

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

A FUNÇÃO “NÃO-DIFERENCIÁVEL” DE  
RIEMANN

Rafael Tupynambá Dutra

Bolsista CAPES

Dissertação de Mestrado

Julho de 2014

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.*

Márcio G. Soares (UFMG) orientador,  
Emanuel Carneiro (IMPA) examinador,  
Mikhail Belolipetsky (IMPA) examinador.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>11</b>
1.1	Fórmula de Somatório de Poisson . . . . .	11
1.2	A função $\theta$ . . . . .	13
1.3	O grupo modular da função $\theta$ . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Autossimilaridade da função <math>\theta</math></b>	<b>18</b>
2.1	O sistema de multiplicadores . . . . .	18
2.2	O símbolo de Legendre . . . . .	22
2.3	O símbolo de Jacobi . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Estudo dos pontos racionais</b>	<b>31</b>
3.1	A primitiva da função $\theta$ . . . . .	31
3.2	Estudo dos racionais da forma par/ímpar e ímpar/par . . . . .	33
3.3	Estudo dos racionais da forma ímpar/ímpar . . . . .	41
3.4	Integração por partes . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Estudo dos pontos irracionais</b>	<b>46</b>
4.1	Frações contínuas . . . . .	46
4.2	Pontos irracionais . . . . .	49
4.3	Expoentes de Hölder . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Estudo dos pontos fixos</b>	<b>56</b>
5.1	Pontos fixos racionais . . . . .	56
5.2	Pontos fixos irracionais . . . . .	58

# Introdução

## Contextualização

Nesta dissertação seguiremos a exposição de [1], onde o matemático holandês J. J. Duistermaat (1942-2010) faz um estudo detalhado da função  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{sen}(n^2 x)$ .

Definiremos essa função na forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi} \text{sen}(n^2 \pi x), \quad (1)$$

com o fator de escala  $\pi$  introduzido para simplificar fórmulas futuras.

Segundo o relato de Weierstrass no dia 18 de julho de 1872 à Academia Real de Ciências em Berlim, essa função havia sido introduzida por Riemann como um exemplo de uma função contínua que não possui derivada em nenhum ponto. Weierstrass não conseguiu demonstrar essa propriedade para a função  $f$ , mas teve sucesso em prová-la para funções da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n} \text{sen}(b^n \pi x), \quad (2)$$

em que  $a > 1$ ,  $b$  é um inteiro positivo ímpar e  $\frac{b}{a} > 1 + \frac{3\pi}{2}$ . Foi neste mesmo relato que Weierstrass apresentou o artigo em que fazia essa construção, provando a não-diferenciabilidade de (2).

Ao contrário desta função de Weierstrass, a função “de Riemann”  $f$  na verdade é diferenciável em alguns pontos. G. H. Hardy [4] provou em 1916 que  $f(x)$  não é diferenciável em nenhum irracional  $x$  e nos racionais da forma  $(2p+1)/2q$  e  $2p/(4q+1)$ . Ainda em [4] lê-se *...f(x) não possui derivada num conjunto denso de valores de x. ...Essa questão é muito mais difícil do que qualquer questão relacionada à função de Weierstrass devido a que a sequência  $n^2$  tem, comparativamente, crescimento moderado.* J. Gerver [3] conseguiu, em 1970, obter uma descrição completa, provando que  $f(x)$  é diferenciável e possui derivada  $f'(r) = -\frac{1}{2}$  em todos os pontos racionais  $r = \frac{p}{q}$  tais que  $p$  e  $q$  são ímpares, não sendo diferenciável em

nenhum outro ponto. Várias demonstrações mais curtas do que a de Gerver foram encontradas posteriormente.

A continuidade de  $f$  é consequência imediata da convergência uniforme da série (1). De fato, essa série é limitada por  $\frac{1}{\pi} \zeta(2)$ , sendo  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  a função zeta de Riemann. Já o estudo da diferenciabilidade de  $f$  exige muito mais trabalho.

Para compreender melhor a função  $f$ , é conveniente definir a função complexa  $\phi$  como

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi i} e^{n^2 \pi i x}. \quad (3)$$

Com essa definição, temos  $\phi(x) = f(x) - i \cdot g(x)$ , sendo  $g(x)$  a série de cossenos

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi} \cos(n^2 \pi x). \quad (4)$$

A Figura 1 mostra o gráfico da função  $f(x)$ , para  $x$  no intervalo  $[-1, 1]$ . Note que a função apresenta bastante ruído em todos os pontos, o que já era esperado pela não diferenciabilidade de  $f$ . Mas seu gráfico traz propriedades ainda mais impressionantes.

Notamos alguns picos e mudanças de direção bastante pronunciadas, e provaremos adiante que eles se dão exatamente nos pontos racionais da forma par/ímpar ou ímpar/par. Além disso, os picos são mais intensos nos racionais mais simples (aqueles que tem menor denominador). Alguns dos mais evidentes são o ponto  $x = \frac{1}{2}$  e o ponto  $x = \frac{2}{3}$ , onde a função atinge seu máximo. E outro fenômeno bem visível no gráfico é a repetição de padrões. Por exemplo, podemos ver um padrão que se repete em escalas cada vez menores, convergindo em direção à origem. Os padrões são ainda mais evidentes se fizermos uma ampliação dos gráficos, como nas Figuras 3.5 e 3.9. Provaremos a existência de infinitas autossimilaridades desse tipo, classificando os tipos de singularidades visíveis nos gráficos.

Já a Figura 2 traz o gráfico da função  $g$ . Notamos que os mesmos fenômenos também se apresentam nessa função. E a Figura 3 mostra o traçado da curva  $x \mapsto \phi(x)$  no plano complexo. Note que essa figura é ainda mais impressionante, com singularidades bem delineadas e a repetição de padrões evidente ao longo de toda a curva. Há diversos pontos onde o gráfico de  $\phi$  apresenta um ângulo reto, em que duas curvas se encontram com inclinações múltiplas de  $\frac{\pi}{4}$ . Veremos mais adiante que esses pontos são justamente os racionais da forma  $r = \frac{p}{q}$  tais que  $p$  e  $q$  tem paridades diferentes.

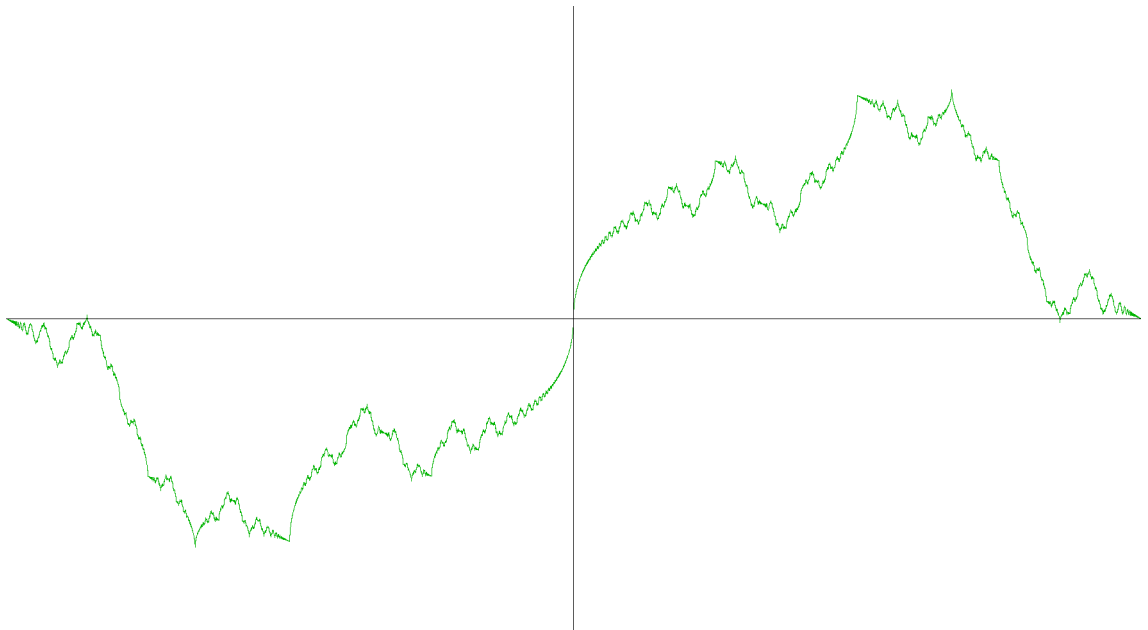


Figura 1: Gráfico de  $f$  (1 período).

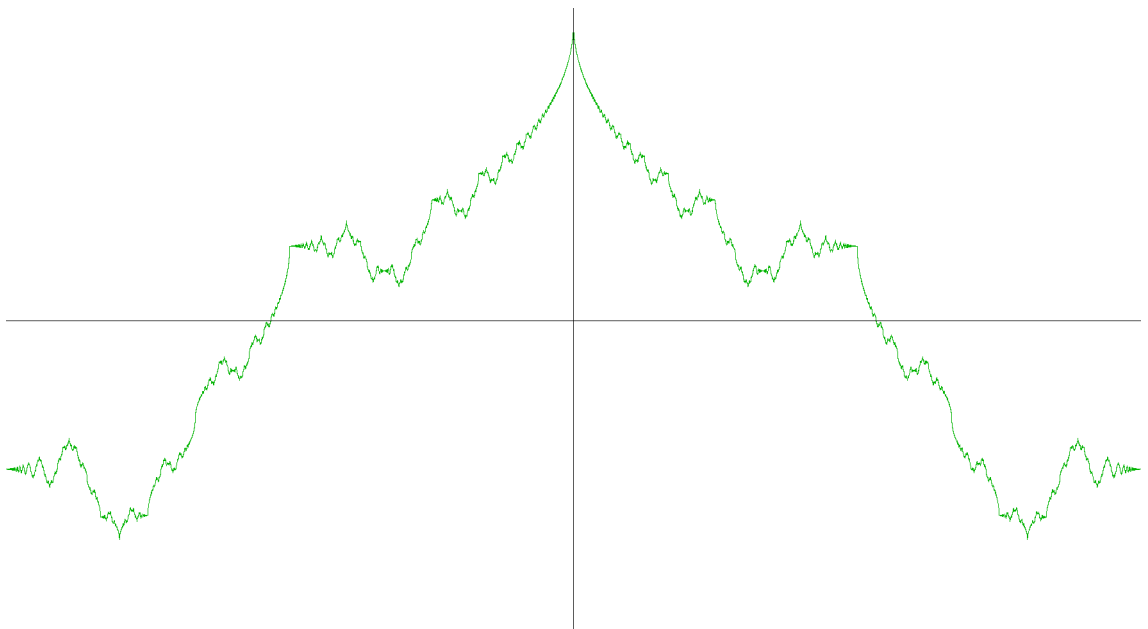


Figura 2: Gráfico de  $g$  (1 período).

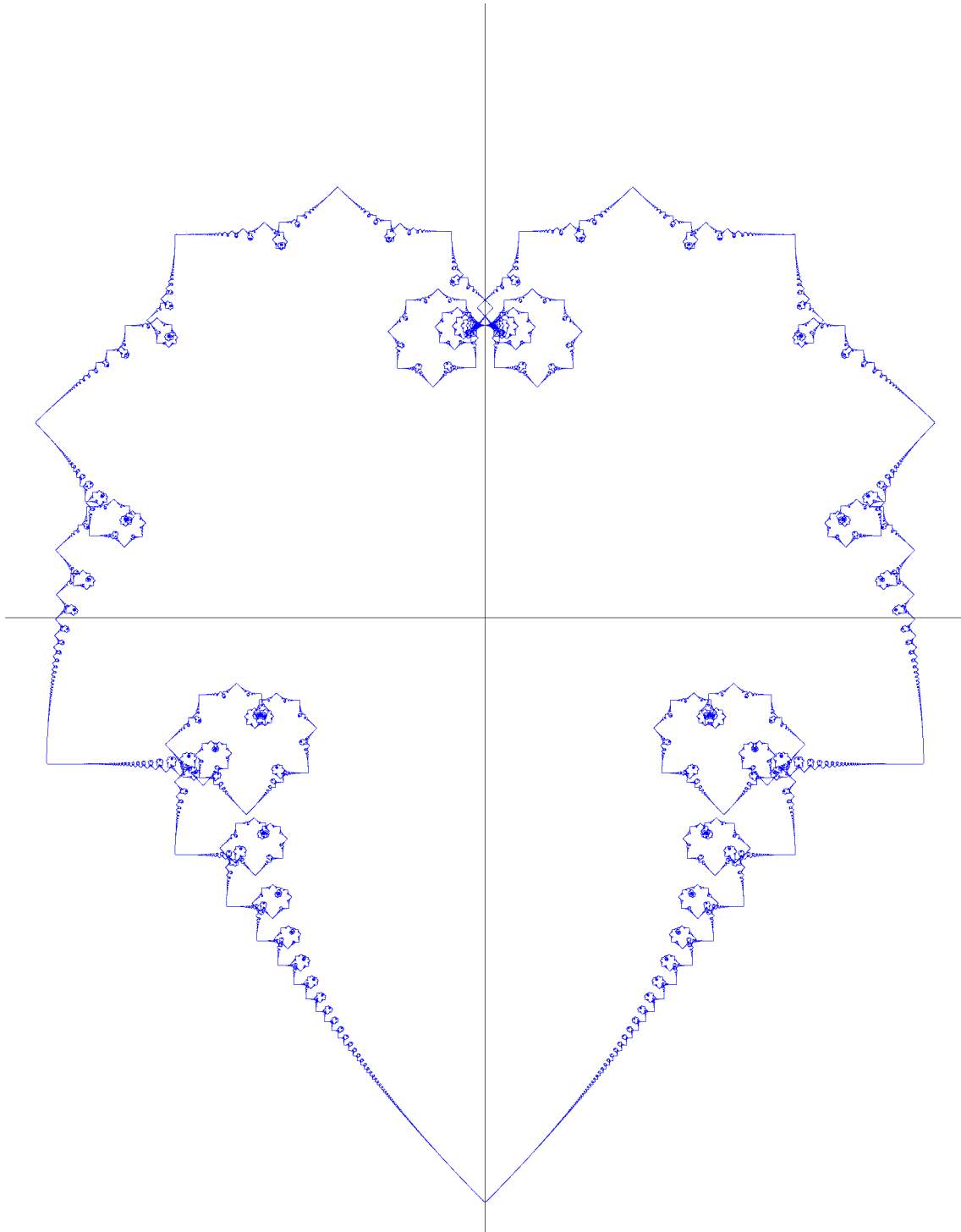


Figura 3: Função  $\phi$  no plano complexo.

## Estrutura do texto

A seguir, daremos uma visão dos passos seguidos nesse trabalho para o estudo da função  $\phi$ . O primeiro passo é o uso da Fórmula de Somatório de Poisson. Duistermaat afirma em [1], que ele primeiramente aplicou essa fórmula diretamente sobre a função  $\phi$ , obtendo uma equação que mostrava que  $\phi(x)$  é similar a  $\phi\left(\frac{-1}{x}\right)$ , a menos da adição de um termo suave (diferenciável). Mais tarde, ele percebeu que isso era apenas uma versão integrada de uma fórmula de transformação conhecida para a função theta, definida por

$$\theta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{n^2 \pi i x}, \quad (5)$$

para  $x$  no semiplano superior do plano complexo.

Aqui, usaremos aqui a mesma estratégia de [1], obtendo a equação de transformação

$$\theta(x) = \theta\left(\frac{-1}{x}\right) \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

para a função  $\theta$  e depois integrando-a para obter a relação correspondente para a função  $\phi$ . Para provar (6), aplicamos a Fórmula de Somatório de Poisson.

A equação (6) nos dá uma autossimilaridade da função  $\theta$ . Para obter outras infinitas autossimilaridades, basta utilizar o fato de que  $\theta$  é periódica,

$$\theta(x) = \theta(x + 2). \quad (7)$$

As equações (6) e (7) são ambas da forma

$$\theta(x) = \theta(\gamma(x)) \cdot \mu_\gamma(x), \quad (8)$$

sendo  $\gamma$  a transformação  $\sigma(x) = \frac{-1}{x}$  ou a transformação  $\tau_2(x) = x + 2$  e  $\mu_\gamma(x)$  uma função que depende de  $\gamma$ .

As transformações  $\tau_2$  e  $\sigma$  ambas pertencem a grupo modular  $\mathfrak{M}$ , que é o conjunto das transformações  $\gamma$  da forma

$$\gamma(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1, \quad (9)$$

Iterando as relações (6) e (7), é possível obter a equação (8) que relaciona  $\theta(x)$  com  $\theta(\gamma(x))$  para toda transformação  $\gamma$  que esteja no subgrupo de  $\mathfrak{M}$  gerado por  $\tau_2$  e  $\sigma$ . Uma descrição completa desse subgrupo, chamado de  $\mathfrak{M}_\theta$ , é apresentada no Teorema 1.3.4. Também provaremos que os números que podem ser pólos de transformações  $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta$  são exatamente os racionais da forma  $r = \frac{p}{q}$ , em que  $p$  e  $q$  tem paridades diferentes.



A seguir, calculamos os multiplicadores  $\mu_\gamma(x)$ , obtendo, para toda transformação  $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta$ , a relação

$$\theta(x) = \theta(\gamma(x)) \cdot e^{i\frac{\pi}{4}m} \cdot q^{-\frac{1}{2}} \cdot (x-r)^{-\frac{1}{2}}, \quad (10)$$

sendo  $r = \frac{p}{q}$  o pólo de  $\gamma$  e  $m$  um inteiro que depende apenas de  $r$ . Uma fórmula para a função  $m = m(r)$  é obtida em função dos símbolos de Jacobi no Teorema 2.3.3.

Para estender as autossimilaridades de  $\theta$  para a função  $\phi$ , utilizamos a relação

$$\phi'(x) = \frac{\theta(x) - 1}{2}, \quad (11)$$

válida para  $x$  no semiplano superior complexo. A função  $\phi$  possui extensão contínua para a reta real, mas sua derivada não. Mesmo assim, integrando (10), podemos obter a relação

$$\phi(x) = \phi(r) + e^{i\frac{\pi}{4}m} \cdot q^{-\frac{1}{2}} \cdot (x-r)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(x-r) + e^{i\frac{\pi}{4}m} \cdot q^{\frac{3}{2}} \cdot (x-r)^{\frac{3}{2}} \cdot \phi(\gamma(x)) + \psi(x), \quad (12)$$

que continua valendo quando  $x$  está sobre a reta real. Aqui,  $\psi$  é uma função suave (diferenciável) e de ordem pequena quando  $x \rightarrow r$ . A equação (12) nos permite descrever o comportamento de  $\phi$  nas proximidades dos pontos racionais que são da forma par/ímpar ou ímpar/par. Ela explica a repetição de padrões em torno desses pontos nos gráficos de  $\phi$ ,  $f$  e  $g$ , além de demonstrar que essas funções não possuem derivada nesses pontos.

Já para analisar o comportamento de  $\phi$  em torno dos pontos racionais da forma ímpar/ímpar, é necessário obter uma nova relação para a função  $\phi$ . O método acima não funciona para esses pontos, já que eles não podem ser levados em  $\infty$  através da aplicação sucessiva das transformações  $\tau_2$  e  $\sigma$ . Se tivéssemos uma fórmula que determina  $\phi(x)$  em função de  $\phi(x+1)$ , poderíamos usar a transformação  $\tau_1(x) = x+1$  nesse processo iterativo, o que permitiria atingir todos os pontos racionais. Não temos essa fórmula, mas conseguimos

$$\phi(x+1) = \frac{1}{2}\phi(4x) - \phi(x), \quad (13)$$

que relaciona  $\phi(x+1)$  com  $\phi(x)$  e  $\phi(4x)$ . Usando (13), provamos o Teorema 3.3.1, que descreve o comportamento local de  $\phi(x)$  nas proximidades de  $s = \frac{p}{q}$ , com  $p$  e  $q$  ambos ímpares. Esse teorema prova que  $\phi$  é diferenciável e possui derivada  $-\frac{1}{2}$  nesses pontos, além de descrever qual é o padrão específico que se repete nas proximidades desses pontos.

Para o estudo de  $\phi$  nos pontos irracionais, a ideia é aproximar cada irracional  $\rho$  por números racionais. Utilizando as aproximações da fração contínua de  $\rho$  e aplicando (12) em torno dos racionais que forem pólos de transformações  $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta$ ,

conseguimos provar que  $\phi$  não é diferenciável em  $\rho$ . De fato, conseguimos mostrar que, para quase todo ponto  $\rho$ , a função  $\phi(x)$  apresenta um comportamento da ordem de  $|x - \rho|^{\frac{3}{4}}$  nas proximidades de  $\rho$ .

A seguir, mostramos que as autossimilaridades de  $\phi$  podem ser estudadas pelos pontos fixos das transformações  $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta$ , e não apenas pelos seus pólos. Isso fornece uma nova visão sobre os padrões repetidos em torno dos pontos racionais, além de demonstrar que autossimilaridades também existem nos irracionais quadráticos.

Nos próximos capítulos, todas as demonstrações serão exibidas em detalhes. Para tornar esse texto o mais autocontido possível, foram incluídas também as demonstrações de fatos conhecidos, como as propriedades aritméticas dos símbolos de Legendre e Jacobi.

No Capítulo 1, a Fórmula de Somatório de Poisson é demonstrada e então utilizada para provar a equação (6) de transformação da função  $\theta$ . Além disso, é caracterizado o grupo modular da função  $\theta$ . Já no Capítulo 2, é obtida uma fórmula para a autossimilaridade da função  $\theta$ . Os multiplicadores são determinados e os expoentes  $m(r)$  são expressos em termos dos símbolos de Jacobi.

No Capítulo 3, a autossimilaridade da função  $\phi$  é obtida a partir da função  $\theta$ . São obtidas as fórmulas que descrevem o comportamento de  $\phi$  em torno de cada ponto racional. Já no Capítulo 4, a função  $\phi$  é estudada nas vizinhanças de pontos irracionais, utilizando-se aproximações por frações contínuas. E no Capítulo 5 as autossimilaridades de  $\phi$  são descritas em termos dos pontos fixos das transformações  $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Fórmula de Somatório de Poisson

**Definição 1.1.1.** Uma função  $\phi$  em  $\mathbb{R}$  é dita de decrescimento rápido se, para todo inteiro não-negativo  $a$ , a função  $t \mapsto t^a \phi(t)$  é limitada em  $\mathbb{R}$ . O espaço de Schwartz  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$  consiste de todas as funções  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$  tais que  $\frac{d^b \phi}{dt^b}(t)$  é de decrescimento rápido para todo inteiro não-negativo  $b$ . Se  $\phi_j$  é uma sequência em  $\mathcal{S}$  e  $\phi \in \mathcal{S}$ , então  $\phi_j$  converge a  $\phi$  em  $\mathcal{S}$ , notado  $\lim_{j \rightarrow \infty} \phi_j = \phi$  em  $\mathcal{S}$ , se, para quaisquer inteiros não-negativos  $a$  e  $b$ , a sequência  $t^a \frac{d^b \phi_j}{dt^b}$  converge uniformemente em  $\mathbb{R}$  a  $t^a \frac{d^b \phi}{dt^b}(t)$ .

No que se segue, considera-se que a função  $f$  pertence ao espaço  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

**Definição 1.1.2.** Definimos a Transformada de Fourier da função  $f$  como

$$(\mathcal{F}f)(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-2\pi i \nu t} dt \quad (1.1)$$

**Teorema 1.1.3.** (Fórmula de Somatório de Poisson) Usando a convenção acima para a Transformada de Fourier, temos, para qualquer  $T > 0$ ,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}f) \left( \frac{k}{T} \right) \quad (1.2)$$

*Demonstração.* Definindo a função

$$g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t + nT),$$

temos que  $g$  é infinitamente diferenciável (já que  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ) e é periódica com período  $T$ . Logo, a Série de Fourier de  $g$  converge uniformemente para  $g$  e, assim, também converge pontualmente. Temos

$$g(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \cdot e^{i \frac{2\pi}{T} kt},$$

com

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} g(t) \cdot e^{-i \frac{2\pi}{T} kt} dt.$$

Em particular,

$$\begin{aligned} g(0) &= \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-T/2}^{+T/2} g(t) \cdot e^{-i \frac{2\pi}{T} kt} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t + nT) \cdot e^{-i \frac{2\pi}{T} kt} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t + nT) \cdot e^{-i \frac{2\pi}{T} k(t+nT)} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i \frac{2\pi}{T} kt} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}f) \left( \frac{k}{T} \right). \end{aligned}$$

□

Se considerarmos a Transformada de Fourier aplicada a distribuições, podemos ver que a Fórmula de Somatório de Poisson segue diretamente do fato de a transformada de um trem de impulsos ser um trem de impulsos. Ou seja,

$$g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT) \Rightarrow (\mathcal{F}g)(\nu) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta \left( \nu - \frac{k}{T} \right),$$

em que a distribuição  $\delta$  de Dirac representa o impulso unitário (massa pontual na origem).

## 1.2 A função $\theta$

Primeiramente, provaremos um lema sobre a integral da função Gaussiana que será utilizado a seguir.

**Lema 1.2.1.** *Temos*

$$\int_{\Gamma} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad (1.3)$$

sendo  $\Gamma$  um caminho que percorre a reta real em sentido crescente. Além disso, a equação (1.3) também é válida quando o caminho  $\Gamma$  é uma reta que faz um ângulo  $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right)$  com a reta real.

*Demonstração.* Sendo  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ , temos

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{+\infty} d\theta = \pi. \end{aligned}$$

Isso prova o caso real. Já se  $\Gamma$  for um caminho no plano complexo que faz ângulo  $\alpha$  com a reta real, podemos representá-lo por

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C}, \\ \Gamma(t) &= (1 + i \tan \alpha)t + b \end{aligned}$$

sendo  $b$  um imaginário puro.

Usando a notação  $\overrightarrow{z_1, z_2}$  para o caminho retilíneo que vai de  $z_1$  a  $z_2$ , temos, pelo teorema de Cauchy para funções holomorfas,

$$\int_{\overrightarrow{\Gamma(-R), \Gamma(R)}} e^{-x^2} dx = \int_{\overrightarrow{-R, R}} e^{-x^2} dx + \int_{\overrightarrow{\Gamma(-R), -R}} e^{-x^2} dx + \int_{\overrightarrow{R, \Gamma(R)}} e^{-x^2} dx, \quad (1.4)$$

para qualquer  $R > 0$ . O lado esquerdo de (1.4) tende a  $\int_{\Gamma} e^{-x^2} dx$  quando  $R \rightarrow +\infty$ .

Mas o primeiro termo do lado direito de (1.4) tende a  $\sqrt{\pi}$ . E os dois últimos termos tendem a 0 quando  $R \rightarrow +\infty$  (aqui, usamos  $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right)$  para mostrar que  $-x^2$  fica sempre no semiplano esquerdo para  $R$  suficientemente grande). Isso completa a demonstração.  $\square$

**Definição 1.2.2.** Sendo  $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(x) > 0\}$ , definimos  $\theta : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$\theta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{n^2 \pi i x}. \quad (1.5)$$

Note que  $\theta(x)$  converge uniformemente em  $\{x \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(x) > \epsilon\}$  para todo  $\epsilon > 0$ .

No que segue convencionamos o ramo do logaritmo  $\log x = \log |x| + i \arg x$  de forma que  $\arg x \in [0, \pi]$  quando  $\text{Im}(x) \geq 0$ . Dessa forma, a exponenciação

$$x^y = \exp(y \log x)$$

fica bem definida para  $x \in \mathcal{H}$ .

**Teorema 1.2.3.** Com essa convenção, a função  $\theta$  satisfaz

$$\theta(x) = \theta(x+2), \quad (1.6)$$

$$\theta(x) = \theta\left(\frac{-1}{x}\right) \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.7)$$

para todo  $x \in \mathcal{H}$ .

*Demonstração.* A relação (1.6) é imediata a partir de (1.5). Para provar (1.7), usaremos a Fórmula de Somatório de Poisson (1.2). Para cada  $x$  fixado, a função  $f_x(n) = e^{n^2 \pi i x}$  definida para  $n \in \mathbb{R}$  pertence ao espaço de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Podemos então aplicar (1.2) com  $T = 1$ , para obter

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_x(n) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}f_x)(k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{n^2 \pi i x} \cdot e^{-2\pi i k n} dn. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis  $n = \frac{m}{e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot \sqrt{\pi x}} + \frac{k}{x}$ , obtemos

$$\theta(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\Gamma} e^{-m^2} \cdot e^{-\pi i \frac{k^2}{x}} dm \cdot \frac{1}{e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot \sqrt{\pi x}}.$$

Note que, quando  $n$  percorre a reta real  $(-\infty, +\infty)$ ,  $m$  percorre uma reta com ângulo de inclinação  $\arg(e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot \sqrt{\pi x}) \in (-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4})$ . Assim, pelo Lema 1.2.1, temos  $\int_{\Gamma} e^{-m^2} dm = \sqrt{\pi}$ . Isso nos dá

$$\begin{aligned}\theta(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\pi i \frac{k^2}{x}} \cdot \frac{1}{e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot \sqrt{x}} \\ &= \theta\left(\frac{-1}{x}\right) \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

□

Note que, a partir das equações (1.6) e (1.7), podemos obter o valor de  $\theta(x)$  a partir do valor de  $\theta(\gamma(x))$  quando  $\gamma : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é uma das duas transformações  $\tau_2(x) = x + 2$ ,  $\sigma(x) = \frac{-1}{x}$ . Iterando esse processo, é possível obter uma relação entre  $\theta(x)$  e  $\theta(\gamma(x))$  para qualquer  $\gamma$  no grupo de composição gerado por  $\tau_2$  e  $\sigma$ . Estudaremos esse grupo a seguir.

### 1.3 O grupo modular da função $\theta$

**Definição 1.3.1.** Sendo  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  o plano complexo estendido, o grupo modular  $\mathfrak{M}$  é o grupo das transformações fracionárias lineares  $\gamma : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  da forma

$$\gamma(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1, \quad (1.8)$$

com a operação de composição.

O grupo modular da função  $\theta$  é o subgrupo  $\mathfrak{M}_\theta$  de  $\mathfrak{M}$  gerado pelas duas transformações

$$\tau_2(x) = x + 2 \quad e \quad \sigma(x) = \frac{-1}{x}. \quad (1.9)$$

Note que todas as transformações  $\gamma \in \mathfrak{M}$  levam  $\mathcal{H}$  em  $\mathcal{H}$ , já que

$$2i \cdot \operatorname{Im}\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right) = \frac{ax + b}{cx + d} - \frac{a\bar{x} + b}{c\bar{x} + d} = \frac{(ad - bc)(x - \bar{x})}{|cx + d|^2} = \frac{2i \cdot \operatorname{Im}(x)}{|cx + d|^2},$$

o que garante que  $\operatorname{Im}(\gamma(x)) > 0$  quando  $\operatorname{Im}(x) > 0$ .

**Lema 1.3.2.** Sendo  $\operatorname{SL}(2, \mathbb{Z})$  o grupo das matrizes  $2 \times 2$  em  $\mathbb{Z}$  com determinante 1, temos que  $\mathfrak{M}$  é isomorfo ao quociente  $\operatorname{SL}(2, \mathbb{Z}) / \{-I, I\}$ .

*Demonstração.* Um simples cálculo mostra que a função de  $\operatorname{SL}(2, \mathbb{Z})$  em  $\mathfrak{M}$  que leva cada matriz  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}(2, \mathbb{Z})$  na transformação fracionária linear  $\gamma(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$  é um homomorfismo de grupos. O lema segue do fato de esse homomorfismo ser sobrejetivo e possuir núcleo  $\{-I, I\}$ . □

O lema mostra que podemos caracterizar os elementos de  $\mathfrak{M}$  como matrizes em  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$  de forma única, a menos de sinal.

Iremos agora estudar  $\mathfrak{M}_\theta$  através da ação desse grupo sobre elementos de  $\overline{\mathbb{C}}$ .

**Teorema 1.3.3.** *A  $\mathfrak{M}_\theta$ -órbita de 0 consiste em todos os racionais da forma  $r = \frac{p}{q}$  em que  $p$  e  $q$  tem paridades diferentes, junto com  $\infty$ . A  $\mathfrak{M}_\theta$ -órbita de 1 consiste em todos os racionais da forma  $r = \frac{p}{q}$ , com  $p$  e  $q$  ambos ímpares.*

*Demonstração.* A transformação  $\sigma$  definida em (1.9) leva 0 em  $\infty$ , o que mostra que ambos estão na mesma órbita. Sendo  $B = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q > 0, p, q \text{ ímpares}\}$ , é fácil ver que  $\sigma$  e  $\tau_2$  deixam  $B$  invariante. O mesmo ocorre com o complementar  $A = (\mathbb{Q} \cup \{\infty\}) \setminus B$ . Isso mostra que a  $\mathfrak{M}_\theta$ -órbita de 1 está contida em  $B$  e a  $\mathfrak{M}_\theta$ -órbita de 0 está contida em  $A$ .

Para provar a inclusão inversa, basta mostrar que todo racional está na órbita de 0 ou de 1. Começando com um racional  $\frac{p_0}{q_0}$  escrito na forma irredutível, com  $p_0, q_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $q_0 > 0$ , iteramos o seguinte processo. Primeiro aplicamos  $k$  translações de 2 unidades,  $k \in \mathbb{Z}$ , de forma a obter um racional no intervalo  $(-1, 1]$ . Se esse racional for diferente de 0 e 1, aplicamos a transformação  $\sigma$  para obter um novo racional  $\sigma(\tau_2^k(\frac{p_0}{q_0})) = \frac{p_1}{q_1}$ . E repetimos o processo sobre esse racional. O algoritmo é tal que  $|q_1| < |q_0|$ , pois, como  $-\frac{q_1}{p_1} \in (-1, 1]$ , temos  $|\frac{q_1}{q_0}| = |\frac{q_1}{p_1}| < 1$ . Assim, como os denominadores sempre decrescem, o algoritmo precisa terminar. Isso significa que, através da aplicação sucessiva de transformações  $\sigma, \tau_2, \tau_2^{-1}$  sobre o número racional original, sempre é possível obter 0 ou 1.  $\square$

**Teorema 1.3.4.** *Dado  $\gamma \in \mathfrak{M}$ , temos que  $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta$  se, e somente se, a matriz de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$  que representa  $\gamma$  é da forma  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  quando vista módulo 2.*

*Demonstração.* É fácil ver que o conjunto das transformações  $\gamma \in \mathfrak{M}$  que possuem uma matriz da forma acima é um subgrupo  $\widehat{\mathfrak{M}} \subseteq \mathfrak{M}$ . Como  $\sigma, \tau_2 \in \widehat{\mathfrak{M}}$ , segue imediatamente que  $\mathfrak{M}_\theta \subseteq \widehat{\mathfrak{M}}$ . Para provar a recíproca, considere  $\gamma \in \widehat{\mathfrak{M}}$  representado por uma matriz  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ . Se  $c = 0$ , como  $ad - bc = 1$  precisamos ter  $a = d = 1$  ou  $a = d = -1$ , o que mostra que  $\gamma$  é uma translação de uma quantidade par de unidades. Logo,  $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta$ . Já se  $c \neq 0$ , temos  $\gamma^{-1}(\infty) = \frac{-d}{c}$  é um racional cujo numerador e denominador tem paridades diferentes. Logo, pelo Teorema 1.3.3, existe  $\delta \in \mathfrak{M}_\theta$  tal que  $\delta(\frac{-d}{c}) = \infty$ . Assim, a transformação  $\epsilon = \delta \circ \gamma^{-1}$  é tal que  $\epsilon(\infty) = \infty$ . Isso implica que  $\epsilon$  é uma translação e, como  $\epsilon \in \widehat{\mathfrak{M}}$ , é uma translação de uma quantidade par de unidades. Logo,  $\epsilon \in \mathfrak{M}_\theta$  e  $\gamma = \epsilon^{-1} \circ \delta \in \mathfrak{M}_\theta$ .  $\square$

Além disso, temos que o índice  $[\mathfrak{M} : \mathfrak{M}_\theta]$  vale 3 e que  $\mathfrak{M}_\theta$  não é um subgrupo normal de  $\mathfrak{M}$ . Essas observações seguem do homomorfismo entre  $\mathfrak{M}$  e  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  obtido olhando os coeficientes da matriz em  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$  módulo 2. Esse homomorfismo



é sobrejetivo, tem o núcleo contido em  $\mathfrak{M}_\theta$  e leva  $\mathfrak{M}_\theta$  em um subgrupo não normal de 2 elementos do grupo  $SL(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ , que possui 6 elementos.

# Capítulo 2

## Autossimilaridade da função $\theta$

### 2.1 O sistema de multiplicadores

Agora iremos estender as leis de transformação da função  $\theta$  para todas as transformações  $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta$ . Vamos demonstrar que, para cada  $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta$ , existe uma função  $\mu_\gamma : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ , chamada *multiplicador*, tal que

$$\theta(x) = \theta(\gamma(x)) \cdot \mu_\gamma(x). \quad (2.1)$$

De fato, pelo Teorema 1.2.3 isso é válido para as transformações  $\tau_2$  e  $\sigma$  definidas em (1.9), com multiplicadores  $\mu_{\tau_2}(x) = 1$  e  $\mu_\sigma(x) = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$ .

Toda transformação  $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta$  pode ser gerada a partir de  $\tau_2$  e  $\sigma$ . Logo, só precisamos determinar a regra de composição dos multiplicadores. Sendo  $\delta, \gamma \in \mathfrak{M}_\theta$ , temos

$$\theta(x) = \theta(\gamma(x)) \cdot \mu_\gamma(x) = \theta(\delta(\gamma(x))) \cdot \mu_\delta(\gamma(x)) \cdot \mu_\gamma(x).$$

Isso mostra que

$$\mu_{\delta \circ \gamma}(x) = \mu_\delta(\gamma(x)) \cdot \mu_\gamma(x). \quad (2.2)$$

Note que essa lei de composição dos multiplicadores é a mesma lei de composição das derivadas (regra da cadeia):

$$(\delta \circ \gamma)'(x) = \delta'(\gamma(x)) \cdot \gamma'(x). \quad (2.3)$$

Isso será usado para obter o *sistema de multiplicadores* no seguinte teorema:

**Teorema 2.1.1.** *Para cada  $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta$ , seja  $r = \gamma^{-1}(\infty)$  o pólo da transformação  $\gamma$ . O multiplicador  $\mu_\gamma$  depende apenas do pólo  $r$ . Se  $r = \infty$ ,  $\gamma$  é uma translação de uma quantidade par de unidades e vale  $\mu_\gamma(x) = 1$ . Já se  $r = \frac{p}{q}$  é um racional escrito na forma irredutível com  $q > 0$ , o multiplicador é dado por*

$$\mu_\gamma(x) = e^{i\frac{\pi}{4}m(r)} \cdot q^{-\frac{1}{2}} \cdot (x - r)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.4)$$

em que os inteiros  $m(r) \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$  podem ser calculados recursivamente por

$$m(\infty) = 0, \quad m(0) = 1, \quad (2.5)$$

$$m(r+2) = m(r), \quad (2.6)$$

$$m\left(\frac{-1}{r}\right) = m(r) - \text{sign}(r). \quad (2.7)$$

Além disso, o multiplicador  $\mu_\gamma$  também pode ser escrito como

$$\mu_\gamma(x) = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} e^{i\pi\frac{p}{q}k^2} \cdot (x-r)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.8)$$

*Demonstração.* Primeiramente mostraremos que, para qualquer  $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta$ , vale

$$\mu_\gamma(x) = e^{i\frac{\pi}{4}m_\gamma} \cdot \gamma'(x)^{\frac{1}{4}} \quad (2.9)$$

para algum  $m_\gamma$  inteiro.

Dada  $\gamma(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \in \mathfrak{M}$ , sua derivada é dada por  $\gamma'(x) = \frac{1}{(cx+d)^2}$ . Assim, usaremos a convenção de que  $\arg(\gamma'(x)) \in (-2\pi, 0]$ , que é compatível com a convenção  $\arg(cx+d) \in (0, \pi)$  usada para  $(cx+d) \in \mathcal{H}$ .

A equação (2.9) é válida para  $\gamma = \tau_2$ , caso em que  $\mu_\gamma(x) = 1$  e  $\gamma'(x) = 1$ . Além disso, ela também é válida para  $\gamma = \sigma$ , caso em que  $\mu_\gamma(x) = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$  e  $\gamma'(x) = x^{-2}$ .

Para o caso geral, basta utilizar a lei de composição dos multiplicadores (2.2) e das derivadas (2.3). Supondo que (2.9) seja válida para as transformações  $\delta$  e  $\gamma$ , temos

$$\begin{aligned} \mu_{\delta \circ \gamma}(x) &= \mu_\delta(\gamma(x)) \cdot \mu_\gamma(x) \\ &= e^{i\frac{\pi}{4}m_\delta} \cdot \delta'(\gamma(x))^{\frac{1}{4}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}m_\gamma} \cdot \gamma'(x)^{\frac{1}{4}} \\ &= e^{i\frac{\pi}{4}(m_\delta+m_\gamma)} \cdot |\delta'(\gamma(x)) \cdot \gamma'(x)|^{\frac{1}{4}} \cdot e^{i\frac{1}{4}(\arg(\delta'(\gamma(x))) + \arg(\gamma'(x)))} \\ &= e^{i\frac{\pi}{4}(m_\delta+m_\gamma)} \cdot (\delta'(\gamma(x)) \cdot \gamma'(x))^{\frac{1}{4}} \cdot e^{i\frac{1}{4}(\arg(\delta'(\gamma(x))) + \arg(\gamma'(x)) - \arg(\delta'(\gamma(x)) \cdot \gamma'(x)))} \\ &= e^{i\frac{\pi}{4}(m_\delta+m_\gamma-2\epsilon)} \cdot (\delta \circ \gamma)'(x)^{\frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

onde

$$\epsilon = \frac{\arg(\delta'(\gamma(x))) + \arg(\gamma'(x)) - \arg(\delta'(\gamma(x)) \cdot \gamma'(x))}{-2\pi} \quad (2.10)$$

é um número inteiro, pois  $\arg(\alpha) + \arg(\beta) - \arg(\alpha \cdot \beta)$  sempre é um múltiplo inteiro de  $2\pi$ .

De fato, precisamos ter  $\epsilon \in \{0,1\}$ , já que estamos usando a convenção de que  $\arg(\gamma'(x)) \in (-2\pi, 0]$  para todo  $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta$  nas fórmulas. Temos  $\epsilon = 1 \Leftrightarrow \arg(\delta'(\gamma(x))) + \arg(\gamma'(x)) \leq -2\pi$ .

Assim, provamos que vale (2.9) e que temos a relação

$$m_{\delta \circ \gamma} = m_\delta + m_\gamma - 2\epsilon, \quad (2.11)$$

onde  $\epsilon$  é dado pela equação (2.10).

Podemos verificar, também, que o multiplicador  $\mu_\gamma$  depende somente do pólo  $r$  de  $\gamma$ . De fato, se  $\delta, \gamma \in \mathfrak{M}_\theta$  possuem o mesmo pólo  $r$ , a transformação  $\delta \circ \gamma^{-1}$  leva  $\infty$  em  $\infty$  e, portanto, tem que ser uma translação múltipla de  $\tau_2$ . Assim,  $\delta = \tau_2^k \circ \gamma$ , o que implica  $\mu_\delta = \mu_\gamma$ .

O termo  $\gamma'(x)^{\frac{1}{4}}$  em (2.9) depende apenas do pólo  $r$ . De fato, se tivermos  $r = \frac{p}{q}$ , temos

$$\gamma'(x) = (qx - p)^{-2} = q^{-2} \cdot (x - r)^{-2}. \quad (2.12)$$

Logo, o inteiro  $m_\gamma$  também só depende do pólo  $r$ , e será denotado  $m(r)$ . Isso faz com que as equações (2.9) e (2.4) sejam equivalentes.

É fácil verificar (2.5), já que  $\mu_{\text{id}}(x) = 1$ ,  $\mu_\sigma(x) = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \sigma'(x)^{\frac{1}{4}}$  e temos  $\text{id}(\infty) = \infty$ ,  $\sigma(0) = \infty$ .

Para provar (2.6), basta ver que, se  $\delta$  tem um pólo em  $r$ , então a transformação  $\delta \circ \tau_2^{-1}$  tem um pólo em  $r + 2$ . Assim, a equação (2.11) com  $\gamma = \tau_2^{-1}$  mostra que  $m(r + 2) = m(r)$ , já que, neste caso,  $m_\gamma = 0$  e  $\epsilon = 0$ .

Para provar (2.7), vemos que, se  $\delta$  tem um pólo em  $r$ , então a transformação  $\delta \circ \sigma$  tem um pólo em  $\frac{-1}{r}$ . Neste caso, a equação (2.11) com  $\gamma = \sigma$  mostra que  $m\left(\frac{-1}{r}\right) = m(r) + 1 - 2\epsilon$ . E temos

$$\begin{aligned} \epsilon = 1 &\Leftrightarrow \arg((\sigma(x) - r)^{-2}) + \arg(x^{-2}) \leq -2\pi \\ &\Leftrightarrow \arg(\sigma(x) - r) + \arg(x) \geq \pi \\ &\Leftrightarrow \arg(\sigma(x) - r) \geq \pi - \arg(x) \\ &\Leftrightarrow \arg(\sigma(x) - r) \geq \arg(\sigma(x)) \\ &\Leftrightarrow r \geq 0. \end{aligned}$$

Assim,  $m\left(\frac{-1}{r}\right) = m(r) - \text{sign}(r)$ , como desejado.

Para provar (2.8), consideramos a expansão assintótica da função  $\theta$  nas proximidades do ponto  $r = \frac{p}{q}$ . Sabemos que  $p$  e  $q$  tem paridades diferentes, de forma que  $pq$  é sempre par. Assim, temos

$$\begin{aligned}
\theta(r + i\epsilon) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{n^2 \pi i (\frac{r}{q} + i\epsilon)} \\
&= \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{(lq+k)^2 \pi i (\frac{r}{q} + i\epsilon)} \\
&= \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{l^2 pq \pi i + 2lkp \pi i + \pi i \frac{p}{q} k^2 - \epsilon \pi (lq+k)^2} \\
&= \sum_{k=0}^{q-1} e^{\pi i \frac{p}{q} k^2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{-(lq\sqrt{\epsilon\pi} + k\sqrt{\epsilon\pi})^2} \\
&\approx \frac{1}{q\sqrt{\epsilon}} \sum_{k=0}^{q-1} e^{\pi i \frac{p}{q} k^2}, \text{ quando } \epsilon \downarrow 0.
\end{aligned}$$

No último passo, o somatório em  $l$  foi visto como uma soma de Riemann para a integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

Por outro lado, sendo  $\gamma(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ , temos  $\gamma\left(-\frac{d}{c} + i\epsilon\right) \approx \frac{i}{c^2\epsilon}$ , o que mostra que  $\theta(\gamma(r + i\epsilon))$  tende a 1 quando  $\epsilon \downarrow 0$ . Assim, usando (2.1) e (2.4), vemos que  $\theta(r + i\epsilon)$  precisa tender assintoticamente a  $e^{i\frac{\pi}{4}m(r)} \cdot q^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\epsilon}}$ . Isso mostra que  $e^{i\frac{\pi}{4}m(r)} \cdot q^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} e^{\pi i \frac{p}{q} k^2}$ , o que implica (2.8).  $\square$

O Teorema 1.3.3 mostra que todos os racionais cujos numeradores e denominadores tem paridades diferentes podem ser levados em 0 através da aplicação sucessiva das transformações  $\tau_2$ ,  $\tau_2^{-1}$  e  $\sigma$ . Assim, as equações (2.5, 2.6, 2.7) fornecem fornecem um método recursivo para calcular os inteiros  $m(r)$ . Basta seguir o algoritmo mostrado na prova do Teorema 1.3.3, que é análogo ao algoritmo usado para o cálculo de frações contínuas.

A equação (2.7) mostra que o aumento de uma unidade em  $m$  corresponde à passagem  $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_0$ , onde

$$\begin{aligned}
A_0 &= \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in 4\mathbb{Z} + 3, q \in 2\mathbb{Z}, q > 0 \right\} \cup \{\infty\}, \\
A_1 &= \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in 2\mathbb{Z}, q \in 4\mathbb{Z} + 1, q > 0 \right\}, \\
A_2 &= \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in 4\mathbb{Z} + 1, q \in 2\mathbb{Z}, q > 0 \right\}, \\
A_3 &= \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in 2\mathbb{Z}, q \in 4\mathbb{Z} + 3, q > 0 \right\}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Isso nos permite definir de forma imediata a classe de congruência de  $m$  módulo 4. Temos  $m(r) \equiv k \pmod{4}$ , se  $r \in A_k$ . Mas isso não resolve todo o problema, porque precisamos determinar o valor de  $m(r)$  módulo 8.

Para cada racional  $\frac{p}{q}$  com  $p$  par e  $q$  ímpar, definimos a função

$$\epsilon\left(\frac{p}{q}\right) = \zeta^{m\left(\frac{p}{q}\right) - q}, \tag{2.14}$$

onde  $\zeta = e^{i\frac{\pi}{4}}$ . É fácil ver que  $\epsilon\left(\frac{p}{q}\right) = \pm 1$ , já que  $m\left(\frac{p}{q}\right) \equiv q \pmod{4}$  quando  $q$  é ímpar.

Provaremos que existe uma fórmula para  $\epsilon\left(\frac{p}{q}\right)$  (e, conseqüentemente, para  $m\left(\frac{p}{q}\right)$ ) em função dos símbolos de Jacobi  $\left(\frac{n}{m}\right)$ . Essa representação ainda exige o cálculo desses símbolos, mas já traz mais informações do que representação recursiva (2.5, 2.6, 2.7).

Nas seções seguintes, definiremos os símbolos de Legendre e de Jacobi, provando suas propriedades.

## 2.2 O símbolo de Legendre

**Definição 2.2.1.** *Sejam  $a$  um inteiro e  $p$  um primo ímpar. Dizemos que  $a$  é resíduo quadrático módulo  $p$  se existe  $b$  inteiro tal que  $b^2 \equiv a \pmod{p}$ . O símbolo de Legendre  $\left(\frac{a}{p}\right)$  é definido por*

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0, & \text{se } a \equiv 0 \pmod{p}, \\ 1, & \text{se } a \not\equiv 0 \pmod{p} \text{ e } a \text{ é resíduo quadrático módulo } p, \\ -1, & \text{se } a \text{ não é resíduo quadrático módulo } p. \end{cases} \tag{2.15}$$

Por completude, vamos demonstrar aqui as propriedades aritméticas do símbolo de Legendre. As demonstrações foram obtidas de [5].

**Lema 2.2.2.** *Dados  $a$  inteiro e  $p$  primo ímpar, temos*

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}. \quad (2.16)$$

*Demonstração.* O resultado é imediato quando  $a \equiv 0 \pmod{p}$ . Suponha, então, que  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Neste caso, temos  $\text{mdc}(a,p) = 1$  e  $a$  é invertível módulo  $p$ . Assim, a função

$$\begin{aligned} f_a : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* &\rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*, \\ f_a(x) &\equiv ax \end{aligned}$$

é uma bijeção de  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  em si mesmo. A partir disso, temos que

$$\begin{aligned} (p-1)! &\equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1) \\ &\equiv (a \cdot 1) \cdot (a \cdot 2) \cdot (a \cdot 3) \cdots (a \cdot (p-1)) \\ &\equiv a^{p-1} \cdot (p-1)! \pmod{p}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

o que mostra que  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  (pequeno teorema de Fermat). Dessa forma, todo  $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  é raiz do polinômio  $x^{p-1} - 1 = (x^{\frac{p-1}{2}} - 1)(x^{\frac{p-1}{2}} + 1)$ .

Mas se  $a$  é resíduo quadrático módulo  $p$ , existe  $b$  tal que  $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (b^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ , o que mostra que  $a$  é raiz de  $x^{\frac{p-1}{2}} - 1$ . Por outro lado, existem pelo menos  $\frac{p-1}{2}$  resíduos quadráticos em  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ , já que  $x^2 \equiv y^2 \pmod{p} \Leftrightarrow x \equiv \pm y \pmod{p}$ . Assim, os elementos de  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  que são resíduos quadráticos são exatamente as raízes de  $x^{\frac{p-1}{2}} - 1$  e os elementos que não são resíduos quadráticos são exatamente as raízes de  $x^{\frac{p-1}{2}} + 1$ . Se  $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ , temos  $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$  e se  $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ , temos  $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$ .  $\square$

Utilizando a mesma ideia da demonstração do pequeno teorema de Fermat em (2.17), vamos obter a seguir uma nova maneira de calcular o símbolo de Legendre  $\left(\frac{a}{p}\right)$ .

Considere o conjunto  $P = \left\{1, 2, 3, \dots, \frac{p-1}{2}\right\}$ . Para cada  $j \in P$ , podemos escrever  $f_a(j) \equiv aj \equiv \epsilon_j m_j \pmod{p}$  de forma única com  $\epsilon_j \in \{-1, 1\}$  e  $m_j \in P$ . E essa representação é tal que a função

$$\begin{aligned} m : P &\rightarrow P, \\ j &\mapsto m_j \end{aligned}$$

é uma bijeção em  $P$ , já que  $m_i = m_j \Leftrightarrow ai \equiv \pm aj \Leftrightarrow i \equiv \pm j \Leftrightarrow i \equiv j \pmod{p}$ .

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{p}\right) &\equiv a^{\frac{p-1}{2}} \\
&\equiv \frac{(a \cdot 1) \cdot (a \cdot 2) \cdot (a \cdot 3) \cdots (a \cdot \frac{p-1}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{p-1}{2}} \\
&\equiv \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \cdots \epsilon_{\frac{p-1}{2}} \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdots m_{\frac{p-1}{2}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{p-1}{2}} \\
&\equiv \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \cdots \epsilon_{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Isso nos dá uma forma de calcular  $\left(\frac{a}{p}\right)$  para qualquer  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$  através do produto dos sinais  $\epsilon_j$ , para todo  $j \in P$ . Como uma primeira aplicação, resolveremos o caso  $a = 2$ .

**Lema 2.2.3.** *Se  $p$  um primo ímpar, temos*

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = \begin{cases} 1, & \text{se } p \equiv \pm 1 \pmod{8}, \\ -1, & \text{se } p \equiv \pm 3 \pmod{8}. \end{cases} \tag{2.19}$$

*Demonstração.* Já sabemos que  $\left(\frac{2}{p}\right) = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \cdots \epsilon_{\frac{p-1}{2}}$ , com  $\epsilon_j \in \{-1, 1\}$ . Para cada  $j \in P$ , temos  $\epsilon_j = -1 \Leftrightarrow \frac{p+1}{2} \leq 2j \leq p-1 \Leftrightarrow \lceil \frac{p+1}{4} \rceil \leq j \leq \frac{p-1}{2}$ . Assim,  $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} - \lceil \frac{p+1}{4} \rceil + 1}$  e um estudo de casos mostra que isso é equivalente a (2.19).  $\square$

Agora provaremos a lei de Gauss de reciprocidade quadrática, que, dados dois primos ímpares  $p$  e  $q$ , estabelece uma relação direta entre  $p$  ser quadrado módulo  $q$  e  $q$  ser quadrado módulo  $p$ .

**Teorema 2.2.4.** *(Lei de reciprocidade quadrática) Sendo  $p$  e  $q$  primos ímpares, temos*

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \cdot \left(\frac{q}{p}\right). \tag{2.20}$$

*Demonstração.* Definimos  $P = \left\{1, 2, 3, \dots, \frac{p-1}{2}\right\}$  e  $Q = \left\{1, 2, 3, \dots, \frac{q-1}{2}\right\}$ . Temos  $\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^m$ , sendo  $m$  o número de inteiros  $j \in P$  para os quais existe  $y$  inteiro tal que  $-\frac{p-1}{2} \leq qj - py < 0$ . Para todo  $j \in P$ , se esse inteiro  $y$  existir,



ele é único e satisfaz  $0 < y \leq \frac{q+1}{p} \frac{p-1}{2} < \frac{q+1}{2}$ . Assim, precisamos ter  $y \in Q$ . Isso mostra que  $m = |X|$ , com

$$X = \left\{ (x,y) \in P \times Q \mid -\frac{p-1}{2} \leq qx - py < 0 \right\}.$$

Analogamente, descobrimos que  $\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^n$ , onde  $n = |Y|$ , com

$$Y = \left\{ (x,y) \in P \times Q \mid 0 < qx - py \leq \frac{q-1}{2} \right\}.$$

Note que, para  $(x,y) \in P \times Q$ , nunca podemos ter  $qx - py = 0$ . Portanto,  $m + n = |Z|$ , com

$$Z = \left\{ (x,y) \in P \times Q \mid -\frac{p-1}{2} \leq qx - py \leq \frac{q-1}{2} \right\}.$$

Temos  $\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{m+n}$  e  $m + n = |P \times Q| - |A| - |B|$ , onde

$$A = \left\{ (x,y) \in P \times Q \mid qx - py < -\frac{p-1}{2} \right\},$$

$$B = \left\{ (x,y) \in P \times Q \mid qx - py > \frac{q-1}{2} \right\}.$$

Como  $|P \times Q| = \frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}$ , basta mostrar que  $|A|$  e  $|B|$  tem a mesma paridade.

Mas a função  $h : P \times Q \rightarrow P \times Q$ ,  $h(x,y) = \left(\frac{p+1}{2} - x, \frac{q+1}{2} - y\right)$  define uma bijeção entre  $A$  e  $B$ .  $\square$

Resumindo as propriedades do símbolo de Legendre, temos o seguinte teorema:

**Teorema 2.2.5.** *Se  $p$  e  $q$  primos ímpares,  $a$  e  $b$  inteiros, temos*

$$\left(\frac{a+p}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right), \quad (2.21)$$

$$\left(\frac{a \cdot b}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right), \quad (2.22)$$

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}, \quad (2.23)$$

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}, \quad (2.24)$$

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \cdot \left(\frac{q}{p}\right). \quad (2.25)$$

*Demonstração.* A equação (2.21) é imediata a partir da definição do símbolo de Legendre. Já as relações (2.22) e (2.23) são consequências diretas do Lema 2.2.2. A equação (2.24) foi demonstrada no Lema 2.2.3 e a relação (2.25) foi provada no Teorema 2.2.4.  $\square$

## 2.3 O símbolo de Jacobi

Agora iremos definir os símbolos de Jacobi, que são uma generalização dos símbolos de Legendre. Provaremos que eles também satisfazem propriedades análogas às do Teorema 2.2.5.

**Definição 2.3.1.** *Sejam  $n$  um inteiro e  $m$  um inteiro positivo ímpar. O símbolo de Jacobi  $\left(\frac{n}{m}\right)$  é definido por*

$$\left(\frac{n}{m}\right) = \left(\frac{n}{p_1}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{n}{p_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{n}{p_k}\right)^{\alpha_k}, \quad (2.26)$$

sendo  $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$  a fatora ção prima de  $m$ .

Está incluída em (2.26) a convenção de que  $\left(\frac{n}{1}\right) = 1$ . Note que, a partir da definição, os símbolos de Jacobi coincidem com os símbolos de Legendre (e são representados com a mesma notação) quando  $m$  é um primo ímpar.

**Teorema 2.3.2.** *Se  $n, n_1, n_2$  inteiros e  $m, m_1, m_2$  inteiros positivos ímpares, temos*

$$\left(\frac{n+m}{m}\right) = \left(\frac{n}{m}\right), \quad (2.27)$$

$$\left(\frac{n_1 \cdot n_2}{m}\right) = \left(\frac{n_1}{m}\right) \cdot \left(\frac{n_2}{m}\right), \quad (2.28)$$

$$\left(\frac{-1}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}}, \quad (2.29)$$

$$\left(\frac{2}{m}\right) = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}, \quad (2.30)$$

$$\left(\frac{m_1}{m_2}\right) = (-1)^{\frac{m_1-1}{2} \frac{m_2-1}{2}} \cdot \left(\frac{m_2}{m_1}\right). \quad (2.31)$$

*Demonstração.* A periodicidade (2.27) segue diretamente da periodicidade dos símbolos de Legendre (2.21). A multiplicatividade dos símbolos de Jacobi (2.28) também segue diretamente da multiplicatividade dos símbolos de Legendre (2.22).

A propriedade (2.29) segue de (2.23) e do fato de que  $m \equiv 3 \pmod{4}$  se e somente se  $m$  possui uma quantidade ímpar de fatores primos da forma  $p \equiv 3 \pmod{4}$ . A propriedade (2.30) segue de (2.24) e do fato de que  $m \equiv \pm 3 \pmod{8}$

se e somente se  $m$  possui uma quantidade ímpar de fatores primos da forma  $p \equiv \pm 3 \pmod{8}$ .

A reciprocidade quadrática (2.31) segue de (2.25) e do fato de que  $m \equiv n \equiv 3 \pmod{4}$  se e somente se existe uma quantidade ímpar de pares  $(p, q)$ , com  $p$  e  $q$  primos, tais que  $p|m, q|n$  e  $p \equiv q \equiv 3 \pmod{4}$ .  $\square$

Agora vamos usar o símbolo de Jacobi para representar a função  $m(r)$  que é definida recursivamente pelas equações (2.5, 2.6, 2.7).

**Teorema 2.3.3.** *Se  $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta$  tem um pólo em  $r = \frac{p}{q}$ , com  $q > 0$ ,  $\text{mdc}(p, q) = 1$ , então*

$$\theta(x) = \theta(\gamma(x)) \cdot e^{i\frac{\pi}{4}m(\frac{p}{q})} \cdot q^{-\frac{1}{2}} \cdot (x - r)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.32)$$

com

$$e^{i\frac{\pi}{4}m(\frac{p}{q})} = e^{i\frac{\pi}{4}q} \cdot \left(\frac{-p}{q}\right), \text{ se } q \text{ é ímpar e } p \text{ é par}, \quad (2.33)$$

$$e^{i\frac{\pi}{4}m(\frac{p}{q})} = e^{i\frac{\pi}{4}(p+1)} \cdot \left(\frac{q}{|p|}\right), \text{ se } p \text{ é ímpar e } q \text{ é par}. \quad (2.34)$$

*Demonstração.* Utilizaremos aqui a notação  $\zeta = e^{i\frac{\pi}{4}}$ . A equação (2.32) já foi estabelecida no Teorema 2.1.1. Para demonstrar (2.33), provaremos que a função  $\epsilon\left(\frac{p}{q}\right) = \zeta^{m(\frac{p}{q})-q}$  definida em (2.14) satisfaz

$$\epsilon\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{-p}{q}\right). \quad (2.35)$$

O caso (2.34) segue a partir de (2.33). De fato, suponha  $p$  ímpar,  $q$  par. Se  $p > 0$ , temos

$$\zeta^{m(\frac{p}{q})} = \zeta^{m(\frac{-q}{p})+1} = \zeta^{p+1} \cdot \left(\frac{q}{p}\right),$$

e, se  $p < 0$ , temos

$$\begin{aligned} \zeta^{m(\frac{p}{q})} &= \zeta^{m(\frac{q}{-p})-1} = \zeta^{-p-1} \cdot \left(\frac{-q}{-p}\right) = \zeta^{-p-1} \cdot \left(\frac{-1}{-p}\right) \cdot \left(\frac{q}{-p}\right) \\ &= \zeta^{-p-1} \cdot (-1)^{\frac{-p-1}{2}} \cdot \left(\frac{q}{-p}\right) = \zeta^{-(p+1)} \cdot \zeta^{-2(p+1)} \cdot \left(\frac{q}{-p}\right) = \zeta^{p+1} \cdot \left(\frac{q}{-p}\right). \end{aligned}$$

Agora basta mostrar (2.35). Suponha, então,  $q > 0$  ímpar e  $p$  par. Provaremos

que a função  $\epsilon$  satisfaz

$$\epsilon\left(\frac{p+2q}{q}\right) = \epsilon\left(\frac{p}{q}\right), \quad (2.36)$$

$$\epsilon\left(\frac{p}{q+2p}\right) = \epsilon\left(\frac{p}{q}\right) \cdot (-1)^{\frac{p}{2}}, \text{ se } q+2p > 0, \quad (2.37)$$

$$\epsilon\left(\frac{-p}{-q-2p}\right) = \epsilon\left(\frac{p}{q}\right) \cdot (-1)^{\frac{p+q+1}{2}}, \text{ se } q+2p < 0, \quad (2.38)$$

$$\epsilon\left(\frac{p}{1}\right) = 1. \quad (2.39)$$

Além disso, os símbolos de Jacobi satisfazem propriedades análogas

$$\left(\frac{-p-2q}{q}\right) = \left(\frac{-p}{q}\right), \quad (2.40)$$

$$\left(\frac{-p}{q+2p}\right) = \left(\frac{-p}{q}\right) \cdot (-1)^{\frac{p}{2}}, \text{ se } q+2p > 0, \quad (2.41)$$

$$\left(\frac{p}{-q-2p}\right) = \left(\frac{-p}{q}\right) \cdot (-1)^{\frac{p+q+1}{2}}, \text{ se } q+2p < 0, \quad (2.42)$$

$$\left(\frac{-p}{1}\right) = 1. \quad (2.43)$$

As equações (2.36-2.39) para a função  $\epsilon$  e (2.40-2.43) para os símbolos de Jacobi implicam (2.35), já que existe um algoritmo que leva qualquer racional  $r = \frac{p}{q}$  com  $q$  ímpar e  $p$  par em 0 seguindo os passos descritos nessas equações, de forma similar ao que foi feito na prova do Teorema 1.3.3. Os passos consistem em adicionar números pares à fração  $r$  ou à sua inversa  $\frac{1}{r}$ .

A propriedade (2.39) é imediata e a propriedade (2.36) é consequência direta de (2.6). Para provar (2.37) e (2.38), note que

$$\epsilon\left(\frac{p}{q}\right) = \zeta^{m\left(\frac{p}{q}\right)-q} = \zeta^{m\left(\frac{-q \cdot s}{|p|}\right)+s-q},$$

sendo  $s = \text{sign}(p)$ . Se tivermos  $q+2p > 0$ , então usamos (2.6) novamente para mostrar

$$\begin{aligned} \epsilon\left(\frac{p}{q+2p}\right) &= \zeta^{m\left(\frac{p}{q+2p}\right)-q-2p} = \zeta^{m\left(\frac{-q \cdot s - 2p \cdot s}{|p|}\right)+s-q-2p} \\ &= \zeta^{m\left(\frac{-q \cdot s}{|p|}\right)+s-q-2p} = \epsilon\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \zeta^{-2p}, \end{aligned}$$

o que implica (2.37). Se tivermos  $q+2p < 0$ , precisamos ter  $p < 0$  (ou seja,

$s = -1$ ) e um argumento análogo nos dá

$$\begin{aligned} \epsilon \left( \frac{-p}{-q-2p} \right) &= \zeta^{m \left( \frac{-p}{-q-2p} \right) + q + 2p} = \zeta^{m \left( \frac{-q \cdot s - 2p \cdot s}{|p|} \right) - s + q + 2p} \\ &= \zeta^{m \left( \frac{-q \cdot s}{|p|} \right) + 1 + q + 2p} = \epsilon \left( \frac{p}{q} \right) \cdot \zeta^{2+2q+2p}, \end{aligned}$$

o que implica (2.38).

Agora provaremos as propriedades para os símbolos de Jacobi. (2.43) é consequência direta da definição desse símbolo e (2.40) segue de (2.27). Para provar (2.41) e (2.42), estudaremos o símbolo de Jacobi  $\left( \frac{n}{m} \right)$  para  $m > 0$  ímpar e  $n$  par através da decomposição  $n = 2^k \nu s$ , em que  $s = \text{sign}(n)$ ,  $2^k \geq 2$  é a parte par e  $\nu$  é a parte ímpar.

Usando (2.28), (2.29), (2.30) e (2.31), temos

$$\left( \frac{n}{m} \right) = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}k + \frac{m-1}{2} \frac{1-s}{2} + \frac{\nu-1}{2} \frac{m-1}{2}} \cdot \left( \frac{m}{\nu} \right).$$

Se  $m - 2n > 0$ , temos

$$\begin{aligned} \left( \frac{n}{m-2n} \right) &= (-1)^{\frac{(m-2n)^2-1}{8}k + \frac{m-2n-1}{2} \frac{1-s}{2} + \frac{\nu-1}{2} \frac{m-2n-1}{2}} \cdot \left( \frac{m-2n}{\nu} \right) \\ &= (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \left( \frac{n}{m} \right), \end{aligned}$$

o que implica (2.41), com  $m = q$ ,  $n = -p$ . Já se  $m - 2n < 0$ , precisamos ter  $n > 0$  (ou seja,  $s = 1$ ) e encontramos

$$\begin{aligned} \left( \frac{-n}{-m+2n} \right) &= (-1)^{\frac{(-m+2n)^2-1}{8}k + \frac{-m+2n-1}{2} \frac{1+s}{2} + \frac{\nu-1}{2} \left( \frac{-m+2n-1}{2} + 1 \right)} \cdot \left( \frac{m-2n}{\nu} \right) \\ &= (-1)^{\frac{n}{2} + \frac{-m-1}{2}} \cdot \left( \frac{n}{m} \right), \end{aligned}$$

o que implica (2.41), com  $m = q$ ,  $n = -p$ . □

Usando (2.29) e (2.30) novamente, podemos sintetizar os valores de  $m = m \left( \frac{p}{q} \right) \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$  de acordo com as regras práticas

Se  $q \in 4\mathbb{Z} + 1$ , então:  $m \equiv 1$  se  $\left(\frac{p/2}{q}\right) = 1$ ,  $m \equiv 5$  se  $\left(\frac{p/2}{q}\right) = -1$ .

Se  $q \in 4\mathbb{Z} + 3$ , então:  $m \equiv 3$  se  $\left(\frac{p/2}{q}\right) = 1$ ,  $m \equiv 7$  se  $\left(\frac{p/2}{q}\right) = -1$ .

Se  $p \in 4\mathbb{Z} + 1$ , então:  $m \equiv 2$  se  $\left(\frac{q/2}{|p|}\right) = 1$ ,  $m \equiv 6$  se  $\left(\frac{q/2}{|p|}\right) = -1$ .

Se  $p \in 4\mathbb{Z} + 3$ , então:  $m \equiv 0$  se  $\left(\frac{q/2}{|p|}\right) = 1$ ,  $m \equiv 4$  se  $\left(\frac{q/2}{|p|}\right) = -1$ .

# Capítulo 3

## Estudo dos pontos racionais

### 3.1 A primitiva da função $\theta$

Após a descrição das autossimilaridades da função  $\theta$ , agora vamos estudar a função que é o foco deste trabalho:

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi i} e^{n^2 \pi i x}. \quad (3.1)$$

Note que essa série converge uniformemente em  $\overline{\mathcal{H}} = \{x \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(x) \geq 0\}$ , por ser limitada por  $\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . A série  $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  é convergente, como pode

ser facilmente verificado por comparação com  $1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt = 2$ . De fato, temos

$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ . A prova original desse fato, devida a Euler, utilizava uma fatoração da função inteira  $\text{sen}(x)$  em termos de suas raízes

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen}(x)}{x} &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{3\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{3\pi}\right) \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{(2\pi)^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{(3\pi)^2}\right) \cdots \end{aligned} \quad (3.2)$$

Uma prova rigorosa dessa fórmula só foi obtida um século depois, com o teorema de fatoração de Weierstrass. Partindo dessa fatoração, o resultado segue pela comparação do coeficiente do termo em  $x^2$  do lado esquerdo e do lado direito de (3.2), que nos dá  $-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{(2\pi)^2} - \frac{1}{(3\pi)^2} - \cdots$ .

Pela convergência uniforme de (3.1), já sabemos que  $\phi$  é uma função contínua. Na verdade, ela satisfaz uma propriedade um pouco mais forte, que provaremos a seguir.

**Definição 3.1.1.** Sendo  $k \geq 0$  inteiro e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , com  $0 < \alpha < 1$ ,  $C^{k,\alpha}(\mathbb{R})$  é o espaço de funções de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{C}$  que são  $k$  vezes diferenciáveis e cuja  $k$ -ésima derivada  $h$  satisfaz a estimativa de Hölder

$$|h(x) - h(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \quad (3.3)$$

para alguma constante  $C \geq 0$ .

**Lema 3.1.2.** Temos  $\phi \in C^{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ , ou seja, existe uma constante  $C$  tal que

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq C|x - y|^{\frac{1}{2}}, \quad (3.4)$$

para todos  $x, y \in \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Se  $|x - y| \geq 1$ , simplesmente usamos que  $|\phi(x)| \leq \frac{1}{\pi}\zeta(2) = \frac{\pi}{6}$  para ver que  $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3}|x - y|^{\frac{1}{2}}$ .

Já se  $|x - y| < 1$ , escrevemos  $\phi(x) = A_N(x) + B_N(x)$ , com

$$A_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2\pi i} e^{n^2\pi i x}, \quad B_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi i} e^{n^2\pi i x}.$$

Assim, podemos estimar o final da série  $B_N(x)$  como

$$|B_N(x)| \leq \frac{1}{\pi} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{\pi} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{N\pi}.$$

Já para os primeiros termos da série, usamos  $\left| \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{n^2\pi i} e^{n^2\pi i x} \right) \right| = |e^{n^2\pi i x}| \leq 1$  para mostrar que  $|A_N(x) - A_N(y)| \leq N|x - y|$ . Combinando as duas estimativas, temos

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq N|x - y| + \frac{2}{N\pi}.$$

Se permitirmos  $N \in \mathbb{R}$ , o lado direito da desigualdade assume valor mínimo  $2 \left( \frac{2|x - y|}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}$  quando  $N$  vale  $N_0 = \left( \frac{2}{\pi|x - y|} \right)^{\frac{1}{2}}$ . Escolhendo  $N = \lceil N_0 \rceil$ , conseguimos  $|\phi(x) - \phi(y)| \leq 2 \left( \frac{2|x - y|}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} + |x - y| \leq \left( 2 \left( \frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right) |x - y|^{\frac{1}{2}}$ . □



## 3.2 Estudo dos racionais da forma par/ímpar e ímpar/par

Agora vamos finalmente descrever a autossimilaridade da função  $\phi$  para transformações  $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta$ .

**Teorema 3.2.1.** *Seja  $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta$  com pólo em  $r = \frac{p}{q}$ , com  $q > 0$ ,  $\text{mdc}(p,q) = 1$  e seja  $m = m(r)$ . Então a função  $\phi$  satisfaz*

$$\phi(x) = \phi(r) + e^{i\frac{\pi}{4}m} \cdot q^{-\frac{1}{2}} \cdot (x-r)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(x-r) + e^{i\frac{\pi}{4}m} \cdot q^{\frac{3}{2}} \cdot (x-r)^{\frac{3}{2}} \cdot \phi(\gamma(x)) + \psi(x), \quad (3.5)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Aqui, a função  $\psi(x) = \psi_r(x)$  depende apenas do pólo  $r$ . Ela satisfaz  $\psi(r) = 0$  e é diferenciável, com derivada

$$\psi'(x) = -\frac{3}{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}m} \cdot q^{\frac{3}{2}} \cdot (x-r)^{\frac{1}{2}} \cdot \phi(\gamma(x)).$$

*Demonstração.* Os termos da série (3.1) que define  $\phi$  são primitivas dos termos da série (1.5) que define  $\theta$ . A diferença é que a primeira é somada para inteiros positivos, enquanto que a segunda é somada para todos os inteiros. Assim, essas funções satisfazem a relação

$$\phi'(x) = \frac{\theta(x) - 1}{2}. \quad (3.6)$$

Usando a autossimilaridade (2.1) da função  $\theta$ , obtemos

$$\phi'(x) = \frac{1}{2} \cdot \theta(\gamma(x)) \cdot \mu_\gamma(x) - \frac{1}{2} = \phi'(\gamma(x)) \cdot \mu_\gamma(x) + \frac{1}{2} \cdot \mu_\gamma(x) - \frac{1}{2}.$$

Integrando de  $\xi$  a  $x$ , com  $\xi, x \in \mathcal{H}$  e usando integração por partes, temos

$$\begin{aligned} \phi(y)|_{y=\xi}^{y=x} &= \phi(\gamma(y)) \cdot \frac{\mu_\gamma(y)}{\gamma'(y)} \Big|_{y=\xi}^{y=x} - \int_{\xi}^x \phi(\gamma(y)) \cdot \frac{d}{dy} \left( \frac{\mu_\gamma(y)}{\gamma'(y)} \right) dy \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\xi}^x \mu_\gamma(y) dy - \frac{1}{2}(x - \xi). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Mas, a partir de (2.4) e (2.12), temos

$$\frac{1}{2} \int_{\xi}^x \mu_\gamma(y) dy = e^{i\frac{\pi}{4}m} \cdot q^{-\frac{1}{2}} \cdot (y-r)^{\frac{1}{2}} \Big|_{y=\xi}^{y=x},$$

$$\frac{\mu_\gamma(y)}{\gamma'(y)} = e^{i\frac{\pi}{4}m} \cdot q^{\frac{3}{2}} \cdot (y-r)^{\frac{3}{2}},$$

o que nos mostra que podemos estender (3.7) continuamente para  $\xi$  e  $x$  tendendo ao eixo real. Tomando o limite quando  $\xi \rightarrow r$  em (3.7), obtemos (3.5) com

$$\psi(x) = -\frac{3}{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}m} \cdot q^{\frac{3}{2}} \cdot \int_r^x \phi(\gamma(y)) \cdot (y-r)^{\frac{1}{2}} dy.$$

Para provar que  $\psi(x)$  depende somente de  $r$ , basta ver que, se  $\gamma, \tilde{\gamma} \in \mathfrak{M}_\theta$  possuem mesmo pólo, então  $\tilde{\gamma} = \tau_2^k \circ \gamma$  para uma translação  $\tau_2^k$  de  $2k$  unidades, o que implica  $\phi(\gamma(x)) = \phi(\tilde{\gamma}(x))$ . □

Note que (3.5) nos dá uma boa descrição do comportamento assintótico de  $\phi$  nas proximidades dos pontos  $r_\gamma$  que são pólos de transformações  $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta$ . Todos os racionais  $\frac{p}{q}$  em que  $p$  e  $q$  tem paridades diferentes se enquadram nesse caso. O Lema 3.2.2 a seguir mostra os termos principais dessa expansão.

**Lema 3.2.2.** *Na notação do Teorema 3.2.1, representamos os termos principais da expansão de  $\phi$  em torno de  $r$  por*

$$\sigma_r(x) = \phi(r) + e^{i\frac{\pi}{4}m} \cdot q^{-\frac{1}{2}} \cdot (x-r)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(x-r) \quad (3.8)$$

e definimos

$$\chi_r(x) = e^{i\frac{\pi}{4}m} \cdot q^{\frac{3}{2}} \cdot (x-r)^{\frac{3}{2}} \cdot \phi(\gamma(x)). \quad (3.9)$$

Assim, temos  $\phi(x) = \sigma_r(x) + \chi_r(x) + \psi_r(x)$ , em que os termos restantes  $\chi_r(x) + \psi_r(x)$  são limitados por

$$|\phi(x) - \sigma_r(x)| = |\chi_r(x) + \psi_r(x)| \leq \frac{\pi}{3} \cdot q^{\frac{3}{2}} \cdot |x-r|^{\frac{3}{2}}. \quad (3.10)$$

*Demonstração.* Basta usar  $|\phi(x)| \leq \frac{1}{\pi} \zeta(2) = \frac{\pi}{6}$ . Assim, temos

$$|\chi_r(x)| \leq \frac{\pi}{6} \cdot q^{\frac{3}{2}} \cdot |x-r|^{\frac{3}{2}}$$

e

$$|\psi_r(x)| \leq \frac{\pi}{6} \cdot q^{\frac{3}{2}} \cdot |x-r|^{\frac{3}{2}}.$$

□

Assim, concluímos que  $\phi$  apresenta singularidades do tipo raiz quadrada em todos os racionais  $\frac{p}{q}$  tais que  $p$  e  $q$  não são ambos ímpares. Em primeiro lugar, isso já implica que  $\phi$  não é diferenciável nesses pontos. Além disso, uma outra

observação importante é que o fator  $q^{-\frac{1}{2}}$  faz com que os racionais com denominadores menores possuam singularidades mais acentuadas. Assim, os racionais mais “simples” são distinguidos facilmente nos gráficos de  $\phi$ ,  $f$  e  $g$ .

Lembramos aqui que  $\phi(x) = f(x) - ig(x)$ , sendo  $f$  e  $g$  funções reais, dadas por séries de senos e de cossenos, respectivamente. Para analisar as singularidades de  $f$  e  $g$ , precisamos tomar a parte real e a parte imaginária de (3.5), lembrando da convenção de que  $\arg(x - r) = 0$  se  $x > r$  e  $\arg(x - r) = \pi$  se  $x < r$ .

Primeiro estudamos o termo de grau  $\frac{1}{2}$  de (3.5), que vale  $e^{i\frac{\pi}{4}m} \cdot q^{-\frac{1}{2}} \cdot (x - r)^{\frac{1}{2}}$ . No caso dos racionais  $r = \frac{p}{q}$  com  $q$  ímpar e  $p$  par, temos  $m(r)$  ímpar, o que faz com que  $e^{i\frac{\pi}{4}m(r)}$  tenha a parte real e a parte imaginária valendo  $\pm 2^{-\frac{1}{2}}$ . Logo, o termo de grau  $\frac{1}{2}$  tem uma contribuição com peso  $(2q)^{-\frac{1}{2}}$  para as funções  $f$  e  $g$ , tanto à esquerda quanto à direita do ponto  $x = r$ .

Já para  $p$  ímpar e  $q$  par, temos  $m(r)$  par, o que faz com que  $e^{i\frac{\pi}{4}m(r)}$  seja real ou imaginário puro. Assim, o termo de grau  $\frac{1}{2}$  contribui para as funções  $f$  e  $g$  em apenas um dos lados do ponto  $x = r$  (esquerda ou direita), com peso  $q^{-\frac{1}{2}}$ .

Em todos os casos, o termo de grau  $\frac{1}{2}$  se apresenta em pelo menos um dos lados de  $f$  e de  $g$ . Assim,  $f$  e  $g$  não são deriváveis em nenhum dos pontos da forma  $r = \frac{p}{q}$  em que  $p$  e  $q$  tem paridades diferentes. Essas conclusões também mostram que o expoente de Hölder  $\frac{1}{2}$  para  $f$  e  $g$  não pode ser melhorado.

Já o termo de grau 1 de (3.5) vale  $-\frac{1}{2}(x - r)$ . Ele é sempre real, o que faz com que esse termo só contribua para a função  $f$  e não apareça na função  $g$ . Nas regiões laterais (à esquerda ou à direita do ponto  $x = r$ ) em que o termo de grau  $\frac{1}{2}$  não está presente, a parte principal da função  $f$  é uma reta com inclinação  $-\frac{1}{2}$ , enquanto que a parte principal de  $g$  é uma reta horizontal. Nesses casos, as funções  $f$  e  $g$  possuem derivadas laterais (à esquerda ou à direita), mas não dos dois lados.

A Tabela 3.1 mostra os gráficos de  $\phi$  (no plano complexo),  $f$  e  $g$  nas proximidades de pontos racionais  $r_\gamma$ . Note que é possível verificar todos os comportamentos citados. As funções  $f$  e  $g$  se comportam, à esquerda ou à direita do ponto  $x = r$ , como uma função do tipo raiz quadrada (positiva ou negativa) ou como uma reta (de inclinação  $-\frac{1}{2}$  para  $f$  ou 0 para  $g$ ). É possível ver que cada caso está de acordo com o esperado para os termos principais  $\sigma_r(x)$ , mostrados em (3.8).

Além disso, acima deste comportamento principal, são adicionados os termos restantes  $\chi_r(x)$  e  $\psi_r(x)$ . A função  $\psi_r(x)$  é bem suave, enquanto que a função  $\chi_r(x)$  apresenta muitos fractais, sendo a principal responsável pelas autossimilaridades de  $f$  e  $g$ .

Já os gráficos de  $\phi(x)$  para  $x$  próximo de  $r$  mostram que  $\phi(x) - \phi(r)$  possui

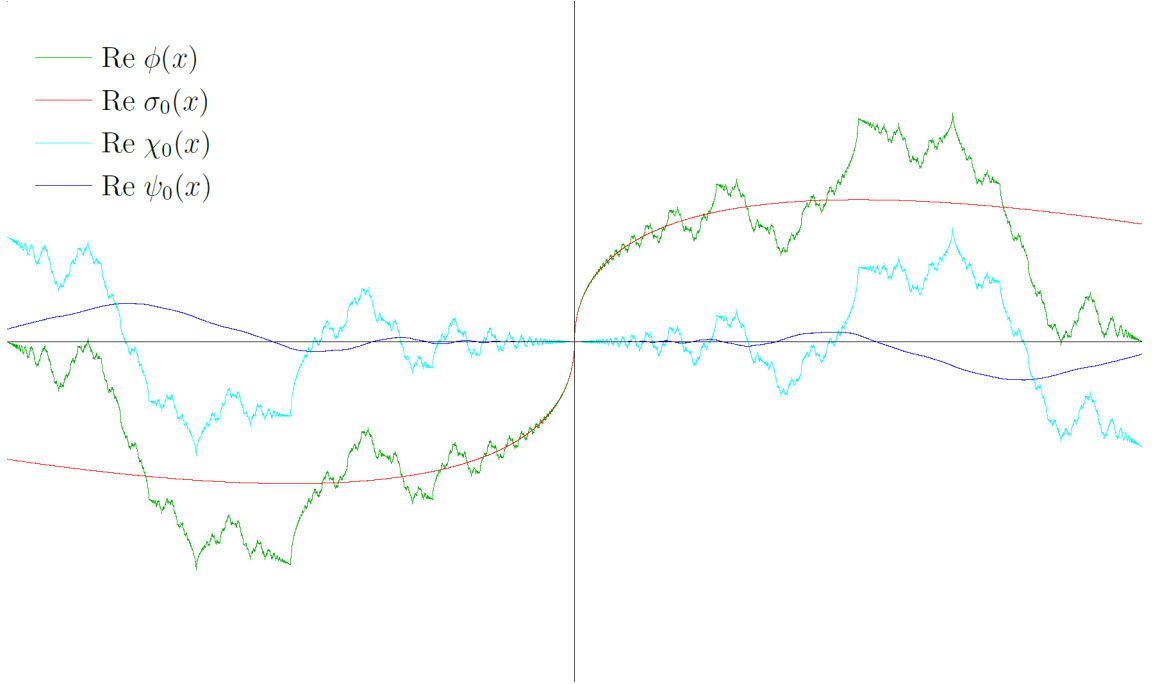


Figura 3.1: Função  $f$  e as componentes de sua expansão em torno do ponto 0.

ângulo próximo a  $\frac{\pi}{4}m$  para  $x > r$  e um ângulo próximo a  $\frac{\pi}{4}m + \frac{\pi}{2}$ , para  $x < r$ . Assim, todos os racionais  $r$  que são pólos de transformações  $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta$  se apresentam no gráfico de  $\phi$  como um desvio brusco de direção de ângulo  $\frac{\pi}{2}$  no sentido anti-horário. A curva complexa  $x \rightarrow \phi(x)$  não possui uma velocidade, já que a função  $\phi$  não é derivável em quase nenhum ponto. Mas o termo dominante de grau  $\frac{1}{2}$  em  $\phi(x)$  faz com que essa curva se aproxime de  $\phi(r)$  infinitamente rápido com uma direção bem definida quando  $x \uparrow r$  ou  $x \downarrow r$ .

As Figuras 3.1 e 3.2 mostram os componentes  $\sigma_r$ ,  $\chi_r$  e  $\psi_r$  que compõem as funções  $f$  e  $g$  expandidos em torno do racional  $r = 0$ . A seguir, as Figuras 3.3 e 3.4 trazem os gráficos análogos, para a expansão em torno do ponto  $r = \frac{1}{2}$ .

Note que a função  $\psi_r$  é suave (de fato, ela possui uma derivada contínua) e ela decai rapidamente para 0 nas proximidades do ponto  $x = r$ . Mais adiante, provaremos que ela é uma função de ordem

$$\psi_r(x) = O\left(|x - r|^{\frac{5}{2}}\right), \text{ quando } x \rightarrow r.$$

A componente principal  $\sigma_r(x)$  também é suave. De fato, ela é  $C^\infty(\mathbb{R})$  em todos os pontos, exceto  $x = r$ . Já a função  $\chi_r(x)$  apresenta um comportamento fractal, sendo responsável pela autossimilaridade de  $\phi$ .

A partir de (3.9), vemos que a função  $\phi$  apresenta uma cópia de si mesma, com

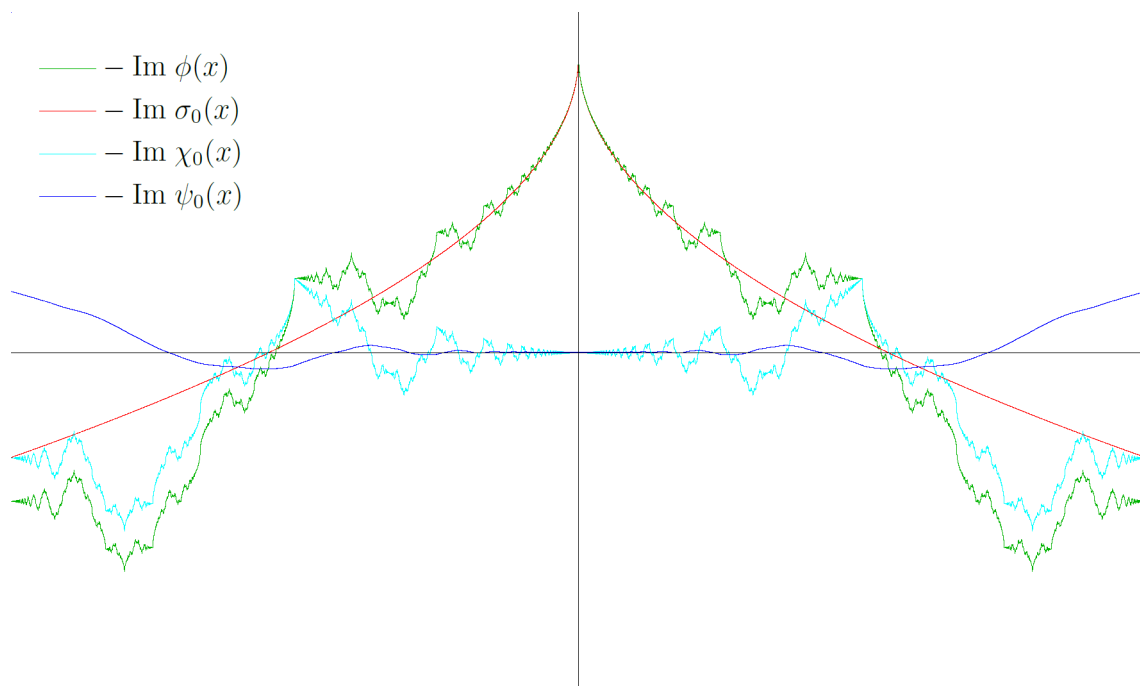


Figura 3.2: Função  $g$  e as componentes de sua expansão em torno do ponto 0.

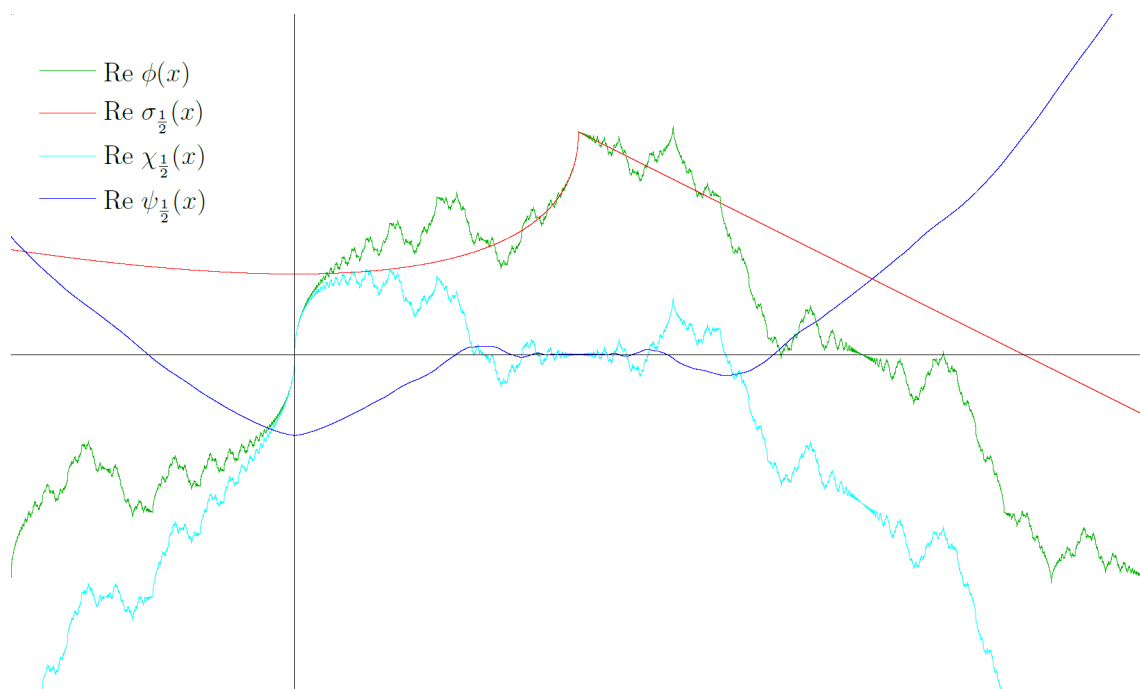
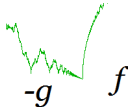
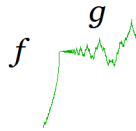

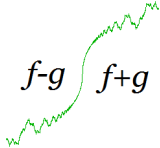
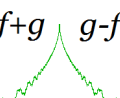
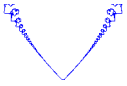
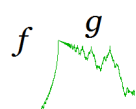
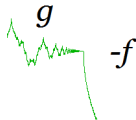

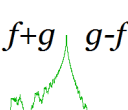
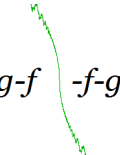


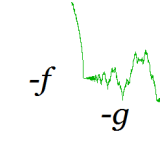

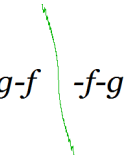
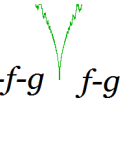

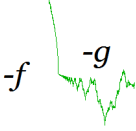


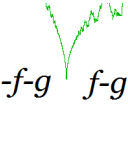
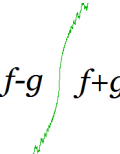
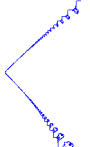


Figura 3.3: Função  $f$  e as componentes de sua expansão em torno do ponto  $\frac{1}{2}$ .

Tabela 3.1: Classificação das singularidades pelo expoente  $m(r)$ 

$m \pmod 8$	$r = \frac{p}{q}$	Ex.	$f(x)$	$g(x)$	$\phi(x)$
0	$p \in 4\mathbb{Z} + 3, \left(\frac{q/2}{ p }\right) = 1$	$-\frac{1}{2}$			
1	$q \in 4\mathbb{Z} + 1, \left(\frac{p/2}{q}\right) = 1$	$\frac{0}{1}$			
2	$p \in 4\mathbb{Z} + 1, \left(\frac{q/2}{ p }\right) = 1$	$\frac{1}{2}$			
3	$q \in 4\mathbb{Z} + 3, \left(\frac{p/2}{q}\right) = 1$	$\frac{2}{3}$			
4	$p \in 4\mathbb{Z} + 3, \left(\frac{q/2}{ p }\right) = -1$	$\frac{3}{4}$			
5	$q \in 4\mathbb{Z} + 1, \left(\frac{p/2}{q}\right) = -1$	$\frac{4}{5}$			
6	$p \in 4\mathbb{Z} + 1, \left(\frac{q/2}{ p }\right) = -1$	$-\frac{3}{4}$			
7	$q \in 4\mathbb{Z} + 3, \left(\frac{p/2}{q}\right) = -1$	$-\frac{2}{3}$			

a variável transformada pela função  $\gamma$ . Como  $\gamma(r) = \infty$  e  $\phi$  é periódica de período 2, vários períodos de  $\phi$  são representados pela função  $\chi_r(x)$ , nas proximidades do ponto  $x = r$ . Por exemplo, considerando a transformação  $\gamma(x) = \frac{-1}{x}$  de

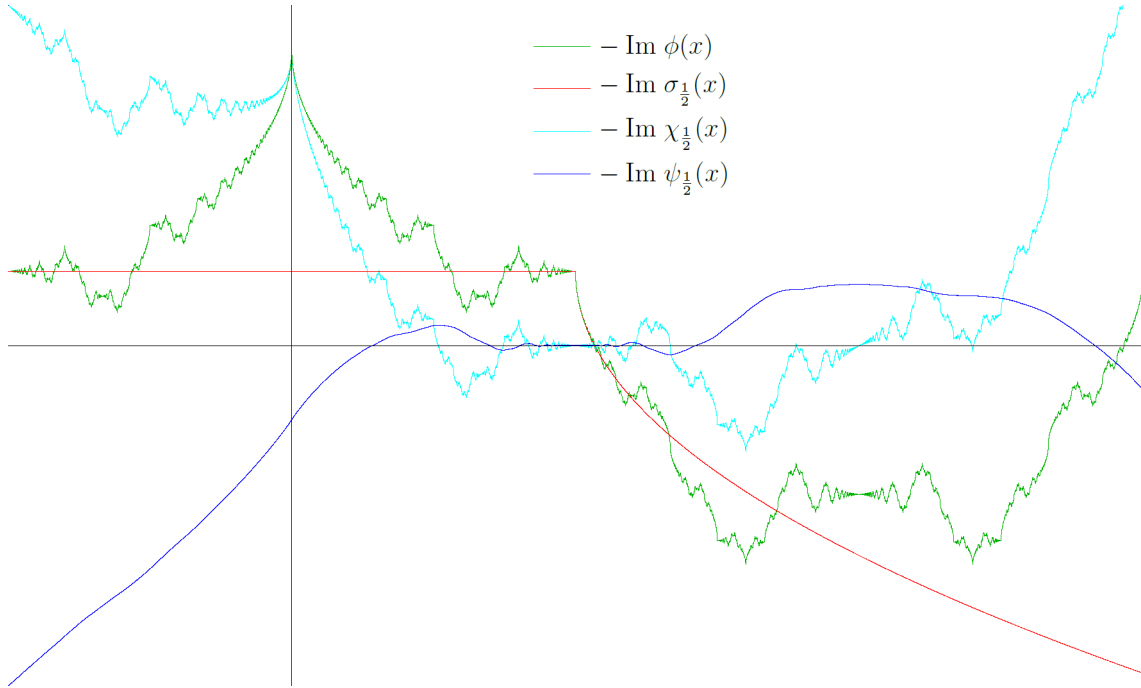


Figura 3.4: Função  $g$  e as componentes de sua expansão em torno do ponto  $\frac{1}{2}$ .

pólo  $r = 0$ , cada período entre  $2n$  e  $2n + 2$  aparece representado no intervalo  $\left[-\frac{1}{2n}, -\frac{1}{2n+2}\right]$ . Assim, o mesmo padrão aparece infinitas vezes em sequência, à medida que a distância ao ponto  $x = r$  vai decaindo de forma inversamente proporcional a  $n$ . A magnitude desses padrões decai proporcionalmente a  $|x - r|^{\frac{3}{2}}$ , mostrando que o grau  $\frac{3}{2}$  do Lema 3.2.2 não pode ser melhorado.

Quando tomamos a parte real e a parte imaginária de (3.9), percebemos que os fractais presentes à esquerda ou à direita do ponto  $x = r$  nas funções  $f$  e  $g$  correspondem aos gráficos das funções  $\pm f$ ,  $\pm g$ , ou  $\pm f \pm g$ , dependendo do valor de  $m$ . Lembrando a convenção de que  $\arg(x - r) = 0$  se  $x > r$  e  $\arg(x - r) = \pi$  se  $x < r$ , determinamos qual função aparece em cada caso. Essas observações são mostradas na Tabela 3.1, por meio das expressões escritas sobre os gráficos de  $f$  e  $g$ .

Por exemplo, a função  $f$  à esquerda do ponto  $r = \frac{1}{2}$  apresenta um fractal com o gráfico da função  $f$ , enquanto que à direita desse ponto apresenta um fractal com o gráfico da função  $g$ . A Figura 3.5 mostra a função  $f$  nas proximidades do ponto  $x = \frac{1}{2}$ . Podemos ver à esquerda do ponto  $x = \frac{1}{2}$  o padrão da Figura 3.6 e à direita o padrão da Figura 3.7.

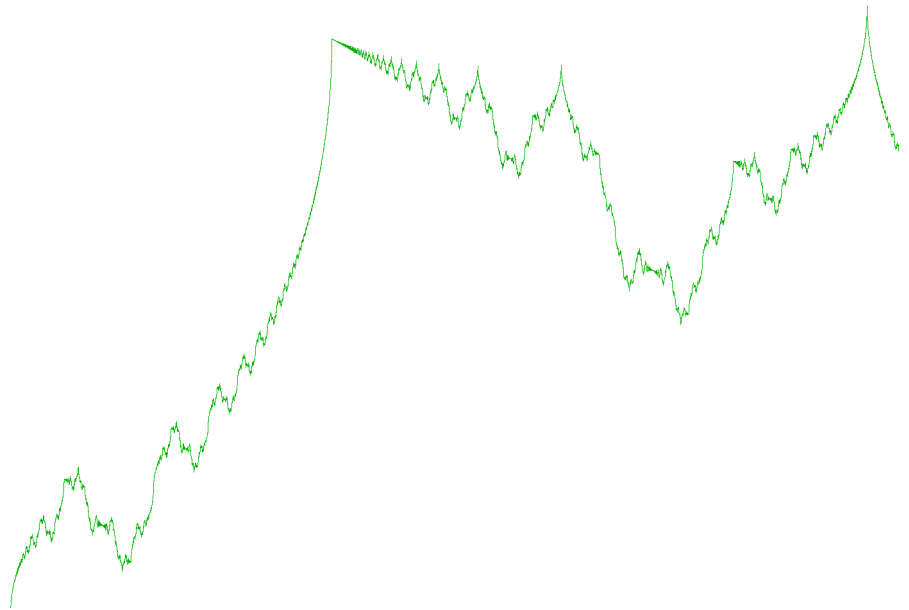


Figura 3.5: Gráfico de  $f$  em uma vizinhança de  $x = \frac{1}{2}$ .

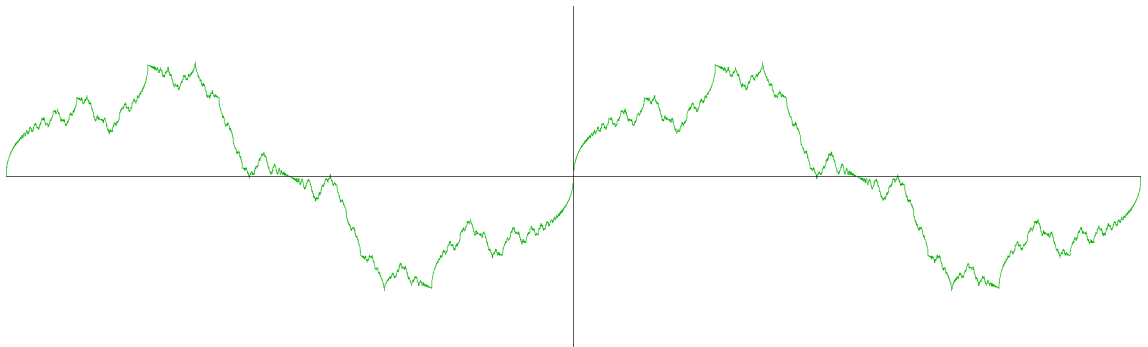


Figura 3.6: Gráfico de  $f$  (2 períodos).

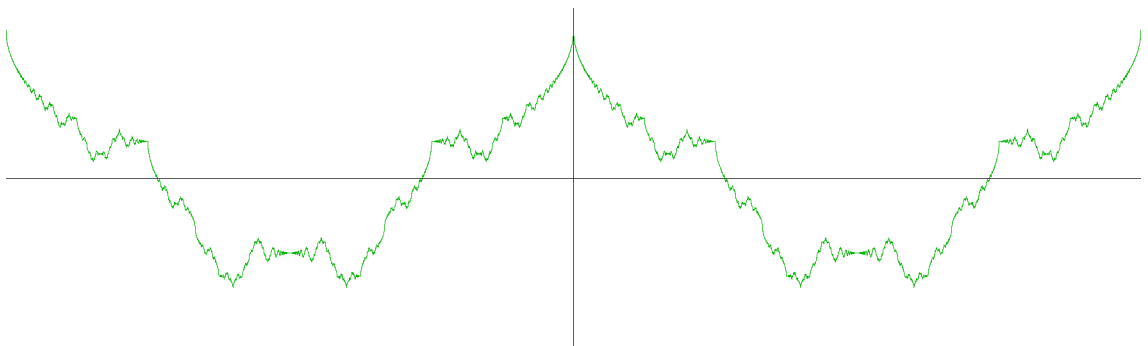


Figura 3.7: Gráfico de  $g$  (2 períodos).



### 3.3 Estudo dos racionais da forma ímpar/ímpar

Agora que já descrevemos o comportamento de  $\phi$ ,  $f$  e  $g$  nas proximidades dos pontos racionais  $r = \frac{p}{q}$  em que  $p$  e  $q$  tem paridades diferentes, vamos analisar o caso dos racionais com  $p$  e  $q$  ímpares.

**Teorema 3.3.1.** *Seja  $s = \frac{p}{q}$ , com  $p$  e  $q$  ímpares. Então, denotando  $r = s - 1 = \frac{p-q}{q}$ , temos  $m = m(r) = m(4r)$ . Seja  $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta$  tal que  $\gamma(4r) = \infty$ . Definindo  $\tilde{\gamma}(x) = 4\gamma(4x)$ , temos  $\tilde{\gamma} \in \mathfrak{M}_\theta$  e  $\tilde{\gamma}(r) = \infty$ .*

*Definindo a função  $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  por*

$$\varphi(x) = 4\phi\left(\frac{1}{4}x\right) - \phi(x), \quad (3.11)$$

*temos*

$$\phi(y) = \phi(s) - \frac{1}{2}(y-s) + e^{i\frac{\pi}{4}m} \cdot q^{\frac{3}{2}} \cdot (y-s)^{\frac{3}{2}} \cdot \varphi(\tilde{\gamma}(y-1)) + \Psi(y), \quad (3.12)$$

*sendo  $\Psi$  diferenciável, com  $\Psi(s) = 0$  e*

$$\Psi'(y) = -\frac{3}{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}m} \cdot q^{\frac{3}{2}} \cdot (y-s)^{\frac{1}{2}} \cdot \varphi(\tilde{\gamma}(y-1)).$$

*Além disso, vale a estimativa*

$$\left| \phi(y) - \phi(s) + \frac{1}{2}(y-s) \right| \leq \frac{5\pi}{3} \cdot q^{\frac{3}{2}} \cdot |y-s|^{\frac{3}{2}}, \quad (3.13)$$

*o que prova que  $\phi(y)$  é derivável em  $y = s$ , com derivada  $-\frac{1}{2}$ .*

*Demonstração.* Começamos observando que  $m(r)$  e  $m(4r)$  satisfazem (2.33). Usando (2.28), é fácil ver que  $m(r) = m(4r)$  segue de  $\left(\frac{2}{q}\right)^2 = 1$ .

Como  $\gamma$  tem pólo  $\frac{4(p-q)}{q}$ , ela é uma função da forma  $\gamma(x) = \frac{ax+b}{qx-4(p-q)}$ .

Assim, a transformação  $\tilde{\gamma}(x) = \frac{4ax+b}{qx-(p-q)}$  é tal que  $\tilde{\gamma} \in \mathfrak{M}$  e também satisfaz as condições do Teorema 1.3.4, que implicam  $\tilde{\gamma} \in \mathfrak{M}_\theta$ .

Para provar (3.12), vamos usar uma fórmula para  $\phi(x+1)$ . A partir da definição (3.1) da função  $\phi$ , com a notação  $t_n(x) = \frac{1}{n^2\pi i} e^{n^2\pi i x}$ , temos

$$\begin{aligned} \phi(x+1) &= \sum_{k=1}^{\infty} t_{2k}(x) - \sum_{k=1}^{\infty} t_{2k-1}(x) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} t_{2k}(x) - \sum_{n=1}^{\infty} t_n(x) = \frac{1}{2}\phi(4x) - \phi(x). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Assim, denotando  $y = x + 1$ , podemos obter a expansão de  $\phi(y)$  em torno de  $s$  utilizando a expansão de  $\phi(4x)$  em torno de  $4r$  e de  $\phi(x)$  em torno de  $r$ . Para tanto, utilizamos (3.5) com as transformações  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$ , respectivamente. Precisamos calcular

$$\begin{aligned}\phi(x + 1) &= \frac{1}{2}\phi(4x) - \phi(x) \\ &= \frac{1}{2}\sigma_{4r}(4x) - \sigma_r(x) + \frac{1}{2}\chi_{4r}(4x) - \chi_r(x) + \frac{1}{2}\psi_{4r}(4x) - \psi_r(x).\end{aligned}$$

Mas temos

$$\frac{1}{2}\sigma_{4r}(4x) - \sigma_r(x) = \frac{1}{2}\phi(4r) - \phi(r) - \frac{1}{2}(x - r) = \phi(r + 1) - \frac{1}{2}(x - r), \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\chi_{4r}(4x) - \chi_r(x) &= e^{i\frac{\pi}{4}m} \cdot q^{\frac{3}{2}} \cdot (x - r)^{\frac{3}{2}} \cdot [4\phi(\gamma(4x)) - \phi(\tilde{\gamma}(x))] \\ &= e^{i\frac{\pi}{4}m} \cdot q^{\frac{3}{2}} \cdot (x - r)^{\frac{3}{2}} \cdot \varphi(\tilde{\gamma}(x)),\end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2}\psi_{4r}(4x) - \psi_r(x) \right) &= 2\psi'_{4r}(4x) - \psi'_r(x) \\ &= -\frac{3}{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}m} \cdot q^{\frac{3}{2}} \cdot (x - r)^{\frac{1}{2}} \cdot [4\phi(\gamma(4x)) - \phi(\tilde{\gamma}(x))] \\ &= -\frac{3}{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}m} \cdot q^{\frac{3}{2}} \cdot (x - r)^{\frac{1}{2}} \cdot \varphi(\tilde{\gamma}(x)).\end{aligned} \quad (3.17)$$

Juntando (3.15), (3.16) e (3.17), obtemos (3.12) com  $y = x + 1$ . Para provar (3.13), basta usar o Lema 3.2.2 para ver obter

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{2}\phi(4x) - \frac{1}{2}\sigma_{4r}(4x) - \phi(x) + \sigma_r(x) \right| &\leq \frac{\pi}{3} \cdot q^{\frac{3}{2}} \cdot \left( 4|x - r|^{\frac{3}{2}} + |x - r|^{\frac{3}{2}} \right) \\ &\leq \frac{5\pi}{3} \cdot q^{\frac{3}{2}} \cdot |x - r|^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

□

O Teorema 3.3.1 nos dá a descrição completa do comportamento de  $\phi$  nas vizinhanças de  $s = \frac{p}{q}$ , com  $p$  e  $q$  ímpares. Tomando a parte real e a parte imaginária de (3.12), podemos estender as conclusões para  $f$  e  $g$ . A componente principal de  $f$  é uma reta de inclinação  $-\frac{1}{2}$ , enquanto que a de  $g$  é uma reta horizontal. A componente  $\Psi(y)$  é uma função suave e de ordem pequena quando  $y \rightarrow s$ .

E a componente  $e^{i\frac{\pi}{4}m} \cdot q^{\frac{3}{2}} \cdot (y-s)^{\frac{3}{2}} \cdot \varphi(\tilde{\gamma}(y-1))$  é responsável pelo padrão que se repete infinitamente nas proximidades de  $y = s$ . Temos  $\varphi(\tilde{\gamma}(y-1)) = \varphi((\tilde{\gamma} \circ \tau_{-1})(y))$ , sendo  $\tau_{-1} \in \mathfrak{M}$  a translação  $\tau_{-1}(x) = x - 1$ . Como  $\tilde{\gamma}$  tem pólo em  $r$ , a transformação  $\tilde{\gamma} \circ \tau_{-1} \in \mathfrak{M}$  tem pólo em  $s$ . Assim, o gráfico da função  $\varphi$  se repete infinitamente nas proximidades de  $y = s$ . Como  $\phi$  possui período 2, a função  $\varphi$  tem período 8. Além disso,  $\varphi$  satisfaz

$$i \cdot \varphi(x) = \varphi(x+2). \quad (3.18)$$

Para provar (3.18), utilizamos a mesma idéia de (3.14). Temos

$$\begin{aligned} \phi\left(x + \frac{1}{2}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} t_{2k}(x) + i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} t_{2k-1}(x) \\ &= (1-i) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} t_{2k}(x) + i \cdot \sum_{n=1}^{\infty} t_n(x) = \frac{1-i}{4} \cdot \phi(4x) + i \cdot \phi(x). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Assim,

$$\varphi(x+2) = 4\phi\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right) - \phi(x) = (1-i) \cdot \phi(x) + 4i \cdot \phi\left(\frac{x}{4}\right) - \phi(x) = i \cdot \varphi(x).$$

O expoente  $m$  é sempre ímpar, já que  $q$  é ímpar e  $(p-q)$  é par. A Figura 3.8 mostra o gráfico de

$$\operatorname{Re}(e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \varphi(x)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 4f\left(\frac{1}{4}x\right) + 4g\left(\frac{1}{4}x\right) - f(x) - g(x) \right).$$

A partir de (3.18), é fácil ver que, para qualquer  $k \in \mathbb{Z}$ , os gráficos das funções  $\operatorname{Re}(i^k \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \varphi(x))$  e  $\operatorname{Im}(i^k \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \varphi(x))$  são todos iguais a este, a menos de uma translação horizontal.

Assim, a Figura 3.8 representa o padrão que se repete, nos gráficos de  $f$  e  $g$ , à esquerda e à direita de todos os pontos racionais da forma  $s = \frac{p}{q}$ , com  $p$  e  $q$  ímpares. Por exemplo, na Figura 3.9, esse padrão pode ser visto à esquerda e à direita do ponto 1, no gráfico da função  $f$ .

### 3.4 Integração por partes

Agora vamos demonstrar que o processo de integração por partes usado para provar (3.5) pode ser iterado repetidamente, gerando um somatório de termos de ordem cada vez menor, acrescido de um erro que é do tipo  $C^{l, \frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ , sendo  $l$  um inteiro positivo.

Para isso, usaremos as funções

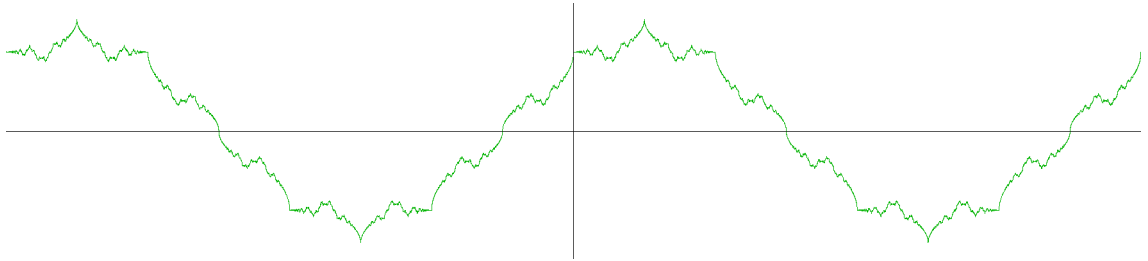


Figura 3.8: Gráfico de  $\text{Re}(e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \varphi(x))$  (2 períodos).

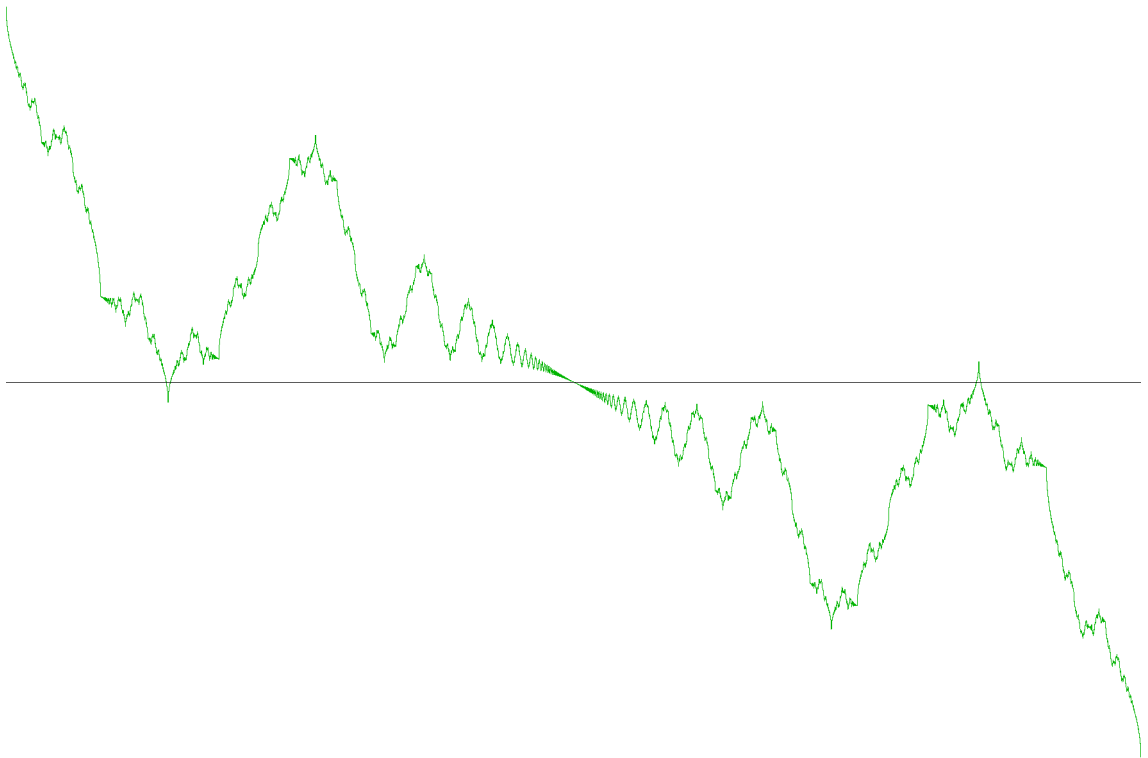


Figura 3.9: Gráfico de  $f$  em uma vizinhança de  $x = 1$ .

$$\phi_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2\pi i)^k} e^{n^2\pi i x}, \quad (3.20)$$

para inteiros positivos  $k$ . Elas estão definidas no fecho do semiplano superior  $\overline{\mathcal{H}}$  e satisfazem  $\frac{d\phi_k}{dx}(x) = \phi_{k-1}(x)$ . Como  $\phi_1 = \phi \in C^{0, \frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ , temos  $\phi_k \in C^{k-1, \frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ .

Além disso,

$$\sup_{x \in \overline{\mathcal{H}}} |\phi_k(x)| = |\phi_k(0)| = \pi^{-k} \cdot \zeta(2k),$$

sendo  $\zeta$  a função zeta de Riemann.

**Lema 3.4.1.** *Na notação do Teorema 3.2.1, temos, para qualquer inteiro positivo  $l$ ,*

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi(r) + e^{i\frac{\pi}{4}m} \cdot q^{-\frac{1}{2}} \cdot (x-r)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(x-r) \\ &+ e^{i\frac{\pi}{4}m} \cdot \sum_{k=1}^l a_k \cdot (x-r)^{k+\frac{1}{2}} \cdot \phi_k(\gamma(x)) \\ &+ e^{i\frac{\pi}{4}m} \cdot b_l \cdot \int_r^x (y-r)^{l-\frac{1}{2}} \cdot \phi_l(\gamma(y)) dy, \end{aligned} \quad (3.21)$$

com as constantes dadas por

$$\begin{aligned} a_k &= q^{2k-\frac{1}{2}} \cdot (-1)^{k-1} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} \left(j + \frac{1}{2}\right), \\ b_l &= -a_l \cdot \left(l + \frac{1}{2}\right) = \frac{a_{l+1}}{q^2}. \end{aligned}$$

*Demonstração.* O caso  $l = 1$  corresponde exatamente à equação (3.5). O lema segue por indução em  $l$ . Utilizando integração por partes e a expressão (2.12) para a derivada de  $\gamma$ , encontramos

$$\begin{aligned} &\int_r^x (y-r)^{l-\frac{1}{2}} \cdot \phi_l(\gamma(y)) dy \\ &= \int_r^x (y-r)^{l-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d\phi_{l+1}}{dy}(\gamma(y)) dy = \int_r^x q^2 \cdot (y-r)^{l+2-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dy} \phi_{l+1}(\gamma(y)) dy \\ &= q^2 \cdot (x-r)^{l+1+\frac{1}{2}} \cdot \phi_{l+1}(\gamma(x)) - \int_r^x q^2 \cdot \left(l+1+\frac{1}{2}\right) \cdot (y-r)^{l+1-\frac{1}{2}} \cdot \phi_{l+1}(\gamma(y)) dy. \end{aligned}$$

□

# Capítulo 4

## Estudo dos pontos irracionais

Nosso objetivo agora é usar as propriedades obtidas para a função  $\phi$  nas vizinhanças dos pontos racionais para estudar seu comportamento em torno dos irracionais. Por (3.5), já sabemos que  $\phi(x)$  apresenta um termo de grau  $\frac{1}{2}$  na sua expansão em torno de todos os racionais  $r = \frac{p}{q}$  tais que  $p$  e  $q$  tem paridades diferentes. Como qualquer irracional pode ser aproximado por racionais desse tipo, pode-se conjecturar que a função  $\phi$  também apresente comportamento semelhante na vizinhança dos pontos irracionais, o que implicaria que ela não é derivável nesses pontos.

Mas, para que possamos de fato provar isso, é necessário que cada irracional  $\rho$  seja bem aproximado por números racionais  $r = \frac{p}{q}$ . O termo de grau  $\frac{1}{2}$  de (3.5) possui magnitude  $q^{-\frac{1}{2}} \cdot |x - r|^{\frac{1}{2}}$ , enquanto que os termos residuais  $\chi_r(x) + \psi_r(x)$  são da ordem de  $q^{\frac{3}{2}} \cdot |x - r|^{\frac{3}{2}}$ . Queremos usar a equação (3.5) com  $|x - r|$  da ordem de grandeza de  $|\rho - r|$ , para estudar  $\phi(x)$  com  $x$  próximo a  $\rho$ . Logo, para que o comportamento de raiz quadrada não seja ocultado pelos termos residuais, é necessário que a aproximação  $\left| \frac{p}{q} - \rho \right|$  tenha ordem no máximo igual a  $\frac{1}{q^2}$ . Para conseguir aproximações com a qualidade desejada, utilizamos a representação de  $\rho$  em frações contínuas que, de fato, fornece as melhores aproximações racionais possíveis.

Para começar, vamos provar os resultados básicos sobre frações contínuas. Uma exposição mais completa pode ser encontrada em [6].

### 4.1 Frações contínuas

**Definição 4.1.1.** Para  $x \in \mathbb{R}$ , denotamos por  $\lfloor x \rfloor$  o piso de  $x$ , que é o maior inteiro tal que  $\lfloor x \rfloor \leq x$ . Dado  $x \in \mathbb{R}$ , definimos a sequência de números reais  $(\alpha_n)$

e a sequência de inteiros  $(a_n)$  recursivamente da seguinte forma:

$$\alpha_0 = x, a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor,$$

$$\text{Se } \alpha_n \notin \mathbb{Z}, \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}.$$

Se esse processo terminar com  $\alpha_m \in \mathbb{Z}$  para algum  $m$ , dizemos que  $x$  é representado pela fração contínua finita

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_m}}},$$

denotada  $[a_0; a_1, \dots, a_m]$ .

Já se o processo continuar infinitamente, dizemos que  $x$  é representado pela fração contínua infinita

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ddots}}.$$

denotada  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ .

Se utilizarmos apenas os primeiros  $n + 1$  termos da sequência  $(a_n)$ , obtemos a aproximação

$$r_n = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}} = [a_0; a_1, \dots, a_n].$$

Denotamos por  $r_n = \frac{p_n}{q_n}$  o racional  $r_n$  escrito na forma irredutível, com  $q_n > 0$ . Isso define mais duas sequências de inteiros, a dos numeradores  $(p_n)$  e a dos denominadores  $(q_n)$ .

Se a fração contínua de  $x$  for finita, é óbvio que  $x \in \mathbb{Q}$ . A recíproca é verdadeira, pois, se  $x$  é racional, todos os  $\alpha_n$  são racionais, e eles possuem denominadores cada vez menores. Assim, o processo precisa terminar com algum  $\alpha_n$  inteiro.

Temos  $x = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, \alpha_n]$ , o que sugere que  $r_n = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n]$  pode ser uma boa aproximação racional de  $x$ . O lema seguinte fornece a cota desejada para a qualidade dessa aproximação.

**Lema 4.1.2.** *Seja  $\rho \in \mathbb{R}$  um número irracional e sejam  $r_n = \frac{p_n}{q_n}$  a sequência de aproximações da fração contínua de  $\rho$ , com  $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$ ,  $q_n > 0$  e  $\text{mdc}(p_n, q_n) = 1$ . Então temos, para todo  $n$ ,*

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - \rho \right| < \frac{1}{q_n^2} \quad (4.1)$$

e

$$p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (-1)^n, \quad (4.2)$$

o que implica que  $p_{n+1}$ ,  $q_{n+1}$ ,  $p_n$ ,  $q_n$  não são todos ímpares. Assim, existe uma subsequência dessas aproximações que pertence à  $\mathfrak{M}_\theta$ -órbita de  $\infty$ .

Além disso, os racionais  $r_n$  com  $n$  par crescem monotonicamente para  $\rho$  e os  $r_n$  com  $n$  ímpar decrescem monotonicamente para  $\rho$ .

*Demonstração.* Provaremos por indução que, dada uma sequência de números reais  $(t_n)$ , com  $t_n > 0$  para  $n \geq 1$ , vale

$$[t_0; t_1, \dots, t_k] = \frac{x_k}{y_k},$$

onde as sequências  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  são definidas recursivamente por

$$\begin{aligned} x_0 &= t_0, y_0 = 1, x_1 = t_0t_1 + 1, y_1 = t_1, \\ x_{n+2} &= t_{n+2}x_{n+1} + x_n, \\ y_{n+2} &= t_{n+2}y_{n+1} + y_n. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Os casos iniciais  $k = 0$ ,  $k = 1$  e  $k = 2$  seguem de  $[t_0] = \frac{t_0}{1}$ ,  $[t_0; t_1] = \frac{t_0t_1 + 1}{t_1}$  e  $[t_0; t_1, t_2] = \frac{t_0t_1t_2 + t_0 + t_2}{t_1t_2 + 1}$ . Seja  $n \geq 2$  e suponha que a afirmação esteja provada para  $k = n$ . Para  $k = n + 1$ , temos

$$\begin{aligned} & [t_0; t_1, \dots, t_n, t_{n+1}] \\ &= \left[ t_0; t_1, \dots, t_n + \frac{1}{t_{n+1}} \right] \\ &= \frac{\left( t_n + \frac{1}{t_{n+1}} \right) x_{n-1} + x_{n-2}}{\left( t_n + \frac{1}{t_{n+1}} \right) y_{n-1} + y_{n-2}} \\ &= \frac{t_{n+1}(t_n x_{n-1} + x_{n-2}) + x_{n-1}}{t_{n+1}(t_n y_{n-1} + y_{n-2}) + y_{n-1}} \\ &= \frac{t_{n+1}x_n + x_{n-1}}{t_{n+1}y_n + y_{n-1}}. \end{aligned}$$

Mas a recursão (4.3) pode ser escrita na forma matricial como  $M_{n+1} = M_n \cdot A_{n+2}$ , sendo

$$M_n = \begin{pmatrix} x_{n+1} & x_n \\ y_{n+1} & y_n \end{pmatrix}, \quad A_n = \begin{pmatrix} t_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



Mas temos  $\det M_0 = 1$  e, para todo  $n$ , vale  $\det A_n = -1$ . Logo, concluímos que

$$\det M_n = x_{n+1}y_n - y_{n+1}x_n = (-1)^n. \quad (4.4)$$

Assim, se tomarmos a sequência  $(t_n)$  igual à sequência de inteiros  $(a_n)$  obtida para a fração contínua de  $\rho$ , segue de (4.3) que todos os termos  $x_n$  e  $y_n$  serão inteiros e  $y_n > 0$ . Além disso, teremos  $\text{mdc}(x_n, y_n) = 1$ , como pode ser visto a partir de (4.4). Assim,  $\frac{x_n}{y_n}$  é a representação em fração irredutível de  $r_n$ , o que mostra que  $p_n = x_n$  e  $q_n = y_n$ . Isso prova que (4.2) é consequência de (4.4).

Para provar (4.1), note que  $\rho = [a_0; a_1, \dots, a_n, \alpha_{n+1}]$ , o que implica

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - \rho \right| = \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} \right| = \frac{1}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})} < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}. \quad (4.5)$$

Para a última afirmação do lema, basta ver que

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1}q_n},$$

e o valor absoluto dessa expressão decresce monotonicamente para 0. Assim, para todo  $n$  ímpar, temos  $r_{n-1} < r_{n+1} < r_n$  e  $r_{n+1} < r_{n+2} < r_n$ . □

## 4.2 Pontos irracionais

Agora vamos aplicar a teoria das frações contínuas ao estudo das funções  $\phi$ ,  $f$  e  $g$  em torno dos pontos irracionais.

**Teorema 4.2.1.** *Existem constantes positivas  $\delta$ ,  $\epsilon$  tais que as afirmações seguintes valem para qualquer número  $\rho \in \mathbb{R}$  irracional. Seja  $r_{n(j)} = \frac{p_{n(j)}}{q_{n(j)}}$  a  $j$ -ésima aproximação da fração contínua de  $\rho$  que possui numerador e denominador com paridades diferentes. Essa é uma sequência infinita que converge para  $\rho$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Então existe uma sequência de pontos  $(x_j)$  tal que, para todo  $j$ ,*

$$|x_j - \rho| \leq \delta \cdot |r_{n(j)} - \rho| \quad (4.6)$$

e

$$|f(x_j) - f(\rho)| \geq \epsilon \cdot q_{n(j)}^{-\frac{1}{2}} \cdot |r_{n(j)} - \rho|^{\frac{1}{2}}, \quad (4.7)$$

o que implica

$$|f(x_j) - f(\rho)| \geq \epsilon \cdot |r_{n(j)} - \rho|^{\frac{3}{4}} \geq \frac{\epsilon}{\delta^{\frac{3}{4}}} \cdot |x_j - \rho|^{\frac{3}{4}}.$$

O mesmo resultado vale com  $f$  substituída por  $g$ . Em particular,  $f$  e  $g$  não são diferenciáveis em nenhum ponto irracional.

*Demonstração.* Sendo  $r = r_{n(j)}$ , sabemos que  $r$  pertence à  $\mathfrak{M}_\theta$ -órbita de  $\infty$ . Assim, existe  $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta$  tal que  $r = \frac{p}{q} = \gamma^{-1}(\infty)$  e podemos usar a representação do Teorema 3.2.1 para um  $x$  devidamente escolhido.

Se  $m(r)$  for par, nos restringimos a usar  $x > r$  se  $m(r) \equiv 0 \pmod{4}$  e  $x < r$  se  $m(r) \equiv 2 \pmod{4}$ . Assim, garantimos que  $x$  está do lado que apresenta o comportamento de raiz quadrada, e não do lado diferenciável de  $f$ . Se  $m(r)$  for ímpar, ambos os lados apresentam o comportamento de raiz quadrada, multiplicado por um fator  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Em qualquer caso, ainda podemos escolher uma constante positiva  $a$  livremente tal que

$$|x - r| = a \cdot |r - \rho|.$$

Então, usando as estimativas (3.10) e (4.1), temos

$$\begin{aligned} |f(x) - f(r)| &= |\operatorname{Re} \phi(x) - \operatorname{Re} \phi(r)| \\ &\geq \left| \operatorname{Re} \left( e^{i\frac{\pi}{4}m} \cdot q^{-\frac{1}{2}} \cdot (x - r)^{\frac{1}{2}} \right) \right| - \left| \frac{1}{2}(x - r) \right| - |\operatorname{Re}(\chi_r(x) + \psi_r(x))| \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot q^{-\frac{1}{2}} \cdot |x - r|^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}|x - r| - \frac{\pi}{3} \cdot q^{\frac{3}{2}} \cdot |x - r|^{\frac{3}{2}} \\ &= q^{-\frac{1}{2}} \cdot |r - \rho|^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot q^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot |r - \rho|^{\frac{1}{2}} - \frac{\pi}{3} \cdot q^2 \cdot a \cdot |r - \rho| \right) \\ &\geq q^{-\frac{1}{2}} \cdot |r - \rho|^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot q^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} - \frac{\pi}{3} \cdot a \right) \end{aligned}$$

Para termos um fator positivo do lado direito da desigualdade, precisamos ter  $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{3} \cdot a > 0$ . Escolhendo constantes  $a, b$  tais que  $0 < a < \frac{3}{\sqrt{2}\pi}$  e  $0 < b < a^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{3} \cdot a \right)$ , temos

$$|f(x) - f(r)| \geq b \cdot q^{-\frac{1}{2}} \cdot |r - \rho|^{\frac{1}{2}}$$

para todo  $q$  suficientemente grande.

Para finalizar, basta perceber que ou  $|f(r) - f(\rho)|$  ou  $|f(x) - f(\rho)|$  precisam ser maiores ou iguais a  $\frac{1}{2}|f(x) - f(r)|$ . Assim, escolhemos  $x_j = r$  ou  $x_j = x$  de forma a maximizar  $|f(x_j) - f(\rho)|$ , o que implica (4.7) com  $\epsilon = \frac{b}{2}$ . A estimativa (4.6) vale com  $\delta = 1 + a$ . A demonstração segue analogamente quando  $f$  é substituída por  $g$ .

□

### 4.3 Expoentes de Hölder

O Teorema 4.2.1 mostra que, em torno dos pontos irracionais  $\rho$ , as funções  $\phi(x)$ ,  $f(x)$  e  $g(x)$  apresentam comportamento de ordem pelo menos  $|x - \rho|^{\frac{3}{4}}$ . E em torno de alguns pontos racionais  $r$ , já vimos que elas apresentam singularidades de ordem ainda maior, do tipo  $|x - r|^{\frac{1}{2}}$ . Para estudar melhor essas propriedades, vamos analisar os expoentes de Hölder em diferentes pontos  $\rho \in \mathbb{R}$ .

**Definição 4.3.1.** *Utilizamos a notação*

$$v(x) = O(w(x)) \text{ quando } x \rightarrow \rho$$

para indicar que  $\frac{v(x)}{w(x)}$  fica limitado quando  $x \rightarrow \rho$ .

O supremo dos expoentes de Hölder no ponto  $\rho$  é denotado pela função  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\alpha(\rho) = \sup\{\alpha > 0 \mid f(x) - f(\rho) = O(|x - \rho|^\alpha) \text{ quando } x \rightarrow \rho\}.$$

O Teorema 3.3.1 prova  $\alpha(s) = 1$  quando  $s$  é o quociente de dois ímpares, pois  $f$  possui derivada não-nula nesses pontos, com um termo residual que é  $O(|x - s|^{\frac{3}{2}})$ . E o Lema 3.2.2 mostra que  $\alpha(r) = \frac{1}{2}$  quando  $r = \frac{p}{q}$ , com  $p$  e  $q$  de paridades diferentes, pois a componente principal de  $f$  possui grau  $\frac{1}{2}$  e o termo residual é  $O(|x - r|)$ .

Na verdade, o Lema 3.1.2 nos dá um resultado mais forte ao mostrar que  $\alpha(\rho) \geq \frac{1}{2}$  para todo  $\rho \in \mathbb{R}$ . Assim, os racionais  $r$  tais que  $\alpha(r) = \frac{1}{2}$  são os pontos onde a função apresenta os picos mais abruptos.

Para os irracionais  $\rho \in \mathbb{R}$ , o Teorema 4.2.1 nos dá  $\alpha(\rho) \leq \frac{3}{4}$ , ao mostrar que  $f$  não pode satisfazer a condição de Hölder com nenhum expoente maior do que  $\frac{3}{4}$ . Assim, já sabemos que  $\frac{1}{2} \leq \alpha(\rho) \leq \frac{3}{4}$  para todo  $\rho$  irracional. A seguir, vamos estudar melhor esses expoentes de Hölder dos pontos irracionais.

Como consequência do Teorema 4.2.1, temos que, se uma subsequência das aproximações  $r_n$  da fração contínua de  $\rho$  satisfaz

$$|r_n - \rho| = O(q_n^{-\kappa}) \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

para algum  $\kappa \geq 2$ , então (4.7) implica

$$|f(x_j) - f(\rho)| \geq C_0 \cdot |r_{n(j)} - \rho|^{\frac{1}{2\kappa}} \cdot |r_{n(j)} - \rho|^{\frac{1}{2}} \geq C_1 \cdot |x_j - \rho|^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\kappa}},$$

para certas constantes positivas  $C_0, C_1$ . Isso mostra que

$$\alpha(\rho) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2\kappa}, \tag{4.8}$$

já que nenhum expoente maior do que esse poderia satisfazer a condição de Hölder. Ou seja, descobrimos que se o irracional  $\rho$  for bem aproximado por racionais, seu expoente de Hölder não pode ser muito grande. O seguinte lema fornece uma estimativa na direção inversa.

**Lema 4.3.2.** *Suponha que todas as aproximações  $r_n = \frac{p_n}{q_n}$  obtidas pela fração contínua do número irracional  $\rho$  satisfazem uma estimativa da forma*

$$|r_n - \rho| \geq \epsilon \cdot q_n^{-\kappa}, \quad (4.9)$$

para constantes  $\epsilon > 0$ ,  $\kappa \geq 2$ . Então temos

$$|\phi(x) - \phi(\rho)| = O(|x - \rho|^{\frac{3}{4}(1+2\kappa-\kappa^2)}) \text{ quando } x \rightarrow \rho,$$

o que implica

$$\alpha(\rho) \geq \frac{3}{4}(1 + 2\kappa - \kappa^2). \quad (4.10)$$

*Demonstração.* A ideia da demonstração é provar  $|\phi(x) - \phi(\rho)| \leq C \cdot |x - \rho|^{\frac{3}{4}(1+2\kappa-\kappa^2)}$  para  $x$  no segmento de extremos  $r_{n-2}$  e  $r_n$ . Aqui,  $C > 0$  é uma constante que não depende de  $n$ . Se fizermos isso para todo  $n \geq 2$ , o lema estará concluído, já que esses segmentos cobrem uma vizinhança pontuada de  $\rho$ , como vimos na última afirmação do Lema 4.1.2.

Quando  $x$  está no segmento de extremos  $r_{n-2}$  e  $r_n$ , os pontos  $r_{n-2}$ ,  $x$ ,  $r_n$ ,  $\rho$  estão posicionados sobre a reta real nesta ordem, em sentido crescente ou decrescente, de forma que

$$|r_n - \rho| \leq |x - \rho| \leq |r_{n-2} - \rho| \text{ e } |x - r_n| < |x - \rho|.$$

No resto da prova, usaremos a convenção de que  $C_j > 0$  são constantes que dependem apenas de  $\kappa$  e  $\epsilon$ , mas não de  $n$ .

Usando o Lema 3.2.2 e o Teorema 3.3.1, podemos estimar a função  $\phi$  em torno dos racionais  $r_n$  para obter

$$\begin{aligned} |\phi(x) - \phi(\rho)| &\leq |\phi(x) - \phi(r_n)| + |\phi(r_n) - \phi(\rho)| \\ &\leq C_0 \cdot \left( q_n^{-\frac{1}{2}} |x - r_n|^{\frac{1}{2}} + |x - r_n| + q_n^{\frac{3}{2}} |x - r_n|^{\frac{3}{2}} \right. \\ &\quad \left. + q_n^{-\frac{1}{2}} |r_n - \rho|^{\frac{1}{2}} + |r_n - \rho| + q_n^{\frac{3}{2}} |r_n - \rho|^{\frac{3}{2}} \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Agora só precisamos limitar cada um dos seis termos do lado direito de (4.11) por  $C_1 \cdot |x - \rho|^\beta$  para algum  $\beta \geq \frac{3}{4}(1 + 2\kappa - \kappa^2)$ . Assim, garantiremos que esse termo é  $O(|x - \rho|^{\frac{3}{4}(1+2\kappa-\kappa^2)})$  quando  $x \rightarrow \rho$ .

O segundo e o quinto termo somam  $|x - \rho|$ , e temos  $1 > \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}(1 - \kappa(\kappa - 2))$  para  $\kappa \geq 2$ .

Para o sexto termo, usamos (4.1) para obter

$$q_n^{\frac{3}{2}} |r_n - \rho|^{\frac{3}{2}} \leq |r_n - \rho|^{-\frac{3}{4}} |r_n - \rho|^{\frac{3}{2}} = |r_n - \rho|^{\frac{3}{4}} \leq |x - \rho|^{\frac{3}{4}}.$$

Para o quarto termo, usamos (4.9) para obter

$$q_n^{-\frac{1}{2}} |r_n - \rho|^{\frac{1}{2}} \leq C_2 \cdot |r_n - \rho|^{\frac{1}{2\kappa}} |r_n - \rho|^{\frac{1}{2}} \leq C_2 \cdot |x - \rho|^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\kappa}}.$$

E temos  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\kappa} \geq \frac{3}{4}(1 + 2\kappa - \kappa^2)$  quando  $\kappa \geq 2$ . Para provar isso, basta ver que as duas funções coincidem quando  $\kappa = 2$  e, para  $\kappa \geq 2$ , a derivada da primeira é  $-\frac{1}{2\kappa^2} \geq -\frac{1}{8}$ , enquanto que a derivada da segunda é  $\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot \kappa \leq -\frac{3}{2}$ .

O primeiro termo é estimado de forma análoga, com

$$q_n^{-\frac{1}{2}} |x - r_n|^{\frac{1}{2}} \leq C_3 \cdot |r_n - \rho|^{\frac{1}{2\kappa}} |x - r_n|^{\frac{1}{2}} \leq C_3 \cdot |x - \rho|^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\kappa}}.$$

Agora só falta o terceiro termo. Começamos o desenvolvimento da mesma maneira que o sexto termo, obtendo

$$q_n^{\frac{3}{2}} |x - r_n|^{\frac{3}{2}} \leq |r_n - \rho|^{-\frac{3}{4}} |x - r_n|^{\frac{3}{2}} \leq |r_n - \rho|^{-\frac{3}{4}} |x - \rho|^{\frac{3}{2}}. \quad (4.12)$$

Para continuar, precisamos de uma estimativa que mostre que  $|r_n - \rho|$  não é muito menor que  $|x - \rho|$ . Para tanto, usaremos que  $|x - \rho| \leq |r_{n-2} - \rho|$ . Note que, a partir de (4.5) e (4.9), temos

$$|r_{n-1} - \rho| \leq \frac{1}{q_{n-1}q_n} \leq C_4 \cdot |r_{n-1} - \rho|^{\frac{1}{\kappa}} |r_n - \rho|^{\frac{1}{\kappa}},$$

o que implica

$$|r_{n-1} - \rho| \leq C_5 \cdot |r_n - \rho|^{\frac{1}{1-\frac{1}{\kappa}}} = C_5 \cdot |r_n - \rho|^{\frac{1}{\kappa-1}}.$$

Combinando esse resultado com a mesma estimativa obtida quando  $n$  é trocado por  $n - 1$ , obtemos

$$|x - \rho| \leq |r_{n-2} - \rho| \leq C_6 \cdot |r_n - \rho|^{\frac{1}{(\kappa-1)^2}}.$$

Inserindo esse resultado em (4.12), encontramos a estimativa desejada

$$q_n^{\frac{3}{2}} |x - r_n|^{\frac{3}{2}} \leq C_7 \cdot |x - \rho|^{-\frac{3}{4}(\kappa-1)^2} |x - \rho|^{\frac{3}{2}} = C_7 \cdot |x - \rho|^{\frac{3}{4}(1+2\kappa-\kappa^2)}.$$

□

O seguinte corolário mostra que a estimativa (4.8) é ótima quando  $\kappa = 2$ .

**Corolário 4.3.3.** *Se os coeficientes  $(a_n)$  da fração contínua de  $\rho$  formam uma sequência limitada, então*

$$\phi(x) - \phi(\rho) = O(|x - \rho|^{\frac{3}{4}}) \text{ quando } x \rightarrow \rho,$$

o que, juntamente com o Teorema 4.2.1, prova que  $\alpha(\rho) = \frac{3}{4}$ .

*Demonstração.* A partir de (4.5), podemos ver que o fato de os  $(a_n)$  serem limitados implica (4.9) com  $\kappa = 2$ .  $\square$

Para  $\kappa > 2$ , existe um intervalo entre as estimativas (4.8) e (4.10). De fato, para  $\kappa \geq 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ , percebemos que (4.10) já não consegue fornecer nenhuma melhora sobre a estimativa do Lema 3.1.2. No entanto, o Lema 4.3.2 já é suficiente para provar que, para quase todo  $\rho$ , a função  $\phi(x) - \phi(\rho)$  pode ser cotada por  $|x - \rho|^\beta$  para todo  $\beta < \frac{3}{4}$ . Esse fato será demonstrado a seguir.

**Corolário 4.3.4.** *Para quase todo  $\rho \in \mathbb{R}$ , vale  $\alpha(\rho) = \frac{3}{4}$ .*

*Demonstração.* Como  $\phi$ , é periódica, podemos enxergar o problema módulo 2, com  $\rho \in \mathbb{R}/2\mathbb{Z}$ . Seja  $F$  o conjunto de todos os pontos  $\rho \in \mathbb{R}/2\mathbb{Z}$  que são muito bem aproximados por racionais, no sentido seguinte. Existe  $\kappa > 2$  tal que, para todo  $\epsilon > 0$ , podem ser encontrados inteiros  $p$  e  $q$ , com  $q > 0$ , tais que

$$\left| \rho - \frac{p}{q} \right| < \epsilon \cdot q^{-\kappa}. \quad (4.13)$$

Provaremos que  $F$  é um conjunto de medida nula. Primeiramente, fixe os valores de  $q > 0$ ,  $\epsilon > 0$  e  $\kappa > 2$  e considere o conjunto  $F_{q,\epsilon,\kappa}$  dos pontos  $\rho \in \mathbb{R}/2\mathbb{Z}$  para os quais existe um inteiro  $p$  tal que vale (4.13). Obviamente, esse conjunto está contido na união de  $2q$  intervalos de raio  $\epsilon \cdot q^{-\kappa}$ , logo sua medida é limitada por

$$\mu(F_{q,\epsilon,\kappa}) \leq 2q \cdot 2\epsilon \cdot q^{-\kappa} = 4\epsilon \cdot q^{1-\kappa}.$$

Agora mantenha  $\epsilon > 0$  e  $\kappa > 2$  fixos e considere o conjunto  $F_{\epsilon,\kappa}$  dos pontos  $\rho \in \mathbb{R}/2\mathbb{Z}$  para os quais existem inteiros  $p$  e  $q$  com  $q > 0$  tais que vale (4.13). Sua medida é limitada por

$$\mu(F_{\epsilon,\kappa}) = \mu \left( \bigcup_{q>0} F_{q,\epsilon,\kappa} \right) \leq 4\epsilon \cdot \sum_{q=1}^{\infty} q^{1-\kappa} = 4\epsilon \cdot \zeta(\kappa - 1).$$

Agora deixe  $\kappa > 2$  fixo e considere o conjunto  $F_\kappa$  dos pontos  $\rho \in \mathbb{R}/2\mathbb{Z}$  tais que para todo  $\epsilon > 0$  existem inteiros  $p, q$  com  $q > 0$  tais que vale (4.13). Temos  $F_\kappa = \bigcap_{\epsilon>0} F_{\epsilon,\kappa}$ , o que nos mostra imediatamente que  $\mu(F_\kappa) = 0$ .

Mas note que sempre que  $2 < \kappa_1 \leq \kappa_2$ , temos  $F_{\kappa_1} \supseteq F_{\kappa_2}$ . Assim,

$$F = \bigcup_{\kappa > 2} F_{\kappa} = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_{(2+\frac{1}{2^n})},$$

o que mostra que  $F$  tem medida nula por ser uma união enumerável de conjuntos de medida nula.

Logo, para quase todo  $\rho \in \mathbb{R}/2\mathbb{Z}$ , temos  $\rho \notin F$ . E se  $\rho \notin F$ , sabemos que para todo  $\kappa > 2$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que vale a estimativa (4.9). Assim, temos (4.10) para todo  $\kappa > 2$ , o que implica  $\alpha(\rho) \geq \frac{3}{4}$ . Como já tínhamos obtido a desigualdade inversa pelo Teorema 4.2.1, concluímos que  $\alpha(\rho) = \frac{3}{4}$ .  $\square$

# Capítulo 5

## Estudo dos pontos fixos

No Teorema 3.2.1, vimos que, em torno de racionais  $r = \frac{p}{q}$  com  $p$  e  $q$  de paridades diferentes, a função  $\phi(x)$  apresenta um comportamento similar a  $\phi(\gamma(x))$ , sendo  $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta$  uma transformação que tem pólo em  $r$ . Analogamente, no Teorema 3.3.1, mostramos que, em torno de pontos racionais  $s = \frac{p}{q}$  em que  $p$  e  $q$  são ímpares, a função  $\phi(x)$  é similar a  $\varphi((\tilde{\gamma} \circ \tau_{-1})(x))$ , sendo  $\tilde{\gamma} \circ \tau_{-1} \in \mathfrak{M}$  uma transformação com pólo em  $s$ .

Mostraremos que as autossimilaridades em torno de  $\rho \in \mathbb{R}$  podem ser estudadas sob um outro ponto de vista, considerando-se transformações  $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta$  não triviais tais que  $\gamma(\rho) = \rho$ . Quando  $\rho$  é racional, encontraremos de volta os padrões já descritos. E, para certos valores irracionais de  $\rho$ , descobriremos outros tipos de autossimilaridades.

### 5.1 Pontos fixos racionais

**Lema 5.1.1.** *Utilizamos aqui a notação  $\tau_b(x) = x+b$  para translação de um inteiro  $b$ .*

*Seja  $\rho = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ . Se  $p$  e  $q$  tem paridades diferentes, então existe  $\delta \in \mathfrak{M}_\theta$  tal que  $\delta(\rho) = \infty$ . Com isso, o elemento  $\gamma = \delta^{-1} \circ \tau_2 \circ \delta \in \mathfrak{M}_\theta$  fixa  $\rho$ . E qualquer elemento de  $\mathfrak{M}_\theta$  que fixa  $\rho$  tem que ser da forma  $\gamma^k$ , para certo  $k \in \mathbb{Z}$ .*

*Suponha agora  $\rho = \frac{p}{q}$  com  $p$  e  $q$  ímpares. Então existe  $\epsilon \in \mathfrak{M}$  tal que  $\epsilon(\rho) = \infty$  e a matriz de  $\epsilon$  é da forma  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  quando vista módulo 2. Para esse  $\epsilon$ , o elemento  $\gamma = \epsilon^{-1} \circ \tau_1 \circ \epsilon \in \mathfrak{M}_\theta$  fixa  $\rho$ . E qualquer elemento de  $\mathfrak{M}_\theta$  que fixa  $\rho$  tem que ser da forma  $\gamma^k$ , para certo  $k \in \mathbb{Z}$ .*

*Demonstração.* Suponha primeiramente que  $p$  e  $q$  tem paridades diferentes. Nesse caso, já sabemos que existe  $\delta \in \mathfrak{M}_\theta$  que tem pólo em  $\rho$ . Assim, temos



$(\delta^{-1} \circ \tau_2 \circ \delta)(\rho) = (\delta^{-1} \circ \tau_2)(\infty) = \delta^{-1}(\infty) = \rho$ , o que mostra que  $\rho$  é ponto fixo de  $\gamma$ . Se  $\rho$  for ponto fixo de alguma outra transformação  $\tilde{\gamma} \in \mathfrak{M}_\theta$ , teremos  $(\delta \circ \tilde{\gamma} \circ \delta^{-1})(\infty) = (\delta \circ \tilde{\gamma})(\rho) = \delta(\rho) = \infty$ . Mas já vimos que toda transformação com pólo em  $\infty$  tem que ser uma translação inteira. E, como ela pertence a  $\mathfrak{M}_\theta$ , tem que ser uma translação par. Assim,  $\delta \circ \tilde{\gamma} \circ \delta^{-1} = \tau_2^k$ , o que implica  $\tilde{\gamma} = \gamma^k$ .

Agora suponha que  $p$  e  $q$  são ambos ímpares. Então existe uma transformação em  $\mathfrak{M}$  com pólo em  $\rho$ . Por exemplo, tome a transformação  $\gamma_1 \circ \tau_1$ , sendo  $\gamma_1 \in \mathfrak{M}_\theta$  uma transformação com pólo em  $\rho + 1$ . Como  $p$  e  $q$  são ímpares, a matriz em  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$  que representa  $\gamma_1 \circ \tau_1$  tem que ser da forma  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  com  $c$  e  $d$  ímpares. E como  $ad - bc = 1$ , isso implica que  $a$  e  $b$  tem paridades diferentes. Se  $a$  for ímpar e  $b$  for par, tome  $\epsilon = \gamma_1 \circ \tau_1$ . Caso contrário, tome  $\epsilon = (\gamma_1 \circ \tau_1) + \tau_1$ , para obter uma matriz da forma desejada. Como  $\epsilon$  tem pólo em  $\rho$ , é fácil ver que  $\rho$  é ponto fixo de  $\gamma = \epsilon^{-1} \circ \tau_1 \circ \epsilon$ . E para provar que  $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta$ , basta ver que  $\gamma$  tem uma matriz da forma  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  módulo 2. Se algum outro elemento  $\tilde{\gamma} \in \mathfrak{M}_\theta$  fixa  $\rho$ , então é fácil ver que  $\epsilon \circ \tilde{\gamma} \circ \epsilon^{-1}$  tem pólo em infinito e tem que ser uma translação. Assim,  $\epsilon \circ \tilde{\gamma} \circ \epsilon^{-1} = \tau_1^k$ , o que mostra que  $\tilde{\gamma} = \gamma^k$ .

□

Se  $\gamma(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ , a equação  $\gamma(\rho) = \rho$  é equivalente a

$$c \cdot \rho^2 + (d - a) \cdot \rho - b = 0. \quad (5.1)$$

Assim, com a notação  $t = \frac{a + d}{2} \in \mathbb{Z}$ , temos

$$c\rho + d = t \pm \sqrt{t^2 - 1}. \quad (5.2)$$

Como a matriz de uma translação sempre tem traço  $\pm 2$  e o traço é invariante por conjugação, o Lema 5.1.1 implica que sempre temos  $t = \pm 1$  quando  $\rho$  é racional. E vale a recíproca, já que, se  $t = \pm 1$  em (5.2), temos  $\rho = \frac{\pm 1 - d}{c} \in \mathbb{Q}$ . Nesse caso, temos  $\gamma'(\rho) = (c\rho + d)^{-2} = 1$ . Isso implica uma convergência lenta em direção a  $\rho$ , como veremos a seguir. Como a matriz de  $\gamma$  está definida a menos de sinal, podemos escolhê-la de forma que  $a + d = 2$ . Começando a partir de um ponto  $x_0$  próximo a  $\rho$ , definimos a sequência  $(x_n)$  recursivamente por  $x_{n+1} = \gamma(x_n)$ . Temos

$$x_n - \rho = x_n - \frac{1 - d}{c} = \frac{cx_n + d - 1}{c}$$

e

$$x_{n+1} - \rho = \frac{ax_n + b}{cx_n + d} - \frac{a\rho + b}{c\rho + d} = \frac{x_n - \rho}{(cx_n + d)(c\rho + d)}. \quad (5.3)$$

Mas  $c\rho + d = 1$ , o que nos permite obter

$$\frac{1}{x_{n+1} - \rho} = \frac{1}{x_n - \rho} + c. \quad (5.4)$$

Assim, supondo  $c > 0$ , temos que  $\frac{1}{|x_n - \rho|}$  cresce linearmente se  $x_0$  está na vizinhança direita de  $\rho$  e decresce linearmente quando  $x_0$  está na vizinhança esquerda de  $\rho$ . Assim, a sequência  $(x_n)$  converge lentamente para  $\rho$  se  $x_0 > \rho$  e diverge lentamente a partir de  $\rho$  se  $x_0 < \rho$ . Para  $c < 0$ , obtemos as conclusões inversas.

Esse tipo de convergência em direção a  $\rho$  é da ordem de  $\frac{1}{n}$ , já que o inverso da distância até  $\rho$  varia linearmente. Isso explica a repetição de padrões encontrada em torno de todos os pontos racionais. Como  $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta$ , podemos usar a expansão (3.5) para a função  $\phi(x)$ . Mas dessa vez olhamos para o comportamento de  $x$  em uma vizinhança de  $\rho$ , e não de  $r$ . A equação (3.5) mostra que  $\phi(x)$  é similar a  $\phi(\gamma(x))$ , o que explica a presença de padrões repetidos que convergem em direção a  $\rho$ .

## 5.2 Pontos fixos irracionais

A equação (5.1) mostra que, além de pontos racionais, alguns irracionais  $\rho$  também podem ser pontos fixos de transformações  $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta$ . Veremos que eles também apresentam autossimilaridades, mas de um tipo diferente daquela que vimos no estudo dos racionais.

**Definição 5.2.1.** *Um irracional quadrático é um número irracional  $\rho \in \mathbb{R}$  que é raiz de uma equação de segundo grau*

$$a\rho^2 + b\rho + c = 0,$$

com coeficientes inteiros  $a, b, c$ .

**Teorema 5.2.2.** *Dado  $\rho \in \mathbb{R}$ , as seguintes condições são equivalentes:*

(a)  $\rho$  é fixado por alguma transformação  $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta$  tal que  $0 < \gamma'(\rho) < 1$ .

*Além disso, todas as transformações de  $\mathfrak{M}_\theta$  que fixam  $\rho$  são potências inteiras de uma dessas.*

(b)  $\rho$  é um irracional quadrático.

(c) A fração contínua de  $\rho$  é periódica.

*Demonstração.* Para provar (a) $\Rightarrow$ (b), basta notar que, se (a) vale, temos  $\gamma'(\rho) \neq 1$ , o que implica que  $\rho$  é irracional. Mas  $\rho$  satisfaz (5.1), o que mostra que ele é um irracional quadrático.

Para provar o resultado (b) $\Rightarrow$ (c), devido a Lagrange, seguiremos os passos da demonstração apresentada no apêndice de [6]. Como  $\rho$  é irracional quadrático, existem inteiros  $a$ ,  $b$  e  $c$  tais que vale  $a\rho^2 + b\rho + c = 0$ , com  $b^2 - 4ac > 0$  e  $\sqrt{b^2 - 4ac}$  irracional.

Usando a mesma notação da Definição 4.1.1, temos  $\rho = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, \alpha_n]$ , o que implica

$$\rho = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}},$$

conforme foi visto na demonstração do Lema 4.1.2. Assim, temos

$$a \left( \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}} \right)^2 + b \left( \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}} \right) + c = 0,$$

o que pode ser escrito na forma  $A_n \alpha_n^2 + B_n \alpha_n + C_n = 0$ , com

$$\begin{aligned} A_n &= ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2, \\ B_n &= 2ap_{n-1}p_{n-2} + b(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}) + 2cq_{n-1}q_{n-2}, \\ C_n &= ap_{n-2}^2 + bp_{n-2}q_{n-2} + cq_{n-2}^2. \end{aligned}$$

Note que  $C_n = A_{n-1}$ . Vamos provar que os coeficientes  $A_n$ ,  $B_n$  e  $C_n$  são limitados uniformemente em  $n$ . Sejam  $\rho$  e  $\bar{\rho}$  as raízes de  $ax^2 + bx + c = 0$ . Então temos  $ax^2 + bx + c = a(x - \rho)(x - \bar{\rho})$ . Logo, podemos escrever

$$A_n = aq_{n-1}^2 \left( \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \rho \right) \left( \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \bar{\rho} \right).$$

Aplicando o Lema 4.1.2, temos

$$|A_n| = |a| \cdot q_{n-1}^2 \left| \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \rho \right| \cdot \left| \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \bar{\rho} \right| \leq |a| \cdot \left| \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \bar{\rho} \right| \leq |a| \cdot (|\rho - \bar{\rho}| + 1)$$

Assim, existe uma constante  $M$  tal que  $|A_n| \leq M$  para todo  $n$ . Isso implica também  $|C_n| \leq M$ . Mas um simples cálculo nos mostra que

$$B_n^2 - 4A_n C_n = (p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1})^2 (b^2 - 4ac) = b^2 - 4ac.$$

Assim, temos

$$B_n^2 = 4A_n C_n + b^2 - 4ac \leq 4M^2 + b^2 - 4ac,$$

o que mostra que  $B_n$  também é limitado.

Concluimos que existe apenas um número finito de triplas  $(A_n, B_n, C_n)$  possíveis, o que mostra que o número de equações de segundo grau que  $\alpha_n$  pode satisfazer é finito. Como cada uma só tem duas raízes, a quantidade de valores possíveis para  $\alpha_n$  é finita. Assim, necessariamente ocorrerá repetição e teremos  $\alpha_m = \alpha_{m+k}$ , para

certos  $m \geq 0$ ,  $k > 0$ . E a fração contínua precisa se repetir a partir deste ponto, com  $\alpha_n = \alpha_{n+k}$  e  $a_n = a_{n+k}$  para todo  $n \geq m$ .

Agora vamos provar (c) $\Rightarrow$ (a). Então suponha que a fração contínua de  $\rho$  satisfaz  $a_n = a_{n+k}$  para todo  $n \geq m$ . Como vimos na demonstração de Lema 4.1.2, vale a relação  $M_{n+1} = M_n \cdot A_{n+2}$  para as matrizes

$$M_n = \begin{pmatrix} p_{n+1} & p_n \\ q_{n+1} & q_n \end{pmatrix}, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, a condição de periodicidade nos diz que  $A_{n+2} = A_{n+k+2}$  para todo  $n \geq m$ , o que implica  $M_n^{-1} \cdot M_{n+1} = M_{n+k}^{-1} \cdot M_{n+k+1}$ . Isso pode ser reescrito como  $M_{n+k} \cdot M_n^{-1} = M_{n+k+1} \cdot M_{n+1}^{-1}$ , o que faz com que a matriz

$$B = M_{n+k} \cdot M_n^{-1} = M_n \cdot A_{n+2} \cdot A_{n+3} \cdots A_{n+k+1} \cdot M_n^{-1} \quad (5.5)$$

seja a mesma para todo  $n \geq m$ . Temos  $M_{n+k} = B \cdot M_n$ , o que implica

$$\begin{pmatrix} p_{n+k} \\ q_{n+k} \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix},$$

para todo  $n \geq m$ . Podemos iterar essa transformação, obtendo  $M_{n+jk} = B^j \cdot M_n$ . Assim, a reta que passa pela origem e pelo ponto  $\begin{pmatrix} p_{n+jk} \\ q_{n+jk} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  precisa convergir para um autoespaço de  $B$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Mas as frações  $\frac{p_{n+jk}}{q_{n+jk}}$  convergem para  $\rho$ , o que mostra que  $\begin{pmatrix} \rho \\ 1 \end{pmatrix}$  é autovetor de  $B$ .

A partir da equação (5.5), temos que  $\det B = (-1)^k$ , o que mostra que  $\det B^2 = 1$ . Assim,  $B^2 \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$  é a matriz que representa uma transformação  $\beta \in \mathfrak{M}$ . Mas, como consequência do Teorema 1.3.4, sabemos que alguma das transformações  $\beta$ ,  $\beta^2$  ou  $\beta^3$  pertence a  $\mathfrak{M}_\theta$ .

Assim, existe uma potência de  $B$  que está em  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$  e corresponde a uma transformação  $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta$ . Além disso, essa matriz tem autovetor  $\begin{pmatrix} \rho \\ 1 \end{pmatrix}$ , o que é equivalente a dizer que  $\gamma(\rho) = \rho$ . Então já provamos que  $\rho$  é ponto fixo de uma transformação  $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta$ .

Como  $\rho$  é irracional, precisamos ter  $\gamma'(\rho) \neq 1$ . Para provar isso, basta notar que  $\gamma'(\rho) = 1$  implicaria  $|t| = 1$  em (5.2), o que exigiria que  $\rho$  fosse racional. Assim, podemos escolher  $\gamma$  de forma que  $0 < \gamma'(\rho) < 1$ . Para tanto, basta trocar  $\gamma$  por  $\gamma^{-1}$ , se necessário, já que  $\gamma'(\rho) \cdot (\gamma^{-1})'(\rho) = 1$ .

Agora só falta mostrar que podemos escolher uma determinada  $\gamma$  de forma que todas as transformações em  $\mathfrak{M}_\theta$  que fixam  $\rho$  sejam da forma  $\gamma^k$ , para  $k \in \mathbb{Z}$ .

Note que, se  $\rho$  é raiz de duas equações de segundo grau com coeficientes inteiros,  $A\rho^2 + B\rho + C = 0$  e  $\bar{A}\rho^2 + \bar{B}\rho + \bar{C} = 0$ , é necessário que exista uma constante

racional  $r$  tal que  $\bar{A} = r \cdot A$ ,  $\bar{B} = r \cdot B$  e  $\bar{C} = r \cdot C$ . Caso contrário, existiria uma combinação linear das duas equações que é não nula e possui grau menor que 2. Absurdo, pois  $\rho$  é irracional.

Concluimos, assim, que todas as equações de segundo grau com coeficientes inteiros que tem  $\rho$  como raiz possuem o mesmo valor para a outra raiz  $\bar{\rho}$ . Dessa forma, sempre que  $\rho$  satisfaz (5.1),  $\bar{\rho}$  também satisfaz a mesma equação. Isso mostra que  $\bar{\rho}$  é fixado por todas as transformações  $\gamma$  que fixam  $\rho$ .

Assim, se  $A$  é a matriz que representa uma transformação de  $\mathfrak{M}_\theta$  que fixa  $\rho$ , sabemos que  $A$  possui dois autovetores linearmente independentes  $\begin{pmatrix} \rho \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ 1 \end{pmatrix}$ . Logo,

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \text{para } P = \begin{pmatrix} \rho & \bar{\rho} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Além disso,  $\det L = \det A = 1$ , o que mostra que  $\mu = \frac{1}{\lambda}$ . Como  $A$  é determinada a menos de sinal, podemos supor  $\lambda > 0$ .

Os elementos de  $\mathfrak{M}_\theta$  que fixam  $\rho$  formam um grupo. Então os valores de  $\lambda$  que obtemos para cada um deles também formam um subgrupo  $\Lambda$  do grupo multiplicativo  $\mathbb{R}_{>0}$ . Mas o número  $\lambda + \frac{1}{\lambda} = \text{tr}L = \text{tr}A$  precisa ser sempre inteiro, o que mostra que  $\Lambda$  é um subconjunto discreto de  $\mathbb{R}_{>0}$ . Em particular, sendo  $\lambda_0$  o menor elemento de  $\Lambda$  que é maior que 1, todos os elementos de  $\Lambda$  tem que ser potências inteiras de  $\lambda_0$ . Se, por absurdo, existir  $\lambda \in \Lambda$  tal que  $\lambda = \lambda_0^{n+\epsilon}$ , com  $n \in \mathbb{Z}$  e  $0 < \epsilon < 1$ , o elemento  $\lambda^\epsilon$  pertenceria a  $\Lambda$  e seria maior que 1 e menor que  $\lambda_0$ . Assim, o grupo  $\Lambda$  é gerado por  $\lambda_0$  e o subgrupo de  $\mathfrak{M}_\theta$  que fixa  $\rho$  é gerado pela transformação correspondente  $\gamma_0$ . □

Agora suponha que  $\rho \in \mathbb{R}$  satisfaz as condições equivalentes (a), (b), (c) do Teorema 5.2.2. Como a fração contínua de  $\rho$  é periódica, seus coeficientes  $a_n$  são limitados. Assim, o Corolário 4.3.3 nos mostra que  $\phi(x) - \phi(\rho)$  possui ordem exatamente igual a  $|x - \rho|^{\frac{3}{4}}$  quando  $x \rightarrow \rho$ .

Seja  $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta$  a transformação que satisfaz  $0 < \gamma'(\rho) < 1$  e que é geradora do subgrupo de  $\mathfrak{M}_\theta$  que fixa  $\rho$ . Seja  $r = \frac{p}{q}$  o pólo de  $\gamma$  e seja  $m = m(r)$ . Então podemos usar (3.5) para analisar o comportamento de  $\phi$  nas proximidades de  $\rho$ , como fizemos para os pontos fixos  $\rho$  racionais. No entanto, para  $\rho$  irracional, percebemos que os padrões repetidos convergem muito mais rápido em direção a  $\rho$ , pelo fato de a derivada  $\gamma'(\rho)$  ser diferente de 1.

Começando com  $x_0$  próximo a  $\rho$  e definindo a sequência  $(x_n)$  recursivamente por  $x_{n+1} = \gamma(x_n)$ , a equação (5.3) continua valendo. Mas, dessa vez, temos  $c\rho + d > 1$ , já que  $\gamma'(\rho) = (c\rho + d)^{-2} < 1$ . E, para  $x \approx \rho$ , temos  $cx + d \approx c\rho + d$ , o que mostra que

$$(x_{n+1} - \rho) \approx \gamma'(\rho) \cdot (x_n - \rho).$$

Assim, percebemos que a sequência  $(x_n)$  converge para  $\rho$  de forma semelhante a uma progressão geométrica. Essa convergência é muito mais rápida do que a convergência harmônica que foi vista em (5.4) para  $\rho$  racional. Assim, no caso  $\rho$  irracional, os padrões decrescem muito rapidamente, sendo difícil enxergá-los em uma só figura.

Para visualizar a autossimilaridade, é útil buscar pontos irracionais  $\rho$  para os quais temos  $\gamma'(\rho)$  não muito distante de 1. Pela equação (5.2), os melhores valores são obtidos com  $t = 2$ . Nesse caso, temos

$$\gamma'(\rho) = \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^2} = \frac{1}{7 + 4\sqrt{3}} \approx \frac{1}{13,9}. \quad (5.6)$$

O irracional  $\rho = \sqrt{3}$  satisfaz essa condição. Nesse caso, a compressão  $\gamma$  que é geradora do subgrupo de  $\mathfrak{M}_\theta$  que fixa  $\rho$  é dada por  $\gamma(x) = \frac{2x + 3}{x + 2}$ . Essa transformação satisfaz (5.6) e possui pólo  $r = -2$ , com  $m = m(r) = 1$ .

Na Figura 5.1, mostramos o gráfico de  $f$  em uma vizinhança de  $\rho = \sqrt{3}$ . O retângulo vermelho foi desenhado com uma largura que é igual ao fator  $\gamma'(\rho)$  multiplicado pela largura da figura. Já sabemos, pela equação (3.5), que um dos termos da expansão de  $\phi(x)$  é  $\chi_r(x) = e^{i\frac{\pi}{4}m} \cdot q^{\frac{3}{2}} \cdot (x - r)^{\frac{3}{2}} \cdot \phi(\gamma(x))$ . Temos  $x > r$  quando  $x$  está próximo a  $\rho$ . Assim, descobrimos que a função  $e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot \phi(x)$  é similar a  $\phi(\gamma(x))$ , sendo  $\gamma$  a compressão no eixo  $x$  que leva a Figura 5.1 dentro do retângulo vermelho. Tomando a parte real, percebemos que a função  $f - g$  na figura toda deve se comportar de maneira similar à função  $f$  dentro do retângulo.

Por isso, a Figura 5.1 também mostra o gráfico de  $f - g$ . Percebemos que o gráfico de  $f(\rho + x) - g(\rho + x)$  para  $|x| \leq 0,03$  se assemelha muito ao gráfico de  $f(\rho + x)$  para  $|x| \leq 0,03 \cdot (7 - 4\sqrt{3})$ . Este último se encontra dentro do retângulo vermelho, que é mostrado de forma ampliada na Figura 5.2.

Percebemos que uma desvantagem na escolha deste valor de  $\rho$  é o fato de termos  $m = 1$ , o que faz com que a autossimilaridade só possa ser vista com o uso da função auxiliar  $f - g$ . Mas todos os irracionais  $\rho$  que satisfazem (5.6) são tais que  $m$  é ímpar. De fato, para que (5.6) seja satisfeita, precisamos ter  $t = 2$  em (5.2). Isso significa que  $a + d = 4$  em  $\gamma(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ . Se tivéssemos  $a$  e  $d$  ímpares,  $b$  e  $c$  pares, teríamos  $ad - bc \equiv -1 \pmod{4}$ , o que é um absurdo. Assim, concluímos que todas as transformações  $\gamma$  que tem  $t = 2$  são tais que  $d$  é par e  $c$  é ímpar, o que implica  $m$  ímpar.

Portanto, se quisermos ver um padrão em que a função  $f$  repete a si mesma, precisamos de uma derivada  $\gamma'(\rho)$  mais distante de 1. O próximo melhor valor é

$$\gamma'(\rho) = \frac{1}{(3 + 2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{17 + 12\sqrt{2}} \approx \frac{1}{34,0}, \quad (5.7)$$

obtido quando  $t = 3$  em (5.2). Escolhendo o racional  $\rho = 1 + \sqrt{2}$ , conseguimos obter (5.7) com a transformação  $\gamma(x) = \frac{5x + 2}{2x + 1}$ .

Essa transformação tem pólo  $r = -\frac{1}{2}$ , o que implica  $m = 0$ . Assim, temos a situação ideal. A Figura 5.3 mostra o gráfico de  $f$  em uma vizinhança de  $\rho = 1 + \sqrt{2}$ . O retângulo vermelho é mostrado de forma ampliada na Figura 5.4. Essa ampliação permite ver a autossimilaridade de  $f$  com bastante clareza.

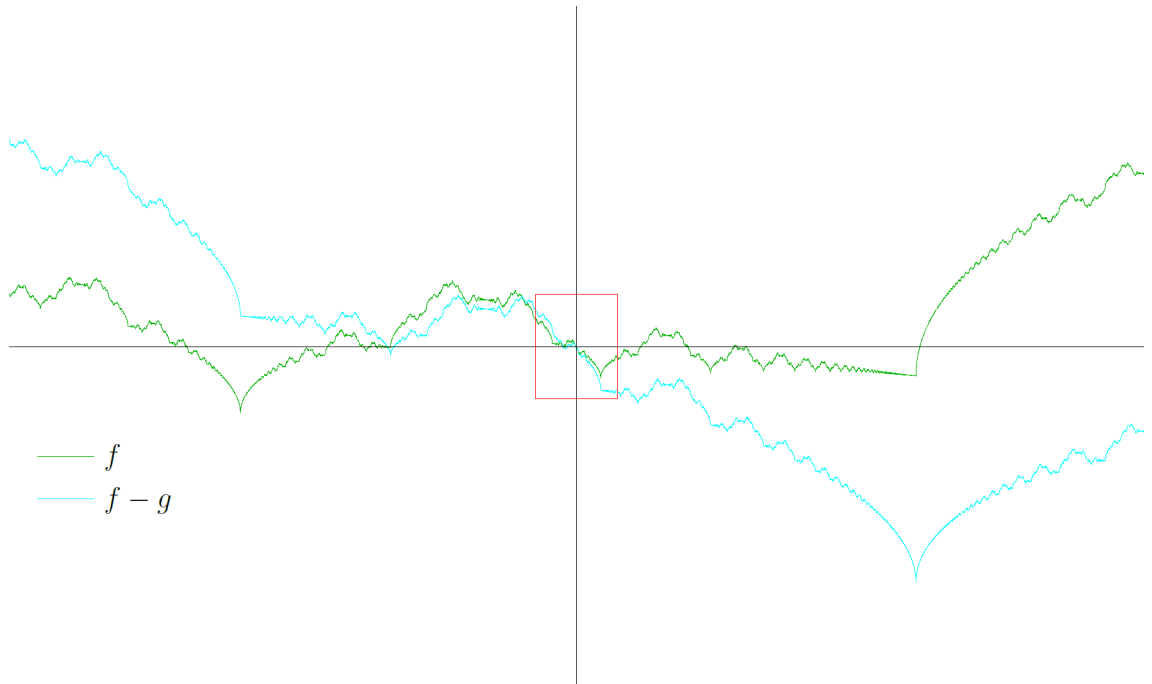


Figura 5.1: Gráficos de  $0,221 \cdot (f(\rho+x) - f(\rho))$  e  $\frac{0,221}{\sqrt{2}} \cdot ((f-g)(\rho+x) - (f-g)(\rho))$ , com  $\rho = \sqrt{3}$ , para  $|x| \leq 0,03$ . O retângulo vermelho mostra os limites da Figura 5.2.

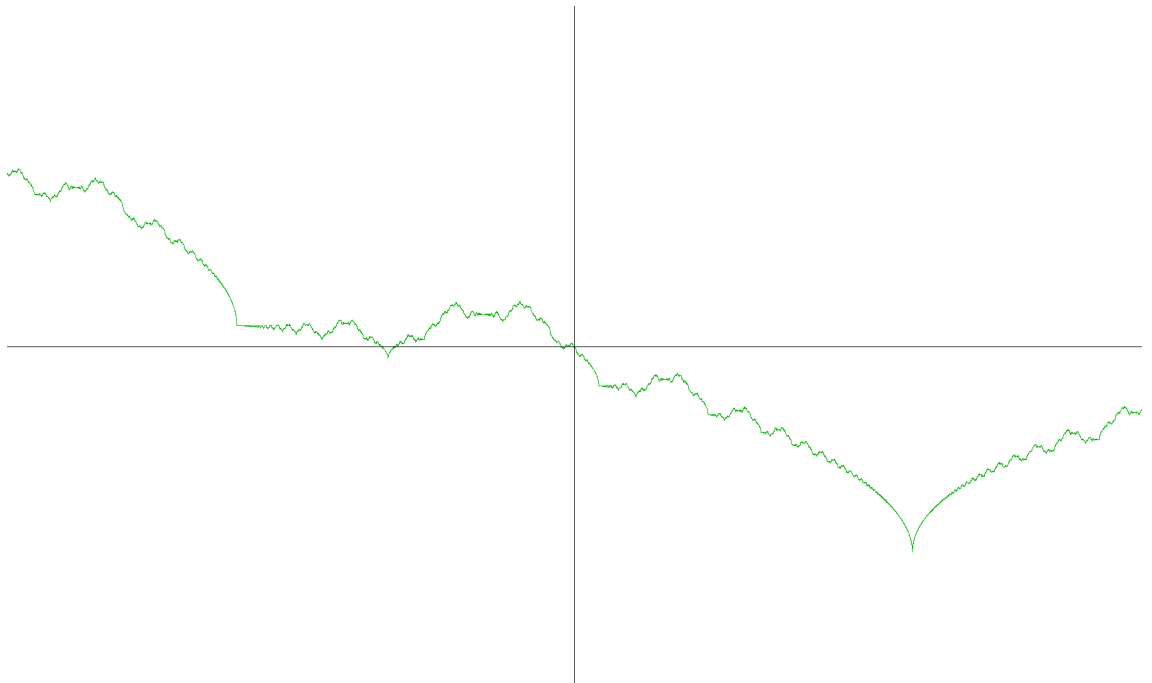


Figura 5.2: Gráfico de  $0,104 \cdot (f(\rho+x) - f(\rho))$ , com  $\rho = \sqrt{3}$ , para  $|x| \leq 0,03 \cdot (7 - 4\sqrt{3})$ .



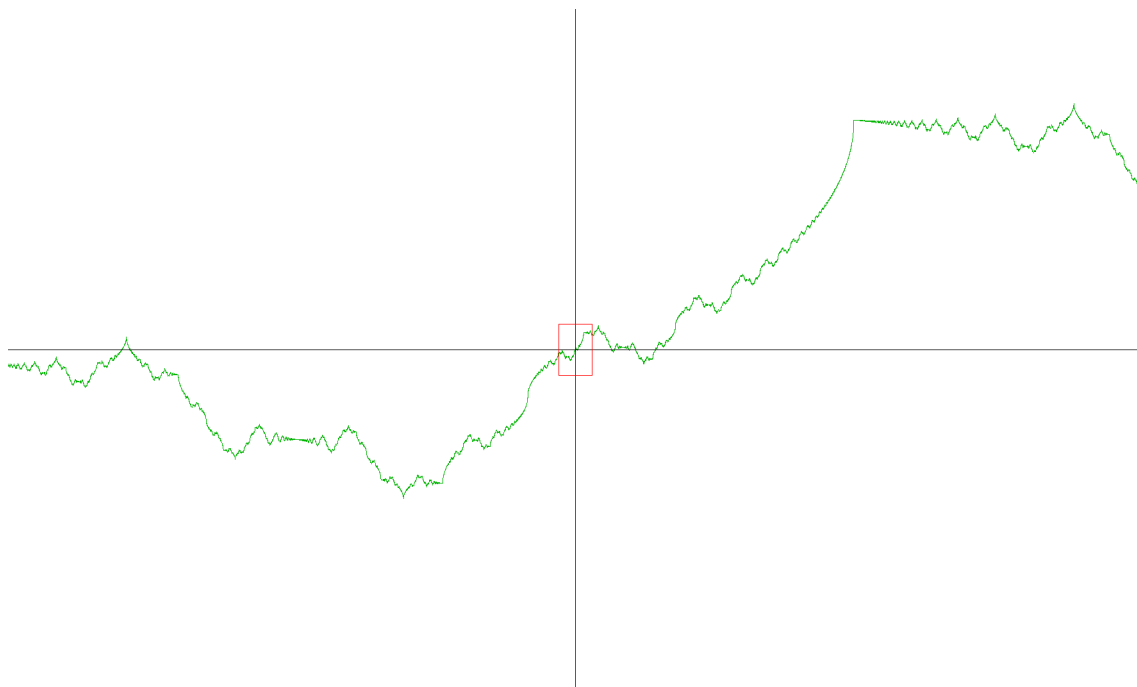


Figura 5.3: Gráfico de  $0,169 \cdot (f(\rho + x) - f(\rho))$ , com  $\rho = 1 + \sqrt{2}$ , para  $|x| \leq 0,005$ . O retângulo vermelho mostra os limites da Figura 5.4.

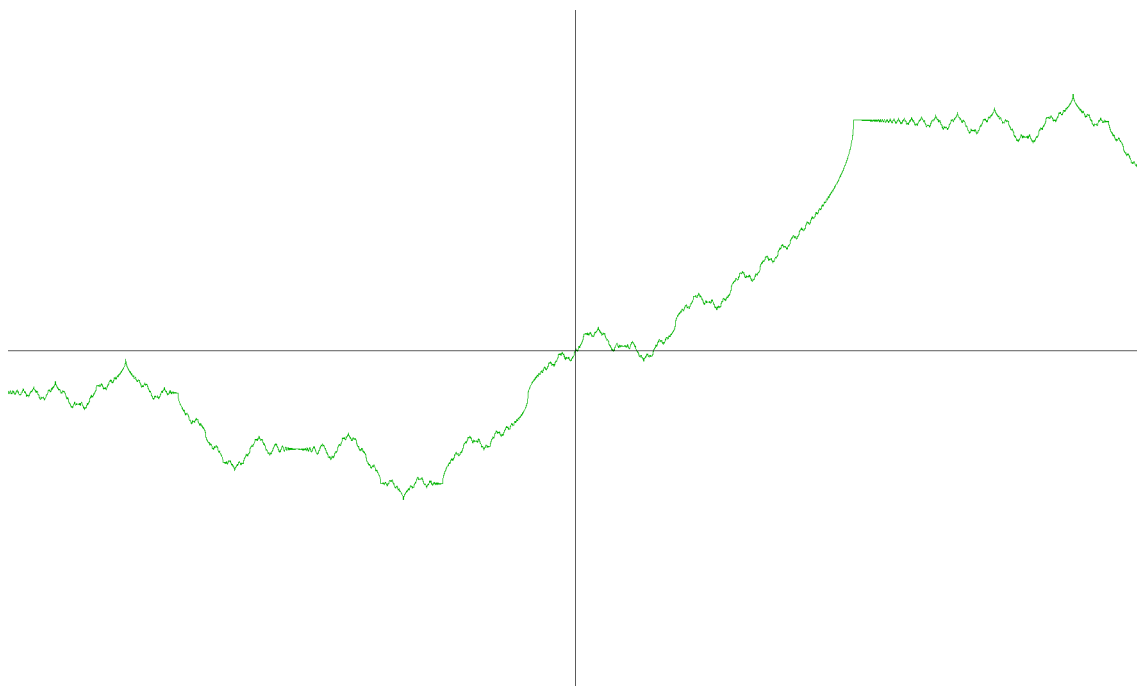


Figura 5.4: Gráfico de  $0,0664 \cdot (f(\rho + x) - f(\rho))$ , com  $\rho = 1 + \sqrt{2}$ , para  $|x| \leq 0,005 \cdot (17 - 12\sqrt{2})$ .

## Referências Bibliográficas

- [1] J. J. DUISTERMAAT, *Selfsimilarity of “Riemann’s Nondifferentiable Function”*, Nieuw Archief voor Wiskunde (4) 9 (1991), no. 3, 303 - 337.
- [2] J. J. DUISTERMAAT; J. A. C. KOLK, *Distributions: Theory and Applications*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2010. xvi+445 pp. ISBN: 978-0-8176-4672-1.
- [3] J. GERVER, *The differentiability of the Riemann function at certain rational multiples of  $\pi$* , Amer. J. Math. 92 (1970) 33-55. Ibidem 93 (1971) 33-41.
- [4] G. H. HARDY, *Weierstrass’s non-differentiable function*, Trans. AMS Vol. 17, No. 3 (Jul., 1916) pp. 301-325.
- [5] CARLOS GUSTAVO T. DE A. MOREIRA; NICOLAU C. SALDANHA, *Reciprocidade Quadrática*, Revista Eureka! No. 15, pp. 27-30, (2002).
- [6] CARLOS GUSTAVO T. DE A. MOREIRA, *Frações contínuas, representações de números e aproximações*, Revista Eureka! No. 3, pp. 44-55, (1998).
- [7] MARCIO G. SOARES, *Cálculo em uma variável complexa*, Quarta Edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA, (2007) ISBN 978-85-244-0384-2.