha_1 \varphi_u(q) + \beta_1 \varphi_v(q) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{A}}$$

e

$$w_2 = \alpha_2 \varphi_u(q) + \beta_2 \varphi_v(q) = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{A}}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} & \widetilde{\langle w_1, w_2 \rangle}_p \\ &= \langle \alpha_1 \varphi_u(q) + \beta_1 \varphi_v(q), \alpha_2 \varphi_u(q) + \beta_2 \varphi_v(q) \rangle_p \\ &= \alpha_1 \alpha_2 \langle \varphi_u(q), \varphi_u(q) \rangle_p + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2) \langle \varphi_u(q), \varphi_v(q) \rangle_p + \beta_1 \beta_2 \langle \varphi_v(q), \varphi_v(q) \rangle_p \\ &= \left[\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} \right]^t \cdot \begin{pmatrix} \langle \varphi_u(q), \varphi_u(q) \rangle_p & \langle \varphi_u(q), \varphi_v(q) \rangle_p \\ \langle \varphi_u(q), \varphi_v(q) \rangle_p & \langle \varphi_v(q), \varphi_v(q) \rangle_p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{A}}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} & \widetilde{\langle \varphi_u(q), \varphi_u(q) \rangle}_p \\ &= \frac{1}{[1 - (u_0^2 + v_0^2)]^4} \left[-4(1 + u_0^2 - v_0^2)^2 - 16u_0^2 v_0^2 + 16u_0^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{[1 - (u_0^2 + v_0^2)]^4} [-4 + 8u_0^2 - 4u_0^4 + 8v_0^2 - 8u_0^2v_0^2 - 4v_0^4] \\
&= -\frac{4}{[1 - (u_0^2 + v_0^2)]^2}, \\
&\quad \langle \widetilde{\varphi_u(q)}, \varphi_v(q) \rangle_p \\
&= \frac{1}{[1 - (u_0^2 + v_0^2)]^4} [-8u_0v_0(1 + u_0^2 - v_0^2) - 8u_0v_0(1 - u_0^2 + v_0^2) + 16u_0v_0] \\
&= \frac{1}{[1 - (u_0^2 + v_0^2)]^4} [-16u_0v_0 + 16u_0v_0] \\
&= 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\langle \varphi_v(q), \widetilde{\varphi_v(q)} \rangle_p \\
&= \frac{1}{[1 - (u_0^2 + v_0^2)]^4} [-16u_0^2v_0^2 - 4(1 - u_0^2 + v_0^2)^2 + 16v_0^2] \\
&= \frac{1}{[1 - (u_0^2 + v_0^2)]^4} [-4 + 8u_0^2 - 4u_0^4 + 8v_0^2 - 8u_0^2v_0^2 - 4v_0^4] \\
&= -\frac{4}{[1 - (u_0^2 + v_0^2)]^2},
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{w_1}, \widetilde{w_2} \rangle_p &= \left[\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{A}}^t \cdot \begin{pmatrix} \langle \widetilde{\varphi_u(q)}, \varphi_u(q) \rangle_p & \langle \widetilde{\varphi_u(q)}, \varphi_v(q) \rangle_p \\ \langle \varphi_u(q), \varphi_v(q) \rangle_p & \langle \varphi_v(q), \varphi_v(q) \rangle_p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} \\
&= -\frac{4}{[1 - (u_0^2 + v_0^2)]^2} \left[\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{A}}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} \\
&= -\frac{4}{[1 - (u_0^2 + v_0^2)]^2} (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2). \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Assim, o pseudoproduto interno sobre $T_p\mathbb{H}_+^2$ é negativo definido para todo $p \in \mathbb{H}_+^2$. Como $T_q\mathbb{D}^2 \simeq T_p\mathbb{H}_+^2$ e os vetores em $T_p\mathbb{H}_+^2$ na base \mathcal{A} têm as mesmas coordenadas de seus vetores correspondentes em $T_q\mathbb{D}^2$ na base canônica de \mathbb{R}^2 , então podemos induzir a métrica hiperbólica sobre \mathbb{D}^2 através da definição 3.2 e da relação (3.3). Dessa forma, segue a definição:

DEFINIÇÃO 3.4: A métrica hiperbólica sobre \mathbb{D}^2 é a aplicação $g_q^{\mathbb{D}^2}$ que para cada ponto $q = (u, v) \in \mathbb{D}^2$ é dada por

$$g_q^{\mathbb{D}^2}(w_1, w_2) = \frac{4}{[1 - (u^2 + v^2)]^2} \langle w_1, w_2 \rangle, \text{ onde } w_1, w_2 \in T_q\mathbb{D}^2.$$

DEFINIÇÃO 3.5: $\mathbb{H}_{\mathcal{D}}^2 = (\mathbb{D}^2, g_{\mathcal{D}}^2)$ é o modelo do disco de Poincaré para a geometria hiperbólica.

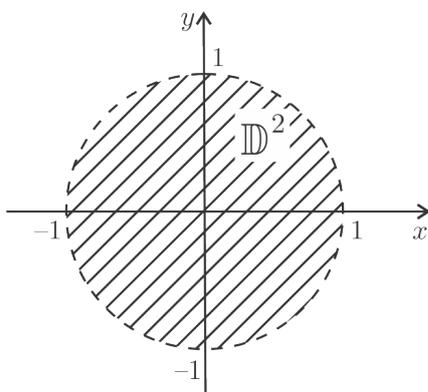


FIGURA 3.9: Modelo $\mathbb{H}_{\mathcal{D}}^2$.

Dizemos que duas circunferências são ortogonais quando os vetores tangentes a estas circunferências em cada ponto de interseção formam um ângulo reto.

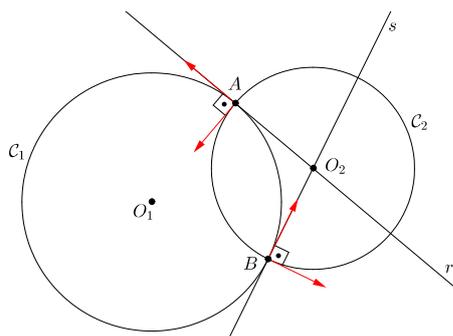


FIGURA 3.10: Circunferências ortogonais.

As geodésicas de $\mathbb{H}_{\mathcal{D}}^2$ são os diâmetros do disco \mathbb{D}^2 e os arcos de circunferências ortogonais à $\partial\mathbb{D}^2$.

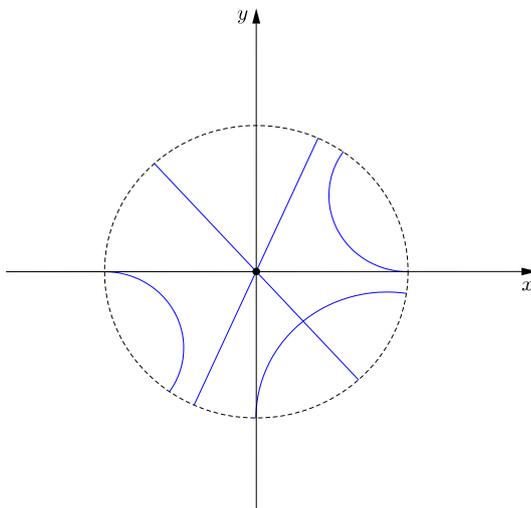


FIGURA 3.11: Geodésicas de $\mathbb{H}_{\mathcal{D}}^2$.

O conceito de ângulo em $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}^2$ coincide com o conceito de ângulo da geometria euclidiana, isto é, o ângulo entre duas curvas de $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}^2$ que se interceptam em um ponto é o ângulo formado pelos vetores tangentes a estas curvas no ponto de interseção.

O comprimento hiperbólico de uma curva diferenciável $\alpha : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{D}^2$ dada por $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ é

$$\begin{aligned} \ell_{t_0}^{t_1}(\alpha) &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{\alpha(t)}^{\mathbb{D}^2}(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\frac{4}{[1 - [(u(t))^2 + (v(t))^2]]^2} [(u'(t))^2 + (v'(t))^2]} dt \\ &= 2 \cdot \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{1 - [(u(t))^2 + (v(t))^2]} \sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

A área hiperbólica de uma região $R \subset \mathbb{D}^2$ é

$$\begin{aligned} A(R) &= \iint_R \sqrt{\det(g_q^{\mathbb{D}^2})} dudv \\ &= \iint_R \sqrt{\frac{16}{[1 - [(u(t))^2 + (v(t))^2]]^4} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} dudv \\ &= 4 \cdot \iint_R \frac{1}{[1 - [(u(t))^2 + (v(t))^2]]^2} dudv. \end{aligned}$$

São exemplos de isometrias em $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}^2$ (ver a prova na subseção A.2.2 do Apêndice A):

- (i) $R_{\theta}(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$ chamada de rotação em torno do centro de \mathbb{D}^2 – no sentido anti-horário.

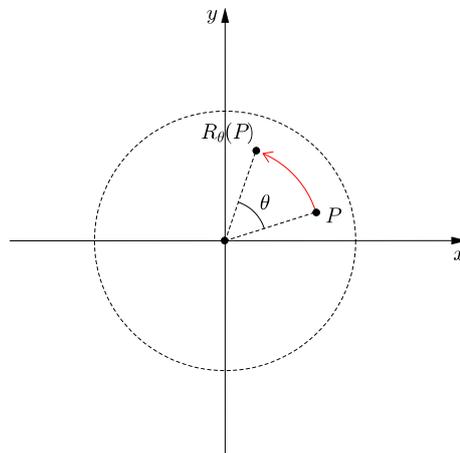


FIGURA 3.12: Rotação.

(ii) $r_x(x, y) = (x, -y)$ chamada de reflexão em relação ao eixo- x .

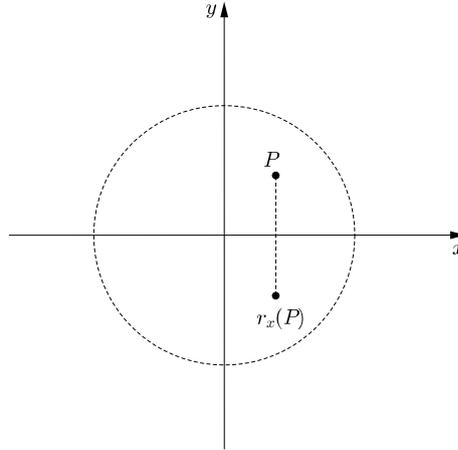


FIGURA 3.13: Reflexão em relação ao eixo- x .

3.1.3 \mathbb{H}_S^2 : Modelo do Semiplano de Poincaré

Lembre-se que $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$.

Considere a aplicação $\phi : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ dada por

$$\phi(x, y) = \frac{1}{x^2 + (y+1)^2} (x^2 + y^2 - 1, -2x). \quad (3.4)$$

Esta aplicação em termos de números complexos é dada por $\phi(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

Como $\text{Im } z > 0$, então

$$-\frac{4 \text{Im } z}{|z+i|^2} < 0.$$

Assim,

$$|\phi(z)| < 1, \forall z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \text{Im } z > 0.$$

Isto é, $\phi(\mathbb{R}_+^2) \subset \mathbb{D}^2 - \phi$ está bem definida.

Agora, tome $w \in \mathbb{C}$ tal que $|w| < 1$. Façamos $\phi(z) = w$, ou seja,

$$\frac{z-i}{z+i} = w.$$

Daí obtemos

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+w)i}{1-w} \\ &= -\frac{2 \text{Im } w}{|1-w|^2} + \frac{1-|w|^2}{|1-w|^2} i. \end{aligned}$$

Observe que,

$$1 - |w|^2 > 0.$$

Então, $z \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Im } z > 0$ o que implica que $\mathbb{D}^2 \subset \phi(\mathbb{R}_+^2)$. Logo, $\phi(\mathbb{R}_+^2) = \mathbb{D}^2$ (ϕ é sobrejetora).

Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tais que $\text{Im } z_1, \text{Im } z_2 > 0$. Se $\phi(z_1) = \phi(z_2)$, então

$$\begin{aligned} \frac{z_1 - i}{z_1 + i} &= \frac{z_2 - i}{z_2 + i} \\ \Rightarrow z_1 &= z_2. \end{aligned}$$

Assim, ϕ é injetora.

Dessa forma, a aplicação diferenciável ϕ é bijetora. Como

$$\phi^{-1}(x, y) = \frac{1}{(1-x)^2 + y^2} (-2y, 1 - (x^2 + y^2))$$

é diferenciável, temos que ϕ é um difeomorfismo, ou seja, $T_h \mathbb{R}_+^2 \simeq T_q \mathbb{D}^2$. Com isso, podemos induzir a métrica hiperbólica de $\mathbb{H}_\mathcal{D}^2$ sobre \mathbb{R}_+^2 .

Considere $w_1, w_2 \in T_q \mathbb{D}^2$. Então, $\exists u_1, u_2 \in T_h \mathbb{R}_+^2$ tais que $w_1 = d\phi_h \cdot u_1$ e $w_2 = d\phi_h \cdot u_2$. Logo,

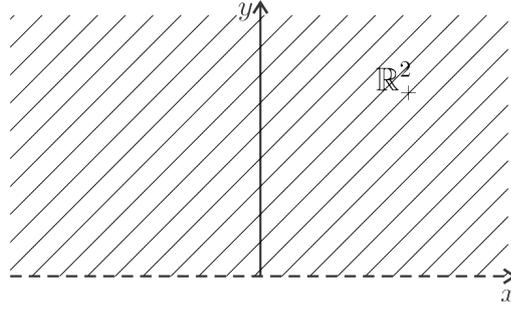
$$\begin{aligned} g_q^{\mathbb{D}^2}(w_1, w_2) &= \frac{4}{\left[1 - \frac{1}{[x^2 + (y+1)^2]^2} [(x^2 + y^2 - 1)^2 + 4x^2]\right]^2} \langle w_1, w_2 \rangle \\ &= \frac{4}{\left[\frac{4y[x^2 + (y+1)^2]}{[x^2 + (y+1)^2]^2}\right]^2} (u_1)^t \cdot [(d\phi_h)^t \cdot I_2 \cdot d\phi_h] \cdot u_2 \\ &= \frac{[x^2 + (y+1)^2]^2}{4y^2} \cdot \frac{4}{[x^2 + (y+1)^2]^2} (u_1)^t \cdot I_2 \cdot u_2 \\ &= \frac{1}{y^2} \langle u_1, u_2 \rangle. \end{aligned}$$

Daí vem a próxima definição:

DEFINIÇÃO 3.6: A métrica hiperbólica sobre \mathbb{R}_+^2 é a aplicação $g_h^{\mathbb{R}_+^2}$ que para cada ponto $h = (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ é dada por

$$g_h^{\mathbb{R}_+^2}(u, v) = \frac{1}{y^2} \langle u, v \rangle, \text{ onde } u, v \in T_h \mathbb{R}_+^2.$$

DEFINIÇÃO 3.7: $\mathbb{H}_\mathcal{S}^2 = (\mathbb{R}_+^2, g_h^{\mathbb{R}_+^2})$ é o modelo do semiplano de Poincaré para a geometria hiperbólica.

FIGURA 3.14: Modelo \mathbb{H}_S^2 .

No semiplano de Poincaré:

- (i) o comprimento hiperbólico de uma curva diferenciável $\beta : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ dada por $\beta(t) = (x(t), y(t))$ é

$$\begin{aligned} \ell_{t_0}^{t_1}(\beta) &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{\beta(t)}^{\mathbb{R}_+^2}(\beta'(t), \beta'(t))} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\frac{1}{[y(t)]^2} [(x'(t))^2 + (y'(t))^2]} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{y(t)} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

- (ii) a área hiperbólica de uma região $R \subset \mathbb{R}_+^2$ é

$$\begin{aligned} A(R) &= \iint_R \sqrt{\det(g_h^{\mathbb{R}_+^2})} dx dy \\ &= \iint_R \sqrt{\left[\frac{1}{[y(t)]^2} \right]^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} dx dy \\ &= \iint_R \frac{1}{[y(t)]^2} dx dy. \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO 3.1: Vamos comparar os modelos \mathbb{H}_S^2 e \mathbb{H}_D^2 através da aplicação (3.4).

- (i) Já vimos que se $p \in \mathbb{R}_+^2$, então $\phi(p) \in \mathbb{D}^2$ ($\phi(\mathbb{R}_+^2) = \mathbb{D}^2$).
- (ii) Seja $(a, 0) \in$ eixo- x . Temos que,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,0)} \phi(x, y) = \left(\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}, -\frac{2a}{a^2 + 1} \right).$$

Chamemos $\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} = u$ e $-\frac{2a}{a^2 + 1} = v$. Note que:

- $-1 \leq u < 1$ e $|v| \leq 1$.

De fato,

$$\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} = u \Rightarrow (1 - u) a^2 = 1 + u$$

assim, $-1 \leq u < 1$ e, também, como existe $a \in \mathbb{R}$ para cada u neste intervalo, então

$$-\frac{2a}{a^2 + 1} = v \Rightarrow va^2 + 2a + v = 0 \rightarrow \begin{cases} v = 0 \\ v \neq 0 \Rightarrow 4(1 - v^2) \geq 0 \Rightarrow 0 \neq |v| \leq 1 \end{cases} .$$

- $u^2 + v^2 = 1$.

Como

$$\begin{cases} u = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \\ v = -\frac{2a}{a^2 + 1} \end{cases} ,$$

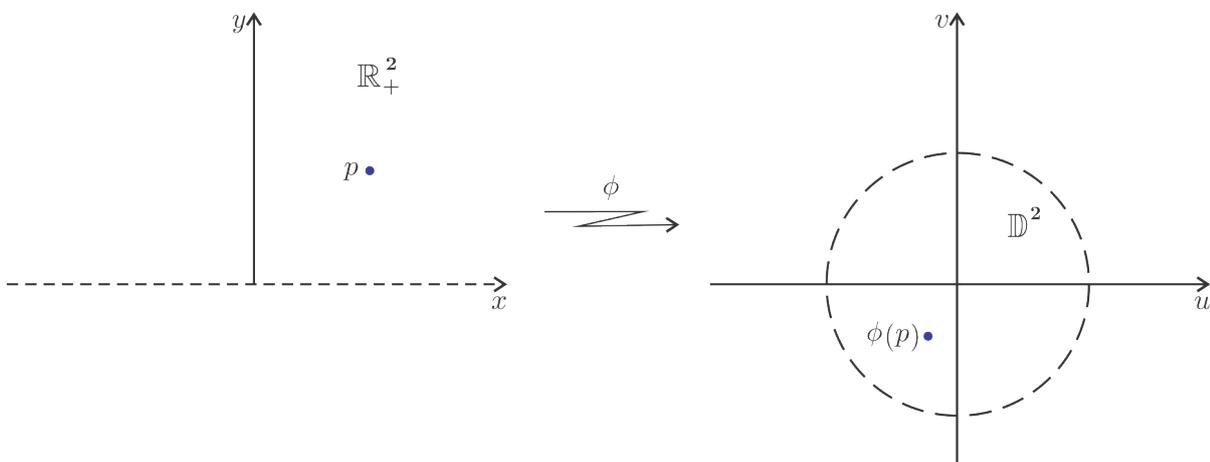
então

$$u^2 + v^2 = \left(\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}\right)^2 + \left(-\frac{2a}{a^2 + 1}\right)^2 = \frac{a^4 - 2a^2 + 1 + 4a^2}{(a^2 + 1)^2} = \frac{(a^2 + 1)^2}{(a^2 + 1)^2} = 1.$$

Logo, ϕ leva o eixo- x na $\partial\mathbb{D}^2 \setminus \{(1, 0)\}$.

(iii) Considere ∞ o ponto (a, ∞) para qualquer $a \in \mathbb{R}$ fixo. Dessa forma,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,\infty)} \phi(x, y) = (1, 0), \text{ para todo } a \text{ real fixo.}$$



(a)

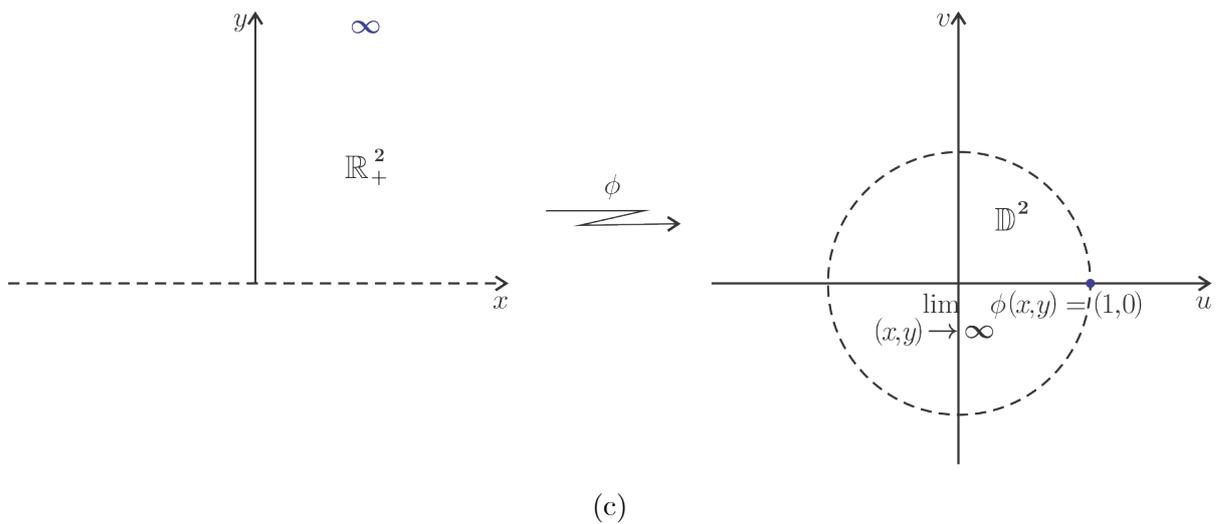
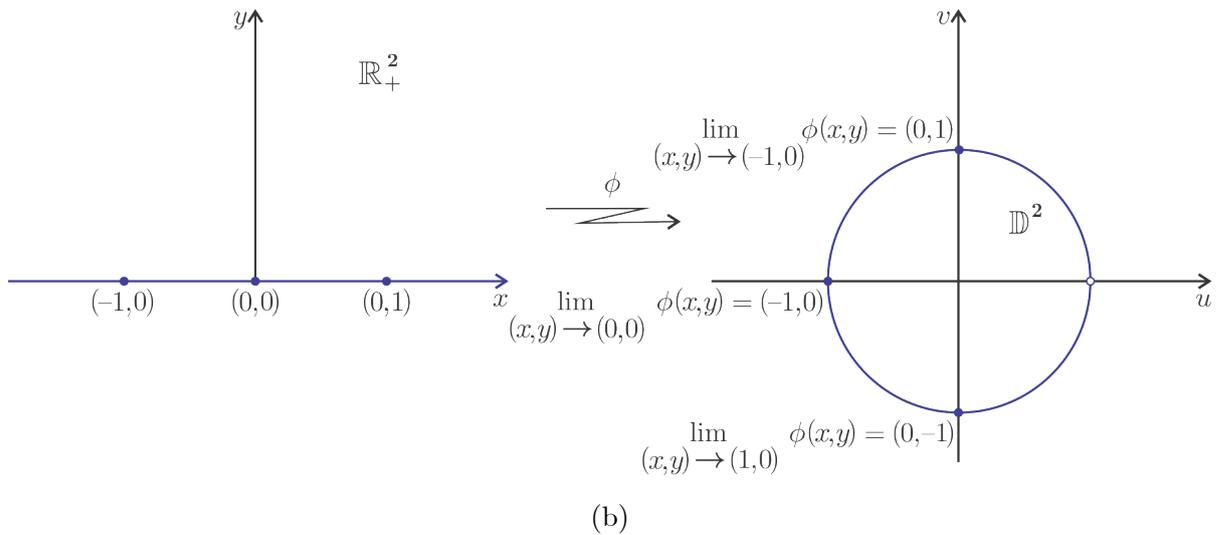


FIGURA 3.15: Visualização geométrica da observação 3.1.

3.2 Geometria Hiperbólica em \mathbb{H}_S^2

Nesta seção, começaremos estudando duas reflexões em \mathbb{H}_S^2 (a reflexão em relação a uma semirreta vertical e a inversão) e, em seguida, obteremos as geodésicas e as isometrias em \mathbb{H}_S^2 .

3.2.1 Reflexões em \mathbb{H}_S^2

Seja a semirreta vertical $l = \{(x_0, y) \in \mathbb{R}_+^2; x_0 \in \mathbb{R} \text{ é fixo}\}$. Considere a transformação $r_l : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ tal que l é a mediatriz do segmento de extremidades (a, b) e $r_l(a, b)$, para todo $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$.

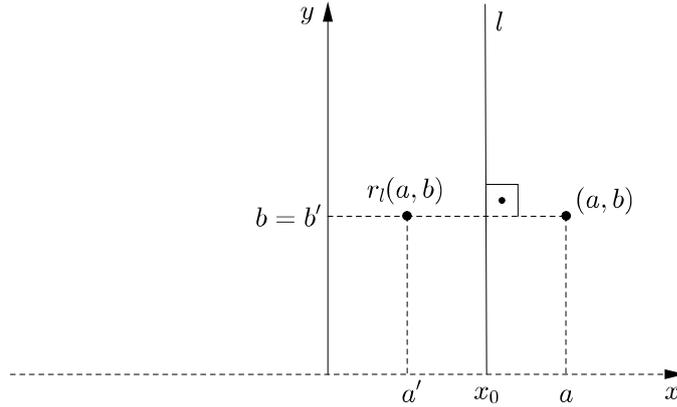


FIGURA 3.16: Visualização geométrica da aplicação r_l .

Façamos,

$$r_l(a, b) = (a', b').$$

Então,

$$x_0 - a' = a - x_0 \Rightarrow a' = -a + 2x_0$$

e

$$b' = b.$$

Assim, de forma geral,

$$r_l(x, y) = (-x + 2x_0, y). \quad (3.5)$$

Note que, a aplicação (3.5) está bem definida. Chamaremos esta aplicação de reflexão em relação à semirreta vertical l .

PROPOSIÇÃO 3.1: *A reflexão em relação à semirreta vertical é uma isometria de \mathbb{H}_S^2 .*

PROVA. Sejam $l \subset \mathbb{R}_+^2$ uma semirreta vertical e $r_l : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ a reflexão em relação à l . Temos que, $r_l(x, y) = (-x + 2x_0, y)$, onde x_0 é a abscissa de l . Se $r_l(x_1, y_1) = r_l(x_2, y_2)$ tem-se $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, isto é, r_l é injetora. Tome $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$, então $r_l(x, y) = (u, v) \Rightarrow (x, y) = (-u + 2x_0, v) \in \mathbb{R}_+^2$, ou seja, r_l é sobrejetora. Dessa forma, r_l é bijetora e, ainda, diferenciável. A sua inversa é a aplicação diferenciável $r_l^{-1}(x, y) = (-x + 2x_0, y)$. Logo, r_l é um difeomorfismo sobre \mathbb{R}_+^2 . Agora, considere $w_1, w_2 \in T_p \mathbb{R}_+^2$. Assim,

$$\begin{aligned} g_{r_l(p)}^{\mathbb{R}_+^2} \left(d(r_l)_p \cdot w_1, d(r_l)_p \cdot w_2 \right) &= \frac{1}{y^2} \left\langle d(r_l)_p \cdot w_1, d(r_l)_p \cdot w_2 \right\rangle \\ &= \frac{1}{y^2} (w_1)^t \cdot \left[\left[d(r_l)_p \right]^t \cdot I_2 \cdot d(r_l)_p \right] \cdot w_2 \\ &= \frac{1}{y^2} (w_1)^t \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot w_2 \\ &= \frac{1}{y^2} (w_1)^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot w_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{y^2} \langle w_1, w_2 \rangle \\
&= g_p^{\mathbb{R}^2_+}(w_1, w_2).
\end{aligned}$$

Portanto, r_l é uma isometria de \mathbb{H}_S^2 . □

Se considerarmos \mathbb{R}^2 como \mathbb{C} podemos escrever a reflexão (3.5) como $r_l(z) = -\bar{z} + 2x_0$, onde $z = x + yi \equiv (x, y)$.

DEFINIÇÃO 3.8: *Sejam A um ponto do plano e \mathcal{C} uma circunferência de centro em A e raio $r > 0$. A inversão do plano sobre \mathcal{C} é a aplicação $r_{\mathcal{C}}$ do plano no plano tal que:*

(i) $r_{\mathcal{C}}(A) = \infty$.

(ii) $r_{\mathcal{C}}(P) = P'$, onde $\overline{AP'} = \frac{r^2}{\overline{AP}}$ com $P \neq A$ e $P' \in \overleftrightarrow{AP}$.

Note que,

(a) se $P \in \mathcal{C}$, então $r_{\mathcal{C}}(P) = P$, ou seja, $r_{\mathcal{C}}(P) \in \mathcal{C}$.

(b) se P está no interior (resp. exterior) de \mathcal{C} , então $r_{\mathcal{C}}(P)$ está no exterior (resp. interior) de \mathcal{C} .

(c) $r_{\mathcal{C}}(r_{\mathcal{C}}(P)) = P$, para todo ponto P no plano.

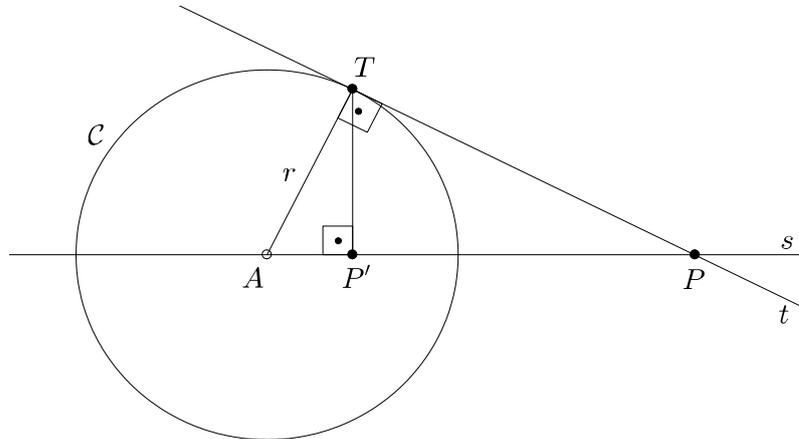


FIGURA 3.17: Interpretação geométrica da inversão.

Como $\triangle AP'T \sim \triangle APT$, então $\frac{\overline{AP'}}{r} = \frac{r}{\overline{AP}}$, ou seja, $\overline{AP'} = \frac{r^2}{\overline{AP}}$. Dessa forma, fica fácil ver que:

(d) Se s é uma reta que passa por A , então $r_{\mathcal{C}}(s \setminus \{A\}) = s \setminus \{A\}$ (ver proposição 3.2 em (i) – (a)).

Vamos escrever a inversão em coordenadas cartesianas. Sejam $O = (0, 0)$, $A = (a, b)$, $P = (x, y)$ e $r_{\mathcal{C}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Temos que, $\overline{AP'} = k\overline{AP}$, onde $k > 0$. Assim,

$$k = \frac{\|\overrightarrow{AP'}\|}{\|\overrightarrow{AP}\|} = \frac{r^2}{\|\overrightarrow{AP}\|^2} = \frac{r^2}{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Como

$$\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{AP},$$

então

$$r_C(x, y) = \frac{r^2}{(x-a)^2 + (y-b)^2} (x-a, y-b) + (a, b).$$

PROPOSIÇÃO 3.2: *A inversão, em \mathbb{R}^2 , transforma:*

- (i) *uma reta em uma reta ou uma circunferência.*
- (ii) *uma circunferência em uma reta ou uma circunferência.*

PROVA. Seja a inversão $r_C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$r_C(x, y) = \frac{r^2}{(x-a)^2 + (y-b)^2} (x-a, y-b) + (a, b).$$

Façamos

$$r_C(x, y) = (u, v),$$

assim,

$$\begin{cases} u - a = \frac{r^2}{(x-a)^2 + (y-b)^2} (x-a) & \text{(I)} \\ v - b = \frac{r^2}{(x-a)^2 + (y-b)^2} (y-b) & \text{(II)} \end{cases}.$$

Dividindo (I) por (II) obtemos

$$y - b = \frac{v - b}{u - a} (x - a). \quad \text{(III)}$$

Agora, somando os quadrados de (I) e (II) temos

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \frac{r^4}{(u-a)^2 + (v-b)^2}. \quad \text{(IV)}$$

De (III) e (IV) temos que,

$$x - a = \frac{r^2(u-a)}{(u-a)^2 + (v-b)^2}$$

e

$$y - b = \frac{r^2 (v - b)}{(u - a)^2 + (v - b)^2}.$$

(i) Considere a reta $l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \alpha x + \beta y + \varphi = 0 \text{ com } \alpha, \beta, \varphi \in \mathbb{R} \text{ fixos}\}$. Digamos que, $(u, v) \in r_C(l)$. Então,

$$\alpha r^2 (u - a) + \beta r^2 (v - b) + [(u - a)^2 + (v - b)^2] \cdot (\alpha a + \beta b + \varphi) = 0. \quad (3.6)$$

Temos dois casos a considerar de (3.6).

(a) $\alpha a + \beta b + \varphi = 0$.

Assim, $\alpha u + \beta v + \varphi = 0$, ou seja, $r_C(l)$ é uma reta.

(b) $\alpha a + \beta b + \varphi = \theta \neq 0$.

Então,

$$\left[u - \left(a - \frac{\alpha r^2}{2\theta} \right) \right]^2 + \left[v - \left(b - \frac{\beta r^2}{2\theta} \right) \right]^2 = \left(\frac{r^2 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2|\theta|} \right)^2,$$

ou seja, $r_C(l)$ é uma circunferência.

(ii) Considere a circunferência $\mathcal{C}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \text{ com } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ e } R \in \mathbb{R}_+^* \text{ fixos}\}$. Se $(u, v) \in r_C(\mathcal{C}_1)$, então

$$r^4 + 2r^2 [(a - \alpha)(u - a) + (b - \beta)(v - b)] = [R^2 - (a - \alpha)^2 - (b - \beta)^2] \cdot [(u - a)^2 + (v - b)^2]. \quad (3.7)$$

Vamos considerar dois casos para (3.7).

(a) $R^2 - (a - \alpha)^2 - (b - \beta)^2 = 0$.

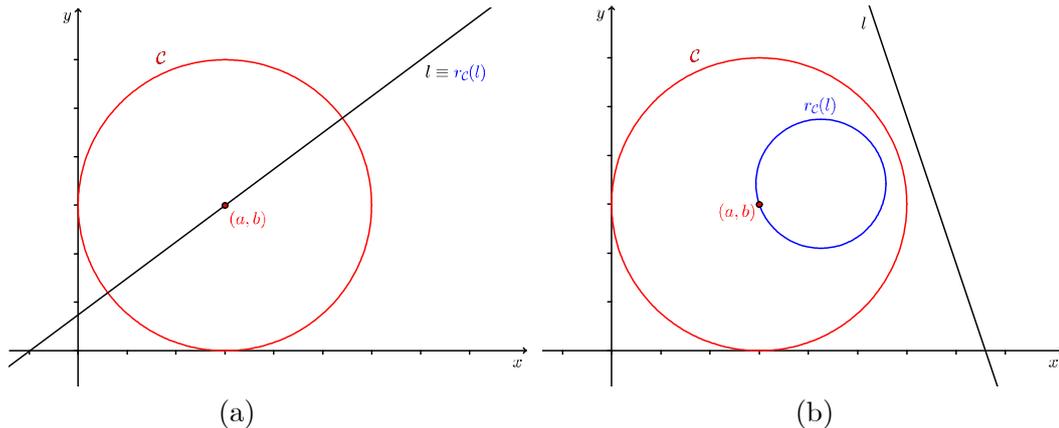
Destarte, $(a - \alpha)(u - a) + (b - \beta)(v - b) + \frac{r^2}{2} = 0$, ou seja, $r_C(\mathcal{C}_1)$ é uma reta.

(b) $R^2 - (a - \alpha)^2 - (b - \beta)^2 = \theta \neq 0$.

Assim,

$$\left[u - \left(\frac{r^2 (a - \alpha)}{\theta} + a \right) \right]^2 + \left[v - \left(\frac{r^2 (b - \beta)}{\theta} + b \right) \right]^2 = \left(\frac{r^2 R}{|\theta|} \right)^2,$$

isto é, $r_C(\mathcal{C}_1)$ é uma circunferência. □



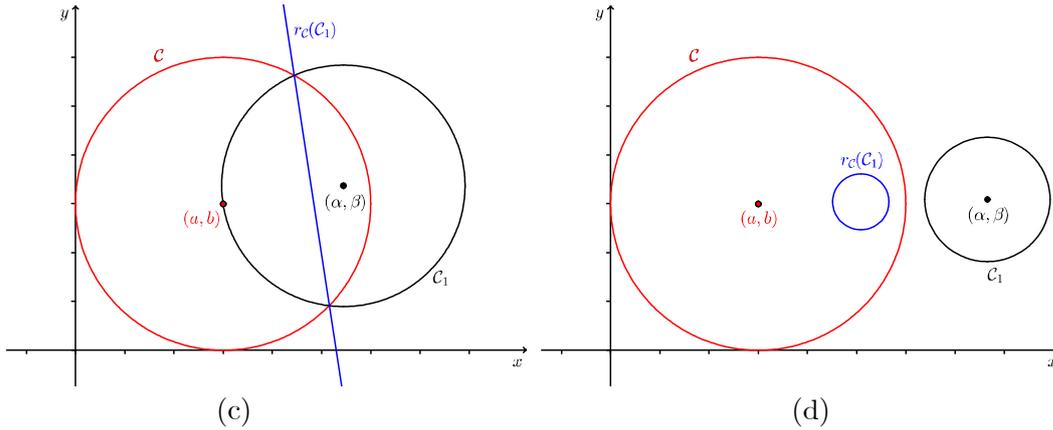


FIGURA 3.18: Visualização dos casos de (i) e (ii) da proposição 3.2.

PROPOSIÇÃO 3.3: *Seja a inversão $r_C : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ tal que*

$$r_C(x, y) = \frac{r^2}{(x-a)^2 + y^2} (x-a, y) + (a, 0).$$

Então r_C é uma isometria de \mathbb{H}_S^2 .

PROVA. Primeiro, observe que r_C é diferenciável em \mathbb{R}_+^2 . Temos que, a inversão pode ser escrita, em números complexos, da seguinte forma,

$$r_C(z) = \frac{r^2}{\bar{z} - z_0} + z_0, \text{ onde } z = x + yi \equiv (x, y) \text{ com } y > 0 \text{ e } z_0 = a + 0i \equiv (a, 0).$$

Se $r_C(z_1) = r_C(z_2)$, então

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{\bar{z}_1 - z_0} + z_0 &= \frac{r^2}{\bar{z}_2 - z_0} + z_0 \\ \Rightarrow \bar{z}_1 - z_0 &= \bar{z}_2 - z_0 \\ \Rightarrow \bar{z}_1 &= \bar{z}_2 \\ \Rightarrow z_1 &= z_2. \end{aligned}$$

Assim, r_C é injetora. Seja $w_0 \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Im } w_0 > 0$. Fazendo $r_C(z) = w_0$ temos que,

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{\bar{z} - z_0} + z_0 &= w_0 \\ \Rightarrow \frac{r^2}{\bar{z} - z_0} &= w_0 - z_0 \\ \Rightarrow \bar{z} - z_0 &= \frac{r^2}{w_0 - z_0} && (w_0 - z_0 \neq 0) \\ \Rightarrow \bar{z} &= \frac{r^2}{w_0 - z_0} + z_0 \\ \Rightarrow z &= \frac{r^2}{\bar{w}_0 - z_0} + z_0 && (\bar{z}_0 = z_0) \\ \Rightarrow z &= \frac{r^2}{|w_0 - z_0|^2} (w_0 - z_0) + z_0. \end{aligned}$$

Note que, $\text{Im } z > 0$. Dessa forma, $r_{\mathcal{C}}$ é sobrejetora. Logo, a aplicação $r_{\mathcal{C}}$ é bijetora e sua inversa é a aplicação diferenciável

$$r_{\mathcal{C}}^{-1}(x, y) = \frac{r^2}{(x-a)^2 + y^2} (x-a, y) + (a, 0).$$

Donde vem que, $r_{\mathcal{C}}$ é um difeomorfismo sobre \mathbb{R}_+^2 . Agora, vamos verificar se $r_{\mathcal{C}}$ preserva a métrica hiperbólica. Sejam $w_1, w_2 \in T_p \mathbb{R}_+^2$. Como

$$d(r_{\mathcal{C}})_p = \frac{r^2}{[(x-a)^2 + y^2]^2} \begin{pmatrix} -(x-a)^2 + y^2 & -2(x-a)y \\ -2(x-a)y & (x-a)^2 - y^2 \end{pmatrix},$$

então

$$\begin{aligned} & g_{r_{\mathcal{C}}(p)}^{\mathbb{R}_+^2} (d(r_{\mathcal{C}})_p \cdot w_1, d(r_{\mathcal{C}})_p \cdot w_2) \\ &= \frac{1}{\left[\frac{r^2 y}{(x-a)^2 + y^2} \right]^2} \langle d(r_{\mathcal{C}})_p \cdot w_1, d(r_{\mathcal{C}})_p \cdot w_2 \rangle \\ &= \frac{[(x-a)^2 + y^2]^2}{r^4 y^2} (w_1)^t \cdot \left[[d(r_{\mathcal{C}})_p]^t \cdot I_2 \cdot d(r_{\mathcal{C}})_p \right] \cdot w_2 \\ &= \frac{[(x-a)^2 + y^2]^2}{r^4 y^2} \cdot \frac{r^4}{[(x-a)^2 + y^2]^4} (w_1)^t \cdot \left[\begin{pmatrix} -(x-a)^2 + y^2 & -2(x-a)y \\ -2(x-a)y & (x-a)^2 - y^2 \end{pmatrix} \right] \cdot w_2 \\ &= \frac{1}{y^2 [(x-a)^2 + y^2]^2} (w_1)^t \cdot \begin{pmatrix} [(x-a)^2 + y^2]^2 & 0 \\ 0 & [(x-a)^2 + y^2]^2 \end{pmatrix} \cdot w_2 \\ &= \frac{1}{y^2} (w_1)^t \cdot I_2 \cdot w_2 \\ &= g_p^{\mathbb{R}_+^2} (w_1, w_2). \end{aligned}$$

Portanto, $r_{\mathcal{C}}$ é uma isometria de $\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2$. □

A proposição anterior afirma que, toda inversão do plano sobre uma circunferência com centro no eixo- x é uma isometria de $\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2$.

Por uma questão de simplicidade na escrita usaremos daqui em diante a palavra reflexão para nos referirmos tanto a uma reflexão em relação a uma semirreta vertical quanto a uma inversão do plano sobre uma circunferência com centro no eixo- x .

OBSERVAÇÃO 3.2: Se pensarmos nas transformações r_l e $r_{\mathcal{C}}$ como funções complexas, então elas serão funções anti-holomorfas, ou seja, preservam ângulo e invertem orientação.

3.2.2 Geodésicas de \mathbb{H}_S^2

PROPOSIÇÃO 3.4: *Seja a semirreta vertical $l = \{(x_0, y) \in \mathbb{R}_+^2; x_0 \text{ é fixo}\}$. Então l é uma geodésica de \mathbb{H}_S^2 .*

PROVA. Seja a curva diferenciável $\gamma : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ dada por $\gamma(t) = (x_0, t)$ uma parametrização de l . Agora, considere dois pontos $p_0, p_1 \in \mathbb{R}_+^2$ tais que $\gamma(t_0) = p_0$ e $\gamma(t_1) = p_1$. Assim, o comprimento hiperbólico de γ de p_0 a p_1 é

$$\ell_{t_0}^{t_1}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{t} \sqrt{0^2 + 1^2} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{t} dt = \ln \frac{t_1}{t_0}.$$

Suponha que $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ é uma curva de \mathbb{R}_+^2 tal que $\alpha(t_0) = p_0$ e $\alpha(t_1) = p_1$. Então,

$$\ell_{t_0}^{t_1}(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{y(t)} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \geq \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{y(t)} y'(t) dt = \ln \frac{y(t_1)}{y(t_0)} = \ln \frac{t_1}{t_0} = \ell_{t_0}^{t_1}(\gamma).$$

Logo, l é uma geodésica de \mathbb{H}_S^2 . □

COROLÁRIO 3.1: *Toda semicircunferência com centro no eixo dos infinitos é uma geodésica de \mathbb{H}_S^2 .*

PROVA. Seja a semicircunferência $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2; (x - \alpha)^2 + y^2 = R^2\}$. Basta mostrar que existe uma isometria que transforma S em uma semirreta vertical l .

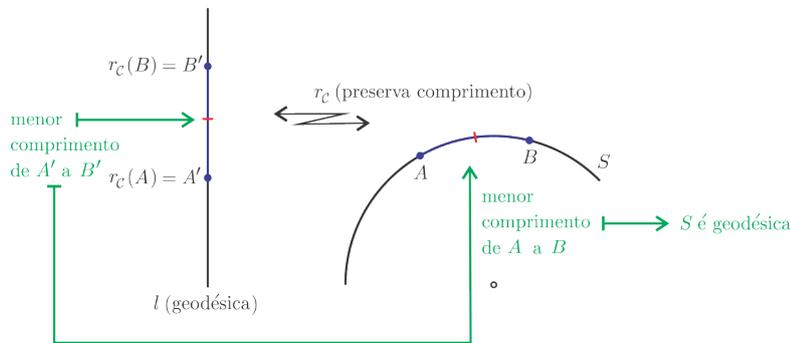


FIGURA 3.19. Ideia da demonstração.

Considere a nossa isometria como sendo a reflexão r_C sobre a circunferência $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - a)^2 + y^2 = r^2\}$. Se $(u, v) \in r_C(S)$, então de (3.7) temos que,

$$r^4 + 2r^2(a - \alpha)(u - a) = [R^2 - (a - \alpha)^2] \cdot [(u - a)^2 + v^2]. \quad (3.8)$$

Para que (3.8) seja uma semirreta vertical, faça $R^2 - (a - \alpha)^2 = 0$, ou seja, devemos tomar $a = \alpha - R$ ou $a = \alpha + R$. Assim,

$$r_C(S) = l = \left\{ \left(a - \frac{r^2}{2(a - \alpha)}, v \right) \in \mathbb{R}_+^2 \right\}.$$

Logo, como r_C é uma isometria e $r_C(S) = l$ é uma semirreta vertical, segue da proposição

anterior que, S é uma geodésica de \mathbb{H}_S^2 . □

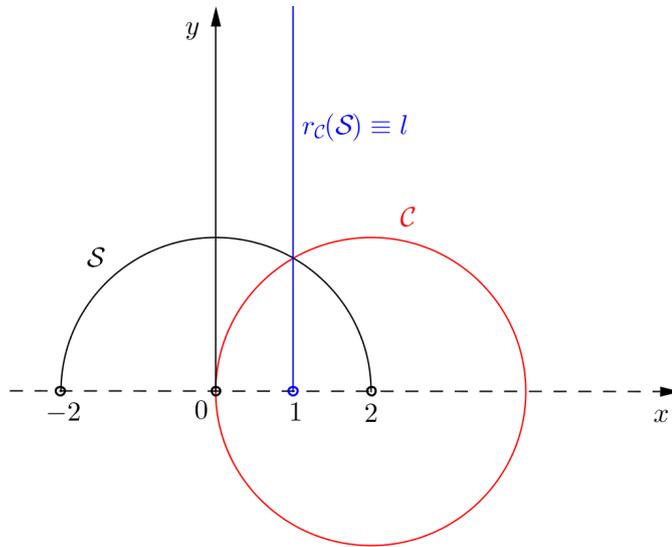


FIGURA 3.20: Reflexão de $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2; x^2 + y^2 = 4\}$ sobre $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - 2)^2 + y^2 = 4\}$.

PROPOSIÇÃO 3.5: *Sejam $p, q \in \mathbb{R}_+^2$. Então, ou existe uma semirreta vertical ou existe uma semicircunferência, com centro no eixo- x , que passa por p e q .*

PROVA. Temos dois casos:

(i) os pontos p e q têm a mesma abscissa.

Então, pelos pontos p e q passa uma semirreta vertical.

(ii) os pontos p e q não têm a mesma abscissa.

Façamos:

1º) trace uma reta t passando por p e q .

2º) trace a mediatriz do segmento pq obtendo o ponto médio m de pq e o ponto $o(\alpha, 0)$ no eixo- x .

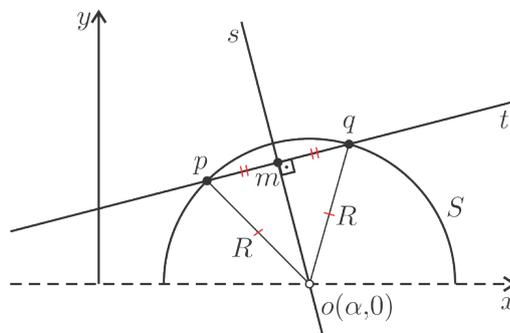


FIGURA 3.21. Semicircunferência que passa por p e q .

Como $\triangle pmo \equiv \triangle qmo$, então $\overline{op} = \overline{oq} = R$. Logo, a semicircunferência de centro o e raio R passa pelos pontos p e q . □

DEFINIÇÃO 3.9: Sejam $p, q \in \mathbb{R}_+^2$ e $\mathcal{L}(p, q) = \{\ell_{t_0}^{t_1}(\gamma); \gamma \text{ é uma curva diferenciável que passa por } \gamma(t_0) = p \text{ e } \gamma(t_1) = q\}$. A distância hiperbólica entre p e q é dada por

$$d_{\mathbb{H}_S^2}(p, q) = \inf \mathcal{L}(p, q).$$

Pela proposição 3.5, temos que $\mathcal{L}(p, q)$ possui elemento mínimo (dado pelo comprimento hiperbólico da geodésica de p a q), ou seja, o ínfimo pertence a $\mathcal{L}(p, q)$. Dessa forma,

$$d_{\mathbb{H}_S^2}(p, q) = \ell_{t_0}^{t_1}(\gamma),$$

sendo γ a geodésica que passa por $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma(t_1) = q$.

Quando não houver possibilidade de confusão, escreveremos apenas $d(p, q)$ ao invés de $d_{\mathbb{H}_S^2}(p, q)$.

PROPOSIÇÃO 3.6: $(\mathbb{R}_+^2, d_{\mathbb{H}_S^2})$ é um espaço métrico.

PROVA. Sejam $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}_+^2$ e $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ a geodésica que passa por p_1 e p_3 dada por $\gamma(t) = (x_\gamma(t), y_\gamma(t))$ tal que $\gamma(t_0) = p_1$ e $\gamma(t_1) = p_3$.

(i) Assim,

$$\begin{aligned} d(p_1, p_3) &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{|\gamma'(t)|}{y_\gamma(t)} dt \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Note que,

$$d(p_1, p_3) = 0 \Leftrightarrow p_1 = p_3.$$

(ii) Considere $\delta : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ tal que $\delta(t) = \gamma((t_0 + t_1) - t)$. Temos que, $\delta(t_0) = \gamma(t_1) = p_3$ e $\delta(t_1) = \gamma(t_0) = p_1$. Agora, defina a função $h : [t_0, t_1] \rightarrow [t_0, t_1]$ tal que

$$h(t) = (t_0 + t_1) - t.$$

Perceba que, δ é mesma curva que γ , mas com orientação contrária. Então,

$$\begin{aligned} d(p_1, p_3) &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{|\gamma'(t)|}{y_\gamma(t)} dt \\ &= \int_{h(t_1)}^{h(t_0)} \frac{|\gamma'(t)|}{y_\gamma(t)} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_0} \frac{|\gamma'(h(t))|}{y_\gamma(h(t))} h'(t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{|\gamma'(h(t)) \cdot h'(t)|}{y_\gamma(h(t))} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{|\delta'(t)|}{y_\delta(t)} dt \\ &= d(p_3, p_1). \end{aligned}$$

(iii) Sejam $\delta_1, \delta_2 : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ geodésicas que passam, respectivamente, por p_1 e p_2 e por p_2 e p_3 tais que $\delta_1(t_0) = p_1$, $\delta_1(t_1) = p_2 = \delta_2(t_0)$ e $\delta_2(t_1) = p_3$ (com $0 \neq t_1 \neq 2t_0$). Considere $\delta : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ tal que

$$\delta(t) = \begin{cases} \delta_1\left(\frac{2(t_1 - t_0)}{t_1 - 2t_0}t - \frac{t_0 t_1}{t_1 - 2t_0}\right) & , \text{ se } t_0 \leq t \leq \frac{t_1}{2} \\ \delta_2\left(\frac{2(t_1 - t_0)}{t_1}t + (2t_0 - t_1)\right) & , \text{ se } \frac{t_1}{2} \leq t \leq t_1 \end{cases}.$$

Note que, $\delta(t_0) = \delta_1(t_0) = p_1$, $\delta(t_1) = \delta_2(t_1) = p_3$ e $\ell_{t_0}^{t_1}(\delta) = \ell_{t_0}^{t_1}(\delta_1) + \ell_{t_0}^{t_1}(\delta_2)$. Temos que,

$$\begin{aligned} d(p_1, p_3) &= \ell_{t_0}^{t_1}(\gamma) \\ &\leq \ell_{t_0}^{t_1}(\delta) \\ &= \ell_{t_0}^{t_1}(\delta_1) + \ell_{t_0}^{t_1}(\delta_2) \\ &= d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3). \end{aligned}$$

□

DEFINIÇÃO 3.10: Sejam p e q pontos hiperbólicos distintos. Chamamos de segmento hiperbólico pq a geodésica de p a q .

PROPOSIÇÃO 3.7: Sejam $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}_+^2$. Então, $d(p_1, p_3) = d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3)$ se, e somente se, p_2 pertence ao segmento hiperbólico $p_1 p_3$.

A prova desta proposição pode ser encontrada em [6].

TEOREMA 3.1: Seja $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ uma geodésica de $\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^2$. Então, ou γ é uma semirreta vertical ou γ é uma semicircunferência com centro sobre o eixo dos infinitos.

PROVA. Sejam $p, q \in \gamma(I)$. Temos dois casos:

(i) se p e q têm mesma abscissa.

Então, γ está sobre uma semirreta vertical, pelas proposições 3.6 e 3.7. Segue que γ é uma semirreta vertical.

(ii) se p e q não têm mesma abscissa.

Então, pela proposição 3.5, existe uma semicircunferência com centro no eixo dos infinitos que passa por p e q . Assim, pelas proposições 3.6 e 3.7, γ está sobre esta semicircunferência. Logo, γ é uma semicircunferência com centro no eixo dos infinitos.

□

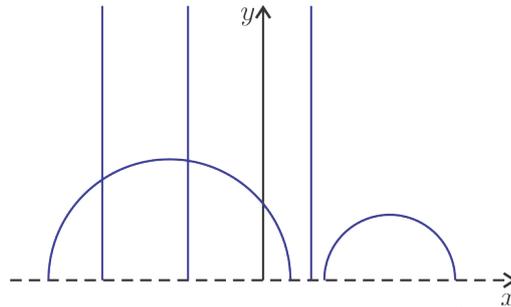


FIGURA 3.22. Geodésicas de $\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^2$.

COROLÁRIO 3.2: *Sejam $p, q \in \mathbb{R}_+^2$. Existe uma única geodésica que passa por p e q .*

OBSERVAÇÃO 3.3: Na prova do corolário 3.1 mostramos que existe uma reflexão que leva uma semicircunferência em uma semirreta vertical. Na verdade, temos mais do que isso, existe uma reflexão que leva uma geodésica em uma dada semirreta vertical. De fato, se a geodésica é uma:

(i) semirreta vertical $\{(\alpha, y) \in \mathbb{R}_+^2; \alpha \text{ é fixo}\}$ e a semirreta vertical dada é $\{(x_0, y) \in \mathbb{R}_+^2; x_0 \text{ é fixo}\}$, basta tomar a reflexão sobre $l = \left\{ \left(\frac{1}{2}(x_0 + \alpha), y \right) \in \mathbb{R}_+^2 \right\}$, ou seja, $r_l(x, y) = (-x + (x_0 + \alpha), y)$.

(ii) semicircunferência $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2; (x - \alpha)^2 + y^2 = R^2\}$ e a semirreta vertical dada é $\{(x_0, y) \in \mathbb{R}_+^2; x_0 \text{ é fixo}\}$, basta tomar a reflexão sobre a semicircunferência $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - a)^2 + y^2 = r^2\}$ onde:

- $a = \alpha - R$, se $x_0 > \alpha - R$.

Com isso, $r = \sqrt{2R[x_0 - (\alpha - R)]} > 0$.

- $a = \alpha + R$, se $x_0 \leq \alpha - R$.

Assim, $r = \sqrt{2R[(\alpha + R) - x_0]} > 0$.

3.2.3 Isometrias de \mathbb{H}_S^2

Representaremos o conjunto formado por todas as isometrias de \mathbb{H}_S^2 por $\text{Isom}(\mathbb{H}_S^2)$.

DEFINIÇÃO 3.11: $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C}; \text{Im } z > 0\}$.

Utilizaremos \mathbb{C}_+ ao invés de \mathbb{R}_+^2 quando tratarmos as aplicações de \mathbb{R}_+^2 como funções complexas.

DEFINIÇÃO 3.12: $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (*esfera de Riemann*).

DEFINIÇÃO 3.13: Dizemos que $T : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ é uma transformação de Möbius, se $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ tal que $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $ad - bc \neq 0$.

DEFINIÇÃO 3.14: $\text{MÖB}(\mathbb{H}_S^2) = \left\{ T : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}_+; T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } ad - bc = 1 \right\}$.

Note que, a transformação $T : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}_+$ tal que $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc = 1$ está bem definida. Seja $z = x + yi \in \mathbb{C}_+$. Então,

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{(ax + b)(cx + d) + acy^2}{(cx + d)^2 + c^2y^2} + \frac{y}{(cx + d)^2 + c^2y^2}i \in \mathbb{C}_+.$$

PROPOSIÇÃO 3.8: $(\text{MÖB}(\mathbb{H}_S^2), \circ)$ é um grupo.

PROVA. Basta verificar a definição 1.1.

(i) Sejam $T_1, T_2 \in \text{MÖB}(\mathbb{H}_S^2)$ tais que $T_1(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}$ e $T_2(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}$. Assim,

$$T_1(T_2(z)) = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + d_1c_2)z + (c_1b_2 + d_1d_2)},$$

onde

$$\begin{aligned} & (a_1a_2 + b_1c_2) \cdot (c_1b_2 + d_1d_2) - (a_1b_2 + b_1d_2) \cdot (c_1a_2 + d_1c_2) \\ &= (a_1d_1 - b_1c_1) \cdot (a_2d_2 - b_2c_2) \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Então, $T_1 \circ T_2 \in \text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2)$.

(ii) Sejam $T_1, T_2, T_3 \in \text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2)$ tais que $T_i(z) = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}$, onde $i = 1, 2, 3$. Temos que,

$$\begin{aligned} & (T_1 \circ T_2)(T_3(z)) \\ &= \frac{[(a_1a_2 + b_1c_2)a_3 + (a_1b_2 + b_1d_2)c_3]z + [(a_1a_2 + b_1c_2)b_3 + (a_1b_2 + b_1d_2)d_3]}{[(c_1a_2 + d_1c_2)a_3 + (c_1b_2 + d_1d_2)c_3]z + [(c_1a_2 + d_1c_2)b_3 + (c_1b_2 + d_1d_2)d_3]} \\ &= \frac{[a_1(a_2a_3 + b_2c_3) + b_1(c_2a_3 + d_2c_3)]z + [a_1(a_2b_3 + b_2d_3) + b_1(c_2b_3 + d_2d_3)]}{[c_1(a_2a_3 + b_2c_3) + d_1(c_2a_3 + d_2c_3)]z + [c_1(a_2b_3 + b_2d_3) + d_1(c_2b_3 + d_2d_3)]} \\ &= T_1((T_2 \circ T_3)(z)). \end{aligned}$$

(iii) Sejam $T, T_1 \in \text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2)$ tais que $T(z) = z$ e $T_1(z) = \frac{az + b}{cz + d}$. Como $T(T_1(z)) = \frac{az + b}{cz + d} = T_1(z)$ e $T_1(T(z)) = T_1(z)$, então $T(z) = z$ é o elemento identidade de $(\text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2), \circ)$.

(iv) Seja $T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \in \text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2)$. Temos que, T é:

• injetora. De fato, sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_+$ tais que

$$\begin{aligned} & T(z_1) = T(z_2) \\ &\Rightarrow \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} \\ &\Rightarrow (ad - bc)z_1 = (ad - bc)z_2 \\ &\Rightarrow z_1 = z_2. \end{aligned}$$

• sobrejetora. Seja $w \in \mathbb{C}_+$. Façamos $T(z) = w$, então $(-cw + a)z = dw - b$. Note que, $-cw + a \neq 0$, pois se $-cw + a = 0$, temos dois casos.

(a) $c = 0$:

Assim, $a = 0$ e, conseqüentemente, $ad - bc = 0$ (absurdo!).

(b) $c \neq 0$:

Logo, $w = \frac{a}{c} \in \mathbb{R} \not\subset \mathbb{C}_+$ (absurdo!).

Donde vem que, $z = \frac{dw - b}{-cw + a}$. Considere $w = x + yi$, com $y > 0$. Então,

$$\begin{aligned}
z &= \frac{(dx - b)(-cx + a) - cdy^2}{(-cx + a)^2 + c^2y^2} + \frac{(ad - bc)y}{(-cx + a)^2 + c^2y^2}i \\
&= \frac{(dx - b)(-cx + a) - cdy^2}{(-cx + a)^2 + c^2y^2} + \frac{y}{(-cx + a)^2 + c^2y^2}i \in \mathbb{C}_+.
\end{aligned}$$

Assim, T admite inversa T^{-1} . Perceba que, $T^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a} \in \text{MÖB}(\mathbb{H}_S^2)$, pois $T(T^{-1}(z)) = z = T^{-1}(T(z))$ e $da - (-b)(-c) = ad - bc = 1$. \square

PROPOSIÇÃO 3.9: $\text{MÖB}(\mathbb{H}_S^2) \subset \text{Isom}(\mathbb{H}_S^2)$.

PROVA. Seja $T : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}_+$ tal que $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc = 1$. Perceba que, pelo item (iv) da prova da proposição 3.8, $cz + d \neq 0$. Assim, $T'(z) = \frac{1}{(cz + d)^2}$, ou seja, T é diferenciável. Ainda pelo item (iv) da prova da proposição 3.8, temos que T é bijetora e sua inversa é diferenciável. Logo, T é um difeomorfismo. Dessa forma $dT_z : T_z\mathbb{R}_+^2 \rightarrow T_{T(z)}\mathbb{R}_+^2$ é um isomorfismo. Sejam $r, s \in T_{T(z)}\mathbb{R}_+^2$, então $\exists u, v \in T_z\mathbb{R}_+^2$ tais que $r = dT_z \cdot u$ e $s = dT_z \cdot v$ com $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$. Considere $z = x + yi \in \mathbb{C}_+$ e $T(z) = m(x, y) + n(x, y)i = m + ni$. Portanto,

$$\begin{aligned}
g_{T(z)}^{\mathbb{R}_+^2}(r, s) &= g_{T(z)}^{\mathbb{R}_+^2}(dT_z \cdot u, dT_z \cdot v) \\
&= \frac{1}{[\text{Im } T(z)]^2} \langle dT_z \cdot u, dT_z \cdot v \rangle \\
&= -\frac{4}{[T(z) - \bar{T}(z)]^2} \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial m}{\partial x} & \frac{\partial m}{\partial y} \\ \frac{\partial n}{\partial x} & \frac{\partial n}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial m}{\partial x} & \frac{\partial m}{\partial y} \\ \frac{\partial n}{\partial x} & \frac{\partial n}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= -\frac{4}{[T(z) - \bar{T}(z)]^2} \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial m}{\partial x} & -\frac{\partial n}{\partial x} \\ \frac{\partial n}{\partial x} & \frac{\partial m}{\partial x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial m}{\partial x} & -\frac{\partial n}{\partial x} \\ \frac{\partial n}{\partial x} & \frac{\partial m}{\partial x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= -\frac{4}{[T(z) - \bar{T}(z)]^2} \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial m}{\partial x}u_1 - \frac{\partial n}{\partial x}u_2 \\ \frac{\partial n}{\partial x}u_1 + \frac{\partial m}{\partial x}u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial m}{\partial x}v_1 - \frac{\partial n}{\partial x}v_2 \\ \frac{\partial n}{\partial x}v_1 + \frac{\partial m}{\partial x}v_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= -\frac{4}{[T(z) - \bar{T}(z)]^2} \left[\left(\frac{\partial m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)^2 \right] \langle u, v \rangle \\
&= -\frac{4}{[T(z) - \bar{T}(z)]^2} \left| \frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial x}i \right|^2 \langle u, v \rangle \\
&= -\frac{4}{[T(z) - \bar{T}(z)]^2} |T'(z)|^2 \langle u, v \rangle \\
&= -\frac{4(cz + d)^2(c\bar{z} + d)^2}{(z - \bar{z})^2} \cdot \frac{1}{(cz + d)^2(c\bar{z} + d)^2} \langle u, v \rangle \\
&= -\frac{4}{(z - \bar{z})^2} \langle u, v \rangle \\
&= \frac{1}{(\text{Im } z)^2} \langle u, v \rangle
\end{aligned}$$

$$= g_z^{\mathbb{R}^2_+}(u, v).$$

□

PROPOSIÇÃO 3.10: *Toda isometria de $\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2$ leva geodésicas de $\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2$ em geodésicas de $\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2$.*

PROVA. Sejam $p, q \in \mathbb{R}_+^2$ e α a geodésica que passa por estes pontos tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$. Agora, considere $f \in \text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2)$. Temos que, a curva $\beta = f \circ \alpha$ é a geodésica que passa por $f(p)$ e $f(q)$. De fato, do contrário existiria uma curva φ que seria a geodésica que passa por $f(p)$ e $f(q)$ tal que $\varphi(0) = f(p)$ e $\varphi(1) = f(q)$. Assim,

$$\ell_0^1(f^{-1} \circ \varphi) = \ell_0^1(\varphi) < \ell_0^1(\beta) = \ell_0^1(\alpha).$$

Dessa forma, α não é a geodésica que passa por p e q (absurdo!).

□

COROLÁRIO 3.3: *Todo elemento de $\text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2)$ leva geodésicas de $\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2$ em geodésicas de $\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2$.*

PROPOSIÇÃO 3.11: *$(\text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2), \circ)$ atua transitivamente sobre \mathbb{C}_+ .*

PROVA. Sejam $T \in \text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2)$ e $\text{BIJ}(\mathbb{C}_+) = \{f : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}_+; f \text{ é uma bijeção}\}$. Note que, $T \in \text{BIJ}(\mathbb{C}_+)$. Agora, defina a função $\varphi : \text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2) \rightarrow \text{BIJ}(\mathbb{C}_+)$ tal que $\varphi(T) = T, \forall T \in \text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2)$. Assim, $\varphi(T \circ G) = T \circ G = \varphi(T) \circ \varphi(G), \forall T, G \in \text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2)$, ou seja, φ é um homomorfismo de grupos. Dessa forma, $(\text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2), \circ)$ atua sobre \mathbb{C}_+ . Considere $u = a + bi$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}_+^*$, e

$$T(z) = \frac{\frac{1}{\sqrt{b}}z - \frac{a}{\sqrt{b}}}{\sqrt{b}} \in \text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2).$$

Temos que, $T(u) = i$. Logo, pelo lema 1.1, $(\text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2), \circ)$ atua transitivamente sobre \mathbb{C}_+ .

□

DEFINIÇÃO 3.15: *Sejam u e v dois vetores no ponto $z \in \mathbb{C}_+$ e θ o ângulo formado por eles. Então,*

$$\cos \theta = \frac{g_z^{\mathbb{R}^2_+}(u, v)}{\left[g_z^{\mathbb{R}^2_+}(u, u) \cdot g_z^{\mathbb{R}^2_+}(v, v) \right]^{\frac{1}{2}}}, \text{ com } \theta \in [0, \pi].$$

Da identidade acima, temos que,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\frac{1}{(\text{Im } z)^2} \langle u, v \rangle}{\left[\frac{1}{(\text{Im } z)^2} \|u\|^2 \cdot \frac{1}{(\text{Im } z)^2} \|v\|^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}. \end{aligned}$$

Assim, a definição de ângulo entre dois vetores coincide com a definição euclidiana. Perceba que, toda isometria hiperbólica preserva ângulo entre curvas.

PROPOSIÇÃO 3.12: $(\text{MÖB}(\mathbb{H}_S^2), \circ)$ atua transitivamente sobre o conjunto formado pelas geodésicas de \mathbb{H}_S^2 .

PROVA. Seja G o conjunto formado pelas geodésicas de \mathbb{H}_S^2 . Considere $T \in \text{MÖB}(\mathbb{H}_S^2)$ e $\text{BIJ}(G) = \{f : G \rightarrow G; f \text{ é uma bijeção}\}$. Pelo corolário 3.3, temos que $T \in \text{BIJ}(G)$. Defina a função $\varphi : \text{MÖB}(\mathbb{H}_S^2) \rightarrow \text{BIJ}(G)$ tal que $\varphi(T) = T, \forall T \in \text{MÖB}(\mathbb{H}_S^2)$. Então, $\varphi(T \circ W) = T \circ W = \varphi(T) \circ \varphi(W), \forall T, W \in \text{MÖB}(\mathbb{H}_S^2)$, ou seja, φ é um homomorfismo de grupos. Assim, $(\text{MÖB}(\mathbb{H}_S^2), \circ)$ atua sobre G . Sejam $\rho \in G$ e $z \in \rho$. Pela proposição 3.11, existe $T \in \text{MÖB}(\mathbb{H}_S^2)$ tal que $T(z) = i$. Agora, seja θ o ângulo entre as geodésicas $l = \{yi; y \in \mathbb{R}_+^*\}$ e $T(\rho)$ em i . Considere a transformação

$$W_\theta(z) = \frac{(\cos \frac{\theta}{2})z - \sin \frac{\theta}{2}}{(\sin \frac{\theta}{2})z + \cos \frac{\theta}{2}} \in \text{MÖB}(\mathbb{H}_S^2).$$

Temos que,

$$\begin{aligned} W_\theta(i) &= \frac{(\cos \frac{\theta}{2})i - \sin \frac{\theta}{2}}{(\sin \frac{\theta}{2})i + \cos \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \sin \theta + \left(\cos^2 \frac{\theta}{2}\right)i + \left(\sin^2 \frac{\theta}{2}\right)i - \frac{1}{2} \sin \theta \\ &= i, \end{aligned}$$

ou seja, W_θ fixa i . Como

$$W_\theta(l) = \left\{ \frac{(y^2 - 1) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + yi}{y^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}}; y \in \mathbb{R}_+^* \right\},$$

então, o vetor tangente a geodésica $W_\theta(l)$ em i é

$$W'_\theta(l) = \sin \theta + i \cos \theta \equiv (\sin \theta, \cos \theta).$$

Temos que, $i \equiv (0, 1)$ é o vetor tangente a l em i . Seja ψ o ângulo entre l e $W_\theta(l)$. Assim,

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \frac{\langle (0, 1), (\sin \theta, \cos \theta) \rangle}{\|(0, 1)\| \cdot \|(\sin \theta, \cos \theta)\|} \\ &= \cos \theta, \end{aligned}$$

isto é, $\psi = \theta$. Dessa forma, ou

(i) $W_\theta(l) = T(\rho) \Rightarrow l = W_\theta^{-1}(T(\rho))$, ou

(ii) $M(W_\theta(l)) = T(\rho) \Rightarrow l = W_\theta^{-1}(M^{-1}(T(\rho)))$, onde $M(z) = -\bar{z}$.

Como $W_\theta^{-1} \circ T, W_\theta^{-1} \circ M^{-1} \circ T \in \text{MÖB}(\mathbb{H}_S^2)$, então, pelo lema 1.1, $(\text{MÖB}(\mathbb{H}_S^2), \circ)$ atua transitivamente sobre G . □

Uma geodésica ρ de $\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2$ divide \mathbb{R}_+^2 em duas regiões, que são chamadas de *semiplanos*. A geodésica ρ é chamada de *fronteira* destes dois semiplanos. Dizemos que o semiplano é aberto se o semiplano não contém a geodésica ρ . Do contrário, o semiplano é fechado. Representaremos o semiplano aberto determinado pela geodésica ρ por \sum_{ρ}^1 ou \sum_{ρ}^2 . Assim,

$$\sum_{\rho}^1 \cap \sum_{\rho}^2 = \emptyset \text{ e } \sum_{\rho}^1 \cup \rho \cup \sum_{\rho}^2 = \mathbb{R}_+^2.$$

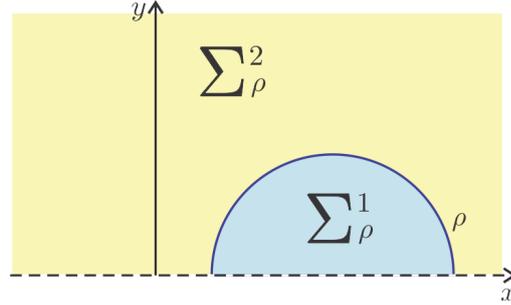


FIGURA 3.23. Semiplanos \sum_{ρ}^1 e \sum_{ρ}^2 .

PROPOSIÇÃO 3.13: $(\text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2), \circ)$ atua transitivamente sobre o conjunto formado pelos semiplanos abertos de $\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2$.

PROVA. Seja S o conjunto formado pelos semiplanos abertos de $\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2$. Considere $T \in \text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2)$, $\text{BIJ}(S) = \{f : S \rightarrow S; f \text{ é uma bijeção}\}$ e ρ uma geodésica de $\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2$. Temos que,

$$\begin{aligned} & \sum_{\rho}^1 \cup \rho \cup \sum_{\rho}^2 = \mathbb{R}_+^2 \\ \Rightarrow & T\left(\sum_{\rho}^1 \cup \rho \cup \sum_{\rho}^2\right) = T\left(\mathbb{R}_+^2\right) \\ \Rightarrow & T\left(\sum_{\rho}^1\right) \cup T(\rho) \cup T\left(\sum_{\rho}^2\right) = \mathbb{R}_+^2 \\ \stackrel{(1)}{\Rightarrow} & T\left(\sum_{\rho}^1\right) \cup T\left(\sum_{\rho}^2\right) = \mathbb{R}_+^2 - T(\rho). \end{aligned}$$

(1) vale, pois $\sum_{\rho}^1 \cap \rho \cap \sum_{\rho}^2 = \emptyset$, T é bijeção e, conseqüentemente, $T\left(\sum_{\rho}^1\right) \cap T(\rho) \cap T\left(\sum_{\rho}^2\right) = \emptyset$. Lembre-se que $T(\rho)$ é uma geodésica de $\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2$. Suponha que, $A, B \in \sum_{\rho}^1$ tal que $A \neq B$, $T(A) \in \sum_{T(\rho)}^1$ e $T(B) \in \sum_{T(\rho)}^2$. Sendo π a geodésica de $\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2$ que passa por $T(A)$ e $T(B)$, então $\pi \cap T(\rho) \neq \emptyset$. Digamos que $D \in \pi \cap T(\rho)$ tal que $T^{-1}(D) = C$. Assim, $T^{-1} \circ \pi$ é a geodésica de $\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2$ que passa por A, B e C . Como B está entre A e C , então $d(A, C) > d(A, B)$. Isto implica que $d(T(A), T(C)) > d(T(A), T(B))$, absurdo!, pois $T(C) = D$ está entre $T(A)$ e $T(B)$. Logo, $T\left(\sum_{\rho}^1\right)$ e $T\left(\sum_{\rho}^2\right)$ são semiplanos abertos determinados pela geodésica $T(\rho)$. Agora, defina $T : S \rightarrow S$. Se $\sum_{\omega}^1 \neq \sum_{\lambda}^1$, então existe $x_0 \in \sum_{\omega}^1$ tal que $x_0 \neq y, \forall y \in \sum_{\lambda}^1$. Dessa forma, $T\left(\sum_{\omega}^1\right) \ni T(x_0) \neq T(y) \in T\left(\sum_{\lambda}^1\right)$ para todo $y \in \sum_{\lambda}^1$, ou seja, $T\left(\sum_{\omega}^1\right) \neq T\left(\sum_{\lambda}^1\right)$ e, conseqüentemente, T é injetora. Seja $\sum_{\lambda}^1 \in S$. Façamos

$$\begin{aligned}
T(X) &= \sum_{\lambda}^1 \\
\Rightarrow T^{-1}(T(X)) &= T^{-1}\left(\sum_{\lambda}^1\right) \\
\Rightarrow X &= T^{-1}\left(\sum_{\lambda}^1\right) \in S,
\end{aligned}$$

T é sobrejetora. Com isso, $T \in \text{BIJ}(S)$. Considere a função $\varphi : \text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2) \rightarrow \text{BIJ}(S)$ tal que $\varphi(T) = T, \forall T \in \text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2)$. Temos que, $\varphi(T \circ W) = T \circ W = \varphi(T) \circ \varphi(W), \forall T, W \in \text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2)$. Assim, φ é um homomorfismo de grupos, ou seja, $(\text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2), \circ)$ atua sobre S . Sejam $\alpha = \{yi; y \in \mathbb{R}_+^*\}, \sum_{\alpha}^1 = \{z \in \mathbb{C}_+; \text{Re } z > 0\} \in S$ e δ uma geodésica de $\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2$. Temos que, existe uma $T \in \text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2)$ tal que $T(\delta) = \alpha$ (pela proposição 3.12). Dessa forma, ou $T\left(\sum_{\delta}^1\right) = \sum_{\alpha}^1$ ou $M\left(T\left(\sum_{\delta}^1\right)\right) = \sum_{\alpha}^1$, onde $M(z) = -\bar{z}$. Portanto, pelo lema 1.1, $(\text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2), \circ)$ atua transitivamente sobre S . \square

PROPOSIÇÃO 3.14: *Sejam $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}_+$ tais que os pares (z_1, z_2) e (w_1, w_2) são distintos. Existe $T \in \text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2)$ tal que $T(z_i) = w_i$ para $i = 1, 2$ se, e somente se, $d(z_1, z_2) = d(w_1, w_2)$.*

PROVA. (\Rightarrow) Seja α a geodésica que passa por z_1 e z_2 tal que $\alpha(t_1) = z_1$ e $\alpha(t_2) = z_2$. Assim, $\beta = T \circ \alpha$ é a geodésica que passa pelos pontos w_1 e w_2 . Portanto,

$$\begin{aligned}
d(z_1, z_2) &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\alpha(t)}^{\mathbb{R}_+^2}(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{T(\alpha(t))}^{\mathbb{R}_+^2}(dT_{\alpha(t)} \cdot \alpha'(t), dT_{\alpha(t)} \cdot \alpha'(t))} dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\beta(t)}^{\mathbb{R}_+^2}(\beta'(t), \beta'(t))} dt \\
&= d(w_1, w_2).
\end{aligned}$$

(\Leftarrow) Seja $l = \{yi; y \in \mathbb{R}_+^*\}$. Pela proposição 3.12, temos que existe $E \in \text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2)$ tal que $E(\alpha) = l$ com $E(z_1) = i$. Assim, $E(z_2)$ é igual a $e^{d(z_1, z_2)}i$ ou $e^{-d(z_1, z_2)}i$. Como $W_{\pi}(e^{-d(z_1, z_2)}i) = e^{d(z_1, z_2)}i$ e W_{π} fixa i , então sempre podemos escolher $F \in \text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2)$ tal que $F(z_1) = i$ e $F(z_2) = e^{d(z_1, z_2)}i$. Dessa forma, tome $G \in \text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2)$ tal que $G(w_1) = i$ e $G(w_2) = e^{d(w_1, w_2)}i$. Temos que, $F(z_1) = G(w_1) = i$ e, como $d(z_1, z_2) = d(w_1, w_2)$, $F(z_2) = e^{d(z_1, z_2)}i = e^{d(w_1, w_2)}i = G(w_2)$. Logo, para $T = G^{-1} \circ F \in \text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2)$ tem-se $T(z_1) = G^{-1}(F(z_1)) = G^{-1}(i) = w_1$ e $T(z_2) = G^{-1}(F(z_2)) = G^{-1}(e^{d(w_1, w_2)}i) = w_2$. \square

DEFINIÇÃO 3.16: *Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_+$. A mediatriz do segmento hiperbólico z_1z_2 é o lugar geométrico dado pelo conjunto $\{z \in \mathbb{C}_+; d(z_1, z) = d(z_2, z)\}$.*

PROPOSIÇÃO 3.15: *Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_+$ e γ a geodésica que passa por estes pontos. Então, a mediatriz do segmento hiperbólico z_1z_2 é a única geodésica ortogonal a γ .*

A prova desta proposição pode ser encontrada em [16].

TEOREMA 3.2: $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2) = \text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2)$.

PROVA. A inclusão $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2) \supset \text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2)$ já foi provada na proposição 3.9. Vamos mostrar a outra inclusão, ou seja, que $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2) \subset \text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2)$. Seja $f \in \text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2)$. Agora, considere $z_1, z_2 \in \alpha = \{yi; y \in \mathbb{R}_+^*\}$. Temos que, pela proposição 3.14, existe $T \in \text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2)$ tal que $T(f(z_1)) = z_1$ e $T(f(z_2)) = z_2$. Seja $z \in \alpha$. Note que, as distâncias hiperbólicas $d(z_1, z)$ e $d(z, z_2)$ determinam, unicamente, z . Como $T \circ f$ é uma isometria, então $d(z_1, z) = d(T(f(z_1)), T(f(z))) = d(z_1, T(f(z)))$ e $d(z, z_2) = d(T(f(z)), T(f(z_2))) = d(T(f(z)), z_2)$ implicam que $T(f(z)) = z$, ou seja, $T \circ f$ fixa todo elemento de α . Tome $w \in \mathbb{C}_+ \setminus \alpha$. Seja ρ a geodésica que passa por w e é ortogonal a α (semicircunferência de centro $z_0 = 0$ e raio $|w|$). Considere que ρ é a mediatriz de um segmento hiperbólico pq tal que $p, q \in \alpha$. Como $T(f(p)) = p$ e $T(f(q)) = q$, então, pelo corolário 3.2, $T(f(p))T(f(q)) \equiv pq$. Temos que, $T(f(\rho))$ é mediatriz do segmento $T(f(p))T(f(q))$. Dessa forma, $T(f(\rho))$, também, é mediatriz do segmento pq . Assim, $T(f(\rho)) \equiv \rho$. Sendo $z \in \alpha \cap \rho$, então $d(z, w) = d(T(f(z)), T(f(w))) = d(z, T(f(w)))$. Se $T \circ f$ preserva os semiplanos abertos determinados por α , então $T(f(w)) = w$. Portanto, $T \circ f$ é a identidade e, conseqüentemente, $f = T^{-1} \in \text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2)$. Em caso contrário, basta tomar $G \circ T \circ f$, onde $G(z) = -\bar{z}$. Com isso, $f = T^{-1} \circ G^{-1} \in \text{MÖB}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2)$. \square

COROLÁRIO 3.4: $(\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2), \circ)$ atua transitivamente sobre \mathbb{C}_+ .

COROLÁRIO 3.5: Toda isometria de $\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2$ é determinada por três pontos de \mathbb{C}_+ .

PROVA. Note que, se $T(z) = z \in \text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2)$, então T tem infinitos pontos fixos. Agora, considere $T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \in \mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2$, onde T não é a identidade. Façamos $T(p) = p \in \mathbb{C}_+$, então $cp^2 + (d - a)p - b = 0$. Isto é, T possui no máximo dois pontos fixos. Sejam z_1, z_2 e z_3 três pontos distintos de \mathbb{C}_+ tal que $T(z_1) = u_1, T(z_2) = u_2$ e $T(z_3) = u_3$, onde $u_1 \neq u_2 \neq u_3$. Suponha que existe $S \in \text{H}_{\mathbb{S}}^2$ tal que $S(z_i) = u_i$, para $i = 1, 2$ e 3 . Daí vem que, $S^{-1}(T(z_i)) = z_i$, para $i = 1, 2$ e 3 . Dessa forma, $S^{-1} \circ T \in \text{H}_{\mathbb{S}}^2$ tem pelo menos três pontos fixos. Com isso, $S^{-1}(T(z)) = z, \forall z \in \mathbb{C}_+$, ou seja, $S = T$. Logo, três pontos determinam uma isometria de $\mathbb{H}_{\mathbb{S}}^2$. \square

Conclusão

Vimos que as geometrias não euclidianas (a geometria hiperbólica e a geometria esférica) levaram cerca de 2.000 anos até que fossem descobertas. E estas descobertas só foram possíveis por que os matemáticos suspeitaram que o 5º postulado de Euclides poderia ser obtido a partir dos quatro primeiros postulados (mais tarde, provou-se que isso não é possível). A partir daí, os matemáticos começaram a trabalhar em cima desta suspeita, o que possibilitou, mais tarde, uma maior clareza da ideia de geometria, isto é, para se ter uma geometria não era necessário que 5º postulado de Euclides fosse válido nela. Este processo histórico, além de ser interessante, nos motiva, sempre, a buscarmos o entendimento do objeto que estamos estudando ao invés de, simplesmente, aceitarmos determinadas afirmações sobre este objeto como sendo verdades absolutas.

A tabela, abaixo, apresenta uma comparação entre as geometrias esférica e hiperbólica de acordo com os capítulos 2 e 3.

	Geometria Esférica	Geometria Hiperbólica
<i>Espaço</i>	\mathbb{S}^2	\mathbb{H}_+^2 ou \mathbb{D}^2 ou \mathbb{R}_+^2
<i>Métrica</i>	$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 \sin^2 \phi_0$	$\langle w_1, w_2 \rangle_{\mathcal{M}}$ em $\mathbb{H}_{\mathcal{M}}^2$ ou $\frac{4}{[1 - (u^2 + v^2)]^2} \langle w_1, w_2 \rangle$ em $\mathbb{H}_{\mathcal{D}}^2$ ou $\frac{1}{y^2} \langle w_1, w_2 \rangle$ em $\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^2$
<i>Geodésicas</i>	Circunferências máximas	Semirretas verticais e semicircunferências com centro no eixo- x em $\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^2$
<i>Isometrias</i>	O_3	MÖB($\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^2$)

TABELA 1.

Este trabalho foi bastante positivo, pois através dele pude conhecer outros tipos de geometrias (geometrias não euclidianas: as geometrias esférica e hiperbólica), compreender a importância dos postulados de Euclides para a geometria (euclidiana e não euclidiana) e entender (melhor) os conceitos de métrica, geodésica e isometria que estão presentes nas geometrias.

Apêndice A

Relações Métricas Hiperbólicas

Neste apêndice, apresentaremos (com as demonstrações) alguns resultados importantes referentes as relações métricas hiperbólicas tais como: a fórmula da distância hiperbólica de dois pontos de \mathbb{C}_+ , as versões do teorema de Pitágoras, leis dos senos e dos cossenos para a geometria hiperbólica e a área de um triângulo hiperbólico. Além disso, determinaremos o comprimento de uma circunferência hiperbólica, veremos que triângulos hiperbólicos semelhantes são congruentes e que a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é menor do que 180° .

A.1 Distância Hiperbólica em $\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^2$

Na subseção 3.2.2, através da definição 3.9, definimos a distância hiperbólica em $\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^2$ entre dois pontos de \mathbb{C}_+ de tal forma que para determinar esta distância é necessário encontrar a geodésica (semirreta vertical ou semicircunferência com centro no eixo- x) que passa por estes dois pontos e, em seguida, calcular o comprimento desta geodésica entre estes pontos. Nesta seção, vamos encontrar a expressão que fornece o valor desta distância sendo conhecido apenas os dois pontos do semiplano superior. Além disso, definiremos a circunferência na geometria hiperbólica em $\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^2$ e determinaremos o seu comprimento hiperbólico.

LEMA A.1: *Sejam $z, w \in \mathbb{C}_+$ e $f : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}_+$ uma isometria de $\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^2$. Então,*

$$\frac{|f(z) - f(w)|}{\sqrt{\operatorname{Im}(f(z)) \cdot \operatorname{Im}(f(w))}} = \frac{|z - w|}{\sqrt{\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w}}.$$

PROVA. Sejam $z = x + yi$, com $y > 0$, e $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ tal que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc = 1$. Temos que,

$$\begin{aligned}
f(z) - f(w) &= \frac{az + b}{cz + d} - \frac{aw + b}{cw + d} \\
&= \frac{acz w + adz + bcw + bd - acz w - bcz - adw - bd}{(cz + d)(cw + d)} \\
&= \frac{(ad - bc)(z - w)}{(cz + d)(cw + d)} \\
&= \frac{(z - w)}{(cz + d)(cw + d)}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(f(z)) &= \operatorname{Im}\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{(ax + b) + ayi}{(cx + d) + cyi}\right) \\
&= -\frac{(ax + b)cy - (cx + d)ay}{(cx + d)^2 + (cy)^2} \\
&= -\frac{acxy + bcy - acxy - ady}{|(cx + d) + cyi|^2} \\
&= \frac{(ad - bc)y}{|cz + d|^2} \\
&= \frac{\operatorname{Im} z}{|cz + d|^2}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{|f(z) - f(w)|}{\sqrt{\operatorname{Im}(f(z)) \cdot \operatorname{Im}(f(w))}} &= \frac{\frac{|z - w|}{|cz + d| \cdot |cw + d|}}{\sqrt{\frac{\operatorname{Im} z}{|cz + d|^2} \cdot \frac{\operatorname{Im} w}{|cw + d|^2}}} \\
&= \frac{|z - w|}{\sqrt{\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w}}.
\end{aligned}$$

□

PROPOSIÇÃO A.1: *Sejam $z, w \in \mathbb{C}_+$. Então,*

$$d(z, w) = \ln \left(\frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right).$$

PROVA. Suponha que $z = yi$ e $w = bi$, onde $0 < y < b$. Como z e w estão sobre a geodésica $l = \{(0, t) \in \mathbb{R}_+^2\}$, então $d(z, w) = \ln \frac{b}{y}$. Considere $d(z, w) = d$, então $e^d = \frac{b}{y}$ e $e^{-d} = \frac{y}{b}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\cosh d &= \frac{1}{2}(e^d + e^{-d}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{b}{y} + \frac{y}{b}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{b^2 + y^2}{by}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{1}{2} \frac{|(b-y)i|^2}{by} \\
&= 1 + \frac{1}{2} \frac{|z-w|^2}{\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w} \\
&= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{|z-w|}{\sqrt{\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w}} \right)^2.
\end{aligned}$$

Agora, considere $z, w \in \mathbb{C}_+$ e $d(z, w) = d$. Pelo teorema 3.2 e a proposição 3.12, existe uma isometria f que leva a geodésica que passa por z e w na geodésica l . Dessa forma, pelo que foi exposto anteriormente e o lema A.1, temos que

$$\begin{aligned}
\cosh d &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{|f(z) - f(w)|}{\sqrt{\operatorname{Im}(f(z)) \cdot \operatorname{Im}(f(w))}} \right)^2 \\
&= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{|z - w|}{\sqrt{\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w}} \right)^2.
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Como $\cosh d = 1 + 2 \sinh^2 \frac{d}{2}$, então

$$\sinh \frac{d}{2} = \frac{1}{2} \frac{|z - w|}{\sqrt{\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w}}.$$

Da identidade fundamental $\cosh^2 \frac{d}{2} - \sinh^2 \frac{d}{2} = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\cosh \frac{d}{2} &= \sqrt{1 + \frac{1}{4} \frac{|z - w|^2}{\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w}} \\
&= \sqrt{\frac{4 \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w + |z - w|^2}{4 \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w}} \\
&= \sqrt{\frac{|z - \bar{w}|^2}{4 \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{|z - \bar{w}|}{\sqrt{\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w}}.
\end{aligned}$$

Perceba que, $|z - \bar{w}| > 0$, pois $\operatorname{Im} z, \operatorname{Im} w > 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
\tanh \frac{d}{2} &= \frac{\sinh \frac{d}{2}}{\cosh \frac{d}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{|z - w|}{\sqrt{\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{|z - w|}{\sqrt{\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w}} \\
&= \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|}.
\end{aligned}$$

Como $\tanh \frac{d}{2} = \frac{e^d - 1}{e^d + 1}$, então

$$\begin{aligned} \frac{e^d - 1}{e^d + 1} &= \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|} \\ \Rightarrow |z - \bar{w}| e^d - |z - \bar{w}| &= |z - w| e^d + |z - w| \\ \Rightarrow (|z - \bar{w}| - |z - w|) e^d &= |z - \bar{w}| + |z - w|. \end{aligned}$$

Note que, $|z - \bar{w}| - |z - w| > 0$. De fato, sejam $z = x + yi$ e $w = a + bi$, onde $b, y > 0$. Então,

$$\begin{aligned} 4by &> 0 \\ \Rightarrow y^2 + 2by + b^2 &> y^2 - 2by + b^2 \\ \Rightarrow (x - a)^2 + (y + b)^2 &> (x - a)^2 + (y - b)^2 \\ \Rightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y + b)^2} &> \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \\ \Rightarrow |z - \bar{w}| - |z - w| &> 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$d = \ln \left(\frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right). \quad \square$$

Definiremos a seguir a circunferência na geometria hiperbólica em \mathbb{H}_S^2 :

DEFINIÇÃO A.1: *O lugar geométrico dado pelo conjunto de pontos $\{z \in \mathbb{C}_+; d(z, w) = R$, onde $w \in \mathbb{C}_+$ e $R \geq 0$ são fixos} em \mathbb{H}_S^2 é chamado de circunferência hiperbólica de centro em w e raio R .*

Agora, vamos encontrar a curva euclidiana, no semiplano superior, que satisfaz a definição de circunferência hiperbólica. Sejam $z = x + yi$, $w = a + bi \in \mathbb{C}_+$ e $R \geq 0$, onde w e R são fixos. Da proposição A.1, temos que $\tanh \frac{R}{2} = \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|}$. Chamemos $\tanh \frac{R}{2} = k$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|} &= k \\ \Rightarrow |z - w|^2 &= k^2 \cdot |z - \bar{w}|^2 \\ \Rightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 &= k^2 \cdot [(x - a)^2 + (y + b)^2] \\ \Rightarrow (1 - k^2)(x - a)^2 + (y - b)^2 - k^2(y + b)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Como $0 \leq k < 1$, então

$$\begin{aligned} (1 - k^2)(x - a)^2 + (1 - k^2)y^2 - (1 + k^2)2by + (1 - k^2)b^2 &= 0 \\ \Rightarrow (x - a)^2 + y^2 - \frac{1 + k^2}{1 - k^2}2by + b^2 &= 0 \\ \Rightarrow (x - a)^2 + y^2 - 2 \left(\frac{1 + k^2}{1 - k^2}b \right) y + \left(\frac{1 + k^2}{1 - k^2}b \right)^2 &= \frac{b^2 + 2b^2k^2 + b^2k^4}{1 - 2k^2 + k^4} - b^2 \\ \Rightarrow (x - a)^2 + \left(y - \frac{1 + k^2}{1 - k^2}b \right)^2 &= \left(\frac{2bk}{1 - k^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Façamos $x_0 = a$, $y_0 = \frac{1+k^2}{1-k^2}b > 0$ e $r = \frac{2bk}{1-k^2} \geq 0$. Dessa forma, a circunferência hiperbólica é descrita, no semiplano superior, pela equação

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \quad (\text{A.2})$$

ou seja, a circunferência hiperbólica está contida em uma circunferência euclidiana. Temos que, $r < y_0$. De fato,

$$\begin{aligned} 0 &\leq k < 1 \\ \Rightarrow (k-1)^2 &> 0 \\ \Rightarrow 2k &< 1+k^2 \\ \Rightarrow 2bk &< (1+k^2)b \\ \Rightarrow \frac{2bk}{1-k^2} &< \frac{1+k^2}{1-k^2}b \\ \Rightarrow r &< y_0. \end{aligned}$$

Daí vem que, a circunferência hiperbólica é uma circunferência euclidiana de centro em (x_0, y_0) e raio r que está contida no semiplano superior.

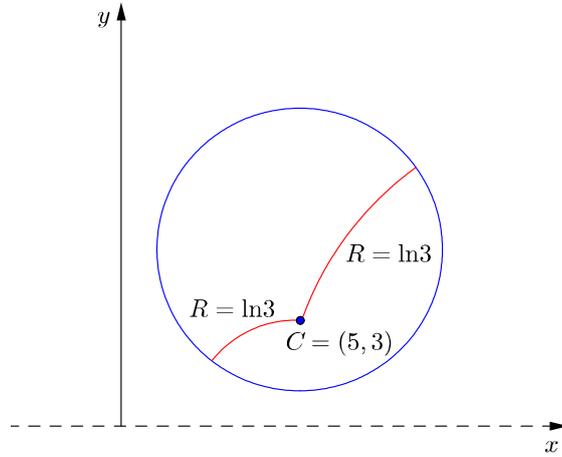


FIGURA A.1: Circunferência hiperbólica de centro em $C = (5, 3)$ e raio $R = \ln 3$.

Iremos calcular o comprimento hiperbólico de uma circunferência hiperbólica de centro $w = a + bi \in \mathbb{C}_+$ e raio $R \geq 0$. Primeiramente, observe que a coordenada y_0 e o raio r podem ser expressos em função do raio da circunferência hiperbólica R , isto é,

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1+k^2}{1-k^2}b \\ &= \frac{1 + \tanh^2 \frac{R}{2}}{1 - \tanh^2 \frac{R}{2}}b \\ &= \frac{e^R + 2 + e^{-R} + e^R - 2 + e^{-R}}{e^R + 2 + e^{-R} - e^R + 2 - e^{-R}}b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^R + e^{-R}}{2}b \\
&= b \cosh R
\end{aligned} \tag{A.3}$$

e

$$\begin{aligned}
r &= \frac{2bk}{1 - k^2} \\
&= \frac{2b \tanh \frac{R}{2}}{1 - \tanh^2 \frac{R}{2}} \\
&= \frac{2b \left(\frac{e^{\frac{R}{2}} - e^{-\frac{R}{2}}}{e^{\frac{R}{2}} + e^{-\frac{R}{2}}} \right) \left(e^{\frac{R}{2}} + e^{-\frac{R}{2}} \right)^2}{4} \\
&= \frac{e^R - e^{-R}}{2}b \\
&= b \sinh R.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Parametrizando a equação (A.2), da circunferência hiperbólica em \mathbb{R}_+^2 , obtemos

$$\gamma(\theta) = (x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta), \text{ com } \theta \in [0, 2\pi].$$

O comprimento hiperbólico da circunferência hiperbólica é

$$\begin{aligned}
\ell_0^{2\pi}(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{y_0 + r \sin \theta} \|\gamma'(\theta)\| d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{y_0 + r \sin \theta} \|(-r \sin \theta, r \cos \theta)\| d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{y_0 + r \sin \theta} \cdot \sqrt{(r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta)} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{r}{y_0 + r \sin \theta} d\theta,
\end{aligned}$$

agora, façamos $t = \tan \frac{\theta}{2}$. Assim, $\sin \theta = \frac{2t}{t^2 + 1}$ e $d\theta = \frac{2dt}{t^2 + 1}$. Com essa substituição temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{r}{y_0 + r \sin \theta} d\theta &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{y_0 + r \frac{2t}{t^2 + 1}} \frac{2}{t^2 + 1} dt \\
&= 2r \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y_0(t^2 + 1) + 2rt} dt \\
&= \frac{2r}{y_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(t + \frac{r}{y_0}\right)^2 + \left(\frac{y_0^2 - r^2}{y_0^2}\right)} dt,
\end{aligned}$$

façamos uma nova substituição, ou seja,

$$u = t + \frac{r}{y_0} \text{ e, conseqüentemente, } du = dt.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \frac{2r}{y_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(t + \frac{r}{y_0}\right)^2 + \left(\frac{y_0^2 - r^2}{y_0^2}\right)} dt &= \frac{2r}{y_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{y_0^2 - r^2}}{y_0}\right)^2} du \\ &= \frac{2r}{y_0} \frac{y_0}{\sqrt{y_0^2 - r^2}} \left(\arctan \frac{y_0 u}{\sqrt{y_0^2 - r^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} \right) \\ &= \frac{2r}{\sqrt{y_0^2 - r^2}} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] \\ &= \frac{2\pi r}{\sqrt{y_0^2 - r^2}}. \end{aligned}$$

Das relações (A.3) e (A.4), temos que

$$\begin{aligned} \ell_0^{2\pi}(\gamma) &= \frac{2\pi b \sinh R}{\sqrt{(b \cosh R)^2 - (b \sinh R)^2}} \\ &= \frac{2\pi b \sinh R}{b \sqrt{\cosh^2 R - \sinh^2 R}} \\ &= 2\pi \sinh R. \end{aligned}$$

A.2 Relações Métricas em Triângulos Hiperbólicos

Dizemos que três pontos hiperbólicos são colineares quando eles pertencem a uma mesma geodésica hiperbólica.

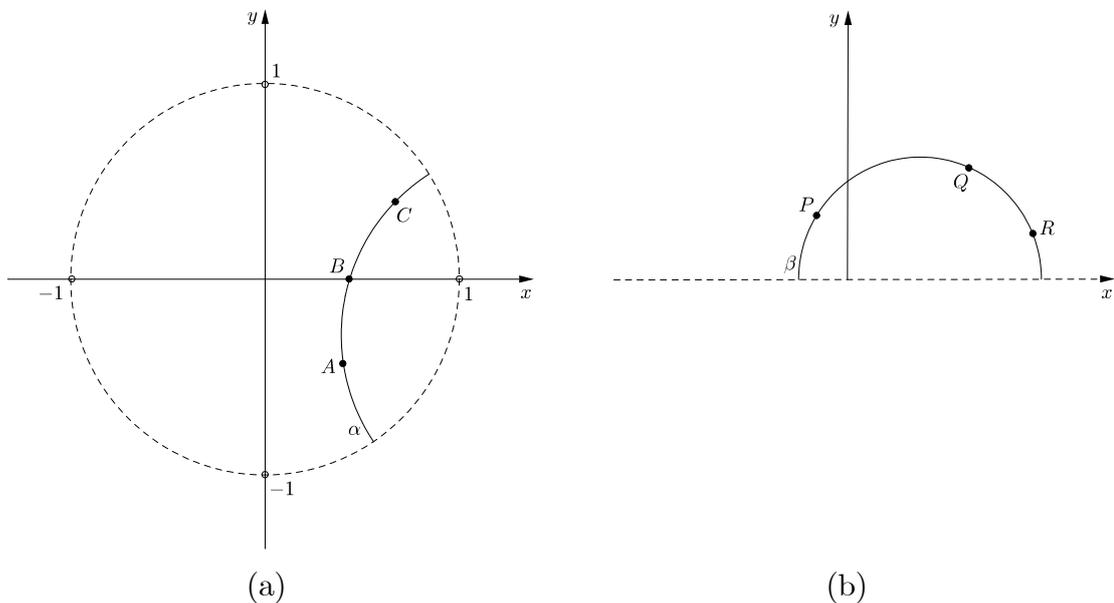


FIGURA A.2: Pontos hiperbólicos colineares.

DEFINIÇÃO A.2: *Sejam A, B e C pontos hiperbólicos não colineares. O lugar geométrico dado pela união dos segmentos hiperbólicos AB, BC e AC é chamado de triângulo hiperbólico. Os pontos A, B e C são chamados de vértices do triângulo hiperbólico e os segmentos AB, BC e AC de lados do triângulo hiperbólico.*

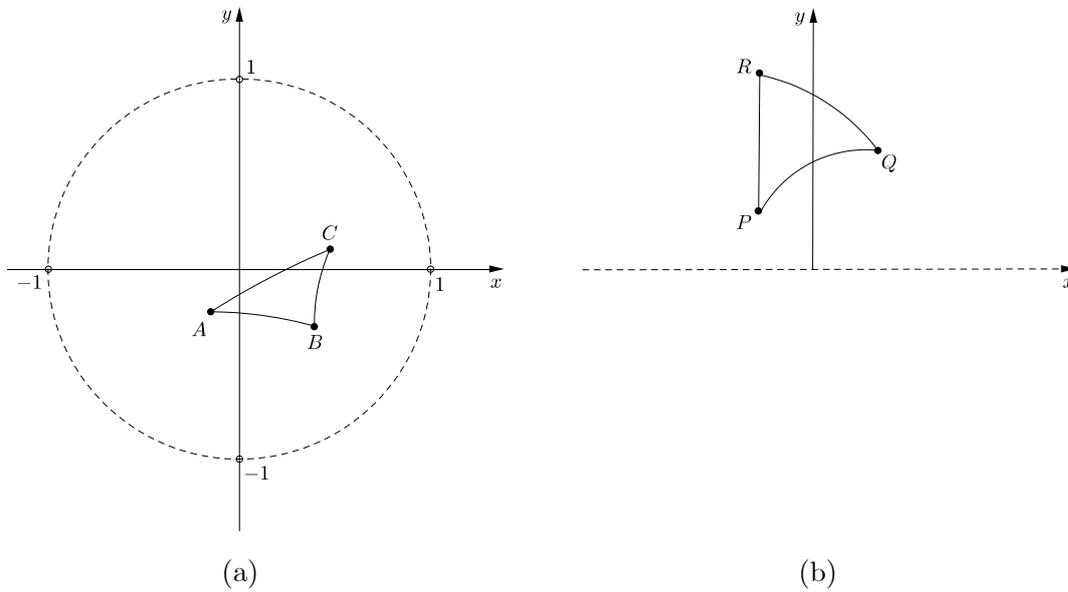


FIGURA A.3: Triângulos hiperbólicos.

O triângulo hiperbólico em $\mathbb{H}_{\mathcal{D}}^2$ é mais fácil de visualizar do que em $\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^2$, pois o seu formato é semelhante ao de um triângulo euclidiano o que nem sempre ocorre com o triângulo hiperbólico em $\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^2$.

Sejam A, B e C os vértices de um triângulo hiperbólico em $\mathbb{H}_{\mathcal{D}}^2$. Então existem quatro possibilidades para este triângulo hiperbólico. São elas:

- (i) A, B e C pertencem a \mathbb{D}^2 . Assim, em $\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^2$, o triângulo hiperbólico correspondente de vértices $\phi^{-1}(A), \phi^{-1}(B)$ e $\phi^{-1}(C)$ (ϕ é a aplicação dada em (3.4)) está contido em \mathbb{R}_+^2 .

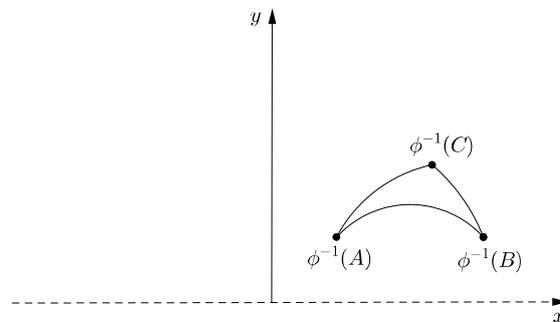


FIGURA A.4.

- (ii) $A \in \partial\mathbb{D}^2$ e $B, C \in \mathbb{D}^2$. Dessa forma, em $\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^2$, os vértices do triângulo hiperbólico correspondente são $\phi^{-1}(A) = \infty$ ou $\in \text{eixo-}x$, $\phi^{-1}(B)$ e $\phi^{-1}(C) \in \mathbb{R}_+^2$ (lembre-se que $\infty = (k, \infty)$, onde $k \in \mathbb{R}$ é fixo).

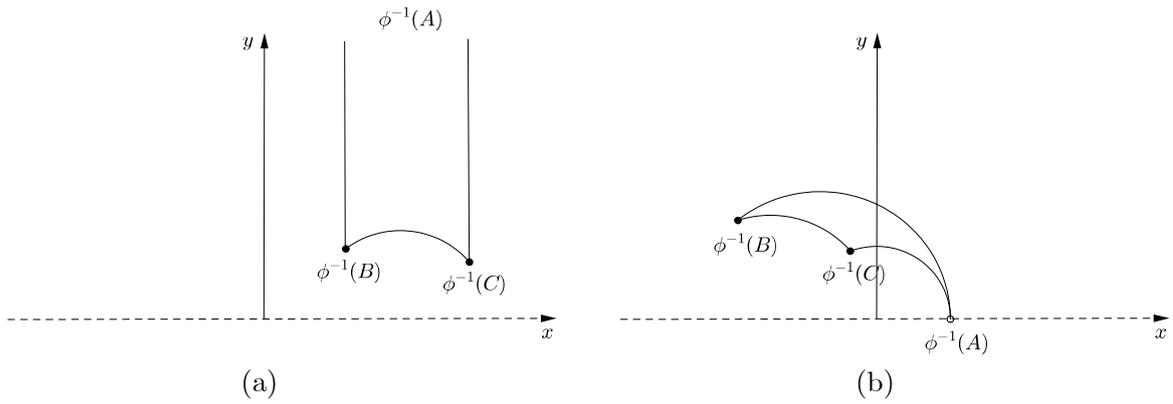


FIGURA A.5.

(iii) $A, B \in \partial\mathbb{D}^2$ e $C \in \mathbb{D}^2$. Então, em $\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^2$, os vértices do triângulo hiperbólico correspondente são $\phi^{-1}(A) = \infty$ (resp. \in eixo- x), $\phi^{-1}(B) \in$ eixo- x (resp. \in eixo- x) e $\phi^{-1}(C) \in \mathbb{R}_+^2$.

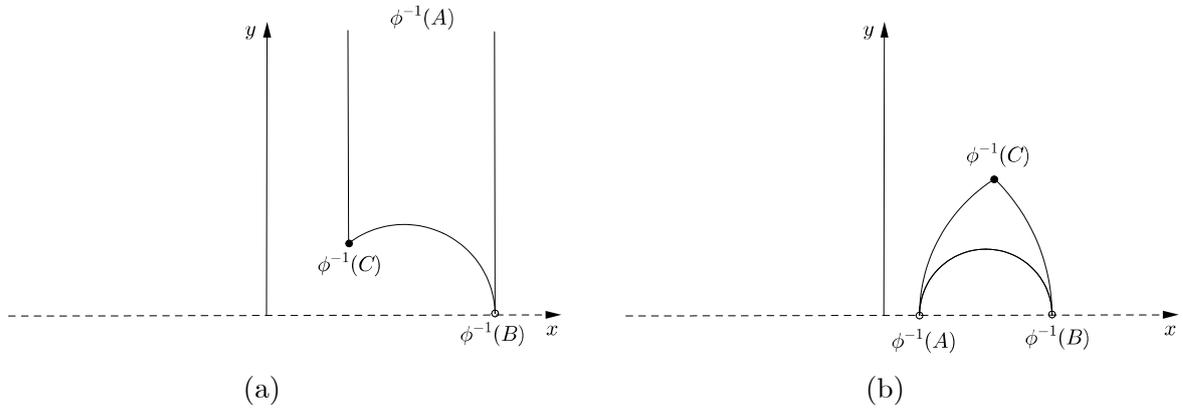


FIGURA A.6.

(iv) $A, B, C \in \partial\mathbb{D}^2$. Logo, em $\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^2$, os vértices do triângulo hiperbólico correspondente são $\phi^{-1}(A) = \infty$ (resp. \in eixo- x), $\phi^{-1}(B) \in$ eixo- x (resp. \in eixo- x) e $\phi^{-1}(C) \in$ eixo- x (resp. \in eixo- x).

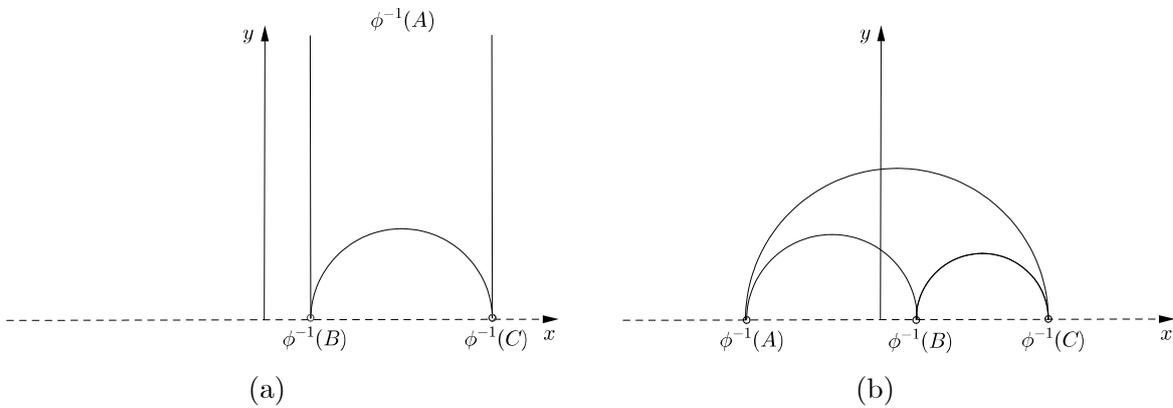


FIGURA A.7.

Determinaremos as relações métricas em um triângulo hiperbólico em duas partes: a primeira para um triângulo hiperbólico retângulo e a segunda para um triângulo hiperbólico qualquer.

A.2.1 Relações Métricas em um Triângulo Hiperbólico Retângulo

Nesta subseção, apresentaremos a versão do teorema de Pitágoras para geometria hiperbólica (com sua demonstração) e veremos que dois triângulos hiperbólicos retângulos com os mesmos ângulos internos são congruentes.

TEOREMA A.1: (TEOREMA DE PITÁGORAS) *Seja ABC um triângulo hiperbólico retângulo tal que $\text{med}(\widehat{BAC}) = \frac{\pi}{2}$, $\text{med}(\widehat{ABC}) = \beta$ e $\text{med}(\widehat{ACB}) = \gamma$ e os lados opostos a estes ângulos medem, respectivamente, a , b e c . Então, $\cosh a = \cosh b \cdot \cosh c$.*

PROVA. Note que, pela observação 3.3 e como $\text{med}(\widehat{BAC}) = \frac{\pi}{2}$, existe uma reflexão que leva o lado AB em um segmento hiperbólico sobre o eixo- y , o vértice A em i (em caso contrário aplique uma reflexão sobre a circunferência de centro em $(0, 0)$ e de raio igual a raiz quadrada da ordenada do ponto correspondente a A no eixo- y) e o lado AC em um segmento hiperbólico, no primeiro quadrante, sobre a circunferência de centro em $(0, 0)$ e de raio unitário (em caso contrário aplique uma reflexão sobre o eixo- y). Se após este processo o ponto correspondente a B estiver abaixo do ponto correspondente a A aplique uma reflexão sobre a circunferência de centro em $(0, 0)$ e de raio unitário. Assim, sem perda de generalidade, $A \equiv i$, $B \equiv ki$ e $C \equiv m + ni$, onde $k > 1$, $m > 0$, $n > 0$ e $m^2 + n^2 = 1$.

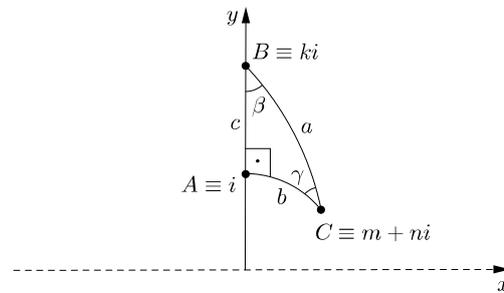


FIGURA A.8.

Da relação (A.1) temos que,

$$\begin{aligned}
 \cosh a &= 1 + \frac{1}{2} \frac{|m + (n - k)i|^2}{kn} \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \frac{m^2 + (n - k)^2}{kn} \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \frac{m^2 + n^2 - 2kn + k^2}{kn} \\
 &= \frac{2kn + 1 - 2kn + k^2}{2kn} \\
 &= \frac{1 + k^2}{2kn}, \tag{A.5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cosh b &= 1 + \frac{1}{2} \frac{|m + (n-1)i|^2}{n} \\
&= 1 + \frac{1}{2} \frac{m^2 + (n-1)^2}{n} \\
&= 1 + \frac{1}{2} \frac{m^2 + n^2 - 2n + 1}{n} \\
&= \frac{2n + 1 - 2n + 1}{2n} \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

e

$$\begin{aligned}
\cosh c &= 1 + \frac{1}{2} \frac{|(k-1)i|^2}{k} \\
&= \frac{2k + (k-1)^2}{2k} \\
&= \frac{2k + k^2 - 2k + 1}{2k} \\
&= \frac{k^2 + 1}{2k}.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\cosh b \cdot \cosh c &= \frac{1}{n} \cdot \frac{k^2 + 1}{2k} \\
&= \frac{k^2 + 1}{2kn} \\
&= \cosh a.
\end{aligned}$$

□

Pela relações (A.5), (A.6) e (A.7) e a identidade fundamental $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\sinh a &= \sqrt{\left(\frac{1+k^2}{2kn}\right)^2 - 1} \\
&= \sqrt{\frac{(1+k^2)^2 - 4k^2n^2}{4k^2n^2}} \\
&= \frac{\sqrt{1 + 2k^2 + k^4 - 4k^2n^2}}{2kn} \\
&= \frac{\sqrt{(1-k^2)^2 + 4k^2(1-n^2)}}{2kn} \\
&= \frac{\sqrt{(1-k^2)^2 + 4k^2m^2}}{2kn},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sinh b &= \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 - 1} \\ &= \sqrt{\frac{1 - n^2}{n^2}} \\ &= \sqrt{\frac{m^2}{n^2}} \\ &= \frac{m}{n} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sinh c &= \sqrt{\left(\frac{k^2 + 1}{2k}\right)^2 - 1} \\ &= \sqrt{\frac{k^4 + 2k^2 + 1 - 4k^2}{4k^2}} \\ &= \frac{\sqrt{k^4 - 2k^2 + 1}}{2k} \\ &= \frac{\sqrt{(k^2 - 1)^2}}{2k} \\ &= \frac{k^2 - 1}{2k}. \end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO A.2: *Seja ABC um triângulo hiperbólico retângulo tal que $\text{med}(\widehat{BAC}) = \frac{\pi}{2}$, $\text{med}(\widehat{ABC}) = \beta$ e $\text{med}(\widehat{ACB}) = \gamma$ e os lados opostos a estes ângulos medem, respectivamente, a , b e c . Então,*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \beta = \frac{\sinh b}{\sinh a} \\ \tan \beta = \frac{\tanh b}{\sinh c} \end{array} \right. e \left\{ \begin{array}{l} \sin \gamma = \frac{\sinh c}{\sinh a} \\ \tan \gamma = \frac{\tanh c}{\sinh b} \end{array} \right.$$

PROVA. Sejam $A \equiv i$, $B \equiv ki$ e $C \equiv m + ni$, onde $k > 1$, $m > 0$, $n > 0$ e $m^2 + n^2 = 1$. Agora, considere $P \equiv p$ o centro da semicircunferência (geodésica) que passa pelos pontos B e C (ver figura a seguir).

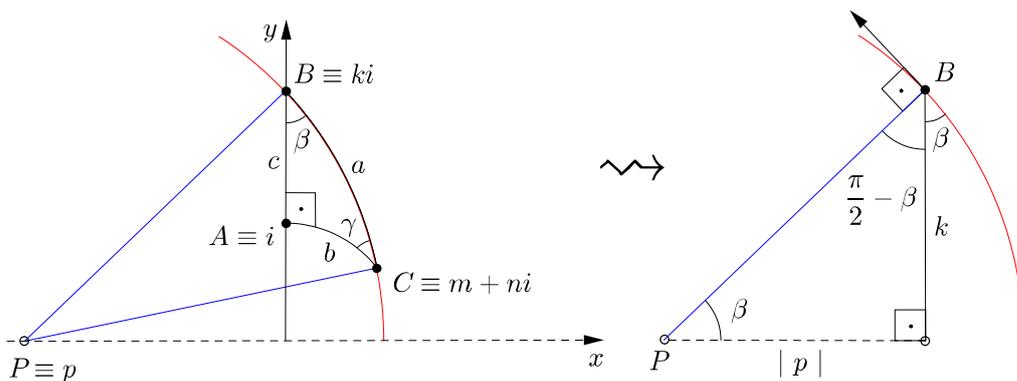


FIGURA A.9.

Note que, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Como $\overline{PB} = \overline{PC}$, então

$$\begin{aligned} \sqrt{p^2 + k^2} &= \sqrt{(m-p)^2 + n^2} \\ \Rightarrow p^2 + k^2 &= m^2 - 2mp + p^2 + n^2 \\ \Rightarrow 2mp &= m^2 - n^2 \\ \Rightarrow p &= \frac{m^2 - n^2}{2m}. \end{aligned}$$

Temos que,

$$\begin{aligned} \overline{PB} &= \sqrt{p^2 + k^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{m^2 - n^2}{2m}\right)^2 + k^2} \\ &= \frac{\sqrt{(m^2 - n^2)^2 + 4k^2m^2}}{2m}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \frac{k}{\overline{PB}} \\ &= \frac{k}{\frac{\sqrt{(m^2 - n^2)^2 + 4k^2m^2}}{2m}} \\ &= \frac{2km}{\sqrt{(m^2 - n^2)^2 + 4k^2m^2}} \\ &= \frac{\sinh b}{\sinh a} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tan \beta &= \frac{k}{|p|} \\ &= \frac{k}{\left|\frac{m^2 - n^2}{2m}\right|} \\ &= \frac{2km}{k^2 - 1} \\ &= \frac{m}{k^2 - 1} \\ &= \frac{\tanh b}{\sinh c}. \end{aligned}$$

De maneira análoga obtemos $\sin \gamma = \frac{\sinh c}{\sinh a}$ e $\tan \gamma = \frac{\tanh c}{\sinh b}$. □

COROLÁRIO A.1: *Seja ABC um triângulo hiperbólico retângulo tal que $\text{med}(\widehat{BAC}) = \frac{\pi}{2}$, $\text{med}(\widehat{ABC}) = \beta$ e $\text{med}(\widehat{ACB}) = \gamma$ e os lados opostos a estes ângulos medem, respectivamente, a , b e c . Então,*

$$\left\{ \begin{array}{l} \cosh a = \cot \beta \cdot \cot \gamma \\ \cosh b = \frac{\cos \beta}{\sin \gamma} \\ \cosh c = \frac{\cos \gamma}{\sin \beta} \end{array} \right. .$$

PROVA. Pela proposição A.2, temos que $\tanh b = \tan \beta \cdot \sinh c$ e $\tanh c = \tan \gamma \cdot \sinh b$, onde $0 < \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$. Assim,

$$\sinh^2 b = \frac{\tanh^2 c}{\tan^2 \gamma}$$

e, conseqüentemente,

$$\cosh^2 b = \frac{\tan^2 \gamma + \tanh^2 c}{\tan^2 \gamma}.$$

Substituindo as expressões de $\sinh^2 b$ e $\cosh^2 b$ em $\tanh^2 b = \tan^2 \beta \cdot \sinh^2 c$, obtemos

$$\tan^2 \beta \cdot \sinh^2 c = \frac{\tanh^2 c}{\tan^2 \gamma + \tanh^2 c}.$$

Como $\tanh^2 c = \frac{\cosh^2 c - 1}{\cosh^2 c}$, então

$$\begin{aligned} \tan^2 \beta \cdot \sinh^2 c &= \frac{\tanh^2 c}{\tan^2 \gamma + \tanh^2 c} \\ \Rightarrow \tan^2 \beta \cdot (\cosh^2 c - 1) &= \frac{\frac{\cosh^2 c - 1}{\cosh^2 c}}{\tan^2 \gamma + \frac{\cosh^2 c - 1}{\cosh^2 c}} \\ \Rightarrow \cosh^2 c \tan^2 \beta (\tan^2 \gamma + 1) - \tan^2 \beta &= 1 \\ \Rightarrow \cosh^2 c &= \frac{1 + \tan^2 \beta}{\tan^2 \beta (\tan^2 \gamma + 1)} \\ \Rightarrow \cosh^2 c &= \frac{\frac{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta}{\cos^2 \beta}}{\frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma}{\cos^2 \gamma}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \cosh^2 c &= \frac{1}{\frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \gamma}} \\
\Rightarrow \cosh^2 c &= \frac{\cos^2 \gamma}{\sin^2 \beta} \\
\Rightarrow \cosh c &= \frac{\cos \gamma}{\sin \beta}.
\end{aligned}$$

De maneira análoga, temos que $\cosh b = \frac{\cos \beta}{\sin \gamma}$. Assim, pelo teorema de Pitágoras hiperbólico,

$$\begin{aligned}
\cosh a &= \cosh b \cdot \cosh c \\
&= \frac{\cos \beta}{\sin \gamma} \cdot \frac{\cos \gamma}{\sin \beta} \\
&= \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \cdot \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \\
&= \cot \beta \cdot \cot \gamma.
\end{aligned}$$

□

Do corolário acima, temos que um triângulo hiperbólico retângulo é determinado por seus ângulos internos. Assim, se dois triângulos hiperbólicos retângulos possuem os ângulos internos correspondentes congruentes tem-se que estes triângulos hiperbólicos retângulos são congruentes.

A.2.2 Relações Métricas em um Triângulo Hiperbólico Qualquer

Começaremos esta subseção provando que a rotação e a reflexão em relação ao eixo- x são isometrias de $\mathbb{H}_{\mathcal{D}}^2$, pois desenvolveremos esta subseção através do modelo do disco de Poincaré. Em seguida, estabeleceremos as versões das leis dos cossenos e dos senos para a geometria hiperbólica. E por fim, concluiremos que dois triângulos hiperbólicos com os mesmos ângulos internos são congruentes.

PROPOSIÇÃO A.3: *Seja R_θ a aplicação linear rotação de um ângulo θ , no sentido anti-horário, em \mathbb{R}^2 . Então, $R_\theta : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ é uma isometria de $\mathbb{H}_{\mathcal{D}}^2$.*

PROVA. Seja $R_\theta : \mathbb{D}^2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$. Note que, $R_\theta(\mathbb{D}^2) \subset \mathbb{D}^2$. De fato, seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{D}^2$, então

$$\begin{aligned}
&(x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta)^2 + (x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta)^2 \\
&= x_0^2 \cos^2 \theta - x_0 y_0 \sin 2\theta + y_0^2 \sin^2 \theta + x_0^2 \sin^2 \theta + x_0 y_0 \sin 2\theta + y_0^2 \cos^2 \theta \\
&= x_0^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + y_0^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\
&= x_0^2 + y_0^2 \\
&< 1.
\end{aligned}$$

Assim, façamos a restrição $R_\theta : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$. Temos que, R_θ é diferenciável em \mathbb{D}^2 . Agora, vamos mostrar que R_θ é bijetora. Sejam $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{D}^2$ tal que $R_\theta(x_1, y_1) = R_\theta(x_2, y_2)$. Então,

$$\begin{aligned} (x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta, x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta) &= (x_2 \cos \theta - y_2 \sin \theta, x_2 \sin \theta + y_2 \cos \theta) \\ \Rightarrow \begin{cases} x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta = x_2 \cos \theta - y_2 \sin \theta \\ x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta = x_2 \sin \theta + y_2 \cos \theta \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - x_2) \cos \theta - (y_1 - y_2) \sin \theta = 0 \\ (x_1 - x_2) \sin \theta + (y_1 - y_2) \cos \theta = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Chamemos $x_1 - x_2 = m$ e $y_1 - y_2 = n$. Assim,

$$\begin{cases} m \cos \theta - n \sin \theta = 0 \\ m \sin \theta + n \cos \theta = 0 \end{cases}.$$

Pela regra de Cramer, temos que

$$m = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

e

$$n = \frac{\begin{vmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Como $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, então R_θ é injetora. Seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{D}^2$. Fazendo $R_\theta(x, y) = (x_0, y_0)$, então

$$\begin{cases} x \cos \theta - y \sin \theta = x_0 \\ x \sin \theta + y \cos \theta = y_0 \end{cases}.$$

Novamente, pela regra de Cramer, temos que

$$x = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & -\sin \theta \\ y_0 & \cos \theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}} = x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta$$

e

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \cos \theta & x_0 \\ \sin \theta & y_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}} = -x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta.$$

Perceba que, $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2 < 1$, ou seja, $(x, y) \in \mathbb{D}^2$. Assim, R_θ é sobrejetora. A aplicação $R_\theta^{-1}(x, y) = (x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta)$ é diferenciável em \mathbb{D}^2 . Dessa forma, R_θ é um difeomorfismo de \mathbb{D}^2 sobre \mathbb{D}^2 . Temos que,

$$d(R_\theta)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial (x \cos \theta - y \sin \theta)}{\partial x} & \frac{\partial (x \cos \theta - y \sin \theta)}{\partial y} \\ \frac{\partial (x \sin \theta + y \cos \theta)}{\partial x} & \frac{\partial (x \sin \theta + y \cos \theta)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Sejam $P = (x, y) \in \mathbb{D}^2$ e $u, v \in T_P \mathbb{D}^2$. Então,

$$\begin{aligned} & g_{R_\theta(P)}^{\mathbb{D}^2} (d(R_\theta)_P \cdot u, d(R_\theta)_P \cdot v) \\ &= \frac{4}{[1 - ((x \cos \theta - y \sin \theta)^2 + (x \sin \theta + y \cos \theta)^2)]^2} \langle (dR_\theta)_P \cdot u, (dR_\theta)_P \cdot v \rangle \\ &= \frac{4}{[1 - (x^2 + y^2)]^2} u^t \cdot [((dR_\theta)_P)^t \cdot I_2 \cdot (dR_\theta)_P] \cdot v \\ &= \frac{4}{[1 - (x^2 + y^2)]^2} u^t \cdot \left[\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \right] \cdot v \\ &= \frac{4}{[1 - (x^2 + y^2)]^2} u^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \\ &= g_P^{\mathbb{D}^2} (u, v). \end{aligned}$$

Logo, R_θ é uma isometria de $\mathbb{H}_{\mathcal{D}}^2$. □

PROPOSIÇÃO A.4: *Seja r_x a transformação linear reflexão em relação ao eixo- x em \mathbb{R}^2 . Então, $r_x : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ é uma isometria de $\mathbb{H}_{\mathcal{D}}^2$.*

PROVA. De maneira análoga a proposição anterior, pode-se verificar que $r_x : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$, onde $r_x(x, y) = (x, -y)$, é um difeomorfismo de \mathbb{D}^2 sobre \mathbb{D}^2 . Sejam $P = (x, y) \in \mathbb{D}^2$ e $u, v \in T_P \mathbb{D}^2$. Como

$$d(r_x)_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial (x)}{\partial x} & \frac{\partial (x)}{\partial y} \\ \frac{\partial (-y)}{\partial x} & \frac{\partial (-y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

então

$$\begin{aligned}
& g_{r_x(P)}^{\mathbb{D}^2} (d(r_x)_P \cdot u, d(r_x)_P \cdot v) \\
&= \frac{4}{[1 - (x^2 + (-y)^2)]^2} \langle d(r_x)_P \cdot u, d(r_x)_P \cdot v \rangle \\
&= \frac{4}{[1 - (x^2 + y^2)]^2} u^t \cdot [(d(r_x)_P)^t \cdot I_2 \cdot d(r_x)_P] \cdot v \\
&= \frac{4}{[1 - (x^2 + y^2)]^2} u^t \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \cdot v \\
&= \frac{4}{[1 - (x^2 + y^2)]^2} u^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \\
&= g_P^{\mathbb{D}^2} (u, v).
\end{aligned}$$

Portanto, segue o resultado. □

Sejam $z, w \in \mathbb{D}^2$ e $\theta = \angle(z, w)$. Temos que, ver [22],

$$\cosh^2 \left(\frac{1}{2} d(z, w) \right) = \frac{|1 - z\bar{w}|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}$$

e

$$\sinh^2 \left(\frac{1}{2} d(z, w) \right) = \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}.$$

Como

$$\cosh(d(z, w)) = \cosh^2 \left(\frac{1}{2} d(z, w) \right) + \sinh^2 \left(\frac{1}{2} d(z, w) \right),$$

então

$$\begin{aligned}
\cosh(d(z, w)) &= \frac{|1 - z\bar{w}|^2 + |z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)} \\
&= \frac{[|1 - z\bar{w}|^2 - |z - w|^2] + 2|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)} \\
&= 1 + 2 \cdot \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)} \\
&= 1 + 2 \cdot \frac{|z|^2 + |w|^2 - 2|z||w|\cos\theta}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}. \tag{A.8}
\end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO A.5: (LEI DOS COSSENOS) *Seja ABC um triângulo hiperbólico em \mathbb{H}_D^2 tal que $\text{med}(\widehat{BAC}) = \alpha$, $\text{med}(\widehat{ABC}) = \beta$ e $\text{med}(\widehat{ACB}) = \gamma$ e os lados opostos a estes ângulos medem, respectivamente, a , b e c . Então,*

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{\cosh b \cosh c - \cosh a}{\sinh b \sinh c} \\ \cos \beta = \frac{\cosh a \cosh c - \cosh b}{\sinh a \sinh c} \\ \cos \gamma = \frac{\cosh a \cosh b - \cosh c}{\sinh a \sinh b} \end{cases} .$$

PROVA. Considere $A \equiv 0$ (caso contrário, lembre-se que $\phi(0, 1) = (0, 0)$, onde ϕ é a aplicação (3.4), e os modelos do disco e do semiplano superior de Poincaré são equivalentes), o vértice B acima do eixo- x e o vértice C sobre o eixo- x (caso contrário, utilize as proposições A.3 e A.4). Seja $C \equiv z_C$. Temos que, os pontos A e C estão sobre a geodésica $\eta(t) = (t, 0)$. Assim, o comprimento da geodésica η de A a C é igual a b . Dessa forma,

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^{z_C} \frac{1}{1-t^2} dt = b \\ \Rightarrow & 2 \left[\frac{1}{2} \int_0^{z_C} \frac{1}{1-t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{z_C} \frac{1}{1+t} dt \right] = b \\ \Rightarrow & \ln \frac{1+z_C}{1-z_C} = b \\ \Rightarrow & \frac{1+z_C}{1-z_C} = e^b \\ \Rightarrow & z_C = \frac{e^b - 1}{e^b + 1} \\ \Rightarrow & z_C = \tanh \frac{b}{2}, \end{aligned}$$

ou seja, $C \equiv \tanh \frac{b}{2}$. De maneira análoga ao que fizemos para determinar o ponto C e aplicando a R_α , obtemos $B \equiv e^{i\alpha} \tanh \frac{c}{2}$. Da relação (A.8), temos que

$$\begin{aligned} & \cosh a \\ = & 1 + 2 \cdot \frac{\left| e^{i\alpha} \tanh \frac{c}{2} \right|^2 + \left| \tanh \frac{b}{2} \right|^2 - 2 \left| e^{i\alpha} \tanh \frac{c}{2} \right| \left| \tanh \frac{b}{2} \right| \cos \alpha}{\left(1 - \left| e^{i\alpha} \tanh \frac{c}{2} \right|^2 \right) \left(1 - \left| \tanh \frac{b}{2} \right|^2 \right)} \\ = & \frac{\left(\cosh^2 \frac{c}{2} + \sinh^2 \frac{c}{2} \right) \cosh^2 \frac{b}{2} + \left(\cosh^2 \frac{c}{2} + \sinh^2 \frac{c}{2} \right) \sinh^2 \frac{b}{2} - \sinh b \sinh c \cos \alpha}{\left(\cosh^2 \frac{c}{2} - \sinh^2 \frac{c}{2} \right) \cosh^2 \frac{b}{2} - \left(\cosh^2 \frac{c}{2} - \sinh^2 \frac{c}{2} \right) \sinh^2 \frac{b}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cosh c \cosh^2 \frac{b}{2} + \cosh c \sinh^2 \frac{b}{2} - \sinh b \sinh c \cos \alpha}{\cosh^2 \frac{b}{2} - \sinh^2 \frac{b}{2}} \\
&= \left(\cosh^2 \frac{b}{2} + \sinh^2 \frac{b}{2} \right) \cosh c - \sinh b \sinh c \cos \alpha \\
&= \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos \alpha,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\cos \alpha = \frac{\cosh b \cosh c - \cosh a}{\sinh b \sinh c}.$$

As duas últimas relações são obtidas por analogia. □

COROLÁRIO A.2: (LEI DOS SENOS) *Seja ABC um triângulo hiperbólico em $\mathbb{H}_{\mathcal{D}}^2$ tal que $\text{med}(\widehat{BAC}) = \alpha$, $\text{med}(\widehat{ABC}) = \beta$ e $\text{med}(\widehat{ACB}) = \gamma$ e os lados opostos a estes ângulos medem, respectivamente, a , b e c . Então,*

$$\frac{\sin \alpha}{\sinh a} = \frac{\sin \beta}{\sinh b} = \frac{\sin \gamma}{\sinh c}.$$

PROVA. Como $\cos \alpha = \frac{\cosh b \cosh c - \cosh a}{\sinh b \sinh c}$, então

$$\begin{aligned}
\sin^2 \alpha &= 1 - \left(\frac{\cosh b \cosh c - \cosh a}{\sinh b \sinh c} \right)^2 \\
&= \frac{\sinh^2 b \sinh^2 c - \cosh^2 b \cosh^2 c + 2 \cosh a \cosh b \cosh c - \cosh^2 a}{\sinh^2 b \sinh^2 c} \\
&= \frac{(\cosh^2 b - 1)(\cosh^2 c - 1) - \cosh^2 b \cosh^2 c + 2 \cosh a \cosh b \cosh c - \cosh^2 a}{\sinh^2 b \sinh^2 c} \\
&= \frac{2 \cosh a \cosh b \cosh c - \cosh^2 a - \cosh^2 b - \cosh^2 c + 1}{\sinh^2 b \sinh^2 c}.
\end{aligned}$$

De maneira análoga, temos que

$$\sin^2 \beta = \frac{2 \cosh a \cosh b \cosh c - \cosh^2 a - \cosh^2 b - \cosh^2 c + 1}{\sinh^2 a \sinh^2 c}$$

e

$$\sin^2 \gamma = \frac{2 \cosh a \cosh b \cosh c - \cosh^2 a - \cosh^2 b - \cosh^2 c + 1}{\sinh^2 a \sinh^2 b}.$$

Portanto,

$$\frac{\sin \alpha}{\sinh a} = \frac{\sin \beta}{\sinh b} = \frac{\sin \gamma}{\sinh c}.$$

□

COROLÁRIO A.3: (LEI DOS COSSENOS) *Seja ABC um triângulo hiperbólico em \mathbb{H}_D^2 tal que $\text{med}(\widehat{BAC}) = \alpha$, $\text{med}(\widehat{ABC}) = \beta$ e $\text{med}(\widehat{ACB}) = \gamma$ e os lados opostos a estes ângulos medem, respectivamente, a , b e c . Então,*

$$\begin{cases} \cosh a &= \frac{\cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} \\ \cosh b &= \frac{\cos \alpha \cos \gamma + \cos \beta}{\sin \alpha \sin \gamma} \\ \cosh c &= \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} \end{cases} .$$

PROVA. Considere $x = \cosh a$, $y = \cosh b$, $z = \cosh c$ e $w = 2xyz - x^2 - y^2 - z^2 + 1$. Note que, $\sin \alpha$, $\sin \beta$ e $\sin \gamma > 0$ e, conseqüentemente, $w > 0$. Das leis dos cossenos e dos senos, temos que

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{yz - x}{[(y^2 - 1)(z^2 - 1)]^{\frac{1}{2}}}, \quad \sin \alpha = \left[\frac{w}{(y^2 - 1)(z^2 - 1)} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \cos \beta &= \frac{xz - y}{[(x^2 - 1)(z^2 - 1)]^{\frac{1}{2}}}, \quad \sin \beta = \left[\frac{w}{(x^2 - 1)(z^2 - 1)} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{xy - z}{[(x^2 - 1)(y^2 - 1)]^{\frac{1}{2}}} \text{ e } \sin \gamma = \left[\frac{w}{(x^2 - 1)(y^2 - 1)} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} & \frac{\cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} \\ &= \frac{\frac{xz - y}{[(x^2 - 1)(z^2 - 1)]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{xy - z}{[(x^2 - 1)(y^2 - 1)]^{\frac{1}{2}}} + \frac{yz - x}{[(y^2 - 1)(z^2 - 1)]^{\frac{1}{2}}}}{\left[\frac{w}{(x^2 - 1)(z^2 - 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{w}{(x^2 - 1)(y^2 - 1)} \right]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\left[\frac{(xz - y)(xy - z)}{(x^2 - 1)(y^2 - 1)^{\frac{1}{2}}(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{yz - x}{(y^2 - 1)^{\frac{1}{2}}(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \right] (x^2 - 1)(y^2 - 1)^{\frac{1}{2}}(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{w} \\ &= \frac{x^2yz - xz^2 - xy^2 + yz + x^2yz - yz - x^3 + x}{w} \\ &= \frac{x(2xyz - x^2 - y^2 - z^2 + 1)}{w} \\ &= \frac{xw}{w} \\ &= x \\ &= \cosh a. \end{aligned}$$

As duas últimas relações são obtidas por analogia. □

Do corolário acima segue o teorema abaixo.

TEOREMA A.2: (CASO AAA) *Se dois triângulos hiperbólicos possuem os ângulos internos, correspondentes, congruentes, então estes triângulos hiperbólicos são congruentes.*

A.3 Área de um Triângulo Hiperbólico

Veremos nesta seção que a área de um triângulo hiperbólico só depende da medida de seus ângulos internos e que a soma deles é menor do que 180° .

Vimos, na subseção 3.1.3, que a área hiperbólica de uma região R em \mathbb{R}_+^2 é dada por

$$A(R) = \iint_R \frac{1}{y^2} dx dy.$$

DEFINIÇÃO A.3: *Uma região, em \mathbb{R}_+^2 , formada por um triângulo hiperbólico, onde um dos vértice é ∞ , e o seu interior é chamada de gomo hiperbólico. A fronteira de um gomo hiperbólico é formada por duas semirretas verticais e um arco de semicircunferência, centrada no eixo- x , na qual chamaremos de base.*

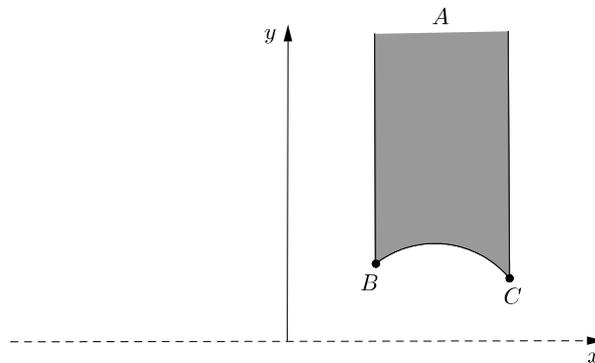


FIGURA A.10: Gomo hiperbólico ABC .

LEMA A.2: *Seja Ω um gomo hiperbólico tal que $\partial\Omega = \rho_1 \cup \rho_2 \cup \rho_3$, onde ρ_1 , ρ_2 e ρ_3 são os segmentos hiperbólicos que delimitam Ω , e ρ_2 é a base de Ω . Se $\alpha = \angle(\rho_1, \rho_2)$ e $\beta = \angle(\rho_2, \rho_3)$, então*

$$A(\Omega) = \pi - (\alpha + \beta).$$

PROVA. Sem perda de generalidade, considere $\rho_2 \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2; x = r \cos \theta \text{ e } y = r \sin \theta, \text{ onde } 0 < \theta < \pi \text{ e } r > 0 \text{ fixo}\}$ e ρ_1 à esquerda de ρ_3 . Sejam $\rho_1 \cap \rho_2 = \{B\}$ e $\rho_2 \cap \rho_3 = \{C\}$, onde $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$. Temos três casos a considerar para o ponto B . São eles:

- (i) B está à direita do eixo- y .

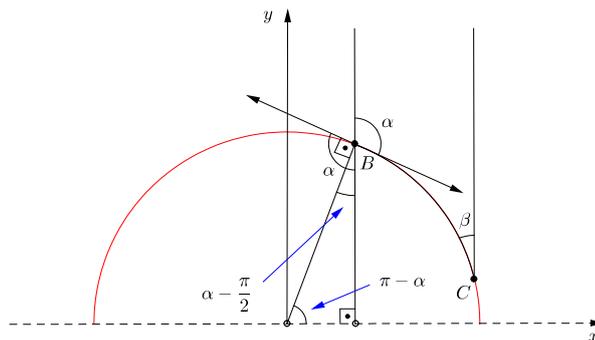


FIGURA A.11.

Assim, para obter o ponto B devemos tomar $\theta = \pi - \alpha$.

(ii) B está sobre do eixo- y .

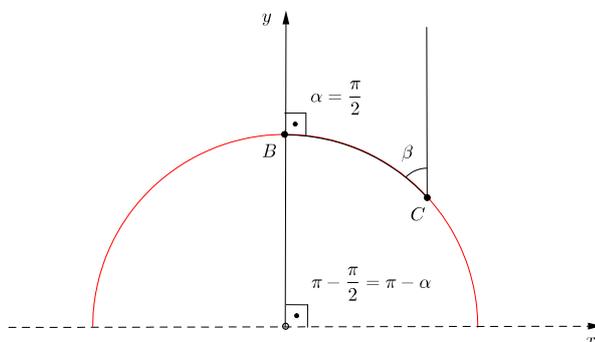


FIGURA A.12.

Logo, para obter o ponto B devemos tomar $\theta = \pi - \frac{\pi}{2} = \pi - \alpha$.

(iii) B está à esquerda do eixo- y .

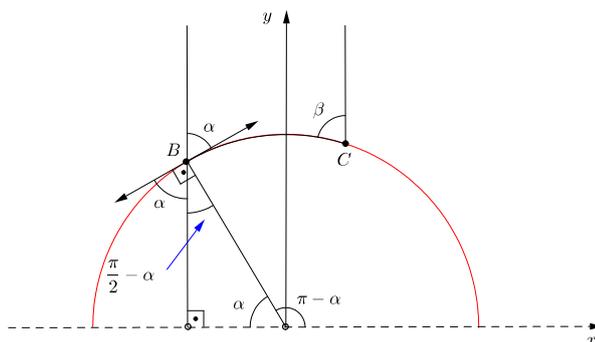


FIGURA A.13.

Portanto, para obter o ponto B devemos tomar $\theta = \pi - \alpha$.

Como nos três casos acima obtemos o ponto B fazendo $\theta = \pi - \alpha$, então $x_B = r \cos(\pi - \alpha)$. De maneira análoga, obtemos o ponto C tomando $\theta = \beta$. Assim, $x_C = r \cos \beta$. Dessa forma, $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2; r \cos(\pi - \alpha) \leq x \leq r \cos \beta \text{ e } \sqrt{r^2 - x^2} \leq y < \infty\}$. Assim,

$$\begin{aligned}
A(\Omega) &= \int_{r \cos(\pi-\alpha)}^{r \cos \beta} \int_{\sqrt{r^2-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy dx \\
&= \int_{r \cos(\pi-\alpha)}^{r \cos \beta} \left. -\frac{1}{y} \right|_{\sqrt{r^2-x^2}}^{\infty} dx \\
&= \int_{r \cos(\pi-\alpha)}^{r \cos \beta} \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}} dx \\
&= \left. -\arccos \frac{x}{r} \right|_{r \cos(\pi-\alpha)}^{r \cos \beta} \\
&= -\beta + \pi - \alpha \\
&= \pi - (\alpha + \beta).
\end{aligned}$$

□

TEOREMA A.3: *Seja ABC um triângulo hiperbólico tal que $\text{med}(\widehat{BAC}) = \alpha$, $\text{med}(\widehat{ABC}) = \beta$ e $\text{med}(\widehat{ACB}) = \gamma$. Então, a área deste triângulo hiperbólico é dada por*

$$A_{\Delta ABC} = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

PROVA. Temos três casos a considerar. São eles:

(i) um dos vértices do triângulo hiperbólico é ∞ . Neste caso, segue o resultado pelo lema anterior – note que, a medida do ângulo deste vértice é igual a 0.

(ii) um dos vértices está sobre o eixo- x . Observando esta situação no disco de Poincaré, temos que este vértice está sobre $\partial\mathbb{D}^2 \setminus \{(1,0)\}$. Sem perda de generalidade, digamos que este vértice é A . Seja θ o ângulo formado pelo diâmetro do disco, onde um dos extremos é o vértice A , com o eixo- x . Aplicando a isometria $R_{2\pi-\theta}$ temos que, $R_{2\pi-\theta}(A) = (1,0)$. Agora, olhando este triângulo hiperbólico no semiplano superior de Poincaré ele é um gomo hiperbólico, então segue o resultado pelo lema anterior – perceba que, $\alpha = 0$.

(iii) $\Delta ABC \subset \mathbb{R}_+^2$. Sem perda de generalidade, suponha que AB está sobre uma semirreta vertical (caso contrário, aplique uma isometria de \mathbb{H}_S^2 em que leve este segmento em um segmento sobre uma semirreta vertical). Agora, considere as semirretas verticais ρ_1 e ρ_2 tais que $AB \subset \rho_1$ e $C \in \rho_2$. Assim, obtemos dois gomos hiperbólicos Ω_1 e Ω_2 de bases, respectivamente, AC e BC . As medidas dos ângulos internos, formados com a base, de Ω_1 são iguais a α e γ_1 e de Ω_2 são iguais a $\pi - \beta$ e γ_2 , onde $\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma$.

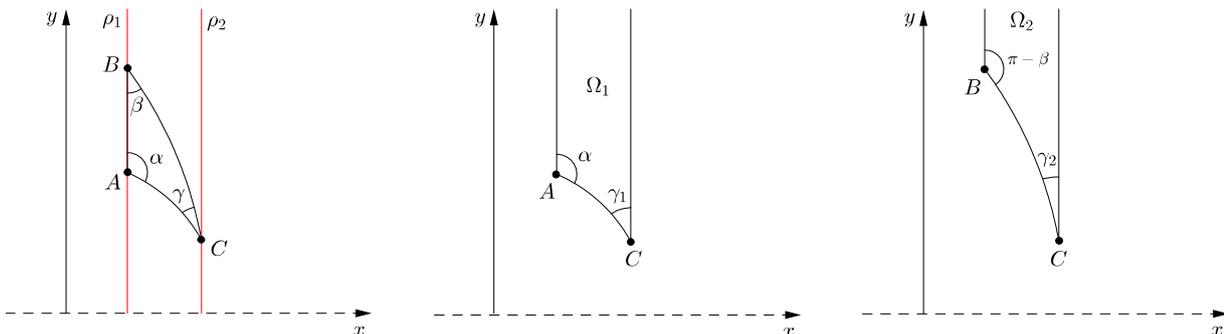


FIGURA A.14.

Então,

$$\begin{aligned}A_{\Delta ABC} &= A(\Omega_1) - A(\Omega_2) \\&= \pi - (\alpha + \gamma_1) - [\pi - (\pi - \beta + \gamma_2)] \\&= \pi - (\alpha + \gamma_1) - (\beta - \gamma_2) \\&= \pi - (\alpha + \beta + \gamma_1 - \gamma_2) \\&= \pi - (\alpha + \beta + \gamma).\end{aligned}$$

□

COROLÁRIO A.4: *Seja ABC um triângulo hiperbólico tal que $\text{med}(\widehat{BAC}) = \alpha$, $\text{med}(\widehat{ABC}) = \beta$ e $\text{med}(\widehat{ACB}) = \gamma$. Então, $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.*

Referências Bibliográficas

- [1] ADAMES, M. R. **Geometria Esférica**. Florianópolis: UFSC, 2005. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/96500/Marcio_Rostirolla_Adames.pdf?sequence=1>. Acesso em: 15 set. 2013.
- [2] ALMEIDA, H. A. S. **Grupos de Coxeter hiperbólicos**. 2009. 63f. Dissertação (mestrado em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, RJ, 2009. Disponível em: <http://www2.dbd.puc-rio.br/pergamum/biblioteca/php/mostrateses.php?open=1&arqtese=0710702_09_Indice.html>. Acesso em: 17 jan. 2014.
- [3] BARBOSA, J. L. M. **Geometria Hiperbólica**. Goiânia: Ed. da UFG, 2002.
- [4] _____. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: SBM, 1995.
- [5] BATISTA, J. A. M. **A Geometria Esférica**. 2006. 50 f. Monografia (Especialização em Geometria) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2006.
- [6] BINOTTO, R. R.; PANSONATO, C. C. Isometrias do Plano Hiperbólico. In: Colóquio de Matemática da Região Sul, 1., 2010, Santa Maria. **Mini-Curso...** Santa Maria: UFSM, 2010. Disponível em: <<http://www.sbm.org.br/docs/coloquios/SU-1.01.pdf>>. Acesso em: 15 set 2013.
- [7] BOLDRINI, J. L.; et al. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.
- [8] BOYER, C. B. **História da Matemática**. Traduzida por GOMIDE, E. F. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- [9] BRAZ, F. M. **História da Geometria Hiperbólica**. 2009. 34 f. Monografia (Especialização em Matemática para Professores - Ênfase em Cálculo) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2009.
- [10] CALVET, R. G. Hyperboloidal Geometry in the Pseudo-Euclidean Space (Lobachevsky's Geometry). In: _____. **Treatise of Plane Geometry Through Geometric Algebra**. Cerdanyola del Vallès: UAB, 2001. cap. 15, p. 188-206.

- [11] CARMO, M. P. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [12] _____. **Geometria Não-Euclidiana**. Rio de Janeiro, N. 6, p. 25-48, dez. 1987. Disponível em: <http://matematicauniversitaria.ime.usp.br/Conteudo/n06/n06_Artigo02.pdf>. Acesso em: 17 jan. 2014.
- [13] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. **Um curso de álgebra linear**. 2. ed. São Paulo: Edusp, 2005.
- [14] COXETER, H. S. M. **Non-Euclidean Geometry**. 6. ed. Cambridge University Press, 1998.
- [15] CUNHA, H. S. **Escher e o mundo não euclidiano**. Ciclo de palestras “A Matemática na arte de Escher”. DMAT/UFMG e Fundação Clóvis Salgado. Belo Horizonte, MG, em 08 de novembro de 2013.
- [16] DORIA, C. M. **Estruturas Geométricas em Dimensão 2**. Florianópolis, SC: UFSC, 2010. Disponível em: <<http://mtm.ufsc.br/~cmdoria/Pesquisa/Universal-2010/Artigos-livros/Livros/Geometria-2D.pdf>>. Acesso em: 15 set. 2013.
- [17] _____. Geometrias Não-Euclidianas: Exemplos. In: Bial da Sociedade Brasileira de Matemática, 2., 2004, Salvador. **Mini-Curso...** Salvador: UFBA, 2004. Disponível em: <<http://www.bienasbm.ufba.br/M32.pdf>>. Acesso em: 15 set 2013.
- [18] DUBROVIN, B. A.; FOMENKO, A. T.; NOVIKOV, S. P. The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields. In: _____ **Modern Geometry-Methods and Applications**. Traduzido por BURNS, Robert G. 2nd ed. New York: Springer, 1992. Part I.
- [19] DURAN, F. **Transformações de Möbius e inversões**. 2013. 71f. Dissertação (mestrado profissional em Matemática) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, SP, 2013. Disponível em: <<http://www.rc.unesp.br/tmelo/diss-francieli.pdf>>. Acesso em: 17 jan. 2014.
- [20] EUCLIDES. **Elementos de Geometria**. Traduzido por COMMANDINO, F. São Paulo: Edições Cultura, 1944. Disponível em: <<http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/be00001a.pdf>>. Acesso em: 15 set. 2013.
- [21] FELIPPE, B. Z. **Coordenadas do Espaço de Teichmüller**. 2006. 102f. Dissertação (mestrado em Matemática). Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2006. Disponível em: <<http://www.mat.ufmg.br/intranet-atual/pgmat/TesesDissertacoes/uploaded/Diss133.pdf>>. Acesso em: 17 jan. 2014.

- [22] FIRER, M. **Geometria Neutra e uma Pitada de Geometria Hiperbólica**. Campinas: UNICAMP, 2007.
- [23] GONÇALVES, A. **Introdução à álgebra**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- [24] JÚNIOR, A. C. **Imersões mínimas e conformes em $M^2 \times \mathbb{R}$** . 2009. 113f. Dissertação (mestrado em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, RJ, 2009. Disponível em: <http://www2.dbd.puc-rio.br/pergamum/biblioteca/php/mostrateses.php?open=1&arqtese=0710697_09_Indice.html>. Acesso em: 17 jan. 2014.
- [25] JÚNIOR, J. D. O. **Construção de superfícies utilizando o teorema de Poincaré**. 2010. 83f. Dissertação (mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG, 2010. Disponível em: <<http://www.dma.ufv.br/mestradodma/DissertacaoJoao.pdf>>. Acesso em: 17 jan. 2014.
- [26] LIMA, E. L. **Análise Real**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. Volume 2.
- [27] MARTINS, J. E. **Modelos Para Geometria Hiperbólica**. João Pessoa: UFPB, 2011. Disponível em: <<http://rei.biblioteca.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/33/1/JEM14082012.PDF>>. Acesso em: 15 set. 2013.
- [28] OLIVEIRA, E. C.; QUEIROZ, M. L. B.; REZENDE, E. Q. F.; RODRIGUES, C. I. **Transformação de Möbius**. Campinas: UNICAMP. Disponível em: <<http://m3.ime.unicamp.br>>. Acesso em: 17 jan. 2014.
- [29] QUEIROZ, F. C. M.; SANTOS, P. B., AUGUSTINI, E. Tópicos de Geometria Hiperbólica. In: Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 3., 2006, Goiânia. **Pôster...** Goiânia: UFG, 2006. Disponível em: <<http://www.ime.ufg.br/bienal/2006/poster/flavia.pdf>>. Acesso em: 15 set. 2013.
- [30] ROCHA, L. D. S. Um pouco de Geometria Hiperbólica. In: Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 3., 2006, Goiânia. **Pôster...** Goiânia: UFG, 2006. Disponível em: <<http://www.mat.ufg.br/bienal/2006/poster/laurindo.pdf>>. Acesso em: 17 jan. 2014.
- [31] ROCHA, L. F. C. Introdução à Geometria Hiperbólica Plana. Colóquio Brasileiro de Matemática, 16., 1987, Rio de Janeiro. **Curso...** Rio de Janeiro: IMPA, 1987.
- [32] SAMPAIO, J. E. **Extensão de aplicações na esfera de um espaço vetorial com produto interno**. 01 de janeiro de 2014. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1109.2866>>. Acesso em: 17 jan. 2014.

- [33] SILVA, D. F. **Propriedades termodinâmicas de um gás ideal em superfícies hiperbólicas compactas**. 2012. 76f. Dissertação (mestrado em Física) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2012. Disponível em: <<http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/55417/000855832.pdf?sequence=1>>. Acesso em: 17 jan. 2014.
- [34] SOARES, M. G. **Cálculo em uma variável complexa**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- [35] TEIXEIRA, E. J. **Transformações de Möbius e Geometria Hiperbólica**. Viçosa, MG: UFV, 2006. Relatório Final do PIBIC. Disponível em: <http://wwwimpa.br/opencms/pt/eventos/downloads/jornadas_2006/trabalhos/jornadas_edson_teixeira.pdf>. Acesso em: 17 jan. 2014.
- [36] VILLELA, M. L.T. **Grupos**. Rio de Janeiro: UFF, 2009.
- [37] VON FLACH, R. A. **A Geometria Hiperbólica e o Disco de Poincaré: A Consistência dos Axiomas Hiperbólicos e uma versão do Teorema de Pitágoras**. Salvador: UFBA, 2009. Disponível em: <http://www.colmat.ufba.br/sites/colmat.ufba.br/files/Monografia_Rodrigo_von_Flach_2009_2.pdf>. Acesso em: 15 set. 2013.