

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Uma demonstração simples da Fórmula Integral de
Cauchy

Hellen Lima de Paula

Belo Horizonte - MG

2014

HELLEN LIMA DE PAULA

UMA DEMONSTRAÇÃO SIMPLES DA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do Grau de Especialista em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Hamilton Prado Bueno

Belo Horizonte - MG

2014

HELLEN LIMA DE PAULA

UMA DEMONSTRAÇÃO SIMPLES DA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do Grau de Especialista em Matemática.

Aprovada em 24 de julho de 2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Hamilton Prado Bueno - Orientador
UFMG

Prof. Dr. Helder Candido Rodrigues
UFMG

Prof. Dr. Grey Ercole
UFMG

Belo Horizonte - MG
2014

A Deus, a Ele toda honra e toda glória.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por todo amor e cuidado.

À minha mãe e melhor amiga, Maria de Fátima, que sempre foi o maior e melhor exemplo de retidão que eu poderia ter e por quem palavras não podem expressar a gratidão que sinto.

Ao meu pai, Geraldo, e meus irmãos, Hugo e Higor, que sempre me amaram e apoiaram.

Ao meu orientador Hamilton Prado Bueno, que acreditou e confiou na minha capacidade acadêmica, ajudando-me muito na conclusão desta Especialização.

Aos professores Helder Candido Rodrigues e Grey Ercole, pelo auxílio e pela compreensão.

E a todos os meus amigos, pelo companheirismo e paciência, em especial à Nat e à Manu, que sempre estiveram presentes.

Resumo

Este trabalho é baseado no artigo *A Note on Dixon's Proof of Cauchy's Integral Theorem*, de Peter A. Loeb, [6], que estabelece um resultado elementar na teoria de funções complexas e o aplica numa simplificação da elegante prova dada por John D. Dixon para a Fórmula Integral de Cauchy, em [4]. A demonstração de Dixon usa a teoria local de Cauchy e é com isso que obtém-se a prova de que se f é uma função analítica em uma região G e γ é uma curva fechada retificável em G , então a integral

$$\int_{\gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw$$

é uma função analítica para todo $z \in G$, com o integrando substituído por $f'(w)$ quando $z = w$. Esse resultado é mostrado de maneira simples em [6] e aplicado na prova dada por Dixon. Neste trabalho, apresentamos de maneira clara o que foi feito por Dixon e por Loeb para simplificar a demonstração da Fórmula e do Teorema Integral de Cauchy.

Abstract

This work is based on *A Note on Dixon's Proof of Cauchy's Integral Theorem*, of Peter A. Loeb, [6], that establishes an elementary result in complex function theory and applies that result to simplify John D. Dixon's elegant proof of the general Cauchy integral theorem and formula, [4]. Dixon's proof uses local Cauchy theory, based on this if f is analytic on a region G and γ is a closed rectifiable curve in G , then the integral

$$\int_{\gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw$$

(with the integrand replaced by $f'(w)$ when $z = w$) is an analytic function of z on all of G . A simple proof of this fact is given in [6], and applied in Dixon's proof of Cauchy's integral formula and theorem. Here, we present clearly what Dixon and Loeb made to simplify the proof of Cauchy integral theorem and formula.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	2
2 Teoria local de Cauchy	7
2.1 O Teorema integral de Cauchy em um triângulo	7
2.2 O Teorema integral de Cauchy em um disco	10
3 Resultados Principais	17
4 A Fórmula Integral de Cauchy	19

Introdução

Jonh D. Dixon no artigo *A Brief Proof of Cauchy's Integral Theorem*, [4], apresenta uma demonstração curta e elegante do Teorema de Cauchy para curvas homólogas a 0. Sua demonstração é baseada em propriedades locais de funções analíticas que seguem do Teorema Integral de Cauchy em um disco e que podem ser comparadas ao tratamento dado no livro Ahlfors, [1]. Essa versão da prova do Teorema Integral de Cauchy não é só mais natural do que a versão homotópica, que aparece em vários livros didáticos, como também é de mais fácil compreensão.

Peter A. Loeb, no artigo *A Note on Dixon's Proof of Cauchy's Integral Theorem*, [6], estabelece um resultado elementar na teoria de funções complexas que é aplicado na prova dada por John D. Dixon, mostrando que se f é uma função analítica em uma região G e γ é uma curva fechada retificável em G , então a integral

$$\int_{\gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw,$$

com o integrando substituído por $f'(w)$ quando $z = w$, é uma função analítica para todo $z \in G$.

No primeiro capítulo deste trabalho apresentamos as definições que serão utilizadas ao longo do texto. Introduzimos a noção de curvas, e algumas propriedades delas, para definirmos ciclos em um conjunto aberto. Definimos, ainda, a integral de linha ao longo de uma curva e falamos sobre os conceitos de função diferenciável, analítica e inteira. Apresentamos, também, exemplos de algumas das definições dadas para facilitar a compreensão das mesmas.

No segundo capítulo demonstramos o Teorema Integral de Cauchy, primeiramente em um triângulo e depois em um disco, e outros resultados que compõem a teoria local de Cauchy. Concluímos esse capítulo com resultados famosos como a Estimativa de Cauchy e o Teorema de Liouville. Aproveitamos, ainda, para apresentar uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra que decorre facilmente dos resultados aqui apresentados.

No terceiro capítulo apresentamos duas proposições que serão diretamente utilizadas na demonstração da Fórmula Integral de Cauchy em um aberto qualquer e, portanto, fazem parte do conjunto dos resultados principais deste trabalho. Essas proposições apresentam a simplificação dada por Peter A. Loeb para a demonstração da Fórmula Integral de Cauchy feita por John D. Dixon.

Por fim, no quarto e último capítulo, enunciamos e demonstramos a fórmula integral de Cauchy definida em um aberto qualquer, objeto principal de estudo deste trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos conceitos e definições que serão utilizados ao longo deste trabalho e exibimos exemplos para elucidar algumas das definições.

Uma **curva** é uma função contínua $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, definida por duas funções reais $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, denominadas funções coordenadas de γ . Para cada ponto $t \in [a, b]$ está associado o ponto do plano $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = x(t) + iy(t)$, como na Figura 1.1. O conjunto $\{\gamma(t); a \leq t \leq b\}$ é chamado **traço** de γ e o denotamos por $\{\gamma\}$. Os pontos $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ são chamados ponto inicial e ponto final da curva γ , respectivamente. No caso em que $\gamma(a) = \gamma(b)$, dizemos que γ é uma curva **fechada**.

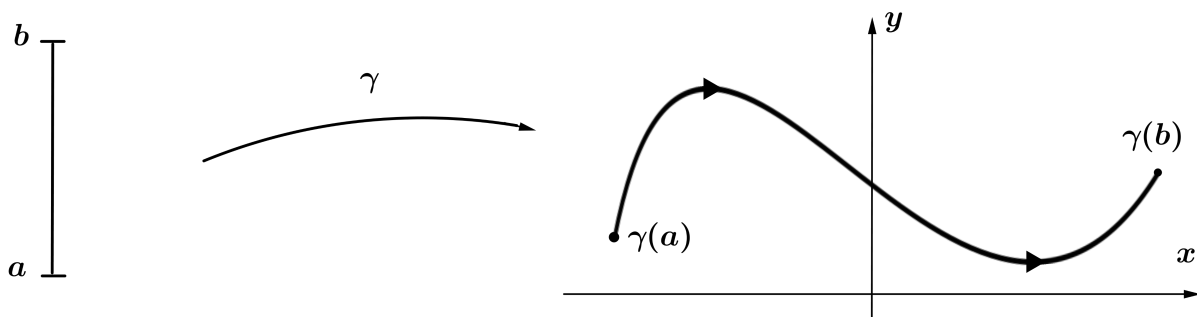


Figura 1.1: Curva contínua.

Se $\gamma'(t)$ existe para cada $a \leq t \leq b$ e $\gamma': [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função contínua, então γ é uma curva **continuamente diferenciável**. Dizemos que γ é uma curva **diferenciável por partes** quando existe uma partição do intervalo $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, tal que γ é uma curva diferenciável em cada subintervalo $[t_{j-1}, t_j]$, $1 \leq j \leq n$. Um **caminho** é uma curva continuamente diferenciável por partes.

Observação: Dizer que a função $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é diferenciável significa que γ tem derivada para cada ponto $t \in [a, b]$, ou seja, o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = \gamma'(t)$$

existe para cada $t \in (a, b)$ e, ainda, existem os limites à direita e à esquerda quando $t = a$ e $t = b$, respectivamente.

Exemplo 1.1. O segmento de reta que une dois pontos no plano, $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, é o traço da curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$\gamma(t) = ((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2),$$

que é continuamente diferenciável.

Definimos o **comprimento** da curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ como sendo a distância percorrida pelo ponto $\gamma(t)$ quando t varia de a até b . Uma curva γ é **retificável** se tem comprimento finito, nesse caso, o comprimento de γ é dado por

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, temos a seguinte expressão para o comprimento de γ ,

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Exemplo 1.2. Seja $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ a curva definida por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, Figura 1.2, então γ é uma curva retificável e seu comprimento é

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

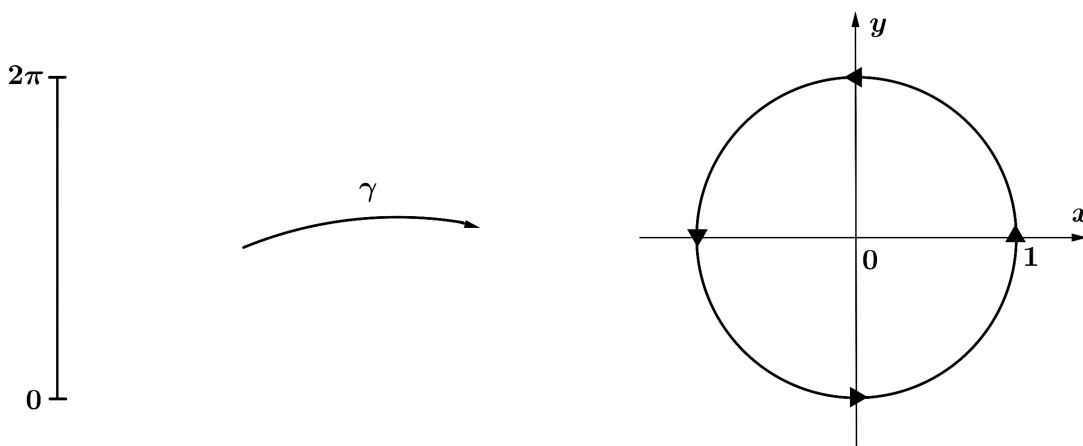


Figura 1.2: Curva retificável.

Definição 1.1. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é uma curva retificável e f é uma função definida e contínua em $\{\gamma\}$, então a **integral (de linha)** de f ao longo de γ é

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Também denotada por $\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(z) dz$.

Exemplo 1.3. Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a função definida por $f(z) = z^2$. Vamos calcular a integral (de linha) de f ao longo da curva γ determinada pelo segmento $[z_1, z_2]$, que liga o ponto $z_1 = 0$ ($P_1 = (0, 0)$) ao ponto $z_2 = 2 + i$ ($P_2 = (2, 1)$). Para isso, usando a coordenada y como o parâmetro t , a parametrização do segmento $[z_1, z_2]$ é dada por $x = 2y$, com $0 \leq y \leq 1$. O integrando z^2 é contínuo em \mathbb{C} , em particular sobre $\{\gamma\}$, então

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = 3y^2 + 4y^2i.$$

Também,

$$(x'(t) + iy'(t))dt = dx + idy = 2dy + idy = (2 + i)dy.$$

Portanto,

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \int_0^1 (3y^2 + 4y^2i)(2 + i)dy = (3 + 4i)(2 + i) \int_0^1 y^2 dy = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i.$$

Definição 1.2. Se γ é uma curva fechada retificável em \mathbb{C} então, para $a \notin \{\gamma\}$,

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w - a} dw$$

é o **índice** de γ com respeito ao ponto a .

Geometricamente, o índice de uma curva com respeito a um ponto é o número de voltas que a curva dá em torno do ponto. As voltas realizadas em sentido anti-horário contam como positivas, e as realizadas em sentido horário tem valor negativo.

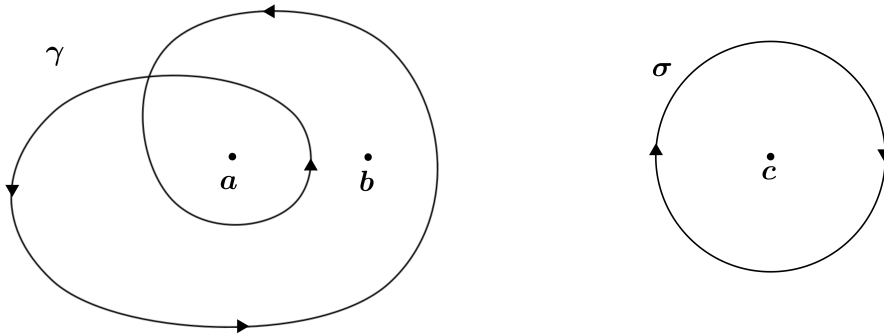


Figura 1.3: Índice de curvas com respeito a diferentes pontos.

Na Figura 1.3, temos $n(\gamma, a) = 2$, $n(\gamma, b) = 1$ e $n(\gamma, c) = 0$, enquanto que $n(\sigma, a) = n(\sigma, b) = 0$ e $n(\sigma, c) = -1$. Desde que, γ e σ estejam parametrizadas de maneira a dar uma única volta completa sobre o seu traço.

Um **ciclo** Γ é um conjunto finito de curvas fechadas retificáveis $\{\gamma_i, 1 \leq i \leq n\}$. O seu **traço**, que é denotado por $\{\Gamma\}$, é dado por

$$\bigcup_i \{\gamma_i\}.$$

Para qualquer função f contínua em $\{\Gamma\}$, definimos a **integral** $\int_{\Gamma} f$ por

$$\int_{\Gamma} f = \sum_i \int_{\gamma_i} f.$$

Se $a \in \mathbb{C} \setminus \{\Gamma\}$, definimos o **índice** de Γ com respeito ao ponto a por

$$n(\Gamma, a) = \sum_i n(\gamma_i, a) = \frac{1}{2\pi i} \sum_i \int_{\gamma_i} \frac{1}{w-a} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{w-a} dw.$$

Dizemos que Γ é um **ciclo em um conjunto aberto** G se $\{\Gamma\} \subset G$.

Denotamos, ao longo do texto, o **disco aberto** centrado em z de raio r por $D(z, r)$, $\{w \in \mathbb{C}; |w - z| < r\}$, e o disco fechado $\{w \in \mathbb{C}; |w - z| \leq r\}$ por $\overline{D}(z, r)$.

Definição 1.3. Sejam G um conjunto aberto em \mathbb{C} e $f : G \rightarrow \mathbb{C}$. Dizemos que f é **diferenciável** em um ponto $z \in G$ se existe o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Quando esse limite existe, o denotamos por $f'(z)$ e o denominamos **derivada** de f em z . Se f é diferenciável em cada ponto de G , dizemos apenas que f é **diferenciável** em G .

Quando f é diferenciável em G , temos que f' define uma função $f' : G \rightarrow \mathbb{C}$ e, se f' é contínua, dizemos que f é **continuamente diferenciável**. Uma função $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ é **analítica** se é continuamente diferenciável em G e é **inteira** quando ela é analítica em todo o plano complexo \mathbb{C} , isto é, quando $G = \mathbb{C}$.

Exemplo 1.4. Consideremos as funções $f(z) = z^2$ e $g(z) = \bar{z}$ (onde \bar{z} representa o conjugado de z), ambas definidas em todo \mathbb{C} . A primeira delas tem derivada em todos os pontos de \mathbb{C} , enquanto que a segunda não tem derivada em ponto algum. De fato,

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \frac{(z - z_0)(z + z_0)}{z - z_0} = z + z_0.$$

Portanto,

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} z + z_0 = 2z_0.$$

Já para g temos

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \frac{(\bar{z} - \bar{z}_0)^2}{|z - z_0|^2} = \frac{(x - x_0 + i(y_0 - y))^2}{(x - x_0)^2 + (y_0 - y)^2} = \frac{(x - x_0)^2 - (y_0 - y)^2 + 2i(x - x_0)(y_0 - y)}{(x - x_0)^2 + (y_0 - y)^2}.$$

Agora, vamos fazer z tender a z_0 e, como estamos no plano, há infinitas maneiras de fazê-lo. Então, se z é da forma $z = (t + x_0) + iy_0$, a expressão acima nos fornece

$$\frac{(t + x_0 - x_0)^2 - (y_0 - y_0)^2 + 2i(t + x_0 - x_0)(y_0 - y_0)}{(t + x_0 - x_0)^2 - (y_0 - y_0)^2} = \frac{t^2}{t^2},$$

enquanto, se z é da forma $z = x_0 + i(t + y_0)$, temos

$$\frac{(x_0 - x_0)^2 - (y_0 - t - y_0)^2 + 2i(x_0 - x_0)(y_0 - t - y_0)}{(x_0 - x_0)^2 - (y_0 - t - y_0)^2} = -\frac{t^2}{t^2}.$$

Portanto, o quociente $\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$ assume o valor constante 1 ao longo da reta $y = y_0$ e assume o valor constante -1 ao longo da reta $x = x_0$. Concluimos, então, que $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$ não existe.

Capítulo 2

Teoria local de Cauchy

Neste capítulo mostramos o Teorema Integral de Cauchy para um triângulo e depois a Fórmula Integral de Cauchy em um disco. Também apresentamos resultados importantes como a Estimativa de Cauchy e o Teorema de Liouville. E provamos, também, o Teorema Fundamental da Álgebra, que decorre facilmente dos resultados aqui apresentados. Concluímos o capítulo com o Teorema Integral de Cauchy para um disco.

2.1 O Teorema integral de Cauchy em um triângulo

Seja $\{a, b, c\}$ uma tripla ordenada em \mathbb{C} e denotando por $T_{\{a,b,c\}}$ o triângulo de vértices a, b e c , Figura 2.1. Seja f é uma função definida e contínua sobre a fronteira de T , então,

$$\int_T f = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f + \int_{[c,a]} f,$$

onde $[a, b]$ é o traço do caminho $\gamma_{[a,b]} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, determinado por $\gamma_{[a,b]}(t) = (1-t)a + tb$, analogamente para os caminhos $[b, c]$ e $[c, a]$.

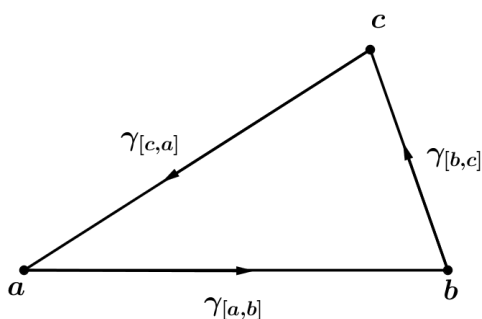


Figura 2.1: Triângulo de vértices a, b e c .

Antes de enunciarmos e demonstrarmos o Teorema Integral de Cauchy para um triângulo, vejamos a seguinte proposição, que é um resultado direto do Teorema Fundamental do Cálculo para integrais de linha.

Proposição 2.1. *Seja $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica com derivada contínua em G . Então*

$$\int_{\gamma} f' = 0,$$

para todo caminho fechado γ em G .

Demonstração. Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, um caminho fechado em G , ou seja, um caminho tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$. Então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = \int_a^b f'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0.$$

□

Teorema 2.1 (Teorema Integral de Cauchy para um triângulo). *Sejam $T_{\{a,b,c\}}$ um triângulo em um aberto G , $p \in G$, f uma função contínua em G e analítica em $G \setminus \{p\}$. Então*

$$\int_T f(z) dz = 0.$$

Demonstração. Primeiramente, suponhamos que $p \notin T_{\{a,b,c\}}$. Sejam a', b' , e c' os pontos médios de $[a, b]$, $[b, c]$ e $[c, a]$, respectivamente, e consideremos os triângulos $t_{\{a,a',c'\}}$, $t_{\{b,b',a'\}}$, $t_{\{c,c',b'\}}$ e $t_{\{a',b',c'\}}$, como na Figura 2.2:

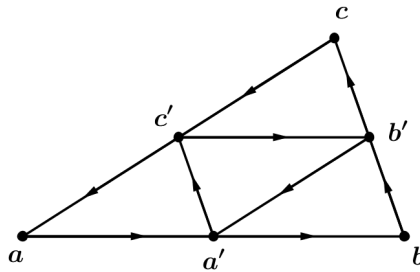


Figura 2.2: Triângulos $t_{\{a,a',c'\}}$, $t_{\{b,b',a'\}}$, $t_{\{c,c',b'\}}$ e $t_{\{a',b',c'\}}$.

A integral ao longo de T será a soma das integrais ao longo desses quatro triângulos. Chamando de t_1 o maior deles, temos

$$\left| \int_T f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{t_1} f(z) dz \right|.$$

Denotando por $L(T)$ o perímetro do triângulo T e por $L(t_1)$ o perímetro do triângulo t_1 , temos

$$L(t_1) \leq \frac{1}{2} L(T).$$

Temos também, denotando por $l(t_1)$ e $l(T)$ o comprimento do maior lado dos triângulos t_1 e T , respectivamente,

$$l(t_1) \leq \frac{1}{2}l(T).$$

Repetindo esse procedimento, obtemos uma sequência $\{t_n\}_{n \geq 1}$ de triângulos tais que $L(t_n) \leq \frac{1}{2^n}L(T)$, $t_{n+1} \subset t_n$ e

$$\left| \int_T f(z) dz \right| \leq 2^{2n} \left| \int_{t_n} f(z) dz \right|.$$

Por termos uma sequência de triângulos (compactos) encaixados, existe $z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} t_n$. Como T é compacto e $z_0 \in T$, f é diferenciável em z_0 , então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|,$$

sempre que $|z - z_0| < \delta$, e é possível encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $|z - z_0| < \delta$, para todo $z \in t_n$. Assim

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_n} f(z) dz \right| &= \left| \int_{t_n} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)) dz \right| \\ &\leq \varepsilon |z - z_0| L(t_n) \\ &< \varepsilon \cdot l(t_n) \cdot L(t_n). \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.1

$$\int_{t_n} [f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)] dz = 0.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \left| \int_T f(z) dz \right| &\leq 2^{2n} \left| \int_{t_n} f(z) dz \right| \\ &\leq 2^{2n} \cdot \varepsilon \cdot l(t_n) \cdot L(t_n) \\ &\leq 2^{2n} \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{2^n} l(T) \cdot \frac{1}{2^n} L(T) \\ &= \varepsilon \cdot l(T) \cdot L(T). \end{aligned}$$

Como isso vale para todo $\varepsilon > 0$, temos

$$\int_T f(z) dz = 0.$$

Agora, vamos avaliar os casos em que $p \in T$. Se p é um dos vértices do triângulo T , suponhamos, sem perda de generalidade, que $p = a$. Consideremos pontos a_1 e a_2 , nos segmentos $[a, b]$ e $[a, c]$, respectivamente, como na Figura 2.3:

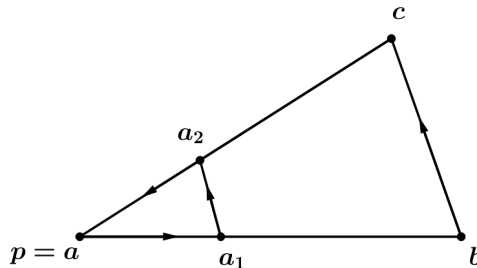


Figura 2.3: Triângulo de vértices $p = a, b$ e c .

Então,

$$\int_T f(z)dz = \int_{[a,a_1]} f(z)dz + \int_{[a_1,a_2]} f(z)dz + \int_{[a_2,a]} f(z)dz.$$

Fazendo $a_1, a_2 \rightarrow a$, temos

$$\int_T f(z)dz = 0.$$

Se p não é vértice do triângulo T , tomemos os segmentos que ligam os vértices a, b e c de T ao ponto p , como na Figura 2.4, e teremos os triângulos $t_{\{a,b,p\}}$, $t_{\{b,c,p\}}$ e $t_{\{a,c,p\}}$, dos quais p é um vértice. Procedemos, então, como anteriormente.

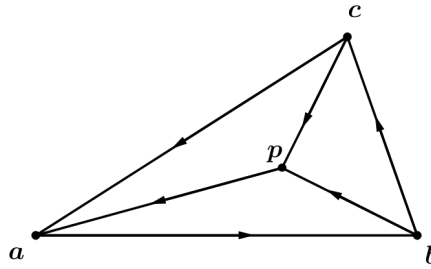


Figura 2.4: Triângulos $t_{\{a,b,p\}}$, $t_{\{b,c,p\}}$ e $t_{\{a,c,p\}}$.

Com isso, mostramos que

$$\int_T f(z)dz = 0.$$

□

2.2 O Teorema integral de Cauchy em um disco

Nesta seção mostramos que uma função f , analítica em um conjunto aberto $G \subset \mathbb{C}$, possui uma expansão em série de potências em cada ponto de G . Em particular, uma função analítica é infinitamente diferenciável. Começamos provando a Regra de Leibniz, um resultado muito importante de Cálculo.

Proposição 2.2 (Regra de Leibniz). *Seja $\varphi : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua e definimos $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ por*

$$g(t) = \int_a^b \varphi(s, t) ds.$$

Então g é contínua. Mais ainda, se $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ existe e é uma função contínua em $[a, b] \times [c, d]$ então g é continuamente diferenciável e

$$g'(t) = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) ds.$$

Demonstração. Primeiro, vejamos que g é contínua em $[c, d]$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta > 0$, que existe pela continuidade de φ , tal que, se $|t_1 - t_0| < \delta$ e $s \in [a, b]$, vale $|\varphi(s, t_1) - \varphi(s, t_0)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)}$.

Então

$$\begin{aligned}
|g(t_1) - g(t_0)| &= \left| \int_a^b \varphi(s, t_1) ds - \int_a^b \varphi(s, t_0) ds \right| \\
&= \left| \int_a^b [\varphi(s, t_1) - \varphi(s, t_0)] ds \right| \\
&\leq \int_a^b |\varphi(s, t_1) - \varphi(s, t_0)| ds \\
&\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{(b-a)} ds = \varepsilon
\end{aligned}$$

para $t_0, t_1 \in [c, d]$ satisfazendo $|t_1 - t_0| < \delta$ e $s \in [a, b]$. O que mostra a continuidade de g .

Agora, se mostrarmos que g é diferenciável e que g' é dada como no enunciado desta proposição, teremos, pela primeira parte, a continuidade de g' , sempre que $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ for contínua. Então, vamos mostrar que

$$g'(t) = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) ds.$$

De fato, fixando $t_0 \in [c, d]$, seja $\varepsilon > 0$. Suponhamos que $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ seja contínua em $[a, b] \times [c, d]$, então existe $\delta > 0$ tal que $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t_0) \right| < \varepsilon$, sempre que $|t - t_0| < \delta$ e $a \leq s \leq b$. Com isso,

$$\left| \int_{t_0}^t \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, \tau) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t_0) \right] d\tau \right| \leq \varepsilon |t - t_0|,$$

sempre que $|t - t_0| < \delta$ e $a \leq s \leq b$. Mas, para $s \in [a, b]$ fixado, a função $\varphi(s, t) - t \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t_0)$ é uma primitiva para $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t_0)$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{t_0}^t \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, \tau) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t_0) \right] d\tau \right| &= \left| \varphi(s, t) - t \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t_0) - \varphi(s, t_0) + t_0 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t_0) \right| \\
&= \left| \varphi(s, t) - \varphi(s, t_0) - (t - t_0) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t_0) \right| \\
&\leq \varepsilon |t - t_0|.
\end{aligned}$$

Então,

$$\left| \frac{\varphi(s, t) - \varphi(s, t_0)}{t - t_0} - \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t_0) \right| \leq \varepsilon.$$

Portanto,

$$\left| \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} - \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) ds \right| \leq \varepsilon \cdot (b - a),$$

quando $0 < |t - t_0| < \delta$. Com isso, temos o resultado. \square

Como consequência da proposição anterior temos

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is} - z} ds = 2\pi,$$

sempre que $|z| < 1$, o que será útil na demonstração da próxima proposição.

Proposição 2.3 (Fórmula Integral de Cauchy no disco). *Sejam $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica e $\bar{D}(a, r) \subset G$, $r > 0$. Se $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, então*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

para $|z - a| < r$.

Demonstração. Consideremos o conjunto $G_1 = \left\{ \frac{1}{r}(z - a); z \in G \right\}$ e a função $g(z) = f(a + rz)$, definida em G_1 . Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $a = 0$ e $r = 1$, ou seja, $\bar{D}(a, r) \subset G$.

Fixando z , tal que $|z| < 1$, queremos mostrar que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{is}) e^{is}}{e^{is} - z} ds. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{is}) e^{is}}{e^{is} - z} ds - 2\pi f(z) \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{f(e^{is}) e^{is}}{e^{is} - z} - f(z) \right] ds. \end{aligned}$$

Vamos aplicar a Regra de Leibniz para a função

$$\varphi(s, t) = \frac{f(z + t(e^{is} - z)) e^{is}}{e^{is} - z} - f(z),$$

para $0 \leq t \leq 1$ e $0 \leq s \leq 2\pi$.

Como $|z + t(e^{is} - z)| = |z(1 - t) + te^{is}| < 1$, φ está bem definida e é continuamente diferenciável.

Seja $g(t) = \int_0^{2\pi} \varphi(s, t) ds$, então g tem derivada contínua.

Precisamos, então, mostrar que $g(1) = 0$, o que teremos se $g(0) = 0$ e g for uma função constante.

$$\begin{aligned} g(0) &= \int_0^{2\pi} \varphi(s, 0) ds \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{f(z) e^{is}}{e^{is} - z} - f(z) \right] ds \\ &= f(z) \int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is} - z} ds - 2\pi f(z) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para mostrar que g é constante, vamos calcular sua derivada. Pela Regra de Leibniz,

$$g'(t) = \int_0^{2\pi} \varphi_2(s, t) ds,$$

onde $\varphi_2(s, t) = e^{is} f'(z + t(e^{is} - z))$.

Fixando $0 \leq t \leq 1$, uma primitiva de φ_2 é $\Phi(s) = -it^{-1} f(z + t(e^{is} - z))$. Então,

$$g'(t) = \Phi(2\pi) - \Phi(0) = 0,$$

para $0 \leq t \leq 1$. E, como g' é contínua, concluímos que g é constante. □

A Fórmula Integral de Cauchy no disco será especialmente útil na demonstração do seguinte teorema.

Teorema 2.2. *Seja f uma função analítica em $D(a, R)$, $R > 0$. Então $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$, para $|z - a| < R$, onde $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$ e essa série tem raio de convergência maior do que ou igual a R .*

Antes de demonstrarmos o Teorema 2.2, consideremos o disco aberto $|z - a| < r$ e suponhamos que w pertence ao círculo $|w - a| = r$. Então,

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - a}{w - a}} = \frac{1}{w - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{w - a} \right)^n,$$

uma vez que $|z - a| < r = |w - a|$. Agora, multiplicando os dois lados por $\frac{f(w)}{2\pi i}$ e integrando no círculo $\gamma = \{w \in \mathbb{C} : |w - a| = r\}$, teremos o lado esquerdo igual a $f(z)$, pela Proposição 2.3.

Consideremos, também, o seguinte lema.

Lema 2.1. *Seja γ uma curva retificável em \mathbb{C} e suponhamos que F_n e F sejam funções contínuas em $\{\gamma\}$. Se F_n converge uniformemente para F em $\{\gamma\}$, então*

$$\int_{\gamma} F = \lim \int_{\gamma} F_n.$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existe um número natural N tal que, se $n \geq N$, $|F_n(w) - F(w)| < \frac{\varepsilon}{L(\gamma)}$, para todo $w \in \{\gamma\}$. O que nos dá,

$$\left| \int_{\gamma} F - \int_{\gamma} F_n \right| = \left| \int_{\gamma} (F - F_n) \right| \leq \int_{\gamma} |F(w) - F_n(w)| |dz| \leq \varepsilon,$$

sempre que $n \geq N$. □

Agora, vamos à prova do Teorema 2.2 :

Demonstração. Seja $0 < r < R$, então o disco $\bar{D}(a, r) \subset D(a, R)$. Se $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, então,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

para $|z - a| < r$. Mas, uma vez que $|z - a| < r$ e $w \in \{\gamma\}$,

$$\frac{|f(w)||z - a|^n}{|w - a|^{n+1}} \leq \frac{M}{r} \left(\frac{|z - a|}{r} \right)^n,$$

onde $M = \max\{|f(w)|; |w - a| = r\}$. Como $\frac{|z - a|}{r} < 1$, temos que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z - a)^n}{(w - a)^{n+1}}$ converge uniformemente, para todo w em $\{\gamma\}$. Então,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw \right] (z - a)^n.$$

Se estabelecemos

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw,$$

então a_n não depende de z , e a expressão para $f(z)$ é uma série de potências que converge sempre que $|z - a| < r$. Segue que $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$, de modo que o valor de a_n não depende de γ , isto é, não depende de r . Assim,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n,$$

para $|z - a| < r$. Como r foi tomado arbitrário, $r < R$, temos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n,$$

para $|z - a| < R$, mostrando que seu raio de convergência é no mínimo igual a R . □

Corolário 1. *Se f é uma função analítica em G então f' também o é. Consequentemente, sendo analítica, a função f é infinitamente diferenciável.*

Corolário 2 (Fórmula Integral de Cauchy para derivadas). *Se $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ é analítica e $\overline{D}(a, r) \subset G$. Então,*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw,$$

onde $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

O próximo teorema estabelece, sob certas condições, uma recíproca para o Teorema 2.1 .

Teorema 2.3 (Teorema de Morera). *Seja $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua definida num aberto conexo $G \subset \mathbb{C}$ tal que $\int_T f = 0$, para todo triângulo $T \subset G$. Então, f é analítica em G .*

Demonstração. Se provarmos que f é analítica em cada disco contido em G , teremos f analítica em G . Por isso vamos assumir que $G = D(a, R)$. Para $z \in G$, seja $F(z) = \int_{[a, z]} f(w) dw$.

Fixando $z_0 \in G$, temos

$$F(z) = \int_{[a, z_0]} f(w) dw + \int_{[z_0, z]} f(w) dw,$$

então,

$$\begin{aligned} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} &= \frac{1}{z - z_0} \left(\int_{[a, z_0]} f(w)dw + \int_{[z_0, z]} f(w)dw - \int_{[a, z_0]} f(w)dw \right) \\ &= \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0, z]} f(w)dw. \end{aligned}$$

Com isso,

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z, z_0]} (f(w) - f(z_0))dw.$$

Então,

$$\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| \leq \frac{1}{|z - z_0|} \int_{[z, z_0]} |f(w) - f(z_0)|dw.$$

Como f é uma função contínua, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(w) - f(z_0)| < \varepsilon$, sempre que $|w - z_0| < \delta$. Basta, então, tomarmos $|z - z_0| < \delta$ e teremos

$$\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| \leq \varepsilon.$$

□

Combinando-se o Teorema Integral de Cauchy para um triângulo e o Teorema de Morera, acima, temos:

Proposição 2.4. *Seja f uma função contínua em G e analítica em $G \setminus \{p\}$, $p \in G$. Então f é analítica em G .*

Como consequência da Fórmula Integral de Cauchy para derivadas, em um disco, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.5 (Estimativa de Cauchy). *Seja f uma função analítica em $D(a, R)$ e suponhamos que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in D(a, R)$. Então,*

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}.$$

Demonstração. Tomando $r < R$ qualquer, temos

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(a)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right| \\ &\leq \left(\frac{n!}{2\pi} \right) \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r \\ &= \frac{n!M}{r^n} \end{aligned}$$

Como tomamos r arbitrariamente, $r < R$, o resultado está provado fazendo r tender a R pela esquerda. □

O próximo resultado é uma consequência da Estimativa de Cauchy.

Teorema 2.4 (Teorema de Liouville). *Se f for uma função inteira limitada, então f é constante.*

Demonstração. Suponha que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Como f é inteira, ela é analítica em qualquer disco $D(z, R)$, $R > 0$.

Sabemos que $|f'(z)| \leq \frac{M}{R}$ e podemos tomar R arbitrariamente grande, portanto, $f'(z) = 0$ para cada $z \in \mathbb{C}$. □

O Teorema de Liouville é uma ferramenta importante em Análise Complexa. A seguir, exibimos uma prova simples para o Teorema Fundamental da Álgebra utilizando-o.

Teorema 2.5 (Teorema Fundamental da Álgebra). *Se $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ for um polinômio, com $a_n \neq 0$ ($n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$), então existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $p(\alpha) = 0$.*

Demonstração. Suponhamos que $p(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$, e seja f definida por $f(z) = \frac{1}{p(z)}$. Então f é uma função inteira. Como $a_n \neq 0$, $\lim_{z \rightarrow \infty} p(z) = \infty$, o que implica que $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Daí, decorre que a função $|f|$ é limitada em \mathbb{C} . Logo, pelo Teorema de Liouville, f é constante e o polinômio p também o é. Absurdo! □

Por fim, mostramos o Teorema Integral de Cauchy em um disco:

Teorema 2.6 (Teorema integral de Cauchy em um disco). *Seja f uma função analítica no disco $D(z, r)$ e suponhamos que γ é uma curva fechada retificável em $D(z, r)$. Então*

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.2, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$, para $|z-a| < r$. Seja

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n+1} \right) (z-a)^{n+1} = (z-a) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n+1} \right) (z-a)^n.$$

Como $\lim (n+1)^{\frac{1}{n}} = 1$, essa série tem o mesmo raio de convergência de $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$. Assim, F está definida em $D(a, r)$. Mais ainda, $F' = f$, para $|z-a| < r$.

Agora, seja γ uma curva fechada em $D(z, r)$ dada por $\gamma(t)$, onde $t \in [a, b]$, então $\gamma(a) = \gamma(b)$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Resultados Principais

Neste capítulo apresentamos as duas proposições feitas por Loeb que simplificam a demonstração dada por Dixon para a Fórmula Integral de Cauchy em um aberto qualquer, que fazem parte do conjunto dos resultados principais deste trabalho.

Proposição 3.1. *Se γ é uma curva fechada em G , então para qualquer $z \in \{\gamma\}$ existe outra curva fechada σ em G , com $z \notin \{\sigma\}$ tal que*

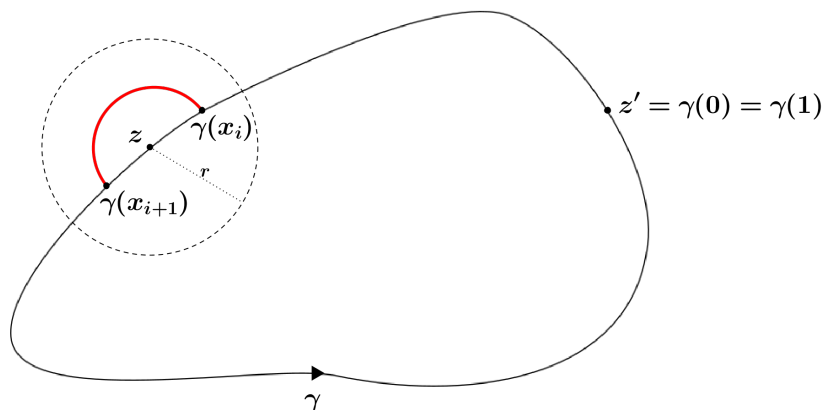
$$\int_{\gamma} f = \int_{\sigma} f,$$

para toda função f analítica em G .

Demonstração. Assumimos que existe $z' \in \{\gamma\}$ com $z' \neq z$, caso contrário o resultado seria trivial. Tomamos $r > 0$ de modo que $D(z, r) \subset G$ e $z' \notin D(z, r)$. Podemos supor que o caminho $\gamma(t)$ satisfaça $\gamma(0) = \gamma(1) = z'$. Pela continuidade uniforme de γ , existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, se $s, t \in [0, 1]$ e $|t - s| < \frac{1}{n}$, então $|\gamma(t) - \gamma(s)| < r$. Particionamos, então, o intervalo $[0, 1]$ da seguinte forma $0 < \frac{1}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < 1$.

Sejam $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = 1$ os pontos da forma $\frac{k}{n}$ tais que $\gamma(\frac{k}{n}) \neq z$. Se entre dois pontos adjacentes x_i e x_{i+1} há algum ponto da forma $\frac{k}{n}$, ou qualquer outro ponto t_0 , tal que $\gamma(t_0) = z$, então o caminho $\gamma(t)$, com $x_i \leq t \leq x_{i+1}$, está inteiramente contido no disco $D(z, r)$.

Pelo Teorema Integral de Cauchy aplicado ao disco $D(z, r)$, podemos substituir o caminho $\gamma(t)$ no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ por um caminho que vá de $\gamma(x_i)$ a $\gamma(x_{i+1})$ no conjunto $D(z, r) \setminus \{z\}$.



Essa substituição não altera o valor da integral de qualquer função f analítica em G . O novo caminho não contém z . \square

Proposição 3.2. *Seja f uma função analítica em G . Considere a função $\varphi: G \times G \rightarrow \mathbb{C}$, dada por*

$$\varphi(w, z) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, & \text{se } w \neq z, \\ f'(w), & \text{se } w = z. \end{cases}$$

Então, para cada $z \in G$, $\varphi(\cdot, z)$ é analítica em G . Mais ainda, a função g , definida por

$$g(z) = \int_{\gamma} \varphi(w, z) dw,$$

é analítica em G , para qualquer curva γ fechada em G .

Demonstração. Dado $z \in G$, temos que $\varphi(\cdot, z)$ é contínua em G e analítica em $G \setminus \{z\}$. Portanto, $\varphi(\cdot, z)$ é analítica em G .

Se $z \notin \{\gamma\}$, então

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_{\gamma} \varphi(w, z) dw \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \int_{\gamma} \frac{1}{w - z} dw. \end{aligned}$$

A função g é analítica em $G \setminus \{\gamma\}$. Fixado $z \in \{\gamma\}$, a Proposição 3.1 nos permite substituir γ por uma curva σ tal que $z \notin \{\sigma\}$. Portanto, existe um disco $D(z, \varepsilon)$ onde os valores de g não se alteram. Logo g é analítica em $D(z, \varepsilon)$, sendo assim, analítica em G . \square

Capítulo 4

A Fórmula Integral de Cauchy

Finalmente, neste capítulo, enunciamos e demonstramos a Fórmula e o Teorema Integral de Cauchy em um aberto qualquer.

Teorema 4.1. *Sejam G um subconjunto aberto de \mathbb{C} e Γ um ciclo em G tal que $n(\Gamma, a) = 0$ para cada ponto $a \notin G$. Então, para toda função f analítica em G e $z \in G \setminus \{\Gamma\}$, vale a Fórmula Integral de Cauchy:*

$$f(z) \cdot n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Daí, decorre o Teorema Integral de Cauchy:

$$\int_{\Gamma} f(w) dw = 0.$$

Demonstração. Para provar a Fórmula Integral de Cauchy, sejam f uma função analítica em G , φ e g definidas como na Proposição 3.2. O conjunto

$$H = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{\Gamma\} : n(\Gamma, z) = 0\},$$

é um subconjunto aberto de \mathbb{C} tal que $H \cup G = \mathbb{C}$.

Consideremos a função analítica h , dada por

$$h(z) = \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \forall z \in H.$$

Para os pontos $z \in H \cap G$,

$$g(z) = \int_{\Gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw.$$

Então,

$$\begin{aligned}
 g(z) &= \int_{\Gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw \\
 &= h(z) - \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{w - z} dw \\
 &= h(z) - f(z) \cdot 2\pi i \cdot n(\Gamma, z) \\
 &= h(z).
 \end{aligned}$$

Assim, $g(z) = h(z)$ para $z \in H \cap G$, de modo que podemos estender g para uma função inteira.

Como $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$, do Teorema de Liouville concluímos que $g \equiv 0$ em \mathbb{C} .

Então, para todos os pontos $z \in G \setminus \{\Gamma\}$, temos

$$\begin{aligned}
 f(z) \cdot n(\Gamma, z) &= f(z) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{w - z} dw \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{w - z} dw + \frac{1}{2\pi i} \cdot g(z) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{w - z} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw,
 \end{aligned}$$

mostrando a Fórmula Integral de Cauchy.

Agora fixamos um ponto $a \in G \setminus \{\Gamma\}$,

$$\int_{\Gamma} f(w) dw = \int_{\Gamma} \frac{f(w) \cdot (w - a)}{w - a} dw.$$

Definindo $F(w) = f(w) \cdot (w - a)$, temos

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} f(w) dw &= \int_{\Gamma} \frac{F(w)}{w - a} dw \\
 &= (2\pi i) \cdot n(\Gamma, a) \cdot F(a) \\
 &= (2\pi i) \cdot n(\Gamma, a) \cdot f(a) \cdot (a - a) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

o que prova o Teorema Integral de Cauchy. □

Bibliografia

- [1] Ahlfors, Lars V., **Complex Analysis**, McGraw-Hill Book Company, 2nd edition, 1966;
- [2] Churchill, Ruel V., **Complex Variables and Applications**, McGraw-Hill Book Company, 2nd edition, 1960;
- [3] Conway, John B., **Functions of One Complex Variable I**, Springer, Graduate texts in mathematics; vol. 11, 2nd edition, 1978;
- [4] Dixon, John D., **A Brief Proof of Cauchy's Integral Theorem**, Proceedings of the American Mathematical Society Vol. 29, No. 3 (Aug., 1971), pp. 625-626;
- [5] Loeb, Peter A., **A Further Simplification of Dixon's Proof of Cauchy's Integral Theorem**, The American Mathematical Monthly, Vol. 100, No. 7 (Aug. - Sep., 1993), pp. 680-681;
- [6] Loeb, Peter A., **A Note on Dixon's Proof of Cauchy's Integral Theorem** The American Mathematical Monthly, Vol. 98, No. 3 (Mar., 1991), pp. 242-244;
- [7] Rudin, Walter, **Real and Complex Analysis**, McGraw-Hill Book Company, 3rd edition, 1974;
- [8] Soares, Mário G., **Cálculo em uma variável complexa**, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 1999.