UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Invariantes Aritméticos em Geometria Hiperbólica

Victor Mielly Oliveira Batista

Belo Horizonte - MG
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Victor Mielly Oliveira Batista

Orientador: Heleno Cunha

Invariantes Aritméticos em Geometria Hiperbólica

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas (ICEX) da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção de título de Mestre em Matemática.

Belo Horizonte - MG
2014

Agradecimentos

A Deus, por ter me dado saúde e perseverança para superar os obstáculos.

Ao Heleno, que com toda sua paciência foi muito mais que um orientador, tornou-se um amigo e sempre me ajudou. Sou imensamente grato por tudo. Muito obrigado.

À minha amada esposa que sempre me apoiou, ajudou, motivou e esteve do meu lado nos momentos difíceis.

Aos meus pais, pelo carinho, apoio e compreensão.

Aos amigos e companheiros de estudos que contribuiram de forma direta ou indireta para realização deste trabalho.

Resumo

Nessa dissertação estudamos alguns importantes invariantes aritméticos associados a variedades hiperbólicas tri-dimensionais. São eles, o corpo de traços, o corpo de traços invariante e a álgebra de quatérnios. Assim estudamos em especial grupos Kleinianos de covolume finito e verificamos que seu corpo de traços invariantes é uma extensão finita dos números racionais. Desenvolvemos ainda o estudo dessas invariâncias aplicado mais geralmente a qualquer subgrupo não-elementar finitamente gerado de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.

Palavras-chave: Geometria hiperbólica. Corpo de traços. Grupos kleinianos.

Abstract

In this dissertation we study some important arithmetic invariants associated with three-dimensional hyperbolic manifolds. They are the trace fields, invariant trace fields and the quaternions algebra. Well studied in particular Kleinian groups of finite covolume and find that your invariant trace field is a finite extension of the rational numbers. We have also developed the study of these invariants applied more generally to any non-elementary finitely generated subgroup of $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.

Keywords: Geometry hyperbolic. Trace fields. Kleinian groups.

Sumário

Introdução

Alguns dos principais invariantes associados a um grupo Kleiniano são os corpos de traços invariantes e a álgebra de quatérnios invariantes. O motivo pelo qual este tema faz-se importante é que sob certas hipóteses o corpo de traço de um subgrupo de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ pode classificar a sua classe de conjugação em $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Por sua vez, estudar as classes de conjugação de subgrupos de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ tem relevância pelo seguinte fato. As classes de isometrias de 3-variedades hiperbólicas são classificadas pelas classes de conjugações de subgrupos de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$.

Se denotarmos por Γ um subgrupo de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ e considerarmos a projeção natural

$$\mathbb{P} : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$$

Seja $\widehat{\Gamma} = \mathbb{P}^{-1}(\Gamma)$. Então o corpo de traços de Γ, denotado por $\mathbb{Q}(\mathrm{tr}\Gamma)$, é o corpo

$$\mathbb{Q}(\mathrm{tr}\widehat{\gamma} \mid \widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma})$$

Só para mencionar uma das importantes informações que nos pode dar o corpo traços podemos citar o seguinte resultado.

Teorema: *Seja $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ uma 3-variedade hiperbólica de volume finito. Então, o corpo de traços $\mathbb{Q}(\mathrm{tr}\Gamma)$ é um invariante topológico de M.*

Uma vez definido o corpo de traços, podemos definir uma álgebra de quatérnios. Consideremos agora Γ um subgrupo não-elementar de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ e associamos a Γ uma álgebra de quatérnios definida sobre $\mathbb{Q}(\mathrm{tr}\Gamma)$ por

$$A_0\Gamma = \left\{ \sum a_i\gamma_i;\ a_i \in \mathbb{Q}(\mathrm{tr}\Gamma),\ \gamma_{\mathrm{i}} \in \Gamma \right\}$$

onde somente uma quantidade finita de a_i são não nulos.

A seguir explicitamos de maneira global a estrutura do trabalho.

Iniciamos este trabalho abordando conteúdos que serão necessários para compreender o capítulo seguinte. Apresentamos o modelo do semi-espaço superior para o espaço hiperbólico e algumas relações com o grupo $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Destacamos ainda no capítulo 1 o conceito de transformações de Möbius, onde para cada transformações de Möbius identificamos com um elemento de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Em seguida, estipulamos um critério de verificação do tipo de isometria do espaço hiperbólico observando o traço de um elemento em $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Na sequência definimos grupos discretos, fuchsianos e elementares, onde relacionamos os grupos elementares com a quantidade de elementos no conjunto limite. Uma vez conhecida a definição de grupos discretos, passamos a definir os grupos Kleinianos, onde apresentamos uma série de resultados envolvendo os subgrupos de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ e realizamos uma breve explicação sobre as informações geométricas que podemos ter dos elementos de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Caracterizamos os grupos Kleinianos como os subgrupos Γ de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ que agem descontinuamente em $\mathbb{H}^3$ e assim definimos um domínio fundamental para Γ, com o intuito de definir o covolume de um grupo Kleiniano, que se faz necessário na compreensão da noção de volume das 3-variedades hiperbólicas orientáveis. As referências para o desenvolvimento desse capítulo foram: [2], [5], [8] e [4].

Dedicamos o capítulo 2 ao estudo dos corpos de traços e a álgebra dos quatérnios. Ao definir o corpo de traço, expomos que se um grupo Kleiniano tem covolume finito, então seu corpo de traços é uma extensão finita dos racionais. Como os corpos de traços invariantes e a álgebra de quatérnios invariantes são os principais invariantes associados a um grupo Kleiniano, dedicamos uma seção para estas construções. Apresentamos ainda os geradores para o corpo de traços, onde no caso de um subgrupo de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ gerado por dois ou três elementos, a quantidade mínima de geradores para o corpo de traços é bastante conhecida. As referências para o desenvolvimento desse capítulo foram: [5], [1], [3], [6] e [9].

Capítulo 1

Conceitos Básicos

O objetivo desse capítulo é introduzir alguns resultados fundamentais para a compreensão do capítulo seguinte, onde também iremos fixar algumas notações. Não nos preocupamos em demonstrar todos os resultados, no entanto, o leitor interessado poderá se basear nas seguintes referências: [2], [5], [8], [4].

1.1 O espaço hiperbólico

Para os nossos propósitos trabalharemos com o modelo do semi-espaço superior:

$$\mathbb{H}^3 = \{(z,t);\ z \in \mathbb{C},\ t \in \mathbb{R}_+\},$$

munido da métrica

$$ds^2 = \frac{|dz|^2 + dt^2}{t^2}$$

Nesse caso o espaço hiperbólico é uma variedade riemanniana simplesmente conexa de curvatura seccional constante igual a -1.

A fronteira ideal, $\partial\mathbb{H}^3$, do espaço hiperbólico é a compactificação a um ponto de

$$\{(z,0)\ ;\ z \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C}$$

Isto é, $\partial\mathbb{H}^3 = \{(z,0)\ ;\ z \in \mathbb{C}\} \cup \{\infty\} \simeq \widehat{\mathbb{C}}$

As geodésicas do espaço hiperbólico são os semi-círculos e as semi-retas ortogonais a $\mathbb{C}$. As subvariedades totalmente geodésicas bi-dimensionais do espaço hiperbólico são os semi-planos e as semi-esferas ortogonais ao plano $\mathbb{C}$. Observe que tais subvariedades totalmente geodésicas são cópias do plano hiperbólico mergulhadas em $\mathbb{H}^3$.

1.2 O grupo $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$

Iniciamos essa seção apresentando o conceito de quatérnio e como interpretar o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$ utilizando este conceito. Um quatérnio é uma matriz 2×2 da forma

$$q = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$$

onde z, $w \in \mathbb{C}$.

O conjunto dos quatérnios será representado por $\mathbb{H}$ e com as operações de soma e multiplicação induzidas por $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ temos que:

- $\mathbb{H}$ é um grupo abeliano com respeito à soma;
- Os quatérnios não-nulos formam um grupo não-abeliano com respeito à multiplicação;
- $\mathbb{H}$ é um espaço vetorial quadri-dimensional sobre o corpo dos complexos e os vetores

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \ \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

  formam uma base.

Observe que $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1}$ e que o mapa $a + bi \mapsto a\mathbf{1} + b\mathbf{i}$ produz uma cópia de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{H}$. Por outro lado, observe que se pusermos $z = a + bi$ e $w = c + di$, podemos escrever $q = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ como $(a\mathbf{1} + b\mathbf{i}) + (c\mathbf{1} + d\mathbf{i})\mathbf{j}$. O que sugere representar o quatérnio q como $z + wj$.

O uso dos quatérnios nos permite representar os espaço hiperbólico como abaixo:

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^3 &= \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \ ; \ t > 0\} \\ &= \{z + tj \ ; \ t > 0\} \end{aligned}$$

Agora, tomemos uma transformações de Möbius, $f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$, $\det f = ad - bc \neq 0$. Dado que uma transformação de Möbius não se altera quando multiplicamos os seus coeficientes por um número não-nulo, não há perda de generalidade em supor $\det f = 1$.

Naturalmente, uma transformação de Möbius age em $\widehat{\mathbb{C}}$. A extensão de Poincaré consiste numa maneira de estender sua ação ao espaço hiperbólico. A extensão de Poincaré é definida da seguinte maneira

$$f(z + tj) = \frac{a(z + tj) + b}{c(z + tj) + d} \tag{1.1}$$

Não está claro que a extensão de Poincaré age de $\mathbb{H}^3$ em $\mathbb{H}^3$. Esse o conteúdo da proposição abaixo.

Proposição 1.2.1. *Para cada transformação de Möbius a extensão de Poincaré mapeia $\mathbb{H}^3$ em $\mathbb{H}^3$.*

Demonstração. Se $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, temos que:

$$j\bar{z} = j(x - yi) = jx - yji = xj + yij = (x + yi)j = zj.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}(c(z+tj)+d)((\bar{z}-tj)\bar{c}+\bar{d}) &= c(z+tj)(\bar{z}-tj)\bar{c}+c(z+tj)\bar{d}+d(\bar{z}-tj)\bar{c}+d\bar{d}\\ &= c(|z|^2 - ztj + ztj + t^2)\bar{c} + cz\bar{d} + cdtj + d\bar{z}c - dctj + |d|^2\\ &= |cz+d|^2 + |c|^2t^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$(c(z+tj)+d)^{-1} = \frac{(\bar{z}-tj)\bar{c}+\bar{d}}{|cz+d|^2+|c|^2t^2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}f(z+tj) &= \frac{a(z+tj)+b}{c(z+tj)+d}\\ &= \frac{a(z+tj)+b}{c(z+tj)+d}\;\frac{\bar{c}(\bar{z}-tj)+\bar{d}}{\bar{c}(\bar{z}-tj)+\bar{d}}\\ &= \frac{(a(z+tj)+b)((\bar{z}-tj)\bar{c}+\bar{d})}{|cz+d|^2+|c|^2t^2}\\ &= \frac{a(z+tj)(\bar{z}-tj)\bar{c}+a(z+tj)\bar{d}+b(\bar{z}-tj)\bar{c}+b\bar{d}}{|cz+d|^2+|c|^2t^2}\\ &= \frac{a(|z|^2-ztj+ztj+t^2)\bar{c}+az\bar{d}+adtj+b\bar{z}c-bctj+b\bar{d}}{|cz+d|^2+|c|^2t^2}\\ &= \frac{(az+b)\overline{(cz+d)}+a\bar{c}t^2+tj}{|cz+d|^2+|c|^2t^2}\\ &= \frac{(az+b)\overline{(cz+d)}+a\bar{c}t^2}{|cz+d|^2+|c|^2t^2}+\frac{t}{|cz+d|^2+|c|^2t^2}j\end{aligned}$$

□

Vamos finalizar a seção caracterizando o grupo de isometrias que preservam orientação do espaço hiperbólico.

Seja

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ ; \ \mathrm{ad} - \mathrm{bc} = 1 \right\}$$

o grupo das matrizes de determinante igual a 1. Em $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ considere a seguinte relação de equivalência, $f \sim g$, quando $f = \pm g$. Seja $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\sim$. Com a operação de grupo induzida por $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ também é um grupo. Vamos denotar por $\mathbb{P}$ a projeção canônica de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ em $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$.

O grupo $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ age em $\mathbb{H}^3$. Essa ação é dada da seguinte maneira. Primeiro associa-se um elemento de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$,

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} , -\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\},$$

à transformação de Möbius

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

E a partir daí usa-se a extensão de Poincaré.

Proposição 1.2.2. *O grupo de isometrias que preservam orientação do espaço hiperbólico é o grupo* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$.

Cada elemento de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ é um produto de um número par de inversões nos círculos e linhas em $\mathbb{C}$. Considerando $\widehat{\mathbb{C}}$ como linha na fronteira de $\mathbb{H}^3$ quando $t = 0$, cada círculo $\mathcal{C}$ e linha $\mathcal{L}$ em $\mathbb{C}$, tem um único hemisfério $\widehat{\mathcal{C}}$ ou plano $\widehat{\mathcal{L}}$ em $\mathbb{H}^3$, ortogonal a $\mathbb{C}$ e intersectando $\mathbb{C}$ em $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{L}$.

1.3 Classificação das isometrias

Está seção está voltada à caracterização dos elementos de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ a menos de conjugação. E estipularemos um critério para classificar as isometrias de $\mathbb{H}^3$, o traço de uma aplicação.

Definição 1.3.1. *Sejam G_0 e G_1 subgrupos do grupo G. Dizemos que G_0 é conjugado a G_1, se existe um $h \in G$, tal que $G_0 = hG_1h^{-1}$. Notação: $G_0 \sim G_1$.*

Observe que se f é uma Transformação de Möbius diferente da identidade, então f fixa no máximo dois pontos em $\widehat{\mathbb{C}}$. Para ver isto, note que se

$$f(z) = z \Rightarrow \frac{az+b}{cz+d} = z \Rightarrow az+b = cz^2+dz \Rightarrow cz^2+(d-a)z-b = 0$$

assim, temos dois casos a considerar:

- f possui um único ponto fixo em $\widehat{\mathbb{C}}$.
- f possui dois pontos fixos em $\widehat{\mathbb{C}}$.

Desde que dada uma Transformação de Möbius sempre podemos associar um elemento de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, a partir daqui trataremos Transformações de Möbius como elementos de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$.

Lema 1.3.2. *Sejam f e g duas Transformações de Möbius em* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. *Então f fixa $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ se, e somente se, $F = gfg^{-1}$ fixa $g(z)$.*

Demonstração. $f(z) = z \Leftrightarrow gf(z) = g(z) \Leftrightarrow gfg^{-1}g(z) = g(z) \Leftrightarrow gfg^{-1}$ fixa $g(z)$. □

Portanto, se f é uma Transformação de Möbius diferente da identidade, o caso que f tem um único ponto fixo em $\widehat{\mathbb{C}}$ podemos concluir o seguinte:

Seja $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ ponto fixo de f, pelo Lema anterior tome uma Transformação de Möbius g tal que $g(z) = \infty$. Assim

$$f(z) = z \iff F(\infty) = gfg^{-1}(\infty) = gf(z) = g(z) = \infty$$

Logo, a menos de conjugação, podemos supor que f fixa ∞.

Para o caso em que f tem exatamente dois pontos fixos em $\widehat{\mathbb{C}}$, considere $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ tal que

$$g(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

onde $z_1 \neq z_2$ e são pontos fixos de f. Note que

$$g(z_1) = 0 \text{ e } g(z_2) = \infty$$

$$\begin{aligned} F(0) &= gfg^{-1}(0) = gf(z_1) = g(z_1) = 0 \\ F(\infty) &= gfg^{-1}(\infty) = gf(z_2) = g(z_2) = \infty \end{aligned}$$

Portanto, a menos de conjugação podemos supor que f fixa 0 e ∞.

Teorema 1.3.3. *Seja f uma transformação de Möbius distinta da identidade. Então,*

i) Se f possui um único ponto fixo em $\widehat{\mathbb{C}}$ então f é conjugada a uma translação da forma ($z \xmapsto{\gamma_1} z + 1$) apresentada pela matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou *ii) Se f possui dois pontos fixos em $\widehat{\mathbb{C}}$ então f é conjugada a uma aplicação da forma $(z \overset{\gamma_k}{\longmapsto} kz)$, $k \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ apresentada pela matriz* $\begin{pmatrix} k^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & k^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$.

Demonstração. (i) Seja $f \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, assim $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$. Desde que a menos de conjugação podemos supor que $f(\infty) = \infty$, devemos ter $\dfrac{a}{c} = \infty$, logo $c = 0$ e $f(z) = \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{d}$.

Daí, note que $\dfrac{a}{d} = 1$, pois se $\dfrac{a}{d} \neq 1$, teríamos que f fixaria

$$z = \frac{-\dfrac{b}{d}}{\dfrac{a}{d} - 1} \in \mathbb{C},$$

o que é um absurdo, pois f fixa um único ponto em $\widehat{\mathbb{C}}$.

Portanto, $f(z) = z + \dfrac{b}{d}$. Mostraremos agora que

$$f \sim (z \longmapsto z + 1).$$

Para isto, tomemos $h \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, tal que $h(\infty) = \infty$ e $h(0) = 1$. Se h é apresentada pela matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

devemos ter $\gamma = 0$ e $\beta = \delta$, assim, $h(z) = \dfrac{\alpha}{\beta}z + 1$. Logo,

$$hfh^{-1}(z) = hf\left(\beta\frac{z-1}{\alpha}\right) = h\left(\beta\frac{z-1}{\alpha} + \frac{b}{d}\right) = z - 1 + \frac{\alpha}{\beta}\frac{b}{d} + 1 = z + \frac{\alpha}{\beta}\frac{b}{d}.$$

Agora, tomando $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{d}{b}$, segue que f é conjugada a uma aplicação $z \longmapsto (z+1)$.

(ii) Tomemos agora $f \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ diferente da identidade. Pelas observações anteriores, podemos supor a menos de conjugação que f fixa 0 e ∞. Se f é apresentado pela matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

dizer que f fixa ∞ equivale a considerar $c = 0$, daí

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

e dizer que $f(0) = 0$ equivale a considerar $b = 0$. Portanto, $f(z) = \dfrac{a}{d}z$, onde $k = \dfrac{a}{d} \in \mathbb{C}$ e $k \neq 0, 1$, pois se $k = 1$, f teria um número infinito de pontos fixos e se $k = 0$, f seria identicamente nula. $\square$

Observação 1.3.4. *As transformações* γ_1 *e* γ_k *são chamadas formas padrão.*

Definição 1.3.5. *Seja* f *um elemento de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *diferente da identidade, então*

i) f *é parabólico se, e somente se* f *é conjugado a* γ_1.

ii) f *é elíptico se, e somente se* f *é conjugado a* γ_k *com* $|k| = 1,\ k \neq 1$.

ii) f *é loxodrômico se, e somente se* f *é conjugado a* γ_k *com* $|k| \neq 1$.

Sumarizando, podemos assim classificar as transformações de Möbius em $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ como segue.

Se g é qualquer transformação de Möbius em $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ diferente da identidade, então como observamos acima, g tem exatamente dois pontos fixos α e β em $\widehat{\mathbb{C}}$ ou g tem exatamente um ponto fixo α em $\widehat{\mathbb{C}}$. Como $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ age triplamente transitivamente em $\widehat{\mathbb{C}}$, temos que existe h satisfazendo as seguintes condições

$$h(\alpha) = \infty,\ h(\beta) = 0 \text{ e } h(g(\beta)) = 1 \text{ se } g(\beta) \neq \beta.$$

Observe que $hgh^{-1}(\infty) = h(g(\alpha)) = h(\alpha) = \infty$ e

$$hgh^{-1}(0) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ g(\beta) = \beta \\ 1, & \text{se } \ g(\beta) \neq \beta \end{cases}$$

daí, se g fixa α e β então hgh^{-1} fixa 0 e ∞. Se g fixa somente α então hgh^{-1} fixa ∞ e $hgh^{-1}(0) = 1$. Temos verificado que qualquer Transformação de Möbius diferente da identidade é conjugada a uma aplicação que chamamos de forma padrão.

Proposição 1.3.6. *Sejam* k_1 *e* $k_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$ *distintos tais que* $k_1 \neq k_2^{-1}$. *Então* $f(z) = k_1 z$ *e* $F(z) = k_2 z$ *não são conjugadas em* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$.

Demonstração. Suponha que $F = gfg^{-1}$, com $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Note que como f e F fixam 0 e ∞ temos que F fixa $g(0)$ e $g(\infty)$. Assim, $g(0) = 0$ e $g(\infty) = \infty$ ou $g(0) = \infty$ e $g(\infty) = 0$.

Se $g(0) = 0$ e $g(\infty) = \infty$, então $g(z) = \alpha z$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Daí, $g \circ f(z) = g(k_1 z) = \alpha k_1 z = k_1 \alpha z = k_1 g(z) = f \circ g(z)$. Logo, $F = gfg^{-1} = fgg^{-1} = f$ o que é um absurdo.

Se $g(0) = \infty$ e $g(\infty) = 0$, temos que se $g(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ então como $g(0) = \dfrac{b}{d}$ e $g(\infty) = \dfrac{a}{c}$, temos que $a = d = 0$. Assim, $g(z) = \dfrac{b}{cz}$.

Além disso, como $g^{-1}(z) = \dfrac{b}{cz} = g(z)$ então

$$k_2 z = F(z) = gfg^{-1}(z) = gf\left(\frac{b}{cz}\right) = g(\frac{k_1 b}{cz}) = \frac{b}{c\left(\dfrac{k_1 b}{cz}\right)} = \frac{z}{k_1},$$

daí $k_2 = \dfrac{1}{k_1}$ que também é absurdo. Portanto, segue o resultado. $\square$

Agora vamos interpretar a ação dos elementos de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ em $\mathbb{H}^3$ a menos de conjugação.

- Suponha que f é um elemento de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ tal que f seja parabólico, então f é conjugado a γ_1, ou seja, existe $h \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ tal que $hfh^{-1} = \gamma_1$. Daí, como

  $$f(z) = z \Leftrightarrow \gamma_1(h(z)) = h(z),$$

  estudar os pontos fixos de f é o mesmo que estudar os pontos fixos de γ_1 e o mesmo vale para os elementos elípticos e loxodrômicos, ou seja, estudar os pontos fixos de elementos elípticos e loxodrômicos equivale a estudar os pontos fixos da forma padrão γ_k.

  Seguindo esse raciocínio, temos uma equivalência onde podemos caracterizar os elementos parabólicos como os elementos de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ que possuem exatamente um ponto fixo em $\partial\mathbb{H}^3$.

  Para notar que $f \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ parabólico não fixa nenhum ponto em $\mathbb{H}^3$, observamos a ação de γ_1 em $\mathbb{H}^3$ pela extensão de Poincaré.

  Como γ_1 é representado pela matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, devemos ter

  $$\gamma_1(z+tj) = z+1+tj$$

  portanto, se f é parabólico, temos que f fixa apenas um ponto em $\partial\mathbb{H}^3$ e não fixa nenhum ponto em $\mathbb{H}^3$.

  Se f não é parabólico, temos que f é conjugada à forma padrão γ_k para um $k \in \mathbb{C} - \{0,1\}$. Note que γ_k sempre fixa 0 e ∞. Para verificar a quantidade de pontos fixos em $\mathbb{H}^3$, observamos a ação de γ_k em $\mathbb{H}^3$ pela extensão de Poincaré.

  Como γ_k é representado pela matriz $\begin{pmatrix} k^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & k^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$, temos que

  $$\gamma_k(z+tj) = \frac{\sqrt{k}z\overline{\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)}}{\left|\frac{1}{\sqrt{k}}\right|^2} + \frac{t}{\left|\frac{1}{\sqrt{k}}\right|^2}j = kz + |k|tj$$

- Se f é loxodrômico, então f é conjugada à forma padrão γ_k com $|k| \neq 1$, assim f fixa somente dois pontos, que estão na fronteira de $\mathbb{H}^3$, pois γ_k fixa somente 0 e ∞ em $\partial\mathbb{H}^3$ e não fixa nenhum ponto em $\mathbb{H}^3$, basta observar a ação de γ_k em $\mathbb{H}^3$ pela extensão de Poincaré.

- Se f é elíptico, então f é conjugada à forma padrão γ_k com $|k| = 1$, $k \neq 1$. Assim,

$$\gamma_k(z + tj) = kz + tj$$

  daí notamos que f possui uma quantidade infinita de pontos fixos em $\mathbb{H}^3$, pois o conjunto de pontos fixos de γ_k é $\{tj;\ t \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$.

Agora exibimos como classificar o tipo da transformação de Möbius em $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ observando seu traço.

Dada uma Transformação de Möbius diferente da identidade em $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, já observamos que existem duas matrizes que representam f que diferem por um sinal, assim o traço de um elemento em $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ não está bem definido, mas difere apenas por um sinal para representantes distintos. No entanto, o traço ao quadrado está bem definido. Um cálculo simples mostra que $trAB = trBA$, assim, o traço é invariante por conjugação, pois $trABA^{-1} = trBAA^{-1} = trB$.

Já havíamos observado também que uma Transformação de Möbius diferente da identidade $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ tem no máximo dois pontos fixos em $\widehat{\mathbb{C}}$ e determinar os pontos fixos de f é encontrar as raízes da equação $f(z) = z$, que equivale a encontrar as raízes da equação $cz^2 + (d-a)z - b = 0$. Assim, temos dois casos a considerar, $c \neq 0$ e $c = 0$. Se $c \neq 0$, temos que os pontos fixos de f são

$$\frac{a - d \pm \sqrt{tr^2 f - 4}}{2c}$$

Note que se $c = 0$, então $f(z) = \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{d}$. Daí, se f não é parabólica então

$$f(z) = z \Leftrightarrow az + b = dz \Leftrightarrow z = \frac{b}{d-a}$$

é um ponto fixo de f.

Portanto, note que conhecendo informações sobre $tr^2 f$, podemos obter informações sobre os pontos fixos de f. Passamos assim a notar a importância do número k definido na forma padrão.

Proposição 1.3.7. *Seja f um elemento de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *diferente da identidade, então* $tr^2 f = k + \frac{1}{k} + 2$.

Demonstração. Se f é parabólica, temos que f é conjugada à forma padrão γ_1, assim

$$tr^2 f = tr^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

Se f não é parabólica, f é conjugada a forma padrão $\gamma_k(z) = kz$. Note que γ_k está definida pela matriz

$$\begin{pmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{k}} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$$

assim, $tr^2 f = tr^2 \gamma_k = \left(\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 = k + \frac{1}{k} + 2$. □

Definição 1.3.8. *Seja $f \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ uma transformação loxodrômica. Dizemos que f é hiperbólica se $f(D) = D$ para algum disco aberto (ou semi-plano) D em $\widehat{\mathbb{C}}$. Do contrário, f é dito estritamente loxodrômico.*

Na prática, para testar o tipo de isometria de um elemento $f \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ temos o seguinte

Teorema 1.3.9. *Seja f um elemento de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *diferente da identidade. Então*

(i) f é parabólica se, e somente se $trf = \pm 2$.

(ii) f é elíptica se, e somente se $trf \in (-2, 2)$.

(iii) f é hiperbólica se, e somente se $trf \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

(iv) f é loxodrômica se, e somente se $trf \notin \mathbb{R}$.

Demonstração. Inicialmente suponha que $f \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ é conjugado a forma padrão γ_p, assim, temos que $f \sim \gamma_p \sim \gamma_{\frac{1}{p}}$ e $tr^2(f) = tr^2(\gamma_p) = p + \frac{1}{p} + 2$.

i) [$\Rightarrow$] Se f é parabólico, então $f \sim \gamma_1$, assim $p = 1$ e consequentemente $tr^2(f) = 4$.

[$\Leftarrow$] Se $tr^2(f) = 4$ então $p + \frac{1}{p} + 2 = 4$, daí $p = 1$ e portanto $f \sim \gamma_1$. Logo, f é parabólico.

ii) [$\Rightarrow$] Se f é elíptico, $f \sim \gamma_p$, $|p| = 1$, $p \neq 1$. Como $p \in \mathbb{C}$, temos que $p = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ e $cos(\theta) \neq 1$, assim $tr^2(f) = e^{i\theta} + \dfrac{1}{e^{i\theta}} + 2 = 2cos(\theta) + 2$, daí $tr^2(f) \in [0, 4)$ por uma simples visualização gráfica.

[$\Leftarrow$] Se $tr^2(f) \in [0,4)$ então podemos escrever $tr^2(f) = 2+2cos(\theta)$, onde $cos(\theta) \neq 1$. Assim, temos que $p + \frac{1}{p} + 2 = 2 + 2cos(\theta)$, então as soluções para essa equação são $p = e^{i\theta}$ ou $p = e^{-i\theta}$. Daí, $|p| = 1$, $p \neq 1$ e logo f é elíptico.

iii) [$\Rightarrow$] Suponha que f é hiperbólico, como $f \sim \gamma_p$ temos que γ_p também é hiperbólico. Tomemos D um disco tal que $\gamma_p(D) = D$, daí se $z \in D$, $\underbrace{\gamma_p(...(\gamma_p(z)))}_{n\text{vezes}} \in D$, temos que $\{p^n z; n \in \mathbb{Z}\} \subset D$. Como $|p| \neq 1$, concluímos que 0 e ∞ estão no fecho de D. Agora tomando z no exterior de D, concluímos que $\{p^n z; n \in \mathbb{Z}\}$ está no exterior de D, onde 0 e ∞ estão na fronteira de D. Assim, para preservar D, é necessário que γ_p deixe invariante cada semi-linha de 0 a ∞ na fronteira de D. Portanto, como $p > 0$, temos $tr^2(f) > 4$.

[$\Leftarrow$] Temos que $tr^2(f) \in (4, +\infty)$. Então as possíveis soluções para $p + \frac{1}{p} + 2$ são digamos $p = k$ ou $p = \frac{1}{k}$, onde $k > 0$. Logo, γ_p preserva o semi-plano superior e portanto é hiperbólico, assim f é hiperbólico.

iv) Basta utilizar os itens anteriores.

$\square$

Proposição 1.3.10. *Sejam f e g elementos de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *diferentes da identidade. Então f e g são conjugadas se, e somente se, $tr^2 f = tr^2 g$.*

Demonstração. [$\Rightarrow$] $f \sim g$ então existe h tal que $f = hgh^{-1}$, assim

$$tr^2(f) = tr^2(hgh^{-1}) = tr^2(g).$$

[$\Leftarrow$] Temos que $tr^2(f) = tr^2(g)$. Sabemos que f e g são cada um conjugado a uma forma padrão, digamos $f \sim \gamma_p$ e $g \sim \gamma_q$ então

$$tr^2(\gamma_p) = tr^2(f) = tr^2(g) = tr^2(\gamma_q)$$

e como $tr^2(\gamma_k) = k + \frac{1}{k} + 2$, temos que,

$$p + \frac{1}{p} + 2 = q + \frac{1}{q} + 2 \Rightarrow p = q \text{ ou } p = \frac{1}{q}.$$

Afirmação: $\gamma_p \sim \gamma_{\frac{1}{p}}$.

De fato, se $p = 1$ não há nada para provar. Se $p \neq 1$, temos que considerando $h(z) = -\frac{1}{z}$, segue que

$$h\gamma_p h^{-1}(z) = h\gamma_p(-\frac{1}{z}) = h(-\frac{p}{z}) = \frac{1}{p}z = \gamma_{\frac{1}{p}}.$$

Temos assim $f \sim \gamma_p$, $g \sim \gamma_q$ e como $p = q$ ou $p = \frac{1}{q}$, $\gamma_p \sim \gamma_q$. Portanto, como conjugação é uma classe de equivalência, isso mostra que $f \sim g$. $\square$

1.4 Subgrupos: discretos, fuchsianos e elementares

1.4.1 Grupos discretos

Nesta seção estudamos algumas propriedades dos subgrupos do grupo $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. Denotamos $\mathcal{F}_f$ o conjunto dos pontos fixos de f.

Lema 1.4.1. *Sejam f e g transformações em $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, diferentes da identidade tais que $fg = gf$. Então, f preserva $\mathcal{F}_g$ e g preserva $\mathcal{F}_f$.*

Demonstração. Seja $z \in \mathcal{F}_f$, então $fg(z) = gf(z) = g(z)$. Assim, $g(z) \in \mathcal{F}_f$ e g é invariante em $\mathcal{F}_f$. Analogamente, f é invariante em $\mathcal{F}_g$. $\square$

Proposição 1.4.2. *Sejam f e g transformações em $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. f e g comutam se, e somente se, fixam os mesmos pontos.*

Demonstração. $[\Rightarrow]$ Suponha que f e g comutam. Assim, se $z \in \mathcal{F}_f$, então

$$f(g(z)) = g(f(z)) = g(z)$$

logo, $g(z) \in \mathcal{F}_f$, ou seja, $g(\mathcal{F}_f) \subset \mathcal{F}_f$. Como f e g comutam é equivalente a dizer que f e g^{-1} comutam, temos que

$$f(g^{-1}(z)) = g^{-1}(f(z)) = g^{-1}(z)$$

daí, $g^{-1}(z) \in \mathcal{F}_f$, ou seja, $g^{-1}(\mathcal{F}_f) \subset \mathcal{F}_f$. Portanto, $g(\mathcal{F}_f) = \mathcal{F}_f$. Analogamente, $f(\mathcal{F}_g) = \mathcal{F}_g$

$[\Leftarrow]$ Suponhamos que f e g fixam os mesmos pontos. Como comutar ou fixar os mesmos pontos são propriedades invariantes por conjugação, podemos supor que f e g são translações ou são da forma $z \mapsto \alpha z$ que claramente comutam. $\square$

A seguir, demos a definição de conjunto limite.

Definição 1.4.3. *Sejam $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ e Γ um subgrupo de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, dizemos que α é ponto limite com respeito a Γ, se existem $z \in \mathbb{H}^3$ e transformações distintas f_n em Γ, tais que $f_n(z) \to \alpha$, $n \to \infty$.*

Denotamos o conjunto dos pontos limites de um subgrupo por $\mathbb{L}(\Gamma)$.

Definição 1.4.4. *Dado um subgrupo* Γ *de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, *o conjunto* $\widehat{\mathbb{C}} - \mathbb{L}(\Gamma)$ *é chamado o conjunto regular ou domínio de descontinuidade.*

Denotamos o conjunto regular por $\Omega(\Gamma)$.

Proposição 1.4.5. *Se o conjunto limite é finito ele consiste de um ou dois pontos.*

Dado um subgrupo Γ de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, quando um número infinito de transformações fixam α ou um número infinito de interações distintas da mesma transformação fixam α, temos que $\alpha \in \mathbb{L}(\Gamma)$. Assim, os pontos onde se acumula uma órbita definida por Γ são também os pontos limites.

Definição 1.4.6. *Seja* Γ *um subgrupo de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, Γ *é descontínuo se* $\Omega(\Gamma) \neq \emptyset$

Definição 1.4.7. *Seja* X *um conjunto não vazio. Dado* $x \in X$, *a órbita de* x *sob a ação de um grupo* G *é denotada por* $G(x) = \{g \cdot x;\ g \in G\}$.

Note que nenhuma órbita se acumula em um ponto regular $\alpha \in \Omega(\Gamma)$, pois caso contrário, existiriam $f_n \in \Gamma$ e $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ tais que $f_n(z) \to \alpha$ implicando que $\alpha \in \mathbb{L}$ o que é um absurdo.

Teorema 1.4.8. *Seja* Γ *um subgrupo de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. *Os conjuntos* $\mathbb{L}(\Gamma)$ *e* $\Omega(\Gamma)$ *são invariantes pela ação de* Γ.

Demonstração. Seja $\gamma \in \Gamma$, basta mostrar que $\gamma(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$. Seja $\alpha \in \mathbb{L}$, então existem $\gamma_n \in \Gamma$ distintos e $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ tais que $\gamma_n(z) \to \alpha$. Daí

$$\gamma\gamma_n(z) \to \gamma(\alpha) \Rightarrow \gamma(\alpha) \in \mathbb{L} \Rightarrow \gamma(\mathbb{L}) \subset \mathbb{L}.$$

Temos ainda que $\gamma^{-1}(\mathbb{L}) \subset \mathbb{L}$, assim $\gamma\gamma^{-1}(\mathbb{L}) \subset \gamma(\mathbb{L})$ implica que $\mathbb{L} \subset \gamma(\mathbb{L})$ e portanto $\gamma(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$ □

Seja Γ um subgrupo de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ transitivo na esfera de Riemann, ou seja, dados quaisquer dois pontos em $\widehat{\mathbb{C}}$, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que leva um ponto no outro. Então existe apenas uma órbita e o grupo Γ não é descontínuo, pois $\forall z \in \widehat{\mathbb{C}}$ a órbita de z se acumula em z. Note que $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ é transitivo, pois podemos mandar qualquer ponto ao ∞.

Se Γ é finito, segue por definição que Γ é descontínuo, pois não há uma sucessão de elementos distintos em Γ.

Definição 1.4.9. *Sejam* $f,\ f_n \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$*,* $n \in \mathbb{N}$*. Dizemos que* $f_n \to f$ *se* $a_n \to a$*,* $b_n \to b$*,* $c_n \to c$*,* $d_n \to d$*, onde*

$$f_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Definição 1.4.10. *Um subgrupo* Γ *de* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ *é discreto se não existe uma sucessão de matrizes distintas* $f_n \in \Gamma$ *tias que* $f_n \to f$*,* $n \to \infty$ *onde* $f \in \Gamma$

Lema 1.4.11. *Seja* Γ *subgrupo de* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$*.* Γ *é discreto se, e somente se, não existe uma sucessão* $f_n \in \Gamma$ *distintas para todo* $n \in \mathbb{N}$*, tais que* $f_n \to Id$*.*

Demonstração. [$\Rightarrow$] Segue diretamente da definição.

[$\Leftarrow$] Suponhamos Γ não discreto, assim existem matrizes $f_n \in \Gamma$ distintas tais que $f_n \to f$. Logo, $f_n^{-1} \to f^{-1}$ implica que $f_{n+1}f_n^{-1} \to ff^{-1} = Id$.

Se $f_{n+1}f_n^{-1}$ é um conjunto finito de matrizes, temos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N$, temos $f_{n+1}f_n^{-1} = Id$, assim, $f_{n+1} = f_n$, o que é absurdo pois as f_n são distintas. Se $f_{n+1}f_n^{-1}$ é uma sucessão infinita, podemos tomar uma subsequencia convergente, o que também contradiz a hipótese. □

Teorema 1.4.12. *Seja* $\widehat{\Gamma}$ *um subgrupo de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *descontínuo, então* $\widehat{\Gamma}$ *é discreto.*

Demonstração. Seja Γ a pré-imagem de $\widehat{\Gamma}$ pela projeção $\mathbb{P} : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ e suponha Γ não discreto, assim existem matrizes distintas $f_n \in \Gamma$, tai que $f_n \to Id$. Daí, $f_n(z) \to z$, $\forall\ z \in \widehat{\mathbb{C}}$ implica que Γ não é descontínuo. Logo, $\widehat{\Gamma}$ não é descontínuo. □

Note que se um grupo não é discreto então todos os pontos são pontos limites.

Um exemplo de grupos discretos são os grupos Kleinianos ao qual estudamos mais adiante.

1.4.2 Grupos Fuchsianos e elementares

Seja Λ um conjunto de índices e X uma variedade diferenciável. Dizemos que uma família $\{A_\alpha;\ \alpha \in \Lambda\} \subset X$, com $X = \bigcup A_\alpha$, é localmente finita, se para qualquer ponto $p \in X$ existe uma vizinhança V de p tal que $V \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para um número finito de $\alpha \in \Lambda$.

Definição 1.4.13. *Dizemos que um grupo qualquer* G *age de forma propriamente descontínua em* X*, se para todo* $K \subset X$ *compacto, existe uma quantidade finita de elementos* $g \in G$ *tal que* $gK \cap K \neq \emptyset$*.*

Definição 1.4.14. *Sejam* Γ *subgrupo de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$*,* $z \in \widehat{\mathbb{C}}$*, definimos o estabilizador de* z *por* $\Gamma_z = \{f \in \Gamma;\; f(z) = z\}$

Lema 1.4.15. *Seja* Γ *subgrupo de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *e* f *um elemento em* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$*. Então* $\Gamma_{f(z)} = f\Gamma_z f^{-1}$

Demonstração. Temos que $g \in \Gamma_{f(z)}$ equivale a dizer que $g(f(z)) = f(z)$, assim $f^{-1}gf(z) = z$. Daí, $f^{-1}gf \in \Gamma_z$ e por sua vez equivale a $g \in f\Gamma_z f^{-1}$ □

Definição 1.4.16. *Um subgrupo discreto de* $PSL(2,\mathbb{R})$ *é chamado grupo fuchsiano.*

Analogamente à métrica hiperbólica em $\mathbb{H}^3$, podemos definir uma métrica hiperbólica em $\mathbb{H}^2$.

Definição 1.4.17. *O semi-plano*

$$\mathbb{H}^2 = \{(x,y);\; x \in \mathbb{R},\; y \in \mathbb{R}_+\}$$

munido com a métrica

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y}$$

se chama o plano hiperbólico ou modelo do semi-plano.

Teorema 1.4.18. *O grupo* $PSL(2,\mathbb{R})$ *atua como um grupo de isometrias em* $\mathbb{H}^2$ *com a métrica hiperbólica definida acima.*

1.5 Corpos numéricos e extensões de corpos

Os corpos invariantes K são definidos como extensões de números racionais $\mathbb{Q}$ gerado por elementos $t_i \in \mathbb{C}, i \in \Omega$ um conjunto de índices, ou seja, $K = \mathbb{Q}(\{t_i; i \in \Omega\})$ é o menor subcorpo de $\mathbb{C}$ contendo $\{t_i; i \in \Omega\}$. O conjunto Ω é usualmente finito e os elementos t_i são frequentemente algébricos, isto é, satisfazem polinômios com coeficientes racionais. Assim, K é dito uma extensão finita de $\mathbb{Q}$ e denominado **corpo numérico**.

Desde que $\mathbb{Q}$ tem característica zero (o menor $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot 1 = 0$), K é uma extensão simples $K = \mathbb{Q}(t)$, onde t satisfaz um polinômio mônico irredutível $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grau igual ao grau da extensão $[K : \mathbb{Q}] = d$.

As raízes do polinômio minimal são chamadas conjugados de t. Se denotarmos $t = t_1, ..., t_d$, então a atribuição $t \to t_i$ induz isomorfismos de corpos $\mathbb{Q}(t) \to \mathbb{Q}(t_i)$. Consequentemente, se $\sigma : K \to \mathbb{C}$ é um monomorfismo de corpos (homomorfismo injetor), então

$\sigma(t)$ é uma raiz do polinômio minimal de t. Estes são exatamente d corpos (ou Galois) de monomorfismos que denotamos por $\sigma_1, ..., \sigma_d$.

Desde que f tem coeficientes em $\mathbb{Q}$, as raízes t_i são números reais ou pares conjugados complexos. Então os monomorfismos serão designados como real se $\sigma_i \subset \mathbb{R}$, caso contrário eles ocorrem em pares $(\sigma_i, \overline{\sigma}_i)$.

Se denotarmos r_1 o número de monomorfismos reais e r_2 o número de pares conjugados complexos, temos

$$d = r_1 + 2r_2$$

1.6 Grupo Kleiniano

1.6.1 Subgrupos de PSL$(2, \mathbb{C})$

Nesta seção apresentamos alguns resultados interessantes envolvendo subgrupos de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.

Definição 1.6.1. *Se f não é parabólico, então f tem um par de pontos fixos e a única geodésica em $\mathbb{H}^3$ ligando-os é denominada eixo de f. Notação: A_f*

Definição 1.6.2. *Sejam g e h elementos de* $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. *O comutador de g e h é definido por $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$.*

Pela definição de comutador, se A e B são elementos de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ e representam as Transformações de Möbius g e h, temos que $tr[g, h] = tr(ABA^{-1}B^{-1})$. Note ainda que o traço do comutador está bem definido independente da escolha de representantes.

Teorema 1.6.3. *Sejam g e h elementos de* $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. *Então g e h tem um ponto fixo comum em $\widehat{\mathbb{C}}$ se, e somente se, $tr[g, h] = 2$.*

Demonstração. $[\Rightarrow]$ Se g e h possuem um ponto fixo comum, podemos assumir a menos de uma conjugação que seja ∞. Daí,

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d},\ g(\infty) = \infty \Rightarrow \frac{a}{c} = \infty \Rightarrow c = 0$$

$$h(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},\ h(\infty) = \infty \Rightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \infty \Rightarrow \gamma = 0$$

$$\Rightarrow g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix},\ h = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

calculemos agora $tr[g,h]$, para isso

$$\begin{aligned}
[g,h] &= ghg^{-1}h^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-b}{ad} \\ 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & \frac{-\beta}{\alpha\delta} \\ 0 & \frac{1}{\delta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a\alpha & a\beta + b\delta \\ 0 & d\delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a\alpha} & \frac{-\beta}{a\alpha\delta} - \frac{b}{ad\delta} \\ 0 & \frac{1}{d\delta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

onde $X = -(a\beta + d\delta)\left(\dfrac{\beta}{a\alpha\delta} + \dfrac{b}{ad\delta}\right)$. Portanto, $tr[g,h] = 2$.

[$\Leftarrow$] Suponhamos agora que $tr[g,h] = 2$. Se g é parabólico,

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

podemos tomar $a = d = 1$, $b \neq 0$. Daí, tomando

$$h = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

temos

$$tr[g,h] = 2 + b^2\gamma^2 + b(a-d)\gamma(\alpha - \delta) - (a-d)^2\gamma\beta,$$

assim $\gamma = 0$, ou seja, g e h fixam ∞.

Caso g não seja parabólico, devemos ter que g fixa pelo menos 0 e ∞, assim $c = b = 0$, $ad = 1$ com $a \neq d$, então $2 = tr[g,h] = 2 - (a-d)^2\gamma\beta$. Portanto,

$$(a-d)^2\gamma\beta = 0 \Rightarrow a - d = 0 \text{ ou } \gamma\beta = 0,$$

mas como $a \neq d$, devemos ter $\gamma\beta = 0$, assim $\gamma = 0$ ou $\beta = 0$. Daí h e g possuem um ponto fixo comum em $\widehat{\mathbb{C}}$. $\square$

Teorema 1.6.4. *Um subgrupo* Γ *de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *contém apenas elementos elípticos e a identidade se, e somente se, os elementos de* Γ *tem um ponto fixo comum em* $\mathbb{H}^3$.

Note que se g é um elemento de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ diferente da identidade e tem ordem finita, então necessariamente g é elíptico. Portanto, temos o seguinte

Corolário 1.6.5. *Os elementos de um subgrupo finito de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *tem um ponto fixo em comum em* $\mathbb{H}^3$.

Na seção de classificação das isometrias caracterizamos os elementos elípticos, parabólicos e loxodrômicos pelos seus pontos fixos e apresentamos como verificar o tipo de elemento de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ observando seu traço. Agora apresentamos a noção de ponto atrator e repulsor, onde ressaltamos a importância das formas padrões e as informações geométricas que elas podem nos passar.

Se g é parabólico, então existe um elemento h de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ tal que

$$hgh^{-1}(z) = z+1 \Rightarrow hgh^{-1}(hgh^{-1}(z)) = hgh^{-1}(z+1) = hg^2h^{-1}(z) = z+2$$

$$\Rightarrow hg^nh^{-1}(z) = z+n$$

tomando $h^{-1}(z) = w$, temos $z = h(w)$, assim

$$hg^n(w) = h(w)+n \Rightarrow g^n(w) = h^{-1}(h(w)+n) \Rightarrow g^n(z) = h^{-1}(h(z)+n).$$

Note que para cada $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, $hg^nh^{-1}(z) \to \infty$ quando $|n| \to \infty$. Portanto, considerando α ponto fixo de g, temos que $g^n(z) \to \alpha$.

Por outro lado, se g não é parabólico, g tem pelo menos dois pontos fixos α e β, assim existe um elemento h em $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ tal que

$$hgh^{-1}(z) = tz,\ (t \neq 0,1) \Rightarrow hg^nh^{-1}(z) = t^nz.$$

Daí, se g é loxodrômico, ou seja, $|t| \neq 1$, temos que se $z \neq \alpha$ ou $z \neq \beta$, então as imagens $g^n(z)$ são distintas e se acumulam somente em α e β. Se g^n se aproxima de α, dizemos que α é ponto fixo atrator de g e β é chamado ponto fixo repulsor. Além disso, g age como um movimento parafuso, transladando e rotacionando $\mathbb{H}^3$ ao longo do eixo ligando α e β. Note ainda que

$$hgh^{-1}(z) = re^{i\theta}z,$$

onde r é o parâmetro de translação e θ é o parâmetro de rotação.

Se g é elíptico, ou seja, $|t| = 1$, temos que g tem círculos invariantes. Além disso, g rotaciona $\mathbb{H}^3$ em torno do eixo ligando α e β. Assim $hgh^{-1}(z) = e^{i\theta}z$, onde θ é o parâmetro de rotação. Essas observações sobre iterações de elementos elípticos, loxodrômicos e parabólicos, nos levam ao seguinte

Teorema 1.6.6. *Seja g um elemento de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$

i) Se g é parabólico com ponto fixo α. Então para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, $g^n(z) \to \alpha$, onde essa convergência é uniforme nos subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$

ii) Se g é loxodrômico, os pontos fixos de g, digamos α e β, são tais que $g^n(z) \to \alpha$, se $z \neq \beta$, onde a convergência é uniforme nos subconjuntos compactos de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\beta\}$.

iii) Se g é elíptico com pontos fixos α e β. Então g deixa invariante cada círculo para o qual α e β são pontos inversos.

Definição 1.6.7. *Seja Γ subgrupo de $PSL(2,\mathbb{C})$.*

i) Dizemos que Γ é redutível se todo elemento de Γ tem um ponto fixo comum em $\widehat{\mathbb{C}}$. Caso contrário, Γ é dito irredutível.

ii) Dizemos que Γ é elementar se tem uma órbita finita na ação em $\mathbb{H}^3 \cup \widehat{\mathbb{C}}$. Caso contrário, Γ é dito não elementar.

Um resultado interessante envolvendo grupos elementares é o seguinte (ver a página 90 de [2]).

Teorema 1.6.8. *Todo subgrupo não elementar de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *contém uma quantidade infinita de elementos loxodrômicos, onde nenhum par tem um ponto fixo comum.*

Podemos caracterizar grupos redutíveis pela condição traço, como afirma o seguinte

Lema 1.6.9. *Sejam x, y elementos de $PSL(2,\mathbb{C})$. Então $\langle x, y\rangle$ é redutível se, e somente se, $tr[x,y] = 2$*

Demonstração. Basta aplicar o teorema 1.6.3. □

Mais geralmente, se x e y são elementos de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ e X e Y são suas pré-imagens em $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, denotamos $\mathrm{M}(X,Y)$ a matriz 4x4 onde suas colunas são as matrizes Id, X, Y e XY. Primeiramente verifiquemos que

$$detM(X,Y) = 2 - tr[X,Y]$$

De fato, tomemos

$$M(X,Y) = \begin{pmatrix} 1 & a & \alpha & a\alpha + b\gamma \\ 0 & b & \beta & a\beta + b\delta \\ 0 & c & \gamma & c\alpha + d\gamma \\ 1 & d & \delta & c\beta + d\delta \end{pmatrix},$$

onde $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ e $Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Daí,

$$XY = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$$

$$[X,Y] = XYX^{-1}Y^{-1} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\delta + b\gamma & -d\beta - b\alpha \\ -c\delta - a\gamma & c\beta + a\alpha \end{pmatrix}$$

Um cálculo simples mostra que

$$\begin{aligned} detM(X,Y) &= 2bc\gamma\beta - 2b\delta c\alpha - (c\beta)^2 - \beta cd\delta + \beta cd\alpha + d^2\gamma\beta + a\beta c\delta - 2a\beta d\gamma + \\ &\quad + b\delta^2 c - b\delta d\gamma - a\beta c\alpha + a^2\beta\gamma + ab\delta\gamma + \alpha^2 bc + \alpha bd\gamma - a\alpha b\gamma - (b\gamma)^2 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} 2 - tr[X,Y] &= 2 - (c\beta)^2 - \beta cd\delta + \beta cd\alpha + d^2\gamma\beta + a\beta c\delta + b\delta^2 c - b\delta d\gamma - \\ &\quad - a\beta c\alpha + a^2\beta\gamma + ab\delta\gamma + \alpha^2 bc + \alpha bd\gamma - a\alpha b\gamma - (b\gamma)^2 \end{aligned}$$

Assim, eliminando os termos em comum, mostrar a igualdade desejada equivale a verificar a igualdade

$$2b\gamma c\beta - 2b\delta c\alpha - 2a\beta d\gamma = 2 - 2a\alpha d\delta,$$

que de fato acontece, pois

$$\begin{aligned} 2b\gamma c\beta - 2b\delta c\alpha - 2a\beta d\gamma + 2a\alpha d\delta &= 2\gamma\beta(bc - ad) + 2\alpha\delta(ad - bc) \\ &= 2(\alpha\delta - \gamma\beta) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Note que quando $\langle x, y\rangle$ é redutível, temos $tr[X,Y] = 2$, assim, $detM(X,Y) = 0$. Logo, temos o seguinte resultado:

Lema 1.6.10. *Sejam x, y elementos de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. *O grupo $\langle x, y\rangle$ é irredutível se, e somente se, os vetores Id, X, Y e XY são linearmente independentes.*

Definição 1.6.11. *Um grupo Kleiniano Γ é um subgrupo discreto de $PSL(2,\mathbb{C})$.*

Anteriormente caracterizamos grupos discretos como grupos onde o elemento identidade é isolado. Note que ser discreto também implica que a órbita de qualquer ponto em $\mathbb{H}^3$ é discreta, ou seja, para todo x em $\mathbb{H}^3$ existe um compacto K contendo x tal que

$$gK \cap K = \emptyset \Leftrightarrow gx = x,$$

que é equivalente a dizer que Γ age descontínuamente em $\mathbb{H}^3$ e nessas condições, temos que o estabilizador de um ponto em $\mathbb{H}^3$ é finito, pois caso contrário $\{f \in \Gamma; fK \cap K \neq \emptyset\}$ seria infinito e Γ não agiria de forma descontínua em $\mathbb{H}^3$. Daí também podemos caracterizar os grupos Kleinianos como os subgrupos de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ que agem propriamente descontinuamente em $\mathbb{H}^3$.

Lema 1.6.12. *Seja Γ um grupo Kleiniano. Um elemento parabólico e um elemento loxodrômico de Γ não tem um ponto fixo comum em $\widehat{\mathbb{C}}$.*

Como um grupo Kleiniano Γ age descontinuamente em $\mathbb{H}^3$, podemos construir um domínio fundamental.

Definição 1.6.13. *Seja $\mathcal{F}$ um subconjunto fechado de $\mathbb{H}^3$. $\mathcal{F}$ é um domínio fundamental se*

- $\bigcup_{f \in \Gamma} f\mathcal{F} = \mathbb{H}^3$
- $\mathcal{F}^0 \cap f\mathcal{F}^0 = \emptyset$, $\forall f \neq Id$, $f \in \Gamma$, $\mathcal{F}^0$ *interior de* $\mathcal{F}$.
- $\partial\mathcal{F}$ *tem medida nula.*

Adiante o cálculo de volume será importante em nossas discussões. Isso nos leva a seguinte

Definição 1.6.14. *O cálculo de volumes é realizado com respeito ao elemento volume* $dV = \dfrac{dxdydt}{t^3}$. *Notação:* $Vol = \int dV$

Definição 1.6.15. *Um grupo Kleiniano Γ tem covolume finito se tem um domínio fundamental de volume finito. Denotamos o covolume de Γ por* $Covol(\Gamma) = \int_{\mathcal{F}} dV$

Uma importante consequência envolvendo subgrupos de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ com covolume finito é que eles são finitamente gerados.

1.6.2 Variedade Hiperbólica

Nesta seção relacionamos os grupos Kleinianos com uma 3-variedade hiperbólica. As principais referencias para esta seção foram [5] e [4].

Definição 1.6.16. *Um grupo G é dito ser livre de torção se, e somente se, nenhum elemento de $G \setminus \{e\}$ tem ordem finita.*

No capítulo seguinte trabalhamos com grupos Kleinianos de covolume finito, daí estamos em condições de enunciar o seguinte

Teorema 1.6.17 (Selberg's Lemma)**.** *Seja Γ um subgrupo de $GL(n, \mathbb{C})$ finitamente gerado, então Γ tem um subgrupo de índice finito livre de torção.*

Definição 1.6.18. *Uma n-variedade hiperbólica é uma variedade com o modelo do n-espaço hiperbólico. Ou seja, todo ponto de uma n-variedade hiperbólica M com a métrica riemanniana tem uma vizinhança isométrica a um subconjunto aberto do n-espaço hiperbólico.*

Definição 1.6.19. *Seja X um espaço Hausdorff localmente compacto e G um grupo de homeomorfismos de X. G age livre (livremente) em X se, e somente se, $\{\forall x \in X,\ g \in G,\ g(x) = x \Rightarrow g = Id\}$.*

Se Γ é um grupo Kleiniano livre de torção, então Γ age livre e descontínuamente em $\mathbb{H}^3$, de modo que o quociente $\mathbb{H}^3/\Gamma$ é uma 3-variedade hiperbólica orientável.

Teorema 1.6.20. *Seja $X \in \{\mathbb{E}^3, \mathbb{H}^3, \mathbb{S}^3\}$, e seja G um grupo de isometrias de X preservando orientação. São equivalentes:*

- *G age de forma livre e descontínua em X.*
- *G é um subgrupo discreto livre de torção de $Isom^+(X)$.*

Teorema 1.6.21. *M é uma 3-variedade hiperbólica orientável se, e somente se, o grupo fundamental $\pi_1(M)$ é um subgrupo discreto livre de torção de $Isom^+(\mathbb{H}^3)$, e $M \simeq \mathbb{H}^3/\pi_1(M)$.*

Assim, $\pi_1(M)$ pode ser identificado com um subgrupo Γ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ agindo livre e descontinuamente em $\mathbb{H}^3$. Portanto, a importância dos grupos Kleinianos torna-se mais clara. Podemos agora enunciar o seguinte

Teorema 1.6.22. *Para qualquer 3-variedade hiperbólica orientável M existe um grupo Kleiniano Γ livre de torção tal que $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$, onde Γ é único a menos de uma conjugação em* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$.

Reciprocamente, para qualquer grupo Kleiniano Γ livre de torção, temos que $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ é uma 3-variedade hiperbólica orientável.

Definição 1.6.23. *Seja Γ um grupo Kleiniano. O volume de $\mathbb{H}^3/\Gamma$ é o volume de qualquer domínio fundamental para Γ em $\mathbb{H}^3$, ou seja, Γ tem covolume finito.*

Capítulo 2

Corpo de Traços Invariantes e Álgebra de Quatérnios Invariantes

2.1 Corpo de traços

Um dos principais invariantes algébricos para um grupo Kleiniano de covolume finito são os corpos de traços e a álgebra de quatérnios. Passamos a estudar agora o corpo de traços de um grupo Kleiniano de covolume finito e veremos que se trata de uma extensão finita dos números racionais.

Definição 2.1.1. *Seja Γ um subgrupo não elementar de $PSL(2,\mathbb{C})$ e considere a projeção canônica $\mathbb{P} : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Seja $\widehat{\Gamma} = \mathbb{P}^{-1}(\Gamma)$. Então o corpo de traço de Γ, denotado por $\mathbb{Q}(tr\Gamma)$, é o corpo gerado pelos traços de todos elementos de Γ sobre o corpo dos números racionais $\mathbb{Q}$. Mais precisamente, $\mathbb{Q}(tr\Gamma) = \mathbb{Q}(tr\widehat{\gamma}; \widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma}) = \mathbb{Q}(\pm tr\gamma;\ \gamma \in \Gamma)$.*

Lema 2.1.2. *Seja $X \in SL(2,\mathbb{C})$, então $X^n = p_{n-1}(trX)X - q_{n-2}(trX)Id$, onde p_{n-1} e q_{n-2} são polinômios mônicos de grau $n-1$ e $n-2$ respectivamente.*

Demonstração. Seja $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Temos que

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}$$

$$tr(X) = a+d,\ (tr(X))X = \begin{pmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{pmatrix},\ Id = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$(tr(X))X - Id = \begin{pmatrix} a^2+ad-ad+bc & ba+bd \\ ca+cd & da+d^2-ad+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ba+bd \\ ca+cd & d^2+bc \end{pmatrix} = X^2$$

$$\begin{aligned} X^3 = XX^2 = X((tr(X))X - Id) &= (tr(X))X^2 - X \\ &= (tr(X))\{(tr(X))X - Id\} - X \\ &= (tr(X))^2X - tr(X)Id - X \\ &= \{(tr(X))^2 - Id\}X - tr(X)Id \\ &= p_2(tr(X))X - q_1(tr(X))Id \end{aligned}$$

Usaremos agora indução sobre n. Suponha que a igualdade é válida para $k = n$ e mostraremos que também é válida para $k = n+1$. Daí,

$$\begin{aligned} X^{n+1} = XX^n &= X(p_{n-1}(\mathrm{trX})\mathrm{X} - \mathrm{q_{n-2}}(\mathrm{trX})\mathrm{Id}) \\ &= p_{n-1}(\mathrm{trX})\mathrm{X}^2 - \mathrm{q_{n-2}}(\mathrm{trX})\mathrm{X} \\ &= p_{n-1}(\mathrm{trX})[(\mathrm{trX})\mathrm{X} - \mathrm{Id}] - \mathrm{q_{n-2}}(\mathrm{trX})\mathrm{X} \\ &= p_{n-1}(\mathrm{trX})(\mathrm{trX})\mathrm{X} - \mathrm{p_{n-1}}(\mathrm{trX})\mathrm{Id} - \mathrm{q_{n-2}}(\mathrm{trX})\mathrm{X} \\ &= p_n(\mathrm{trX})\mathrm{X} - \mathrm{p_{n-1}}(\mathrm{trX})\mathrm{Id} - \mathrm{q_{n-2}}(\mathrm{trX})\mathrm{X} \\ &= \{p_n(\mathrm{trX}) - \mathrm{q_{n-2}}(\mathrm{trX})\}\mathrm{X} - \mathrm{p_{n-1}}(\mathrm{trX})\mathrm{Id} \\ &= \overline{p}_n(\mathrm{trX})\mathrm{X} - \overline{\mathrm{q}}_{\mathrm{n-1}}(\mathrm{trX})\mathrm{Id} \end{aligned}$$

□

Usando a linearidade da função traço, temos a seguinte consequência imediata do lema anterior.

Corolário 2.1.3. $\mathrm{tr}(X^n)$ é um polinômio mônico de grau n em $\mathrm{tr}(X)$.

Recordemos agora alguns conceitos de geometria algébrica. Considere o espaço $\mathbb{C}^n$, com $n \in \mathbb{Z}_+$. Seja $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$ e $\mathrm{P}(x_1, ..., x_n)$ um polinômio, denotamos $\mathrm{P}(x_1, ..., x_n)$ por $\mathrm{P}(x)$.

Definição 2.1.4. *Seja S um subconjunto arbitrário de $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$. Uma variedade afim é um subconjunto de $\mathbb{C}^n$ definido por*

$$V(S) = \{x \in \mathbb{C}^n; \forall P \in S, P(x) = 0\}$$

ou seja, os elementos de $V(S)$ são os zeros comuns de todos os polinômios em S. É comum chamar $V(S)$ o conjunto algébrico afim, ou subconjunto algébrico, ou ainda subvariedade afim de $\mathbb{C}^n$ definido por S.

Introduzimos um conjunto I, que é essencialmente o dual de V, que associa um ideal no anel polinomial a um conjunto de pontos.

Definição 2.1.5. *Seja V um subconjunto de $\mathbb{C}^n$. O conjunto*

$$I(V) = \{f \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]; \forall x \in V, f(x) = 0\}$$

é chamado o ideal de V. Ou seja, $I(V)$ é o conjunto de funções polinomiais que se anulam em V.

Definição 2.1.6. *Um conjunto algébrico complexo é um subconjunto Ω de $\mathbb{C}^n$ tal que para cada $\alpha \in \Omega$, existe $f \in S \subseteq \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$, onde $f(\alpha) = 0$.*

Note que pelo teorema da base de Hilbert's, o ideal gerado pelo sistema de polinômios $S \subseteq \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$, digamos $I(S)$, é finitamente gerado. Em geral, se $I(S) \subseteq K[X_1, ..., X_n]$, com K subcorpo de $\mathbb{C}$, então S é dito ser definido sobre K.

Quando S é irredutível, ou seja, não é a união de dois subconjuntos algébricos não triviais, então S é uma variedade V e $I(S) = I(V)$ é ideal primo. Denotamos $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]/I(V)$ e $\mathbb{C}(V) = \{f/g;\ f, g \in \mathbb{C}[V],\ g \neq 0\}$.

Definição 2.1.7. *Seja V uma variedade algébrica. A dimensão de V é o grau transcendente do corpo de funções $\mathbb{C}(V)$ sobre $\mathbb{C}$.*

O resultado a seguir merece um destaque especial, onde ele é válido para dimensões maiores que 2 e vamos utilizá-lo na demonstração do teorema 2.1.9.

Teorema 2.1.8 (Rigidez de Mostow)**.** *Sejam Γ_1 e Γ_2 grupos kleinianos de covolume finito e $\phi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ um isomorfismo. Então existe $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$ tal que $\phi(\gamma_1) = g\gamma_1 g^{-1}$, $\forall \gamma_1 \in \Gamma_1$.*

A grande distinção da teoria de grupos de superfícies e grupos de 3-variedades hiperbólicas de volume finito é que dada uma 3-variedade compacta orientável, onde o interior suporta uma estrutura hiperbólica de volume finito, então essa estrutura é única.

O resultado a seguir é uma caracterização do corpo de traços como uma extensão dos números racionais.

Teorema 2.1.9. *Seja* Γ *um grupo kleiniano de covolume finito. Então o corpo* $\mathbb{Q}(\mathrm{tr}\Gamma)$ *é uma extensão finita de* $\mathbb{Q}$.

Antes de demonstrá-lo precisamos de algumas definições e do seguinte

Lema 2.1.10. *Seja* V *uma variedade algébrica, de dimensão* 0*, definida sobre um corpo* K *de números algébricos. Então* V *é um único ponto e suas coordenadas são números algébricos.*

Demonstração. Desde que K é algébrico, temos que $\mathbb{C}(V) = \mathbb{C}$, daí $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}$. Tomemos $x = (x_1, ..., x_n) \in V$, defina o ideal maximal $m_x = \{f \in \mathbb{C}[V];\ f(x) = 0\}$ e como $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}$ temos que $m_x = \{0\}$. Consideremos as funções $f_i(t) = t_i - x_i$ e note que $f_i(t) \in m_x$, para todo $i = 1, ..., n$, assim $f_i(t) \in I(V)$ para todo $i = 1, ..., n$. Portanto, note que se $f \in I(V)$, $f(x) = 0$, para todo $x \in V$, então $f \in m_x$, ou seja, $I(V) \subseteq m_x$. No entanto, se $f \in m_x$, temos que $f(x) = 0$, mas não necessariamente para todo $x \in V$, ou seja, $m_x \nsubseteq I(V)$. Como $f_1(t), ..., f_n(t) \in m_x$ temos que $t_i = x_i$ e V tem um único ponto.

Desde que para o corpo algebricamente fechado $\overline{K}(V) = \overline{K}$, temos que $t_i - x_i \in \overline{K}[t]$ está em $I(V)$, assim, $x_i \in \overline{K}$. $\square$

Seja Γ um subgrupo finitamente gerado, digamos por $\gamma_1, ..., \gamma_n$ e supomos Γ livre de torção.

Seja

$$R_1(\gamma_1, ..., \gamma_n) = ... = R_m(\gamma_1, ..., \gamma_n) = Id$$

relações entre os geradores de Γ. Seja

$$Hom(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})) := \{\rho : \Gamma \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{C});\ \rho \text{ é homomorfismo}\}$$

então $\rho(\gamma_i) = \sigma_i$, onde

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ z_i & w_i \end{pmatrix},\ x_i w_i - y_i z_i = 1.$$

Assim, as relações definidas acima determinam $4m$ equações polinomiais com coeficientes em $\mathbb{Z}$. Então $Hom(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ tem estrutura de conjunto algébrico sobre $\mathbb{Q}$.

Se assumirmos que Γ é um grupo Kleiniano livre de torção de covolume finito, então Γ é finitamente gerado e finitamente apresentado.

Tomamos $\sigma_1, ..., \sigma_n$ o conjunto de geradores para Γ satisfazendo as relações

$$R_1(\sigma_1, ..., \sigma_n) = ... = R_m(\sigma_1, ..., \sigma_n) = Id.$$

Como Γ é não-elementar, temos que existe um par de elementos loxodrômicos σ_1 e σ_2, onde esse par não tem ponto fixo em comum. Assim, podemos assumir que $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ é irredutível.

Seja

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ z_i & w_i \end{pmatrix}, \ x_i w_i - y_i z_i = 1, \ i = 1, ..., n.$$

Por conjugação assumimos que σ_1 fixa 0 e ∞ e σ_2 fixa 1. Desta última informação temos que

$$y_1 = z_1 = 0 \text{ e } x_2 + y_2 = z_2 + w_2. \tag{2.1}$$

Nós obtemos mais $4m$ equações polinomiais com coeficientes em $\mathbb{Z}$. Isto determina um subconjunto algébrico em $Hom(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$.

Se Γ contém elementos parabólicos, teremos mais equações adicionais envolvendo x_i, y_i, z_i, w_i. Assim, denotamos $V(\Gamma)$ o conjunto algébrico determinado por $\sigma_1, ..., \sigma_n$ satisfazendo as relações e as equações adicionais descritas acima.

Antes de iniciar a demonstração do teorema 2.1.9, enunciamos o seguinte

Teorema 2.1.11. *Seja $i : \Gamma \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ o homomorfismo inclusão. Então para $\rho \in V(\Gamma)$ suficiente próximo da aplicação i, ρ é um isomorfismo e $\rho(\Gamma)$ tem covolume finito.*

Demonstração do teorema 2.1.9. : Como Γ é de covolume finito, temos que ele é finitamente apresentado. Considerando a projeção natural $\mathbb{P} : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, por abuso de notação consideramos $\Gamma = \mathbb{P}^{-1}(\Gamma)$. Agora, pelo lema de Selberg's, temos que Γ contém um subgrupo livre de torção de índice finito Γ_1. Se todos os traços em Γ_1 são algébricos, temos pelo corolário 2.1.3 que todos os traços em Γ são algébricos, note que se $\gamma \in \Gamma - \Gamma_1$ é de ordem finita, temos novamente pelo corolário 2.1.3 que $tr\gamma$ é algébrico. Então basta assumir que Γ é livre de torção.

Consideremos o conjunto algébrico $V(\Gamma)$ definido anteriormente. Se $\dim V(\Gamma) = 0$, pelo lema 2.1.10, $V(\Gamma)$ consiste de um único ponto e suas coordenadas são números algébricos, assim existe um único $\rho \in Hom(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ e as entradas das matrizes σ_i são números algébricos sobre $\mathbb{Q}$. Como Γ é finitamente gerado, temos que todas as entradas das matrizes em Γ estão em uma extensão finita L de $\mathbb{Q}$, de modo que $\mathbb{Q}(\mathrm{tr}\Gamma) \subset \mathrm{L}$. Daí, resta mostrar que não podemos ter $\dim V(\Gamma)$ positiva.

Portanto, suponha que dim$V(\Gamma)$ é positiva, então existem elementos ρ em $V(\Gamma)$ suficientemente próximos da aplicação inclusão. Pelo teorema 2.1.11, $\rho(\Gamma)$ é isomorfo a Γ e necessariamente um grupo Kleiniano de covolume finito. Agora pelo teorema 2.1.8 (Rigidez de Mostow), os grupos $\rho(\Gamma)$ são todos conjugados em Isom$(\mathbb{H}^3)$ a Γ. As equações (2.1) implicam que somente quatro automorfismos internos de Γ, respeitando seus pontos fixos normalizados, são possíveis, o que é um absurdo. $\square$

Como consequência do teorema 2.1.8 e notando que o corpo de traços é invariante por conjugação, temos o seguinte

Corolário 2.1.12. *Seja $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ uma 3-variedade hiperbólica de volume finito. Então $\mathbb{Q}(\mathrm{tr}\Gamma)$ é um invariante topológico de M.*

2.2 Álgebra dos Quatérnios

Nessa seção consideramos Γ um subgrupo não elementar de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

Definição 2.2.1. *Um R_módulo unitário M é um grupo abeliano $(M,+)$ em um conjunto com a operação de um anel unitário R em M, que se escreve $(a,v) \mapsto av$, satisfazendo:*

i) $a(v_1+v_2) = av_1 + av_2,\ a \in R, v_1, v_2 \in M.$

ii) $(a_1+a_2)v = a_1v + a_2v,\ a_1, a_2 \in R, v \in M.$

iii) $a_1(a_2v) = (a_1a_2)v,\ a_1, a_2 \in R, v \in M.$

iv) $1v = v,\ v \in M.$

Mais precisamente, um R_módulo é um par (M,ψ), onde M é um grupo abeliano e ψ é uma aplicação de $R \times M \to M$ satisfazendo os itens acima.

Na definição acima introduzimos o conceito de módulo à esquerda, onde podemos definir analogamente os módulos à direita. Quando o anel R for comutativo, a distinção de módulo à direita e esquerda não se faz necessária.

Definição 2.2.2. *Seja R anel com unidade. Uma álgebra $\mathbb{A}$ sobre R é um anel tal que:*

i) $(\mathbb{A},+)$ *é um R_módulo com unidade.*

ii) $k(ab) = (ka)b = a(kb)$, *para todo $k \in R$ e $a, b \in \mathbb{A}$.*

Mais precisamente, considere $f : R \to \mathbb{A}$ um homomorfismo de anéis. Se $r \in R$ e $b \in \mathbb{A}$ defina um produto

$$rb = f(r)b.$$

Essa definição de multiplicação escalar torna o anel $\mathbb{A}$ um $R_$módulo. Assim, o anel $\mathbb{A}$ equipado com essa estrutura de $R_$módulo é dito ser uma $R_$álgebra.

Definição 2.2.3. *Uma álgebra de quatérnio A sobre um corpo F de característica diferente de 2, é um F-espaço 4- dimensional com base $1, i, j, k$, onde a multiplicação definida em A requerendo que 1 é o elemento neutro da multiplicação, que*

$$i^2 = a1,\ j^2 = b1,\ ij = -ji = k$$

para algum a e $b \in F^*$ e estendendo linearmente a multiplicação tal que A é uma álgebra associativa sobre F.

Definição 2.2.4. *Seja A_0 subespaço de A gerado pelos vetores i, j, e k. Então os elementos de A_0 são os quatérnios puros em A.*

A ideia é associar a Γ uma álgebra de quatérnio sobre $\mathbb{Q}(\mathrm{tr}\Gamma)$. Seja

$$A_0\Gamma = \left\{\sum a_i\gamma_i; a_i \in \mathbb{Q}(\mathrm{tr}\Gamma), \gamma_{\mathrm{i}} \in \Gamma\right\}$$

onde somente uma quantidade finita de a_i são não nulos.

Definição 2.2.5. *Uma álgebra $\mathbb{A}$ é dita ser simples, se não admite ideal próprio não trivial.*

Definição 2.2.6. *Uma álgebra $\mathbb{A}$ sobre R é dita central, se seu centro é R.*

Aqui tratamos o centro de $\mathbb{A}$ uma $R_$álgebra como sendo

$$\mathcal{Z}(\mathbb{A}) = \{x \in \mathbb{A};\ xa = ax,\ \forall a \in \mathbb{A}\},$$

ou seja, o centro de uma $R_$álgebra $\mathbb{A}$ é o centro de $\mathbb{A}$ como anel.

Utilizaremos o seguinte teorema para mostrar que $A_0\Gamma$ é uma álgebra de quatérnio, onde sua demonstração pode ser encontrada na página 81 de [5].

Teorema 2.2.7. *Toda álgebra simples e central 4-dimensional sobre um corpo F de característica diferente de 2 é uma álgebra de quatérnio.*

Só para mencionar, a álgebra de quatérnio pode ser denotada pelo símbolo de Hilbert $\left(\frac{a,b}{F}\right)$, onde $k^2 = (ij)^2 = ijij = i(-ij)j = -i^2j^2 = -ab$.

Note que a álgebra de quatérnio não determina um único símbolo de Hilbert, pois podemos denotar a mesma álgebra por

$$\left(\frac{b,a}{F}\right), \left(\frac{a,-ab}{F}\right), \ldots$$

Se K é uma extensão do corpo F, temos que $\left(\frac{a,b}{F}\right) \otimes_F K \simeq \left(\frac{a,b}{K}\right)$, e para qualquer corpo F,

$$M_2(F) \simeq \left(\frac{1,1}{F}\right),$$

com geradores

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que

$$i^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, j^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, k^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.2.8. *Seja A uma álgebra de quatérnio sobre F. Então, $\forall x, y \in A$, $T(x,y) = tr(xy)$ define uma forma bilinear simétrica não-degenerada em A e A_0.*

Demonstração. Sejam $x_1, x_2, y_1, y_2, x, y \in A$ e $\lambda \in K$, onde K é um corpo, assim

$$T(x_1 + x_2, y) = tr((x_1 + x_2)y) = tr(x_1y + x_2y) = tr(x_1y) + tr(x_2y) = T(x_1, y) + T(x_2, y)$$

Analogamente, $T(x, y_1 + y_2) = T(x, y_1) + T(x, y_2)$. Ainda

$$T(\lambda x, y) = tr(\lambda xy) = \lambda tr(xy) = \lambda T(x,y) = tr(\lambda xy) = tr(x\lambda y) = T(x, \lambda y)$$

$$T(x,y) = tr(xy) = tr(yx) = T(y,x)$$

A condição de ser não-degenerada é satisfeita observando que para todo $x \in A$, $x \neq 0$, tal que $tr(xy) = 0$, então $y = 0$.

□

Teorema 2.2.9. *$A_0\Gamma$ é uma álgebra de quatérnio sobre $\mathbb{Q}(\mathrm{tr}\Gamma)$.*

Demonstração. Mostraremos que $A_0\Gamma$ é uma álgebra simples central 4-dimensional sobre $\mathbb{Q}(\mathrm{tr}\Gamma)$.

Sejam $a, a_1, a_2 \in \mathbb{Q}(\mathrm{tr}\Gamma)$, $v, v_1, v_2 \in A_0\Gamma$, daí

i) $a(v_1+v_2)$=$a(\sum a_i^1\gamma_i^1+\sum a_i^2\gamma_i^2)=a\sum(a_i^1\gamma_i^1+a_i^2\gamma_i^2)=$
$\sum a(a_i^1\gamma_i^1+a_i^2\gamma_i^2)=\sum(aa_i^1\gamma_i^1+aa_i^2\gamma_i^2)=a\sum a_i^1\gamma_i^1+a\sum a_i^2\gamma_i^2=av_1+av_2$

ii) $(a_1+a_2)v=(a_1+a_2)\sum a_i\gamma_i=a_1\sum a_i\gamma_i+a_2\sum a_i\gamma_i=a_1v+a_2v$

iii) $a_1(a_2v)=a_1(a_2\sum a_i\gamma_i)=(a_1a_2)\sum a_i\gamma_i=(a_1a_2)v$

iv) $a(v_1v_2)=a(\sum a_i^1\gamma_i^1\sum a_i^2\gamma_i^2)=\sum aa_i^1\gamma_i^1\sum a_i^2\gamma_i^2=(av_1)v_2=(v_1a)v_2=v_1(av_2)$

Como Γ é não elementar, existem $g,h\in\Gamma$ loxodrômicos tais que $\langle g,h\rangle$ é irredutível. Então Id,g,h,gh são linearmente independentes em $M_2(\mathbb{C})$. Assim, $A_0\Gamma\mathbb{C}$ tem dimensão no mínimo 4 sobre $\mathbb{C}$. Daí, $A_0\Gamma\mathbb{C}=M_2(\mathbb{C})$.

Note ainda que $A_0\Gamma$ é central, pois se x está no centro de $A_0\Gamma$ então x está no centro de $M_2(\mathbb{C})$, assim, x é um múltiplo da identidade, pois $M_2(\mathbb{C})$ é central.

Tomemos T como no teorema anterior, assim, temos que T define uma forma bilinear simétrica não degenerada em A_0. Consideremos $\{Id^*,g^*,h^*,(gh)^*\}$ uma base dual de $M_2(\mathbb{C})$. daí, se $\gamma\in\Gamma$,

$$\gamma=x_0Id^*+x_1g^*+x_2h^*+x_3(gh)^* \qquad ;x_i\in\mathbb{C}.$$

Para qualquer elemento do conjunto $\{Id,g,h,gh\}$

$$T(\gamma,Id)=tr(\gamma Id)=x_0\ ;\ T(\gamma,g)=tr(\gamma g)=x_1\ ;\ T(\gamma,h)=tr(\gamma h)=x_2$$

$$T(\gamma,gh)=tr(\gamma gh)=x_3.$$

Como $\gamma\{id,g,h,gh\}\in\Gamma$, $tr(\gamma\{id,g,h,gh\})\in\mathbb{Q}(\mathrm{tr}\Gamma)$, temos que $x_i\in\mathbb{Q}(\mathrm{tr}\Gamma)$. Logo,

$$\mathbb{Q}(\mathrm{tr}\Gamma)[\mathrm{Id},\mathrm{g},\mathrm{h},\mathrm{gh}]\subset\mathrm{A}_0\Gamma\subset\mathbb{Q}(\mathrm{tr}\Gamma)[\mathrm{Id}^*,\mathrm{g}^*,\mathrm{h}^*,(\mathrm{gh})^*]$$

Portanto, $A_0\Gamma$ tem dimensão 4 sobre $\mathbb{Q}(\mathrm{tr}\Gamma)$.

Mostraremos agora que $A_0\Gamma$ é simples. De fato, seja J um ideal não trivial em $A_0\Gamma$, então $J\mathbb{C}$ é um ideal não trivial em $M_2(\mathbb{C})$, que é simples. Logo, $J\mathbb{C}=M_2(\mathbb{C})$, implica que $\dim J=4$ sobre $\mathbb{Q}(\mathrm{tr}\Gamma)$, então $J=A_0\Gamma$. □

Como consequência imediata, observando apenas que $A_0\Gamma$ tem dimensão 4, temos o seguinte

Corolário 2.2.10. *Seja Γ um subgrupo não elementar de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ e g,h qualquer par de elementos loxodrômicos tal que $\langle g,h\rangle$ é irredutível, então $A_0\Gamma=\mathbb{Q}(\mathrm{tr}\Gamma)[\mathrm{Id},\mathrm{g},\mathrm{h},\mathrm{gh}]$*

Corolário 2.2.11. *Seja* Γ *um subgrupo de* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ *contendo dois elementos* g *e* h *tais que* $\langle g,h\rangle$ *é irredutível. Então* $A_0\Gamma$ *é uma álgebra de quatérnio sobre* $\mathbb{Q}(\mathrm{tr}\Gamma)$ *e* $A_0\Gamma = \mathbb{Q}(\mathrm{tr}\Gamma)[\mathrm{Id},\mathrm{g},\mathrm{h},\mathrm{gh}]$.

2.3 O Corpo de Traços Invariantes

O corpo de traço é um invariante para um grupo Kleiniano, no entanto, não é em geral um invariante para a classe de comensurabilidade. Passemos assim a seguinte

Definição 2.3.1. *Sejam* $\Gamma_1,\Gamma_2 < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. *Dizemos que* Γ_1 *e* Γ_2 *são comensuráveis se* $[\Gamma_1,\Gamma_1\cap\Gamma_2] < \infty$ *e* $[\Gamma_2,\Gamma_1\cap\Gamma_2] < \infty$. *Dizemos ainda que* Γ_1 *e* Γ_2 *são comensuráveis no sentido amplo, se* Γ_1 *é comensurável a um conjugado de* Γ_2.

Definição 2.3.2. *Sejam* $M_1 = \mathbb{H}^3/\Gamma_1$ *e* $M_2 = \mathbb{H}^3/\Gamma_2$ *duas 3-variedades hiperbólicas. Dizemos que* M_1 *e* M_2 *são comensuráveis se eles tem uma cobertura hiperbólica finita comum.*

Nesta última definição, em termos de grupos, é equivalente dizer que Γ_1 e algum conjugado de Γ_2 em $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ tem em comum um subgrupo de índice finito, mostrando assim que se duas 3-variedades hiperbólicas são comensuráveis, em geral, é um problema difícil.

Definição 2.3.3. *Um número complexo* $\alpha\in\mathbb{C}$ *é um número algébrico se existe um polinômio* $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$, *onde o grau de* f *é maior ou igual a* 1, *tal que* $f(\alpha)=0$. *Denotamos* $\overline{\mathbb{Q}}$ *o conjunto de todos os números algébricos.*

Exemplo:

i) $\alpha\in\mathbb{Q}$ é raiz de $f(x) = x-\alpha\in\mathbb{Q}[x]$, assim $\mathbb{Q}\subset\overline{\mathbb{Q}}$.

ii) $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ mas $\sqrt{2}\in\overline{\mathbb{Q}}$, pois $\sqrt{2}$ é raiz de $f(x) = x^2-2\in\mathbb{Q}[x]$.

iii) $i\in\overline{\mathbb{Q}}$, pois é raiz de $f(x) = x^2+1\in\mathbb{Q}[x]$.

iv) $e^{\frac{2\pi i}{m}}, m\geq 1$ é algébrico, pois é raiz de $f(x) = x^m-1\in\mathbb{Q}[x]$.

v) e e π não são algébricos, assim $e,\pi\in\mathbb{C}-\overline{\mathbb{Q}}$. Esses números são chamados transcendentes.

Definição 2.3.4. *$\alpha \in \mathbb{C}$ é um inteiro algébrico se existe um polinômio $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, tal que $f(\alpha) = 0$. Denotamos $\overline{\mathbb{Z}}$ o conjunto de todos os inteiros algébricos. Note que $\overline{\mathbb{Z}} \subset \overline{\mathbb{Q}}$.*

Teorema 2.3.5. *$\overline{\mathbb{Z}}$ é um subanel do corpo $\mathbb{C}$. $\overline{\mathbb{Z}}$ é chamado o anel dos inteiros algébricos.*

Definição 2.3.6. *Para um corpo numérico algébrico K, chamamos o anel $O_K = K \cap \overline{\mathbb{Z}}$ o anel dos inteiros em K. Assim, $\mathbb{Z} \subset O_K$.*

Para mostrar que o corpo de traço não é um invariante para a classe de comensurabilidade, daremos o seguinte exemplo:

Seja $\Gamma < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, com $\Gamma = \langle X, Y\rangle$, tal que

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -w & 1 \end{pmatrix}$$

onde $w = (-1 + \sqrt{-d})/2$, $d \in \mathbb{Z}_+$, tal que o anel dos inteiros O_d no corpo $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ é $\mathbb{Z}[w]$. Por definição, todos os inteiros das matrizes estão em O_d. Então Γ é discreto e $\mathbb{Q}(tr\Gamma) = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. Agora, se

$$Z = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

note que Z normaliza Γ e seu quadrado é a identidade. Então, $\Gamma_1 = \langle \Gamma, \mathbb{P}Z\rangle$ contém Γ como subgrupo de índice 2 e contém a imagem de

$$ZYX = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -w & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ iw & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & i \\ iw & -i + iw \end{pmatrix}$$

assim, $i \in \mathbb{Q}(tr\Gamma_1)$. Portanto o corpo de traço não é um invariante para a classe de comensurabilidade.

Consideremos Γ um subgrupo não elementar finitamente gerado de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Iremos construir um subgrupo de índice finito em Γ onde o corpo de traço é um invariante da classe de comensurabilidade. Para isto, considere a seguinte

Definição 2.3.7. $\Gamma^{(2)} = \langle \gamma^2; \gamma \in \Gamma\rangle$

Lema 2.3.8. *$\Gamma^{(2)}$ é um subgrupo normal de índice finito de Γ onde o quociente é um 2-grupo abeliano elementar.*

Demonstração. Seja $\Gamma = \langle \gamma_1, ..., \gamma_n \rangle$, se $\overline{\gamma_i} \in \Gamma/\Gamma^{(2)}$ então $\overline{\gamma_i} = \{\gamma_i \Gamma^{(2)}; \gamma_i \in \Gamma\}$. Como Γ é finitamente gerado, temos que existem finitas classes laterais $\overline{\gamma_1}, ..., \overline{\gamma_n}$, então $[\Gamma; \Gamma^{(2)}] = n < \infty$. Ainda, se $\gamma_i \neq Id$, então $\overline{\gamma_i}^2 = \overline{Id}$. Logo, todos os elementos em $\Gamma/\Gamma^{(2)}$ tem ordem 2 que implica que $\Gamma/\Gamma^{(2)}$ é um 2-grupo abeliano, onde é abeliano pois

$$\overline{Id} = (\overline{\gamma_i \gamma_j})^2 = \gamma_i^2 \Gamma^{(2)} \gamma_j^2 \Gamma^{(2)} = \gamma_i^2 \gamma_j^2 \Gamma^{(2)} \Rightarrow \gamma_i^2 \gamma_j^2 = Id$$

analogamente, temos $\gamma_j^2 \gamma_i^2 = Id$. Assim, $\gamma_i \gamma_j = \gamma_j \gamma_i$ e consequentemente $\Gamma^{(2)}$ é subgrupo normal de Γ. $\square$

Teorema 2.3.9. *(Skolem Noether Theorem) Seja A uma álgebra simples central de dimensão finita sobre F e seja B uma álgebra simples de dimensão finita sobre F. Se $\phi, \psi : B \to A$ são homomorfismos de álgebras, então exite um elemento invertível $c \in A$ tal que $\phi(b) = c^{-1}\psi(b)c$, $\forall\, b \in B$.*

Antes de provar o principal teorema dessa seção, provemos o seguinte

Lema 2.3.10. *Seja Γ um subgrupo não elementar finitamente gerado de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Se $[\Gamma; \Gamma_1] < \infty$ então $\mathbb{Q}(tr\Gamma^{(2)}) \subseteq \mathbb{Q}(tr\Gamma_1)$.*

Demonstração. Podemos assumir que $\Gamma_1 \lhd \Gamma$ pois se $\mathcal{Z}(\Gamma_1)$ denota o centro de Γ_1 em Γ, então $\mathcal{Z}(\Gamma_1) \lhd \Gamma$ e $[\Gamma; \mathcal{Z}(\Gamma_1)] < \infty$. Como $\mathbb{Q}(tr\mathcal{Z}(\Gamma_1)) \subseteq \mathbb{Q}(tr\Gamma_1)$, basta mostrar que $\mathbb{Q}(tr\Gamma^{(2)}) \subseteq \mathbb{Q}(tr\mathcal{Z}(\Gamma_1))$.

Seja $A_0\Gamma_1 = \{\sum a_i \gamma_i; a_i \in \mathbb{Q}(tr\Gamma_1), \gamma_i \in \Gamma_1\}$

Afirmação: $g^2 \in A_0\Gamma_1, \forall g \in \Gamma$.

De fato, como $\Gamma_1 \lhd \Gamma$, temos que $\forall g \in \Gamma$, $\forall \gamma \in \Gamma_1$, $g\gamma g^{-1} \in \Gamma_1$. Isto define uma aplicação $\phi_g : \Gamma_1 \to \Gamma_1$, tal que $\phi_g(\gamma) = g\gamma g^{-1}$. Note que

$$\phi_g(\gamma_1\gamma_2) = g\gamma_1\gamma_2 g^{-1} = g\gamma_1 g^{-1} g\gamma_2 g^{-1} = \phi_g(\gamma_1)\phi_g(\gamma_2)$$

$$\phi_g(\gamma_1) = \phi_g(\gamma_2) \Rightarrow g\gamma_1 g^{-1} = g\gamma_2 g^{-1} \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$$

Dado $h \in \Gamma_1$, temos que $h = \phi_g(g^{-1}hg)$, então ϕ_g é um automorfismo de Γ_1, dito automorfismo interno induzido pela conjugação de g. Consequentemente, existe um automorfismo $\phi_g : A_0\Gamma_1 \to A_0\Gamma_1$ tal que $\sum a_i\gamma_i \mapsto g \sum a_i \gamma_i g^{-1}$, notando assim que $A_0\Gamma_1 \lhd \Gamma$.

Como $A_0\Gamma_1$ é uma álgebra de quatérnio sobre $\mathbb{Q}(tr\Gamma_1)$, pelo teorema de Skolem Noether, existe um elemento invertível $a \in A_0\Gamma_1$ tal que $\phi_g(x) = aId(x)a^{-1}$, $\forall x \in A_0\Gamma_1$ então $gxg^{-1} = axa^{-1}$, $\forall x \in A_0\Gamma_1$, daí

$$gxg^{-1}a = ax \Rightarrow xg^{-1}a = g^{-1}ax, \quad \forall x \in A_0\Gamma_1,$$

assim em $A_0\Gamma\mathbb{C} = M_2(\mathbb{C})$, $g^{-1}a$ comuta com todo elemento. Daí, $g^{-1}a = yId$, para algum $y \in \mathbb{C}$. Portanto

$$y^2 = det(g^{-1}a) = det(g^{-1})det(a) = det(a).$$

Como $a^2 - tr(a)a - det(a)Id = 0$ é um polinômio em $A_0(\Gamma_1)$, temos que $y^2 \in \mathbb{Q}(tr\Gamma_1)$, daí

$$(g^{-1}a)^2 = (yId)^2 \Rightarrow g^{-2}a^2 = y^2Id \Rightarrow a^2 = g^2y^2Id \Rightarrow y^{-2}a^2 = g^2 \Rightarrow g^2 \in A_0\Gamma_1.$$

Como g é arbitrário, temos que $\Gamma^{(2)} \subseteq A_0(\Gamma)$, assim, $\mathbb{Q}(tr\Gamma^{(2)}) \subseteq \mathbb{Q}(tr\Gamma_1)$. $\square$

Com isso, passamos agora a prova do resultado principal:

Teorema 2.3.11. *Seja $\Gamma < \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ não elementar finitamente gerado. O corpo $\mathbb{Q}(tr\Gamma^{(2)})$ é um invariante da classe de comensurabilidade de Γ.*

Demonstração. Seja Γ_1 um subgrupo de índice finito em Γ, pelo lema anterior temos que $\mathbb{Q}(tr\Gamma^{(2)}) \subseteq \mathbb{Q}(tr\Gamma_1)$. Seja Δ comensurável a Γ, ou seja, $[\Delta, \Gamma\cap\Delta] < \infty$ e $[\Gamma, \Gamma\cap\Delta] < \infty$. Como $\Gamma^{(2)}$ e $\Delta^{(2)}$ são subgrupos normais de índice finito em Γ e Δ respectivamente, temos que $[\Gamma, \Gamma^{(2)}] < \infty$ e $[\Delta, \Delta^{(2)}] < \infty$ então $[\Gamma^{(2)}, \Gamma^{(2)} \cap \Delta^{(2)}] < \infty$ e $[\Delta^{(2)}, \Gamma^{(2)} \cap \Delta^{(2)}] < \infty$, ou seja, $\Gamma^{(2)}$ e $\Delta^{(2)}$ são comensuráveis e ainda $[\Gamma, \Gamma^{(2)} \cap \Delta^{(2)}] < \infty$ e $[\Delta, \Gamma^{(2)} \cap \Delta^{(2)}] < \infty$.

Portanto,

$$\mathbb{Q}(tr\Gamma^{(2)}) \subseteq \mathbb{Q}(tr\Gamma^{(2)} \cap \Delta^{(2)}) \subseteq \mathbb{Q}(tr\Delta^{(2)})$$

e

$$\mathbb{Q}(tr\Delta^{(2)}) \subseteq \mathbb{Q}(tr\Gamma^{(2)} \cap \Delta^{(2)}) \subseteq \mathbb{Q}(tr\Gamma^{(2)}).$$

Então $\mathbb{Q}(tr\Gamma^{(2)}) = \mathbb{Q}(tr\Delta^{(2)})$. $\square$

Corolário 2.3.12. *Se $\Gamma < \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ não elementar finitamente gerado então $A_0\Gamma^{(2)}$ é um invariante da classe de comensurabilidade de Γ.*

Demonstração. Se Γ e Δ são comensuráveis, então $\mathbb{Q}(tr\Gamma^{(2)}) = \mathbb{Q}(tr\Delta^{(2)})$. Tomemos g e h um par de elementos loxodrômicos tais que $\langle g, h\rangle$ é irredutível então

$$A_0\Gamma^{(2)} = \mathbb{Q}(tr\Gamma^{(2)})[Id, g, h, gh] = \mathbb{Q}(tr\Delta^{(2)})[Id, g, h, gh] = A_0\Delta^{(2)}$$

. $\square$

Portanto, temos verificado que o corpo de traço $\mathbb{Q}(tr\Gamma^{(2)})$ é um invariante da classe de comensurabilidade de Γ, onde o caso particular interessante acontece quando Γ tem covolume finito.

Definição 2.3.13. *Seja $\Gamma < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ não elementar finitamente gerado. O corpo $\mathbb{Q}(tr\Gamma^{(2)})$ será denotado por $k\Gamma$ e denominado o corpo de traço invariante de Γ. Também, a álgebra de quatérnio $A_0\Gamma^{(2)}$ sobre $\mathbb{Q}(tr\Gamma^{(2)})$ será denotado por $A\Gamma$ e denominado como a álgebra de quatérnio invariante de Γ.*

Teorema 2.3.14. *Se Γ é um subgrupo não elementar de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ tal que $\mathbb{Q}(tr\Gamma)$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$, então Γ é conjugado a um subgrupo de $SL(2,\mathbb{R})$.*

Teorema 2.3.15. *Se Γ é um subgrupo Kleiniano de covolume finito então seu corpo de traço invariante é uma extensão finita não real de $\mathbb{Q}$.*

Demonstração. Já mostramos que $k\Gamma$ é uma extensão finita de $\mathbb{Q}$. Mostraremos que é uma extensão não real. Suponha que $k\Gamma$ é um corpo real então pelo teorema anterior, $\Gamma^{(2)}$ é conjugado a um subgrupo de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, assim, $\Gamma^{(2)}$ pode não ter covolume finito, o que é um absurdo. □

2.4 Geradores para os corpos de traços

O objetivo dessa seção é mostrar que o corpo de traços $\mathbb{Q}(tr\Gamma)$ é gerado por uma menor coleção de traços de elementos em $\Gamma = \langle\gamma_1, ..., \gamma_n\rangle$ e consequentemente obter uma menor coleção de geradores para $\mathbb{Q}(tr\Gamma^{(2)})$.

Consideremos

$$\begin{aligned} P &= \{\gamma_{j_1}, ..., \gamma_{j_t};\ t \geq 1,\ j_i \text{ distintos } \forall\ i = 1, ..., t\} \\ Q &= \{\gamma_{i_1}, ..., \gamma_{i_r};\ r \geq 1,\ 1 \leq i_1 < ... < i_r \leq n\} \\ R &= \{\gamma_i, \gamma_{j_1}\gamma_{j_2}, \gamma_{k_1}\gamma_{k_2}\gamma_{k_3};\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j_1 < j_2 \leq n,\ 1 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq n\} \end{aligned}$$

Para cada $\gamma \in \Gamma$, defina o comprimento de γ por

$$l(\gamma) = min\left\{\sum_{i=1}^{s} |\alpha_i|;\ \gamma = \gamma_{k_1}^{\alpha_1} \cdots \gamma_{k_s}^{\alpha_s}\right\}$$

onde o mínimo é tomado sob todos os representantes de γ em Γ.

Definição 2.4.1. *Um polinômio inteiro $P(t)$, também conhecido como polinômio numérico, é um polinômio onde $P(n)$ é inteiro, para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Claramente todo polinômio com coeficiente inteiro é um polinômio inteiro, mas a recíproca não é verdade. Por exemplo,

$$\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}t(t+1)$$

toma valores inteiros sempre que $t \in \mathbb{Z}$

Lema 2.4.2. *Seja $\gamma \in \Gamma$. Então $tr\gamma$ é um polinômio inteiro em $\{tr\delta;\ \delta \in P\}$.*

Demonstração. Utilizaremos indução no comprimento de γ. Suponha que $l(\gamma) = 1$, então $\gamma = \gamma_{k_i}^{\alpha_i}$, onde $|\alpha_i| = 1$. Assim, $tr\gamma = tr\gamma_{k_i}^{\alpha_i}$, de onde temos que $tr\gamma$ é um polinômio com coeficientes inteiros em $\{tr\delta;\ \delta \in P\}$.

Se $l(\gamma) = 2$ então $\gamma_{k_i}\gamma_{k_j} = \gamma \in P$ ou $\gamma_{k_i}^2 = \gamma \notin P$. Daí,

$$tr\gamma = tr\gamma_{k_i}\gamma_{k_j} = tr\gamma_{k_i}tr\gamma_{k_j} - tr\gamma_{k_i}\gamma_{k_j}^{-1}$$

ou $tr\gamma = (tr\gamma_{k_i})^2 - 2$. De qualquer maneira $tr\gamma$ é um polinômio inteiro. Suponhamos agora que $l(\gamma) \geq 3$ e que o resultado vale para todo elemento de comprimento menor que $l(\gamma)$. Se $\gamma \in P$ então $tr\gamma$ é um polinômio inteiro em $\{tr\delta;\ \delta \in P\}$. Se $\gamma \notin P$ então $k_i = k_j$, para $i \neq j$ ou $\alpha_i \neq 1$, para algum α_i. Se $k_i = k_j$, digamos que

$$\gamma = \gamma_{k_1} \cdots \gamma_{k_i} \cdots \gamma_{k_j} \cdots \gamma_{k_s},$$

assim, por conjugação, temos que

$$(\gamma_{k_1} \cdots \gamma_{k_{i-1}})^{-1}\gamma(\gamma_{k_1} \cdots \gamma_{k_{i-1}}) = \gamma_{k_i} \cdots \gamma_{k_j} \cdots \gamma_{k_s}\gamma_{k_1} \cdots \gamma_{k_{i-1}} = XYXZ$$

então $tr\gamma = trXYXZ = trXYtrXZ - trXYZ^{-1}X^{-1} = trXYtrXZ - trYZ^{-1}$. Podemos ter ainda $\gamma = \gamma_{k_1} \cdots \gamma_{k_i} \cdots \gamma_{k_j}^{-1} \cdots \gamma_{k_s}$, e novamente por conjugação temos que

$$(\gamma_{k_1} \cdots \gamma_{k_{i-1}})^{-1}\gamma(\gamma_{k_1} \cdots \gamma_{k_{i-1}}) = \gamma_{k_i} \cdots \gamma_{k_j}^{-1} \cdots \gamma_{k_s}\gamma_{k_1} \cdots \gamma_{k_{i-1}} = XYX^{-1}Z$$

então

$$\begin{aligned} tr\gamma &= trXYX^{-1}Z = trXYtrX^{-1}Z - trXYZ^{-1}X = trXYtrX^{-1}Z - trX^2YZ^{-1} \\ &= trXtrXYZ^{-1} - trZY^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto, segue o resultado.

Se algum $|\alpha_i| \geq 2$, podemos ter $\gamma = \gamma_{k_1} \cdots \gamma_{k_i}^{\alpha_i} \cdots \gamma_{k_s}$ e por conjugação

$$tr\gamma = trX^2YZ = trXtrXYZ^{-1} - trZY^{-1}.$$

E o resultado também segue. □

Lema 2.4.3. *Seja $\gamma \in \Gamma$. Então $tr\gamma$ é um polinômio inteiro em $\{tr\delta;\ \delta \in Q\}$*

Demonstração. Para cada permutação τ de S_n, defina

$$\tau^*(Q) = \{\gamma_{\tau(i_1)} \cdots \gamma_{\tau(i_r)};\ 1 \leq i_1 < ... < i_r \leq n\}$$

tal que $P = \bigcup_{\tau \in S_n} \tau^*(Q)$. Cada τ é um produto de transposições da forma $(i \quad i+1)$ e definimos o comprimento de τ como sendo o número mínimo de tais transposições. Mostraremos que se $\gamma \in \tau^*(Q)$ então $tr\gamma$ é um polinômio inteiro em $\{tr\delta;\ \delta \in Q\}$. Procedemos por indução no comprimento de τ. Se o comprimento de τ é zero então $\gamma = \gamma_{i_1} \cdots \gamma_{i_r}$, onde $i_1 < ... < i_r$, assim $tr\gamma \in \{tr\delta;\ \delta \in Q\}$ e logo $tr\gamma$ é um polinômio inteiro.

Seja $\tau = \tau'\sigma$, onde $\sigma = (i \quad i+1)$ e comprimento de τ' < comprimento de τ. Usando que

$$trXYZ + trYXZ + trXtrYtrZ = trXtrYZ + trYtrXZ + trZtrXY,$$

obtemos que se $\gamma \in \tau^*(Q)$ então $tr\gamma$ é um polinômio inteiro em $\{tr\delta; \delta \in \tau'^*(Q)\}$, usando a hipótese de indução obtemos o resultado. □

O grupo Γ pode ser gerado por dois ou três elementos. Assim, se $\Gamma = \langle g, h\rangle$ então $\mathbb{Q}(tr\Gamma) = \mathbb{Q}(trg, trh, trgh)$. Se $\Gamma = \langle f, g, h\rangle$ então

$$\mathbb{Q}(tr\Gamma) = \mathbb{Q}(trf, trg, trh, trfg, trfh, trgh, trfgh).$$

Lema 2.4.4. *Seja $\gamma \in \Gamma$. Então $tr\gamma$ é um polinômio racional em $\{tr\delta;\ \delta \in R\}$.*

Demonstração. Usando o lema anterior e que

$$\begin{aligned} 2trXYZW &= trXtrYZW + trYtrZWX + trZtrWXY + trWtrXYZ + \\ &\quad trXYtrZW - trXZtrYW + trXWtrYZ - trXtrYtrZW - \\ &\quad trYtrZtrXW - trXtrWtrYZ - trZtrtrXY + trXtrYtrZtrW, \end{aligned}$$

temos o resultado □

Dado $\Gamma < \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ não elementar, denotamos $k\Gamma = \mathbb{Q}(tr\Gamma^{(2)})$.

Definição 2.4.5. *Seja $\Gamma < \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, não elementar, finitamente gerado. Denotamos $\Gamma^{SQ} = \langle \gamma_1^2, ..., \gamma_n^2 \rangle$.*

Lema 2.4.6. *Seja $\Gamma = \langle \gamma_1, ..., \gamma_n \rangle$ um subgrupo de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ não elementar e $tr\gamma_i \neq 0$ para $i = 1, ..., n$. Então $k\Gamma = \mathbb{Q}(tr\Gamma^{SQ})$.*

Demonstração. Seja $\gamma \in \Gamma^{SQ}$ então $\gamma = \gamma_{i_1}^2 \cdots \gamma_{i_r}^2 \subset \{\delta^2;\ \delta \in \Gamma\} = \Gamma^{(2)}$. Assim, $\Gamma^{SQ} \subset \Gamma^{(2)}$ e temos que $\mathbb{Q}(tr\Gamma^{SQ}) \subset \mathbb{Q}(\Gamma^{(2)})$.

Como $X^2 = (trX)X - Id$, temos que se $tr\gamma \neq 0$ então

$$\gamma^2 = (tr\gamma)\gamma - Id \Rightarrow \gamma = (tr\gamma)^{-1}(\gamma^2 - Id).$$

Assim, se $\gamma \in \Gamma^{(2)}$, temos que $\gamma = \delta_1^2 \cdots \delta_r^2$, com $\delta_i \in \Gamma$, onde $\delta_i = \gamma_{i_1} \cdots \gamma_{i_{r_i}}$. E portanto, pela observação anterior, temos que

$$\delta_i = (tr\gamma_{i_1})^{-1}(\gamma_{i_1}^2 - Id) \cdots (tr\gamma_{i_{r_i}})^{-1}(\gamma_{i_{r_i}}^2 - Id)$$

então

$$\delta_i^2 = (tr^2\gamma_{i_1})^{-1}(\gamma_{i_1}^2 - Id)^2 \cdots (tr^2\gamma_{i_{r_i}})^{-1}(\gamma_{i_{r_i}}^2 - Id)^2 \in \Gamma^{SQ}.$$

Logo, $\gamma \in \Gamma^{SQ}$ e segue que $\mathbb{Q}(tr\Gamma^{(2)}) \subset \mathbb{Q}(tr\Gamma^{SQ})$. □

Podemos ainda obter outra descrição de $k\Gamma$ em termos do traço.

Lema 2.4.7. *Seja $\Gamma < \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ não elementar finitamente gerado. Seja*

$$k = \mathbb{Q}(\{tr\gamma^2;\ \gamma \in \Gamma\}).$$

Então $k = k\Gamma$.

Demonstração. Como $\gamma^2 = (tr\gamma)\gamma - Id$ temos que $tr\gamma^2 = tr^2\gamma - 2$, onde $k \subset k\Gamma$. Agora escolhemos um conjunto de geradores $\gamma_1, ..., \gamma_n$ de Γ tal que $tr\gamma_i \neq 0$, $tr\gamma_i^2\gamma_j^2 \neq 0$, para todo i e j. Pelos dois lemas anteriores, temos que se $\gamma \in \Gamma^{SQ}$, então $tr\gamma$ é um polinômio racional em $\{tr\delta;\ \delta \in R\}$, assim é suficiente mostrar que $tr\gamma_i^2\gamma_j^2$, $tr\gamma_i^2\gamma_j^2\gamma_k^2 \in k$. Isso garante que $k\Gamma \subset k$.

Note que

$$\begin{aligned} tr(\gamma_i^2\gamma_j) + 2 &= tr(\gamma_i^4\gamma_j) + 2 = (tr\gamma_i^2\gamma_j)^2 = (tr\gamma_i tr\gamma_i\gamma_j - tr\gamma_j)^2 \\ &= tr^2\gamma_i tr^2\gamma_i\gamma_j - 2tr\gamma_j tr\gamma_i tr\gamma_i\gamma j + tr^2\gamma_j \end{aligned}$$

assim $tr\gamma_j tr\gamma_i tr\gamma_i\gamma j \in k$ e como $tr\gamma_i^2\gamma_j^2 = tr\gamma_j tr\gamma_i tr\gamma_i\gamma j - tr^2\gamma_i - tr^2\gamma_j + 2$, temos que $tr\gamma_i^2\gamma_j^2 \in k$. Agora

$$\begin{aligned} tr(\gamma_i^2\gamma_j^2\gamma_k^{-1})^2 + 2 &= (tr\gamma_i^2\gamma_j^2\gamma_k^{-1})^2 = (\underbrace{tr\gamma_i^2\gamma_j^2 tr\gamma_k}_{A} - \underbrace{tr\gamma_i^2\gamma_j^2\gamma_k}_{B})^2 \\ &= A^2 - 2tr\gamma_i^2\gamma_j^2 tr\gamma_k tr\gamma_i^2\gamma_j^2\gamma_k + B^2 \end{aligned}$$

implica que $tr\gamma_k tr\gamma_i^2\gamma_j^2\gamma_k \in k$, desde que $tr\gamma_i^2\gamma_j^2 \neq 0$.

Como $tr\gamma_k^2\gamma_i^2\gamma_j^2 = tr\gamma_k tr\gamma_i^2\gamma_j^2\gamma_k - tr\gamma_i^2\gamma_j^2$, temos que $tr\gamma_i^2\gamma_j^2\gamma_k^2 \in k$ □

Já havíamos mencionado que se $\Gamma = \langle g, h\rangle$ então $\mathbb{Q}(tr\Gamma) = \mathbb{Q}(trg, trh, trgh)$.

Se $\Gamma = \langle f, g, h\rangle$ então $\mathbb{Q}(tr\Gamma) = \mathbb{Q}(trf, trg, trh, trfg, trfh, trgh, trfgh)$.

Suponha que $\Gamma = \langle g, h\rangle$ é não elementar. Note que g e h podem não ter ordem 2, mas suponha que sim, e ainda que $trg, trh \neq 0$. Pelo lema 3.4.4 e a igualdade anterior, temos que

$$\mathbb{Q}(tr\Gamma^{(2)}) = \mathbb{Q}(trg^2, trh^2, tr(gh)^2).$$

Como

$$\begin{aligned} tr(gh)^2 &= trgtrhtrgh - tr^2g - tr^2h + 2 \\ &= trgtrhtrgh - trg^2 - 2 - trh^2 - 2 + 2 \\ &= trgtrhtrgh - trg^2 - trh^2 - 2 \end{aligned}$$

temos assim o seguinte

Lema 2.4.8. *Seja $\Gamma = \langle g, h\rangle$, com $trg, trh \neq 0$, um subgrupo não elementar de* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. *Então $k\Gamma = \mathbb{Q}(tr^2g, tr^2h, trgtrhtrgh)$*

Referências Bibliográficas

[1] ATIYAH, M. F.; MACDONALD, I. G. **Introduction to Commutative Algebra**. England, Wesley Series in Mathematics, 1969.

[2] BEARDON, Alan F. **The Geometry of Discrete Groups**. New York, Springer, 1983.

[3] FERNANDES, Rui Loja; RICOU, Manuel. **Introdução à Álgebra**. Disponível em: <nfist.pt/ sonat/Algebra.pdf>, acesso em 20/01/2014.

[4] JACQUEMET, Matthieu. **The Discovery of Hyperbolization of Knot Complements**. 2010. 86 f. Dissertação. University of Fribourg.

[5] MACLACHLAN, Colin; REID, Alan W. **Graduate texts in mathematics - The Arithmetic of Hyperbolic 3-Manifolds**. New York, Springer, 2003.

[6] MASKIT, Bernard. **Kleinian Groups**. Berlin Heidelbergs New York, Springer-Verlag, 1988.

[7] MUNKRES, James R. **Topology**. Second Edition, Massachusetts Institute of Technology, Prentice Hall, 2000.

[8] PARKER, John R. **Hyperbolic Spaces**. Disponível em: <http://maths.dur.ac.uk/ dma0jrp/img/HSjyvaskyla.pdf>, acesso em 02/01/2014.

[9] PERRIN, Daniel. **Algebraic Geometry: An Introduction**. France, Springer, 2008.