

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

JOYCE DOMINGUEZ SANTANA

FÓRMULAS DE DISTÂNCIA NO ESPAÇO HIPERBÓLICO
COMPLEXO

Belo Horizonte-MG
2014

JOYCE DOMINGUEZ SANTANA

FÓRMULAS DE DISTÂNCIA NO ESPAÇO HIPERBÓLICO
COMPLEXO

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr Francisco Dutenhefner

*Belo Horizonte-MG
2014*

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, por ter me criado e me capacitado. Sem Ele eu não seria nada e com Ele eu posso tudo.

À minha mãe Cássia pelas orações e incentivo, e por ter participado mesmo à distância desta conquista.

Às minhas irmãs, Cássia Cristina e Lílian, que em todos os momentos estiveram disponíveis para me aconselhar e ajudar.

Agradeço ao meu orientador Francisco pela paciência, dedicação e por ter compartilhado seus conhecimentos comigo.

À todos os meus professores e à secretaria de pós-graduação pelas orientações.

Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo financiamento dos meus estudos.

Por fim, agradeço aos meus colegas que estiveram ao meu lado nesta jornada, em especial ao Victor, Tauan, Jéssica, Antônio e Aislan, e aos meus amigos pelo apoio.

Que Deus abençoe e recompense a cada um que, direta ou indiretamente, me ajudou nesta jornada!

Resumo

Este trabalho consiste em apresentar as fórmulas para a distância entre pontos, linhas geodésicas reais, geodésicas complexas, bissetores e qualquer combinação entre dois destes objetos no espaço hiperbólico complexo. Vamos considerar o espaço hiperbólico complexo de dimensão dois, pois as fórmulas demonstradas se generalizam naturalmente para o espaço hiperbólico de qualquer dimensão, trocando apenas o conceito de geodésica complexa pelo conceito de hiperplano complexo. Para a maioria dos casos estudados, as fórmulas apresentadas fornecem expressões explícitas para as distâncias desejadas. Entretanto, no caso de duas linha geodésicas reais, dois bissetores e no caso da distância entre uma linha geodésica real e um bissetor, a distância depende de uma raiz de um polinômio do sexto grau e do η -invariante. Apresentaremos exemplos em que este polinômio é solúvel e um exemplo em que este polinômio não é solúvel por radicais. Nosso estudo foi baseado no artigo "*Distance formulas in complex hyperbolic space*" de Hanna Sandler [2], mas usamos como principais referências o livro "*Complex Hyperbolic Geometry*" de William M. Goldman [1] e as notas "*Notes on Complex Hyperbolic Geometry*" de John R. Parker [5].

Palavras-chave: espaço hiperbólico complexo, fórmulas de distância, η -invariante, geodésicas, geodésicas complexas, bissetores.

Abstract

This work consists of presenting formulas for the distance between points, real geodesics lines, complex geodesics, bisectors and any combination of these objects in complex hyperbolic space. Let us consider the two-dimension complex hyperbolic space, because demonstrated formulas generalize naturally to the hyperbolic space of any dimension, changing only the concept of geodesic complex by the concept of hyperplane complex. For most cases studied, the formulas presented provide explicit expressions for the desired distances. However, in the case of two real geodesic line two bisectors and in the case of distance between a real geodesic line and a bisector, the distance depends on of a root of a polynomial of sixth degree and η -invariant. We will present examples in which it is soluble the polynomial and an example in which the polynomial is not soluble radical. Our study was based on the Hanna Sandler article "*Distance formulas in complex hyperbolic space*" [2], but used as main references the book "*Complex Hyperbolic Geometry*" of William M. Goldman [1] and John R. Parker notes "*Notes on Complex Hyperbolic Geometry*" [5].

Keywords: complex hyperbolic space, distance formulas, η -invariant, geodesics, complex hyperplanes, bisectors.

Sumário

Introdução	8
1 O Espaço Hiperbólico Complexo	10
1.1 Formas hermitianas em $\mathbb{C}^{2,1}$	10
1.2 Modelos do espaço hiperbólico complexo	11
1.2.1 Modelo Projetivo	12
1.2.2 Modelo da bola	12
1.2.3 Domínio de Siegel ou modelo do parabolóide	13
1.3 Isometrias	13
1.4 Transformação de Cayley	18
1.5 Coordenadas Horoesféricas	20
2 Resultados Preliminares	22
2.1 Produto vetorial hermitiano	22
2.2 Invariantes	26
2.2.1 A razão cruzada clássica	26
2.2.2 O invariante de Korányi - Reimann	28
2.2.3 O invariante de Cartan	28
2.2.4 O η -invariante	30
2.3 Resultados de Álgebra	31
2.3.1 Grupos Solúveis	31
2.3.2 Extensões de corpos	32
3 Geodésicas, Geodésicas Complexas e Bissetores em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$	34
3.1 Geodésicas	34
3.1.1 Linhas geodésicas reais em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$	35
3.1.2 Geodésica Complexa	36
3.1.3 Projeção Ortogonal e Inversão sobre uma geodésica complexa	38
3.2 Bissetores	39
3.2.1 Decomposição em fatias	39
4 Distâncias em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$	43
4.1 Distância entre dois pontos	43
4.2 Distância entre um ponto e uma geodésica complexa	44
4.3 Distância entre um ponto e uma geodésica	45
4.4 Distância entre um ponto e um bissetor	48
4.5 Distância entre uma geodésica complexa e uma geodésica	51

4.6	Distância entre uma geodésica complexa e um bissetor	53
4.7	Distância entre geodésicas	55
4.8	Distância entre bissetores	59
4.9	Distância entre uma geodésica e um bissetor	61
4.10	Exemplos	64

Bibliografia**72**

Introdução

O principal objetivo deste trabalho é encontrar as fórmulas da distância entre alguns objetos do espaço hiperbólico complexo, sendo eles pontos, linhas geodésicas reais, geodésicas complexas, bissetores ou qualquer combinação de dois destes objetos. Vamos somente considerar o espaço hiperbólico complexo de dimensão dois pois as fórmulas demonstradas se generalizam para o espaço hiperbólico de qualquer dimensão trocando o conceito de linha geodésica pelo conceito de hiperplano complexo.

Na maioria das vezes encontrar uma fórmula de distância não é uma tarefa difícil. Goldman [1] (página 76) apresenta uma fórmula de distância entre dois pontos $p, q \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ a descrevendo em termos da forma hermitiana como segue

$$\cosh^2 \left(\frac{\rho(p, q)}{2} \right) = \frac{\langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle}{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle}$$

onde P e Q são os representantes de p e q em $\mathbb{C}^{2,1}$, respectivamente. Utilizando a projeção ortogonal sobre uma geodésica complexa conseguimos, através da fórmula acima, encontrar uma fórmula para a distância entre um ponto em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ e uma geodésica complexa. Baseado nestas duas fórmulas e considerando a definição do η -invariante, encontramos fórmulas de distância para combinações entre pontos e qualquer outro objeto em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, e entre geodésicas complexas e qualquer outro elemento em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. No entanto, para distância entre duas linhas geodésicas reais, entre dois bissetores e entre uma geodésica e um bissetor, o problema fica mais complexo pois envolve a extração de raízes de polinômios de grau 6 cujos coeficientes estão em função da forma hermitiana, e tais polinômios podem não ser solúveis por radicais em uma extensão transcendental F de \mathbb{Q} . Assim, dependendo do polinômio envolvido, nem sempre será possível explicitar a distância entre geodésicas e bissetores.

Com o intuito de apresentar esses resultados, no capítulo 1 definimos alguns modelos do espaço hiperbólico complexo de dimensão dois, a saber, o modelo projetivo, o modelo da bola unitária e o modelo do parabolóide (ou domínio de Siegel). Finalizamos com a apresentação da transformação de Cayley, que é uma isometria que leva pontos do modelo da bola em pontos do domínio de Siegel, e definimos as coordenadas horoesféricas, outra maneira de representar pontos do modelo do parabolóide.

No capítulo 2 falamos de alguns tópicos necessários para os resultados principais deste trabalho. Definimos o produto vetorial hermitiano que será útil, principalmente, para calcular um vetor polar. Depois apresentamos três invariantes no espaço hiperbólico complexo que utilizaremos: o invariante de Korányi-Reimann, o invariante de Cartan e o η -invariante. Finalizamos com alguns resultados de Álgebra que utilizaremos no capítulo 4 para garantir que um determinado polinômio não é solúvel por radicais.

No capítulo 3 definimos os objetos entre os quais calcularemos as distâncias. Utilizando o modelo da bola explicitamos uma parametrização para os pontos da linha geodésica real

que possui dois pontos finais dados na fronteira do espaço hiperbólico complexo. Apresentamos as geodésicas complexas que são subvariedades totalmente geodésicas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, e classificamos a posição relativa de duas delas como ultraparalelas, paralelas e concorrentes. Por fim, definimos os bissetores que, apesar de não serem subvariedades totalmente geodésicas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, podem ser decompostos em subvariedades totalmente geodésicas. Exibimos a decomposição dos bissetores em subvariedades totalmente geodésicas complexas chamada de decomposição em fatias de Mostow. O último teorema deste capítulo nos dará uma parametrização para os vetores polares das fatias de um bissetor, este resultado será utilizado para calcular a distância de qualquer objeto de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ a um bissetor.

Apresentamos as fórmulas de distância em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ no capítulo 4. Cada fórmula de distância entre combinações de pontos, geodésicas, geodésicas complexas e bissetores é apresentada separadamente, apesar de algumas delas serem obtidas por métodos quase idênticos. As três últimas fórmulas apresentadas, distância entre geodésicas, distância entre bissetores e distância entre geodésica e bissetor são encontradas usando o mesmo raciocínio, por isso elas chegam no mesmo problema que é o de encontrar as raízes de um determinado polinômio de grau 6 que nem sempre é solúvel por radicais. Para finalizar esse capítulo apresentamos exemplos de distância entre duas geodésicas onde é possível encontrar as raízes do polinômio de grau 6 e assim, conseguimos calcular a distância entre as geodésicas e um exemplo onde o polinômio de grau 6 não é solúvel por radicais.

Este trabalho foi baseado no artigo da Hanna Sandler que, inicialmente, tinha como objetivo estudar os subgrupos discretos de $U(n,1)$. Como, nestes subgrupos, os bissetores formam as faces do poliedro fundamental de Dirichlet, é necessário saber quando dois bissetores não se intersectam, e no caso da interseção determinar o ângulo entre eles. No capítulo 4 apresentamos no caso em que os bissetores são disjuntos a distância entre eles e exibimos um método para verificar se dois bissetores se intersectam (ver seção: Distância entre uma geodésica complexa e um bissetor) sendo possível neste último caso calcular o ângulo entre eles.

Capítulo 1

O Espaço Hiperbólico Complexo

Neste capítulo falaremos brevemente do espaço hiperbólico complexo de dimensão dois. Definiremos três modelos de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, o modelo projetivo, o modelo da bola unitária e o modelo do parabolóide (ou domínio de Siegel). Além disso, exibimos a isometria que leva pontos do modelo da bola em pontos do domínio de Siegel, chamada de transformação de Cayley. Finalizamos com a definição das coordenadas horoesféricas, que é outra forma de representar pontos do modelo do parabolóide.

1.1 Formas hermitianas em $\mathbb{C}^{2,1}$

Considere $H = (a_{ij})$ uma matriz complexa $k \times l$. Definimos a **transposta hermitiana** de H como sendo a matriz complexa $H^* = (\bar{a}_{ji})$ cujas entradas são os conjugados das entradas da matriz H transposta.

A matriz complexa H , $k \times k$, é dita **hermitiana** se $H = H^*$.

Para cada matriz $k \times k$ hermitiana H podemos associar uma **forma hermitiana**

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}$$

dada por $\langle Z, W \rangle = W^* H Z$ onde W e Z são vetores coluna em \mathbb{C}^k .

As formas hermitianas são lineares em relação a primeira coordenada e linear conjugada em relação a segunda coordenada.

Propriedades: Para Z, Z_1, Z_2, W vetores coluna de \mathbb{C}^k temos:

1. $\langle Z_1 + Z_2, W \rangle = \langle Z_1, W \rangle + \langle Z_2, W \rangle$
2. $\langle \lambda Z, W \rangle = \lambda \langle Z, W \rangle$
3. $\langle Z, W \rangle = \overline{\langle W, Z \rangle}$

Das propriedades acima podemos verificar que

$$\begin{aligned}\langle Z, Z \rangle &\in \mathbb{R} \\ \langle Z, \lambda W \rangle &= \bar{\lambda} \langle Z, W \rangle \\ \langle \lambda Z, \lambda W \rangle &= |\lambda|^2 \langle Z, W \rangle\end{aligned}$$

Seja $\mathbb{C}^{2,1}$ o espaço vetorial complexo munido com a forma hermitiana não degenerada (núcleo trivial) e indefinida (admite valores positivos, negativos e eventualmente nulos) de assinatura $(2, 1)$. Assim, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é dada por uma matriz hermitiana com 2 autovalores positivos e 1 autovalor negativo.

Existem algumas formas hermitianas que são bastante usadas. Como exemplo, destacaremos três.

Sejam $Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$ e $W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,1}$. A forma hermitiana usual é definida por:

$$\langle Z, W \rangle = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 - z_3 \bar{w}_3$$

cuja matriz hermitiana é:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A forma hermitiana definida por:

$$\langle Z, W \rangle = z_1 \bar{w}_3 + z_2 \bar{w}_2 + z_3 \bar{w}_1$$

tem matriz hermitiana:

$$H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

E a forma hermitiana dada por:

$$\langle Z, W \rangle = z_1 \bar{w}_1 - z_2 \bar{w}_3 - z_3 \bar{w}_2$$

tem a seguinte matriz hermitiana:

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2 Modelos do espaço hiperbólico complexo

Podemos definir os seguintes subconjuntos de $\mathbb{C}^{2,1}$:

$$\begin{aligned} V_+ &= \{Z \in \mathbb{C}^{2,1} \mid \langle Z, Z \rangle > 0\} \\ V_0 &= \{Z \in \mathbb{C}^{2,1} \mid \langle Z, Z \rangle = 0\} \\ V_- &= \{Z \in \mathbb{C}^{2,1} \mid \langle Z, Z \rangle < 0\} \end{aligned}$$

Os vetores pertencentes a V_+ são chamados de vetores **positivos**, os vetores em V_0 são nomeados vetores **nulos** ou **isotrópicos** e os vetores de V_- são ditos vetores **negativos**.

1.2.1 Modelo Projetivo

Defina em $\mathbb{C}^{2,1} - \{0\}$ a relação de equivalência:

$$Z \sim W \Leftrightarrow W = \lambda Z$$

onde λ é um escalar complexo não nulo.

Seja \mathbb{CP}^2 o conjunto das classes desta relação de equivalência e seja $\mathbb{P}: \mathbb{C}^{2,1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{CP}^2$ a projeção natural dada por $\mathbb{P}(Z) = [Z]$, onde $[Z]$ é a classe de equivalência de Z .

O **modelo projetivo** do espaço hiperbólico complexo é visto como o conjunto das linhas negativas em $\mathbb{C}^{2,1}$, ou seja, $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 = \mathbb{P}(V_-)$ e sua fronteira como a conjunto das linhas nulas, isto é, $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 = \mathbb{P}(V_0)$. Ao conjunto das linhas positivas denotaremos por $\ell\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 = \mathbb{P}(V_+)$.

No modelo projetivo, a métrica em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, chamada de **métrica de Bergman** é dada pela função distância $\rho(\cdot, \cdot)$ definida por

$$\cosh^2 \left(\frac{\rho(z, w)}{2} \right) = \frac{\langle Z, W \rangle \langle W, Z \rangle}{\langle Z, Z \rangle \langle W, W \rangle}$$

onde $z, w \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ e Z, W são representantes de z e w em $\mathbb{C}^{2,1}$, respectivamente. Observe que esta fórmula independe da escolha dos representantes de z e w em $\mathbb{C}^{2,1}$.

1.2.2 Modelo da bola

Considere $Z \in V_- \subset \mathbb{C}^{2,1}$ e a forma hermitiana $\langle Z, W \rangle = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 - z_3 \bar{w}_3$. Então, $\langle Z, Z \rangle = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 - z_3 \bar{z}_3 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2 < 0$. Assim, $z_3 \neq 0$. Logo, dividindo todas as coordenadas de Z por z_3 obtemos um vetor negativo na mesma linha negativa determinada por Z :

$$\begin{bmatrix} z_1/z_3 \\ z_2/z_3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nomeando $z'_1 = z_1/z_3$ e $z'_2 = z_2/z_3$, vemos que o vetor $\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{bmatrix}$ é tal que

$$|z'_1|^2 + |z'_2|^2 = \left| \frac{z_1}{z_3} \right|^2 + \left| \frac{z_2}{z_3} \right|^2 = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{|z_3|^2} < 1.$$

Logo, $\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{bmatrix}$ pertence a bola unitária $\mathbb{B}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 < 1 \right\}$.

Por outro lado, dado um ponto $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{B}^2$, pode-se definir o vetor negativo $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,1}$.

Assim, o espaço hiperbólico complexo pode ser identificado com a bola \mathbb{B}^2 . A fronteira do modelo da bola unitária é dada por

$$\partial\mathbb{B}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = 1 \right\}$$

que é identificada com a esfera \mathbb{S}^3 .

Dado um ponto $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2$, o **levantamento** ou **representante** de z é o ponto $Z \in \mathbb{C}^{2,1}$ dado por

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De modo geral, sempre utilizamos este modelo de levantamento, mas, em ocasiões específicas, pode ser necessário a utilização de outros levantamentos.

1.2.3 Domínio de Siegel ou modelo do parabolóide

Para $Z, W \in \mathbb{C}^{2,1}$, considere a seguinte forma hermitiana:

$$\langle Z, W \rangle = z_1 \bar{w}_1 - z_2 \bar{w}_3 - z_3 \bar{w}_2.$$

Se $Z \in V_-$ então

$$\begin{aligned} \langle Z, Z \rangle &= z_1 \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_3 - z_3 \bar{z}_2 < 0 \\ &\Rightarrow 2\operatorname{Re}(z_2 \bar{z}_3) - |z_1|^2 > 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Assim o conjunto dos pontos que satisfaz (1.1) pode ser identificado com o espaço hiperbólico complexo.

Fazendo $z_3 = 1$ obtemos o seguinte conjunto

$$\mathfrak{h}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid 2\operatorname{Re}(z_2) - |z_1|^2 > 0 \right\}$$

que é chamado **domínio de Siegel**.

A fronteira do domínio de Siegel é dada por

$$\partial\mathfrak{h}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid 2\operatorname{Re}(z_2) - |z_1|^2 = 0 \right\} \cup \{p_\infty\}$$

onde p_∞ é o **ponto ideal**, cujo levantamento em $\mathbb{C}^{2,1}$ é dado por $P_\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

O ponto $o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \partial\mathfrak{h}^2$ é a origem do domínio de Siegel. Um levantamento em $\mathbb{C}^{2,1}$

para este ponto pode ser o vetor $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Como $2\operatorname{Re}(z_2) - |z_1|^2 = 0$ representa um parabolóide, o modelo do domínio de Siegel também é conhecido como **modelo do parabolóide**.

1.3 Isometrias

Seja $U(2,1)$ o conjunto das matrizes 3×3 que preservam uma forma hermitiana dada em $\mathbb{C}^{2,1}$. Isto é, $A \in U(2,1)$ se

$$\langle AZ, AW \rangle = \langle Z, W \rangle,$$

para quaisquer vetores coluna $Z, W \in \mathbb{C}^{2,1}$.

Cada matriz em $U(2,1)$ que é um múltiplo escalar complexo não nulo da identidade, leva cada linha de $\mathbb{C}^{2,1}$ nela mesma, assim age trivialmente no espaço hiperbólico complexo. Considere a aplicação $\mathbb{P}: U(2,1) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{CP}^2)$, onde $\text{Aut}(\mathbb{CP}^2)$ é o grupo dos biholomorfismos de \mathbb{CP}^2 . Definimos o **grupo unitário projetivo** $PU(2,1) = \mathbb{P}(U(2,1))$ sendo o grupo dos biholomorfismos de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, cujos elementos são chamados de **transformações lineares projetivas**.

Se $A \in U(2,1)$ então A é uma matriz 3×3 tal que $\langle AZ, AW \rangle = \langle Z, W \rangle$ para quaisquer $Z, W \in \mathbb{C}^{2,1}$. Se H é a matriz da forma hermitiana dada em $\mathbb{C}^{2,1}$ então esta equação implica que

$$(AW)^*H(AZ) = W^*HZ \Rightarrow W^*(A^*HA)Z = W^*HZ.$$

Como W e Z são arbitrários, para a última igualdade ser verdadeira devemos ter

$$A^*HA = H. \quad (1.2)$$

Portanto, $U(2,1)$ também pode ser caracterizado por

$$U(2,1) = \{A \in U(2,1) | A^*HA = H\}.$$

Multiplicando a expressão (1.2) por H^{-1} obtemos $(H^{-1}A^*H)A = Id$ e portanto temos a seguinte expressão conveniente para a inversa de uma matriz $A \in U(2,1)$:

$$A^{-1} = H^{-1}A^*H. \quad (1.3)$$

A propriedade abaixo facilita o cálculo do produto A^*HA quando se deseja verificar que uma dada matriz A é hermitiana.

Propriedade 1.1. Seja H uma matriz hermitiana 3×3 e seja $\langle Z, W \rangle = W^*HZ$ a forma hermitiana definida por H em \mathbb{C}^3 . Se A é uma matriz 3×3 cujas colunas são, respectivamente, os vetores V_1, V_2 e V_3 então

$$A^*HA = \begin{bmatrix} \langle V_1, V_1 \rangle & \langle V_2, V_1 \rangle & \langle V_3, V_1 \rangle \\ \langle V_1, V_2 \rangle & \langle V_2, V_2 \rangle & \langle V_3, V_2 \rangle \\ \langle V_1, V_3 \rangle & \langle V_2, V_3 \rangle & \langle V_3, V_3 \rangle \end{bmatrix}.$$

Esta propriedade pode ser facilmente demonstrada lembrando que se $A = (a_{ij})$ então $A^* = (\bar{a}_{ji})$ e que as colunas de A são formadas pelos vetores V_1, V_2 e V_3 .

Proposição 1.1. Para qualquer ponto $z \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, usando o modelo da bola, existe um elemento de $PU(2,1)$ que leva a origem da bola \mathbb{B}^2 em z , ou seja, $PU(2,1)$ age transitivamente no espaço hiperbólico complexo.

Demonstração. Seja $Z \in \mathbb{C}^{2,1}$ o levantamento de z . Já que $\langle Z, Z \rangle < 0$, podemos definir o vetor $\widehat{Z} = \frac{Z}{\sqrt{-\langle Z, Z \rangle}}$. Este vetor é tal que $\langle \widehat{Z}, \widehat{Z} \rangle = -1$. Podemos construir uma matriz

$A \in U(2,1)$ de modo que

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \widehat{Z}$$

ou seja, cuja terceira coluna é \widehat{Z} . Para isso, tomamos qualquer base de $\mathbb{C}^{2,1}$ contendo \widehat{Z} . Usando uma versão do processo de Gram-Schmidt de assinatura $(2,1)$ que produz vetores E_1, E_2 tais que $\langle E_1, E_1 \rangle = \langle E_2, E_2 \rangle = 1$ e $\langle E_1, E_2 \rangle = \langle E_1, \widehat{Z} \rangle = \langle E_2, \widehat{Z} \rangle = 0$, produzimos a matriz A cujas duas primeiras colunas são formadas pelos vetores E_1 e E_2 . Assim, $A \in U(2,1)$. Projetivizando, vemos que $\mathbb{P}(A) \in PU(2,1)$ leva a origem da bola em $z \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Portanto, $PU(2,1)$ age transitivamente no espaço hiperbólico complexo. \square

Corolário 1.1. Dado um ponto em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, seu estabilizador em $PU(2,1)$ é conjugado a $P(U(2) \times U(1))$. Além disso, no modelo da bola, o estabilizador da origem age como a ação usual de $U(2)$ em \mathbb{C}^2 .

Demonstração. Usando o modelo da bola, pela proposição acima podemos considerar a origem 0 da bola \mathbb{B}^2 para demonstrar esse corolário. Assim, considere $A \in U(2,1)$ uma matriz que fixa a origem:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}$$

Se $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um levantamento da origem então $A \cdot 0 = \lambda \cdot 0$ e assim

$$A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Daí $c = f = 0$.

Como A unitária, por (1.3), $A^{-1} = H_1^{-1} A^* H_1 = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{d} & -\bar{g} \\ \bar{b} & \bar{e} & -\bar{h} \\ -\bar{c} & -\bar{f} & \bar{j} \end{bmatrix}$.

Já que A^{-1} também fixa a origem, do mesmo modo que fizemos para A , podemos concluir que $g = h = 0$. Assim A tem a aparência

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix}.$$

Como $A \in U(2,1)$ segue que $A_0 = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \in U(2)$, o grupo unitário de \mathbb{C}^2 . Daí, sendo $|\det(A)| = |\det(A_0)| = 1$, temos que $|j| = 1$ e, portanto, concluimos que A tem a forma

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

sendo $A_0 \in U(2)$.

□

Seja $A \in U(2,1)$. Como A preserva a forma hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{C}^{2,1}$ e como a métrica de Bergman é dada em termos desta forma, projetivizando vemos que todo elemento de $PU(2,1)$ age como uma isometria de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Entretanto, nem todas as isometrias de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ pertencem a $PU(2,1)$. Por exemplo, a conjugação $f: \mathbb{C}^{2,1} \rightarrow \mathbb{C}^{2,1}$ dada por $f(z) = \bar{z}$ age como uma isometria em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ que não está em $PU(2,1)$.

Teorema 1.1. *Cada isometria de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ ou é holomorfa, isto é, pertence a $PU(2,1)$, ou é anti-holomorfa, ou seja, é a composição de um elemento de $PU(2,1)$ com a conjugação complexa.*

Demonstração. Usando o modelo da bola, seja ψ uma isometria de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Pela proposição 1.1, aplicando um elemento de $PU(2,1)$ podemos assumir que ψ fixa a origem.

Considere $(z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2$ qualquer e $\psi(z_1, z_2) = (w_1, w_2)$, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - |z_1|^2 - |z_2|^2} &= \cosh^2 \left(\frac{\rho((z_1, z_2), (0, 0))}{2} \right) \\ &= \cosh^2 \left(\frac{\rho((w_1, w_2), (0, 0))}{2} \right) \\ &= \frac{1}{1 - |w_1|^2 - |w_2|^2} \end{aligned}$$

Assim,

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |w_1|^2 + |w_2|^2 \tag{1.4}$$

Pelo corolário 1.1 assumimos que $(1/2, 0) \in \mathbb{B}^2$ é levado em um ponto $(x, 0) \in \mathbb{B}^2$ com $0 < x < 1$. Logo, pela igualdade (1.4), segue que $x = 1/2$. Portanto, ψ fixa $(1/2, 0) \in \mathbb{B}^2$.

Considere, agora, $\psi(r, 0) = (a + ib, c + di)$ com $0 < r < 1$. Da igualdade (1.4) vemos que

$$r^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \quad (1.5)$$

De forma particular temos que $a \leq r < 1$, então $(1 - r/2)^2 \leq (1 - a/2)^2$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{(1 - r/2)^2}{(1 - r^2)(1 - 1/4)} &= \cosh^2 \left(\frac{\rho((r, 0), (1/2, 0))}{2} \right) \\ &= \cosh^2 \left(\frac{\rho((a + ib, c + di), (1/2, 0))}{2} \right) \\ &= \frac{(1 - a/2)^2 + (b/2)^2}{(1 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2)(1 - 1/4)} \end{aligned}$$

Assim, $(1 - r/2)^2 = (1 - a/2)^2 + (b/2)^2$, isto é,

$$(1 - a/2)^2 \geq (1 - r/2)^2 = (1 - a/2)^2 + (b/2)^2 \geq (1 - a/2)^2.$$

Logo, $a = r$. Da igualdade (1.5) segue que $b = c = d = 0$. Então $\psi(r, 0) = (r, 0)$ e, portanto, ψ fixa $(r, 0)$ para $0 \leq r < 1$.

Agora, considerando $\psi(0, 1/2) = (a + ib, c + di)$, obtemos da igualdade (1.4)

$$1/4 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \quad (1.6)$$

Além disso, para todo $0 \leq r < 1$ temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - 1/4)(1 - r^2)} &= \cosh^2 \left(\frac{\rho((0, 1/2), (r, 0))}{2} \right) \\ &= \cosh^2 \left(\frac{\rho((a + bi, c + di), (r, 0))}{2} \right) \\ &= \frac{(1 - ar)^2 + (br)^2}{(1 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2)(1 - r^2)} \end{aligned}$$

Pela igualdade (1.6), para todo $0 < r < 1$ vale $1 = 1 - 2ar + r^2(a^2 + b^2)$. Assim, $a = b = 0$, logo $\psi(0, 1/2) = (0, c + di)$.

Aplicando um elemento de $PU(2, 1)$ que fixa $(r, 0)$ e leva $(0, c + di)$ em $(0, s)$ com $0 < s < 1$, encontramos $s = 1/2$. Daí, ψ fixa $(0, 1/2)$.

De forma análoga ao que fizemos encontramos que ψ fixa $(0, r)$, isto é, $\psi(0, r) = (0, r)$ para todo $0 \leq r < 1$.

Para finalizar, considere $\psi(z_1, z_2) = (w_1, w_2)$. Como fizemos inicialmente temos $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |w_1|^2 + |w_2|^2$, e além disso, para $0 < r < 1$ encontramos

$$\begin{aligned} \frac{(1 - rz_1)(1 - r\bar{z}_1)}{(1 - |z_1|^2 - |z_2|^2)(1 - r^2)} &= \cosh^2\left(\frac{\rho((z_1, z_2), (r, 0))}{2}\right) \\ &= \cosh^2\left(\frac{\rho((w_1, w_2), (r, 0))}{2}\right) \\ &= \frac{(1 - rw_1)(1 - r\bar{w}_1)}{(1 - |w_1|^2 - |w_2|^2)(1 - r^2)} \end{aligned}$$

Assim, $|1 - rz_1|^2 = |1 - rw_1|^2$. Daí, $|z_1|^2 = |w_1|^2$ e $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(w_1)$, ou seja, $z_1 = w_1$ ou $z_1 = \bar{w}_1$.

De forma similar ao que acabamos de fazer, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{(1 - rz_2)(1 - r\bar{z}_2)}{(1 - |z_1|^2 - |z_2|^2)(1 - r^2)} &= \cosh^2\left(\frac{\rho((z_1, z_2), (0, r))}{2}\right) \\ &= \cosh^2\left(\frac{\rho((w_1, w_2), (0, r))}{2}\right) \\ &= \frac{(1 - rw_2)(1 - r\bar{w}_2)}{(1 - |w_1|^2 - |w_2|^2)(1 - r^2)} \end{aligned}$$

E com o mesmo argumento usado, concluímos que $z_2 = w_2$ ou $z_2 = \bar{w}_2$.

Como $(z_1, z_2) \mapsto (z_1, \bar{z}_2)$ e $(z_1, z_2) \mapsto (\bar{z}_1, z_2)$ não são isometrias, segue que ψ ou é a identidade ou é conjugação complexa.

Portanto, uma isometria em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ ou está em $PU(2, 1)$ ou é um elemento de $PU(2, 1)$ seguido de uma conjugação complexa. □

Definição 1.1. Uma isometria em $PU(2, 1)$ hiperbólica complexa pode ser:

- **Loxodrômica** se fixa exatamente dois pontos de $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$;
- **Parabólica** se fixa exatamente um ponto de $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$;
- **Elíptica** se fixa pelo menos um ponto de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$.

1.4 Transformação de Cayley

Considere $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica de \mathbb{C}^3 e $\hat{E} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ outra base de \mathbb{C}^3 tal que

$$\hat{e}_1 = e_1, \quad \hat{e}_2 = -e_2 + e_3, \quad \hat{e}_3 = \frac{e_2 + e_3}{2}.$$

Os representantes dos pontos da bola \mathbb{B}^2 estão em \mathbb{C}^3 através da base canônica E e os representantes dos pontos do domínio de Siegel estão em \mathbb{C}^3 por meio da base \widehat{E} .

Representando $[v]_E$ e $[v]_{\widehat{E}}$ as matrizes coluna que representam as coordenadas de um vetor $v \in \mathbb{C}^3$ nas bases E e \widehat{E} , respectivamente, temos $D \cdot [v]_{\widehat{E}} = [v]_E$ onde D é a matriz mudança de base de \widehat{E} para E dada por:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Seja $Z \in \mathbb{C}^3$ um vetor negativo. Considere $[Z]_E = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$ e $[Z]_{\widehat{E}} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$. Então, sabemos que

$$D \cdot [Z]_{\widehat{E}} = [Z]_E \quad \text{e} \quad D^{-1} \cdot [Z]_E = [Z]_{\widehat{E}}$$

onde D é matriz mudança de base.

Resolvendo essas igualdades encontramos

$$\begin{cases} z_1 = w_1 \\ z_2 = \frac{-2w_2 + w_3}{2} \\ z_3 = \frac{2w_2 + w_3}{2} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} w_1 = z_1 \\ w_2 = \frac{-z_2 + z_3}{2} \\ w_3 = z_2 + z_3 \end{cases}$$

Portanto, podemos considerar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} & \xrightarrow{D^{-1}} & \begin{bmatrix} w_1 = z_1 \\ w_2 = \frac{-z_2 + z_3}{2} \\ w_3 = z_2 + z_3 \end{bmatrix} \\ \mathbb{P} \downarrow & & \downarrow \mathbb{P} \\ \begin{bmatrix} \frac{z_1}{z_3} \\ \frac{z_2}{z_3} \\ \frac{z_3}{z_3} \\ 1 \end{bmatrix} & \longrightarrow & \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_3} = \frac{z_1}{z_2 + z_3} \\ \frac{w_2}{w_3} = \frac{-z_2 + z_3}{2(z_2 + z_3)} \\ \frac{w_3}{w_3} = 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Seja $\widetilde{z}_1 = \frac{z_1}{z_3}$, $\widetilde{z}_2 = \frac{z_2}{z_3}$, $\widetilde{w}_1 = \frac{w_1}{w_3}$ e $\widetilde{w}_2 = \frac{w_2}{w_3}$. Daí, a mudança de base D^{-1} induz a aplicação

$$C: \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathfrak{h}^2$$

$$\begin{bmatrix} \widetilde{z}_1 \\ \widetilde{z}_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \widetilde{w}_1 = \frac{\widetilde{z}_1}{1 + \widetilde{z}_2} \\ \widetilde{w}_2 = \frac{1 - \widetilde{z}_2}{2(1 + \widetilde{z}_2)} \end{bmatrix}$$

que tem a seguinte inversa:

$$D: \mathfrak{h}^2 \rightarrow \mathbb{B}^2$$

$$\begin{bmatrix} \widetilde{w}_1 \\ \widetilde{w}_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \widetilde{z}_1 = \frac{2\widetilde{w}_1}{1 + 2\widetilde{w}_2} \\ \widetilde{z}_2 = \frac{1 - 2\widetilde{w}_2}{1 + 2\widetilde{w}_2} \end{bmatrix}$$

Verifiquemos agora que através de C levamos pontos no modelo da bola em pontos no modelo do parabolóide:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{B}^2 &\Leftrightarrow |\tilde{z}_1|^2 + |\tilde{z}_2|^2 < 1 \\
&\Leftrightarrow \left| \frac{2\tilde{w}_1}{1+2\tilde{w}_2} \right|^2 + \left| \frac{1-2\tilde{w}_2}{1+2\tilde{w}_2} \right|^2 < 1 \\
&\Leftrightarrow 4|\tilde{w}_1|^2 + (1-2\tilde{w}_2)(1-2\overline{\tilde{w}_2}) < (1+2\tilde{w}_2)(1+2\overline{\tilde{w}_2}) \\
&\Leftrightarrow 4|\tilde{w}_1|^2 - 8\operatorname{Re}(\tilde{w}_2) < 0 \\
&\Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(\tilde{w}_2) - |\tilde{w}_1|^2 > 0
\end{aligned}$$

A aplicação C é chamada de **Transformação de Cayley**.

1.5 Coordenadas Horoesféricas

Seja $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ um ponto no domínio de Siegel \mathfrak{h}^2 , então $2\operatorname{Re}(w_2) - |w_1|^2 > 0$.

Considere $u = 2\operatorname{Re}(w_2) - |w_1|^2$, temos que $u > 0$ e $\operatorname{Re}(w_2) = \frac{|w_1|^2 + u}{2}$. Assim, $w_2 = \frac{|w_1|^2 + u - iv}{2}$ para algum $v \in \mathbb{R}$.

Portanto, todos os pontos do domínio de Siegel \mathfrak{h}^2 são dados por $w = \begin{bmatrix} \zeta \\ \frac{|\zeta|^2 + u - iv}{2} \end{bmatrix}$

onde $\zeta \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{R}$ e $u > 0$.

Nomeamos a tripla $(\zeta, v, u) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ de **coordenadas horoesféricas** do ponto $w \in \mathfrak{h}^2$.

Os pontos no domínio de Siegel estão relacionados com suas coordenadas horoesféricas através da aplicação:

$$\begin{aligned}
g: \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathfrak{h}^2 \\
(\zeta, v, u) &\mapsto \begin{bmatrix} \zeta \\ \frac{|\zeta|^2 + u - iv}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e da sua inversa:

$$\begin{aligned}
g^{-1}: \mathfrak{h}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\
\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{cases} \zeta = w_1 \\ v = -2\operatorname{Im}(w_2) \\ u = 2\operatorname{Re}(w_2) - |w_1|^2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Usando a transformação de Cayley podemos dar para os pontos da bola \mathbb{B}^2 coordenadas horoesféricas através das aplicações:

$$\begin{aligned}
D \circ g: \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{B}^2 \\
(\zeta, v, u) &\mapsto \begin{bmatrix} z_1 = \frac{2\zeta}{1+|\zeta|^2+u-iv} \\ z_2 = \frac{1-|\zeta|^2-u+iv}{1+|\zeta|^2+u-iv} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$g^{-1} \circ C: \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$
$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{cases} \zeta = \frac{z_1}{1+z_2} \\ v = -\operatorname{Im}\left(\frac{1-z_2}{1+z_2}\right) \\ u = \operatorname{Re}\left(\frac{1-z_2}{1+z_2}\right) - \left|\frac{z_1}{1+z_2}\right|^2 \end{cases}$$

Capítulo 2

Resultados Preliminares

Neste capítulo abordaremos alguns tópicos necessários para os resultados principais deste trabalho. Iniciamos com a apresentação do produto vetorial hermitiano, conceito utilizado, principalmente, para calcular um vetor polar a uma geodésica complexa. Em seguida apresentamos as definições e as principais propriedades do invariante de Korányi-Reimann, do invariante de Cartan e do η -invariante. Finalizamos este capítulo apresentando alguns resultados de Álgebra que serão utilizados no capítulo 4 para mostrar que algumas fórmulas de distância exibidas nem sempre poderão ser utilizadas.

2.1 Produto vetorial hermitiano

No espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^{2,1}$, o produto vetorial hermitiano tem papel semelhante ao do produto vetorial usual no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 .

Considere $\mathbb{C}^{2,1}$ munido da forma hermitiana $\langle Z, W \rangle = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 - z_3 \bar{w}_3$ para $Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$ e $W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,1}$.

Definição 2.1. O produto vetorial hermitiano é dado pela função

$$\boxtimes: \mathbb{C}^{2,1} \times \mathbb{C}^{2,1} \rightarrow \mathbb{C}^{2,1}$$

definida por

$$Z \boxtimes W = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \boxtimes \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{z}_3 \cdot \bar{w}_2 - \bar{z}_2 \cdot \bar{w}_3 \\ \bar{z}_1 \cdot \bar{w}_3 - \bar{z}_3 \cdot \bar{w}_1 \\ \bar{z}_1 \cdot \bar{w}_2 - \bar{z}_2 \cdot \bar{w}_1 \end{bmatrix}$$

Como no caso real em \mathbb{R}^3 , o vetor $V \boxtimes W$ é ortogonal a V e a W , isto é,

$$\langle V, V \boxtimes W \rangle = \langle W, V \boxtimes W \rangle = 0.$$

Lema 2.1. Sejam $P, Q, R, S \in \mathbb{C}^{2,1}$. Então

1. $P \boxtimes (Q \boxtimes R) = \langle Q, P \rangle R - \langle R, P \rangle Q$
2. $\langle P \boxtimes Q, R \boxtimes S \rangle = \langle S, P \rangle \langle R, Q \rangle - \langle R, P \rangle \langle S, Q \rangle$
3. Se P e Q são vetores nulos então $P \boxtimes Q$ é um vetor positivo ortogonal a P e a Q tal que $\langle P \boxtimes Q, P \boxtimes Q \rangle = |\langle P, Q \rangle|^2$

Demonstração. Usaremos a seguinte forma hermitiana $\langle P, Q \rangle = p_1 \bar{q}_1 + p_2 \bar{q}_2 - p_3 \bar{q}_3$ com

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \text{ e } S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}.$$

1. Pela definição obtemos

$$\begin{aligned} P \boxtimes (Q \boxtimes R) &= \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \boxtimes \begin{bmatrix} \bar{q}_3 \cdot \bar{r}_2 - \bar{q}_2 \cdot \bar{r}_3 \\ \bar{q}_1 \cdot \bar{r}_3 - \bar{q}_3 \cdot \bar{r}_1 \\ \bar{q}_1 \cdot \bar{r}_2 - \bar{q}_2 \cdot \bar{r}_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{p}_3(q_1 r_3 - q_3 r_1) - \bar{p}_2(q_1 r_2 - q_2 r_1) \\ \bar{p}_1(q_1 r_2 - q_2 r_1) - \bar{p}_3(q_3 r_2 - q_2 r_3) \\ \bar{p}_1(q_1 r_3 - q_3 r_1) - \bar{p}_2(q_3 r_2 - q_2 r_3) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Calculando $\langle Q, P \rangle R - \langle R, P \rangle Q$ temos

$$\langle Q, P \rangle R - \langle R, P \rangle Q = \begin{bmatrix} \bar{p}_3(q_1 r_3 - q_3 r_1) - \bar{p}_2(q_1 r_2 - q_2 r_1) \\ \bar{p}_1(q_1 r_2 - q_2 r_1) - \bar{p}_3(q_3 r_2 - q_2 r_3) \\ \bar{p}_1(q_1 r_3 - q_3 r_1) - \bar{p}_2(q_3 r_2 - q_2 r_3) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Por (2.1) e (2.2) vemos que $P \boxtimes (Q \boxtimes R) = \langle Q, P \rangle R - \langle R, P \rangle Q$.

$$2. \text{ Por definição, } P \boxtimes Q = \begin{bmatrix} \bar{p}_3 \cdot \bar{q}_2 - \bar{p}_2 \cdot \bar{q}_3 \\ \bar{p}_1 \cdot \bar{q}_3 - \bar{p}_3 \cdot \bar{q}_1 \\ \bar{p}_1 \cdot \bar{q}_2 - \bar{p}_2 \cdot \bar{q}_1 \end{bmatrix} \text{ e } R \boxtimes S = \begin{bmatrix} \bar{r}_3 \cdot \bar{s}_2 - \bar{r}_2 \cdot \bar{s}_3 \\ \bar{r}_1 \cdot \bar{s}_3 - \bar{r}_3 \cdot \bar{s}_1 \\ \bar{r}_1 \cdot \bar{s}_2 - \bar{r}_2 \cdot \bar{s}_1 \end{bmatrix}, \text{ então}$$

$$\begin{aligned} \langle P \boxtimes Q, R \boxtimes S \rangle &= \\ & \bar{p}_3 \cdot \bar{q}_2 r_3 s_2 - \bar{p}_3 \cdot \bar{q}_2 r_2 s_3 - \bar{p}_2 \cdot \bar{q}_3 r_3 s_2 + \bar{p}_2 \cdot \bar{q}_3 r_2 s_3 \\ & + \bar{p}_1 \cdot \bar{q}_3 r_1 s_3 - \bar{p}_1 \cdot \bar{q}_3 r_3 s_1 - \bar{p}_3 \cdot \bar{q}_1 r_1 s_3 + \bar{p}_3 \cdot \bar{q}_1 r_3 s_1 \\ & - \bar{p}_1 \cdot \bar{q}_2 r_1 s_2 + \bar{p}_1 \cdot \bar{q}_2 r_2 s_1 + \bar{p}_2 \cdot \bar{q}_1 r_1 s_2 - \bar{p}_2 \cdot \bar{q}_1 r_2 s_1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Calculando $\langle S, P \rangle \langle R, Q \rangle - \langle R, P \rangle \langle S, Q \rangle$ obtemos

$$\begin{aligned} \langle S, P \rangle \langle R, Q \rangle - \langle R, P \rangle \langle S, Q \rangle &= \\ &= (s_1 \bar{p}_1 + s_2 \bar{p}_2 - s_3 \bar{p}_3)(r_1 \bar{q}_1 + r_2 \bar{q}_2 - r_3 \bar{q}_2) \\ &\quad - (r_1 \bar{p}_1 + r_2 \bar{p}_2 - r_3 \bar{p}_3)(s_1 \bar{q}_1 + s_2 \bar{q}_2 - s_3 \bar{q}_2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Resolvendo (2.4) encontramos (2.3). Segue que $\langle P \boxtimes Q, R \boxtimes S \rangle = \langle S, P \rangle \langle R, Q \rangle - \langle R, P \rangle \langle S, Q \rangle$.

3. Se P e Q são vetores nulos, do item anterior segue que

$$\langle P \boxtimes Q, P \boxtimes Q \rangle = \langle Q, P \rangle \langle P, Q \rangle - \langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle = |\langle P, Q \rangle|^2.$$

□

Observação 2.1. Considere $Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$ e $W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,1}$.

- Se em $\mathbb{C}^{2,1}$ é considerada a forma hermitiana $\langle Z, W \rangle = z_1 \bar{w}_3 + z_2 \bar{w}_2 + z_3 \bar{w}_1$ dada pela matriz H_2 , então o produto vetorial hermitiano deve ser definido por

$$Z \boxtimes W = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \boxtimes \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \cdot \bar{w}_2 - \bar{z}_2 \cdot \bar{w}_1 \\ \bar{z}_3 \cdot \bar{w}_1 - \bar{z}_1 \cdot \bar{w}_3 \\ \bar{z}_2 \cdot \bar{w}_3 - \bar{z}_3 \cdot \bar{w}_2 \end{bmatrix}.$$

- Se em $\mathbb{C}^{2,1}$ é considerada a forma hermitiana $\langle Z, W \rangle = z_1 \bar{w}_1 - z_2 \bar{w}_3 - z_3 \bar{w}_2$ dada pela matriz H_3 , o produto vetorial hermitiano é definido por

$$Z \boxtimes W = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \boxtimes \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{z}_3 \cdot \bar{w}_2 - \bar{z}_2 \cdot \bar{w}_3 \\ \bar{z}_1 \cdot \bar{w}_2 - \bar{z}_2 \cdot \bar{w}_1 \\ \bar{z}_3 \cdot \bar{w}_1 - \bar{z}_1 \cdot \bar{w}_3 \end{bmatrix}.$$

- Independente da forma hermitiana H_1, H_2 ou H_3 definida em $\mathbb{C}^{2,1}$, são válidas as propriedades enunciadas para o produto vetorial hermitiano.

Vamos utilizar o conceito e as propriedades do produto vetorial hermitiano para demonstrar que o grupo $PU(2,1)$ age duplamente transitivamente em $\partial \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Antes é necessária a apresentação do seguinte lema:

Lema 2.2. Seja V o conjunto dos pares (P, Q) de vetores nulos em $\mathbb{C}^{2,1}$ tais que $\langle P, Q \rangle = -1$. O grupo $U(2,1)$ age transitivamente neste conjunto V .

Demonstração. Em $\mathbb{C}^{2,1}$ vamos considerar a forma hermitiana dada pela matriz H_3 , ou seja, $\langle Z, W \rangle = z_1 \bar{w}_1 - z_2 \bar{w}_3 - z_3 \bar{w}_2$, $Z, W \in \mathbb{C}^{2,1}$.

Observe que se $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ então A e B são vetores nulos em $\mathbb{C}^{2,1}$ tais que $\langle A, B \rangle = -1$. Logo o par (A, B) pertence ao conjunto V .

Sejam agora P e Q vetores nulos em $\mathbb{C}^{2,1}$ tais que $\langle P, Q \rangle = -1$. Ou seja, (P, Q) pertence ao conjunto V . Para demonstrar a proposição vamos exibir uma matriz $M \in U(2,1)$ tal que $M \cdot A = P$ e $M \cdot B = Q$.

De fato, considere a matriz $M_{3 \times 3}$ cujas colunas são, respectivamente, os vetores $P \boxtimes Q$, P e Q . Pela propriedade 1.1 temos que:

$$\begin{aligned} M^* H_3 M &= \begin{bmatrix} \langle P \boxtimes Q, P \boxtimes Q \rangle & \langle P, P \boxtimes Q \rangle & \langle Q, P \boxtimes Q \rangle \\ \langle P \boxtimes Q, P \rangle & \langle P, P \rangle & \langle Q, P \rangle \\ \langle P \boxtimes Q, Q \rangle & \langle P, Q \rangle & \langle Q, Q \rangle \end{bmatrix} \\ M^* H_3 M &= \begin{bmatrix} |\langle P, Q \rangle|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = H_3 \end{aligned}$$

Assim, $M^* H_3 M = H_3$ e, portanto, $M \in U(2,1)$.

Como $M \cdot A = P$ e $M \cdot B = Q$ segue que o conjunto $U(2,1)$ age transitivamente no conjunto V . □

Proposição 2.1. O grupo $PU(2,1)$ age duplamente transitivamente em $\partial \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$.

Demonstração. Sejam p_1 e q_1 dois pontos distintos em $\partial \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ e p_2 e q_2 dois pontos distintos em $\partial \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$.

Considere P_1, Q_1, P_2, Q_2 levantamentos de p_1, q_1, p_2 e q_2 , respectivamente, normalizados de modo que $\langle P_1, Q_1 \rangle = -1$ e $\langle P_2, Q_2 \rangle = -1$.

O lema anterior garante que existe uma matriz $M \in U(2,1)$ tal que $M \cdot P_1 = P_2$ e $M \cdot Q_1 = Q_2$. Projetivizando obtemos $f \in PU(2,1)$ tal que $f(p_1) = p_2$ e $f(q_1) = q_2$, isto é, o grupo $PU(2,1)$ age duplamente transitivamente em $\partial \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. □

2.2 Invariantes

Esta seção aborda, resumidamente, alguns invariantes no espaço hiperbólico complexo.

2.2.1 A razão cruzada clássica

Usaremos, a partir desta seção, o símbolo \mathbb{C}_∞ para representar o plano complexo estendido, isto é, $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Definição 2.2. Uma **transformação de Moebius** é uma aplicação $S: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ dada por

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

onde a, b, c e d são números complexos tais que $ad - bc \neq 0$.

Para definirmos a razão cruzada clássica, utilizaremos a mesma definição usada pela Hanna Sandler [2].

Definição 2.3 (Razão cruzada clássica). Dados z_1, z_2, z_3 e z_4 pontos distintos no plano complexo estendido \mathbb{C}_∞ , a **razão cruzada** é definida por:

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_3 - z_1)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_1)(z_3 - z_4)} \quad \text{se} \quad z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$$

$$[\infty, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4} \quad \text{se} \quad z_1 = \infty$$

$$[z_1, \infty, z_3, z_4] = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_4} \quad \text{se} \quad z_2 = \infty$$

$$[z_1, z_2, \infty, z_4] = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_1} \quad \text{se} \quad z_3 = \infty$$

$$[z_1, z_2, z_3, \infty] = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \quad \text{se} \quad z_4 = \infty$$

Simetrias da razão cruzada clássica:

Se $\lambda = [z_1, z_2, z_3, z_4]$ então as razões cruzadas de quaisquer permutações de z_1, z_2, z_3 e z_4 são dadas por

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [z_2, z_1, z_4, z_3] = [z_3, z_4, z_1, z_2] = [z_4, z_3, z_2, z_1] = \lambda$$

$$[z_1, z_3, z_2, z_4] = [z_3, z_1, z_4, z_2] = [z_2, z_4, z_1, z_3] = [z_4, z_2, z_3, z_1] = \frac{1}{\lambda}$$

$$\begin{aligned}
[z_1, z_2, z_4, z_3] &= [z_2, z_1, z_3, z_4] = [z_4, z_3, z_1, z_2] = [z_3, z_4, z_2, z_1] = 1 - \lambda \\
[z_1, z_4, z_2, z_3] &= [z_4, z_1, z_3, z_2] = [z_2, z_3, z_1, z_4] = [z_3, z_2, z_4, z_1] = \frac{1}{1 - \lambda} \\
[z_1, z_4, z_3, z_2] &= [z_4, z_1, z_2, z_3] = [z_3, z_2, z_1, z_4] = [z_2, z_3, z_4, z_1] = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \\
[z_1, z_3, z_4, z_2] &= [z_3, z_1, z_2, z_4] = [z_4, z_2, z_1, z_3] = [z_2, z_4, z_3, z_1] = \frac{\lambda - 1}{\lambda}
\end{aligned}$$

Propriedades da razão cruzada clássica:

- Para todo $z \in \mathbb{C}$ com $z \neq 0$ e $z \neq 1$ temos que

$$[0, 1, z, \infty] = z.$$

- Sejam $z_1, z_2, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ distintos. Se $f: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ é dada por

$$f(z) = [z_1, z_2, z, z_4],$$

então f é a única transformação de Moebius tal que $f(z_1) = 0$, $f(z_2) = 1$ e $f(z_4) = \infty$.

- Sejam z_1, z_2, z_3, z_4 pontos distintos em \mathbb{C}_∞ . Então $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ é real se e somente se todos os quatros pontos pertencem a um círculo de \mathbb{C}_∞ (Ver [6] página 49).
- Quando quatro números complexos z_1, z_2, z_3, z_4 pertencem a um mesmo círculo em \mathbb{C}_∞ , isto é, quando $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ é um número real, o sinal deste número dá informações sobre as posições relativas destes quatro pontos sobre o círculo Σ que os contém. Observe que $\Sigma - \{z_1, z_2, z_3\}$ é uma união de três arcos disjuntos: $\widehat{z_1 z_2}$, $\widehat{z_2 z_3}$ e $\widehat{z_3 z_1}$.

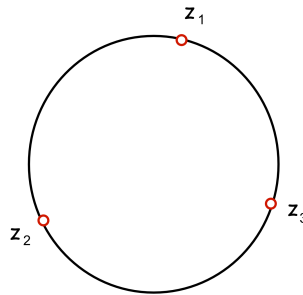


Figura 2.1: Arcos disjuntos

O ponto z_4 está em um destes três arcos. Temos que:

$$\begin{aligned}
z_4 \in \widehat{z_1 z_2} &\Leftrightarrow 0 < [z_1, z_2, z_3, z_4] < 1 \\
z_4 \in \widehat{z_2 z_3} &\Leftrightarrow [z_1, z_2, z_3, z_4] < 0 \\
z_4 \in \widehat{z_3 z_1} &\Leftrightarrow [z_1, z_2, z_3, z_4] > 1
\end{aligned}$$

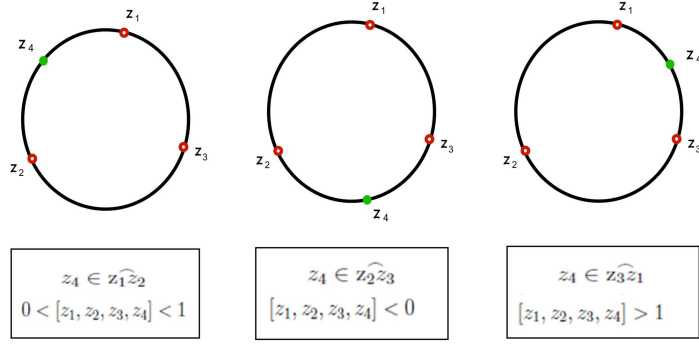


Figura 2.2: Posição do ponto z_4 nos arcos

2.2.2 O invariante de Korányi - Reimann

O próximo invariante foi introduzido por Korányi e Reimann e ele está associado a uma quádrupla ordenada de pontos distintos de $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Chamaremos este invariante de invariante de Korányi-Reimann ou de razão cruzada complexa pois ele generaliza a razão cruzada clássica. Assim como na razão cruzada clássica, usaremos a definição apresentada pela Hanna Sandler [2].

Definição 2.4 (Razão cruzada complexa). Sejam $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ pontos distintos. A **razão cruzada complexa** é definida por

$$\mathbb{X} = \mathbb{X}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{\langle P_3, P_1 \rangle \langle P_2, P_4 \rangle}{\langle P_2, P_1 \rangle \langle P_3, P_4 \rangle}$$

onde P_1, P_2, P_3, P_4 são levantamentos de p_1, p_2, p_3, p_4 , respectivamente.

A definição da razão cruzada complexa independe da escolha dos levantamentos de p_1, p_2, p_3, p_4 . De fato, sejam $\alpha P_1, \beta P_2, \gamma P_3$ e δP_4 outros levantamentos de p_1, p_2, p_3 e p_4 , respectivamente, então

$$\mathbb{X}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{\langle \gamma P_3, \alpha P_1 \rangle \langle \beta P_2, \delta P_4 \rangle}{\langle \beta P_2, \alpha P_1 \rangle \langle \gamma P_3, \delta P_4 \rangle} = \frac{\langle P_3, P_1 \rangle \langle P_2, P_4 \rangle}{\langle P_2, P_1 \rangle \langle P_3, P_4 \rangle}$$

Além disso, se $f \in PU(2,1)$ temos

$$\mathbb{X}(f(p_1), f(p_2), f(p_3), f(p_4)) = \mathbb{X}(p_1, p_2, p_3, p_4)$$

e se f é uma isometria anti-holomorfa

$$\mathbb{X}(f(p_1), f(p_2), f(p_3), f(p_4)) = \overline{\mathbb{X}(p_1, p_2, p_3, p_4)}.$$

2.2.3 O invariante de Cartan

Definição 2.5 (produto triplo hermitiano). Seja (p_1, p_2, p_3) uma tripla de pontos distintos de $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, cujos levantamentos são, respectivamente, P_1, P_2, P_3 . O **produto triplo hermitiano** é dado por

$$\langle P_1, P_2, P_3 \rangle = \langle P_1, P_2 \rangle \langle P_2, P_3 \rangle \langle P_3, P_1 \rangle \in \mathbb{C}.$$

Definição 2.6 (Invariante de Cartan). O **invariante de Cartan** é definido por

$$\mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) = \arg(-\langle P_1, P_2, P_3 \rangle).$$

O invariante de Cartan independe da escolha dos levantamentos de p_1, p_2 e p_3 . Podemos ver isto considerando $\alpha P_1, \beta P_2, \gamma P_3$ outros levantamentos de p_1, p_2 e p_3 , respectivamente, assim

$$\langle \alpha P_1, \beta P_2, \gamma P_3 \rangle = |\alpha|^2 |\beta|^2 |\gamma|^2 \langle P_1, P_2, P_3 \rangle$$

Sendo um produto triplo múltiplo real positivo do outro, segue que

$$\arg(-\langle \alpha P_1, \beta P_2, \gamma P_3 \rangle) = \arg(-\langle P_1, P_2, P_3 \rangle).$$

Lema 2.3. Sejam P_1, P_2, P_3 três vetores nulos em $\mathbb{C}^{2,1}$ e seja $\langle P_1, P_2, P_3 \rangle$ o produto triplo hermitiano. Se H é a matriz da forma hermitiana definida em $\mathbb{C}^{2,1}$ então

$$\operatorname{Re}(\langle P_1, P_2, P_3 \rangle) = \frac{|\det(A)|^2 \cdot \det(H)}{2}$$

em que A é a matriz cujas colunas são P_1, P_2, P_3 .

Demonstração. Como P_1, P_2, P_3 são vetores nulos então

$$\begin{aligned} \det(A^*HA) &= \det \begin{bmatrix} 0 & \langle P_2, P_1 \rangle & \langle P_3, P_1 \rangle \\ \langle P_1, P_2 \rangle & 0 & \langle P_3, P_2 \rangle \\ \langle P_1, P_3 \rangle & \langle P_2, P_3 \rangle & 0 \end{bmatrix} \\ &= \langle P_1, P_2 \rangle \langle P_2, P_3 \rangle \langle P_3, P_1 \rangle + \langle P_2, P_1 \rangle \langle P_3, P_2 \rangle \langle P_1, P_3 \rangle \\ &= \langle P_1, P_2, P_3 \rangle + \overline{\langle P_1, P_2, P_3 \rangle} = 2\operatorname{Re}(\langle P_1, P_2, P_3 \rangle) \end{aligned}$$

Sendo $\det(A^*HA) = \overline{\det(A)} \cdot \det(H) \cdot \det(A)$, temos que

$$|\det(A)|^2 \cdot \det(H) = 2\operatorname{Re}(\langle P_1, P_2, P_3 \rangle).$$

Portanto,

$$\operatorname{Re}(\langle P_1, P_2, P_3 \rangle) = \frac{|\det(A)|^2 \cdot \det(H)}{2}.$$

□

Independente da matriz H_1, H_2 ou H_3 para definir $\mathbb{C}^{2,1}$ o determinante dessa matriz é negativo, daí, $\operatorname{Re}(\langle P_1, P_2, P_3 \rangle) \leq 0$. Assim, o invariante de Cartan é tal que

$$-\frac{\pi}{2} \leq \mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) \leq \frac{\pi}{2}.$$

2.2.4 O η -invariante

Segundo Willian M. Goldman [1] (página 210) o η -invariante foi inspirado nos invariantes de Cartan e de Korányi-Reimann e nas fórmulas de distância. Goldman introduziu este invariante [1] (seção 7.3, página 230) para uma tripla (p, q, r) onde $p, q \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ e $r \in \ell\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ com o objetivo de investigar a interseção de bissetores. No artigo "*Distance formulas in complex hyperbolic space*", Hanna Sandler [2] generaliza o η -invariante permitindo que $r \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup \ell\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, e é esta definição que usaremos.

Definição 2.7. Dados $p, q \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ distintos e $r \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup \ell\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, cujos levantamentos em $\mathbb{C}^{2,1}$ são, respectivamente, P, Q e R , o η -invariante é definido por

$$\eta = \eta(p, q, r) = \frac{\langle P, R \rangle \langle R, Q \rangle}{\langle P, Q \rangle \langle R, R \rangle}.$$

Observe que η está bem definido, ou seja, independe da escolha dos representantes de p, q e r . Se considerarmos $\alpha P, \beta Q$ e λR os levantamentos de p, q e r em $\mathbb{C}^{2,1}$ teremos

$$\eta(p, q, r) = \frac{\langle \alpha P, \lambda R \rangle \langle \lambda R, \beta Q \rangle}{\langle \alpha P, \beta Q \rangle \langle \lambda R, \lambda R \rangle} = \frac{\langle P, R \rangle \langle R, Q \rangle}{\langle P, Q \rangle \langle R, R \rangle}.$$

Proposição 2.2. Sejam $p, q \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ distintos. Então

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\eta(p, q, r)) &\in [1/2, +\infty) \quad \text{se } r \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \\ \operatorname{Re}(\eta(p, q, r)) &\in (-\infty, 1/2] \quad \text{se } r \in \ell\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \end{aligned}.$$

Demonstração. Podemos assumir, aplicando um elemento de $U(2,1)$, que os levantamentos de p e q são, respectivamente, $P = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Seja $R = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ o levantamento de r . Então,

$$\begin{aligned} \eta(p, q, r) &= \frac{\langle P, R \rangle \langle R, Q \rangle}{\langle P, Q \rangle \langle R, R \rangle} = \frac{(-\bar{x} - \bar{z})(x - z)}{(-2)(|x|^2 + |y|^2 - |z|^2)} = \\ &= \frac{-\bar{x}x + \bar{x}z - \bar{z}x + \bar{z}z}{(-2)(|x|^2 + |y|^2 - |z|^2)} = \frac{|x|^2 - |z|^2 + 2i\operatorname{Im}(\bar{x}z)}{2(|x|^2 + |y|^2 - |z|^2)} \end{aligned}$$

Logo, $\operatorname{Re}(\eta) = \frac{|x|^2 - |z|^2}{2(|x|^2 + |y|^2 - |z|^2)}$.

Assim, se $r \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, temos $\langle R, R \rangle = |x|^2 + |y|^2 - |z|^2 < 0$, daí,

$$\frac{|x|^2 - |z|^2}{2(|x|^2 + |y|^2 - |z|^2)} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x|^2 - |z|^2 \leq |x|^2 + |y|^2 - |z|^2 \Leftrightarrow |y|^2 \geq 0$$

Como $|y|^2 \geq 0$ é sempre verdade, concluímos que $\operatorname{Re}(\eta) \geq \frac{1}{2}$ se $r \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$.

De modo análogo, se $r \in \ell\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ temos $\langle R, R \rangle = |x|^2 + |y|^2 - |z|^2 > 0$. Assim,

$$\frac{|x|^2 - |z|^2}{2(|x|^2 + |y|^2 - |z|^2)} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x|^2 - |z|^2 \leq |x|^2 + |y|^2 - |z|^2 \Leftrightarrow |y|^2 \geq 0$$

Portanto, se $r \in \ell\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ então $\operatorname{Re}(\eta) \leq \frac{1}{2}$ □

2.3 Resultados de Álgebra

Nosso objetivo, nesta seção, é apresentar alguns resultados de Álgebra que serão utilizados no capítulo 4 para mostrar que um determinado polinômio nem sempre é solúvel por radicais, para isso será necessário definir e enunciar alguns resultados da Teoria de Galois. Eles não serão demonstrados, já que este não é o foco do nosso estudo, entretanto, pode-se encontrar todas as definições e resultados com os respectivos exemplos e demonstrações na bibliografia utilizada para compor esta seção. Utilizamos [3] e [4].

2.3.1 Grupos Solúveis

Definição 2.8. Uma **série subnormal** de um grupo G é uma cadeia de subgrupos

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \cdots \triangleright G_n = \{e\} \quad (2.5)$$

onde G_{i+1} é um subgrupo normal de G_i , para $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Os subgrupos de uma série subnormal podem ser repetidos, então alguns subgrupos quocientes G_i/G_{i+1} podem ser triviais. Chamamos de *comprimento* da série subnormal o número de grupos quocientes não triviais.

Podemos obter uma nova série subnormal inserindo alguns subgrupos em (2.5), dizemos que essa nova série é um *refinamento* da série (2.5). Esse refinamento é *próprio* se inserimos algum subgrupo diferente dos já existentes na série.

Uma série subnormal é uma *série de composição* se ela não admite um refinamento próprio.

Definição 2.9. Um grupo G é **solúvel** se G possui uma série subnormal cujos grupos quocientes são abelianos.

Se G é solúvel e finito então o grupo G possui uma série de composição cujos grupos quocientes são abelianos.

Dado C um conjunto qualquer não vazio, o conjunto

$$\mathcal{P}(C) = \{f: C \rightarrow C \mid f \text{ é uma bijeção}\}$$

é um grupo cuja operação é a composição de funções. Este grupo é abeliano quando o conjunto C tiver apenas um ou dois elementos. Se o conjunto C for finito, isto é, com n

elementos, então denotamos $\mathcal{P}(C) = S_n$ e este grupo recebe o nome de *grupo simétrico* ou *grupo das permutações* de n letras. E S_n possui $n!$ elementos.

O conjunto $A_n = \{\alpha \in S_n \mid \alpha \text{ é uma permutação par}\}$ é um subgrupo de S_n . Além disso, se $n = 3$ ou $n \geq 5$, A_n é um grupo simples, isto é, seus únicos subgrupos normais são A_n e $\{e\}$.

Exemplo 2.1. Para $n \geq 5$, temos que A_n não é solúvel. Isso segue do fato de que, para $n \geq 5$, A_n é um grupo simples.

Exemplo 2.2. Para $n \geq 5$, S_n não é solúvel pois, se $n \geq 5$ então $\{id\}$, A_n e S_n são os únicos subgrupos normais de S_n e A_n não é solúvel.

2.3.2 Extensões de corpos

Definição 2.10. Sejam K e F corpos com $F \subset K$, dizemos que K é uma **extensão** de F .

Notação: $K|_F$

Se K é uma extensão de F então K é um espaço vetorial sobre F , denotamos $\dim_F K = [K : F]$ e chamamos de grau da extensão $K|_F$. Uma extensão é *finita* se $[K : F] < \infty$. Se $p(x) \in F[x]$ é um polinômio irredutível sobre F então existe uma extensão L de F tal que $p(x)$ possui raiz em L .

Observação 2.2. 1. Se existe $p(x) \in F[x] - \{0\}$ tal que $p(\alpha) = 0$ então α é *algébrico* sobre F . Caso contrário, α é *transcendente* sobre F .

2. Se α é algébrico sobre F e $p(x) \in F[x]$ é irredutível e mônico tal que $p(\alpha) = 0$ então dizemos que $p(x)$ é *polinômio irredutível* de α sobre F , cuja notação é $p(x) = \text{irr}(\alpha, F)$.

3. Se $K|_F$ e a é um elemento qualquer de K , o menor subcorpo de K que contém F e a é denotado por $F(a)$. O elemento $a \in K$ é algébrico sobre F se e somente se $F(a)|_F$ é extensão finita.

4. Se a é algébrico sobre F e $\text{gr}(\text{irr}(a, F)) = n$ então $[F(a) : F] = n$.

Definição 2.11. Se K é extensão de F e todos os elementos de K são algébricos sobre F então K é uma **extensão algébrica** de F . Caso contrário, K é uma **extensão transcendental** de F .

Definição 2.12. Um **corpo de decomposição** de um polinômio irreduzível $p(x) \in F[x]$ é uma extensão finita de F com menor grau possível onde $p(x)$ pode ser escrito como um produto de fatores lineares.

Notação: $Gal(p(x), F)$

Dois corpos de decomposição de um mesmo polinômio irreduzível são isomorfos.

Definição 2.13. Uma extensão finita $K \supset F$ é uma **extensão galoisiana** se existe $f(x) \in F[x]$ tal que $K = Gal(f(x), F)$. Uma extensão $K \supset F$ é uma **extensão normal** se todo $g(x) \in F[x]$, irreduzível sobre F com raiz $\alpha \in K$, tem todas suas raízes complexas em K .

A demonstração do próximo teorema se encontra em [4], página 172.

Teorema 2.1. *Seja $K \supset F$ extensão finita, então as afirmações abaixo são equivalentes:*

1. $K \supset F$ é galoisiana.
2. $K \supset F$ é normal.
3. $\forall \alpha \in K - F, \exists \sigma \in Aut_F(K)$ tal que $\sigma(\alpha) \neq \alpha$.
4. $|Aut_F(K)| = [K : F]$.

As duas proposições que seguem estão demonstradas em [4], páginas 174 e 175.

Proposição 2.3. Se K é uma extensão galoisiana de F de grau n então $G = Aut_F(K)$ é isomorfo a um subgrupo de S_n .

Proposição 2.4. Seja p um número primo e $f(x)$ um polinômio irreduzível sobre \mathbb{Q} de grau p . Se $f(x)$ possui exatamente duas raízes não reais então $Aut_{\mathbb{Q}}K \simeq S_p$ onde $K = Gal(f(x), \mathbb{Q})$.

Definição 2.14. Seja K uma extensão de F . Um elemento $a \in K$ é **expresso por radicais** sobre F se existe uma cadeia de corpos $F = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_k = F_{k-1}(a)$, onde $F_i = F_{i+1}$, $F_{i+1} = F_i(a_{i+1})$ com $a_i^{m_i} \in F_i$, para algum m_i .

Definição 2.15. Um polinômio $f(x) \in F[x]$ é **solúvel por radicais** sobre F se todas as suas raízes são expressas por radicais sobre F .

O próximo teorema está demonstrado em [4], página 188.

Teorema 2.2. *Sejam $F \supset \mathbb{Q}$, $f(x) \in F[x]$ e $K = Gal(f(x), F)$. O polinômio $f(x)$ é solúvel por radicais se e somente se $G = Aut_F(K)$ é solúvel.*

Capítulo 3

Geodésicas, Geodésicas Complexas e Bissetores em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$

No espaço hiperbólico complexo podemos definir dois tipos de subvariedades totalmente geodésicas, as subvariedades totalmente geodésicas complexas e as subvariedades totalmente geodésicas e totalmente reais. As subvariedades totalmente geodésicas complexas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ são equivalentes, por isometrias, a $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^k$ onde $k \in \{1, 2\}$. Nessa classe de subvariedades definiremos as geodésicas complexas. Já as subvariedades totalmente geodésicas e totalmente reais de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ são equivalentes, por isometrias, a $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^k$ sendo $k \in \{1, 2\}$. Neste último caso, quando $k = 2$, chamamos a subvariedade totalmente geodésica e totalmente real de \mathbb{R}^2 -plano e a interseção de um \mathbb{R}^2 -plano com $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ chamamos de um \mathbb{R} -círculo.

Na última seção deste capítulo definiremos os bissetores que são subvariedades de codimensão real 1 em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Como no espaço hiperbólico complexo não existem subvariedades totalmente geodésicas de codimensão real 1, temos que o bissetor não é uma subvariedade totalmente geodésica. Mas existem duas decomposições do bissetor em subvariedades totalmente geodésicas, uma em subvariedades totalmente geodésicas complexas e outra em subvariedades totalmente geodésicas e totalmente reais. Apresentaremos apenas a decomposição do bissetor em subvariedades totalmente geodésicas complexas por ser a decomposição utilizada, neste trabalho, para calcular distâncias entre o bissetor e outros objetos do espaço hiperbólico.

3.1 Geodésicas

Veremos nesta seção uma forma de definir uma geodésica no espaço hiperbólico complexo de dimensão 2. Além disso, definiremos a geodésica complexa que é uma subvariedade complexa de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ totalmente geodésica, e avaliaremos o comportamento de duas tais geodésicas complexas classificando-as como concorrentes, paralelas e ultraparalelas.

3.1.1 Linhas geodésicas reais em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$

Sejam p e q dois pontos distintos em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Nesta seção vamos determinar uma parametrização para a linha geodésica real (ou geodésica) em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ com pontos finais p e q . Para isso vamos considerar o modelo da bola \mathbb{B}^2 para o espaço hiperbólico complexo. Escolha levantamentos P e Q de p e q , respectivamente, para vetores nulos em $\mathbb{C}^{2,1}$ normalizados de modo que $\langle P, Q \rangle = -1$.

Considere agora $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ pontos em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. A linha geodésica ligando esses pontos é dada por $\lambda(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$, $-1 < t < 1$, ou equivalentemente, por $\lambda(t) = \begin{bmatrix} \tanh(t) \\ 0 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Em $\mathbb{C}^{2,1}$ considere levantamentos $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$ de a e b para vetores nulos tais que $\langle A, B \rangle = -1$. Levantando cada um dos pontos $\lambda(t)$, vemos que esta geodésica é representada pelo caminho de vetores negativos em $\mathbb{C}^{2,1}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(t) &= \begin{bmatrix} \sinh(t) \\ 0 \\ \cosh(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ 0 \\ \frac{e^t + e^{-t}}{2} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{e^t}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} + \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{e^t}{\sqrt{2}}A + \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}}B = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^tA + e^{-t}B) \end{aligned}$$

Como A e B são vetores nulos tais que $\langle A, B \rangle = -1$ e como P e Q também são vetores nulos tais que $\langle P, Q \rangle = -1$, pelo lema 2.2 existe uma matriz $M \in U(2,1)$ tal que $M \cdot A = P$ e $M \cdot B = Q$.

Já que M induz uma isometria $f \in PU(2,1)$ tal que $f(a) = p$ e $f(b) = q$, e como isometria transforma linhas geodésicas em linhas geodésicas, temos que $f(\lambda(t))$ é a geodésica com pontos finais p e q .

No levantamento esta geodésica é representada por

$$M \cdot \tilde{\lambda}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^tM \cdot A + e^{-t}M \cdot B) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^tP + e^{-t}Q).$$

O que fizemos demonstra a seguinte proposição:

Proposição 3.1. Sejam p e q pontos distintos em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ representados por vetores nulos P e Q em $\mathbb{C}^{2,1}$ tais que $\langle P, Q \rangle = -1$. A linha geodésica em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ com pontos finais p e q é parametrizada pelos pontos a_t , $t \in \mathbb{R}$, cujos levantamentos em $\mathbb{C}^{2,1}$ são dados por:

$$A_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^tP + e^{-t}Q).$$

Observação 3.1. Qualquer par $z, w \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ pertence a uma única geodésica.

3.1.2 Geodésica Complexa

Uma geodésica complexa é uma subvariedade totalmente geodésica complexa de dimensão complexa 1.

Definição 3.1. Seja $W \subset \mathbb{C}^{2,1}$ um subespaço complexo bidimensional. Suponha que $W \cap V_- \neq \emptyset$. Ao subespaço $\Sigma = \mathbb{P}(W \cap V_-)$ de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ chamamos **geodésica complexa**.

Para quaisquer $z, w \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \cap \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ distintos, existe uma única geodésica complexa contendo z e w . Dizemos que esses dois pontos geram a geodésica complexa.

A interseção de uma geodésica complexa com $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ é chamada de *cadeia*.

Vetor Polar:

Seja $W \in \mathbb{C}^{2,1}$ um subespaço complexo bidimensional tal que $W \cap V_- \neq \emptyset$. O complemento ortogonal W^\perp de W em $\mathbb{C}^{2,1}$ é um subespaço de dimensão complexa 1 de modo que todo vetor não nulo de W^\perp é um vetor positivo. Qualquer vetor positivo em W^\perp é um vetor polar da geodésica complexa $\Sigma = \mathbb{P}(W \cap V_-)$, isto é, dado P um vetor positivo em W^\perp temos $\langle P, Q \rangle = 0$ para qualquer $Q \in W$.

Reciprocamente, dado qualquer vetor positivo $P \in \mathbb{C}^{2,1}$, se $W = \{Z \in \mathbb{C}^{2,1} | \langle Z, P \rangle = 0\}$ então W é um subespaço complexo bidimensional tal que $W \cap V_- \neq \emptyset$ e $\Sigma = \mathbb{P}(W \cap V_-)$ é uma geodésica complexa de vetor polar P .

Como veremos logo a seguir, podemos utilizar vetores polares à geodésicas complexas para determinar suas posições relativas.

Classificação de pares de geodésicas complexas:

Sejam Σ_1 e Σ_2 duas geodésicas complexas distintas que correspondem a vetores polares $P, Q \in \mathbb{C}^{2,1}$, respectivamente. Considere o produto vetorial hermitiano $W = P \boxtimes Q$. Existem três possibilidades:

1. W é positivo:

As geodésicas complexas Σ_1 e Σ_2 são **ultraparalelas**, isto é, são disjuntas e tem uma única geodésica complexa Σ ortogonal comum com vetor polar W .

Se $a = \Sigma \cap \Sigma_1$ e $b = \Sigma \cap \Sigma_2$ então esses pontos possuem levantamentos $A = P \boxtimes (P \boxtimes Q)$ e $B = Q \boxtimes (P \boxtimes Q)$ e, por definição, $\rho(\Sigma_1, \Sigma_2) = \rho(a, b)$. Assim,

$$\cosh^2 \left(\frac{\rho(\Sigma_1, \Sigma_2)}{2} \right) = \frac{\langle A, B \rangle \langle B, A \rangle}{\langle A, A \rangle \langle B, B \rangle}.$$

Utilizando o lema 2.1 pode ser verificado que a distância entre as geodésicas complexas Σ_1 e Σ_2 também é expressa em termos dos vetores polares P e Q como:

$$\cosh^2 \left(\frac{\rho(\Sigma_1, \Sigma_2)}{2} \right) = \frac{\langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle}{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle}.$$

2. W é nulo:

As geodésicas complexas Σ_1 e Σ_2 são **assintóticas** ou **paralelas**, ou seja, se intersectam no ponto $\mathbb{P}(W) \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$.

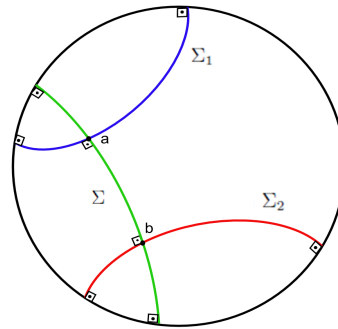


Figura 3.1: Geodésicas complexas ultraparalelas

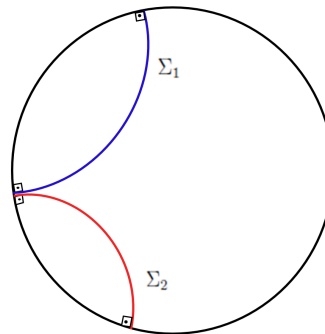


Figura 3.2: Geodésicas complexas paralelas

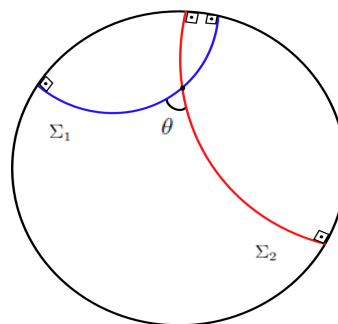


Figura 3.3: Geodésicas complexas concorrentes

3. W é negativo:

As geodésicas complexas Σ_1 e Σ_2 são **concorrentes**, isto é, elas se intersectam no ponto $\mathbb{P}(W) \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$.

Podemos definir o ângulo $\theta \in [0, \pi/2]$ entre as geodésicas complexas Σ_1 e Σ_2 . Em

termos de vetores polares:

$$\cos^2(\theta) = \frac{\langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle}{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle}.$$

Resumindo, se Σ_1 e Σ_2 são geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ com vetores polares $P, Q \in \mathbb{C}^{2,1}$, respectivamente, então:

- Σ_1 e Σ_2 são ultraparalelas $\Leftrightarrow \frac{\langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle}{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle} > 1$.
- Σ_1 e Σ_2 são assintóticas $\Leftrightarrow \frac{\langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle}{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle} = 1$.
- Σ_1 e Σ_2 são concorrentes $\Leftrightarrow \frac{\langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle}{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle} < 1$.

3.1.3 Projeção Ortogonal e Inversão sobre uma geodésica complexa

Como uma geodésica complexa é uma subvariedade complexa totalmente geodésica podemos definir a projeção ortogonal sobre tal geodésica complexa (ver [1], página 75).

A projeção ortogonal sobre a geodésica complexa Σ é definida considerando, para cada $x \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, o ponto mais próximo de x em Σ .

Definição 3.2. Sejam $x \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ com levantamento $X \in \mathbb{C}^{2,1}$ e Σ uma geodésica complexa em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ com vetor polar P . A **projeção ortogonal sobre Σ** é a aplicação $\Pi_{\Sigma}: \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ que associa a cada ponto x de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ um ponto $\Pi_{\Sigma}(x)$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ cujo levantamento é dado pelo vetor negativo

$$\Pi_{\Sigma}(X) = X - \frac{\langle X, P \rangle}{\langle P, P \rangle} P.$$

A inversão i_F é uma involução em $PU(2,1)$ que tem como conjunto de pontos fixos a geodésica complexa Σ , além disso, para todo $x \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ temos que $\Pi_{\Sigma}(x)$ é o ponto médio do segmento que liga x a $i_F(x)$.

Definição 3.3. Sejam $x \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ com levantamento $X \in \mathbb{C}^{2,1}$ e Σ uma geodésica complexa em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ com vetor polar P . A **inversão em Σ** é a aplicação $i_F: \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ que associa a cada ponto x de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ um ponto $i_F(x)$ cujo levantamento é dado pelo vetor negativo

$$i_F(X) = -X + 2 \frac{\langle X, P \rangle}{\langle P, P \rangle} P.$$

Essas definições continuam valendo se considerarmos pontos na fronteira de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$.

3.2 Bissetores

Um bissetor é uma subvariedade de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ cuja codimensão real é 1. Tais subvariedades não são totalmente geodésicas no espaço hiperbólico complexo. Apresentaremos a decomposição do bissetor em subvariedades totalmente geodésicas complexas através da *decomposição em fatias de Mostow*. Finalizamos esta seção com uma parametrização para os vetores polares das fatias do bissetor.

Definição 3.4. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ pontos distintos, o **bissetor equidistante de z_1 e z_2** é dado por:

$$\mathcal{B}\{z_1, z_2\} = \{z \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \mid \rho(z_1, z) = \rho(z_2, z)\}.$$

A fronteira de um bissetor no conjunto $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ é chamada de **esfera espinhal**.

Considere $\Sigma \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ a geodésica complexa gerada por z_1 e z_2 . Em relação ao bissetor equidistante de z_1 e z_2 , Σ é nomeada **espinha complexa**. E ao conjunto:

$$\sigma = \sigma\{z_1, z_2\} = \mathcal{B}\{z_1, z_2\} \cap \Sigma = \{z \in \Sigma \mid \rho(z_1, z) = \rho(z_2, z)\}$$

chamamos **espinha** (ou espinha real) do bissetor \mathcal{B} .

A espinha σ é uma geodésica em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ ortogonal ao segmento de geodésica que liga z_1 e z_2 . Aos pontos finais de σ chamamos **vértices do bissetor**. Para denotar um bissetor com vértices p e q escrevemos $\mathcal{B}(p, q)$.

A figura 3.4 é ilustrativa mas nos ajudará a compreender as definições acima apresentadas.

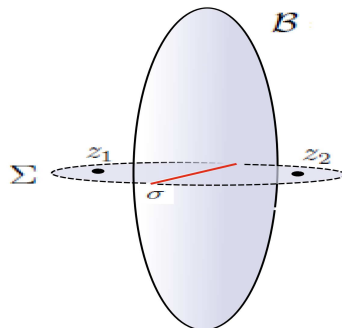


Figura 3.4: Espinha complexa Σ e espinha real σ do bissetor \mathcal{B}

3.2.1 Decomposição em fatias

Mostraremos que um bissetor, apesar de não ser totalmente geodésico em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, pode ser decomposto em subvariedades totalmente geodésicas complexas.

Teorema 3.1 (Mostow). *Sejam \mathcal{B} bissetor com espinha complexa Σ e espinha real σ , e $\Pi_{\Sigma}: \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \Sigma$ a projeção ortogonal sobre Σ , então*

$$\mathcal{B} = \Pi_{\Sigma}^{-1}(\sigma) = \bigcup_{s \in \sigma} \Pi_{\Sigma}^{-1}(s).$$

Demonstração. Seja $\mathcal{B} = \mathcal{B}\{z_1, z_2\}$ um bissetor. Pelo lema 3.2.13, página 97 de [1], dado $z \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, para $j = 1, 2$, temos

$$\cosh^2 \left(\frac{\rho(z, z_j)}{2} \right) = \cosh^2 \left(\frac{\rho(z, \Pi_{\Sigma}(z))}{2} \right) \cdot \cosh^2 \left(\frac{\rho(\Pi_{\Sigma}(z), z_j)}{2} \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} z \in \mathcal{B}\{z_1, z_2\} &\Leftrightarrow \rho(z_1, z) = \rho(z_2, z) \\ &\Leftrightarrow \cosh^2 \left(\frac{\rho(z_1, z)}{2} \right) = \cosh^2 \left(\frac{\rho(z_2, z)}{2} \right) \\ &\Leftrightarrow \cosh^2 \left(\frac{\rho(z_1, \Pi_{\Sigma}(z))}{2} \right) = \cosh^2 \left(\frac{\rho(z_2, \Pi_{\Sigma}(z))}{2} \right) \\ &\Leftrightarrow \rho(z_1, \Pi_{\Sigma}(z)) = \rho(z_2, \Pi_{\Sigma}(z)) \\ &\Leftrightarrow \Pi_{\Sigma}(z) \in \sigma(z_1, z_2) \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{B} = \Pi_{\Sigma}^{-1}(\sigma) = \bigcup_{s \in \sigma} \Pi_{\Sigma}^{-1}(s)$. □

Cada $\Pi_{\Sigma}^{-1}(s)$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, com $s \in \sigma$, é chamada de **fatia do bissetor** \mathcal{B} . Observe que cada uma das fatias do bissetor \mathcal{B} é ortogonal à espinha complexa Σ .

Para garantir que essa decomposição do bissetor \mathcal{B} é uma decomposição em subvariedades totalmente geodésicas complexas, mostraremos que a fatia $\Pi_{\Sigma}^{-1}(s)$ é uma geodésica complexa. É o que faremos na proposição seguinte:

Proposição 3.2. A fatia do bissetor \mathcal{B} em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, dada por $\Pi_{\Sigma}^{-1}(s)$, com $s \in \sigma$, é uma geodésica complexa.

Demonstração. Como o grupo $PU(2,1)$ age transitivamente no conjunto dos bissetores, podemos considerar, no modelo da bola, o bissetor de vértices $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $p_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Então a espinha complexa é dada por

$$\Sigma = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{B}^2 \mid |z_1| < 1 \right\},$$

e a espinha real é:

$$\sigma = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{B}^2 \mid x \in \mathbb{R}, -1 < x < 1 \right\}.$$

Seja $\Pi_\Sigma: \mathbb{B}^2 \rightarrow \Sigma$ a projeção ortogonal sobre Σ , que é dada por $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z_1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Considere $p_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \sigma$. Temos que

$$\Pi_\Sigma^{-1}(p_0) = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{B}^2 \mid z_1 = x_0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_0 \\ x_2 + iy_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{B}^2 \mid x_2, y_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Precisamos mostrar que $\Pi_\Sigma^{-1}(p_0)$ é uma geodésica complexa.

De fato, como $P_\Sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é vetor polar a Σ e $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é o levantamento de p_0 ,

então $Q = P_\Sigma \boxtimes P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ x_0 \end{bmatrix}$ é vetor polar de uma geodésica complexa Σ_0 .

Assim, para um ponto $p \in \Sigma_0$, seu levantamento $P \in \mathbb{C}^{2,1}$ deve ser tal que $\langle P, Q \rangle = 0$.

Daí, seja $p = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{B}^2$ cujo levantamento é $P = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix}$, temos que $\langle P, Q \rangle = z_1 - x_0 =$

$0 \Leftrightarrow z_1 = x_0$. Portanto, $\Sigma_0 = \Pi_\Sigma^{-1}(p_0)$. Logo, para cada $s \in \sigma$, $\Pi_\Sigma^{-1}(s)$ é uma geodésica complexa.

□

O teorema que finaliza este capítulo é muito importante pois nos dá uma parametrização para os vetores polares das fatias de um bissetor. Com esta parametrização podemos calcular a distância do bissetor a outros objetos do espaço hiperbólico complexo.

Teorema 3.2. *Sejam $p, q \in \partial\mathbb{H}_\mathbb{C}^2$ pontos distintos com levantamentos $P, Q \in \mathbb{C}^{2,1}$ normalizados de modo que $\langle P, Q \rangle = -1$, e seja \mathcal{B} o bissetor com vértices p e q . Então $B_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P - e^{-t} Q)$, $t \in \mathbb{R}$, parametriza os vetores polares das fatias do bissetor \mathcal{B} .*

Demonstração. Considere Σ a espinha complexa e σ a espinha real do bissetor \mathcal{B} . Assim, já que σ é uma geodésica com pontos finais p e q , então para $t \in \mathbb{R}$, o levantamento para cada ponto $a_t \in \sigma$ é dado por $A_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P + e^{-t} Q)$.

Como $\langle B_t, B_t \rangle = 1$, B_t é polar a uma geodésica complexa H . Para mostrar que B_t parametriza os vetores polares das fatias do bissetor \mathcal{B} precisamos garantir que Σ e H são ortogonais e que $\Sigma \cap H = \{a_t\}$, assim teremos $H = \Pi_\Sigma^{-1}(a_t)$.

Temos que $P \boxtimes Q$ é vetor polar da geodésica complexa Σ , pois $\langle P, P \boxtimes Q \rangle = \langle Q, P \boxtimes Q \rangle = 0$. Como

$$\begin{aligned} \langle B_t, P \boxtimes Q \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P - e^{-t} Q), P \boxtimes Q \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^t \langle P, P \boxtimes Q \rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \langle Q, P \boxtimes Q \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Σ e H são ortogonais.

Falta mostrar que, para todo t , $\Sigma \cap H = \{a_t\}$.

Esta interseção é representada pelo seguinte vetor em $\mathbb{C}^{2,1}$: $B_t \boxtimes (P \boxtimes Q)$, pois este vetor é ortogonal tanto a B_t quanto a $P \boxtimes Q$.

Pelo lema 2.1 temos

$$\begin{aligned} B_t \boxtimes (P \boxtimes Q) &= \langle P, B_t \rangle Q - \langle Q, B_t \rangle P = \\ &= \left\langle P, \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P - e^{-t} Q) \right\rangle Q - \left\langle Q, \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P - e^{-t} Q) \right\rangle P \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \langle P, Q \rangle Q - \frac{1}{\sqrt{2}} e^t \langle Q, P \rangle P \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (e^t P + e^{-t} Q) = A_t \end{aligned}$$

Assim, $\Sigma \cap H = \{a_t\}$, para todo t . Logo, $H = \Pi_{\Sigma}^{-1}(a_t)$ e, portanto, B_t parametriza os vetores polares das fatias do bissetor \mathcal{B} . \square

Capítulo 4

Distâncias em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$

Este capítulo contém os resultados principais deste trabalho. Nosso objetivo é exibir fórmulas que nos permitam encontrar a distância entre pontos, geodésicas, geodésicas complexas, bissetores e qualquer combinação de dois desses objetos em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Apresentamos todas as combinações possíveis e as fórmulas de distância: entre pontos, ponto e geodésica complexa, ponto e geodésica, ponto e bissetor, geodésica complexa e geodésica, geodésica complexa e bissetor, entre geodésicas, entre bissetores e entre geodésica e bissetor, sendo que nas três últimas combinações as fórmulas dependem da solução de um polinômio de grau 6, que nem sempre é solúvel por radicais. Finalizamos com exemplos de distância entre duas geodésicas nos quais o polinômio encontrado é solúvel e um exemplo onde o polinômio não é solúvel por radicais.

4.1 Distância entre dois pontos

Como vimos na seção 1.2.1, a distância entre dois pontos $p, q \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ é dada pela métrica de Bergman $\rho(p, q)$ tal que

$$\cosh^2 \left(\frac{\rho(p, q)}{2} \right) = \frac{\langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle}{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle}$$

onde P e Q são levantamentos de p e q em $\mathbb{C}^{2,1}$, respectivamente.

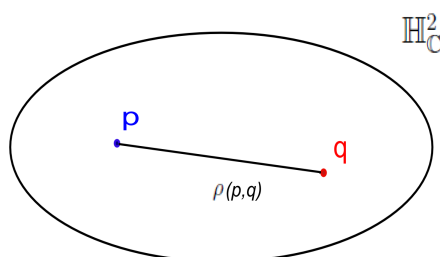


Figura 4.1: Distância entre pontos em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$

4.2 Distância entre um ponto e uma geodésica complexa

Por definição, dado um ponto $p \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, para calcular a distância de p a uma geodésica complexa Σ basta calcular a distância de p a sua projeção ortogonal em Σ . Isto é, $\rho(p, \Sigma) = \rho(p, h)$, onde h é a projeção ortogonal de p em Σ .

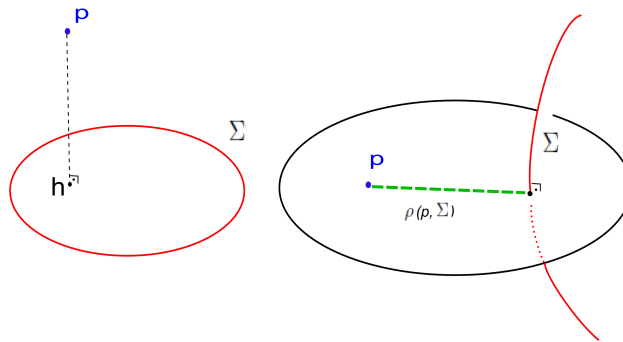


Figura 4.2: Distância entre um ponto e uma geodésica complexa

O próximo teorema nos mostra uma forma de calcularmos esta distância.

Teorema 4.1. *Sejam $p \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ e Σ uma geodésica complexa com vetor polar Q . Então*

$$\sinh^2 \left(\frac{\rho(p, \Sigma)}{2} \right) = - \frac{\langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle}{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle}$$

onde P é o levantamento de p em $\mathbb{C}^{2,1}$.

Demonstração. A projeção ortogonal $\Pi_{\Sigma}: \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \Sigma$ é definida por: se $x \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ tem como levantamento um vetor $X \in \mathbb{C}^{2,1}$ e se Q é um vetor polar a Σ então a projeção ortogonal $\Pi_{\Sigma}(x)$ de x em Σ é o ponto de Σ que possui como levantamento o seguinte vetor negativo

$$X - \frac{\langle X, Q \rangle}{\langle Q, Q \rangle} Q.$$

Dado um ponto $p \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ e uma geodésica complexa $\Sigma \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ definimos a distância de p à Σ como a distância de p à projeção ortogonal $\Pi_{\Sigma}(p)$ de p em Σ . Isto é, $\rho(p, \Sigma) = \rho(p, \Pi_{\Sigma}(p))$.

Dado $p \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, seja H um levantamento para $\Pi_{\Sigma}(p)$. Então $H = P - \frac{\langle P, Q \rangle}{\langle Q, Q \rangle} Q$. Daí,

$$\begin{aligned}
\cosh^2 \left(\frac{\rho(p, \Sigma)}{2} \right) &= \frac{\langle P, H \rangle \langle H, P \rangle}{\langle P, P \rangle \langle H, H \rangle} = \frac{\langle P, P - \frac{\langle P, Q \rangle}{\langle Q, Q \rangle} Q \rangle \langle P - \frac{\langle P, Q \rangle}{\langle Q, Q \rangle} Q, P \rangle}{\langle P, P \rangle \langle P - \frac{\langle P, Q \rangle}{\langle Q, Q \rangle} Q, P - \frac{\langle P, Q \rangle}{\langle Q, Q \rangle} Q \rangle} = \\
&= \frac{\left(\langle P, P \rangle - \frac{\langle Q, P \rangle}{\langle Q, Q \rangle} \langle P, Q \rangle \right) \cdot \left(\langle P, P \rangle - \frac{\langle P, Q \rangle}{\langle Q, Q \rangle} \langle Q, P \rangle \right)}{\langle P, P \rangle \left(\langle P, P \rangle - \frac{\langle Q, P \rangle}{\langle Q, Q \rangle} \langle P, Q \rangle - \frac{\langle P, Q \rangle}{\langle Q, Q \rangle} \langle Q, P \rangle + \frac{\langle P, Q \rangle}{\langle Q, Q \rangle} \cdot \frac{\langle Q, P \rangle}{\langle Q, Q \rangle} \cdot \langle Q, Q \rangle \right)} \\
&= \frac{\frac{1}{\langle Q, Q \rangle^2} (\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle - \langle Q, P \rangle \langle P, Q \rangle) (\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle - \langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle)}{\frac{1}{\langle Q, Q \rangle} \langle P, P \rangle (\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle - \langle Q, P \rangle \langle P, Q \rangle - \langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle + \langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle)} \\
&= \frac{(\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle - \langle Q, P \rangle \langle P, Q \rangle) (\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle - \langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle)}{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle \cdot (\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle - \langle Q, P \rangle \langle P, Q \rangle)} \\
&= \frac{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle - \langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle}{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle}
\end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } \cosh^2 \left(\frac{\rho(p, \Sigma)}{2} \right) = \frac{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle - \langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle}{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle}.$$

$$\begin{aligned}
\text{Por propriedade trigonométrica, } \sinh^2 \left(\frac{\rho(p, \Sigma)}{2} \right) &= \cosh^2 \left(\frac{\rho(p, \Sigma)}{2} \right) - 1 = \\
= \frac{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle - \langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle - \langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle}{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle} &= -\frac{\langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle}{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle}.
\end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \sinh^2 \left(\frac{\rho(p, \Sigma)}{2} \right) = -\frac{\langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle}{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle}.$$

□

Observe que para qualquer vetor negativo P e para qualquer vetor positivo Q em $\mathbb{C}^{2,1}$

$$-\frac{\langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle}{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle} \geq 0$$

e que esta expressão é nula se, e somente se, $\langle P, Q \rangle = 0$, ou seja, quando o ponto p pertence a geodésica complexa Σ de vetor polar Q .

4.3 Distância entre um ponto e uma geodésica

Seja r um ponto em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ e seja A uma geodésica de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. A distância $\rho(r, A)$ entre r e A é definida como a menor distância entre r e um ponto de A :

$$\rho(r, A) = \min_{x \in A} \rho(r, x).$$

O teorema abaixo nos dará uma fórmula, em termos do η -invariante, através da qual podemos calcular a distância entre um ponto e uma geodésica.

Teorema 4.2. *Sejam $r \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ e $p, q \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, e seja A uma linha geodésica de pontos finais p e q . Se $\eta = \eta(p, q, r)$ então a distância entre o ponto r e a geodésica A pode ser encontrada pela fórmula*

$$\cosh^2 \left(\frac{\rho(A, r)}{2} \right) = |\eta| + \operatorname{Re}(\eta).$$

Demonstração. Seja R levantamento de r e P, Q levantamentos de p, q , respectivamente, normalizados de modo que $\langle R, R \rangle = -1$ e $\langle P, Q \rangle = -1$. Sabemos que os pontos a_t da geodésica $A = \{a_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ são representados por vetores $A_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P + e^{-t} Q)$ em $\mathbb{C}^{2,1}$.

Como $a_t \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, então a distância do ponto a_t ao ponto r é dada por $\cosh^2 \left(\frac{\rho(a_t, r)}{2} \right) = \frac{\langle A_t, R \rangle \langle R, A_t \rangle}{\langle A_t, A_t \rangle \langle R, R \rangle}$. Assim, para calcularmos a distância entre o ponto r e a geodésica A basta encontramos o mínimo de $\cosh^2 \left(\frac{\rho(a_t, r)}{2} \right)$.

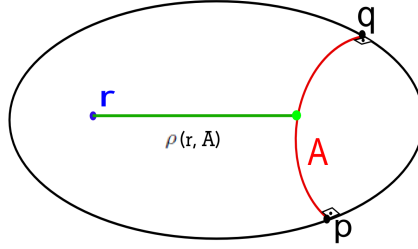


Figura 4.3: Distância entre um ponto e uma geodésica

Observe que

$$\langle A_t, R \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P + e^{-t} Q), R \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t \langle P, R \rangle + e^{-t} \langle Q, R \rangle) \text{ e}$$

$$\langle R, A_t \rangle = \left\langle R, \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P + e^{-t} Q) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t \langle R, P \rangle + e^{-t} \langle R, Q \rangle)$$

Então, lembrando que $\langle R, R \rangle = -1$ e $\langle P, Q \rangle = -1$, temos

$$\langle A_t, R \rangle \langle R, A_t \rangle = \frac{e^{2t} \langle P, R \rangle \langle R, P \rangle + \langle P, R \rangle \langle R, Q \rangle + \langle Q, R \rangle \langle R, P \rangle + e^{-2t} \langle Q, R \rangle \langle R, Q \rangle}{2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(e^{2t}|\langle P, R \rangle|^2 + e^{-2t}|\langle R, Q \rangle|^2 + \frac{\langle P, Q \rangle \langle R, R \rangle}{\langle P, Q \rangle \langle R, R \rangle} \cdot (\langle P, R \rangle \langle R, Q \rangle + \langle Q, R \rangle \langle R, P \rangle))}{2} \\
&= \frac{\left(e^{2t}|\langle P, R \rangle|^2 + e^{-2t}|\langle R, Q \rangle|^2 + \langle P, Q \rangle \langle R, R \rangle \cdot \left(\frac{\langle P, R \rangle \langle R, Q \rangle}{\langle P, Q \rangle \langle R, R \rangle} + \frac{\langle Q, R \rangle \langle R, P \rangle}{\langle P, Q \rangle \langle R, R \rangle} \right) \right)}{2} \\
&= \frac{(e^{2t}|\langle P, R \rangle|^2 + e^{-2t}|\langle R, Q \rangle|^2 + (\eta + \bar{\eta}))}{2} \\
&= \frac{(e^{2t}|\langle P, R \rangle|^2 + e^{-2t}|\langle R, Q \rangle|^2 + 2 \cdot \text{Re}(\eta))}{2} \\
&= \frac{(e^{2t}|\langle P, R \rangle|^2 + e^{-2t}|\langle R, Q \rangle|^2)}{2} + \text{Re}(\eta)
\end{aligned}$$

Agora, sendo

$$\begin{aligned}
\langle A_t, A_t \rangle \langle R, R \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P + e^{-t} Q), \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P + e^{-t} Q) \right\rangle \langle R, R \rangle \\
&= \frac{(e^{2t} \langle P, P \rangle + \langle P, Q \rangle + \langle Q, P \rangle + e^{-2t} \langle Q, Q \rangle)}{2} \\
&= 2/2 = 1
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
\cosh^2 \left(\frac{\rho(a_t, r)}{2} \right) &= \frac{\langle A_t, R \rangle \langle R, A_t \rangle}{\langle A_t, A_t \rangle \langle R, R \rangle} \\
&= \frac{(e^{2t}|\langle P, R \rangle|^2 + e^{-2t}|\langle R, Q \rangle|^2)}{2} + \text{Re}(\eta)
\end{aligned}$$

Desta expressão segue que a função $f(t) = \cosh^2 \left(\frac{\rho(a_t, r)}{2} \right)$ tem a forma $f(t) = ae^{2t} + be^{-2t} + c$ em que $a = \frac{|\langle P, R \rangle|^2}{2}$, $b = \frac{|\langle R, Q \rangle|^2}{2}$ e $c = \text{Re}(\eta)$. Observe que $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Utilizando resultados do Cálculo pode-se verificar que uma tal função $f(t) = ae^{2t} + be^{-2t} + c$ com $a \neq 0$ e $b \neq 0$ possui um único ponto crítico em $t = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$ que é um ponto de mínimo global. O mínimo desta função $f(t)$ é $2\sqrt{ab} + c$.

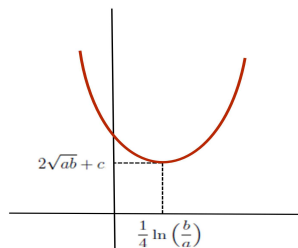


Figura 4.4: Gráfico da função f

Deste modo, segue que

$$\begin{aligned}
\min_{t \in \mathbb{R}} \cosh^2 \left(\frac{\rho(a_t, r)}{2} \right) &= 2 \cdot \sqrt{\frac{|\langle P, R \rangle|^2}{2} \frac{|\langle R, Q \rangle|^2}{2}} + \operatorname{Re}(\eta) \\
&= |\langle P, R \rangle| |\langle R, Q \rangle| + \operatorname{Re}(\eta) \\
&= \frac{|\langle P, R \rangle| |\langle R, Q \rangle|}{|\langle P, Q \rangle| |\langle R, R \rangle|} + \operatorname{Re}(\eta) \\
&= |\eta| + \operatorname{Re}(\eta)
\end{aligned}$$

□

Observe que, se $\eta = a + bi$, pela proposição 2.2 se $r \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ e se $p, q \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ então $a \geq 1/2$. Daí,

$$|\eta| + \operatorname{Re}(\eta) = \sqrt{a^2 + b^2} + a \geq \sqrt{a^2} + a \geq a + a = 2a \geq 1.$$

Isto está coerente com o fato de $\cosh(x) \geq 1, \forall x$.

Como uma consequência deste teorema podemos enunciar o seguinte critério que caracteriza três pontos pertencentes a uma mesma linha geodésica real:

Corolário 4.1. Seja $r \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ e sejam $p, q \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Se $\eta = \eta(p, q, r)$ então o ponto r pertence a linha geodésica real em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ com pontos finais p e q se, e somente se, $|\eta| + \operatorname{Re}(\eta) = 1$.

4.4 Distância entre um ponto e um bissetor

Seja $r \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ um ponto no espaço hiperbólico complexo e seja $\mathcal{B} \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ um bissetor de vértices $p, q \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Seja Σ a espinha complexa e sejam $\sigma_t, t \in \mathbb{R}$, os pontos da espinha real de \mathcal{B} . Sabemos que \mathcal{B} é a união das fatias $\Sigma_t = \Pi_{\Sigma}^{-1}(\sigma_t), t \in \mathbb{R}$.

Por definição, a distância entre r e \mathcal{B} é a menor distância entre r e os pontos de \mathcal{B} :

$$\rho(r, \mathcal{B}) = \min_{x \in \mathcal{B}} \rho(r, x).$$

Como cada ponto do bissetor \mathcal{B} pertence a uma fatia, podemos calcular este mínimo determinando a menor distância entre r e as fatias de \mathcal{B} . Isto é,

$$\rho(r, \mathcal{B}) = \min_{t \in \mathbb{R}} \rho(r, \Sigma_t).$$

Se Σ_t tem vetor polar B_t , pelo teorema 4.1 temos que

$$\sinh^2 \left(\frac{\rho(r, \Sigma_t)}{2} \right) = - \frac{\langle R, B_t \rangle \langle B_t, R \rangle}{\langle R, R \rangle \langle B_t, B_t \rangle}.$$

Daí, a distância entre o ponto r e o bissetor \mathcal{B} pode ser calculada como:

$$\sinh^2 \left(\frac{\rho(r, \mathcal{B})}{2} \right) = \min_{t \in \mathbb{R}} - \frac{\langle R, B_t \rangle \langle B_t, R \rangle}{\langle R, R \rangle \langle B_t, B_t \rangle}.$$

Teorema 4.3. *Sejam $r \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ e $\mathcal{B} \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ um bissetor com vértices $p, q \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Se $\eta = \eta(p, q, r)$ é o η -invariante desses pontos, então a distância entre o ponto r e o bissetor \mathcal{B} pode ser dada por:*

$$\sinh^2 \left(\frac{\rho(r, \mathcal{B})}{2} \right) = |\eta| - \operatorname{Re}(\eta). \quad (4.1)$$

Demonstração. Se R é o levantamento do ponto $r \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ e P e Q são os levantamentos dos vértices de \mathcal{B} normalizados de modo que $\langle R, R \rangle = -1$ e $\langle P, Q \rangle = -1$, os vetores polares às fatias de \mathcal{B} são dados por $B_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P - e^{-t} Q)$.

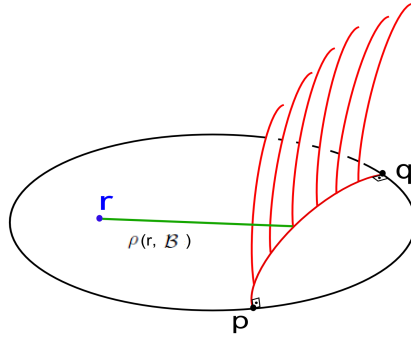


Figura 4.5: Distância entre um ponto e um bissetor

Veja que

$$\langle B_t, R \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P - e^{-t} Q), R \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t \langle P, R \rangle - e^{-t} \langle Q, R \rangle) e$$

$$\langle R, B_t \rangle = \left\langle R, \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P - e^{-t} Q) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t \langle R, P \rangle - e^{-t} \langle R, Q \rangle)$$

Então,

$$\begin{aligned} \langle B_t, R \rangle \langle R, B_t \rangle &= \frac{e^{2t} \langle P, R \rangle \langle R, P \rangle - \langle P, R \rangle \langle R, Q \rangle - \langle Q, R \rangle \langle R, P \rangle + e^{-2t} \langle R, Q \rangle \langle Q, R \rangle}{2} = \\ &= \frac{\left(e^{2t} |\langle P, R \rangle|^2 + e^{-2t} |\langle R, Q \rangle|^2 - \frac{\langle P, Q \rangle \langle R, R \rangle}{\langle P, Q \rangle \langle R, R \rangle} \cdot (\langle P, R \rangle \langle R, Q \rangle + \langle Q, R \rangle \langle R, P \rangle) \right)}{2} \\ &= \frac{\left(e^{2t} |\langle P, R \rangle|^2 + e^{-2t} |\langle R, Q \rangle|^2 - \langle P, Q \rangle \langle R, R \rangle \cdot \left(\frac{\langle P, R \rangle \langle R, Q \rangle}{\langle P, Q \rangle \langle R, R \rangle} + \frac{\langle Q, R \rangle \langle R, P \rangle}{\langle P, Q \rangle \langle R, R \rangle} \right) \right)}{2} \\ &= \frac{e^{2t} |\langle P, R \rangle|^2 + e^{-2t} |\langle R, Q \rangle|^2 - (\eta + \bar{\eta})}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(e^{2t}|\langle P, R \rangle|^2 + e^{-2t}|\langle R, Q \rangle|^2 - 2\operatorname{Re}(\eta))}{2} \\
&= \frac{(e^{2t}|\langle P, R \rangle|^2 + e^{-2t}|\langle R, Q \rangle|^2)}{2} - \operatorname{Re}(\eta)
\end{aligned}$$

Agora, sendo

$$\begin{aligned}
\langle B_t, B_t \rangle \langle R, R \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P - e^{-t} Q), \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P - e^{-t} Q) \right\rangle \langle R, R \rangle \\
&= -\frac{(e^{2t}\langle P, P \rangle - \langle P, Q \rangle - \langle Q, P \rangle + e^{-2t}\langle Q, Q \rangle)}{2} \\
&= -2/2 = -1
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
\sinh^2\left(\frac{\rho(\Sigma_t, r)}{2}\right) &= -\frac{\langle B_t, R \rangle \langle R, B_t \rangle}{\langle B_t, B_t \rangle \langle R, R \rangle} \\
&= \frac{(e^{2t}|\langle P, R \rangle|^2 + e^{-2t}|\langle R, Q \rangle|^2)}{2} - \operatorname{Re}(\eta)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sinh^2\left(\frac{\rho(r, \mathcal{B})}{2}\right) &= \min_{t \in \mathbb{R}} -\frac{\langle R, B_t \rangle \langle B_t, R \rangle}{\langle R, R \rangle \langle B_t, B_t \rangle} \\
&= \min_{t \in \mathbb{R}} \left(\frac{|\langle P, R \rangle|^2}{2} \cdot e^{2t} + \frac{|\langle R, Q \rangle|^2}{2} \cdot e^{-2t} - \operatorname{Re}(\eta) \right)
\end{aligned}$$

Procedendo como na demonstração do teorema 4.2 podemos concluir que este mínimo é atingido em:

$$\begin{aligned}
\sinh^2\left(\frac{\rho(r, \mathcal{B})}{2}\right) &= 2 \cdot \sqrt{\frac{|\langle P, R \rangle|^2}{2} \frac{|\langle R, Q \rangle|^2}{2}} - \operatorname{Re}(\eta) \\
&= |\langle P, R \rangle| |\langle R, Q \rangle| - \operatorname{Re}(\eta) \\
&= \frac{|\langle P, R \rangle| |\langle R, Q \rangle|}{|\langle P, Q \rangle| |\langle R, R \rangle|} - \operatorname{Re}(\eta) \\
&= |\eta| - \operatorname{Re}(\eta)
\end{aligned}$$

□

A expressão (4.1) apresenta uma caracterização para um ponto $r \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ pertencer ao bissetor \mathcal{B} de vértices $p, q \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Se $\eta = \eta(p, q, r)$ então $r \in \mathcal{B}$ se, e somente se, $|\eta| - \operatorname{Re}(\eta) = 0$. Como $\operatorname{Re}(\eta) \geq 0$, esta igualdade é equivalente a $\operatorname{Im}(\eta) = 0$.

Observe também que se $\eta = a + bi$ então

$$|\eta| - \operatorname{Re}(\eta) = \sqrt{a^2 + b^2} - a \geq \sqrt{a^2} - a \geq a - a \geq 0,$$

para qualquer $r \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ e quaisquer $p, q \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$.

4.5 Distância entre uma geodésica complexa e uma geodésica

Sejam Σ uma geodésica complexa e A uma geodésica real em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Por definição, a distância em Σ e A é a menor distância entre pontos de Σ e pontos de A :

$$\rho(\Sigma, A) = \min_{x \in \Sigma, y \in A} \rho(x, y).$$

Se os pontos de A são parametrizados por a_t , $t \in \mathbb{R}$, e se Σ tem vetor polar R , pelo teorema 4.1 vimos que a distância entre o ponto a_t e a geodésica complexa Σ é tal que:

$$\sinh^2 \left(\frac{\rho(\Sigma, a_t)}{2} \right) = - \frac{\langle A_t, R \rangle \langle R, A_t \rangle}{\langle A_t, A_t \rangle \langle R, R \rangle}$$

em que A_t é o levantamento de a_t .

Minimizando esta expressão, obtemos a distância $\rho(\Sigma, A)$:

$$\sinh^2 \left(\frac{\rho(\Sigma, A)}{2} \right) = \min_{t \in \mathbb{R}} - \frac{\langle A_t, R \rangle \langle R, A_t \rangle}{\langle A_t, A_t \rangle \langle R, R \rangle}.$$

O próximo resultado apresenta uma expressão para a distância entre uma geodésica complexa Σ e uma geodésica real A em termos do η -invariante dos dois pontos finais de A e do vetor polar de Σ .

Teorema 4.4. *Sejam Σ uma geodésica complexa de vetor polar R e A uma geodésica real com pontos finais p e q . Se P e Q são levantamentos de p e q , respectivamente, e se $\eta = \eta(P, Q, R)$ é o η -invariante, então*

$$\sinh^2 \left(\frac{\rho(\Sigma, A)}{2} \right) = |\eta| - \operatorname{Re}(\eta).$$

Demonstração. Observe primeiramente que se $p \in \partial\Sigma$ ou $q \in \partial\Sigma$ então $\langle P, R \rangle = 0$ ou $\langle Q, R \rangle = 0$. Em qualquer um destes casos $\eta = 0$, $\rho(\Sigma, A) = 0$ e a expressão que queremos demonstrar é verdadeira. Então, podemos supor que $p \notin \partial\Sigma$ e $q \notin \partial\Sigma$ de modo que $\langle P, R \rangle \neq 0$ e $\langle Q, R \rangle \neq 0$.

Normalizando os vetores P, Q e R de modo que $\langle R, R \rangle = 1$ e $\langle P, Q \rangle = -1$, e lembrando que cada ponto a_t da geodésica $A = \{a_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ corresponde ao vetor $A_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P + e^{-t} Q)$ em $\mathbb{C}^{2,1}$, temos que

$$\langle A_t, R \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P + e^{-t} Q), R \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t \langle P, R \rangle + e^{-t} \langle Q, R \rangle) \text{ e}$$

$$\langle R, A_t \rangle = \left\langle R, \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P + e^{-t} Q) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t \langle R, P \rangle + e^{-t} \langle R, Q \rangle)$$

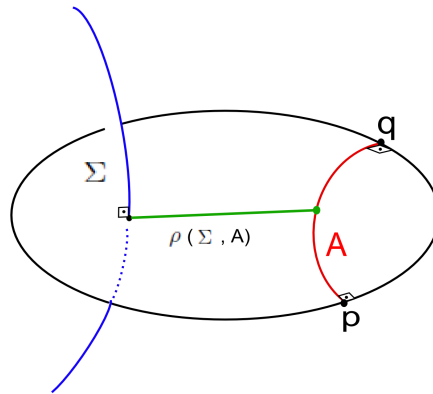


Figura 4.6: Distância entre um geodésica complexa e uma geodésica

Daí,

$$\begin{aligned}
 \langle A_t, R \rangle \langle R, A_t \rangle &= \frac{e^{2t} \langle P, R \rangle \langle R, P \rangle + \langle P, R \rangle \langle R, Q \rangle + \langle Q, R \rangle \langle R, P \rangle + e^{-2t} \langle R, Q \rangle \langle Q, R \rangle}{2} \\
 &= \frac{\left(e^{2t} |\langle P, R \rangle|^2 + e^{-2t} |\langle R, Q \rangle|^2 + \frac{\langle P, Q \rangle \langle R, R \rangle}{\langle P, Q \rangle \langle R, R \rangle} \cdot (\langle P, R \rangle \langle R, Q \rangle + \langle Q, R \rangle \langle R, P \rangle) \right)}{2} \\
 &= \frac{\left(e^{2t} |\langle P, R \rangle|^2 + e^{-2t} |\langle R, Q \rangle|^2 + \langle P, Q \rangle \langle R, R \rangle \cdot \left(\frac{\langle P, R \rangle \langle R, Q \rangle}{\langle P, Q \rangle \langle R, R \rangle} + \frac{\langle Q, R \rangle \langle R, P \rangle}{\langle P, Q \rangle \langle R, R \rangle} \right) \right)}{2} \\
 &= \frac{(e^{2t} |\langle P, R \rangle|^2 + e^{-2t} |\langle R, Q \rangle|^2 - (\eta + \bar{\eta}))}{2} \\
 &= \frac{(e^{2t} |\langle P, R \rangle|^2 + e^{-2t} |\langle R, Q \rangle|^2 - 2 \operatorname{Re}(\eta))}{2} \\
 &= \frac{(e^{2t} |\langle P, R \rangle|^2 + e^{-2t} |\langle R, Q \rangle|^2)}{2} - \operatorname{Re}(\eta)
 \end{aligned}$$

Sendo

$$\begin{aligned}
 \langle A_t, A_t \rangle \langle R, R \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P + e^{-t} Q), \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P + e^{-t} Q) \right\rangle \langle R, R \rangle \\
 &= \frac{(e^{2t} \langle P, P \rangle + \langle P, Q \rangle + \langle Q, P \rangle + e^{-2t} \langle Q, Q \rangle)}{2} \\
 &= -2/2 = -1
 \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
 \sinh^2 \left(\frac{\rho(a_t, \Sigma)}{2} \right) &= -\frac{\langle A_t, R \rangle \langle R, A_t \rangle}{\langle A_t, A_t \rangle \langle R, R \rangle} \\
 &= \frac{(e^{2t} |\langle P, R \rangle|^2 + e^{-2t} |\langle R, Q \rangle|^2)}{2} - \operatorname{Re}(\eta)
 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \sinh^2 \left(\frac{\rho(\Sigma, A)}{2} \right) &= \min_{t \in \mathbb{R}} - \frac{\langle A_t, R \rangle \langle R, A_t \rangle}{\langle A_t, A_t \rangle \langle R, R \rangle} \\ &= \min_{t \in \mathbb{R}} \left(\frac{|\langle P, R \rangle|^2}{2} \cdot e^{2t} + \frac{|\langle R, Q \rangle|^2}{2} \cdot e^{-2t} - \operatorname{Re}(\eta) \right) \end{aligned}$$

Como na demonstração do teorema 4.2, concluímos que este mínimo é atingido em:

$$\begin{aligned} \sinh^2 \left(\frac{\rho(\Sigma, A)}{2} \right) &= 2 \cdot \sqrt{\frac{|\langle P, R \rangle|^2}{2} \frac{|\langle R, Q \rangle|^2}{2}} - \operatorname{Re}(\eta) \\ &= |\langle P, R \rangle| |\langle R, Q \rangle| - \operatorname{Re}(\eta) \\ &= \frac{|\langle P, R \rangle| |\langle R, Q \rangle|}{|\langle P, Q \rangle| |\langle R, R \rangle|} - \operatorname{Re}(\eta) \\ &= |\eta| - \operatorname{Re}(\eta) \end{aligned}$$

□

Na demonstração deste teorema observe que $-\frac{\langle A_t, R \rangle \langle R, A_t \rangle}{\langle A_t, A_t \rangle \langle R, R \rangle} \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Esta expressão é positiva para os valores de t correspondentes a pontos a_t da geodésica A tais que $a_t \notin \Sigma$. E esta expressão é igual a zero se $a_t \in \Sigma$. Se nenhum dos pontos finais da geodésica A pertencem a Σ demonstramos que existe um único ponto de A mais próximo de Σ . Se A e Σ são concorrentes então $\rho(\Sigma, A) = 0$ e $|\eta| - \operatorname{Re}(\eta) = 0$.

Observe também que para qualquer η , $|\eta| - \operatorname{Re}(\eta) \geq 0$ e a igualmente ocorre se, e somente se, A e Σ são concorrentes.

4.6 Distância entre uma geodésica complexa e um bissetor

Nesta seção vamos analisar a posição relativa entre uma geodésica complexa Σ e um bissetor \mathcal{B} no espaço hiperbólico complexo $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ e também vamos apresentar uma expressão para a distância $\rho(\Sigma, \mathcal{B})$ no caso de eles serem disjuntos.

Então seja Σ uma geodésica complexa com vetor polar R e seja \mathcal{B} um bissetor com vértices $p, q \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Escolha levantamentos $P, Q \in \mathbb{C}^{2,1}$ destes pontos e normalize de modo que $\langle R, R \rangle = 1$ e $\langle P, Q \rangle = -1$. Pelo teorema 3.2 sabemos que as fatias Σ_t de \mathcal{B} possuem vetores polares parametrizados por $B_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P - e^{-t} Q)$, $t \in \mathbb{R}$.

Por definição a distância $\rho(\Sigma, \mathcal{B})$ entre a geodésica complexa Σ e o bissetor \mathcal{B} é a menor distância entre um ponto de Σ e um ponto de \mathcal{B} ,

$$\rho(\Sigma, \mathcal{B}) = \min_{x \in \Sigma, y \in \mathcal{B}} \rho(x, y).$$

Como nesta seção estamos interessados em calcular a distância entre Σ e \mathcal{B} , vamos supor que estes objetos são disjuntos (logo mais veremos como isto pode ser caracterizado).

Além disso, também vamos supor que em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, $p \notin \partial\Sigma$ e $q \notin \partial\Sigma$ pois caso contrário teremos $\rho(\Sigma, \mathcal{B}) = 0$. Então estamos supondo que $\langle P, R \rangle \neq 0$ e $\langle Q, R \rangle \neq 0$.

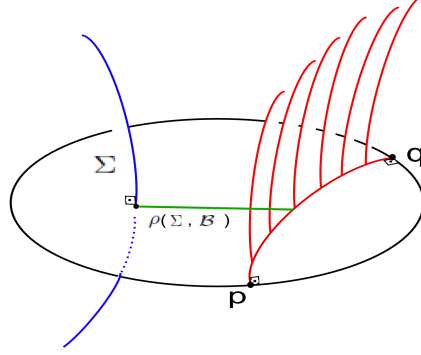


Figura 4.7: Distância entre uma geodésica complexa e um bisetor

Para cada espinha complexa Σ_t de \mathcal{B} de vetor polar B_t vimos que a distância entre Σ e Σ_t é tal que

$$\cosh^2 \left(\frac{\rho(\Sigma, \Sigma_t)}{2} \right) = \frac{\langle B_t, R \rangle \langle R, B_t \rangle}{\langle B_t, B_t \rangle \langle R, R \rangle}.$$

Substituindo nesta expressão $B_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P - e^{-t} Q)$ e simplificando como nas demonstrações dos teoremas anteriores pode-se verificar que

$$\cosh^2 \left(\frac{\rho(\Sigma, \Sigma_t)}{2} \right) = \frac{(e^{2t} |\langle P, R \rangle|^2 + e^{-2t} |\langle R, Q \rangle|^2)}{2} + \operatorname{Re}(\eta) \quad (4.2)$$

em que $\eta = \eta(p, q, r)$.

Como vimos no teorema 4.2 a expressão do lado direito desta última igualdade é uma função de t com um único ponto de mínimo global (lembre que $\langle P, R \rangle \neq 0$ e $\langle Q, R \rangle \neq 0$). Isto significa que existe uma única fatia de \mathcal{B} mais próxima da geodésica complexa Σ . Minimizando então os dois lados da igualdade anterior encontramos a distância entre Σ e \mathcal{B} :

$$\min_{t \in \mathbb{R}} \cosh^2 \left(\frac{\rho(\Sigma, \Sigma_t)}{2} \right) = \min_{t \in \mathbb{R}} \left(\frac{(e^{2t} |\langle P, R \rangle|^2 + e^{-2t} |\langle R, Q \rangle|^2)}{2} + \operatorname{Re}(\eta) \right)$$

$$\begin{aligned} \cosh^2 \left(\frac{\rho(\Sigma, \mathcal{B})}{2} \right) &= 2 \cdot \sqrt{\frac{|\langle P, R \rangle|^2}{2} \frac{|\langle R, Q \rangle|^2}{2}} + \operatorname{Re}(\eta) \\ &= |\langle P, R \rangle| |\langle R, Q \rangle| + \operatorname{Re}(\eta) \\ &= \frac{|\langle P, R \rangle| |\langle R, Q \rangle|}{|\langle P, Q \rangle| |\langle R, R \rangle|} + \operatorname{Re}(\eta) \\ &= |\eta| + \operatorname{Re}(\eta) \end{aligned}$$

Agora vamos analisar novamente esta demonstração com o objetivo de caracterizar quando a geodésica complexa Σ e o bisetor \mathcal{B} são disjuntos.

Para Σ e \mathcal{B} serem disjuntos, $\rho(\Sigma, \mathcal{B}) > 0$ e portanto $|\eta| + \operatorname{Re}(\eta) > 1$. De outro modo (equivalente) observe que para Σ e \mathcal{B} serem disjuntos Σ deve estar a uma distância positiva de todas as fatias Σ_t de \mathcal{B} . Daí, $\rho(\Sigma, \Sigma_t) > 0, \forall t \Rightarrow \cosh^2 \left(\frac{\rho(\Sigma, \mathcal{B})}{2} \right) > 1, \forall t \Rightarrow$

$$|\eta| + \operatorname{Re}(\eta) = \min_{t \in \mathbb{R}} \cosh^2 \left(\frac{\rho(\Sigma, \Sigma_t)}{2} \right) > 1.$$

O que fizemos nesta seção demonstra o seguinte teorema:

Teorema 4.5. *Seja Σ uma geodésica complexa com vetor polar R e seja \mathcal{B} um bissetor de vértices $p, q \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Sejam P e Q levantamentos quaisquer de p e q respectivamente, e seja $\eta = \eta(P, Q, R)$. Se $|\eta| + \operatorname{Re}(\eta) > 1$ então a geodésica complexa Σ está a uma distância positiva de \mathcal{B} e*

$$\cosh^2 \left(\frac{\rho(\Sigma, \mathcal{B})}{2} \right) = |\eta| + \operatorname{Re}(\eta).$$

Observação 4.1. Como $\eta = \frac{\langle P, R \rangle \langle R, Q \rangle}{\langle P, Q \rangle \langle R, R \rangle}$, a hipótese $|\eta| + \operatorname{Re}(\eta) > 1$ implica que $\eta \neq 0$ e portanto $\langle P, R \rangle \neq 0$ e $\langle R, Q \rangle \neq 0$. Logo os vértices do bissetor \mathcal{B} não pertencem a geodésica complexa Σ e a expressão (4.2) possui um único ponto de mínimo global.

Observação 4.2. A expressão $|\eta| + \operatorname{Re}(\eta) > 1$ é equivalente a $\operatorname{Im}(\eta)^2 + 2\operatorname{Re}(\eta) > 1$. De fato, $|\eta| + \operatorname{Re}(\eta) > 1 \Leftrightarrow \sqrt{\operatorname{Im}(\eta)^2 + \operatorname{Re}(\eta)^2} > 1 - \operatorname{Re}(\eta) \Leftrightarrow \operatorname{Im}(\eta)^2 + \operatorname{Re}(\eta)^2 > 1 - 2\operatorname{Re}(\eta) + \operatorname{Re}(\eta)^2 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(\eta)^2 + 2\operatorname{Re}(\eta) > 1$.

4.7 Distância entre geodésicas

Nos teoremas anteriores obtivemos fórmulas que explicitam o valor da distância entre alguns objetos de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Tais fórmulas dependem apenas do η -invariante. Entretanto no teorema abaixo a fórmula encontrada depende da raiz de um polinômio de grau 6 que pode não ser solúvel por radicais, assim nem sempre podemos obter uma solução para a distância entre geodésicas, dependendo da complexidade do polinômio.

Teorema 4.6. *Sejam $p, q, r, s \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ pontos distintos representados por vetores negativos $P, Q, R, S \in \mathbb{C}^{2,1}$ tais que $\langle P, Q \rangle = \langle R, S \rangle = -1$. Seja A a linha geodésica com pontos finais p e q e seja B a linha geodésica com pontos finais r e s . A distância $\rho(A, B)$ entre estas geodésicas é tal que*

$$\cosh^2 \left(\frac{\rho(A, B)}{2} \right) = |\tilde{\eta}(x_1)| + \operatorname{Re}(\tilde{\eta}(x_1))$$

em que $\tilde{\eta}(x) = \frac{ax + b + cx^{-1}}{2}$ sendo

$$a = \langle R, P \rangle \langle P, S \rangle, b = \langle R, P \rangle \langle Q, S \rangle + \langle R, Q \rangle \langle P, S \rangle, c = \langle R, Q \rangle \langle Q, S \rangle$$

e x_1 uma raiz positiva do polinômio

$$f(x) = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

onde $a_6 = \text{Im}(a\bar{a}^2)$, $a_5 = \text{Im}(\bar{a}^2b)$, $a_4 = \text{Im}((\bar{a}c - 2a\bar{c})\bar{a})$, $a_3 = -2\text{Im}(\bar{a}b\bar{c})$, $a_2 = \text{Im}((\bar{c}a - 2c\bar{a})\bar{c})$, $a_1 = \text{Im}(b\bar{c}^2)$ e $a_0 = \text{Im}(c\bar{c}^2)$.

Demonstração. Os pontos a_t , $t \in \mathbb{R}$ da geodésica A são levantados para os vetores $A_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^tP + e^{-t}Q)$ em $\mathbb{C}^{2,1}$.

Fixado t , vimos no teorema 4.2, que a distância entre o ponto a_t e a geodésica B é dada por $\cosh^2\left(\frac{\rho(a_t, B)}{2}\right) = |\eta_t| + \text{Re}(\eta_t)$, sendo $\eta_t = \eta(r, s, a_t)$ o η -invariante.

Assim, para calcular a distância $\rho(A, B)$ é suficiente minimizar $|\eta_t| + \text{Re}(\eta_t)$.

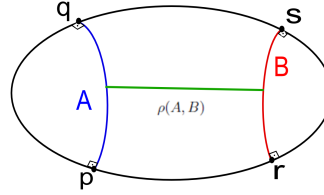


Figura 4.8: Distância entre geodésicas

Seja $\sigma_t = \text{Re}(\eta_t)$ e $\tau_t = \text{Im}(\eta_t)$. Como t está fixo, suprimiremos ele nas notações e voltaremos a usá-lo quando for necessário.

Nosso objetivo é minimizar $|\eta| + \sigma$. Para isso vamos calcular os pontos críticos desta função. Assim, como

$$|\eta| = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} = (\sigma^2 + \tau^2)^{1/2}$$

$$|\dot{\eta}| = \frac{2\sigma\dot{\sigma} + 2\tau\dot{\tau}}{2(\sigma^2 + \tau^2)^{1/2}} = \frac{\sigma\dot{\sigma} + \tau\dot{\tau}}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}$$

Temos

$$|\dot{\eta}| + \dot{\sigma} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sigma\dot{\sigma} + \tau\dot{\tau}}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} + \dot{\sigma} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma\dot{\sigma} + \tau\dot{\tau} = -\dot{\sigma}\sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \quad (4.3)$$

Mas,

$$\begin{aligned}
(\sigma\dot{\sigma} + \tau\dot{\tau})^2 = \dot{\sigma}^2(\sigma^2 + \tau^2) &\Leftrightarrow (\sigma\dot{\sigma})^2 + 2\sigma\dot{\sigma}\tau\dot{\tau} + (\tau\dot{\tau})^2 = \dot{\sigma}^2\sigma^2 + \dot{\sigma}^2\tau^2 \\
&\Leftrightarrow 2\sigma\dot{\sigma}\tau\dot{\tau} + \tau^2\dot{\tau}^2 = \tau^2\dot{\sigma}^2 \\
&\Leftrightarrow 2\sigma\dot{\sigma}\tau\dot{\tau} + \tau^2\dot{\tau}^2 - \tau^2\dot{\sigma}^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \tau(2\sigma\dot{\sigma}\dot{\tau} + \tau\dot{\tau}^2 - \tau\dot{\sigma}^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \tau = 0 \quad \text{ou} \quad 2\sigma\dot{\sigma}\dot{\tau} + \tau\dot{\tau}^2 - \tau\dot{\sigma}^2 = 0
\end{aligned}$$

Se $\tau = 0$ então $|\dot{\eta}| + \dot{\sigma} = \frac{\sigma\dot{\sigma} + \tau\dot{\tau}}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} + \dot{\sigma} = 2\dot{\sigma}$. Assim, se $\tau = 0$, encontramos o mínimo quando $\tau = \dot{\sigma} = 0$, o que também satisfaz a equação $2\sigma\dot{\sigma}\dot{\tau} + \tau\dot{\tau}^2 - \tau\dot{\sigma}^2 = 0$. Portanto é suficiente resolver

$$2\sigma\dot{\sigma}\dot{\tau} + \tau\dot{\tau}^2 - \tau\dot{\sigma}^2 = 0 \quad (4.4)$$

Verifiquemos agora que a equação (4.4) é equivalente a $\text{Im}(\eta\dot{\eta}^2) = 0$. Temos que

$$\eta = \text{Re}(\eta) + i\text{Im}(\eta) = \sigma + i\tau$$

$$\bar{\eta} = \sigma - i\tau$$

$$\dot{\eta} = \dot{\sigma} + i\dot{\tau} \Rightarrow \dot{\eta}^2 = \dot{\sigma}^2 + 2i\dot{\sigma}\dot{\tau} - \dot{\tau}^2$$

$$\dot{\bar{\eta}} = \dot{\sigma} - i\dot{\tau} \Rightarrow \dot{\bar{\eta}}^2 = \dot{\sigma}^2 - 2i\dot{\sigma}\dot{\tau} - \dot{\tau}^2$$

Então,

$$\begin{aligned}
\text{Im}(\eta\dot{\eta}^2) &= \frac{\eta\dot{\eta}^2 - \bar{\eta}\dot{\bar{\eta}}^2}{2i} = \\
&= \frac{(\sigma + i\tau)(\dot{\sigma}^2 - 2i\dot{\sigma}\dot{\tau} - \dot{\tau}^2) - (\sigma - i\tau)(\dot{\sigma}^2 + 2i\dot{\sigma}\dot{\tau} - \dot{\tau}^2)}{2i} \\
&= \frac{\sigma\dot{\sigma}^2 - 2i\sigma\dot{\sigma}\dot{\tau} - \sigma\dot{\tau}^2 + i\tau\dot{\sigma}^2 + 2\tau\dot{\sigma}\dot{\tau} - i\tau\dot{\tau}^2 - \sigma\dot{\sigma}^2 - 2i\sigma\dot{\sigma}\dot{\tau} + \sigma\dot{\tau}^2 + i\tau\dot{\sigma}^2 - 2\tau\dot{\sigma}\dot{\tau} - i\tau\dot{\tau}^2}{2i} \\
&= \frac{-4i\sigma\dot{\sigma}\dot{\tau} + 2i\tau\dot{\sigma}^2 - 2i\tau\dot{\tau}^2}{2i} \\
&= -2\sigma\dot{\sigma}\dot{\tau} + \tau\dot{\sigma}^2 - \tau\dot{\tau}^2
\end{aligned}$$

Portanto a equação (4.4) é equivalente a $\text{Im}(\eta\dot{\eta}^2) = 0$.

Agora, observe que,

$$\begin{aligned}
\langle A_t, A_t \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P + e^{-t} Q), \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P + e^{-t} Q) \right\rangle \\
&= \frac{e^{2t}\langle P, P \rangle + \langle P, Q \rangle + \langle Q, P \rangle + e^{-2t}\langle Q, Q \rangle}{2} \\
&= -2/2 = -1
\end{aligned}$$

$$\langle R, A_t \rangle = \left\langle R, \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P + e^{-t} Q) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t \langle R, P \rangle + e^{-t} \langle R, Q \rangle)$$

$$\langle A_t, S \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P + e^{-t} Q), S \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t \langle P, S \rangle + e^{-t} \langle Q, S \rangle)$$

Assim, como $\eta(r, s, a_t) = \frac{\langle R, A_t \rangle \langle A_t, S \rangle}{\langle R, S \rangle \langle A_t, A_t \rangle}$ e $\langle R, S \rangle = -1$, temos

$$\begin{aligned} \eta &= \langle R, A_t \rangle \langle A_t, S \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t \langle R, P \rangle + e^{-t} \langle R, Q \rangle) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t \langle P, S \rangle + e^{-t} \langle Q, S \rangle) \\ &= \frac{e^{2t} \langle R, P \rangle \langle P, S \rangle + \langle R, P \rangle \langle Q, S \rangle + \langle R, Q \rangle \langle P, S \rangle + e^{-2t} \langle R, Q \rangle \langle Q, S \rangle}{2} \end{aligned}$$

Considere $a = \langle R, P \rangle \langle P, S \rangle$, $b = \langle R, P \rangle \langle Q, S \rangle + \langle R, Q \rangle \langle P, S \rangle$, $c = \langle R, Q \rangle \langle Q, S \rangle$ e $x = e^{2t}$, então $\eta = \frac{ax + b + cx^{-1}}{2}$ e $\dot{\eta} = \frac{2ae^{2t}}{2} - \frac{2ce^{-2t}}{2} = \frac{ax^2 - c}{x}$.

Assim, para $x = e^{2t}$,

$$\begin{aligned} 2x^3 \eta \dot{\eta}^2 &= 2x^3 \left(\frac{ax + b + cx^{-1}}{2} \right) \left(\frac{\bar{a}^2 x^4 - 2\bar{a}\bar{c}x^2 + \bar{c}^2}{x^2} \right) \\ &= x(\bar{a}\bar{a}^2 x^5 - 2\bar{a}\bar{a}\bar{c}x^3 + \bar{a}\bar{c}^2 x + \bar{a}^2 b x^4 - 2\bar{a}\bar{b}\bar{c}x^2 + \bar{b}\bar{c}^2 + \bar{c}\bar{a}^2 x^3 - 2\bar{c}\bar{a}\bar{c}x + \bar{c}\bar{c}^2 x^{-1}) \\ &= \bar{a}\bar{a}^2 x^6 - 2\bar{a}\bar{a}\bar{c}x^4 + \bar{a}\bar{c}^2 x^2 + \bar{a}^2 b x^5 - 2\bar{a}\bar{b}\bar{c}x^3 + \bar{b}\bar{c}^2 x + \bar{c}\bar{a}^2 x^4 - 2\bar{c}\bar{a}\bar{c}x^2 + \bar{c}\bar{c}^2 \\ &= \bar{a}\bar{a}^2 x^6 + \bar{a}^2 b x^5 + (\bar{a}\bar{c} - 2\bar{a}\bar{c})\bar{a}x^4 - 2\bar{a}\bar{b}\bar{c}x^3 + (\bar{c}\bar{a} - 2\bar{c}\bar{a})\bar{c}x^2 + \bar{b}\bar{c}^2 x + \bar{c}\bar{c}^2 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} 2x^3 \text{Im}(\eta \dot{\eta}^2) &= \text{Im}(\bar{a}\bar{a}^2)x^6 + \text{Im}(\bar{a}^2 b)x^5 + \\ &\quad \text{Im}((\bar{a}\bar{c} - 2\bar{a}\bar{c})\bar{a})x^4 - 2\text{Im}(\bar{a}\bar{b}\bar{c})x^3 + \\ &\quad \text{Im}((\bar{c}\bar{a} - 2\bar{c}\bar{a})\bar{c})x^2 + \text{Im}(\bar{b}\bar{c}^2)x + \text{Im}(\bar{c}\bar{c}^2) \end{aligned}$$

Sejam $a_6 = \text{Im}(\bar{a}\bar{a}^2)$, $a_5 = \text{Im}(\bar{a}^2 b)$, $a_4 = \text{Im}((\bar{a}\bar{c} - 2\bar{a}\bar{c})\bar{a})$, $a_3 = -2\text{Im}(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$, $a_2 = \text{Im}((\bar{c}\bar{a} - 2\bar{c}\bar{a})\bar{c})$, $a_1 = \text{Im}(\bar{b}\bar{c}^2)$ e $a_0 = \text{Im}(\bar{c}\bar{c}^2)$. Então, sendo $x = e^{2t}$, temos

$$2x^3 \text{Im}(\eta \dot{\eta}^2) = a_6 x^6 + a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = f(x)$$

Portanto, resolver a equação (4.4) é equivalente a encontrar as raízes positivas de $f(x)$.

Então, para minimizar $|\eta_t| + \text{Re}(\eta_t)$ basta encontrar as raízes positivas de $f(x)$. Logo, denotando $\tilde{\eta}(x) = \frac{ax + b + cx^{-1}}{2}$ e dado x_1 uma raiz positiva de $f(x)$, temos que

$$\cosh^2 \left(\frac{\rho(A, B)}{2} \right) = |\tilde{\eta}(x_1)| + \text{Re}(\tilde{\eta}(x_1)).$$

□

4.8 Distância entre bissetores

De forma análoga ao que vimos no teorema anterior, o próximo teorema nos fornece uma fórmula que depende da raiz de um polinômio de grau 6 que pode não ser solúvel por radicais, assim nem sempre é possível obter uma solução para a distância entre bissetores, dependendo da complexidade do polinômio.

Teorema 4.7. *Seja $\mathcal{B} = \mathcal{B}(p, q)$ bissetor de vértices $p, q \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ e seja $\mathcal{C} = \mathcal{C}(r, s)$ bissetor de vértices $r, s \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Sejam $P, Q, R, S \in \mathbb{C}^{2,1}$ levantamentos destes vértices tais que $\langle P, Q \rangle = \langle R, S \rangle = -1$. Se estes bissetores são disjuntos então a distância $\rho(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ entre eles é tal que*

$$\cosh^2 \left(\frac{\rho(\mathcal{B}, \mathcal{C})}{2} \right) = |\tilde{\eta}(x_2)| + \operatorname{Re}(\tilde{\eta}(x_2))$$

em que $\tilde{\eta}$ é a função dada no teorema 4.6 e x_2 é uma raiz negativa do polinômio f também dado no teorema 4.6.

Demonstração. Como vimos no teorema 3.2, para cada $t \in \mathbb{R}$, o vetor polar da fatia Σ_t do bissetor \mathcal{B} é dado por

$$B_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P - e^{-t} Q).$$

Pelo teorema 4.5 a distância $\rho(\mathcal{C}, \Sigma_t)$ entre o bissetor \mathcal{C} e a fatia Σ_t de \mathcal{B} é tal que

$$\cosh^2 \left(\frac{\rho(\mathcal{C}, \Sigma_t)}{2} \right) = |\eta_t| + \operatorname{Re}(\eta_t)$$

em que $\eta_t = \eta(r, s, b_t)$ é o η -invariante.

Assim, para calcular a distância $\rho(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ devemos minimizar $|\eta_t| + \operatorname{Re}(\eta_t)$.

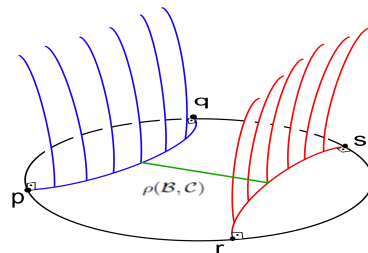


Figura 4.9: Distância entre bissetores

De modo análogo ao que fizemos no teorema 4.6, considerando $\sigma = \operatorname{Re}(\eta_t)$ e $\tau = \operatorname{Im}(\eta_t)$ encontramos as equações (4.3) e (4.4). Omitiremos t nas notações já que estamos considerando t fixo.

Vimos que a equação

$$2\sigma\dot{\sigma}\dot{\tau} + \tau\dot{\tau}^2 = \tau\dot{\sigma}^2 \quad (4.5)$$

é equivalente a $\text{Im}(\eta\dot{\eta}^2) = 0$.

Temos que

$$\begin{aligned} \langle B_t, B_t \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P - e^{-t} Q), \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P - e^{-t} Q) \right\rangle \\ &= \frac{e^{2t}\langle P, P \rangle - \langle P, Q \rangle - \langle Q, P \rangle + e^{-2t}\langle Q, Q \rangle}{2} \\ &= 2/2 = 1 \end{aligned}$$

$$\langle R, B_t \rangle = \left\langle R, \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P - e^{-t} Q) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t \langle R, P \rangle - e^{-t} \langle R, Q \rangle)$$

$$\langle B_t, S \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P - e^{-t} Q), S \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t \langle P, S \rangle - e^{-t} \langle Q, S \rangle)$$

Sendo $\eta(r, s, b_t) = \frac{\langle R, B_t \rangle \langle B_t, S \rangle}{\langle R, S \rangle \langle B_t, B_t \rangle}$ e $\langle R, S \rangle = -1$, obtemos

$$\begin{aligned} \eta &= -\langle R, B_t \rangle \langle B_t, S \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t \langle R, P \rangle - e^{-t} \langle R, Q \rangle) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t \langle P, S \rangle - e^{-t} \langle Q, S \rangle) \\ &= -\frac{e^{2t} \langle R, P \rangle \langle P, S \rangle - \langle R, P \rangle \langle Q, S \rangle - \langle R, Q \rangle \langle P, S \rangle + e^{-2t} \langle R, Q \rangle \langle Q, S \rangle}{2} \end{aligned}$$

Considere $a = \langle R, P \rangle \langle P, S \rangle$, $b = \langle R, P \rangle \langle Q, S \rangle + \langle R, Q \rangle \langle P, S \rangle$, $c = \langle R, Q \rangle \langle Q, S \rangle$ e $x = -e^{2t}$, então $\eta = \frac{ax + b + cx^{-1}}{2}$ e $\dot{\eta} = \frac{-2ae^{2t}}{2} + \frac{2ce^{-2t}}{2} = \frac{ax^2 - c}{x}$.

Portanto, para $x = -e^{2t}$,

$$2x^3\eta\dot{\eta}^2 = a\bar{a}^2x^6 + \bar{a}^2bx^5 + (\bar{a}c - 2a\bar{c})\bar{a}x^4 - 2\bar{a}b\bar{c}x^3 + (\bar{c}a - 2c\bar{a})\bar{c}x^2 + b\bar{c}^2x + c\bar{c}^2$$

Logo,

$$\begin{aligned} 2x^3\text{Im}(\eta\dot{\eta}^2) &= \text{Im}(a\bar{a}^2)x^6 + \text{Im}(\bar{a}^2b)x^5 + \\ &\quad \text{Im}((\bar{a}c - 2a\bar{c})\bar{a})x^4 - 2\text{Im}(\bar{a}b\bar{c})x^3 + \\ &\quad \text{Im}((\bar{c}a - 2c\bar{a})\bar{c})x^2 + \text{Im}(b\bar{c}^2)x + \text{Im}(c\bar{c}^2) \end{aligned}$$

Sejam $a_6 = \text{Im}(a\bar{a}^2)$, $a_5 = \text{Im}(\bar{a}^2b)$, $a_4 = \text{Im}((\bar{a}c - 2a\bar{c})\bar{a})$, $a_3 = -2\text{Im}(\bar{a}b\bar{c})$, $a_2 = \text{Im}((\bar{c}a - 2c\bar{a})\bar{c})$, $a_1 = \text{Im}(b\bar{c}^2)$ e $a_0 = \text{Im}(c\bar{c}^2)$. Então, sendo $x = -e^{2t}$, temos

$$2x^3\text{Im}(\eta\dot{\eta}^2) = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = f(x)$$

Então, resolver a equação (4.5) é equivalente a encontrar as raízes negativas de $f(x)$.

Portanto, para minimizar $|\eta_t| + \operatorname{Re}(\eta_t)$ é suficiente encontrar as raízes negativas de $f(x)$. Logo, denotando $\tilde{\eta}(x) = \frac{ax + b + cx^{-1}}{2}$ e dado x_2 uma raiz negativa de $f(x)$, temos que

$$\cosh^2\left(\frac{\rho(\mathcal{B}, \mathcal{C})}{2}\right) = |\tilde{\eta}(x_2)| + \operatorname{Re}(\tilde{\eta}(x_2)).$$

□

4.9 Distância entre uma geodésica e um bissetor

Como nos dois últimos teoremas, o teorema abaixo apresenta uma fórmula que depende da raiz de um polinômio de grau 6 que pode não ser solúvel por radicais, assim nem sempre que podemos obter uma solução para a distância entre uma geodésica e um bissetor, dependendo da complexidade do polinômio. Para encontrar a distância entre uma geodésica e um bissetor podemos variar qualquer ponto ao longo de uma geodésica ou variar as fatias de um bissetor. Escolhemos variar qualquer ponto ao longo de uma geodésica.

Teorema 4.8. *Considere os pontos $p, q, r, s \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ distintos, cujos levantamentos em $\mathbb{C}^{2,1}$ são, respectivamente, P, Q, R e S , normalizados de modo que $\langle P, Q \rangle = \langle R, S \rangle = -1$. Sejam A a geodésica com pontos finais p e q e $\mathcal{B} = \mathcal{B}(r, s)$ o bissetor cujos vértices são r e s . Então,*

$$\sinh^2\left(\frac{\rho(A, \mathcal{B})}{2}\right) = |\tilde{\eta}(x_3)| - \operatorname{Re}(\tilde{\eta}(x_3))$$

em que $\tilde{\eta}$ é a função dada no teorema 4.6 e x_3 é uma raiz positiva do polinômio f também dado no teorema 4.6.

Demonstração. Suponha que a geodésica A e o bissetor \mathcal{B} não se intersectam.

Os pontos a_t , $t \in \mathbb{R}$ da geodésica A são levantados para os vetores $A_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P + e^{-t} Q)$ em $\mathbb{C}^{2,1}$.

Para t fixo, a distância entre um ponto a_t e um bissetor \mathcal{B} é dada por $\sinh^2\left(\frac{\rho(a_t, \mathcal{B})}{2}\right) = |\eta_t| - \operatorname{Re}(\eta_t)$, como vimos no teorema 4.3, onde $\eta_t = \eta(r, s, a_t)$ é o η -invariante.

Assim, para calcular a distância $\rho(A, \mathcal{B})$ basta minimizar $|\eta_t| - \operatorname{Re}(\eta_t)$.

De forma parecida ao que fizemos no teorema 4.6, considere $\sigma = \operatorname{Re}(\eta_t)$ e $\tau = \operatorname{Im}(\eta_t)$.

Como t está fixo, suprimiremos ele nas notações.

Nosso objetivo é minimizar $|\eta| - \sigma$. Assim,

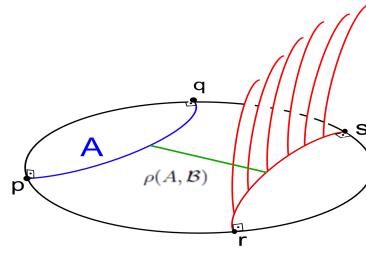


Figura 4.10: Distância entre uma geodésica e um bisetor

$$|\eta| = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} = (\sigma^2 + \tau^2)^{1/2}$$

$$|\dot{\eta}| = \frac{2\sigma\dot{\sigma} + 2\tau\dot{\tau}}{2(\sigma^2 + \tau^2)^{1/2}} = \frac{\sigma\dot{\sigma} + \tau\dot{\tau}}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}$$

Definindo sua derivada igual a zero obtemos

$$\begin{aligned} |\dot{\eta}| - \dot{\sigma} &= 0 \Leftrightarrow \frac{\sigma\dot{\sigma} + \tau\dot{\tau}}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} - \dot{\sigma} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sigma\dot{\sigma} + \tau\dot{\tau} = \dot{\sigma}\sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Logo,

$$\begin{aligned} (\sigma\dot{\sigma} + \tau\dot{\tau})^2 &= \dot{\sigma}^2(\sigma^2 + \tau^2) \Leftrightarrow (\sigma\dot{\sigma})^2 + 2\sigma\dot{\sigma}\tau\dot{\tau} + (\tau\dot{\tau})^2 = \dot{\sigma}^2\sigma^2 + \dot{\sigma}^2\tau^2 \\ &\Leftrightarrow 2\sigma\dot{\sigma}\tau\dot{\tau} + \tau^2\dot{\tau}^2 = \tau^2\dot{\sigma}^2 \\ &\Leftrightarrow 2\sigma\dot{\sigma}\tau\dot{\tau} + \tau^2\dot{\tau}^2 - \tau^2\dot{\sigma}^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \tau(2\sigma\dot{\sigma}\dot{\tau} + \tau\dot{\tau}^2 - \tau\dot{\sigma}^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \tau = 0 \quad \text{ou} \quad 2\sigma\dot{\sigma}\dot{\tau} + \tau\dot{\tau}^2 - \tau\dot{\sigma}^2 = 0 \end{aligned}$$

Se $\tau = 0$ então substituindo esse valor na equação (4.6) encontramos $\sigma\dot{\sigma} = \sigma\dot{\sigma}$, ou seja, $\tau = 0$ satisfaz a equação (4.6) e também a equação $2\sigma\dot{\sigma}\dot{\tau} + \tau\dot{\tau}^2 - \tau\dot{\sigma}^2 = 0$. Portanto é suficiente resolver a equação

$$2\sigma\dot{\sigma}\dot{\tau} + \tau\dot{\tau}^2 - \tau\dot{\sigma}^2 = 0 \quad (4.7)$$

Já verificamos que a equação (4.7) é equivalente a $\text{Im}(\eta\dot{\eta}^2) = 0$.

Agora, para calcular $\eta(r, s, a_t)$ observe que

$$\begin{aligned} \langle A_t, A_t \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P + e^{-t} Q), \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P + e^{-t} Q) \right\rangle \\ &= \frac{e^{2t}\langle P, P \rangle + \langle P, Q \rangle + \langle Q, P \rangle + e^{-2t}\langle Q, Q \rangle}{2} \\ &= -2/2 = -1 \end{aligned}$$

$$\langle R, A_t \rangle = \left\langle R, \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P + e^{-t} Q) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t \langle R, P \rangle + e^{-t} \langle R, Q \rangle)$$

$$\langle A_t, S \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t P + e^{-t} Q), S \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t \langle P, S \rangle + e^{-t} \langle Q, S \rangle)$$

Como $\eta(r, s, a_t) = \frac{\langle R, A_t \rangle \langle A_t, S \rangle}{\langle R, S \rangle \langle A_t, A_t \rangle}$ e $\langle R, S \rangle = -1$, temos

$$\begin{aligned} \eta &= \langle R, A_t \rangle \langle A_t, S \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t \langle R, P \rangle + e^{-t} \langle R, Q \rangle) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t \langle P, S \rangle + e^{-t} \langle Q, S \rangle) \\ &= -\frac{e^{2t} \langle R, P \rangle \langle P, S \rangle + \langle R, P \rangle \langle Q, S \rangle + \langle R, Q \rangle \langle P, S \rangle + e^{-2t} \langle R, Q \rangle \langle Q, S \rangle}{2} \end{aligned}$$

Considere $a = \langle R, P \rangle \langle P, S \rangle$, $b = \langle R, P \rangle \langle Q, S \rangle + \langle R, Q \rangle \langle P, S \rangle$, $c = \langle R, Q \rangle \langle Q, S \rangle$ e $x = e^{2t}$, então $\eta = \frac{ax + b + cx^{-1}}{2}$ e $\dot{\eta} = \frac{2ae^{2t}}{2} - \frac{2ce^{-2t}}{2} = \frac{ax^2 - c}{x}$.

Portanto, para $x = e^{2t}$,

$$2x^3 \dot{\eta}^2 = a\bar{a}^2 x^6 + \bar{a}^2 b x^5 + (\bar{a}c - 2a\bar{c})\bar{a}x^4 - 2\bar{a}b\bar{c}x^3 + (\bar{c}a - 2c\bar{a})\bar{c}x^2 + b\bar{c}^2 x + c\bar{c}^2$$

Logo,

$$\begin{aligned} 2x^3 \text{Im}(\dot{\eta}^2) &= \text{Im}(a\bar{a}^2)x^6 + \text{Im}(\bar{a}^2 b)x^5 + \\ &\quad \text{Im}((\bar{a}c - 2a\bar{c})\bar{a})x^4 - 2\text{Im}(\bar{a}b\bar{c})x^3 + \\ &\quad \text{Im}((\bar{c}a - 2c\bar{a})\bar{c})x^2 + \text{Im}(b\bar{c}^2)x + \text{Im}(c\bar{c}^2) \end{aligned}$$

Sejam $a_6 = \text{Im}(a\bar{a}^2)$, $a_5 = \text{Im}(\bar{a}^2 b)$, $a_4 = \text{Im}((\bar{a}c - 2a\bar{c})\bar{a})$, $a_3 = -2\text{Im}(\bar{a}b\bar{c})$, $a_2 = \text{Im}((\bar{c}a - 2c\bar{a})\bar{c})$, $a_1 = \text{Im}(b\bar{c}^2)$ e $a_0 = \text{Im}(c\bar{c}^2)$. Então, sendo $x = e^{2t}$, temos

$$2x^3 \text{Im}(\dot{\eta}^2) = a_6 x^6 + a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = f(x)$$

Assim, resolver a equação (4.7) é equivalente a encontrar as raízes positivas de $f(x)$.

Portanto, para minimizar $|\eta_t| - \text{Re}(\eta_t)$ basta encontrar as raízes positivas de $f(x)$.

Logo, denotando $\tilde{\eta}(x) = \frac{ax + b + cx^{-1}}{2}$ e dado x_3 uma raiz positiva de $f(x)$, temos que

$$\sinh^2 \left(\frac{\rho(A, \mathcal{B})}{2} \right) = |\tilde{\eta}(x_3)| - \text{Re}(\tilde{\eta}(x_3)).$$

□

4.10 Exemplos

Nesta seção vamos apresentar um exemplo em que o polinômio f do teorema 4.6 não é solúvel por radicais e exemplos em que aquele polinômio é solúvel por radicais. Nestes exemplos vamos calcular os coeficientes de f em termos do invariante de Korányi-Reimann e do invariante angular de Cartan.

Sejam p, q, r, s quatro pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ representados por vetores nulos $P, Q, R, S \in \mathbb{C}^{2,1}$ normalizados de modo que $\langle P, Q \rangle = \langle R, S \rangle = -1$.

Sejam $a = \langle R, P \rangle \langle P, S \rangle$, $b = \langle R, P \rangle \langle Q, S \rangle + \langle R, Q \rangle \langle P, S \rangle$, $c = \langle R, Q \rangle \langle Q, S \rangle$ e

$$f(x) = a_6 x^6 + a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

o polinômio do teorema 4.6 em que $a_6 = \text{Im}(a\bar{a}^2)$, $a_5 = \text{Im}(\bar{a}^2 b)$, $a_4 = \text{Im}((\bar{a}c - 2a\bar{c})\bar{a})$, $a_3 = -2\text{Im}(\bar{a}b\bar{c})$, $a_2 = \text{Im}((\bar{c}a - 2c\bar{a})\bar{c})$, $a_1 = \text{Im}(b\bar{c}^2)$ e $a_0 = \text{Im}(c\bar{c}^2)$.

Considere os seguintes invariantes:

$$\mathbb{X}_1 = \mathbb{X}(p, q, r, s), \quad \mathbb{X}_2 = \mathbb{X}(q, p, r, s), \quad \mathbb{A}_1 = \mathbb{A}(r, p, s), \quad \mathbb{A}_2 = \mathbb{A}(r, q, s).$$

Temos que

- $\mathbb{X}_1 = \mathbb{X}(p, q, r, s) = \frac{\langle R, P \rangle \langle Q, S \rangle}{\langle Q, P \rangle \langle R, S \rangle} = \langle R, P \rangle \langle Q, S \rangle$
- $\mathbb{X}_2 = \mathbb{X}(q, p, r, s) = \frac{\langle R, Q \rangle \langle P, S \rangle}{\langle P, Q \rangle \langle R, S \rangle} = \langle R, Q \rangle \langle P, S \rangle$
- $b = \mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2$
- $ac = \mathbb{X}_1 \cdot \mathbb{X}_2$
- $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}(r, p, s) = \arg(-\langle R, P \rangle \langle P, S \rangle \langle S, R \rangle) = \arg(\langle R, P \rangle \langle P, S \rangle) = \arg(a)$
- $\mathbb{A}_2 = \mathbb{A}(r, q, s) = \arg(-\langle R, Q \rangle \langle Q, S \rangle \langle S, R \rangle) = \arg(\langle R, Q \rangle \langle Q, S \rangle) = \arg(c)$

Exemplo 4.1. Suponhamos que p, q, r, s pertençam a um \mathbb{R} -círculo de $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Neste caso $\mathbb{X}_1 = \mathbb{X}(p, q, r, s)$ e $\mathbb{X}_2 = \mathbb{X}(q, p, r, s)$ são números reais, $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}(r, p, s)$ e $\mathbb{A}_2 = \mathbb{A}(r, q, s)$ são iguais a zero (ver [1] página 225, item 3, e página 214 teorema 7.1.4). Daí, segue que a, b e c são números reais e portanto o polinômio do teorema 4.6 é identicamente nulo, assim, este teorema não pode ser utilizado para o cálculo da distância entre as geodésicas \overleftrightarrow{pq} e \overleftrightarrow{rs} . *

Exemplo 4.2. Vamos representar por $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ o disco de Poincaré, ou seja, o plano hiperbólico real de dimensão 2. No modelo da bola para o espaço hiperbólico complexo $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ podemos ver $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$ como uma geodésica complexa em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ através da seguinte inclusão:

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1 &\rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \\ z &\mapsto \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sejam p, q, r, s quatro números complexos unitários distintos: $p, q, r, s \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$. Neste exemplo vamos calcular a distância entre as linhas geodésicas \overleftrightarrow{pq} e \overleftrightarrow{rs} no caso de elas serem disjuntas.

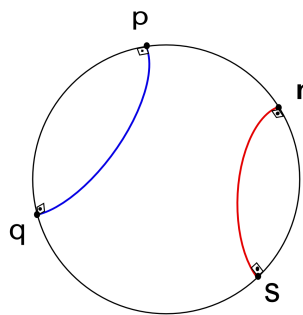


Figura 4.11: Geodésicas \overleftrightarrow{pq} e \overleftrightarrow{rs} disjuntas

Os pontos p, q, r, s podem ser vistos como pontos na fronteira do espaço hiperbólico complexo $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ representados pelos seguintes vetores negativos em $\mathbb{C}^{2,1}$

$$P = \frac{1}{1 - p\bar{q}} \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} q \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad R = \frac{1}{1 - r\bar{s}} \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

normalizados de modo que $\langle P, Q \rangle = \langle R, S \rangle = -1$.

Afirmamos que os invariantes de Korányi-Reimann $\mathbb{X}_1 = \mathbb{X}(p, q, r, s)$ e $\mathbb{X}_2 = \mathbb{X}(q, p, r, s)$ coincidem com as razões cruzadas clássica $[p, q, r, s]$ e $[q, p, r, s]$, respectivamente. De fato,

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_1 &= \frac{(r\bar{p} - 1)(q\bar{s} - 1)}{(q\bar{p} - 1)(r\bar{s} - 1)} = \frac{(r - p)(q - s)}{(q - p)(r - s)} = [p, q, r, s] \\ \mathbb{X}_2 &= \frac{(r\bar{q} - 1)(p\bar{s} - 1)}{(p\bar{q} - 1)(r\bar{s} - 1)} = \frac{(r - q)(p - s)}{(p - q)(r - s)} = [q, p, r, s] \end{aligned}$$

Pelas relações dadas na seção 2.2.1 das razões cruzadas clássica temos que $[p, q, r, s] = 1 - [q, p, r, s]$ e portanto $b = \mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 = 1$.

De

$$a = \langle R, P \rangle \langle P, S \rangle = \frac{1}{|1 - p\bar{q}|^2} \cdot \frac{r\bar{s} - r\bar{p} - p\bar{s} + 1}{1 - r\bar{s}}$$

e

$$c = \langle R, Q \rangle \langle Q, S \rangle = \frac{r\bar{s} - r\bar{q} - q\bar{s} + 1}{1 - r\bar{s}}$$

pode-se verificar que $\bar{a} = -a$ e $\bar{c} = -c$. Daí, a e c são números imaginários puros. Então vamos escrever $a = iA$ e $c = iC$ em que $A, C \in \mathbb{R}$.

De $a = iA$, $b = 1$ e $c = iC$ podemos calcular os coeficientes $a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0$ do polinômio f obtendo: $a_1 = a_3 = a_5 = 0$, $a_6 = -A^3$, $a_4 = CA^2$, $a_2 = C^2A$ e $a_0 = -C^3$ donde $f(x) = -A^3x^6 + CA^2x^4 + C^2Ax^2 - C^3$ que pode ser fatorado como

$$f(x) = -(Ax^2 + C)(Ax^2 - C)^2.$$

Agora observe que para determinarmos as raízes deste polinômio precisamos resolver as equações $x^2 = -\frac{C}{A}$ e $x^2 = \frac{C}{A}$.

Como queremos calcular a distância entre as linhas geodésicas \overleftrightarrow{pq} e \overleftrightarrow{rs} precisamos analisar quando elas não se intersectam e, de acordo com o teorema 4.6, precisamos calcular as raízes positivas do polinômio f . Como $\mathbb{X}_1 = [p, q, r, s]$, de acordo com as propriedades de razão cruzada clássica vistas na seção 2.2.1, o sinal de \mathbb{X}_1 determina a posição relativa dos pontos p, q, r, s sobre $\partial\mathbb{H}_\mathbb{C}^1$.

Logo as linhas geodésicas \overleftrightarrow{pq} e \overleftrightarrow{rs} são disjuntas se, e somente se, $\mathbb{X}_1 < 0$ ou $\mathbb{X}_1 > 1$. Como $\mathbb{X}_2 = 1 - \mathbb{X}_1$ e como $ac = \mathbb{X}_1 \cdot \mathbb{X}_2 = \mathbb{X}_1(1 - \mathbb{X}_1)$ temos que \overleftrightarrow{pq} e \overleftrightarrow{rs} são disjuntas se, e somente se, $ac < 0$.

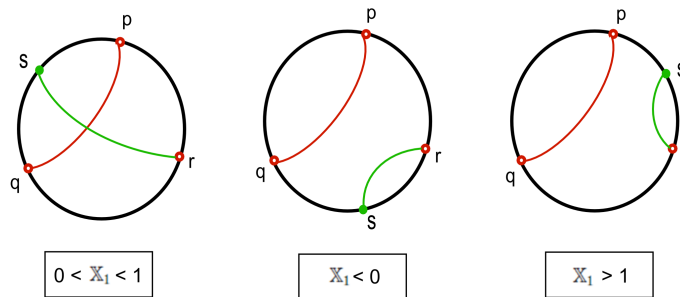


Figura 4.12: Posição dos pontos p, q, r, s sobre $\mathbb{H}_\mathbb{C}^1$

Como $a = iA$ e $c = iC$, $ac = -AC$. Daí concluímos que \overleftrightarrow{pq} e \overleftrightarrow{rs} são disjuntas se, e somente se, $AC > 0$, equivalentemente, $\frac{C}{A} > 0$. Se este é o caso, a única raiz positiva do

polinômio f é $x_1 = \sqrt{\frac{C}{A}}$. Daí a função $\tilde{\eta}$ do teorema 4.6 é dada por:

$$\tilde{\eta}(x_1) = \frac{ax_1 + b + cx_1^{-1}}{2} = \frac{iA\sqrt{\frac{C}{A}} + 1 + iC\sqrt{\frac{A}{C}}}{2}.$$

Portanto,

$$|\tilde{\eta}(x_1)| = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(A\sqrt{\frac{C}{A}} + C\sqrt{\frac{C}{A}}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4AC}$$

e $\text{Re}(\tilde{\eta}(x_1)) = \frac{1}{2}$. Assim,

$$\cosh^2\left(\frac{\rho(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{rs})}{2}\right) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4AC}}{2} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4ac}}{2}.$$

Neste exemplo, quando as linhas geodésicas \overrightarrow{pq} e \overrightarrow{rs} são disjuntas conseguimos calcular explicitamente a raiz positiva x_1 do polinômio f e assim conseguimos calcular a distância entre estas geodésicas. Explorando um pouco mais, vamos ver o que ocorre quando estas geodésicas são concorrentes. Isto ocorre se, e somente se, $AC < 0$ ou equivalentemente, $\frac{C}{A} < 0$. Neste caso a única raiz positiva do polinômio f é $x_1 = \sqrt{-\frac{C}{A}}$. A função $\tilde{\eta}$ do teorema 4.6 é dada por:

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}(x_1) &= \frac{ax_1 + b + cx_1^{-1}}{2} = \frac{iA\sqrt{-\frac{C}{A}} + 1 + iC\sqrt{-\frac{A}{C}}}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\left[A\sqrt{-\frac{C}{A}} + C\sqrt{-\frac{A}{C}}\right] = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\cosh^2\left(\frac{\rho(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{rs})}{2}\right) = |\tilde{\eta}(x_1)| + \text{Re}(\tilde{\eta}(x_1)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Logo, $\rho(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{rs}) = 0$. *

Exemplo 4.3. Continuando com as notações do início desta seção vamos supor que $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}_2$, isto é, $\mathbb{A}(r, p, s) = \mathbb{A}(r, q, s)$. Isto significa que existe uma aplicação $g \in PU(2, 1)$ tal que $g(r) = r$, $g(s) = s$ e $g(p) = q$ (ver teorema 7.1.1 de [1], página 211).

Se $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}_2$ então $\arg(a) = \arg(c)$ de modo que $\lambda = \frac{c}{a} = \frac{|c|}{|a|}$ é um número real positivo. Efetuando alguns cálculos pode-se verificar que os coeficientes do polinômio f do teorema 4.6 são:

$$a_0 = \text{Im}(c\bar{c}^2) = -\lambda^3|a|^2\text{Im}(a)$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \operatorname{Im}(b\bar{c}^2) = \lambda^2 \operatorname{Im}(b\bar{a}^2) \\
a_2 &= \operatorname{Im}((\bar{c}a - 2c\bar{a})\bar{c}) = \lambda^2 |a|^2 \operatorname{Im}(a) \\
a_3 &= -2 \operatorname{Im}(\bar{a}b\bar{c}) = -2\lambda \operatorname{Im}(\bar{a}^2 b) \\
a_4 &= \operatorname{Im}((\bar{a}c - 2a\bar{c})\bar{a}) = \lambda |a|^2 \operatorname{Im}(a) \\
a_5 &= \operatorname{Im}(\bar{a}^2 b) \\
a_6 &= \operatorname{Im}(a\bar{a}^2) = -|a|^2 \operatorname{Im}(a)
\end{aligned}$$

E também pode-se verificar que o polinômio f se fatora como:

$$f(x) = -(|a|^2 \operatorname{Im}(a)x^2 - \operatorname{Im}(\bar{a}^2 b)x + |a|^2 \operatorname{Im}(a)\lambda)(x^2 - \lambda)^2.$$

Se r, p, s não pertencem a um \mathbb{R} -círculo então $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}(r, p, s) \neq 0$ e portanto $\operatorname{arg}(a) \neq 0$ e a não é um número real puro implicando que $\operatorname{Im}(a) \neq 0$. Neste caso, tem-se então que a única raiz positiva de f é $x_1 = \sqrt{\lambda} = \sqrt{\frac{C}{A}}$.

Para este valor de x_1 temos que

$$\tilde{\eta}(x_1) = \frac{ax_1 + b + cx_1^{-1}}{2} = \frac{b + 2\sqrt{ac}}{2} = \frac{\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 + 2\sqrt{\mathbb{X}_1 \cdot \mathbb{X}_2}}{2} = \frac{(\sqrt{\mathbb{X}_1} + \sqrt{\mathbb{X}_2})^2}{2}$$

onde estamos escolhendo o ramo principal da raiz complexa.

Daí,

$$\begin{aligned}
\cosh^2 \left(\frac{\rho(\vec{p}\vec{q}, \vec{r}\vec{s})}{2} \right) &= |\tilde{\eta}(x)| + \operatorname{Re}(\tilde{\eta}(x)) \\
&= \left| \frac{(\sqrt{\mathbb{X}_1} + \sqrt{\mathbb{X}_2})^2}{2} \right| + \operatorname{Re} \left(\frac{(\sqrt{\mathbb{X}_1} + \sqrt{\mathbb{X}_2})^2}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(|\sqrt{\mathbb{X}_1} + \sqrt{\mathbb{X}_2}|^2 + \operatorname{Re}(\sqrt{\mathbb{X}_1} + \sqrt{\mathbb{X}_2})^2 \right)
\end{aligned}$$

*

No próximo exemplo vamos exibir pontos $p, q, r, s \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ tais que o polinômio f do teorema 4.6 não é solúvel por radicais. Deste modo, para estes pontos, as expressões das distâncias dadas nos teoremas 4.6, 4.7 e 4.8 não podem ser utilizadas.

Exemplo 4.4. Considere $P = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}(-3+4i)}{16} \\ \frac{16}{1+i} \\ \frac{4}{\sqrt{2}(5+4i)} \\ \frac{16}{16} \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $S =$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$. Mostraremos que com estes pontos o polinômio f apresentado no teorema 4.6 não é solúvel por radicais.

Calculando os valores de a, b e c encontramos:

$$a = \langle R, P \rangle \langle P, S \rangle = 1$$

$$\begin{aligned} b &= \langle R, P \rangle \langle Q, S \rangle + \langle R, Q \rangle \langle P, S \rangle = \\ &= (-\sqrt{2}) \left(\frac{4 - 5\sqrt{2} + 4i - 4i\sqrt{2}}{32} \right) + \left(\frac{-4 - 5\sqrt{2} + 4i + 4i\sqrt{2}}{16} \right) \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \frac{5 - 2i\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= \langle R, Q \rangle \langle Q, S \rangle = \\ &= \left(\frac{-4 - 5\sqrt{2} + 4i + 4i\sqrt{2}}{16} \right) \left(\frac{4 - 5\sqrt{2} + 4i - 4i\sqrt{2}}{32} \right) \\ &= \frac{25 - 4i\sqrt{2}}{256} \end{aligned}$$

Daí, os coeficientes $a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1$ e a_0 do polinômio f são dados por:

$$a_6 = \text{Im}(a\bar{a}^2) = 0$$

$$a_5 = \text{Im}(\bar{a}^2 b) = \frac{-\sqrt{2}}{2^2}$$

$$a_4 = \text{Im}((\bar{a}c - 2a\bar{c})\bar{a}) = \text{Im}\left(\frac{25 - 4i\sqrt{2} - 2(25 + 4i\sqrt{2})}{256}\right) = \frac{-3\sqrt{2}}{2^6}$$

$$a_3 = -2\text{Im}(\bar{a}b\bar{c}) = -2\text{Im}\left(\left(\frac{5 - 2i\sqrt{2}}{8}\right)\left(\frac{25 + 4i\sqrt{2}}{256}\right)\right) = \frac{15\sqrt{2}}{2^9}$$

$$a_2 = \text{Im}((\bar{c}a - 2c\bar{a})\bar{c}) = \text{Im}\left(\left(\frac{25 + 4i\sqrt{2} - 2(25 - 4i\sqrt{2})}{256}\right)\left(\frac{25 + 4i\sqrt{2}}{256}\right)\right) = \frac{25\sqrt{2}}{2^{13}}$$

$$a_1 = \text{Im}(b\bar{c}^2) = \text{Im}\left(\frac{(625 + 200i\sqrt{2} - 32) \cdot (5 - 2i\sqrt{2})}{65536 \cdot 8}\right) = \frac{-93\sqrt{2}}{2^{18}}$$

$$a_0 = \text{Im}(c\bar{c}^2) = \text{Im}\left(\frac{(25 - 4i\sqrt{2}) \cdot (593 + 200i\sqrt{2})}{256 \cdot 65536}\right) = \frac{657\sqrt{2}}{2^{22}}$$

Assim,

$$f(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2^2}x^5 - \frac{3\sqrt{2}}{2^6}x^4 + \frac{15\sqrt{2}}{2^9}x^3 + \frac{25\sqrt{2}}{2^{13}}x^2 - \frac{93\sqrt{2}}{2^{18}}x + \frac{657\sqrt{2}}{2^{22}}.$$

Multiplicando $f(x)$ por $-2^{21}\sqrt{2}$ obtemos

$$\begin{aligned} (-2^{21}\sqrt{2})f(x) &= -2^{21}\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2^2}x^5 - \frac{3\sqrt{2}}{2^6}x^4 + \frac{15\sqrt{2}}{2^9}x^3 + \frac{25\sqrt{2}}{2^{13}}x^2 - \frac{93\sqrt{2}}{2^{18}}x + \frac{657\sqrt{2}}{2^{22}}\right) \\ &= (2^4x)^5 + 3(2^4x)^4 - 30(2^4x)^3 - 50(2^4x)^2 + 93(2^4x) - 657 \\ &= y^5 + 3y^4 - 30y^3 - 50y^2 + 93y - 657 = g(y) \end{aligned}$$

onde $y = 2^4x$.

Avaliando g em $y = -6, -5, -4, 5, 6$ podemos ver que $g(y)$ tem três raízes reais y_1, y_2, y_3 tais que

$$-6 < y_1 < -5 < y_2 < -4 \text{ e } 5 < y_3 < 6.$$

Analisando g' verificamos que essas são as únicas raízes reais de g . De fato,

$$g'(y) = 5y^4 + 12y^3 - 90y^2 - 100y + 93$$

avaliando g' em $y = -6, -5, 0, 1, 4$ vemos que $g'(y)$ tem raízes y_4, y_5, y_6, y_7 de modo que

$$-6 < y_4 < -5 < y_5 < 0 < y_6 < 1 < y_7 < 4.$$

No intervalo $0 < y_6 < 1$: $\forall y < y_6$ temos $g'(y) > 0$ e $\forall y > y_6$ temos $g'(y) < 0$. Daí, y_6 é um máximo local de $g(y)$. Mas, quando $0 < y_6 < 1$, vemos que $g(y) < 0$. Por isso, g não pode ter um número máximo de raízes reais, então g tem um par de raízes conjugadas.

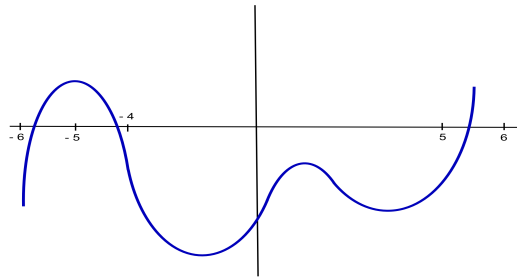


Figura 4.13: Gráfico da função g

Verifiquemos agora que g é irredutível em \mathbb{Z} e, conseqüentemente, em \mathbb{Q} .

Considere a função

$$h(y) = \frac{g(2y - 5)}{32} = y^5 - 11y^4 + 40y^3 - 50y^2 - 2y + 4.$$

Avaliaremos $h(y)$ e verificaremos que é irredutível. Suponha que

$$h(y) = (y^2 + ay + b)(y^3 + cy^2 + dy + e) \quad (4.8)$$

onde $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$, então b deve ser um dos números $-4, -2, -1, 1, 2, 4$. De (4.8) obtemos

$$h(y) = y^5 + (c + a)y^4 + (d + ac + b)y^3 + (e + ad + bc)y^2 + (ae + bd)y + be.$$

- Suponha $b = 1$, então $e = 4$. Avaliando o coeficiente de y encontramos $-2 = ae + bd = 4a + d \Rightarrow d = -2 - 4a$. Então, calculando o coeficiente de y^2 e

substituindo o valor de d encontramos $-50 = e + ad + bc = 4 + a(-2 - 4a) + c \Rightarrow c = -50 - 4 + 2a(1 + 2a)$. Analisando, agora, o coeficiente de y^3 e substituindo os valores de d e c temos $\underbrace{40}_{par} = d + ac + b = 2 \underbrace{(-1 - 29a + a^2(1 + 2a))}_{impar} + 1$. O que é uma contradição.

- Suponha $b = 2$, então $e = 2$. Avaliando o coeficiente de y obtemos $-2 = 2a + 2d \Rightarrow d = -1 - a$. Substituindo d no coeficiente de y^4 encontramos $-11 = a + c \Rightarrow c = -11 - a$. Analisando o coeficiente de y^2 e substituindo os valores de d e c encontramos $-50 = -20 - 3a - a^2 \Rightarrow a^2 = 30 - 3a$. Calculando o coeficiente de y^3 substituindo d e c temos $40 = 1 - 12a - a^2 \Rightarrow a^2 = -39 - 12a$. Comparando os valores de a^2 concluímos que $3a = 23$, o que é uma contradição.
- Supondo $b = 4$, então $e = 1$. Analisando o coeficiente de y temos $-2 = a + 4d \Rightarrow a = -2 - 4d$. Calculando o coeficiente de y^2 e substituindo por a encontramos $\underbrace{-50}_{par} = 2 \underbrace{(-d - 2d^2 + 2c)}_{impar} + 1$. Chegamos em uma contradição.

De modo semelhante encontramos contradições ao considerar $b = -1, -2, -4$. Assim h é irredutível em \mathbb{Z} , daí g é irredutível em \mathbb{Z} , portanto g é irredutível em \mathbb{Q} .

Considere $K = Gal(g(y), \mathbb{Q})$ e a uma raiz de $g(y)$ então $[K : \mathbb{Q}] = |Aut(K)|$. Sendo $\mathbb{Q}(a)$ uma extensão finita de \mathbb{Q} temos que $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = gr(g) = 5$. Daí, 5 divide $|Aut(K)|$. Assim, $Aut(K)$ possui um elemento de ordem 5. Já que $Aut(K)$ é subgrupo de S_5 então este elemento tem que ser uma transposição, a saber, a permutação das raízes complexas.

Pela proposição 2.4 temos que $Aut(K) \simeq S_5$. Portanto, pelo exemplo 2.2, vemos que $Aut(K)$ não é solúvel. Daí, pelo teorema 2.2, o polinômio g não é solúvel por radicais sobre \mathbb{Q} . Logo o polinômio f não é solúvel por radicais. *

Referências Bibliográficas

- [1] GOLDMAN, Willian M. **Complex Hyperbolic Geometry**. Oxford University Press, 1999.
- [2] SANDLER, Hanna. **Distance formulas in complex hyperbolic space**. Forum Math. 8 (1996), n^o 1, 93 – 106.
- [3] GARCIA, Arnaldo; LEQUAIN, Yves. **Elementos de álgebra**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008.
- [4] GONÇALVES, Adilson. **Introdução à álgebra**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.
- [5] PARKER, John R. **Notes on Complex Hyperbolic Geometry**. 2010.
- [6] CONWAY, John B. **Functions of one complex variable**, 2 edição. New York: Springer-Verlag, 1978.
- [7] LOPES, Aldo P. C. **Um estudo da geometria hiperbólica complexa**, 2009. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- [8] ABRANTES, Lia F. F. **Configurações de pontos na fronteira e no interior do espaço hiperbólico real $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$** , 2010. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.