UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

A GEOMETRIA DO PLANETA TERRA

ALAN GOUVEIA

BELO HORIZONTE
2014

ALAN GOUVEIA

A GEOMETRIA DO PLANETA TERRA

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Matemática para Professores: com Ênfase em Cálculo da UFMG, como requisito parcial à obtenção de título de Pós Graduação.

Orientador: Professor Gilcione Nonato Costa

BELO HORIZONTE

2014

DEDICATÓRIA

Dedico esta Monografia primeiramente a meu pai João Bosco de Gouveia e a minha mãe Lázara Aparecida Gouveia, a vocês, que me deu a vida e me ensinou a vivê-la com dignidade, a vocês, que iluminaram os caminhos obscuros com afeto e dedicação para que os trilhássemos sem medo e cheios de esperanças, a vocês, que se doaram inteiros e renunciaram aos seus sonhos, para que, muitas vezes, pudéssemos realizar os meus, a vocês, que não tenho palavras para agradecer tudo isso. Mas é o que nos acontece agora, quando procuro arduamente uma forma verbal de exprimir uma emoção ímpar. Uma emoção que jamais seria traduzida por palavras.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pois sem ele, nada seria possível e não estaríamos aqui reunidos, desfrutando, juntos, destes momentos que nos são tão importantes.

Gostaria de expressar o meu especial agradecimento a minha esposa Cleida Chaves Ferraz Gouveia que tem tido uma força sobre humana para conciliar as funções de mãe e esposa, tudo em prol da felicidade e do bem estar de nossa família. Sem a sua força e determinação seria impossível passar por esta fase de nossas vidas.

Queria também agradecer a nossa filha Larissa Gouveia (uma linda e saudável menina) que desde pequena, tem sido paciente, compreensiva e tolerante, uma verdadeira guerreira na luta diária para manter a alegria de nossa família.

Agradeço também aos amigos que fiz durante o curso, pela verdadeira amizade que construímos em particular aqueles que estavam sempre ao meu lado, por todos os momentos que passamos durante o curso. Sem vocês essa trajetória não seria tão prazerosa.

Ao meu orientador, professor Gilcione Nonato Costa, pelo ensinamento e dedicação dispensados no auxilio à concretização desta monografia.

A todos os professores do curso de Especialização em Matemática, pela paciência, dedicação e ensinamentos disponibilizados nas aulas, e a todos os funcionários da UFMG, cada um de forma especial contribuiu para a conclusão desta Monografia e consequentemente para minha formação profissional.

Por fim, gostaria de agradecer aos meus amigos e familiares, pelo carinho e pela compreensão nos momentos em que a dedicação aos estudos foi exclusiva, a todos que contribuíram direta ou indiretamente para que esse trabalho fosse realizado meu especial agradecimento.

ATA DA 159ª MONOGRAFIA DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA PARA PROFESSORES, APRESENTADO PELO ALUNO ALAN GOUVEIA

Aos vinte e oito dias de maio de 2014, às 16h00, na Sala 3060, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pela Comissão do Curso de Especialização em Matemática para Professores, para julgar a apresentação da monografia do aluno **Alan Gouveia**, intitulada: *"A geometria do planeta Terra"*, como requisito para obtenção do Grau de Especialista em Matemática, com ênfase em Cálculo. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Gilcione Nonato Costa, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares, passou a palavra ao aluno para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do aluno. Após a defesa, os membros da Comissão Examinadora reuniram-se sem a presença do aluno e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o aluno foi considerado **Aprovado**, por unanimidade, com nota 95 e conceito A. O resultado final foi comunicado publicamente ao aluno pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ata, que será assinada por todos os membros participantes da Comissão Examinadora. Belo Horizonte, 28 de maio de 2014.

Prof. Gilcione Nonato Costa
Orientador

Prof. Marcelo Richard Hilário
Examinador

Prof. Maurício Barros Corrêa Júnior
Examinador

CONFERE COM O ORIGINAL
Belo Horizonte, 28 / 05 / 14
Deptº. de Matemática / ICEx / UFMG

Eliane Andréa Barbosa
Secretária do Programa de Pós-Graduação em Matemática - ICEx/UFMG
SIAPE: 0318139

“Deus é o Geômetra Onipotente para quem o mundo é imenso problema matemático”

(Leibniz)

RESUMO

Esta Monografia apresenta um breve estudo sobre a Geometria do Planeta Terra, onde serão abordados três temas principais, sendo o primeiro em relação ao verdadeiro formato do nosso Planeta, pois sabemos que a Terra é redonda, mas não é uma esfera perfeita já que os seus pólos têm um leve achatamento, estudamos como esse achatamento é possível e ilustramos com um simples experimento que pode ser utilizado até mesmo no ensino fundamental, logo após calculamos o raio do Planeta Terra pelo método de Eratóstenes que foi o primeiro homem a descobrir as dimensões da Terra, utilizando se de um método de observação bem simples a cerca de dois mil anos atrás e por fim estudamos as coordenadas geográficas que serve para dar a localização precisa de um ponto no Globo Terrestre. A partir da pesquisa realizada, é possível concluir que a contextualização e a interdisciplinaridade entre a matemática e a geografia usando o Planeta Terra é de extrema importância, pois permite que o aluno possa estudar duas disciplinas ao mesmo tempo além de desenvolver o gosto pelo estudo da geometria.

Palavras chaves: Circunferência, Geometria, Matemática, Planeta Terra, Raio.

ABSTRACT

This monograph presents a brief study on the geometry of the Earth, where three main topics will be discussed , the first being related to the true shape of our planet , because we know that the earth is round , but it is not a perfect sphere since their poles have a slight flattening , flattening study how this is possible and illustrated with a simple experiment that can be used even in elementary school , after we calculate the radius of the Earth by the method of Eratosthenes who was the first man to discover the dimensions of earth, is using a very simple method of observation for about two thousand years ago and finally study the geographic coordinates that serves to give the precise location of a point in the Globe . From the survey , it can be concluded that contextualization and interdisciplinarity between mathematics and geography using the Earth is extremely important because it allows the student to study both disciplines at the same time and develop a taste for the study of geometry .

Key words : Circumference , Geometry , Mathematics , Earth, Ray

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho se refere ao estudo e reflexões sobre a Geometria do Planeta Terra, no sentido de superar memorização e descrição dos elementos das formas geométricas, por um trabalho de contextualização rumo a interdisciplinaridade entre a Geografia e a Matemática.

> Embora a Matemática tenha marca da ciência exata por excelência, nas suas aplicações fazendo uso, ou não, de calculadoras ou programas de computador. Raramente na solução de um problema contextualizado comparecem números como $\sqrt{16}$ ou ainda *cos60º*! [1]

Ou seja, a contextualização da matemática é um pouco complexa e trabalhosa por ser uma ciência exata e se tratando do Planeta Terra que tem grandes dimensões o resultado nem sempre é exato e sim aproximado.

A contextualização deve ser feita de modo que o aluno sinta interesse pelo o que está sendo ensinado e não uma simples aplicação artificial sendo que nem toda a Matemática é passível de contextualização. A geometria às vezes é um conteúdo complexo e encontramos na Geografia uma contextualização natural. Observando esses aspectos que decidimos investigar a Geometria do Planeta Terra, visando compreender como a geometria pode ser trabalhada explorando o nosso Planeta.

> A Geometria possui uma ambiguidade difícil de ser enfrentada por quem a estuda. Ela está em vidas, em todos os momentos e lugares: em nossa casa, nos móveis, na escola e nos objetos que a compõem. E é também um campo da Matemática que trabalha com demonstrações, induções, deduções e fatos não perceptíveis da realidade. [3]

Como contextualizar e usar a interdisciplinaridade entre o ensino da Geografia e da Matemática usando o Planeta Terra? Para tanto, focamos como objeto de estudo a Geometria do Planeta Terra**,** tendo como base investigativa: o formato do Planeta, o raio da Terra e as coordenadas geográficas. De modo que a geometria tenha uma aplicação concreta.

Nesta perspectiva, entendendo que a interdisciplinaridade entre a Matemática e a Geografia como fundamental para organização de um processo de ensino e aprendizagem, nos referenciamos em estudos de alguns autores, com objetivo de desenvolver uma reflexão prática, com o contexto, centrado na formação de conceitos geométricos, compreender o ensino da geometria em relação ao Planeta Terra e investigar qual a real importância da geometria.

Percebe-se que há coisas que se desconhecem sobre a aprendizagem da geometria, considera-se que o conhecimento adquirido pelo indivíduo e que a informação previamente adquirida influência à aquisição de um novo conhecimento e, também, que a aprendizagem pode ser desde essencialmente memorística, com pouca interação com o conhecimento prévio (e geralmente com muito pouca retenção) até altamente significativa, na qual o aprendiz integra novos conceitos, proposições e imagens a estruturas.

“A apresentação de aplicações significativas da Matemática invariavelmente exige do professor certo conhecimento de alguma outra área como, por exemplo, Física, Biologia ou Geografia”, conforme em [1]. Portanto o professor deve estar atento que a contextualização requerem bastante tempo e dedicação já que precisa de mais conhecimentos.

Os conteúdos de geometria, assim como os de álgebra e aritmética tem igual importância no currículo de Matemática, não sendo possível enfatizar um conteúdo em detrimento dos outros. Os conceitos geométricos são importantes, porque por meio deles, o sujeito da aprendizagem desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Para aprender Geometria, é preciso pensar geometricamente e desenvolver competências e habilidades como experimentar, conjecturar, representar, estabelecer relações, comunicar, argumentar e validar.

A geometria é uma área bastante propícia para desenvolvermos atividades utilizando a estratégia de resolução de problemas e, portanto se observarmos o mundo em que vivemos, iremos ver formas espaciais, pontos, retas e outros.

A geometria apesar de se constituir uma área bastante propícia para o desenvolvimento de atividades ligadas à resolução de problemas, apresenta uma ambiguidade difícil de ser enfrentada.

> A geometria apresenta dois aspectos: um pragmático, empírico – uma geometria presente e em nossas vidas, em todos os momentos e lugares, na nossa casa, nos móveis, na escola e nos objetos que a compõem; e um outro formal - um campo de conhecimento que trabalha com demonstrações, induções, deduções e fatos, nem sempre perceptíveis na realidade. [3]

Durante muitos anos foi dado ao ensino de geometria um tratamento negligenciado. Conforme Ségio Alves [1] evidenciou que a maioria dos livros didáticos prestigiava temas aritméticos, enquanto os geométricos, além de serem abordados de forma abstrata, descritiva e desinteressante, eram apresentados de forma desarticulada, nos últimos capítulos.

Com o avanço dos estudos em educação matemática, realizados nas duas últimas décadas, muitos pesquisadores têm destacado a importância do ensino da geometria na formação integral do educando.

Modelos de sólidos geométricos são planificadas para serem identificadas as formas planas das partes que as compõem, montar e desmontar quebra-cabeças planos e espaciais. É neste sentido que em [4] afirma que os objetivos a serem alcançados, são priorizados os seguintes:

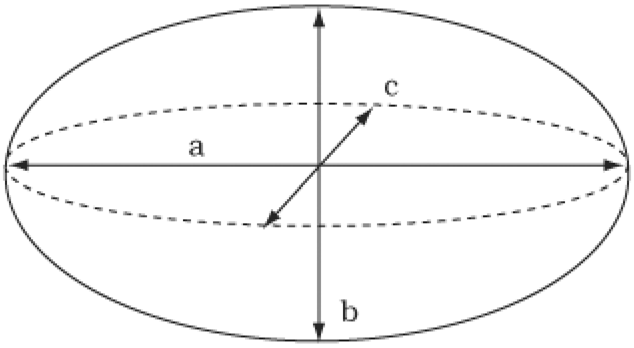
> a) Induzir no aluno o entendimento de aspectos espaciais do mundo físico e desenvolver sua intuição espacial e seu raciocínio espacial;
> b) Desenvolver no aluno a capacidade de ler e de interpretar argumentos matemáticos, utilizando a geometria para representar conceitos e as relações matemáticas;
> c) Proporcionar ao aluno meio de estabelecer o conhecimento necessário para auxiliá-lo no estudo de outros ramos da Matemática e de outras disciplinas, visando uma interdisciplinaridade dinâmica e efetiva;
> d) Desenvolver no aluno habilidades que favoreçam a construção de seu pensamento lógico, preparando-o para os estudos mais avançados em outros níveis de escolaridade.

Vale ressaltar, porém, que a apreensão racional das relações espaciais não ocorre de forma espontânea. As experiências intuitivas são extremamente relevantes, mas não são suficientes para que os objetivos listados acima sejam atingidos.

As aulas práticas são importantes, como também são fundamentais as aulas teóricas, dessa forma o aluno deve a partir de um conceito bem contextualizado absolver o saber abstrato, para depois evoluir o conhecimento científico mais aprimorado.

2. A GEOMETRIA E O PLANETA TERRA

Neste sentido optamos em estudar alguns tópicos da geometria utilizando o Planeta Terra, sendo abordados alguns temas como: a forma do Planeta Terra que é um esferoide que se resulta da rotação de uma elipse ao redor de um de seus eixos. Se a elipse for rotacionada ao redor de seu eixo principal, esta é chamada de esferóide prolato (similar ao formato de uma bola de futebol americano) onde possui o semi-eixo de rotação menor que os demais semi-eixos ($a>b,c$). Se o eixo menor for escolhido, a superfície é chamada de esferóide oblato (similar ao formato do Planeta Terra) onde possui seu semi-eixo de rotação mais longo que os demais semi-eixos ($a<b,c$). Um esferoide pode também ser caracterizado como um elipsóide possuindo dois semi-eixos iguais ($b=c$). A esfera é um caso especial do esferóide no qual a elipse rotacionada é um círculo.



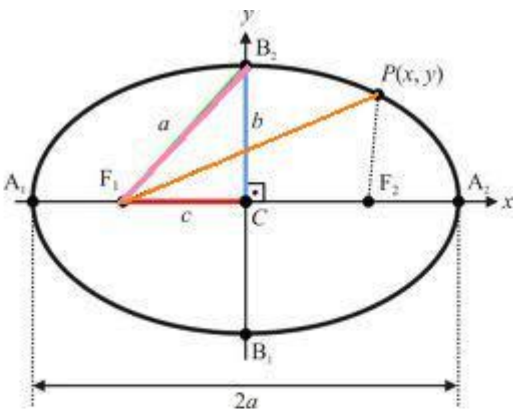
Logo após estudaremos como Eratóstenes a cerca de dois mil anos atrás fez para calcular o raio do Planeta Terra, sendo o primeiro homem a estimar as dimensões da Terra utilizando-se o sol, pois exatamente ao meio dia os raios solares incidiam perpendicularmente sobre a cidade de Siena e ao mesmo tempo na cidade de Alexandria os raios solares caiam inclinadamente observando-se através da sombra que se formava de estaca fincada no chão por Eratóstenes.

E depois estudamos as coordenadas geográficas que serve para dar a localização precisa de um ponto no Globo Terrestre, onde se utiliza um conjunto de linhas imaginárias traçadas na superfície do terrestre, também calculamos o comprimento da linha do Equador e vimos que existe uma relação entre o raio da superfície terrestre, o raio de um paralelo e a sua respectiva latitude.

2.1. O Formato do Planeta Terra

É sabido através de pesquisas já realizadas que o Planeta Terra é uma bola, mas não é uma esfera perfeita, uma vez que ele é achatado nos pólos. Na verdade, a Terra é aproximadamente um elipsóide, sendo um sólido que resulta da rotação de uma elipse em torno de um dos seus eixos.

Definição. A elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante. Os pontos fixos são chamados de focos.



Observando a figura acima temos dois pontos quaisquer do plano F_1 e F_2 que são os focos, 2*c* é a distância entre eles (distância focal), o ponto *C* é o centro da elipse e seja, 2*a* é a medida do eixo maior e 2*b* é a medida do eixo menor, como a elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias à F_1 e F_2 é a constante 2*a*.

Equação geral da elipse

Seja 2c a distância não orientada entre os focos, onde c > 0. Para obter a equação de uma elipse escolhemos o eixo x como a reta que passa pelos focos F_1 e F_2, e escolhemos a origem como sendo o ponto médio do segmento F_1F_2.

Se os focos F_1 e F_2 têm coordenadas (c,0) e (-c,0), respectivamente. Seja 2a a soma constante mencionada na definição de elipse. Então a > c e o ponto $P(x,y)$ será um ponto qualquer da elipse se e somente se $|\overline{F_1P}| + |\overline{F_2P}| = 2a$.

Como $|\overline{F_1P}| = \sqrt{(x+c)^2 + Y^2}$ e $|\overline{F_2P}| = \sqrt{(x-c)^2 + Y^2}$ onde P está sobre a elipse se e somente se $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$ > 0.

Simplificamos essa equação escrevendo-a de tal maneira que um radical fique a esquerda e outro à direita.

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Ao elevarmos ao quadrado essas expressões obtemos.

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

Após as multiplicações temos.

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

Escrevendo o radical do lado esquerdo chegamos a:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x$$

Ao elevarmos novamente ao quadrado ambos os membros.

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2$$

Logo.

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Assim obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Definido $b^2 = a^2 - c^2 > 0$, uma vez que $a > c$, $a^2 - c^2 > 0$, e substituindo em $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ obtemos a equação geral da elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

A excentricidade da elipse

A excentricidade da elipse é definida como a razão entre a semi-distância focal e a semi-distância do eixo maior da elipse, ou seja: $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Lembrando que $a > c > 0$, então a razão ε sempre será um número compreendido entre 0 e 1. Quanto maior for a distância focal de uma elipse, com *a* fixado, mais a excentricidade se aproxima do valor 1, e analogamente, quando menor for a distância focal, de uma elipse, também com *a* fixado, mais a excentricidade se aproxima do valor 0, então se a excentricidade cresce a elipse torna-se mais achatada e quando a excentricidade tende para zero a elipse tende para a circunferência.

Em especial, o Planeta Terra, temos que os focos F_1 e F_2 muito próximos ao centro da elipse o que torna *a* aproximadamente igual a *b*, e por sua vez também seja aproximadamente igual ao raio de uma circunferência.

Temos na sequência uma figura que representa uma secção da superfície do Planeta Terra, portanto é uma elipse que gira em torno da reta ligando os Pólos Norte e Sul, onde *a* é a metade do diâmetro do Equador e *b* é a metade da distância do Pólo Norte até o Pólo Sul.

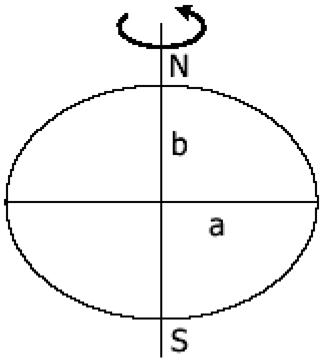


Figura da pág. 19 – Programa de Iniciação Científica da OBMEP 2007

Como o Planeta Terra é praticamente uma esfera, o achatamento é dada pela razão $\delta = \frac{a-b}{b}$, onde Bessel em 1841 encontrou $a = 6377399$m e $b = 6356078$m, consequentemente $\delta = 0{,}0033541$ e outros pesquisadores da época encontraram valores que é também próximos de zero, quanto ao de Bessel.

De acordo com a União Astronômica Internacional (UAI), esse achatamento é pequeno, visto que o diâmetro da Terra no sentido da linha do Equador é de aproximadamente 12.756 quilômetros, enquanto entre os pólos Norte e Sul é de aproximadamente 12.714 quilômetros, ou seja, uma diferença aproximada de apenas 42 quilômetros.

O achatamento do Planeta Terra ocorre devido à rotação, o planeta sofre forças que tendem a fazer o diâmetro polar ser menor que o diâmetro equatorial. Naturalmente, estamos desprezando a influência de outros corpos celeste no formato do Planeta como principalmente a influência que a lua exerce sobre as marés. Os planetas não são corpos inteiramente rígidos. A Terra, por exemplo, tem um núcleo rígido, mas entre a crosta e esse núcleo rígido existe uma região chamado manto que não é rígida. Embora a rotação da Terra seja lenta, existe uma diferença de aproximadamente 42 km entre os diâmetros equatorial e polar. Obviamente essa diferença é relativamente pequena se comparada com os mais ou menos 12.756 km de diâmetro equatorial.

Como o valor do achatamento do Planeta Terra é dada pela razão δ, que é muito pequeno, podemos desconsiderar o achatamento sem perder a generalidade, do nosso Planeta e considerar o Planeta Terra como se fosse uma esfera.

Uma atividade para mostrar aos alunos como ocorre o achatamento através da rotação é a construção de um pequeno experimento que quando colocado em rotação se achata, ilustrando assim, o fenômeno que ocorre no Planeta Terra.

Atividade retirada do site http://pontociencia.org.br:

> Um modo simples de ilustrar que tudo que gira e não é rígido tende a se achatar, isto é, ter seu diâmetro ao longo do eixo de rotação menor que seu diâmetro medido perpendicular a este, é construindo-se um anel com um material flexível (como por exemplo, uma chapa plástica), colocando-se um eixo de rotação e dando-se um impulso angular para colocá-lo em rotação. Uma vez em rotação observa-se o mesmo fenômeno que ocorre com os planetas.
>
> Como o mencionado impulso angular faz com que o experimento gire muito mais rápido que os planetas e por ser muito menos rígido que os planetas, o anel se achata muito, o que não acontece com os planetas, pois suas velocidades de rotações são pequenas comparadas ao do experimento mencionado.
>
> Segurando-se o gira-gira na horizontal, com as duas mãos, com o indicador, por exemplo, da mão direita pode-se dar um impulso angular e colocá-lo em rotação, observando o consequente achatamento.

Esta é uma atividade que serve para ilustrar o que ocorre com os planetas, mas é muito importante que fique claro ao aluno que os planetas não giram tão rápido quanto o experimento, não são tão flexíveis quanto o experimento e, portanto, não se achatam tanto como observamos no gira-gira.

2.2. O Raio do Planeta Terra

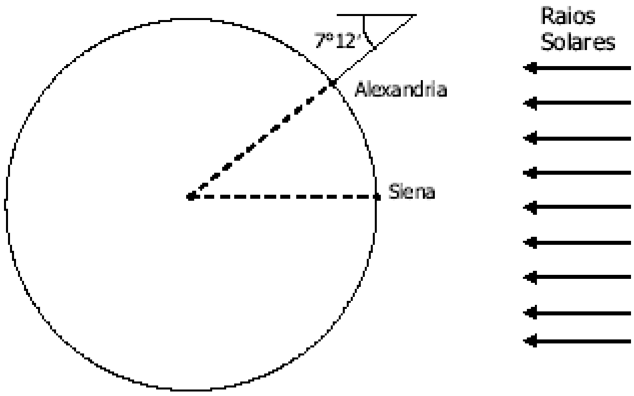
Há mais de dois mil anos, Eratóstenes foi o primeiro homem a descobrir as dimensões da terra, utilizando se um método bem simples. Ele nasceu 275 A.C. seus pais eram gregos e moravam em Cirene uma cidade grega. Eratóstenes era muito curioso e admirava tudo que aprendia na Escola. Assim que completou seus estudos ele se mudou para Atenas capital da Grécia onde o rei soberano do Egito chamado Ptolomeu III o convidou para dar aulas para seu filho na cidade de Alexandria onde mais tarde se tornaria o bibliotecário chefe da melhor biblioteca e museu do mundo.

Historicamente em [6], ficou para Eratóstenes a tarefa sobre as dimensões da terra:

> A idéia de uma Terra esférica foi predominante entre os Gregos. A tarefa seguinte e que ocupou muitas mentes foi a de determinar seu tamanho. Platão estimou a circunferência da Terra como sendo de umas 64360 km. Arquimedes estimou em 48270 km. Estes valores, contudo, não passavam muito do campo da mera especulação. Coube a Eratóstenes determinar o tamanho da Terra usando medidas objetivas.

A partir daí Eratóstenes começou suas pesquisas na biblioteca de Alexandria sobre as dimensões do Planeta Terra e fez o cálculo do raio mais celebre da antiguidade ele percebeu que quando o sol se encontrava mais ao norte os raios solares caiam verticalmente ao meio dia na cidade de Siena, pois a imagem do sol podia ser vista refletida nos poços mais fundos da cidade e ao mesmo tempo em Alexandria Eratóstenes fincou uma estaca e pode observar que os raios solares caiam inclinadamente formando um ângulo de aproximadamente 7°12'.

Então ele descobriu que à distância entre Alexandria e Siena era de 5000 estádios. O **estádio** era uma antiga medida de comprimento equivalente à extensão de um campo grego de jogos esportivos, por isso era chamado de estádio. Mas podia variar ligeiramente. A unidade de medida que Eratóstenes usou tinha aproximadamente 185 metros, ou seja, a distância entre Alexandria e Siena é cerca de 925 Km. Porém acordo com o Google Maps a distância entre as cidades de Alexandria e de Siena hoje chamada de Assuã é de 1060 Km. Eratóstenes agora podia calcular a circunferência da terra já que sabia que a mesma possui 360° então a circunferência do Planeta Terra tinha aproximadamente 250000 estádios, ou 46250 quilômetros, pois ele sabia que eram necessárias aproximadamente 50 frações iguais à medida da distância entre Alexandria e Siena para formar a circunferência porque encontrava um ângulo de aproximadamente 7°12' basta multiplicar 50 que o resultado chega a quase 360°, uma vez que o ângulo central entre Alexandria e Siena é aproximadamente 7º12', sendo $\frac{360}{7^o12'} \cong 50$.



2ª Figura da pág. 23 – Programa de Iniciação Científica da OBMEP 2007

Vamos a partir do esquema da figura acima definir as grandezas envolvidas no problema:

- C é a circunferência da terra;
- R é o raio da terra;

Assim podemos estimar o Raio Terrestre da seguinte forma: $C = 2\pi R$, onde C é aproximadamente 250000 estádios; logo $250000 \cong 2\pi R$, então obtemos $R \cong \frac{250000}{2\pi}$, considerando $\pi = 3{,}14$, chegamos a uma estimativa que o Raio da Terra é aproximadamente 39808 estádios.

Assim, conforme a estimativa, o raio do Planeta Terra é cerca de 7360 Km. Quando a terra foi novamente medida no nosso século, havia apenas uma diferença considerada pequena entre o resultado atual e o que Eratóstenes obteve a mais de dois mil anos atrás.

Não se sabe ao certo como Eratóstenes fez para medir a distância entre as cidades de Alexandria e Siena, mas uma boa maneira de comparar os resultados encontrados é calculando o comprimento do arco através da seguinte relação: $L = R\theta$, quando θ estiver em radianos.

Onde θ estiver em graus a relação anterior pode ser reescrita como $L = \dfrac{R\pi\theta}{180}$.

- Seja L a distância entre as cidades de Alexandria e Siena (L é o comprimento do arco);
- π é cerca de 3,14;
- R é o raio da Terra, que vamos considerar como aproximado 7360 Km;
- θ que está em graus e é cerca de 7º12'.

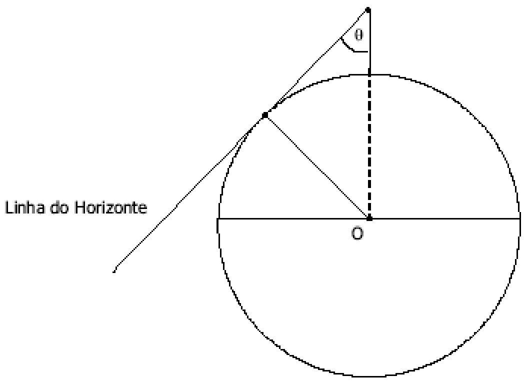
Então podemos obter o seguinte valor para o comprimento do arco que é à distância entre as cidades de Alexandria e Siena:

$$L \cong 7360 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{7^o 12'}{180}$$

$$L \cong 914Km$$

Como Eratóstenes afirma que à distância entre Alexandria e Siena é cerca de 5000 estádios e cada um estádio é aproximadamente 185 metros, basta dividir o valor encontrado 914000 m por 185 m que temos aproximadamente 4940 estádios.

Uma outra maneira de se medir o raio da Terra, é escalar o topo de uma montanha cuja altitude acima do mar seja conhecida e medir o ângulo entre a vertical e a linha do horizonte. Por exemplo: conforme a figura abaixo, a altura do monte Shasta na Califórnia é 4,3 km. Do seu topo, o horizonte sobre o Oceano Pacífico faz um ângulo de 87°53' com a vertical. Utilizando estes dados podemos facilmente estimar o raio da Terra em quilômetros.



1ª Figura da pág. 23 – Programa de Iniciação Científica da OBMEP 2007

A partir da figura acima, vamos definir as grandezas envolvidas no problema:

- H é a hipotenusa do triângulo que é retângulo na linha do horizonte com o raio do Planeta Terra;
- Co é o cateto oposto em relação ao ângulo θ;
- R é o raio da terra;

Onde $H = R + 4{,}3Km$, o cateto oposto é igual ao Raio da Terra e considerando $Sen 87^o 53' \cong 0{,}99932$, podemos estimar o valor do Raio Terrestre usando a seguinte relação: $Sen\theta = \dfrac{Co}{H}$.

Substituindo na relação, temos:

$$0{,}99932 \cong \frac{R}{R + 4{,}3}$$

Portanto:

$$R \cong 0{,}99932R + 4{,}297076$$

O que resulta no Raio:

$$R \cong 6319Km$$

Sendo assim, de acordo os dados acima, o raio da Terra é cerca de 6319 Km.

2.3. As Coordenadas Geográficas

Como o achatamento do Planeta Terra é tão pequeno que pode ser desconsiderado, a melhor maneira de representá-lo em tamanho pequeno é usando uma esfera, que é chamada de globo terrestre, nela pode visto os continentes, mares, países e etc.

Existe um sistema de coordenadas para dar a localização precisa de um ponto no que são chamadas de coordenadas geográficas. Elas referem-se ao conjunto de linhas imaginárias traçadas sobre a superfície terrestre. Para determinarmos as coordenadas de um ponto utilizamos as paralelas e os meridianos na localização da latitude e longitude.

Os **Paralelos** são círculos traçados paralelamente ao Equador. Onde o **Equador** é uma linha imaginária que divide a Terra em duas metades: o Hemisfério Sul e o Hemisfério Norte, ou seja, a linha do Equador é a circunferência máxima do globo terrestre, e a palavra Hemisfério significa a metade de uma esfera.

Para calcular o comprimento do Equador de acordo com o capítulo anterior vamos considerar que o raio da Terra meça aproximadamente cerca de 6400 Km e considerar $\pi = 3{,}14$. Vamos a partir dos dados acima definir as grandezas envolvidas no problema:

- C é a circunferência máxima da esfera (linha do Equador);
- R é o raio da terra;

O comprimento do Equador pode ser obtido a partir da seguinte relação:

$$C = 2\pi R$$
$$C \cong 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6400$$
$$C \cong 40192 Km$$

De acordo com os dados acima o comprimento do Equador é aproximadamente 40192 Km.

Os **Meridianos** são linhas imaginárias traçadas de pólo a pólo. O principal ou inicial é o de Greenwich. Esse meridiano divide a Terra em duas metades, os Hemisférios leste e oeste. Greenwich tornou-se um meridiano referencial internacionalmente em 1884, devido a um acordo internacional que aconteceu em Washington, isso para padronizar as horas em todo o mundo, Greenwich foi escolhido por "cortar" o observatório Astronômico Real, localizado em Greenwich, um distrito de Londres.

A **Latitude** é quando localizamos um lugar qualquer da superfície terrestre por meio de um paralelo, estamos indicando a distância norte ou sul desse lugar em relação à linha do Equador. A latitude de um ponto P é a medida do arco de meridiano que passa por P situado entre o paralelo que contém P e o Equador. A latitude é expressa em graus, minutos e segundos e se mede de 0° a 90° N (norte) ou de 0° a 90° S (sul).

A **Longitude** é quando localizamos um lugar qualquer da superfície terrestre por meio de um meridiano, estamos indicando a distância leste ou oeste desse lugar em relação ao Meridiano de Greenwich. A longitude de um ponto P é a medida do arco de paralelo que passa por P situado entre o meridiano que contém P e o meridiano de Greenwich. A longitude é expressa em graus, minutos e segundos e se mede de 0° a 180° E (leste) ou de 0° a 180° W (oeste).

A latitude e a longitude são as coordenadas geográficas de um lugar qualquer da Terra. Elas são muito utilizadas nas navegações marítimas e aéreas. É cruzando as informações sobre a latitude e a longitude que podemos saber com precisão a localização de um ponto em qualquer lugar na superfície terrestre.

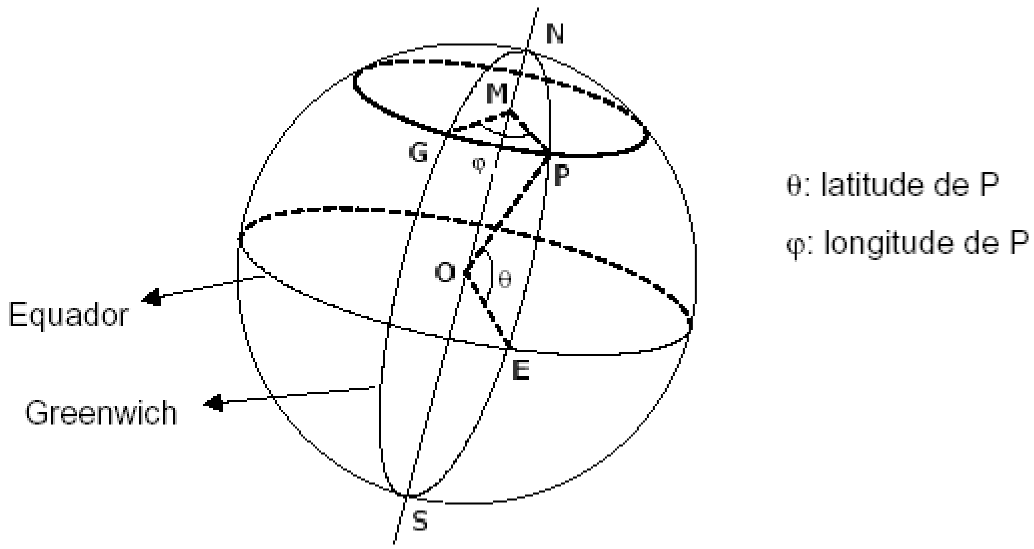


Figura da pág. 26 – Programa de Iniciação Científica da OBMEP 2007

Observando a figura acima podemos perceber que existe uma relação entre o raio da superfície terrestre, o raio de um paralelo e a sua respectiva latitude. Como o ângulo θ é a latitude do ponto P e o segmento EO e OP é o raio da Terra e o ângulo φ é a longitude do ponto P e o segmento PM e MG é o raio do paralelo, sendo P o ponto comum dos segmentos OP e PM, e o segmento EO é paralelo ao segmento PM, portanto o ângulo OPM é igual a θ, então os segmentos OP, PM e o eixo NS forma um triângulo retângulo em M, Considerando o raio terrestre como R e o raio do paralelo como r, temos:

$$Cos\theta = \frac{CatetoAdjacente}{Hipotenusa}$$

$$Cos\theta = \frac{r}{R}$$

$$r = R \cdot Cos\theta$$

Portanto temos a seguinte relação: o raio do paralelo é igual ao Raio da Terra multiplicado pelo cosseno de teta.

Determinaremos o comprimento de um grau de longitude em uma latitude arbitrária θ. Utilizando a seguinte relação: $L = \frac{r\pi\theta}{180}$, sendo que θ estar em graus, onde:

- L é o comprimento da longitude;
- π é cerca de 3,14;
- r é o raio do paralelo.

Então temos que:

$$L \cong r \cdot 3{,}14 \cdot \frac{1^o}{180}$$

O que resulta no raio do paralelo:

$$r \cong \frac{L}{0{,}0174444}$$

Considerando que raio do paralelo é igual ao Raio da Terra multiplicado pelo cosseno de teta, temos: $r = R \cdot Cos\theta$, onde R é o raio da Terra e seja cerca 6400 Km temos:

$$Cos\theta = \frac{r}{R}$$

Substituindo na relação:

$$Cos\theta \cong \frac{L / 0{,}0174444}{6400}$$

Assim obtemos:

$$L \cong 111{,}7 Cos\theta$$

Portanto o comprimento de um grau de longitude em uma latitude arbitrária θ é cerca de 111,7 $Cos\theta$ Km.

Determinamos agora o comprimento da longitude de um grau numa latitude de 30º N (aproximadamente a latitude de Nova Orleans), considerando os dados anteriores temos:

$$r = R \cdot Cos\theta$$

Sendo:

$$r = 6400 \cdot Cos 30^o$$

Então:

$$r \cong 5542{,}56$$

Substituindo em:

$$L = \frac{r\pi\theta}{180}$$

Temos:

$$L \cong 5542{,}56 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{1^o}{180}$$

Logo:

$$L \cong 96{,}7$$

Portanto o comprimento da longitude de um grau na latitude de Nova Orleans é aproximadamente 96,7 Km.

Para determinamos o comprimento da longitude de um grau numa latitude de 20º S (aproximadamente a latitude de Belo Horizonte), considerando os dados anteriores temos:

$$r = R \cdot Cos\theta$$

Sendo:

$$r = 6400 \cdot Cos20^o$$

Então:

$$r \cong 6014{,}03$$

Substituindo em:

$$L = \frac{r\pi\theta}{180}$$

Temos:

$$L \cong 6014{,}03 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{1^o}{180}$$

Logo:

$$L \cong 104{,}9$$

Portanto o comprimento da longitude de um grau na latitude de Belo Horizonte é cerca de 104,9 Km.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir da pesquisa realizada, é possível concluir que o Planeta Terra pode ser utilizado de forma fundamental para organização de um processo de ensino e aprendizagem da geometria. Podemos desenvolver no aluno o gosto pelo estudo da geometria, fazendo com que ele se sinta seguro, ao trabalhar com dados do nosso Planeta. O ensino geométrico se desenvolve se forem dadas aos alunos condições propícias para tal. Eles precisão de condições para relacionarem um problema ou um conceito a sua representação.

Para despertar o interesse dos alunos para o ensino da geometria é importante utilizar vários métodos como resolução de problemas mais interessantes que os já contidos nos livros, desenvolver problemas com dados do Planeta Terrestre possibilita a representação e interpretação de vários conteúdos da matemática e desenvolvem habilidades que preparem o aluno para um estudo mais formal da geometria.

Observa-se que a Geometria é uma disciplina que oferece ao aluno possibilidades, frente a situações-problema, para desenvolver suas potencialidades. A geometria é um dos ramos da matemática mais propícia ao desenvolvimento de capacidades e habilidades.

Desta forma, por ser uma disciplina que não contempla apenas uma capacidade ou habilidade, favorece a conexão de vários estilos de aprendizagem que possam existir na sala de aula durante o processo de apreensão de seus conteúdos por parte dos alunos. A importância da Geometria para o processo de ensino-aprendizagem justifica-se pelas competências que podem ser desenvolvidas nos alunos.

O estudo da geometria, partindo de atividades que tem o Planeta Terra como objeto de estudo, contribui significativamente para o aprendizado dos alunos. Através destas atividades novos conceitos serão introduzidos utilizando conhecimentos anteriores.

REFERÊNCIAS

[1] ALVES, Sérgio. Programa de Iniciação Científica da OBMEP. Rio de Janeiro: Imprinta Express Gráfica e Editora Ltda, 2007.

[2] ARAÚJO, M. A. S. *Porque ensinar geometria*. Blumenau: SBEM, 1994. pág. 12 – 13.

[3] DOLCE, Osvaldo e NICOLAU, José. *Fundamentos da Matemática Elementar* vol. 9. 8º ed. São Paulo: Atual, 2005.

[4] KALEFF, A. M. *Tomando o ensino da geometria em nossas mãos*. Blumenau: SBEM, 1994. pág. 20 - 21.

[5] PIRES, C. M. C. *A construção de noções geométricas*. In: SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação, Material Pedagógico de PEC – formação universitária, São Paulo, 2002. pág. 1202 – 1213.

[6] LASKY, Kathryn. O bibliotecário que mediu a terra — Ed. Salamandra – Rio de Janeiro, 2001.

Sites Consultados

[7] http://www.iau.org/

Acesso no dia 20 de janeiro de 2014, as 14hs00min.

[8] http://pontociencia.org.br/

Acesso no dia 20 de janeiro de 2014, as 15hs20min.