

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA



Folheações holomorfas com grupo de holonomia
prescrito

Julio Leo Fonseca Quispe

Belo Horizonte - MG

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Julio Leo Fonseca Quispe

Orientadora: Dra. Lorena López Hernanz
Coorientador: Dr. Arturo Ulises Fernandez Perez

**Folheações holomorfas com grupo de
holonomia prescrito**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas (ICEX) da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção de título de Mestre em Matemática.

Belo Horizonte - MG

2014

Quispe, Julio Leo Fonseca

Folheações Holomorfas com grupo de holonomia prescrito/

Julio Leo Fonseca Quispe. – Belo Horizonte, 2014.

87f. : il.

Orientadora: Lorena López Hernanz

Co-orientador: Arturo Fernandez Pérez

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais.

Programa de Pós-graduação em Matemática.

1. Folheações Holomorfas – Teses.
2. Redução de Singularidades.
3. Holonomia.
4. Teorema de Grauert. I. Título

Universidade Federal de Minas Gerais.

ICEX-UFMG.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado saúde, coragem, persistência e disposição para lutar todos os dias.

Aos meus pais Félix e Doris, por me apoiar, acreditar e confiar em mim, de maneira incondicional durante esse tempo na distância. Eles têm sido um pilar importante para mim nesse novo desafio, com seu amor incondicional e palavras constantes de apoio para o meu desenvolvimento pessoal e profissional. Aos meus irmãos Eddie (Pepe) e Lucy pelo apoio e compreensão em cada dia de minha vida.

À minha namorada, amiga e companheira, Katherine, por estar sempre ao meu lado, por sua paciência, compreensão e pelo incansável apoio durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus orientadores Dra. Lorena López Hernanz Dr. Arturo Fernandez Pérez, pelo seu permanente apoio, disponibilidade e crítica exigente que foi fundamental durante o desenvolvimento deste trabalho.

Não poderia deixar de agradecer aos professores Alberto Sarmiento, Judith Cruz e Walter Torres pelo incentivo a seguir nessa profissão. Agradeço

aos meus colegas do ICEx e do mestrado em nessa caminhada pelo mundo da matemática em especial a meus amigos: Victor, Eduardo, Antonio, Edwin, Eduardo Maselli, Almendras, Carlos, José, John e a todo o pessoal que eu conheci na graduação e pós-graduação, e claro a meus amigos de meu querido Mollendo: Santos, David, Jhon; graças a todos eles, esses anos tornaram-se muito mais agradáveis.

Agradeço às secretarias da pos-graduação Andréa e Kelly, pois elas sempre foram muito amáveis e profissionais, além de nós ajudar e resolver todo tipo de dúvidas, para elas meu muito obrigado.

Agradeço também aos professores da banca examinadora Gilcione Costa e Fabio Brochero pelas correções e críticas sempre bem-vindas de este trabalho.

À Capes, pela concessão da bolsa de mestrado e pelo apoio financeiro para a realização desta pesquisa.

MUITO OBRIGADO!

Aos meus pais Felix e Doris.

Resumo

Dados G um subgrupo do grupo de difeomorfismos holomorfos e \mathcal{F} uma folheação gerada por um campo de vetores holomorfo X definido em $0 \in \mathbb{C}^2$, quando o grupo G é conjugado ao grupo de holonomia projetivo associado a \mathcal{F} ? O objetivo deste trabalho é o estudo do artigo de Alcides Lins Neto [2] que dá uma solução parcial para esse problema:

Teorema. *Seja $G = \{g_1, \dots, g_\nu\}$ um conjunto de germes em $0 \in \mathbb{C}$ de difeomorfismos holomorfos com ponto fixo em 0 e tais que g_1, \dots, g_ν e $g_1 \circ \dots \circ g_\nu$ são linearizáveis. Então existe um germe de campo de vetores holomorfo X , singular em $0 \in \mathbb{C}^2$, tal que o grupo de holonomia projetivo é analiticamente conjugado ao grupo gerado por G .*

Palavras-Clave: Folheações Holomorfas, Campos de vetores, Redução de Singularidades, Teorema de Seidenberg, Teorema de Camacho-Sad, índice de Camacho-Sad, Classe de Chern, Holonomia, Teorema de Grauert.

Abstract

Let \mathcal{F} be a foliation defined by a holomorphic vector field X on a neighborhood of $0 \in \mathbb{C}^2$ and let G be a group of holomorphic germs of diffeomorphisms at 0. We address to the question on whether G is conjugated to the projective holonomy group associated to \mathcal{F} . Our aim in this work is to study Lins Neto's article [2] that provides a partial solution to this problem.

Teorema. *Let $G = \{g_1, \dots, g_\nu\}$ be a group of germs at $0 \in \mathbb{C}$ of holomorphic diffeomorphisms with leave 0 fixed and such that g_1, \dots, g_ν and $g_1 \circ \dots \circ g_\nu$ are linearizable. Then there is a germ holomorphic vector field X , with a singularity at $0 \in \mathbb{C}^2$, such that its projective holonomy group conjugated to the group holomorphically generated by G .*

Keywords: Holomorphic Foliations, Vector fields, Reduction of singularities, Seidenberg Theorem, Camacho-Sad Theorem, The Camacho-Sad index, Class Chern, Holonomy, Grauert Theorem.

Sumário

1	Folheações holomorfas	1
1.1	Variedades complexas	1
1.2	Folheações holomorfas regulares	6
1.2.1	Folheações definidas por campos de vetores holomorfos	9
1.3	Folheações holomorfas singulares	10
1.4	Separatrizes de folheações	13
2	Teoremas de Seidenberg e Camacho-Sad	16
2.1	Explosão de folheações	16
2.2	Singularidades simples de folheações holomorfas	19
2.3	Redução de singularidades	23
2.3.1	Redução a singularidades pré-simples	28
2.3.2	Redução a singularidades simples	32
2.4	Teorema de Camacho-Sad	33
3	Grupo de holonomia de uma folheação	41
3.1	Conjugação de grupos de Holonomia	49
3.2	O grupo de holonomia de uma folha transversal a uma fibração	53
3.3	Grupo de holonomia associados a singularidades de folheações	55
3.4	Grupo de holonomia projetivo	57

<i>SUMÁRIO</i>	viii
----------------	------

4 Folheações com grupo de holonomia prescrito	59
4.1 Introdução	59
4.2 Prova do Teorema 4.1	61
4.3 Generalização do teorema para varias explosões	80

Introdução

Este trabalho tem por objetivo apresentar um estudo detalhado das Folheações Holomorfas em \mathbb{C}^2 . Para esse fim, vamos nos centrar no estudo de folheações singulares holomorfas de dimensão um em um espaço ambiente de dimensão dois. Começaremos com o estudo das singularidades de uma folheação por curvas, do ponto de vista local. Estudaremos o processo conhecido como redução de singularidades [3], que reduz o estudo de uma folheação com singularidade isolada qualquer ao de uma folheação com singularidades especiais, chamadas de singularidades simples, através de explosões centradas num ponto $p \in \mathbb{C}^2$. Estudaremos o índice de Camacho-Sad e sua relação com a primeira classe de Chern do fibrado normal do divisor excepcional, e enunciaremos o teorema da separatriz [8]. Introduziremos o conceito de grupo de holonomia de uma folheação [6], estudaremos algumas das suas propriedades e definiremos o grupo de holonomia projetivo relativo a uma separatriz.

A prova do Teorema principal (4.1) consiste na construção de uma superfície complexa que resulta da colagem de folheações induzidas localmente por campos de vetores holomorfos, e uma aplicação de um teorema de linearização de Grauert [25].

Concluiremos esse trabalho generalizando o teorema para o varias explosões.

Capítulo 1

Folheações holomorfas

Nesse capítulo introduziremos as folheações regulares e singulares, as explosões centradas em pontos e as separatrizes de uma folheação. As principais referências usadas são [4], [6], [10] e [15].

1.1 Variedades complexas

As variedades complexas são o análogo complexo das variedades diferenciais. De maneira sucinta, uma variedade complexa é um espaço topológico que é localmente modelado por abertos de \mathbb{C}^n e cujas cartas locais diferem por transformações holomorfas.

Uma *variedade complexa de dimensão n* é uma variedade topológica M , junto com um atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, tal que cada U_i é um aberto de M , $\bigcup_{i \in I} U_i = M$, $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i \subseteq \mathbb{C}^n$ é um homeomorfismo, e se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, a aplicação $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ é um biholomorfismo. Dois atlas holomorfos $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, $\{(V_j, \phi_j)\}_{j \in J}$ definem a mesma estrutura de variedade holomorfa em M se são *compatíveis*, isto é, se $U_i \cap V_j \neq \emptyset$ então a aplicação $\phi_j \circ \varphi_i^{-1}$ é um biholomorfismo entre $\varphi_i(U_i \cap V_j)$ e $\phi_j(U_i \cap V_j)$.

Uma *aplicação holomorfa* entre duas variedades complexas $(M, (U_i, \varphi_i))$, $(N, (V_j, \phi_j))$ é uma aplicação contínua $f : M \rightarrow N$ tal que $\phi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ é holomorfa, onde essa aplicação estiver bem definida.

Qualquer domínio (aberto conexo) $U \subset \mathbb{C}^n$ é uma variedade complexa. De fato, $M = U$ tem um sistema de coordenadas $\{z\}$ composto pela única coordenada local $z = (z_1, \dots, z_n) \mapsto z$.

O conceito de variedade complexa é uma generalização do conceito de superfície de Riemann; de fato, uma superfície de Riemann é simplesmente uma variedade complexa de dimensão 1. Para mais detalhes de superfícies de Riemann, o leitor pode consultar [23].

Um subconjunto fechado S de uma variedade M de dimensão n é um *subconjunto analítico* de M se para todo ponto $p \in S$, existem um número finito de funções analíticas f_1, \dots, f_k , definidas em uma vizinhança U de p , tais que

$$S \cap U = \{p \in U; f_1(p) = \dots = f_k(p) = 0\}.$$

Um subconjunto analítico S de uma variedade M de dimensão n sem pontos singulares é uma subvariedade complexa de M .

O leitor interessado em outros exemplos de variedades complexas pode consultar as referências [23], [18] e [21].

Denotaremos por

- $\mathcal{O}(M)$ o anel de funções holomorfas em M .
- $\mathcal{O}^*(M)$ o anel de funções holomorfas que não se anulam em M .
- $\widehat{\mathcal{O}}_n$ o anel de séries de potências formais nas variáveis z_1, \dots, z_n .

Exemplo 1.1. Linha projetiva complexa ou esfera de Riemann

Seja \mathbb{P}^1 a reta projetiva complexa, isto é, o conjunto de subespaços 1-dimensionais de \mathbb{C}^2 , que também pode ser visto como o conjunto quociente

$[\mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}] / \sim$, definido pela relação de equivalência $(v_1, w_1) \sim (v_2, w_2)$ se e somente se existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $(v_1, w_1) = \lambda(v_2, w_2)$. Denotaremos por $[v, w]$ a classe de equivalência de (v, w) . Consideremos os conjuntos abertos:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{[v, w] \in \mathbb{P}^1; v \neq 0\} = \{[1 : t]; t \in \mathbb{C}\} \\ U_2 &= \{[v, w] \in \mathbb{P}^1; w \neq 0\} = \{[u : 1]; u \in \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

Teremos que $\mathbb{P}^1 = U_1 \cup U_2$, e definiremos

$$\begin{aligned} \phi_1 : U_1 &\longrightarrow \mathbb{C} & \phi_2 : U_2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ [1 : t] &\longmapsto t & [u : 1] &\longmapsto u. \end{aligned}$$

Tanto ϕ_1 como ϕ_2 são bijetivas e $\phi_i(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^*$, para $i = 1, 2$. Como $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(t) = 1/t$, as cartas são compatíveis. Portanto \mathbb{P}^1 é uma variedade complexa de dimensão 1.

Exemplo 1.2. Colagem de variedades

Sejam X, Y variedades complexas, e sejam $U \subset X$ e $V \subset Y$ abertos não vazios. Suponhamos que existe um difeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$. Formamos a união disjunta $X \amalg Y = (X \times \{1\}) \cup (Y \times \{2\})$. Sejam as inclusões $i_X : X \rightarrow X \amalg Y$, $i_Y : Y \rightarrow X \amalg Y$ definidas por $i_X(x) = (x, 1)$, $i_Y(y) = (y, 2)$. Os abertos de $X \amalg Y$ são os subconjuntos cujas pré imagens via i_X , i_Y são abertos respectivamente de X, Y . Consideremos o espaço quociente $(X \amalg Y) / [u \cong \phi(u)]$, para $u \in U$, onde $u \cong \phi(u)$ denota a identificação pelo difeomorfismo ϕ . Temos uma partição de $X \amalg Y$ formada por:

- conjuntos de um elemento $\{x\}$ para $x \in X \setminus U$,
- conjuntos de um elemento $\{y\}$ para $y \in Y \setminus V$,
- pares $\{(u, \phi(u))\}$ para $u \in U$.

Denotaremos o quociente Z como $X \cup_{\phi} Y$, e o chamaremos de colagem do espaço X e o espaço Y ao longo de U e V através de ϕ . A projeção $\pi : X \amalg Y \rightarrow Z$ é contínua, e um subconjunto $W \subset Z$ é aberto se e somente se $\pi^{-1}(W)$ é aberto de $X \amalg Y$.

Exemplo 1.3. Explosão centrada em um ponto

A noção de explosão pode ser definida em geral em muitas situações, nós somente utilizaremos em sua forma mais simples. A idéia básica é a seguinte: partiremos do ponto p sobre uma superfície complexa M , e construímos uma nova superfície \widetilde{M} e uma aplicação $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ tal que $\pi^{-1}(p) = D$ é uma curva em \widetilde{M} , chamada de *divisor excepcional*, onde π será um isomorfismo entre $\widetilde{M} \setminus D$ e $M \setminus \{p\}$.

Descreveremos a *explosão de \mathbb{C}^2 centrada na origem*. Para esse fim, consideremos o seguinte subconjunto de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$:

$$\widetilde{\mathbb{C}}^2 = \{((x, y), [v : w]) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1; xw = yv\}.$$

Mostraremos que $\widetilde{\mathbb{C}}^2$ é uma superfície complexa. De fato, os conjuntos

$$U_1 = \{((x, y), [v : w]) \in \widetilde{\mathbb{C}}^2; v \neq 0\} = \{((x, xt), [1 : t]); (x, t) \in \mathbb{C}^2\},$$

$$U_2 = \{((x, y), [v : w]) \in \widetilde{\mathbb{C}}^2; w \neq 0\} = \{((yu, u), [u : 1]); (u, y) \in \mathbb{C}^2\}$$

são abertos em $\widetilde{\mathbb{C}}^2$, e as aplicações

$$\begin{aligned} \varphi_1 : U_1 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 & \varphi_2 : U_2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ ((x, xt), [1 : t]) &\longmapsto (x, t) & ((yu, u), [u : 1]) &\longmapsto (u, y) \end{aligned}$$

são holomorfas, invertíveis e com inversa contínua. Além disso, $U_1 \cup U_2 = \widetilde{\mathbb{C}}^2$ e as mudanças de coordenadas

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x, t) = \left(\frac{1}{t}, xt\right), \quad \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(u, y) = \left(yu, \frac{1}{u}\right)$$

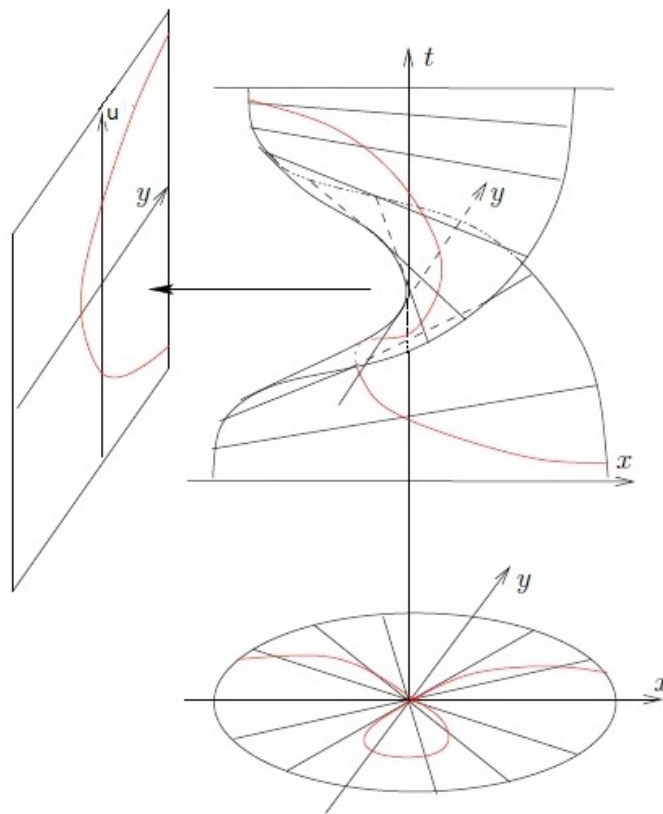


Figura 1.1: Explosão na origem de \mathbb{C}^2 (figura tomada de [11]).

são biholomorfismos, logo dão a $\tilde{\mathbb{C}}^2$ uma estrutura de superfície complexa. Por outro lado, a aplicação

$$\begin{aligned} \pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ ((x, y), [v, w]) &\longmapsto (x, y) \end{aligned}$$

é holomorfa, logo o divisor D é dado, nas respectivas cartas, por

$$\begin{aligned} \pi \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, t) &\longmapsto (x, xt) \end{aligned} \quad , \quad D \cap U_1 = \{x = 0\}$$

$$\begin{aligned} \pi \circ \varphi_2^{-1} : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (u, y) &\longmapsto (uy, y) \end{aligned} \quad , \quad D \cap U_2 = \{y = 0\}$$

Observemos que π é um biholomorfismo entre $\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D$ e $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, onde

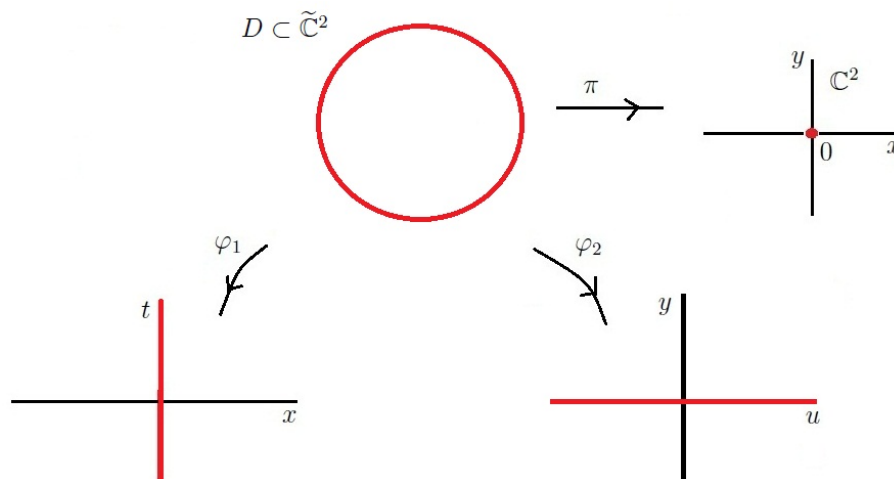


Figura 1.2: Cartas da explosão.

$$D = \pi^{-1}(0) \cong \mathbb{P}^1.$$

Referimo-nos a $(\tilde{\mathbb{C}}^2, \pi, D, \mathbb{C}^2)$ que denotaremos por $\tilde{\mathbb{C}}^2$, como a explosão de \mathbb{C}^2 centrada na origem.

Essa construção se transporta, através das cartas, a qualquer superfície complexa.

1.2 Folheações holomorfas regulares

Dada uma superfície complexa M , uma *folheação holomorfa regular* \mathcal{F} por curvas é uma decomposição de M em subvariedades holomorfas imersas de dimensão 1 disjuntas duas a duas, chamadas folhas de \mathcal{F} .

Apresentamos duas formas equivalentes de definir uma folheação sobre M :

Definição 1.1 (Por cartas distinguidas). *Uma folheação holomorfa regular em M é um atlas maximal holomorfo $\mathcal{F} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de M que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\varphi_i(U_i) = P_i \times Q_i$, onde P_i, Q_i são ambos discos de \mathbb{C} .
2. Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então a mudança de cartas $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ é localmente da forma

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x, y) = (h_{ij}(x, y), g_{ij}(y)), \quad x \in P_i \subseteq \mathbb{C}, \quad y \in Q_i \subseteq \mathbb{C} \quad (1.1)$$

onde h_{ij} e g_{ij} são aplicações holomorfas.

Os conjuntos da forma $\alpha_i = \varphi_i^{-1}(P_i \times \{c\})$, $c \in Q_i$, são chamados *placas* de \mathcal{F} . Essas placas definem uma relação de equivalência \sim em M : se $p, q \in M$ então $p \sim q$ se, e somente se, existe uma coleção de placas $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tal que $p \in \alpha_1, q \in \alpha_m$ e $\alpha_l \cap \alpha_{l+1} \neq \emptyset, \forall 1 \leq l \leq m - 1$. A classe de equivalência L_p que contém $p \in M$ é chamada *folha* de \mathcal{F} que passa por p .

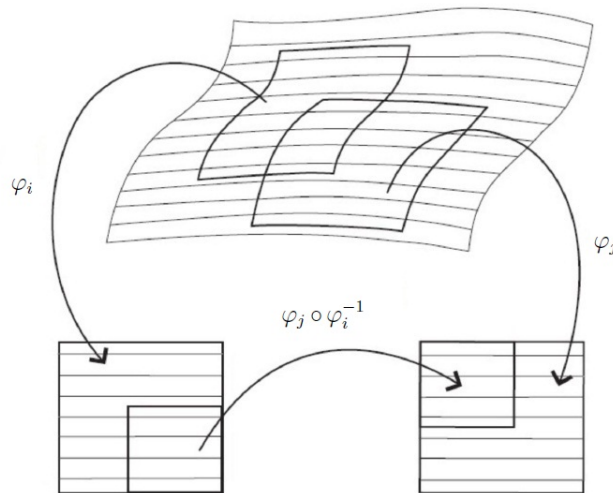


Figura 1.3: Folheação por cartas distinguidas.

Definição 1.2 (Por submersões locais). *Uma folheação holomorfa regular \mathcal{F} é uma cobertura aberta $M = \cup_{i \in I} U_i$ junto com uma coleção $\{g_i\}_{i \in I}$ que satisfazem:*

1. *Para todo $i \in I$, $g_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ é uma submersão.*
2. *Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então existe um biholomorfismo $g_{ij} : g_i(U_i \cap U_j) \rightarrow g_j(U_i \cap U_j)$ tal que*

$$g_j(p) = g_{ij} \circ g_i(p) \quad (1.2)$$

para todo $p \in U_i \cap U_j$.

As placas de \mathcal{F} em U_i são as componentes conexas dos conjuntos da forma $g_i^{-1}(c)$, $c \in g_i(U_i) \subset \mathbb{C}$.

O exemplo mais simples de folheação é a folheação trivial de \mathbb{C}^2 , isto é a decomposição de $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Tal decomposição define uma folheação \mathcal{F} em \mathbb{C}^2 , cujas folhas são os subespaços $\mathbb{C} \times \{c\}$, $c \in \mathbb{C}$.

Mostraremos que as definições 1.1 e 1.2 são equivalentes. Para isso precisaremos do seguinte resultado (o leitor pode consultar [17]).

Teorema 1.1 (Forma local das submersões holomorfas). *Seja M uma superfície complexa, $U \subset M$ um domínio em M , e $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma submersão holomorfa. Então para todo $p \in U$ existem uma vizinhança aberta U_p de p , uma vizinhança aberta Q de $g(p)$, um domínio aberto $P \subset \mathbb{C}$ e uma aplicação holomorfa $f : U_p \rightarrow P$ tais que $q \mapsto (f(q), g(q))$ define um biholomorfismo $\varphi = (f, g)$ entre U_p e um subconjunto aberto de $P \times Q$.*

Seja \mathcal{F} uma folheação dada por um atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$. Como (U_i, φ_i) é uma carta, então $g_i = \pi_2 \circ \varphi_i$ é uma submersão. Além disso, as aplicações holomorfas g_{ij} da equação (1.1) satisfazem a equação (1.2). De fato, como

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x, y) = (h_{ij}(x, y), g_{ij}(y)) = (h_{ij}(x, y), g_{ij} \circ \pi_2(x, y))$$

então

$$g_j = \pi_2 \circ \varphi_j = \pi_2 \circ \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \circ \varphi_i = g_{ij} \circ \pi_2 \circ \varphi_i = g_{ij} \circ g_i.$$

Reciprocamente, seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa dada pela Definição 1.2. Pelo Teorema 1.1 segue que para todo $p \in U_i$ existem uma vizinhança aberta $U_{i,p} \subseteq U_i$ e uma função $f_{i,p}$ tais que $\varphi_{i,p} = (f_{i,p}, g_i|_{U_{i,p}})$ é um biholomorfismo entre $U_{i,p}$ e um subconjunto aberto $V \times W$ de \mathbb{C}^2 . Assim, obteremos um atlas $\{(U_{i,p}, \varphi_{i,p})\}$ de M . Mostremos que esse atlas satisfaz a equação (1.1). Consideremos duas cartas $(U_{i,p}, \varphi_{i,p})$ e $(U_{j,q}, \varphi_{j,q})$ com $U_{i,p} \cap U_{j,q} \neq \emptyset$, e sejam $z \in U_{i,p} \cap U_{j,q}$ e $(x, y) = \varphi_{i,p}(z)$, isto é, $x = f_{j,p}(z)$ e $y = g_i(z)$. Então

$$\varphi_{j,q} \circ \varphi_{i,p}^{-1}(x, y) = \varphi_{j,q}(z) = (f_{j,q}(z), g_j(z)) = (f_{j,q}(z), g_{ij}(g_i(z))),$$

logo $\varphi_{j,q} \circ \varphi_{i,p}^{-1}(x, y) = (f_{j,q} \circ \varphi_{i,p}^{-1}(x, y), g_{ij}(y))$. Portanto, as definições 1.1 e 1.2 são equivalentes.

1.2.1 Folheações definidas por campos de vetores holomorfos

Seja X um campo de vetores holomorfo, que não se anula, definido em um aberto U de uma superfície complexa M . As trajetórias (curvas complexas integrais) de X definem uma folheação \mathcal{F} por curvas no aberto U . A estrutura de folheação decorre do seguinte teorema:

Teorema 1.2 (Teorema do Fluxo Tubular para campos holomorfos). *Para todo $p \in M$ tal que $X(p) \neq 0$, existe uma carta local $(U, \varphi(x, y))$, $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) = P \times Q \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ em p na qual $X = \partial/\partial x$.*

Como as trajetórias de X são as soluções da equação diferencial $dz/dt = X(x, y)$, $z = (x, y)$, e $X|_U = \partial/\partial x$, segue-se que as trajetórias de X em U

são da forma $\varphi^{-1}(P \times \{c\})$ com $c \in Q$. Obteremos daí e da Definição 1.1 uma folheação por curvas, cujas folhas são as trajetórias de X .

Além disso, notemos que se $U' \subset M$ é aberto com $U \cap U' \neq \emptyset$, e X' é um campo de vetores não singular que satisfaz $X|_{U \cap U'} = fX'|_{U \cap U'}$ para alguma função $f \in \mathcal{O}^*(U \cap U')$ então X e X' induzem a mesma folheação em $U \cap U'$. Obteremos assim, uma folheação definida em $U \cup U'$.

Reciprocamente uma folheação holomorfa regular é induzida por campos de vetores não singulares. De fato, basta tomar em cada aberto U_i , da carta distinguida, o campo $X_i = d(\varphi_i^{-1})(\frac{\partial}{\partial x})$. Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então para cada $p \in U_i \cap U_j$ existe $f_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$ tal que $X_i(p) = f_{ij}(p)X_j(p)$. A função f_{ij} assim definida é holomorfa.

Proposição 1.1. *Uma folheação holomorfa regular sobre uma superfície complexa pode ser descrita de forma equivalente por: uma coleção de pares (U_i, X_i) onde X_i é um campo de vetores holomorfo que não se anula em U_i , e tal que se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então X_i e X_j diferem em $U_i \cap U_j$ por multiplicação por uma função holomorfa que não se anula.*

1.3 Folheações holomorfas singulares

Consideremos uma superfície complexa M .

Definição 1.3. *Uma folheação holomorfa singular de dimensão 1 é um par $\mathcal{F} = (\mathcal{F}', \text{Sing}(\mathcal{F}))$, onde $\text{Sing}(\mathcal{F})$ é um subconjunto analítico próprio de M e \mathcal{F}' é uma folheação holomorfa regular em $M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$.*

Os pontos de $\text{Sing}(\mathcal{F})$ são chamados *singularidades*. As folhas de \mathcal{F} são as folhas da folheação regular $\mathcal{F}'|_{M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})}$. Dizemos que a folheação singular holomorfa é *saturada* se ela não pode ser estendida a nenhum ponto

de $\text{Sing}(\mathcal{F})$. Observemos que, pelo Teorema de Hartogs [22], o conjunto singular de uma folheação saturada é discreto. Nesse trabalho, a palavra folheação denotará sempre uma folheação holomorfa singular saturada.

A seguir, mostraremos que toda folheação \mathcal{F} provém de uma coleção de campos de vetores holomorfos com singularidades isoladas. Para esse fim, precisaremos do seguinte resultado cuja prova pode ser consultado em [22].

Teorema 1.3 (de extensão de Levi). *Sejam U um aberto de \mathbb{C}^n e $V \subset U$ um subconjunto analítico de codimensão pelo menos 2. Se f é uma função meromorfa definida sobre $U \setminus V$, então existe uma função meromorfa \tilde{f} definida sobre U tal que $\tilde{f}|_{U \setminus V} = f$.*

Proposição 1.2. *Seja U uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$, seja \mathcal{F} uma folheação em U com conjunto singular $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{0\}$. Então existe um campo de vetores holomorfo X em U , singular em 0 , tal que as curvas integrais de X em $U \setminus \{0\}$ coincidem com as folhas de \mathcal{F} .*

Demonstração. A partir da Proposição 1.1, consideramos campos de vetores holomorfos $\{X_i\}_{i \in I}$ que definem \mathcal{F} em abertos $\{U_i\}$ que cobrem $U \setminus \{0\}$. Nas coordenadas (x, y) de U , escrevemos $X_i = a_i(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b_i(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$. As funções b_i/a_i definem uma função meromorfa f em $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Pelo Teorema 1.3 existem funções holomorfas a, b em U tais que $f(x, y) = b(x, y)/a(x, y)$. O campo $X = a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ define a folheação \mathcal{F} em $U \setminus \{0\}$, e se anula em 0 . \square

A partir da Proposição anterior e os resultados da seção 1.2, daremos a seguinte definição equivalente de folheação:

Definição 1.4. *Uma folheação \mathcal{F} em M é definida por coleções $\{X_i\}_{i \in I}$, $\{U_i\}_{i \in I}$ e $\{g_{ij}\}_{U_i \cap U_j \neq \emptyset}$, tais que*

1. $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de M .
2. Para cada $i \in I$, X_i é um campo de vetores holomorfo não identicamente nulo sobre U_i com singularidade isoladas.
3. $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$.
4. Em $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ teremos que $X_i = g_{ij}X_j$.

Para cada campo X_i consideremos o conjunto singular dado por: $\text{Sing}(X_i) = \{p \in U_i; X_i(p) = 0\}$. Denotamos por $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \cup \text{Sing}(X_i) \subset M$.

Definiremos uma folheação singular, de forma equivalente, por meio de 1-formas diferenciais.

Proposição 1.3. *Uma folheação holomorfa singular \mathcal{F} sobre uma superfície complexa M é definida por coleções $\{U_i\}_{i \in I}$, $\{\omega_i\}_{i \in I}$ e $\{h_{ij}\}_{U_i \cap U_j \neq \emptyset}$ tais que:*

1. $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de M .
2. Para cada $i \in I$, ω_i é uma 1-forma holomorfa não identicamente nula sobre U_i com singularidades isoladas.
3. $h_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$.
4. Em $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ teremos que $\omega_i = h_{ij}\omega_j$.

Demonstração. Consideremos as coleções $\{X_i\}_{i \in I}$, $\{U_i\}_{i \in I}$ e $\{g_{ij}\}_{U_i \cap U_j \neq \emptyset}$ que definem \mathcal{F} como na Definição 1.4. Podemos supor, sem perda de generalidade, que para todo $i \in I$, U_i é um domínio de uma carta local $\varphi_i = (x_i, y_i) : U_i \rightarrow \mathbb{C}^2$. Para cada $i \in I$ escrevemos $X_i = a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + b_i \frac{\partial}{\partial y_i}$, onde $a_i, b_i \in \mathcal{O}(U_i)$. Seja ω_i a 1-forma dual de X_i dada por $\omega_i = b_i dx_i - a_i dy_i$, onde $\omega_i(X_i) \equiv 0$. Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então $X_i = g_{ij}X_j$ implica que $\omega_i = h_{ij}\omega_j$, onde $h_{ij} = g_{ij}D_{ij}$, e D_{ij} é o determinante jacobiano de $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$. A recíproca é análoga. \square

1.4 Separatrizes de folheações

Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa numa superfície complexa M e seja $\Gamma = \{h = 0\}$ um germe de curva analítica no ponto p em M .

Definição 1.5. *Uma separatriz de \mathcal{F} é uma curva holomorfa irredutível $\Gamma \subseteq M$, tal que $\Gamma \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$ é uma folha da folheação \mathcal{F} .*

Pelo Teorema dos Zeros de Hilbert [15], Γ é uma separatriz de \mathcal{F} se, e somente se, h divide $\omega \wedge dh$, isto é, existe um germe de 2-forma η holomorfa tal que $\omega \wedge dh = h\eta$. Assim, se $h \in \widehat{\mathcal{O}}_2$ é irredutível e não é uma unidade, ou seja $h(0) \neq 0$, portanto h é uma *separatriz formal* de \mathcal{F} em p se, e somente se, h divide a 2-forma $\omega \wedge dh$.

Determinar a existência de uma separatriz de uma folheação holomorfa \mathcal{F} gerada pela 1-forma ω que passa por 0, é determinar a existência de uma curva integral do campo dual $X = b(x, y)\frac{\partial}{\partial x} - a(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ que passa por 0, isto é, encontrar uma solução do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = b(x, y) \\ \dot{y} = -a(x, y). \end{cases}$$

Todo germe Γ de uma curva irredutível admite uma parametrização $\gamma : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ da forma $\gamma(t) = (t^p, \sum_i a_i t^i)$ dada pelo Teorema de Puiseux [22].

Lema 1.1. *Sejam \mathcal{F} um germe de folheação em \mathbb{C}^2 gerada pela 1-forma $\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy$ e $\Gamma = \{h = 0\}$ uma curva irredutível formal, com parametrização de Puiseux γ . Então, são equivalentes:*

1. Γ é uma separatriz formal (isto é, h divide a $\omega \wedge dh$).
2. $\gamma^*\omega = 0$.

Demonstração. Seja $\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$. Derivando $h \circ \gamma(t) = 0$ teremos

$$\frac{\partial h}{\partial x}(\gamma(t)) \frac{d\alpha(t)}{dt} + \frac{\partial h}{\partial y}(\gamma(t)) \frac{d\beta(t)}{dt} = 0,$$

ou seja, os vetores

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}(\gamma(t)), \frac{\partial h}{\partial y}(\gamma(t)) \right) \text{ e } \left(\frac{-d\beta(t)}{dt}, \frac{d\alpha(t)}{dt} \right)$$

são proporcionais. Portanto,

$$\begin{aligned} \omega \wedge dh &= (a(x, y)dx + b(x, y)dy) \wedge \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)dy \right) \\ &= \left(a(x, y) \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) - b(x, y) \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) \right) dx \wedge dy. \\ &= \Delta(x, y) dx \wedge dy \end{aligned}$$

Segue-se que h divide $\omega \wedge dh$ se, e somente se, h divide $\Delta(x, y)$, isto é $\Delta(\gamma(t)) = 0$, ou seja

$$\Delta(\gamma(t)) = a(\gamma(t)) \frac{\partial h}{\partial y}(\gamma(t)) - b(\gamma(t)) \frac{\partial h}{\partial x}(\gamma(t)) = 0,$$

o que equivale a

$$\gamma^* \omega = a(\gamma(t)) \frac{d\alpha(t)}{dt} + b(\gamma(t)) \frac{d\beta(t)}{dt} = 0.$$

□

Determinaremos as separatrizes nos seguintes exemplos:

Exemplo 1.4. Seja $\omega = pydx + qxdy$, onde $p, q \in \mathbb{N}$. Determinaremos as curvas integrais do campo dual $X = qx \frac{\partial}{\partial x} - py \frac{\partial}{\partial y}$, ao resolvermos o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = qx \\ \dot{y} = -py \end{cases}$$

segue-se que as únicas separatrizes são $x = 0$ e $y = 0$.

Exemplo 1.5. Consideremos $\omega = pxdy - qydx$ onde $p, q \in \mathbb{N}$. Existe uma infinidade de separatrizes da forma $y^p - cx^q = 0$.

Capítulo 2

Teoremas de Seidenberg e de Camacho-Sad

Nesse capítulo apresentamos o teorema de Seidenberg de redução de singularidades e o teorema de Camacho e Sad de existência de curvas invariantes para folheações holomorfas em dimensão dois. As principais referências utilizadas são [8], [14], [9], [13] e [15].

Nesse capítulo \mathcal{F} denotará um germe de folheação holomorfa em \mathbb{C}^2 e $\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy$ uma 1-forma holomorfa que determina \mathcal{F} .

2.1 Explosão de folheações

Escrevemos

$$\omega = \sum_{j=\nu}^{\infty} (a_j dx + b_j dy)$$

onde a_j e b_j são polinômios homogêneos de grau j , tal que $a_\nu \neq 0$ ou $b_\nu \neq 0$. O número ν é chamado *multiplicidade* da folheação \mathcal{F} na origem e denotado por $\nu_0(\omega)$. Seja $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ a explosão de \mathbb{C}^2 centrada na origem e $D = \pi^{-1}(0)$ o divisor excepcional. Como $\pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D} : \tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ é um biholomorfismo,

então $\mathcal{F}|_{\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}}$ pode ser levada a uma folheação em $\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D$, que o denotamos por $\pi^{-1}(\mathcal{F})$ e que é gerada por $\pi^*\omega$. Mostraremos que a folheação $\pi^{-1}(\mathcal{F})$ estende-se de maneira natural a uma folheação definida sobre todo $\tilde{\mathbb{C}}^2$ que denotaremos $\pi^*\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}$ e chamaremos *transformado estrito* de \mathcal{F} .

Na carta (U_1, φ_1) da explosão, $\pi^*\omega$ é dada por:

$$\pi^*\omega = x^\nu \sum_{j=\nu}^{\infty} x^{j-\nu} [(a_j(1, t) + tb_j(1, t))dx + xb_j(1, t)dt].$$

Dividindo a 1-forma acima por x^ν obteremos:

$$\tilde{\omega}_1 = x^{-\nu}\pi^*\omega = [(a_\nu(1, t) + tb_\nu(1, t))dx + xb_\nu(1, t)dt] + x\alpha$$

onde $\alpha = \sum_{j=\nu+1}^{\infty} x^{j-\nu-1} [(a_j(1, t) + tb_j(1, t))dx + xb_j(1, t)dt]$. Analogamente, na carta (U_2, φ_2) teremos:

$$\tilde{\omega}_2 = y^{-\nu}\pi^*\omega = [ya_\nu(u, 1)du + (ua_\nu(u, 1) + b_\nu(u, 1))dy] + y\beta$$

onde $\beta = \sum_{j=\nu+1}^{\infty} y^{j-\nu-1} (ya_j(u, 1)du + [ua_j(u, 1) + b_j(u, 1)]dy)$.

Seja $P(x, y) = xa_\nu(x, y) + yb_\nu(x, y)$, polinômio de grau $\nu + 1$, chamado de *cone tangente* de ω . Temos duas situações a considerar:

1. Se $P(x, y) \not\equiv 0$, a 1-forma $\tilde{\omega}_1$ não pode ser mais dividida e define o transformado estrito $\pi^*\mathcal{F}$ de \mathcal{F} por π na carta (U_1, φ_1) . Os pontos singulares da folheação $\pi^*\mathcal{F}$ no divisor D são dados pelas raízes da equação $P(1, t) = a_\nu(1, t) + tb_\nu(1, t) = 0$ e possivelmente a origem da carta (U_2, φ_2) , portanto $\pi^*\mathcal{F}$ possui $\nu + 1$ singularidades, contadas com multiplicidade, no divisor. Além disso, o divisor D é uma separatriz da folheação $\pi^*\mathcal{F}$. Nesse caso, dizemos que a explosão é *não-dicrítica*. Na interseção $U_1 \cap U_2$, pela mudança de coordenadas $(u, y) = \left(\frac{1}{t}, xt\right)$ segue-se que $\tilde{\omega}_1 = t^\nu \tilde{\omega}_2$. Uma vez que $\tilde{\omega}_1$ e $\tilde{\omega}_2$ têm singularidades isoladas, elas definem a folheação $\pi^*\mathcal{F}$ em $\tilde{\mathbb{C}}^2$.

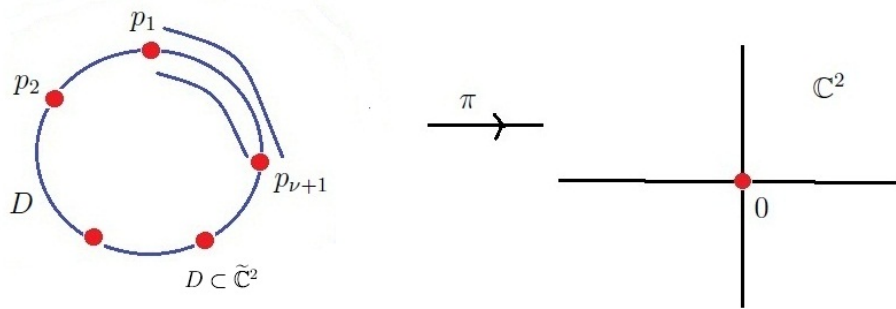


Figura 2.1: Explosão não dicrítica.

2. Se $P(x, y) \equiv 0$, então $b_\nu(1, t) \neq 0$ e a 1-forma $\tilde{\omega}_1$ ainda pode ser dividida por x . O transformado estrito de \mathcal{F} é definido por $x^{-\nu-1}\pi^*\omega$. Fora de $b_\nu(1, t) = 0$, as folhas da folheação são transversais ao divisor D , e sua projeção são separatrizes lisas da folheação \mathcal{F} que tem portanto uma infinidade de separatrizes. Nesse caso, dizemos que a explosão é *dicrítica*.

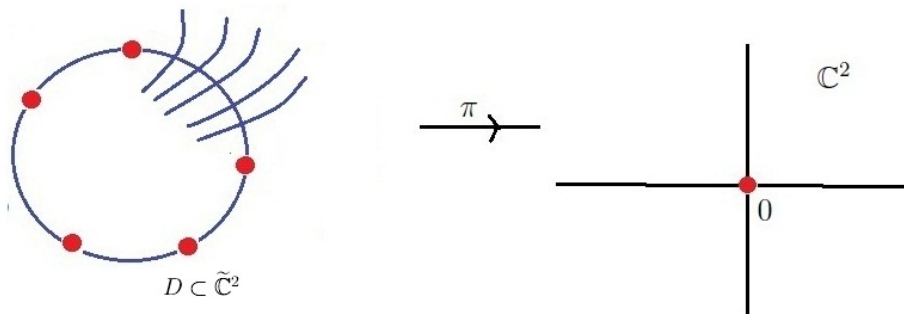


Figura 2.2: Explosão dicrítica.

A seguir estudaremos a relação entre separatrizes de \mathcal{F} e as separatrizes de $\pi^*\mathcal{F}$. Para isso introduziremos a noção de *transformado estrito de uma curva* formal $\Gamma = \{h = 0\}$. O desenvolvimento de Taylor de h é da forma

$$h = h_\nu + h_{\nu+1} + \dots$$

onde cada h_i é homogênea de grau i e ν é a ordem de h , isto é, $h_\nu \neq 0$.

Escrevemos

$$h_\nu(x, y) = \prod_{i=1}^k (y - a_i x)^{p_i}, \quad a_i \in \mathbb{C}, \quad \nu = \sum_{i=1}^k p_i.$$

Da carta (U_1, φ_1) da explosão, segue-se que

$$h \circ \pi(x, t) = x^\nu \tilde{h}(x, t), \quad \tilde{h}(x, t) = \prod_{i=1}^k (t - a_i)^{p_i} + x(\dots).$$

Vemos que $h \circ \pi$ se anula sobre o divisor excepcional $\{x = 0\}$ e quando $\tilde{h} = 0$.

A transformada estrita de $\Gamma = \{h = 0\}$ é a curva $\tilde{\Gamma} = \{\tilde{h} = 0\}$.

Lema 2.1. *Seja \mathcal{F} um germe de folheação holomorfa gerada por uma 1-forma ω . Se $\Gamma \subset \mathbb{C}^2$ é uma curva irredutível, então são equivalentes:*

1. Γ é uma separatriz de \mathcal{F} .
2. $\tilde{\Gamma}$ é uma separatriz de $\tilde{\mathcal{F}}$ no ponto $\tilde{\Gamma} \cap \pi^{-1}(0)$.

Demonstração. Denotaremos por γ e $\tilde{\gamma}$ as parametrizações de Puiseux de Γ e $\tilde{\Gamma}$ respectivamente. Pelo Lema 1.1 segue-se que $\gamma^* \omega = 0$. Como $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ então $\tilde{\gamma} \pi^* \omega = \gamma^* \omega$ e a equivalência segue do Lema 1.1. Portanto $\tilde{\Gamma}$ é uma separatriz. \square

2.2 Singularidades simples de folheações holomorfas

Seja \mathcal{F} um germe de folheação holomorfa em $0 \in \mathbb{C}^2$ definida por $\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy$. Dizemos que 0 é uma *singularidade pré-simples* de

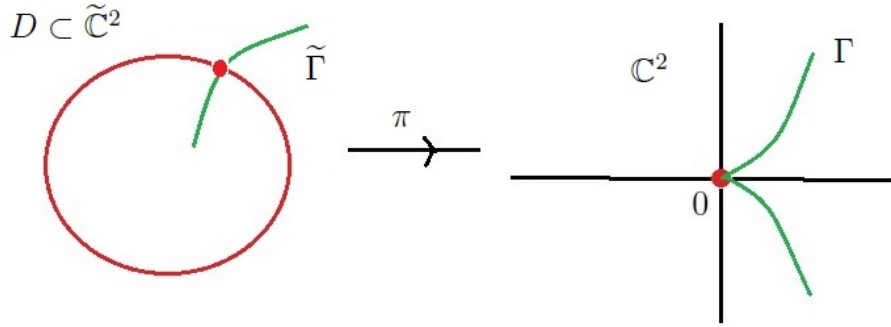


Figura 2.3: Relação entre separatrizes de \mathcal{F} e as separatrizes de $\pi^*\mathcal{F}$.

\mathcal{F} se algum dos autovalores λ, μ da matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial b}{\partial x}(0) & -\frac{\partial a}{\partial x}(0) \\ \frac{\partial b}{\partial y}(0) & -\frac{\partial a}{\partial y}(0) \end{pmatrix},$$

que representa a parte linear do campo dual de ω , é não nulo. Dizemos que é uma singularidade simples se $\lambda \neq 0$ e $\mu/\lambda \notin \mathbb{Q}_{>0}$.

Quando a origem é uma singularidade simples de \mathcal{F} , podemos diagonalizar a parte linear de ω por uma mudança de coordenadas. Isto é, existe um sistema de coordenadas (x, y) tal que ω se escreve como:

$$\omega = \lambda y dx - \mu x dy + a'(x, y) dx + b'(x, y) dy,$$

onde $a'(x, y), b'(x, y)$ são funções holomorfas.

Proposição 2.1 (Estabilidade por explosões). *Suponha que a origem é uma singularidade simples de \mathcal{F} e seja $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ a explosão de \mathbb{C}^2 centrada na origem. Denotaremos por $\tilde{\mathcal{F}}$ o transformado estrito de \mathcal{F} por π . Então:*

1. *A explosão é não-dicrítica.*
2. *A folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ possui exatamente duas singularidades sobre D que são simples.*

Demonstração. Pela observação acima, podemos escolher uma mudança de coordenadas (x, y) tal que $w = ydx - \alpha xdy + a'(x, y)dx + b'(x, y)dy$. Da carta (U_1, φ_1) da explosão, o morfismo π é dado por $\pi \circ \varphi_1^{-1}(x, t) = (x, xt)$, então

$$\pi^*\omega = x\{(1 - \alpha)t + xA(x, t)\}dx - x[\alpha + xB(x, t)]dt$$

onde $A(x, t), B(x, t)$ são funções holomorfas. A folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ é dada por $\frac{1}{x}\pi^*\omega$; observemos que o divisor excepcional $D = \{x = 0\}$ é uma separatriz de $\tilde{\mathcal{F}}$ e que a única singularidade de $\tilde{\mathcal{F}}$ sobre D é a origem, que é uma singularidade simples.

Analogamente, ao considerarmos a carta (U_2, φ_2) , obteremos que a origem é uma singularidade simples e que o divisor excepcional $\{y = 0\}$ é uma separatriz de $\tilde{\mathcal{F}}$. \square

Esses dois pontos singulares de $\tilde{\mathcal{F}}$ correspondem a duas direções $l_1 \subset T_0\mathbb{C}^2$ e $l_2 \subset T_0\mathbb{C}^2$. Dizemos que a direção l_i é *forte* quando o valor próprio correspondente é não nulo, isto é, se a parte linear de ω é da forma $\lambda ydx - \mu xdy$, então a direção tangente a $y = 0$ é forte se $\mu \neq 0$. Se o valor próprio correspondente é nulo, dizemos que a direção é *fraca*.

Proposição 2.2 (Briot-Bouquet). *Seja \mathcal{F} um germe de folheação sobre \mathbb{C}^2 com uma única singularidade simples na origem. Suponha que exista uma separatriz convergente não singular Γ_1 . Então \mathcal{F} tem uma única curva integral formal Γ_2 diferente de Γ_1 . Além disso, a curva Γ_2 é suave, transversal a Γ_1 e seu espaço tangente $T_0\Gamma_2$ é uma direção própria para \mathcal{F} . Se $T_0\Gamma_2$ é uma direção forte então a curva Γ_2 é convergente.*

Demonstração. Fixemos um sistema de coordenadas (x, y) de modo que $\Gamma_1 = \{x = 0\}$ e $\omega = (\lambda y + G(x, y))dx - x(\mu + H(x, y))dy$ seja a 1-forma que gera a folheação \mathcal{F} , onde $G(0, 0) = 0$. Procuramos a separatriz Γ_2 da forma

$t \mapsto \gamma(t) = (t, \sum_{n \geq 2} a_n t^n)$. Pelo Lema 1.1

$$\sum_{n \geq 2} (\lambda - n\mu) a_n t^n + G\left(t, \sum_{n \geq 2} a_n t^n\right) - H\left(t, \sum_{n \geq 2} a_n t^n\right) \sum_{n \geq 2} n a_n t^n = 0.$$

Portanto

$$(\lambda - n\mu) a_n = P_n(a_2, a_3, \dots, a_{n-1}), \quad n \geq 2$$

onde os P_n são polinômios nas variáveis a_2, a_3, \dots, a_{n-1} , que dependem unicamente dos coeficientes de ω . Como $\lambda - n\mu \neq 0$ para todo n , então existe para o coeficiente a_n uma solução única. Ao efetuarmos a mudança de coordenadas

$$(x, y) \mapsto \left(x, y - \sum_{n \geq 2} a_n x^n\right)$$

podemos supor que $\{y = 0\}$ é também uma curva integral. Assim, ω é escrita em coordenadas formais como

$$\omega = y(\lambda + \widehat{a}(x, y))dx - x(\mu + \widehat{b}(x, y))dy$$

onde $\widehat{a}(0, 0) = \widehat{b}(0, 0) = 0$. Suponhamos que exista uma outra curva integral $\bar{\Gamma}$ diferente de Γ_1 e Γ_2 , com parametrização de Puiseux

$$\bar{\gamma}(t) = (t^p, a_q t^q + a_{q+1} t^{q+1} + \dots), a_q \neq 0.$$

Como $\bar{\gamma}^* \omega = 0$ então

$$\bar{\gamma}^* \omega = (p\lambda - \mu q) a_q t^{p+q-1} + t^{p+q}(\dots) = 0$$

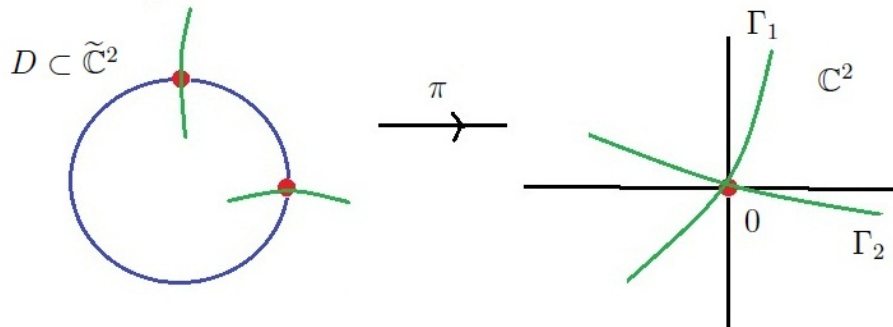
o que é uma contradição já que $(p\lambda - \mu q) a_q \neq 0$, pois $a_q \neq 0$ e a singularidade é simples. Portanto Γ_2 é única.

A prova da convergência quando $\mu \neq 0$ pode ser encontrada em [11]. \square

Corolário 2.1. *Seja \mathcal{F} uma folheação com singularidade simples na origem. Então \mathcal{F} tem exatamente duas curvas integrais formais Γ_1, Γ_2 . Essas curvas*

são lisas, se interceptam transversalmente e seus espaços tangentes são as direções próprias de \mathcal{F} . Além disso, se a curva Γ_i corresponde a uma direção forte, então é convergente.

Demonstração. Ao efetuarmos uma explosão centrada na origem, teremos, pela Proposição 2.1, que o divisor excepcional D é uma curva integral de $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^*\mathcal{F}$ com singularidades simples \tilde{p}_1, \tilde{p}_2 em D . Pela Proposição 2.2 existe uma única curva integral formal de $\tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{\Gamma}_i = \{\tilde{\gamma}_i = 0\}$, diferente de D , suave e transversal a D em \tilde{p}_i . Pelo Lema 2.1 teremos duas curvas integrais formais de \mathcal{F} , $\Gamma_i = \{\gamma_i = 0\}$, onde $\pi \circ \tilde{\gamma}_i = \gamma_i$, que são suaves e transversais na origem. Da Proposição 2.2 segue-se que se $T_0\Gamma_i$ é uma direção forte então a curva Γ_i é convergente. \square



2.3 Redução de singularidades

Nessa seção, demonstraremos o teorema de Seidenberg de redução de singularidades de folheações holomorfas em \mathbb{C}^2 . Reduziremos, mediante uma sequência finita de explosões de pontos, as singularidades de qualquer folheação a singularidades simples que são, pela Proposição 2.1, estáveis por explosões.

Teorema 2.1 (Seidenberg). *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa em \mathbb{C}^2 com singularidade na origem. Existe uma sequência finita de explosões π tal que a folheação $\pi^*\mathcal{F}$ tem apenas singularidades simples.*

A prova será dividida em duas etapas. Primeiro reduziremos todas as singularidades de \mathcal{F} a singularidades pré-simples. Em segundo lugar estudaremos o passo de singularidades pré-simples a simples. Denotaremos por $\omega = \sum_{j=\nu} a_j dx + b_j dy$ e $\nu = \nu_0(\omega)$. Precisaremos dos seguintes invariantes.

Definição 2.1. *O número de Milnor de ω na origem é $\mu_0(\omega) = i_0(a, b)$, onde $i_0(a, b)$ denota a multiplicidade de interseção de a e b em 0 , isto é*

$$i_0(a, b) = \dim \mathbb{C}\{x, y\}/(a, b).$$

Lembremos que a multiplicidade de interseção satisfaz as seguintes propriedades:

- a. $i_0(a, b) = 0$ se, e somente se, as curvas a e b não se interceptam em $0 \in \mathbb{C}^2$.
- b. $i_0(a, b) = \infty$ se, e somente se, a e b têm um fator comum.
- c. $i_0(a, b) = 1$ se, e somente se, a interseção de a e b é transversal em $0 \in \mathbb{C}^2$.
- d. $i_0(a, b) = i_0(b, a)$.
- e. $i_0(a + bc, c) = i_0(a, c)$.
- f. $i_0(ca, db) = i_0(a, b)$ se c, d são unidades no anel de germes em 0 .
- g. $i_0(a, b) = \nu_0(a \circ \tau)$ se b é irredutível e τ é uma parametrização de b .
- h. $i_0(a, b) = \sum_{i=1}^n m_i i_0(a, b_i)$ se $b = \prod_{i=1}^n b_i^{m_i}$ é a representação de b em fatores irredutíveis.

A folheação é não singular na origem se, e só se, $\mu_0(\omega) = 0$. Se $\mu_0(\omega) = 1$, então 0 é uma singularidade pré-simples e portanto $\nu_0(\omega) = 1$. Porém, existem singularidades com ordem 1 que não são pré-simples (por exemplo a origem em $\omega = x^2dx + ydy$) e singularidades pré-simples cujo número de Milnor é maior que 1 (por exemplo a origem em $\omega = xdy + y^2dx$).

Seja $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ a explosão centrada em p . Seja a uma função holomorfa e q um ponto de $\pi^{-1}(p)$. Seja $\{f = 0\}$ uma equação local de $\pi^{-1}(p)$ em q . O transformado estrito de a em q é o ideal $\text{str}(a)$ de $\mathcal{O}(\widetilde{M})$ em q gerado por $f^{-\nu_p(a)}(a \circ \pi)$. A fórmula de Noether dá uma relação entre o número de interseção de duas curvas e o número de interseção de seus transformados estritos por explosão:

Proposição 2.3 (Fórmula de Noether). *Sejam a, b duas funções holomorfas sem fator comum. Então*

$$i_p(a, b) = \nu_p(a)\nu_p(b) + \sum_{q \in \pi^{-1}(p)} i_q(\text{str}(a)_q, \text{str}(b)_q).$$

Lema 2.2. *Seja $\pi : \widetilde{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathbb{C}^2$ a explosão centrada na origem, $\widetilde{\mathcal{F}} = \pi^*\mathcal{F}$ e $D = \pi^{-1}(0)$. Se a explosão é não dicrítica, então*

$$\mu_0(\omega) = \nu^2 - \nu - 1 + \sum_{q \in D} \mu_q(\widetilde{\omega}).$$

Se a explosão é dicrítica, então

$$\mu_0(\omega) = \nu^2 + \nu - 1 + \sum_{q \in D} \mu_q(\widetilde{\omega}).$$

Demonstração. Após uma mudança linear de coordenadas, podemos supor que o ponto do infinito da primeira carta da explosão não é um ponto singular de $\widetilde{\mathcal{F}}$ e que $\nu = \nu_0(a) = \nu_0(b)$. Além disso, no caso dicrítico, podemos supor que x^2 não divide $b_\nu(x, y)$. Seja

$$a'(x, t) = x^{-\nu}a(x, xt), \quad b'(x, t) = x^{-\nu}b(x, xt).$$

Caso *não dicrítico*: Seja $q \in D$ uma singularidade determinada por algum $t_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P_{\nu+1}(1, t_0) = 0$, onde $P_{\nu+1} = ya_\nu + xb_\nu$. Na carta (U_1, φ_1) , a folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ é gerada por $\tilde{\omega} = \tilde{a}(x, t)dx + \tilde{b}(x, t)dt$ onde

$$\tilde{a}(x, t) = a'(x, t) + tb'(x, t) = P_{\nu+1}(1, t) + x(\dots),$$

$$\tilde{b}(x, t) = xb'(x, t).$$

Pela fórmula de Noether e as propriedades da multiplicidade de interseção, segue-se que:

$$\begin{aligned} \sum_{q \in D} \mu_q(\tilde{\omega}) &= \sum_{q \in D \setminus \{+\infty\}} \mu_q(\tilde{\omega}) \\ &= \sum_{q \in D \setminus \{+\infty\}} i_q(\tilde{a}(x, t), \tilde{b}(x, t)) \\ &= \sum_{q \in D \setminus \{+\infty\}} i_q(a'(x, t), b'(x, t)) + \sum_{q \in D \setminus \{+\infty\}} i_q(P_{\nu+1}(1, t), x) \\ &= i_0(a, b) - \nu^2 + \sum_{t_0} \nu_{t_0}(P_{\nu+1}(1, t)) \\ &= \mu_0(\omega) - \nu^2 + (\nu + 1). \end{aligned}$$

Caso *dicrítico*: Escrevemos $-xa_\nu = yb_\nu = xyh(x, y)$, onde $h(1, y)$ é um polinômio de grau $\nu - 1$. Ao considerarmos a carta (U_1, φ_1) , a folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ é gerada pela 1-forma $\tilde{\omega} = \tilde{a}(x, t)dx + \tilde{b}(x, t)dt$, onde

$$x\tilde{a}(x, t) = a'(x, t) + yb'(x, t), \quad \tilde{b}(x, t) = b'(x, t) = h(1, t) + x(\dots).$$

Então

$$\begin{aligned}
 \sum_{q \in D} \mu_q(\tilde{\omega}) &= \sum_{q \in D \setminus \{+\infty\}} i_q(\tilde{a}(x, t), \tilde{b}(x, t)) \\
 &= \sum_{q \in D \setminus \{+\infty\}} [i_q(x\tilde{a}, \tilde{b}) - i_q(x, \tilde{b})] \\
 &= -(\nu + 1) + \sum_{q \in D \setminus \{+\infty\}} i_q(b', a') \\
 &= -(\nu + 1) + \mu_0(\omega) - \nu^2 \\
 &= \mu_0(\omega) - (\nu + 1)^2 + \nu + 2.
 \end{aligned}$$

□

Seja Γ uma curva não singular que passa por p definida localmente por $\Gamma = \{y = 0\}$ e seja \mathcal{F} uma folheação gerada pela 1-forma $\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy$.

O número

$$t(\mathcal{F}, \Gamma, p) := \nu_p(a(x, 0))$$

é chamado de *ordem restrita* de \mathcal{F} sobre Γ em p . Segue-se que $t(\mathcal{F}, \Gamma, p) = \infty$ se, e só se, Γ é uma separatriz de \mathcal{F} .

Proposição 2.4. *Sejam $\tilde{\Gamma}$ o transformado estrito de Γ pela explosão π centrada em p , $\{q\} = \pi^{-1}(p) \cap \tilde{\Gamma}$, $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^*\mathcal{F}$, $\nu = \nu_p(\omega)$ e $t = t(\mathcal{F}, \Gamma, p)$. Então*

1. $t(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\Gamma}, q) = t - \nu$, se π é não-dicrítica.

2. $t(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\Gamma}, q) = t - \nu - 1$, se π é dicrítica.

Demonstração. Seja $\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy$ a 1-forma que determina a folheação \mathcal{F} . Consideremos a carta (U_1, φ_1) da explosão, segue-se que $\tilde{\mathcal{F}}$ é definida em q por $\tilde{\omega} = \tilde{a}(x, t)dx + \tilde{b}(x, t)dt$ onde

$$\tilde{a}(x, t) = \begin{cases} x^{-\nu}(a(x, xt) + tb(x, xt)) & \text{se } \pi \text{ é não dicrítica.} \\ x^{-\nu-1}(a(x, xt) + tb(x, xt)) & \text{se } \pi \text{ é dicrítica.} \end{cases}$$

E como $t = \nu_p(a(x, 0))$, então:

$$t(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\Gamma}, q) = \begin{cases} t - \nu & \text{no caso não dicrítico.} \\ t - \nu - 1 & \text{no caso dicrítico.} \end{cases}$$

□

2.3.1 Redução a singularidades pré-simples

Lema 2.3. *Sejam $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ um germe de folheação em \mathbb{C}^2 , $\Gamma = \Gamma_0$ uma curva regular formal em 0 e consideremos uma sequência infinita de explosões:*

$$M_0 = (\mathbb{C}^2, 0) \xleftarrow{\pi_1} M_1 \leftarrow \cdots \leftarrow M_{m-1} \xleftarrow{\pi_m} M_m \leftarrow \cdots$$

definida da seguinte forma:

1. π_1 é a explosão de \mathbb{C}^2 centrada em $p_0 = 0$.
2. π_{i+1} é a explosão de \mathbb{C}^2 centrada em $p_i = \Gamma_i \cap \pi_i^{-1}(p_{i-1})$ de M_i , $i \geq 0$.
3. Γ_i é o transformado estrito de Γ_{i-1} por π_i .

Então, se \mathcal{F}_i é o transformado estrito de \mathcal{F}_{i-1} por π_i , e $p_i \in \text{Sing}(\mathcal{F}_i)$, segue-se que Γ é uma separatriz para \mathcal{F} .

Se além disso, cada explosão π_i é não-dicrítica então existe um índice k tal que p_k é uma singularidade pré-simples de \mathcal{F}_k .

Demonstração. Se Γ não é uma separatriz de \mathcal{F} , segue-se que $t(\mathcal{F}, \Gamma, 0) < +\infty$. Logo, pela Proposição 2.4,

$$t(\mathcal{F}_i, \Gamma_i, p_i) < t(\mathcal{F}_{i-1}, \Gamma_{i-1}, p_{i-1}), \quad \forall i \geq 1.$$

o que é uma contradição. Para a segunda afirmação, como π_1 é não-dicrítica então pela seção 2.1, teremos que Γ_1 e $\pi^{-1}(0)$ são separatrizes transversais

de \mathcal{F}_1 . Assim, em alguma carta, a 1-forma ω_1 que determina a folheação \mathcal{F}_1 pode se escrever como:

$$\omega_1 = y_1 a_1(x_1, y_1) dx_1 + x_1 b_1(x_1, y_1) dy_1$$

onde $\pi^{-1}(0) = \{x_1 = 0\}$, $\Gamma_1 = \{y_1 = 0\}$, e y_1 não divide b_1 , pois π_1 é não-dicrítica.

Se $\nu = \nu_{p_1}(\omega_1) = 1$, então a singularidade p_1 é pré-simples. Suponhamos agora que $\nu > 1$, então ao efetuarmos a explosão π_2 , que é não dicrítica, obtemos que a folheação \mathcal{F}_2 está gerada por :

$$\omega_2 = y_2 a_2(x_2, y_2) dx_2 + x_2 b_2(x_2, y_2) dy_2.$$

Onde ω_2 gera a folheação \mathcal{F}_2 e tal que

$$b_2(x_2, y_2) = \frac{1}{x_2^{\nu-1}} b(x_2, x_2 y_2)$$

Agora, repetiremos o mesmo argumento para \mathcal{F}_2 .

Como y_1 não divide b_1 , iteramos esse processo e teremos que, em algum passo, $\nu_{p_k}(\omega_k) = 1$ e portanto p_k é uma singularidade pré-simples. \square

Consideremos:

1. $M_0 \xrightarrow{\pi_1} M_1 \leftarrow \cdots \leftarrow M_{m-1} \xrightarrow{\pi_m} M_m \leftarrow \cdots$ uma sequência de explosões com centro $p_i \in M_i$, onde $p_0 = 0$ e $\pi_i(p_i) = p_{i-1}$.
2. Seja $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ uma folheação em M_0 com $\text{Sing}(\mathcal{F}_0) = \{0\}$ e \mathcal{F}_i é o transformado estrito de \mathcal{F}_{i-1} por π_i , com $p_i \in \text{Sing}(\mathcal{F}_i)$ para todo i .
3. Denotemos por $D_i = (\pi_1 \circ \cdots \circ \pi_i)^{-1}(0) \subset M_i$ o divisor total e por D'_i a união de todas as componentes não-dicríticas de D_i .

Ao ponto singular p_i , associamos o número

$$I_i = \mu_{p_i}(\omega_i) - e(D'_i, p_i).$$

onde $e(D'_i, p_i)$ denota o número de componentes não-dicríticas do divisor D'_i que passa por p_i .

Proposição 2.5. *Para cada $i \geq 0$ temos:*

1. *Se $e(D'_i, p_i) = 2$ e $\nu_{p_i}(\omega_i) = 1$, o ponto p_i é uma singularidade pré-simples de \mathcal{F}_i .*
2. *Se $\nu_{p_i}(\omega_i) = 1$ e π_{i+1} é dicrítica então o ponto p_i é uma singularidade pré-simples de \mathcal{F}_i .*
3. *Se p_i não é pré-simples, temos $I_{i+1} \leq I_i$. Além disso, a desigualdade é estrita se $\nu_{p_i}(\omega_i) \geq 2$ ou se π_{i+1} é dicrítica.*

Demonstração. Para a primeira afirmação, observemos que se $D'_i = \{xy = 0\}$, então a folheação \mathcal{F}_i é gerada pela 1-forma

$$\omega = ya(x, y)dx + xb(x, y)dy.$$

Como $\nu_{p_i}(\omega_i) = 1$, então p_i é uma singularidade pré-simples.

Para a segunda afirmação, como π_{i+1} é dicrítica, podemos considerar duas separatrizes Γ_1, Γ_2 da folheação \mathcal{F}_{i+1} lisas e transversais a $\pi_{i+1}^{-1}(p_i)$ em dois pontos distintos do divisor excepcional. Se $\pi_{i+1}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = \{xy = 0\}$ então pelo caso anterior, segue-se que p_i é uma singularidade pré-simples de \mathcal{F}_i .

Para a terceira afirmação, denotemos por $\mu_i = \mu_{p_i}(\omega_i)$ e $e_i = e(D'_i, p_i)$.

Suponhamos que $\nu_{p_i}(\omega_i) = 1$ e π_{i+1} é não dicrítica. Pelo Lema 2.2 segue-se que

$$\mu_{p_i}(\omega_i) = -1 + \sum_{\tilde{p} \in \pi_{i+1}^{-1}(p_i)} \mu_{\tilde{p}}(\omega_{i+1}). \quad (2.1)$$

Temos os seguintes casos:

Se $e_i = 0$ e $e_{i+1} = 1$ então $I_i = \mu_i$ e $I_{i+1} = \mu_{i+1} - 1$. Da equação (2.1) segue-se que $\mu_i \geq -1 + \mu_{i+1}$, portanto $I_i \geq I_{i+1}$.

Se $e_i = 1$ e $e_{i+1} = 1$ então existe pelo menos um ponto $q \neq p_{i+1}$ no divisor $\pi_{i+1}^{-1}(p_i)$ tal que $\mu_q(\omega_{i+1}) \geq 1$. Logo, pela equação (2.1) $\mu_i \geq \mu_{i+1}$. Portanto $I_i = \mu_i - 1 \geq \mu_{i+1} - 1 = I_{i+1}$.

Se $e_i = 1$ e $e_{i+1} = 2$ então da equação (2.1) segue-se que $\mu_i \geq -1 + \mu_{i+1}$, daí $I_i = \mu_i - 1 \geq \mu_{i+1} - 2 = I_{i+1}$.

Se $e_i = 2$ e $e_{i+1} = 1$ então existem dois pontos q_1, q_2 tais que $\mu_{q_j}(\omega_{i+1}) = 1$ $j = 1, 2$. Da identidade (2.1) segue-se que $\mu_i \geq 1 + \mu_{i+1}$. Assim, $I_i = \mu_i - 2 \geq \mu_{i+1} - 1 = I_{i+1}$.

Se $e_i = 2$ e $e_{i+1} = 2$ então existe $q \neq p_{i+1}$ tal que $\mu_q(\omega_{i+1}) \geq 1$. Pela identidade (2.1) $\mu_i \geq \mu_{i+1}$. Portanto $I_i = \mu_i - 2 \geq \mu_{i+1} - 2 = I_{i+1}$.

Um argumento análogo mostra que a desigualdade é estrita no caso $\nu_{p_i}(\omega_i) \geq 2$ (observemos que se π_{i+1} é dicrítica, então pela afirmação 2. $\nu_{p_i}(\omega_i) \geq 2$). \square

Proposição 2.6. *Existe um índice k tal que p_k é uma singularidade pré-simples de \mathcal{F}_k .*

Demonstração. Suponhamos, por redução ao absurdo, que p_k não é uma singularidade pré-simples de \mathcal{F}_k para nenhum k . Se um número infinito das explosões π_i são dicríticas, então pela Proposição 2.5 o invariante I_i decresce estritamente um número infinito de vezes, o que é uma contradição. Assim, podemos supor que todas as explosões π_i são não dicríticas. Como $I_0 < \infty$, depois de um número finito de explosões, o invariante I_i deve se estabilizar, isto é, $I_i = I_k$ para todo $i \geq k$; podemos esquecer das primeiras k explosões e supor que $I_i = I_0$ para todo i . Isto implica pela Proposição 2.5 que $e(D'_i, p_i) = 1$ para todo i , e como as explosões π_i são não dicríticas, então a

seqüência de explosões dá origem a uma separatriz não singular Γ . Portanto, pelo Lema 2.3 existe i tal que p_i é pré-simples, o que é uma contradição. \square

2.3.2 Redução a singularidades simples

Estudamos o passo de singularidades pré-simples a singularidades simples, concluindo assim a demonstração do Teorema 2.1.

Proposição 2.7. *Seja \mathcal{F} um germe de folheação sobre \mathbb{C}^2 com uma singularidade pré-simples na origem. Existe um morfismo $\pi : M \rightarrow \mathbb{C}^2$, composição de uma seqüência finita de explosões de pontos, tal que toda singularidade de $\pi^*\mathcal{F}$ é simples.*

Demonstração. Seja \mathcal{F} gerada localmente pela 1-forma $\omega = adx + bdy$ em p , e seja α o quociente dos valores próprios da parte linear de ω . A diferença entre singularidades pré-simples e simples é medida pelo seguinte invariante de *ressonância*:

$$Res(\mathcal{F}, p) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \notin \mathbb{Q}_{>0} \\ \lambda_1 + \lambda_2 & \text{se } \alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{Q}, \text{ m.d.c.}(\lambda_1, \lambda_2) = 1. \end{cases}$$

Então, para singularidades pré-simples $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$, segue-se que p é simples se, e só se, $Res(\mathcal{F}, p) = 0$.

Não é difícil verificarmos que o invariante de ressonância diminui estritamente após de cada explosão sobre singularidades pré-simples que não sejam simples. Portanto, depois de um número finito de explosões, todas as singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ são simples. \square

2.4 Teorema de Camacho-Sad

C. Camacho e P. Sad provaram a existência de curvas analíticas invariantes (separatrizes) para germes de folheações holomorfas singulares \mathcal{F} sobre um conjunto analítico M de dimensão dois [8]. A prova é apenas de natureza existencial. Aqui fornecemos uma prova construtiva simples de J. Cano [14], que fornece critérios para escolhermos um ponto singular em cada explosão e assim obtemos uma curva invariante analítica.

Teorema 2.2 (Camacho-Sad). *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa com singularidade isolada em $0 \in \mathbb{C}^2$. Existe uma separatriz de \mathcal{F} passando por 0 .*

Para a demonstração, precisaremos da definição de um índice adaptado em cada singularidade. Seja Γ uma separatriz lisa de uma folheação \mathcal{F} . Podemos supor Γ definida localmente por $\Gamma = \{y = 0\}$. Então \mathcal{F} é dada pela 1-forma

$$\omega = ya(x, y)dx + b(x, y)dy,$$

onde $a, b \in \mathbb{C}\{x, y\}$ com $a(0, 0) = b(0, 0) = 0$.

Definição 2.2. *O índice de \mathcal{F} relativo a Γ na origem, é o número chamado de Camacho-Sad*

$$i_0(\mathcal{F}, \Gamma) = \text{Res}_{x=0} \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-ya(x, y)}{b(x, y)} \right) \right) (x, 0) \right] = \text{Res}_{x=0} \left(\frac{-a(x, 0)}{b(x, 0)} \right).$$

O índice não depende do sistema de coordenadas (x, y) escolhido, nem do gerador ω de \mathcal{F} .

Proposição 2.8. *Sejam $\pi : M \rightarrow \mathbb{C}^2$ a explosão de \mathbb{C}^2 centrada na origem, $D \subset M$ o divisor excepcional, $\tilde{\mathcal{F}}$ o transformado estrito de \mathcal{F} e $\tilde{\Gamma}$ o transformado estrito de Γ . Se a explosão é não-dicrítica, então*

$$1. \sum_{\tilde{p} \in D} i_{\tilde{p}}(\tilde{\mathcal{F}}, D) = -1.$$

$$2. i_{\tilde{q}}(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\Gamma}) = i_0(\mathcal{F}, \Gamma) - 1, \text{ onde } \{\tilde{q}\} = \tilde{\Gamma} \cap D.$$

Demonstração. Se $\tilde{p} \in D \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$, então $i_{\tilde{p}}(\tilde{\mathcal{F}}, D) = 0$. Escolhamos um sistema de coordenadas, tal que o ponto do infinito da carta (U_1, φ_1) da explosão não seja um ponto singular de \mathcal{F} . Se

$$\omega = (a_\nu(x, y) + a_{\nu+1}(x, y) + \dots)dx + (b_\nu(x, y) + b_{\nu+1}(x, y) + \dots)dy,$$

então $P(x, y) = xa_\nu(x, y) + yb_\nu(x, y)$ não é divisível por x , isto é, $P(1, y) = a_\nu(1, y) + yb_\nu(1, y)$ é um polinômio de grau $\nu + 1$. Ao considerarmos a carta (U_1, φ_1) da explosão, segue-se que $D = \{x = 0\}$ e $\tilde{\mathcal{F}}$ é dado por:

$$\tilde{\omega} = [P(1, t) + x(\dots)]dx + x[b_\nu(1, t) + x(\dots)]dt.$$

Seja $\gamma \subset \mathbb{C}$ um círculo que contém todas as raízes de $P(1, t)$. Pelo teorema dos resíduos, segue-se que

$$\sum_{\tilde{p} \in D} i_{\tilde{p}}(\tilde{\mathcal{F}}, D) = \sum_t \text{Res} \left(\frac{-b_\nu(1, t)}{P(1, t)} \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{-b_\nu(1, t)}{P(1, t)} dt = -1.$$

Mostremos agora a segunda afirmação. Como $\tilde{\Gamma} = \{t = 0\}$ e \tilde{q} é a origem da carta (U_1, φ_1) , então $\tilde{\mathcal{F}}$ está gerada por

$$\tilde{\omega} = x^{-\nu}[t(xa(x, xt) + b(x, xt))dx + xb(x, xt)dt].$$

Logo

$$i_{\tilde{q}}(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\Gamma}) = \text{Res}_{t=0} \left(\frac{-xa(x, 0) - b(x, 0)}{xb(x, 0)} \right) = i_0(\mathcal{F}, \Gamma) - 1.$$

□

A primeira afirmação pode ser generalizada da seguinte forma: sejam S uma superfície complexa compacta, \mathcal{F} uma folheação singular em S e $Y \subset S$ uma separatriz não singular de \mathcal{F} , então

$$\sum_{p \in Y} i_p(\mathcal{F}, Y) = Y \cdot Y, \quad (2.2)$$

onde $Y \cdot Y$ denota a auto-interseção de Y . Prova-se que $Y \cdot Y$ coincide com a classe de Chern do fibrado normal de Y em M (o leitor pode consultar [20]).

Suponhamos que a origem de \mathbb{C}^2 é uma singularidade simples da folheação \mathcal{F} . Ao escolhermos um sistema adequado de coordenadas (x, y) , um gerador ω de \mathcal{F} pode-se escrever como

$$\omega = (\lambda x dy - \mu y dx) + \omega_1$$

onde os coeficientes de ω_1 são de ordem pelo menos 2, $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$; além disso se $\mu \neq 0$ então $\lambda/\mu \notin \mathbb{Q}_{>0}$. Existem, pela Proposição 2.2, exatamente duas separatrizes Γ_x e Γ_y , que são tangentes a $\{x = 0\}$ e $\{y = 0\}$ respectivamente. Sejam L_x e L_y as tangentes respectivas; lembremos que L_x é uma direção forte se $\mu \neq 0$, e fraca se $\mu = 0$. Sabemos também que se L_x é forte, então Γ_x é convergente.

Lema 2.4. *Na situação acima, temos:*

1. Se L_x é uma direção fraca, então $i_0(\mathcal{F}, \Gamma_y) = 0$.
2. Se $\lambda\mu \neq 0$, então $i_0(\mathcal{F}, \Gamma_x) \cdot i_0(\mathcal{F}, \Gamma_y) = 1$.

Demonstração. Para a primeira afirmação, suponhamos que L_x é uma direção fraca, isto é $\mu = 0$. Então, L_y é necessariamente uma direção forte e Γ_y é convergente. Escolheremos coordenadas adequadas (x, y) de modo que $\Gamma_y = \{y = 0\}$ e seja a 1-forma

$$\omega = ya(x, y)dx + b(x, y)dy$$

um gerador de \mathcal{F} , onde $a(0,0) = 0$ e $b(x,0) = xu(x)$, $u(0) \neq 0$. Então

$$i_0(\mathcal{F}, \Gamma_y) = \operatorname{Res}_{x=0} \left(\frac{-a(x,0)}{b(x,0)} \right) = \operatorname{Res}_{x=0} \left(\frac{-a(x,0)}{xu(x)} \right) = 0.$$

Para a segunda afirmação, suponhamos que $\lambda\mu \neq 0$. Nesse caso as duas direções L_x, L_y são fortes. A 1-forma ω é escrita como:

$$\omega = y(-\mu + a_1(x,y))dx + x(\lambda + b_1(x,y))dy$$

onde $a_1(0,0) = b_1(0,0) = 0$. Então

$$i_0(\mathcal{F}, \Gamma_x) = \operatorname{Res}_{y=0} \left(\frac{-(\lambda + b_1(0,y))}{-\mu y} \right) = \frac{\lambda}{\mu}.$$

e

$$i_0(\mathcal{F}, \Gamma_y) = \operatorname{Res}_{x=0} \left(\frac{\mu - a_1(x,0)}{\lambda x} \right) = \frac{\mu}{\lambda}.$$

□

Um divisor com *cruzamentos normais* sobre uma superfície complexa M é um subconjunto analítico D de M tal que, para qualquer $p \in M$, daí $D \subset \{xy = 0\}$, onde (x,y) é um sistema de coordenadas em p . Se \mathcal{F} é uma folheação em M e D um divisor com cruzamentos normais, dizemos que uma componente irredutível F de D é *dicrítica* se F não é uma separatriz de \mathcal{F} .

Apresentamos agora a demonstração do Teorema de Camacho-Sad, que se baseia na estabilidade por explosão da propriedade (\star) introduzida na seguinte definição.

Definição 2.3. *Considere \mathcal{F} uma folheação holomorfa sobre uma superfície complexa M , um divisor D com cruzamentos normais sobre M e um ponto $p \in D$. Dizemos que a terna (\mathcal{F}, D, p) tem a propriedade (\star) se, e somente se, uma das seguintes propriedades é satisfeita:*

(\star_1) O ponto p está em exatamente uma componente não-dicrítica S de D ,
e

$$i_p(\mathcal{F}, S) \notin \mathbb{Q}_{\geq 0}.$$

(\star_2) O ponto p está em duas componentes não-dicríticas S_+ e S_- de D e
existe um número real $a > 0$ tal que:

$$i_p(\mathcal{F}, S_+) \in \mathbb{Q}_{\leq -a}, \quad i_p(\mathcal{F}, S_-) \notin \mathbb{Q}_{\geq -1/a}.$$

(\star_3) O ponto p está em exatamente uma componente irredutível S de D , é
um ponto não-singular de \mathcal{F} e S é transversal a \mathcal{F} em p .

Observemos que,

- A propriedade (\star_2), implica que p não é uma singularidade simples.
- Se p é uma singularidade simples de \mathcal{F} que satisfaz (\star_3) ou (\star_1), então existe uma separatriz Γ que passa por p , não singular e transversal a D .

Teorema 2.3. *Suponha que (\mathcal{F}, D, p) satisfaz (\star_1) ou (\star_2). Consideremos a explosão $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ centrada no ponto p , e seja $\widetilde{\mathcal{F}}$ o transformado estrito de \mathcal{F} por π . Sejam $E = \pi^{-1}(p)$ e $\widetilde{D} = \pi^{-1}(D)$. Então existe um ponto $\tilde{p} \in E$ tal que $(\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{D}, \tilde{p})$ satisfaz a propriedade (\star).*

Demonstração. Se π é uma explosão dicrítica, existe um ponto $\tilde{p} \in E$ tal que $(\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{D}, \tilde{p})$ satisfaz a propriedade (\star_3). Suponhamos que π é não dicrítica. Então E é uma curva invariante de $\widetilde{\mathcal{F}}$. Consideremos os seguintes casos:

Suponha que (\mathcal{F}, D, p) satisfaz (\star_1). Seja \widetilde{S} o transformado estrito de S por π e $\tilde{p} = E \cap \widetilde{S}$. Sejam $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_s$ as singularidades de $\widetilde{\mathcal{F}}$ em $E \setminus \{\tilde{p}\}$.

Suponha que $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{D}, \tilde{p}_i)$ não satisfaz (\star_1) para nenhum $i = 1, \dots, s$. Então $i_{\tilde{p}_i}(\tilde{\mathcal{F}}, E) \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, logo pela Proposição 2.8, segue-se que

$$-1 = i_{\tilde{p}}(\tilde{\mathcal{F}}, E) + \sum_{i=1}^s i_{\tilde{p}_i}(\tilde{\mathcal{F}}, E).$$

Portanto,

$$i_{\tilde{p}}(\tilde{\mathcal{F}}, E) = -1 - \sum_{i=1}^s i_{\tilde{p}_i}(\tilde{\mathcal{F}}, E) \in \mathbb{Q}_{\leq -1}.$$

E como

$$i_{\tilde{p}}(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{S}) = i_p(\mathcal{F}, S) - 1 \notin \mathbb{Q}_{\geq -1}$$

então $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{D}, \tilde{p})$ satisfaz (\star_2) .

Agora, suponha que (\mathcal{F}, D, p) satisfaz (\star_2) . Sejam \tilde{S}_+ e \tilde{S}_- as transformadas estritas, via explosão π , das curvas S_+ e S_- , respectivamente. Sejam $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_s$ as singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}$ em $E \setminus \{\tilde{p}_+, \tilde{p}_-\}$, onde $\tilde{p}_+ = E \cap \tilde{S}_+$ e $\tilde{p}_- = E \cap \tilde{S}_-$. Se $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{D}, \tilde{p}_i)$ não satisfaz (\star_1) para $i = 1, \dots, s$, então $i_{\tilde{p}_i}(\tilde{\mathcal{F}}, E) \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, segue da Proposição 2.8 que:

$$i_{\tilde{p}_+}(\tilde{\mathcal{F}}, E) + i_{\tilde{p}_-}(\tilde{\mathcal{F}}, E) + \sum_{i=1}^s i_{\tilde{p}_i}(\tilde{\mathcal{F}}, E) = -1$$

daí

$$i_{\tilde{p}_+}(\tilde{\mathcal{F}}, E) + i_{\tilde{p}_-}(\tilde{\mathcal{F}}, E) = -1 - \sum_{i=1}^s i_{\tilde{p}_i}(\tilde{\mathcal{F}}, E) \in \mathbb{Q}_{\leq -1}.$$

Como (\mathcal{F}, D, p) satisfaz a propriedade (\star_2) , então:

$$\begin{aligned} i_{\tilde{p}_+}(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{S}_+) &= i_p(\mathcal{F}, S_+) - 1 \in \mathbb{Q}_{\leq -(a+1)} \\ i_{\tilde{p}_-}(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{S}_-) &= i_p(\mathcal{F}, S_-) - 1 \notin \mathbb{Q}_{\geq -\frac{a+1}{a}}. \end{aligned}$$

Se $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{D}, \tilde{p}_+)$ não satisfaz (\star_2) então

$$i_{\tilde{p}_+}(\tilde{\mathcal{F}}, E) \in \mathbb{Q}_{\geq -\frac{1}{a+1}}.$$

E como

$$i_{\tilde{p}_+}(\tilde{\mathcal{F}}, E) + i_{\tilde{p}_-}(\tilde{\mathcal{F}}, E) \in \mathbb{Q}_{\leq -1}$$

segue-se que

$$i_{\tilde{p}_-}(\tilde{\mathcal{F}}, E) \in \mathbb{Q}_{\leq -\frac{a}{a+1}}$$

e assim $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{D}, \tilde{p}_-)$ satisfaz (\star_2) .

□

Para obter uma separatriz Γ de \mathcal{F} em p , procedemos da seguinte maneira. Começamos com uma singularidade $p \in M = M_0$, denotemos por $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$, $D_0 = \emptyset$. Seja $\pi_1 : M_1 \rightarrow M_0$ a explosão centrada em p e sejam $E_1 = \pi^{-1}(p)$ e \mathcal{F}_1 o transformado estrito de \mathcal{F} por π_1 .

1. Se π_1 é dicrítica, então tomaremos um ponto $p_1 \in E_1$, com a propriedade (\star_3) , e assim obteremos uma separatriz para \mathcal{F}_1 em p_1 que dá, via π_1 , uma separatriz para \mathcal{F} em p .
2. Se π_1 é não dicrítica, pela Proposição 2.8 existe um ponto $p_1 \in E_1$ tal que (\star_1) é satisfeita.
 - (a) Se p_1 é uma singularidade simples, existe uma separatriz por p_1 , que se projeta numa separatriz por p .
 - (b) Se p_1 não é uma singularidade simples, seja $\pi_2 : M_2 \rightarrow M_1$ a explosão centrada em p_1 , e sejam $E_2 = \pi^{-1}(E_1)$ e \mathcal{F}_2 o transformado estrito de \mathcal{F}_1 por π_2 . Tomemos um ponto $p_2 \in E_2$ com a propriedade (\star) , se (\star_3) é satisfeito ou se p_2 é uma singularidade simples, terminamos o processo, caso contrário continuamos explodindo. Pelo Teorema 2.1, encontramos, logo de um número finito de passos, um ponto p_k que é uma singularidade simples de

\mathcal{F}_k e que verifica a propriedade (\star) , e portanto existe uma separatriz Γ_k transversal a um divisor em p_k , que se projeta sobre uma separatriz Γ de \mathcal{F} .

Capítulo 3

Grupo de holonomia de uma folheação

Nesse capítulo será estudado o conceito de *grupo de holonomia* de uma folheação holomorfa. O leitor interessado nesse assunto pode consultar as referências [4], [6], [11] e [16].

Seja M e N superfícies complexas e considere um ponto $p \in M$. Introduziremos, no conjunto de aplicações $f : U \subset M \rightarrow N$ onde U é uma vizinhança de p , a seguinte definição. Duas funções f e g definidas sobre abertos U e V são equivalentes num ponto p se existe uma vizinhança W de p tal que $W \subset U \cap V$ e $f|_W = g|_W$. Esta relação é uma relação de equivalência e a classe de f é chamada de *germe de f em p* e denotada por $[f]_p$.

Denotaremos por $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ o conjunto dos germes de biholomorfismos locais em $(\mathbb{C}, 0)$ que fixam $0 \in \mathbb{C}$. Esse conjunto é um grupo com a operação composição.

Quando a folheação é definida por uma 1-forma holomorfa ω num entorno de $0 \in \mathbb{C}^2$, veremos que os elementos do grupo de holonomia da folheação está relacionado com a parte linear de ω .

Definição 3.1. *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa regular sobre um conjunto aberto $U \subset M$ e L uma folha de \mathcal{F} que passa por p . Uma seção transversal parametrizada da folha L em p é uma aplicação holomorfa $\tau : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (U, p)$ transversal a L , isto é, tal que $T_p U = d\tau(0)(T_0 \mathbb{C}) \oplus T_p L$. A imagem de τ é chamada uma seção transversal de L em p .*

Denotaremos por τ , (τ, p) ou τ_p a seção transversal associada à seção transversal parametrizada por τ em p . Consideremos uma carta (U, φ) da folheação \mathcal{F} . Nessas coordenadas locais, as placas são da forma $L_c = \varphi^{-1}(V \times \{c\})$, onde $c \in \mathbb{C}$ e V é um aberto em \mathbb{C} .

Seja τ_p a seção transversal no ponto $p = \varphi^{-1}(x_0, c)$ com $x_0 \in V$. Então

$$\varphi \circ \tau_p(w) = (h_p(w), g_p(w)),$$

com $\det(g'_p(0)) \neq 0$ e $(h_p(0), g_p(0)) = (x_0, c)$. Segue-se do Teorema da função inversa que g_p é invertível.

Suponha agora que temos dois pontos $p = \varphi^{-1}(x_0, c)$, $q = \varphi^{-1}(y_0, c)$ sobre a mesma placa L_c , e duas seções transversais $\tau_p = \varphi^{-1} \circ (h_p, g_p)$ e $\tau_q = \varphi^{-1} \circ (h_q, g_q)$ em p e q respectivamente. Já que g_p e g_q são invertíveis, a aplicação $f : \tau_p \rightarrow \tau_q$ dada por

$$f(w) = \tau_q \circ (g_q)^{-1} \circ g_p \circ \tau_p^{-1}(w) \quad (3.1)$$

é um biholomorfismo bem definido. Temos as seguintes observações:

1. O germe da seção transversal não depende da parametrização escolhida.

De fato, se existe outra seção transversal $\tilde{\tau}_p$ tal que $\tau_p = \tilde{\tau}_p \circ \psi_p$, onde $\psi_p \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Então, ao efetuarmos

$$\varphi \circ \tilde{\tau}_p = (\tilde{h}_p, \tilde{g}_p),$$

teremos que $\varphi \circ \tau_p = \varphi \circ \tilde{\tau}_p \circ \psi_p$ logo

$$(h_p, g_p) = (\tilde{h}_p, \tilde{g}_p) \circ \psi_p = (\tilde{h}_p \circ \psi, \tilde{g}_p \circ \psi_p),$$

assim $g_p = \tilde{g}_p \circ \psi_p$, e portanto

$$\begin{aligned} g_p \circ \tau_p^{-1} &= \tilde{g}_p \circ \psi_p \circ \tau_p^{-1} \\ &= \tilde{g}_p \circ \tilde{\tau}_p^{-1} \\ &= \tilde{g}_p \circ \tilde{\tau}_p^{-1}. \end{aligned}$$

2. Afirmamos que f não depende da carta escolhida. De fato, sejam (U_1, φ_1) , (U_2, φ_2) duas cartas de \mathcal{F} e p, q dois pontos na mesma folha de \mathcal{F} , e na mesma componente conexa da interseção dos domínios $U_1 \cap U_2$. Nas coordenadas locais (U_j, φ_j) temos que:

$$\varphi_j \circ \tau_p(w) = (h_{p,j}, g_{p,j}(w)), \quad \varphi_j \circ \tau_q(w) = (h_{q,j}(w), g_{q,j}(w)).$$

Seja π_1 e π_2 as projeções usuais. Então da equação (1.1) segue-se que

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x, y) &= (h(x, y), g(y)) \\ &= (h(x, y), g \circ \pi_2(x, y)) \end{aligned}$$

assim

$$\pi_2 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x, y) = g \circ \pi_2(x, y) = g(y).$$

Logo

$$\begin{aligned} g_{p,2} &= \pi_2 \circ \varphi_2 \circ \tau_p \\ &= \pi_2 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \circ \varphi_1 \circ \tau_p \\ &= g \circ \pi_2 \circ \varphi_1 \circ \tau_p \\ &= g \circ g_{p,1} \end{aligned}$$

e o mesmo para o ponto q . Sejam duas aplicações $f : \tau_p \rightarrow \tau_q$ e $\tilde{f} : \tau_p \rightarrow \tau_q$ entre as seções transversais τ_p e τ_q , então da equação (3.1)

segue-se que

$$\begin{aligned}
 f &= \tau_q \circ (g_{q,2})^{-1} \circ g_{p,2} \circ \tau_p^{-1} \\
 &= \tau_q \circ (g_{q,1})^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ g_{p,1} \circ \tau_q^{-1} \\
 &= \tau_q \circ g_{q,1} \circ g_{p,1} \circ \tau_q^{-1} \\
 &= \tilde{f}.
 \end{aligned}$$

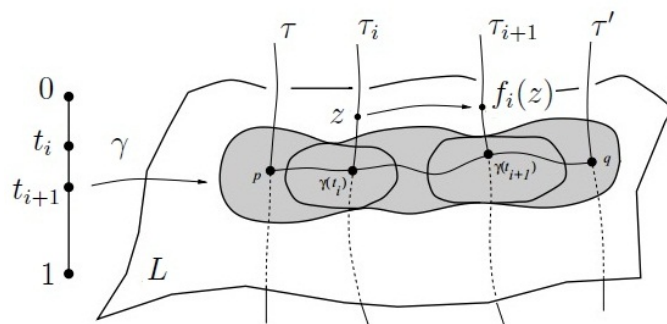
3. Dados $p, q, r \in L_c$ e $f : \tau_p \rightarrow \tau_q$, $\tilde{\alpha} : \tau_p \rightarrow \tau_r$ e $\alpha : \tau_r \rightarrow \tau_q$ as respectivas seções transversais, então $f = \alpha \circ \tilde{\alpha}$. De fato, escrevemos τ_r em coordenadas locais: $\varphi \circ \tau_r = (h_r, g_r)$, e pela equação (3.1) segue-se que:

$$\begin{aligned}
 \alpha \circ \tilde{\alpha} &= (\tau_q \circ (g_q)^{-1} \circ g_r \circ \tau_r^{-1}) \circ (\tau_r \circ (g_r)^{-1} \circ g_p \circ \tau_p^{-1}) \\
 &= \tau_q \circ (g_q)^{-1} \circ g_p \circ \tau_p^{-1} \\
 &= f.
 \end{aligned}$$

Definição 3.2. *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa regular em M , (U, φ) uma carta da folheação \mathcal{F} e L uma placa. Dados p e q em L e seções transversais τ_p e τ_q em p e q respectivamente, a aplicação $f : (\tau_p, p) \rightarrow (\tau_q, q)$ definida como em (3.1) é chamada aplicação correspondência entre τ_p e τ_q .*

A aplicação correspondência pode ser definida para um número finito de seções transversais: fixemos uma folha L de \mathcal{F} , dois pontos $p, q \in L$ e um caminho $\gamma : [0, 1] \rightarrow L$ com $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Como $\gamma([0, 1]) \subset L$ é compacto, podemos encontrar uma cobertura finita $\{U_i\}_{i=1}^l$ de $\gamma([0, 1])$ por cartas de \mathcal{F} .

Escolhemos a partição $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_l = 1$ tal que $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$ para algum i e um ponto $p_i = \gamma(t_i)$.



Seja τ_i a seção transversal em p_i para cada $i = 0, \dots, l-1$. Como p_i e p_{i+1} pertence a U_i , e a aplicação correspondência não depende da carta escolhida, então as aplicações correspondências $f_i : \tau_i \rightarrow \tau_{i+1}$ estão bem definidas. A composição delas

$$f_\gamma := f_{l-1} \circ \dots \circ f_1 \quad (3.2)$$

é um biholomorfismo bem definido entre (τ_0, p) e (τ_l, q) , e não depende da cobertura $\{U_i\}_{i=1}^l$ nem dos pontos p_i .

Definição 3.3. *Seja L uma folha de \mathcal{F} e $\gamma : [0, 1] \rightarrow L$ um caminho. Considere seções transversais τ_p e τ_q em $p = \gamma(0)$ e $q = \gamma(1)$ respectivamente. A aplicação f_γ definida pela equação (3.2) é chamada aplicação de holonomia de L associada a γ .*

Mostraremos que f_γ independe das seções transversais nos pontos p e q . De fato, sejam σ_p e σ_q duas seções transversais em p e q distintas de τ_p e τ_q . Sabemos que existem biholomorfismos $\theta_p : \tau_p \rightarrow \sigma_p$ e $\theta_q : \tau_q \rightarrow \sigma_q$. Denotaremos por f_γ^τ a holonomia de γ com respeito às seções transversais τ_p e τ_q , e por f_γ^σ a holonomia com respeito a σ_p e σ_q , daí

$$f_\gamma^\tau = \theta_q^{-1} \circ f_\gamma^\sigma \circ \theta_p.$$

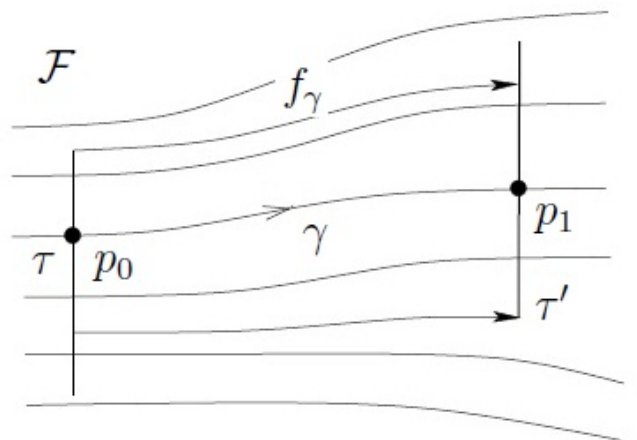


Figura 3.1: Holonomia de um caminho entre duas seções transversais

Teorema 3.1. *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa em M e L uma folha de \mathcal{F} . Considere $p, q \in L$ e duas seções transversais τ_p e τ_q em p e q respectivamente. Se γ_0 e γ_1 são dois caminhos homotópicos de p a q em L , então $f_{\gamma_0} = f_{\gamma_1}$.*

Demonstração. De fato, como γ_0 e γ_1 são homotópicos existe uma homotopia $H : I \times I \rightarrow L$, entre γ_0 e γ_1 , tal que $H(s, \cdot) = \gamma_s$ para $s = 0, 1$, onde $I = [0, 1]$. Denotamos $\gamma_s(t) = H(s, t)$, então $\gamma_s(0) = p$ e $\gamma_s(1) = q$ para todo $s \in I$. Seja $\{U_i\}_{i=1}^k$ uma cobertura finita de $H(I \times I)$ pelas cartas da folheação. Consideramos as seguintes partições $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{u-1} < s_u = 1$ e $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{v-1} < t_v = 1$ tal que $H([s_l, s_{l+1}] \times [t_j, t_{j+1}]) \subset U_i$ para algum i , $\forall 0 \leq l \leq u-1$ e $\forall 0 \leq j \leq v-1$.

Fixemos as seções transversais $\tau_{l,j}$ em $p_{l,j} := H(s_l, t_j)$ tal que $\tau_{l,0} = \tau_p$ e $\tau_{l,v} = \tau_q$. A holonomia ao longo da curva γ_{s_l} com respeito às seções transversais $\tau_{l,j}$ com $j = 0, \dots, v$, é dada por

$$f_{\gamma_{s_l}} = \delta_{l,v-1} \circ \delta_{l,v-2} \circ \dots \circ \delta_{l,1} \circ \delta_{l,0}$$

onde $\delta_{l,j} := \tau_{l,j} \rightarrow \tau_{l,j+1}$.

Por outro lado, a aplicação correspondência $\theta_{l,j} : \tau_{l,j} \rightarrow \tau_{l+1,j}$ está bem definida $\forall 0 \leq l \leq u-1$ e $\forall 0 \leq j \leq v-1$, com $\theta_{l,0} := id$, $\theta_{l,v} := id$ e

$$\delta_{l+1,j} = \theta_{l,j+1} \circ \delta_{l,j} \circ \theta_{l,j}^{-1}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} f_{\gamma_{s_{l+1}}} &= \delta_{l+1,v-1} \circ \delta_{l+1,v-2} \circ \dots \circ \delta_{l+1,1} \circ \delta_{l+1,0} \\ &= (\theta_{l,v} \circ \delta_{l,v-1} \circ \theta_{l,v-1}^{-1}) \circ (\theta_{l,v-1} \circ \delta_{l,v-2} \circ \theta_{l,v-2}^{-1}) \circ \dots \circ (\theta_{l,1} \circ \delta_{l,0} \circ \theta_{l,0}^{-1}) \\ &= \theta_{l,v} \circ \delta_{l,v-1} \circ \delta_{l,v-2} \circ \dots \circ \delta_{l,1} \circ \delta_{l,0} \circ \theta_{l,0}^{-1} \\ &= Id \circ \delta_{l,v-1} \circ \delta_{l,v-2} \circ \dots \circ \delta_{l,1} \circ \delta_{l,0} \circ Id^{-1} \\ &= \delta_{l,v-1} \circ \delta_{l,v-2} \circ \dots \circ \delta_{l,1} \circ \delta_{l,0} \\ &= f_{\gamma_{s_l}} \end{aligned}$$

o que queríamos mostrar. □

Segue-se, do Teorema 3.1, a seguinte definição.

Definição 3.4. *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa em M , L uma folha de \mathcal{F} , p um ponto em L e $\gamma : [0, 1] \rightarrow L$ um caminho fechado em p . Então o grupo gerado pelas aplicações de holonomia de $f_\gamma : \tau_p \rightarrow \tau_p$ onde τ_p é seção transversal em p , é denotado por*

$$\text{Hol}(\mathcal{F}, L, \tau_p, p) = \{f_\gamma; [\gamma] \in \pi_1(L, p)\}$$

e chamado o grupo de holonomia de \mathcal{F} em L com base em p .

Sejam $\gamma, \beta, p_0, p_1, p_2$ como antes e fixemos seções transversais τ_0, τ_1, τ_2 em p_0, p_1, p_2 respectivamente. Então

$$f_{\gamma \star \beta} = f_\beta \circ f_\gamma.$$

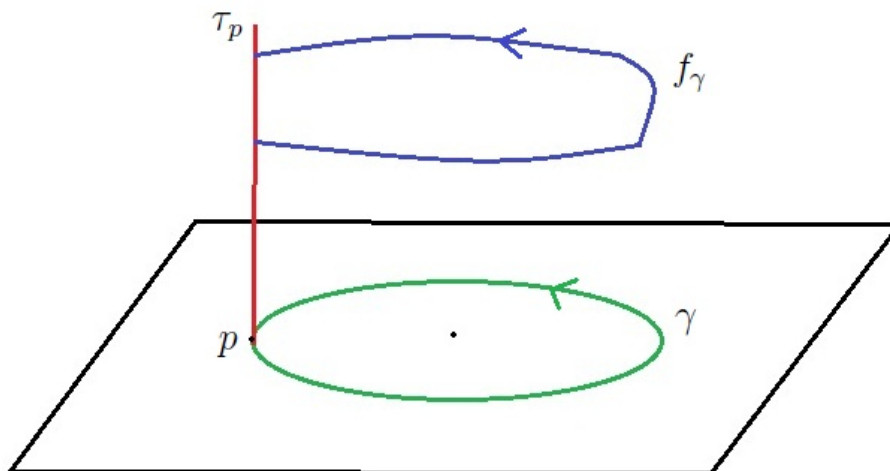


Figura 3.2: Holonomia associada ao caminho fechado γ .

Já que $(\tau, p) \cong (\mathbb{C}, 0)$, o grupo de holonomia pode ser considerado como um subgrupo de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. A aplicação

$$\begin{aligned} \text{Hol}_p(\mathcal{F}) : \pi_1(L, p) &\longrightarrow \text{Hol}(\mathcal{F}, L, \tau_p, p) \subset \text{Diff}(\mathbb{C}) \\ [\gamma] &\longmapsto \text{Hol}_p(\mathcal{F})([\gamma]) = f_\gamma. \end{aligned}$$

é um antihomomorfismo de grupos. Isto é $\text{Hol}_p(\mathcal{F})([\gamma \star \beta]) = \text{Hol}_p(\mathcal{F})([\beta]) \circ \text{Hol}_p(\mathcal{F})([\gamma])$. Dizemos que $\text{Hol}_p(\mathcal{F})$ é a representação de holonomia de L com respeito a p .

Para não recarregar a notação, denotaremos $\text{Hol}(L, p)$ por $\text{Hol}(\mathcal{F}, L, \tau_p, p)$ o grupo de holonomia da folha L em \mathcal{F} que passa por p .

Corolário 3.1. *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa em M e L uma folha de \mathcal{F} . Então para quaisquer $p, q \in L$, os grupos de holonomia $\text{Hol}(L, p)$ e $\text{Hol}(L, q)$ são conjugados.*

Demonstração. Seja γ um caminho que liga p a q em L , e seja f_γ a aplicação holonomia. Consideremos o isomorfismo $\gamma^* : \pi_1(L, p) \rightarrow \pi_1(L, q)$ induzido

por γ sobre os grupos fundamentais, isto é, dado por

$$\begin{aligned}\gamma^* : \pi_1(L, p) &\longrightarrow \pi_1(L, q) \\ [\sigma] &\longmapsto \gamma^*([\sigma]) = [\gamma \star \sigma \star \gamma^{-1}].\end{aligned}$$

Daí

$$f_{\gamma^*[\sigma]} = f_{\gamma \star \sigma \star \gamma^{-1}} = f_\gamma^{-1} \circ f_\sigma \circ f_\gamma$$

assim

$$f_{\gamma^*[\sigma]} = f_\gamma^{-1} \circ f_\sigma \circ f_\gamma.$$

Por conseguinte, f_γ define uma conjugação entre $\text{Hol}(L, p)$ e $\text{Hol}(L, q)$. \square

Pelo Corolário 3.1, $\text{Hol}(L, p)$ não depende do ponto base p então podemos escrever $\text{Hol}(L) = \text{Hol}(L, p)$.

3.1 Conjugação de grupos de Holonomia

Lema 3.1. *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa em M , L uma folha de \mathcal{F} e K um conjunto compacto em L . Então existe uma vizinhança aberta U de K em M , uma vizinhança aberta W de K em L , e uma retração holomorfa $P : U \rightarrow W$ tal que $\forall x \in W$, a fibra $P^{-1}(x)$ é transversal a \mathcal{F} em U .*

Demonstração. Como K é compacto em L , escolhamos uma cobertura $W = \cup_i W_i$ de K por placas W_i de \mathcal{F} . Como \mathcal{F} não tem singularidades em W , segue do Teorema do fluxo tubular, que existe $P : \widetilde{W} \subset M \rightarrow W$ uma aplicação holomorfa própria, sobrejetiva. Desde que \widetilde{W} é uma caixa de fluxo para \mathcal{F} , podemos aplicar o Teorema de transversalidade de Thom, para obter um conjunto aberto $U \subset \widetilde{W}$ tal que todas as fibras de $P|_U : U \rightarrow P(U) \subset W$ sejam transversais às folhas de \mathcal{F} . \square

Definição 3.5. *Sejam \mathcal{F} e \mathcal{F}' duas folheações holomorfas nas superfícies complexas M , M' respectivamente. Sejam L e L' folhas de \mathcal{F} e \mathcal{F}' respectivamente, e $p \in L$, $p' \in L'$. Dizemos que os grupos de holonomia $\text{Hol}(L)$ e $\text{Hol}(L')$ são holomorficamente conjugados se existem seções transversais (τ, p) , (τ', p') e um homeomorfismo $\phi : L \cup \tau \rightarrow L' \cup \tau'$ tal que $\phi(p) = p'$, $\phi|_L$ e ϕ_τ são biholomorfismos e para cada $[\gamma] \in \pi_1(L, p_0)$ tem se que*

$$\phi \circ f_\gamma \circ \phi^{-1}(s') = f_{\phi \circ \gamma}(s')$$

para cada $s' \in \tau'$ em uma vizinhança de p' .

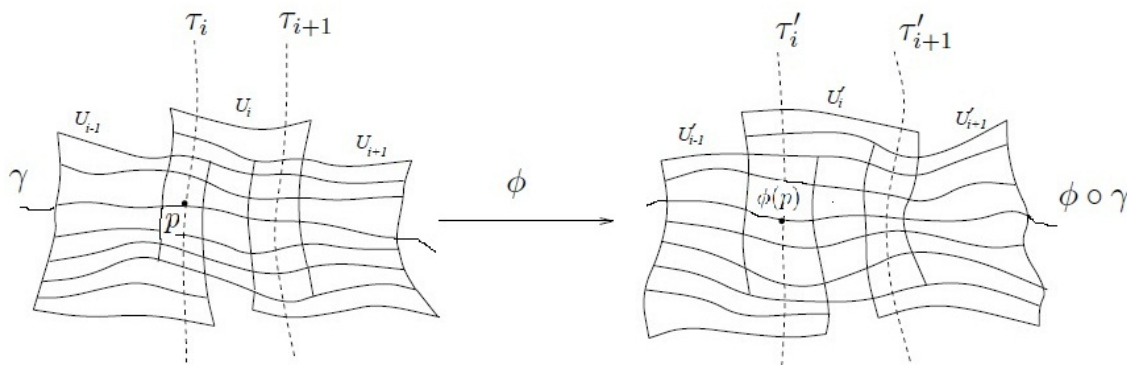


Figura 3.3: Holonomias conjugadas

Da definição anterior, segue-se:

Teorema 3.2. *Sejam \mathcal{F} e \mathcal{F}' duas folheações em M e M' , e sejam L e L' folhas compactas de \mathcal{F} , \mathcal{F}' respectivamente. Os grupos de holonomia de L e L' são conjugados se, e somente se, existem vizinhanças V de L , V' de L' e um biholomorfismo $\Phi : V \rightarrow V'$, com $\Phi(L) = L'$ que leva folhas de $\mathcal{F}|_V$ em folhas de $\mathcal{F}'|_{V'}$.*

Demonstração. Suponhamos que os grupos de holonomia $\text{Hol}(L)$ e $\text{Hol}(L')$ sejam conjugados, então pela Definição 3.5 existem um biholomorfismo $\psi :$

$L \rightarrow L'$, um ponto $p_0 \in L$, duas seções transversais τ_0 em p_0 e τ'_0 em $p'_0 = \psi(p_0)$, e um biholomorfismo $\phi : (\tau_0, p_0) \rightarrow (\tau'_0, p'_0)$ tal que

$$\phi \circ f_\gamma \circ \phi^{-1} = f'_{\psi \circ \phi}, \quad (3.3)$$

para todo caminho fechado γ em L com base em p_0 ; onde f_γ denota a holonomia de \mathcal{F} com respeito à curva γ e $f'_{\psi \circ \phi}$ a holonomia de \mathcal{F}' com respeito à curva $\psi \circ \phi$. Como L e L' são compactos então, pelo Lema 3.1, existem vizinhanças abertas $V \subset M$ de L e $V' \subset M'$ de L' tais que as retrações $P : V \rightarrow L$ e $P' : V' \rightarrow L'$ tem fibras transversais a \mathcal{F} e \mathcal{F}' respectivamente. Denotamos por $\tau_0 = P^{-1}(p_0)$ e $\tau'_0 = (P')^{-1}(p'_0)$ as duas seções transversais. Seja $p \in L$, $p \neq p_0$, escolhemos um caminho γ que liga p_0 a p em L . Seja τ_p a seção transversal em p definido por $P^{-1}(p)$, então $f_{\gamma^{-1}}(x)$ está bem definida para todo x em uma vizinhança de p . Assim, definiremos

$$\Phi(x) = f'_{\psi \circ \gamma} \circ \phi \circ f_\gamma^{-1}(x).$$

Suponhamos agora que temos um outro caminho μ que liga p_0 a p , como $\mu \star \gamma^{-1}$ é um laço com base em p_0 então $[\mu \star \gamma^{-1}] \in \pi_1(L, p_0)$. Pela equação (3.3), segue-se que

$$\phi \circ f_{\mu \star \gamma^{-1}} = f'_{\psi \circ (\mu \star \gamma^{-1})} \circ \phi.$$

Agora, como a aplicação, que associa a um caminho sua aplicação holonomia, é um antihomomorfismo de grupos, então

$$\phi \circ f_\gamma^{-1} \circ f_\mu = (f'_{\psi \circ \gamma})^{-1} \circ f'_{\psi \circ \mu} \circ \phi$$

e por conseguinte

$$f'_{\psi \circ \gamma} \circ \phi \circ f_{\gamma^{-1}}(x) = f'_{\psi \circ \mu} \circ \phi \circ f_{\mu^{-1}}(x) = \Phi(x)$$

assim a definição de Φ não depende do caminho escolhido. Falta mostrar que Φ é um biholomorfismo. De fato, Φ é invertível pois ϕ é um homeomor-

fismo. Além disso, Φ é holomorfa, isto segue-se do fato que Φ é composta de biholomorfismos. Portanto Φ é um biholomorfismo.

Agora, reciprocamente sejam p um ponto em L e $p' = \Phi(p)$. Consideramos um caminho fechado $\gamma \subset L$ com base em p , e τ uma seção transversal em p contida em V . Então como Φ leva folhas em folhas, $\Phi(\gamma)$ é um caminho em L' e $\Phi \circ \tau$ é uma seção transversal em p' para as folhas de \mathcal{F}' . Sejam p_0, \dots, p_n em γ e seções transversais τ_0, \dots, τ_n , com $p_0 = p_n = p$ e $\tau_0 = \tau_n = \tau$ e as aplicações de correspondência $f_i : \tau_i \rightarrow \tau_{i+1}$ e $q \in \tau_i$. Como Φ leva folhas em folhas e como $f_i(q)$ é o ponto de interseção da única folha que passa através de q com τ_{i+1} , e como $\Phi \circ \tau_i$ e $\Phi \circ \tau_{i+1}$ são seções transversais a L' , então $f_{i_{\Phi \circ \gamma}}(\Phi(q)) = \Phi(f_i(q))$, onde $f_{i_{\Phi \circ \gamma}} : \Phi(\tau_i) \rightarrow \Phi(\tau_{i+1})$. Da construção da aplicação holonomia para $\Phi(\gamma)$, obteremos que

$$\Phi^{-1} \circ f_{\gamma'} \circ \Phi = f_\gamma.$$

E já que γ é arbitrário, então os grupos de holonomia de L e L' são conjugados. □

Definição 3.6. *Um subconjunto $B \subset M$ é dito estável para a folheação \mathcal{F} se para toda vizinhança W de B em M existe uma vizinhança $W' \subset W$ de B em M tal que toda folha de \mathcal{F} que intercepta W' está contida em W .*

O seguinte teorema mostra a relação que existe entre a estabilidade e a finitude do grupo de holonomia. O leitor pode consultar a demonstração com mais detalhes em [4].

Teorema 3.3. *Uma folha compacta de \mathcal{F} com grupo de holonomia finito é estável.*

Teorema 3.4 (Teorema da estabilidade local de Reeb). *Seja L uma folha compacta de \mathcal{F} em M com grupo de holonomia finito. Então para toda vi-*

vizinhança W de L existe uma vizinhança tubular \mathcal{F} -invariante de L e uma aplicação $P : W' \subset W \rightarrow L$ com as seguintes propriedades:

1. Toda folha $L' \subset W'$ é compacta com grupo de holonomia finito.
2. Se $L' \subset W'$ é uma folha então a restrição $P|_{L'} : L' \rightarrow L$ é uma aplicação de recobrimento.
3. Se $x \in L$ então $P^{-1}(x)$ é transversal a \mathcal{F} .

Demonstração. Fixemos uma vizinhança W de L . Consideremos a vizinhança tubular $P_0 : W \rightarrow L$. Como L é compacto podemos assumir que a fibra $P_0(x)$ é transversal a \mathcal{F} , para todo $x \in L$. Pelo Teorema 3.3, existe $W' \subset W$. Segue-se da prova do Teorema 3.3 que todas as folhas L' em W' são compactas. Definamos $P = P_0|_{W'}$, então $P : W' \rightarrow L$ é uma vizinhança tubular que satisfaz (3). Reduzindo W' se é necessário, podemos supor que L' é transversal à fibra $P^{-1}(x)$, $\forall x \in L$. E como a folha $L' \subset W'$ é compacta então teremos que L' intercepta cada fibra um número finito de vezes. O mesmo argumento mostra que cada folha $L' \subset W'$ tem grupo de holonomia finito. Isto prova (1) e (2). \square

3.2 O grupo de holonomia de uma folha transversal a uma fibração

A holonomia de uma folha L pode também ser descrita por meio de uma fibração transversal a L . Seja \mathcal{F} uma folheação transversal a uma fibração (M, P, L, F) , onde L é uma folha de \mathcal{F} e F é uma variedade complexa de dimensão 1.

Se L' é outra folha de \mathcal{F} , então $P|_{L'} : L' \rightarrow L$ é uma aplicação de recobrimento. Se $p_0 \in L$ e $\gamma : [0, 1] \rightarrow L$ é um laço com base em p_0 então

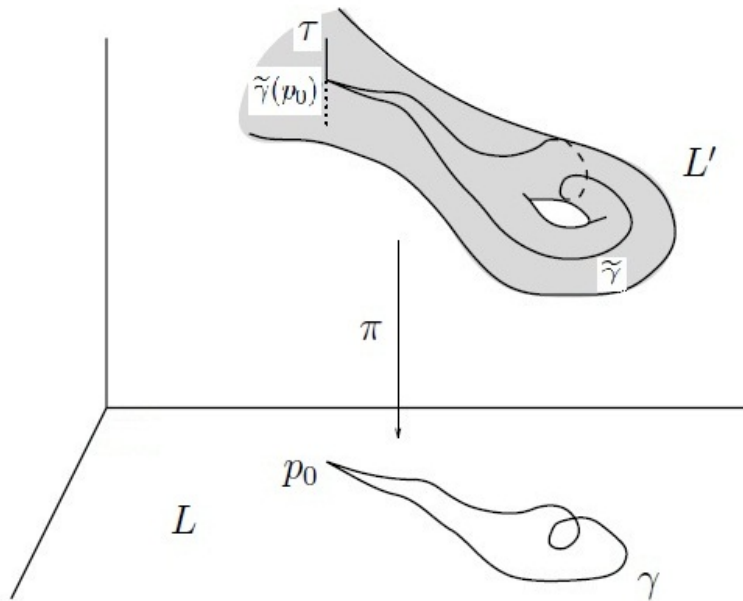


Figura 3.4: Folheação transversal à fibração π .

dado $p \in P^{-1}(p_0)$, existe um caminho $\tilde{\gamma}_p : [0, 1] \rightarrow L' \subset M$ tal que $\tilde{\gamma}_p(0) = p$ e $P \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. O caminho $\tilde{\gamma}_p$ será chamado *levantamento do caminho* γ e é o único caminho que passa por p tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} & L' & \\ \tilde{\gamma}_p \nearrow & & \downarrow P|_{L'} \\ [0, 1] & \longrightarrow & L \end{array}$$

Agora, ao efetuarmos $f_\gamma(z) = \tilde{\gamma}(1)$, definiremos assim uma aplicação $f_\gamma : P^{-1}(q_0) \rightarrow P^{-1}(q_0)$ que é um biholomorfismo e será a holonomia de γ respeito à fibração P . Como o levantamento apenas depende da classe de homotopia de γ , então podemos definir a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \text{Hol}_{q_0}(\mathcal{F}) : \pi_1(L, q_0) &\longrightarrow \text{Diff}(P^{-1}(q_0)) \\ [\gamma] &\longmapsto f_\gamma. \end{aligned}$$

onde $\text{Diff}(P^{-1}(q_0))$ é o grupo de biholomorfismos da fibra em $P^{-1}(q_0)$ que fixam q_0 . Naturalmente, a imagem de $\pi_1(L, q_0)$ via $\text{Hol}_{q_0}(\mathcal{F})$ é chamado grupo de holonomia da folha L . Esse grupo pode ser interpretado como grupo de holonomia de uma folha em \mathcal{F} com respeito a uma seção transversal (τ, q_0) .

3.3 Grupo de holonomia associados a singularidades de folheações

Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa sobre uma superfície complexa M e Γ uma separatriz de \mathcal{F} . Segue-se que $\Gamma' = \Gamma \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$ é uma curva lisa. Para determinar o grupo de holonomia de Γ' fixemos um ponto $y_0 \in \Gamma'$ e tomamos a idéia da seção 3.1. Seja $\tau \subset M$ uma seção transversal num ponto p_0 e $\gamma \subset \Gamma'$ um caminho fechado em p_0 . Construimos um difeomorfismo f_γ definido sobre uma vizinhança V_γ de p_0 em τ . Não é correto afirmamos que f_γ independa da classe de homotopia de γ porque o domínio de definição V_γ de f_γ depende em geral da escolha de γ , no entanto o germe $f_{[\gamma]}$ depende unicamente da classe de homotopia de γ . Assim, obteremos um morfismo de grupos

$$\begin{aligned} \text{Hol}_{p_0}(\mathcal{F}) : \pi_1(\Gamma', p_0) &\longrightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \\ [\gamma] &\longmapsto f_{[\gamma]}. \end{aligned}$$

Esse morfismo dá uma representação de $\pi_1(\Gamma', p_0)$ em $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ que pelo Corolário 3.1, a classe de conjugação não depende de p_0 e τ . Esta classe de conjugação é chamada *representação do grupo de holonomia da separatriz* Γ , denotada por $\text{Hol}(\Gamma)$.

A seguir, estudaremos o grupo de holonomia de uma superfície complexa invariante pela folheação: Seja ω um germe de uma 1-forma holomorfa em $0 \in \mathbb{C}^2$, e denote por \mathcal{F}_ω a folheação holomorfa induzida por ω . Suponha que

ω pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\omega = xdy - \lambda y(1 + A(x, y))dx.$$

Seja

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$

e escolhemos um representante de ω em $\text{int}(U)$ tal que A é holomorfa em U e $0 \in \mathbb{C}^2$ a única singularidade de ω em U . Segue-se que $L_0 = (U \setminus \{0\}) \cap \{y = 0\}$ é uma folha. Nosso objetivo é descrever o grupo de holonomia da folha L_0 entorno da origem, mais precisamente, veremos que o grupo de holonomia associado a L_0 possui um gerador $f_\gamma \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, com parte linear $f'_\gamma(0)y = \exp(2i\pi\lambda\theta)y$.

Consideremos a seção transversal $(\tau, (1, 0)) = \{x = 1\}$ que passa por $p = (1, 0)$. Com y suficientemente pequeno, γ possui um levantamento $\tilde{\Gamma}_y$ na folha de \mathcal{F}_ω que passa pelo ponto $(1, y)$, tal que $P_1 \circ \tilde{\Gamma}_y = \gamma$, onde P_1 é a projeção na primeira coordenada. Pela definição de f_γ segue-se que $\tilde{\Gamma}_y(1) = (1, f_\gamma(y))$. Por outro lado, como a folha \mathcal{F}_ω é holomorfa, escrevemos $\tilde{\Gamma}_y$ da forma:

$$\begin{cases} \tilde{\Gamma}_y(\theta) = (\gamma(\theta), \Gamma(\theta, y)) \\ \Gamma(\theta, y) = \sum_{k \geq 1} c_k(\theta)y^k \end{cases}$$

onde Γ é uma serie convergente em y tal que $\Gamma(\theta, 0) = 0$ e $\Gamma(0, y) = y$. Ao efetuarmos que $\tilde{\Gamma}(\theta, y)$ siga uma folha de ω , isto é

$$\omega(\tilde{\Gamma}(\theta, y)) = \omega(\exp(2i\pi\theta), \Gamma(\theta, y)) = 0.$$

Portanto

$$-\lambda\Gamma(\theta, y)[1 + A(\exp(2i\pi\theta), \Gamma(\theta, y))] \cdot 2i\pi \exp(2i\pi\theta) + \exp(2i\pi\theta) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta}(\theta, y) = 0.$$

Então

$$\begin{aligned} \exp(2i\pi\theta) \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta}(\theta, y) &= \lambda \Gamma(\theta, y) [1 + A(\exp(2i\pi\theta), \Gamma(\theta, y))] \cdot 2i\pi \exp(2i\pi\theta) \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta}(\theta, y) &= 2i\pi \lambda \Gamma(\theta, y) [1 + A(\exp(2i\pi\theta), \Gamma(\theta, y))]. \end{aligned}$$

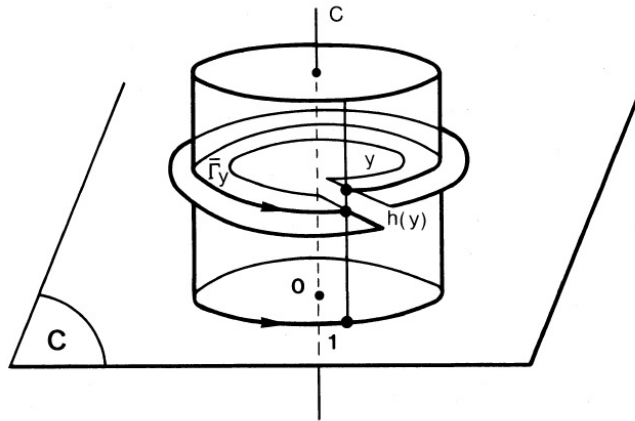
Já que $\Gamma(\theta, y) = \sum_{k \geq 1} c_k(\theta) y^k$ então, da última expressão, temos a seguinte equação diferencial com valor inicial que permitirá a determinação do primeiro coeficiente da serie de Taylor da holonomia f_γ

$$c_1'(\theta) = 2i\pi \lambda c_1(\theta), \quad c_1(0) = 1,$$

cuja solução é $c_1(\theta) = \exp(2i\pi \lambda \theta)$.

O grupo de holonomia de \mathcal{F} , em L_0 é gerado pelo seguinte biholomorfismo:

$$\begin{aligned} f_\gamma(y) &= \Gamma(1, y) = c_1(1)y + y^2(\dots) + \dots \\ &= \exp(2i\pi \lambda)y + y^2(\dots) + \dots \end{aligned}$$



3.4 Grupo de holonomia projetivo

Consideremos uma 1-forma ω que gera a folheação \mathcal{F} no disco $U = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; |x| < 1, |y| < 1\}$ com uma singularidade isolada em $0 \in \mathbb{C}^2$. Seja a

explosão não-dicrítica $\pi : \tilde{U} \rightarrow U$ centrada na origem e $D = \pi^{-1}(0)$ o divisor excepcional invariante pela folheação $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^*\mathcal{F}$, onde $\tilde{\mathcal{F}}$ é o transformado estrito de \mathcal{F} . Suponha que todas as singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}$ estão contidas na carta (U_1, φ_1) da explosão. O conjunto $D \setminus \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}})$ é uma folha de $\tilde{\mathcal{F}}$, portanto podemos considerar seu grupo de holonomia.

Seja $P : \tilde{U} \rightarrow D$, $P(x, t) = t$, o fibrado linear obtido após da explosão, e seja $q \in D \setminus \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}})$. Então $\text{Hol}(D \setminus \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}}), q)$ é o grupo de holonomia da folha $D \setminus \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}})$ em q da folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ restrita a $P^{-1}(D \setminus \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}}))$.

Para definir esse grupo, usamos o mesmo argumento como na seção anterior. Consideremos um caminho $\gamma : [0, 1] \rightarrow D \setminus \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}})$ com $\gamma(0) = q = (0, t_0)$, então o seu levantamento com origem em $(x, t_0) \in P^{-1}(q)$ é um caminho $\tilde{\gamma}_x(0) : [0, 1] \rightarrow \tilde{U}$ com $\tilde{\gamma}_x(0) = (x, t_0)$, contido em uma folha de $\tilde{\mathcal{F}}$ que passa por (x, t_0) e tal que $P(\tilde{\gamma}(s)) = \gamma(s)$, $\forall s \in [0, 1]$.

Assim, definiremos a holonomia da curva γ , $f_\gamma : P^{-1}(q) \rightarrow P^{-1}(q')$, onde $q' = \gamma(1)$, e $f_\gamma(x, t_0) = \tilde{\gamma}_x(1)$ para x suficientemente próximo de q .

Agora suponha que $q' = q$, isto induz o homomorfismo de grupos

$$\text{Hol}_q(\tilde{\mathcal{F}}) : \pi_1(D \setminus \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}})) \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0).$$

O subgrupo $\text{Hol}_q(D \setminus \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}}))$ será chamado *grupo de holonomia projetivo* da folha $D \setminus \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}})$ associada à folheação \mathcal{F} .

Capítulo 4

Folheações com grupo de holonomia prescrito

4.1 Introdução

Dado $G \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ um subgrupo do grupo de difeomorfismos holomorfos, seja X um germe em $0 \in \mathbb{C}^2$ de um campo de vetores holomorfo com uma singularidade isolada em $0 \in \mathbb{C}^2$, e seja \mathcal{F}_X a folheação holomorfa induzida por X . Então sobre quais condições o grupo de holonomia projetivo associado a \mathcal{F}_X é conjugado ao grupo G ?

Na direção desse problema, teremos os resultados de Alcides Lins Neto [2] e Pérez Marco-Yoccoz [24].

O objetivo da dissertação é provar o seguinte resultado de Lins Neto, dado em [2].

Teorema 4.1. *Seja $G = \{g_1, \dots, g_\nu\} \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Suponha que para qualquer $j \in \{1, \dots, \nu\}$, g_j é conjugado com sua parte linear em 0 , $z \mapsto g_j'(0).z$, e a composição $g_0 = g_\nu^{-1} \circ \dots \circ g_1^{-1}$ é também linearizável (não necessariamente no mesmo sistema de coordenadas). Sejam $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{\nu+1}$ curvas complexas que*

CAPÍTULO 4. FOLHEAÇÕES COM GRUPO DE HOLONOMIA PRESCRITO 60

passam por $0 \in \mathbb{C}^2$. Então existe um germe em $0 \in \mathbb{C}^2$ de campo de vetores holomorfo X que satisfaz as seguintes propriedades:

1. O campo X tem exatamente $\nu + 1$ separatrizes, que estão contidas nas Γ_j .
2. X é resolvida após uma explosão não dicrítica, e o grupo de holonomia projetivo de $\tilde{\mathcal{F}}_X$ é conjugado ao grupo de germes G .
3. A multiplicidade da folheação \mathcal{F}_X em 0 é ν .
4. A folheação $\tilde{\mathcal{F}}_X$ tem $\nu + 1$ singularidades no divisor.

A fim de provar o Teorema 4.1, construiremos uma superfície complexa M via colagem local de superfícies complexas e dentro de cada superfície local, definiremos folheações locais, que vão gerar uma folheação global em M . Além disso, um divisor compacto D de dimensão 1 isomorfo a \mathbb{P}^1 , tal que a classe de Chern do fibrado normal de D em M é -1 . Ao aplicarmos um Teorema de Grauert [25], a folheação obtida em M será equivalente via um biholomorfismo a uma folheação que provem da explosão de $0 \in \mathbb{C}^2$, com divisor $D = \mathbb{P}^1$. A folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ em $\tilde{\mathbb{C}}^2$, numa vizinhança de D , tem um número finito de singularidades em D , mais ainda D será invariante por $\tilde{\mathcal{F}}$. Assim, existirá um campo de vetores holomorfo X definido num entorno da origem cuja explosão é a folheação $\tilde{\mathcal{F}}$. Veremos, por construção, que o grupo G será conjugado ao grupo de holonomia projetiva de $\tilde{\mathcal{F}}$ com respeito à folha $D \setminus \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}})$. Finalmente, via blow-down, obteremos uma folheação \mathcal{F} num entorno de $0 \in \mathbb{C}^2$, que satisfaz as propriedades requeridas.

4.2 Prova do Teorema 4.1

Primeiro construiremos a superfície M via colagem. Consideremos $z_0^0 = 0$ e os ν pontos z_1^0, \dots, z_ν^0 em \mathbb{C} . Para cada $j \in \{0, 1, \dots, \nu\}$ definamos o disco aberto E_j de radio r e centro z_j^0 , onde r é tal que $|z_i^0 - z_j^0| > 2r$ para todo $i \neq j$ e $0 \leq i, j \leq \nu$. Para cada $j \in \{1, \dots, \nu\}$, escolhamos os pontos $z'_j \in E_j \setminus \{z_j^0\}$ e $z''_j \in E_0 \setminus \{0\}$ tal que

$$z''_j = \frac{r}{2} \exp\left(\frac{2i\pi(j-1)}{\nu}\right), \quad z'_j = z_j^0 + \frac{r}{2}. \quad (4.1)$$

Para cada $j = 1, \dots, \nu$ consideremos as curvas simples $\sigma_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que:

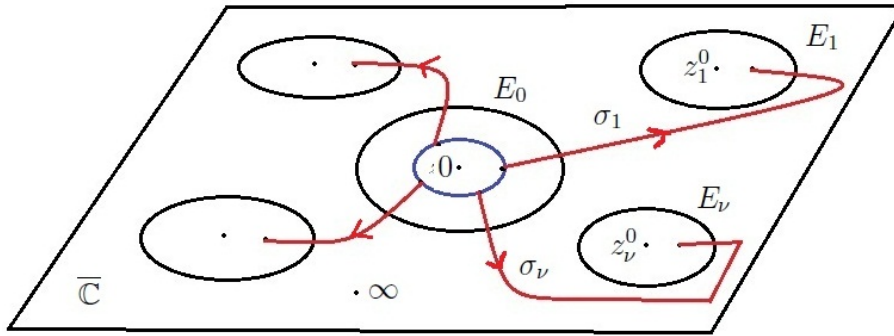


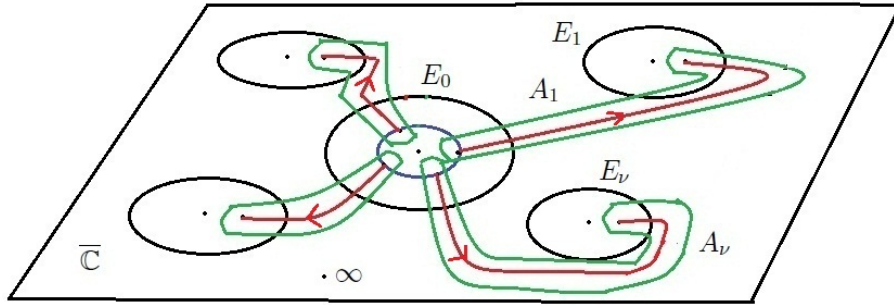
Figura 4.1: Discos E_j centrados em z_j , ligados por caminhos σ_j .

1. $\sigma_j(0) = z''_j$, $\sigma_j(1) = z'_j$.
2. $\sigma_j([0, 1]) \cap E_i = \emptyset$ se $0 \neq i \neq j$.
3. $\sigma_i([0, 1]) \cap \sigma_j([0, 1]) = \emptyset$ se $i \neq j$.
4. $\sigma_j([0, 1]) \cap E_0$ e $\sigma_j([0, 1]) \cap E_j$ são segmentos de retas contidas nos diâmetros de E_0 e E_j respectivamente, para todo $j \in \{1, \dots, \nu\}$.

Sejam A_1, \dots, A_ν faixas entorno de $\sigma_1, \dots, \sigma_\nu$ respectivamente tal que:

CAPÍTULO 4. FOLHEAÇÕES COM GRUPO DE HOLONOMIA PRESCRITO 62

1. $A_j \cap E_i = \emptyset$ se $0 \neq i \neq j$.
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$.
3. $A_j \cap E_0$ e $A_j \cap E_j$ estão contidos em setores de E_0 e E_j , $1 \leq j \leq \nu$, respectivamente.



Seja $U = (\bigcup_{i=1}^{\nu} A_i) \cup (\bigcup_{i=0}^{\nu} E_i)$ e $\gamma = \partial U$ uma curva simples em \mathbb{C} . Seja T uma vizinhança tubular de γ e $V = (\overline{\mathbb{C}} \setminus U) \cup T$ um conjunto aberto. Então segue-se que $\{A_1, \dots, A_{\nu}, E_0, \dots, E_{\nu}, V\}$ é uma cobertura de $\overline{\mathbb{C}}$.

Consideremos as seguintes coordenadas locais:

- Para cada $j = 1, \dots, \nu$ definiremos, em $A_j \times \mathbb{C}$, as coordenadas (z, v_j) com $z \in A_j$, $v_j \in \mathbb{C}$.
- Para cada $i = 0, \dots, \nu$ definiremos as coordenadas (z, u_i) em $E_i \times \mathbb{C}$, $z \in E_i$, $u_i \in \mathbb{C}$.
- Em $V \times \mathbb{C}$ tomaremos coordenadas (w, y) , onde $w = \frac{1}{z} \in V$ e $y \in \mathbb{C}$.

Agora, em cada aberto da forma $V \times \mathbb{C}$, $E_i \times \mathbb{C}$, $A_j \times \mathbb{C}$ e após colagem desses abertos, obteremos uma superfície complexa M e uma folheação singular \mathcal{F} em M .

De fato, em $A_j \times \mathbb{C}$ consideramos a folheação horizontal $\hat{\mathcal{F}}_j$ tal que as folhas são da forma v_j constante, $j = 1, \dots, \nu$. Analogamente, para $V \times \mathbb{C}$

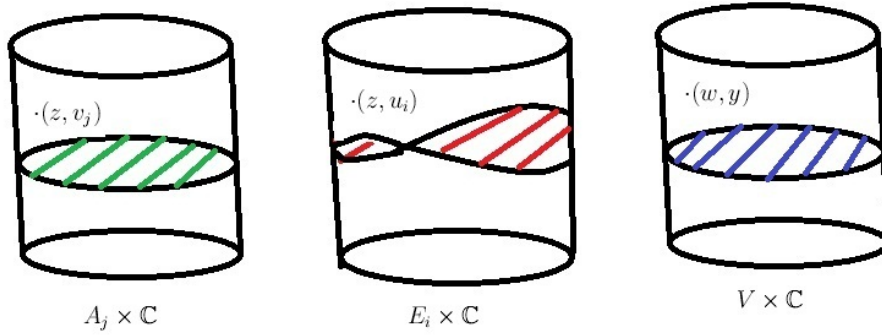


Figura 4.2: Tipos de folheações em coordenadas locais.

tomamos a folheação horizontal $\hat{\mathcal{F}}$, cujas folhas são da forma y constante. As folheações $\tilde{\mathcal{F}}_j$ em $E_j \times \mathbb{C}$, $j = 0, \dots, \nu$ serão folheações singulares induzidas pelo campo de vetores em $E_j \times \mathbb{C}$ definidos por

$$X_j = (z - z_j^0) \frac{\partial}{\partial z} + \alpha_j u_j \frac{\partial}{\partial u_j}. \quad (4.2)$$

Onde os números α_j serão escolhidos de acordo aos geradores do grupo $G = \{g_1, \dots, g_\nu\}$. Como cada $g_j \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ é linearizável então $g_j(x) = \lambda_j x + \dots$, onde $\lambda_j = e^{2i\pi\alpha_j}$ e $\lambda_j = g_j'(0)$, $\forall j = 1, \dots, \nu$, e como a aplicação $g_0 = g_\nu^{-1} \circ \dots \circ g_1^{-1}$ é linearizável, então escolhendo as coordenadas (z, u_0) em $E_0 \times \mathbb{C}$ segue-se que

$$g_0'(0) = (g_\nu^{-1} \circ \dots \circ g_1^{-1})'(0) = \lambda_1^{-1} \dots \lambda_\nu^{-1} = \lambda_0.$$

Daí

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \lambda_1^{-1} \dots \lambda_\nu^{-1} \\ &= \exp(-2i\pi\alpha_1) \dots \exp(-2i\pi\alpha_\nu) \\ &= \exp(-2i\pi \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i) \end{aligned}$$

e como

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \exp(2i\pi\alpha_0) \\ &= \exp(2i\pi\alpha_0) \cdot \exp(2i\pi n) \\ &= \exp(2i\pi(\alpha_0 + n))\end{aligned}$$

onde $n \in \mathbb{Z}$, portanto $\exp(-2i\pi \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i) = \exp(2i\pi(\alpha_0 + n))$, segue-se que $-\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i = \alpha_0 + n$, isto é $\alpha_0 = -n - \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i$. Ao considerarmos o caso em que $n = 1$ teremos

$$\alpha_0 = -1 - \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i.$$

Agora calcularemos o grupo de holonomia num entorno de cada ponto z_j^0 . Sejam $\gamma_j(\theta) = r_j e^{i\theta} + z_j^0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, onde $r_j < r$, a seção transversal $\tau_j = \{p_j\} \times \mathbb{C}$, onde $p_j \in \gamma_j([0, 2\pi])$ e consideremos a folha

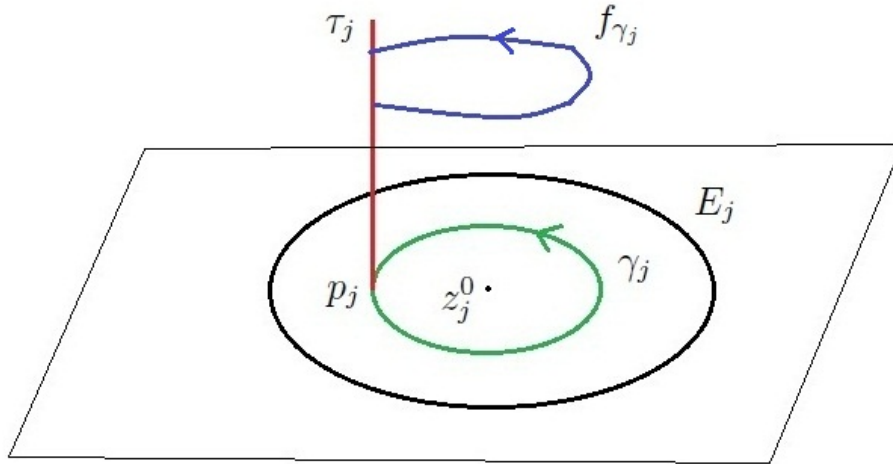
$$L = \{\{u_j = 0\} \setminus \{z_j^0\}\}$$

da folheação gerada pelo campo de vetores holomorfo X_j . Calcularemos o grupo de holonomia $\text{Hol}(L, p_j, \tau_j)$. Consideremos a fibração $P_1 : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ dada por $P_1(z, u_j) = z$. Consideremos a separatriz $L = \{u_j = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ e fixemos um ponto $p_0 = (z_0, 0) \in L \setminus \{z_j^0\} \simeq \mathbb{C}^*$ então o grupo fundamental $\pi_1(L \setminus \{z_j^0\}, p_0) \simeq \mathbb{Z}$ portanto ele é gerado pela classe de homotopia da curva $\gamma_j(\theta) = r_j \exp(i\theta)$, onde $\theta \in [0, 2\pi]$. Consideremos o cilindro $\mathcal{C}_j = \{(z, u_j) \in \mathbb{C}^2; |z| = r_j\}$ parametrizado pela aplicação

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (\theta, u_j) &\mapsto (r_j e^{i\theta}, u_j),\end{aligned}$$

tal que $\varphi(0, \mathbb{C}) = \varphi(2\pi, \mathbb{C}) = \tau_j$. A folheação $\tilde{\mathcal{F}}_j$ induz uma equação diferencial em \mathbb{C}^2 obtida do campo de vetores X_j (veja a equação (4.2)). Denotemos por f_{γ_j} o elemento de $\text{Hol}(L, p_j, \tau_j)$ associado a γ_j . De (4.2) teremos:

$$\frac{du_j}{dz} = \frac{\alpha_j u_j}{z - z_j}. \quad (4.3)$$


 Figura 4.3: Cálculo da holonomia associado ao caminho γ_j .

Ao fixarmos um ponto $q_j = (p_j, u_{j0}) \in \tau_j$, seja $\tilde{\gamma}_{q_j}(\theta) = (z(\theta), u_j(\theta)) \in \mathcal{C}_j$ o levantamento da curva γ_j , que passa pelo ponto q_j , tal que $\gamma_j = P_1 \circ \tilde{\gamma}_{q_j}$, então $\gamma'_j = P_1 \circ \tilde{\gamma}'_{q_j}$ logo $z'(\theta) = P_1(z'(\theta), u'_j(\theta)) = P_1(\tilde{\gamma}'_{q_j}(\theta)) = ir_j e^{i\theta}$.

Ao compararmos a linha tangente $\frac{u'_j}{z'}$ do vetor (u'_j, z') com 4.3, segue-se que:

$$\frac{u'_j}{z'} = \frac{u'_j}{ir_j e^{i\theta}} = \frac{\alpha_j u_j}{r_j e^{i\theta}},$$

da aqui $u'_j = i\alpha_j u_j$. Ao resolvermos a equação diferencial: $\frac{du_j}{u_j} = i\alpha_j dt$, obteremos que

$$\begin{aligned} \int \frac{du_j}{u_j} &= \int i\alpha_j dt \\ \log |u_j| &= i\alpha_j t + c, \quad c = \text{cte} \\ u_j &= u_{j0} e^{i\alpha_j t}. \end{aligned}$$

assim $u_j(t) = u_{j0} e^{i\alpha_j t}$, onde $u_j(0) = u_{j0}$ e $u_j(\theta) = u_{j0} e^{i\alpha_j \theta}$. Logo

$$f_{\gamma_j}(u_{j0}) = u_j(2\pi) = u_{j0} e^{i\alpha_j 2\pi} = u_{j0} \lambda_j.$$

Portanto a holonomia da curva γ_j na seção τ_j , com respeito à folheação $\tilde{\mathcal{F}}_j$, é o difeomorfismo $f_{\gamma_j} : P_1^{-1}(z_0) \rightarrow P_1^{-1}(z_0)$ tal que $u_j \mapsto \lambda_j u_j$. Isto é, o grupo de holonomia é gerado por f_{γ_j} , então $\text{Hol}(L_j, \tau_j, p_j) = \{u_j \mapsto \exp(2i\pi\alpha)u_j\}$.

A seguir, definiremos um difeomorfismo de colagem \tilde{u}_j com o fim de colar os conjuntos $A_j \times \mathbb{C}$ e $E_j \times \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, \nu$ na intersecção $(A_j \times \mathbb{C}) \cap (E_j \times \mathbb{C})$. De fato, como $A_j \cap E_j$ é simplesmente conexo e $z_j^0 \notin A_j \cap E_j$, estabelecemos o sistema de coordenadas (z, \tilde{u}_j) em $(A_j \cap E_j) \times \mathbb{C}$. Vejamos, como $z'_j = z_j^0 + \frac{r}{2}$

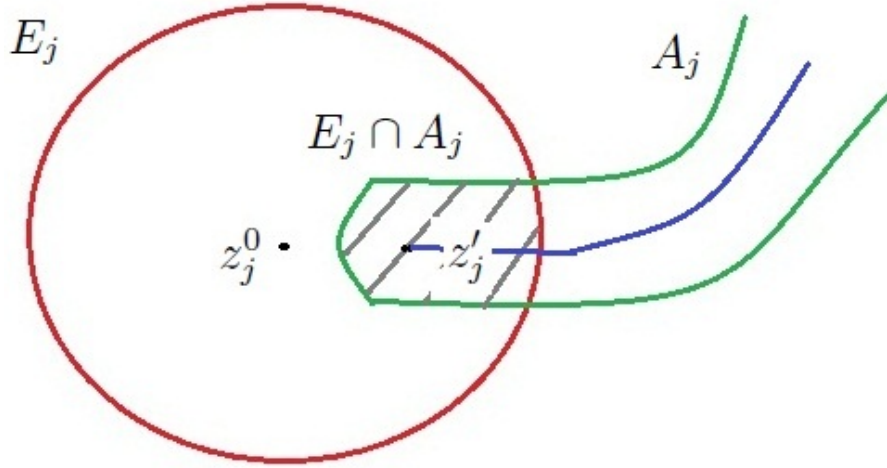


Figura 4.4: Interseção de abertos para estender as folheações locais.

então

$$\begin{aligned} \log(z - z_j^0) &= \log|z - z_j^0| - i\theta \\ i\theta &= \log|z - z_j^0| - \log(z - z_j^0) \\ &= -\log\left(\frac{z - z_j^0}{r/2}\right) \\ i\theta\alpha_j &= -\alpha_j \log\left(\frac{z - z_j^0}{r/2}\right) \end{aligned}$$

e como $u_j(\theta) = u_{j_0} \exp(i\alpha_j\theta)$ então

$$\tilde{u}_j = u_j \exp\left(-\alpha_j \log\left(\frac{z - z_j^0}{r/2}\right)\right), \quad (4.4)$$

onde $\tilde{u}_j(z'_j, u_j) = u_j$ e $\tilde{u}_j(z, 0) = 0$. Aqui \log é o ramo de logaritmo definido em $\mathbb{C} \setminus \{x + iy; x \leq 0\}$ tal que $\log(1) = 0$, essa função é holomorfa em $A_j \cap E_j$ pois é um subconjunto simplesmente conexo. Além disso, as folhas da folheação $\tilde{\mathcal{F}}_j$, restritas a $(A_j \cap E_j) \times \mathbb{C}$, são as superfícies de nível \tilde{u}_j constante. A seguir, colaremos os conjuntos $A_j \times \mathbb{C}$ e $E_j \times \mathbb{C}$ por meio de

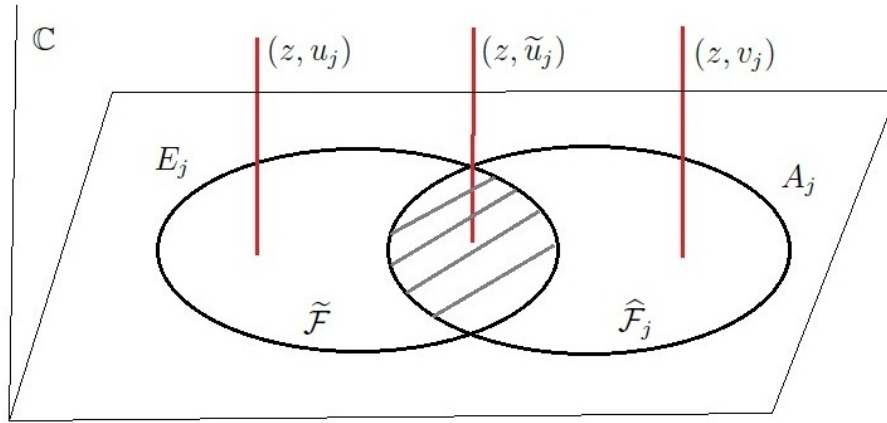


Figura 4.5: Coordenadas locais para o colagem de folhas.

um difeomorfismo de colagem da seguinte maneira: identificamos os pontos $(z, v_j) \in (A_j \cap E_j) \times \mathbb{C} \subset A_j \times \mathbb{C}$ com os pontos $(z, u_j) \in (A_j \cap E_j) \times \mathbb{C} \subset E_j \times \mathbb{C}$, por meio do difeomorfismo

$$u_j = v_j \exp \left(\alpha_j \log \left(\frac{z - z_j^0}{r/2} \right) \right). \quad (4.5)$$

De fato, da equação (4.4) segue-se que

$$\begin{aligned} u_j &= \tilde{u}_j \exp \left(\alpha_j \log \left(\frac{z - z_j^0}{r/2} \right) \right) \\ &= v_j \exp \left(\alpha_j \log \left(\frac{z - z_j^0}{r/2} \right) \right). \end{aligned}$$

A equação (4.5) acima identifica as coordenadas (z, v_j) com (z, \tilde{u}_j) , colando em conjunto as placas da folheação $\hat{\mathcal{F}}_j$ em $(A_j \cap E_j) \times \mathbb{C}$ com as placas

da folheação $\tilde{\mathcal{F}}_j$, que associa as fibras $\{z = c\} \subset A_j \times \mathbb{C}$, onde $c \in A_j \cap E_j$, com as fibras $\{z = c\} \subset E_j \times \mathbb{C}$, que resulta em uma nova superfície complexa. Por outro lado, afirmamos que a holonomia da curva $\beta_j = \sigma_j \star \gamma_j \star \sigma_j^{-1}$ na seção transversal $\tau_j'' = \{z_j''\} \times \mathbb{C} \subset A_j \times \mathbb{C}$, com respeito à folheação obtida pelo colagem em conjunto de $\hat{\mathcal{F}}_j$ com $\tilde{\mathcal{F}}_j$, é linear da forma $v_j \mapsto \lambda_j v_j$. De

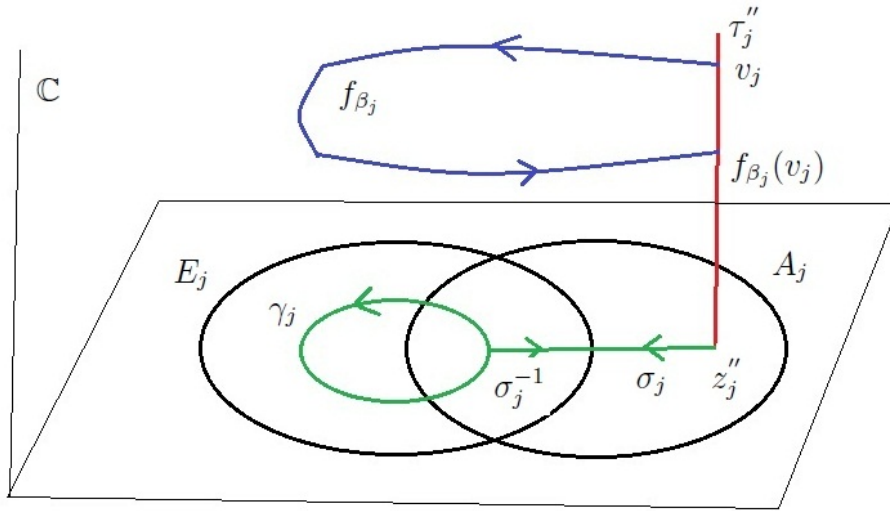


Figura 4.6: Colagem das folhas de $E_j \times \mathbb{C}$ com as folhas de $A_j \times \mathbb{C}$.

fato, como a curva $\beta_j = \sigma_j \star \gamma_j \star \sigma_j^{-1}$ então a holonomia f_{β_j} é dada por

$$\begin{aligned} f_{\beta_j}(v_j) &= \tilde{u}_j \circ f_{\gamma_j} \circ \tilde{u}_j^{-1}(v_j) \\ &= \tilde{u}_j \circ f_{\gamma_j}(z, v_j) \\ &= \tilde{u}_j(\lambda_j v_j) \\ &= \lambda_j v_j. \end{aligned}$$

Denotaremos por $\tilde{\mathcal{F}}_j$ a folheação dessa colagem.

Agora, colaremos a nova folheação $\tilde{\mathcal{F}}_j$ com $\tilde{\mathcal{F}}_0$ em $(A_j \cap E_0) \times \mathbb{C}$ via um difeomorfismo de colagem u_0 , a partir de um difeomorfismo h_j definido da seguinte maneira: seja B_j, C_j abertos em \mathbb{C} e $h_j : B_j \rightarrow C_j$, tal que

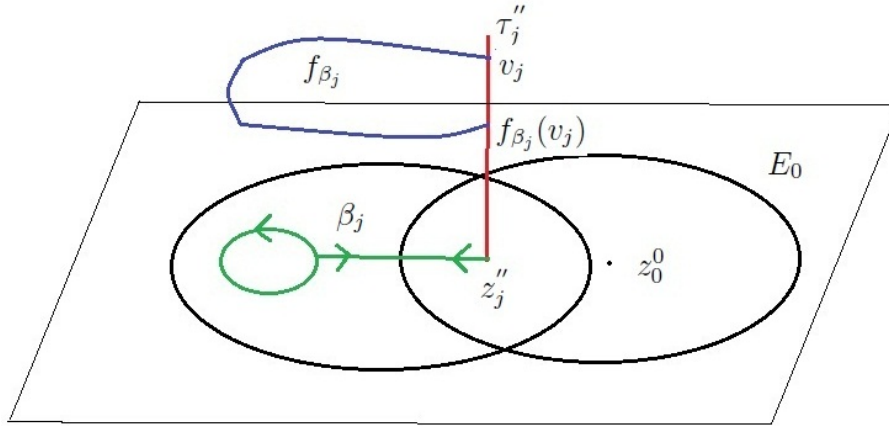


Figura 4.7: Colagem das folhas de $A_j \times \mathbb{C}$ com as folhas de $E_0 \times \mathbb{C}$.

$h_j(0) = 0 \in B_j \cap C_j$. Identificamos os pontos $(z, v_j) \in (A_j \cap E_0) \times B_j$ com $(z, u_0) \in (A_j \cap E_0) \times \mathbb{C}$ pela relação

$$u_0 = h_j(v_j) \exp \left(\alpha_0 \log \left(\frac{z}{z_j''} \right) \right) \quad (4.6)$$

Esse difeomorfismo permitirá a colagem das placas de $\tilde{\mathcal{F}}_j$ com as placas de $\tilde{\mathcal{F}}_0$, de modo que obteremos uma nova folheação em uma superfície complexa que contém $E_0 \cup A_j \cup E_j$ como uma folha dessa nova folheação. Afirmamos que a holonomia da curva β_j , na seção $\{z_j''\} \times \mathbb{C} \subset E_0 \times \mathbb{C}$ é dada por

$$u_0 \mapsto h_j(\lambda_j h_j^{-1}(u_0)). \quad (4.7)$$

De fato, como $u_0(z, h_j(v_j)) = h_j(v_j) \exp \left(\alpha_0 \log \left(\frac{z}{|z_j''|} \right) \right)$, segue-se que se

$$\tau_j \ni u_0(z_j'', h_j(v_j)) = h_j(v_j) = u_0$$

então $v_j = h_j^{-1}(u_0)$.

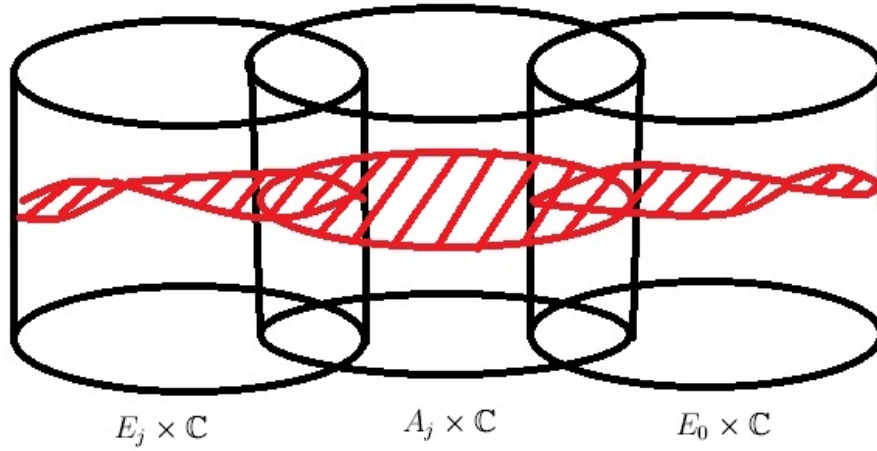


Figura 4.8: Colagem de folheações locais.

Denotaremos por $F_\beta = h_j \circ f_\beta \circ h_j^{-1}$ a holonomia da folha em $E_0 \times \mathbb{C}$, da aqui:

$$\begin{aligned}
 F_\beta(u_0) &= h_j \circ f_\beta \circ h_j^{-1}(u_0) \\
 &= h_j \circ f_\beta(v_j) \\
 &= h_j(\lambda_j v_j) \\
 &= h_j(\lambda_j h_j^{-1}(u_0)).
 \end{aligned}$$

Assim, a holonomia da curva β_j na seção $\{z_j''\} \times \mathbb{C} \subset E_0 \times \mathbb{C}$ é dada por

$$u_0 \mapsto h_j(\lambda_j h_j^{-1}(u_0))$$

Seja $\gamma_0(\theta) = \frac{r}{2}e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Consideremos μ_j o segmento reta de γ_0 entre $\frac{r}{2}$ e z_j'' (no sentido positivo), para cada $j = 1, \dots, \nu$. Denotemos por $\delta_j = \mu_j \star \beta_j \star \mu_j^{-1}$ e consideremos a seção transversal $\tau_0 = \{\frac{r}{2}\} \times \mathbb{C}$. A holonomia da curva δ_j sobre τ_0 é da forma

$$u \mapsto \tilde{h}_j(\lambda_j \tilde{h}_j^{-1}(u)) \quad (4.8)$$

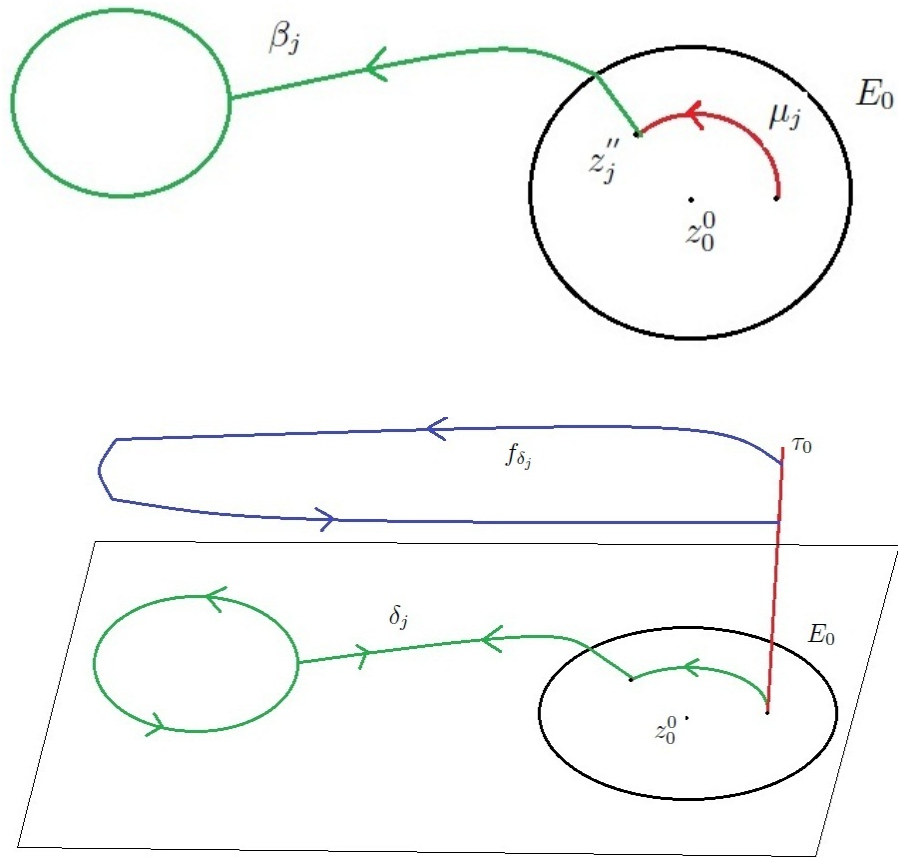


Figura 4.9: Holonomia associada ao caminho fechado δ_j .

onde $\tilde{h}_j = a_j^{-1}h_j$ e tal que $a_j = \exp\left(2i\pi\alpha_0\left(\frac{j-1}{\nu}\right)\right)$ é uma rotação. Por hipóteses, g_j é linearizável o que resulta que é conjugado com sua parte linear, isto é, escolhemos o difeomorfismo h_j tal que $\tilde{h}_j^{-1} \circ g_j \circ \tilde{h}_j(u_j) = \lambda_j u_j$. Portanto, a holonomia da curva δ_j , na seção transversal τ_0 , é $g_j(u_0) = \lambda_j u_0 + a_2^j u_0^2 + \dots$.

Finalmente, colaremos as folheações $\tilde{\mathcal{F}}_1, \dots, \tilde{\mathcal{F}}_\nu$ obtidas nesse processo. Assim, obteremos uma superfície complexa \tilde{M} . Denotaremos por $\tilde{\mathcal{F}}$ a folheação em \tilde{M} obtida dessa maneira. Da construção acima, $\tilde{\mathcal{F}}$ satisfaz as seguintes propriedades:

CAPÍTULO 4. FOLHEAÇÕES COM GRUPO DE HOLONOMIA PRESCRITO 72

1. O aberto $U = (\cup_{i=1}^{\nu} A_i) \cup (\cup_{j=0}^{\nu} E_j)$ é uma folha de $\tilde{\mathcal{F}}$.
2. A holonomia de U em τ_0 é gerada por g_1, \dots, g_{ν} . De fato, pois g_0 , a holonomia de U em τ_0 , é da forma $g_0 = g_{\nu}^{-1} \circ \dots \circ g_1^{-1}$ que é linearizável, com parte linear $\lambda_0 = \lambda_{\nu}^{-1} \dots \lambda_1^{-1}$.
3. A holonomia da curva $\delta_1 \star \dots \star \delta_{\nu} \star \gamma_0$ é a identidade. Isto segue do fato que $g_0 = g_{\nu}^{-1} \circ \dots \circ g_1^{-1}$. Pelo item acima, a holonomia em τ_0 é g_0 , portanto a holonomia dessa curva juxtapuesta $\delta_1 \star \dots \star \delta_{\nu} \star \gamma_0$ será a composição $H = g_1 \circ \dots \circ g_{\nu} \circ g_0$, mas como $g_0 = g_{\nu}^{-1} \circ \dots \circ g_1^{-1}$ então $H = g_1 \circ \dots \circ g_{\nu} \circ g_{\nu}^{-1} \circ \dots \circ g_1^{-1} = Id$.
4. A superfície \tilde{M} possui uma outra folheação $\tilde{\mathcal{G}}$ transversal a U , sem singularidades. Essa folheação é obtida após colagem das folheações verticais, z constante, de $A_j \times \mathbb{C}$, $E_j \times \mathbb{C}$ e $E_0 \times \mathbb{C}$. Qualquer folha de $\tilde{\mathcal{G}}$ corta U em exatamente um ponto, portanto definiremos uma projeção $\tilde{p}: \tilde{M} \rightarrow U$ tal que a fibra $\tilde{p}^{-1}(z)$ é uma folha de $\tilde{\mathcal{G}}$ que passa por $(z, 0)$.

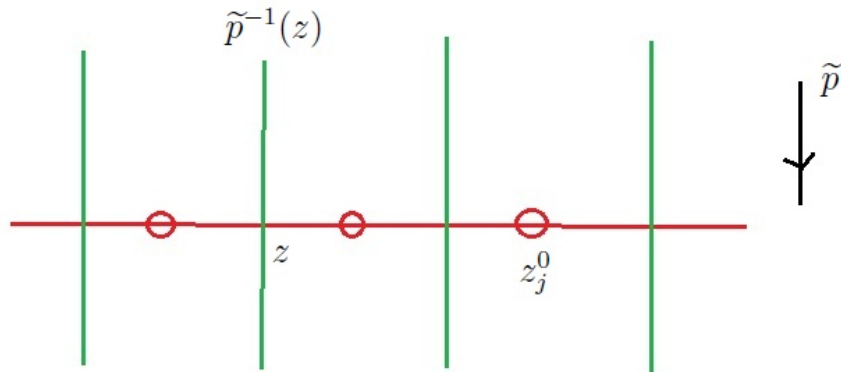


Figura 4.10: Folhas da folheação \mathcal{G} transversal ao aberto U .

5. Sejam $\tilde{\Gamma}_0, \dots, \tilde{\Gamma}_\nu$ as separatrizes das singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}$ as quais são transversais a U , onde cada $\tilde{\Gamma}_j = \{z = z_j^0\}$ em $E_j \times \mathbb{C}$. Segue-se que $\tilde{\Gamma}_0, \dots, \tilde{\Gamma}_\nu$ são folhas de $\tilde{\mathcal{G}}$. Além disso $\tilde{\mathcal{G}}$ é transversal a $\tilde{\mathcal{F}}$ em $\tilde{M} \setminus \cup_{j=0}^\nu \tilde{\Gamma}_j$.

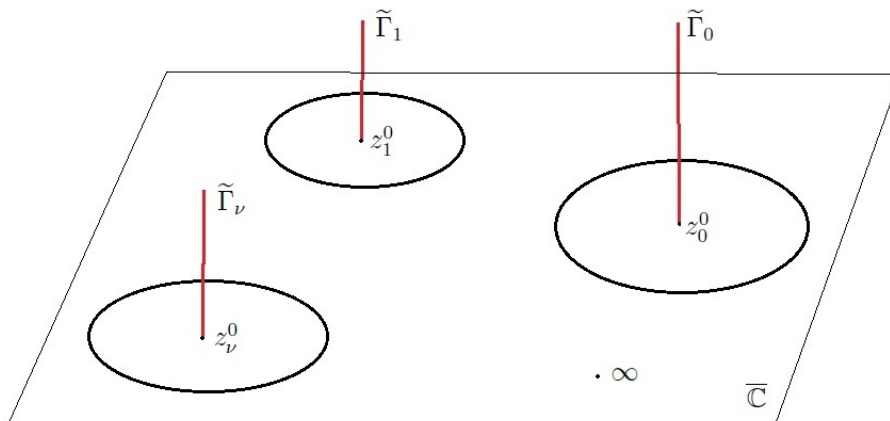


Figura 4.11: Separatrizes Γ_j transversais à folheação \mathcal{F} .

Para continuarmos com a construção da superfície complexa M , consideremos $A = T \cap U$, onde T é a vizinhança tubular de $\gamma = \partial U$ definida anteriormente, portanto segue-se que A é um anel. Além disso, se δ é uma curva fechada em A que gera o grupo de homotopia de A , então a holonomia de δ com respeito a $\tilde{\mathcal{F}}$ (em alguma seção transversal) é trivial. De fato, como $\delta \simeq \delta_1 \star \dots \star \delta_\nu \star \gamma_0$ em $U \setminus \cup_{j=0}^\nu \{z_j^0\}$ e como $f_{\delta_1 \star \dots \star \delta_\nu \star \gamma_0} = Id$ então pelo Teorema 3.1, teremos que $f_\delta = Id$. Seja $\tilde{A} = \tilde{p}^{-1}(A)$, então do Teorema 3.4 de estabilidade de Reeb [12], a folheação restrita $\tilde{\mathcal{F}}|_{\tilde{A}}$ é difeomorfa a uma folheação produto, isto é, existe um difeomorfismo $\varphi : W \rightarrow A \times E$, de alguma vizinhança W de A em \tilde{A} sobre $A \times E$, onde $E \subset \mathbb{C}$ é um aberto, tal que φ leva folhas de $\tilde{\mathcal{F}}|_W$ sobre folhas da folheação trivial $A \times \{c\}$, $c \in E$. Essa aplicação φ é tal que $\varphi(\tilde{p}^{-1}(z) \cap W) = \{z\} \times E$. A fim de completar

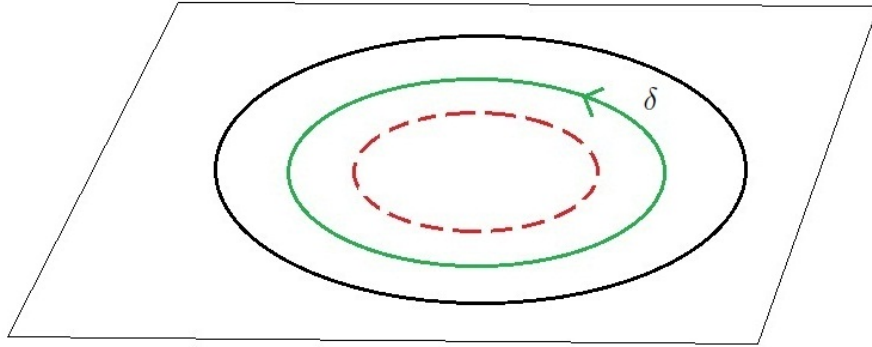


Figura 4.12: Caminho fechado δ contido no anel $A = T \cap U$.

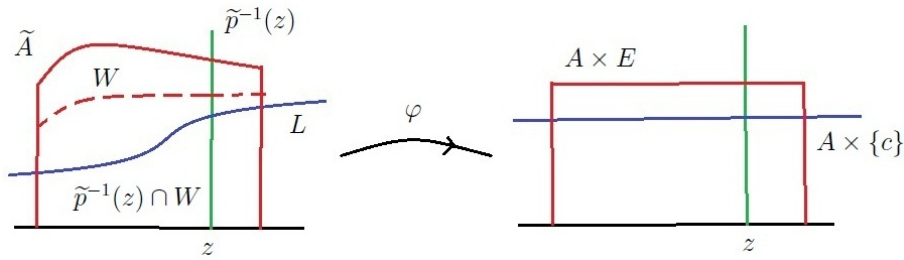


Figura 4.13: Difeomorfismo φ levando folhas de $\tilde{\mathcal{F}}|_W$ sobre folhas da folheação trivial $A \times \{c\}$, $c \in E$.

nossa construção de M e obtermos nossa folheação final \mathcal{F} , basta colarmos em conjunto as folheações $\tilde{\mathcal{F}}$ em \tilde{M} e $\hat{\mathcal{F}}$ em $V \times E$ por meio do difeomorfismo φ , isto é, identificamos um ponto $q \in W$ com $\varphi(q) \in V \times E$, e assim obteremos uma superfície M_1 o qual contém o espaço projetivo $U \cup V = \bar{\mathcal{C}} = D$. Como o difeomorfismo φ leva folhas de $\tilde{\mathcal{F}}|_W$ sobre as folhas da folheação horizontal em $A \times E$, segue-se que a folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ estende-se a uma folheação \mathcal{F}_1 em M_1 , onde D é invariante por \mathcal{F}_1 . Além disso, a folheação $\tilde{\mathcal{G}}$ pode também ser estendida a M , pois $\varphi(\tilde{p}^{-1}(z) \cap W) = \{z\} \times D$. Chamaremos essa extensão como \mathcal{G}_1 . As folhas de \mathcal{G}_1 são transversais a D e cada folha

intercepta D em exatamente um ponto, assim, \tilde{p} pode ser estendido a uma projeção $p : M_1 \rightarrow D$ tal que a fibra $p^{-1}(z)$ é uma folha de $\tilde{\mathcal{G}}_1$ para qualquer $z \in D$. Algumas das folhas de \mathcal{G}_1 são difeomorfas a \mathbb{C} , enquanto que outras são difeomorfas a discos abertos. No entanto, tomaremos uma pequena vizinhança tubular M de D em M_1 (veja [19]), e assim o fibrado $p|_M : M \rightarrow D$ têm fibras difeomorfas a discos. Para concluirmos a construção, tomaremos $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1|_M$ como nossa folheação final, e $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1|_M$ como a folheação transversal a \mathcal{F} . Como último passo, provaremos que a classe de Chern do fibrado

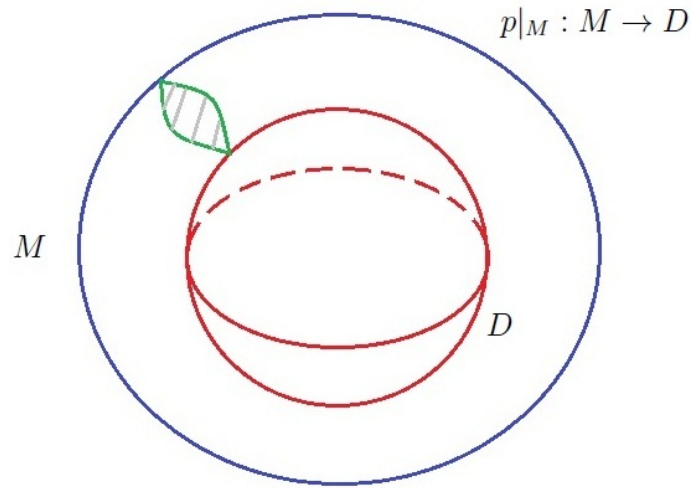


Figura 4.14: Vizinhança tubular M de D .

normal de D em M é -1 (veja [21]). Para esse fim, determinamos em cada ponto $z_j^0 \in D \cap \text{Sing}(\mathcal{F})$, o índice de Camacho-Sad a partir da fórmula 2.8 com respeito à superfície invariante D . Desde que $X_j = (z - z_j^0) \frac{\partial}{\partial z} + \alpha_j u_j \frac{\partial}{\partial u_j}$, então segue-se que

$$i_{(z_j, 0)}(\mathcal{F}, D) = \text{Res}_{z=z_j^0} \left(\frac{\alpha_j u_j}{z - z_j^0} \right) (z, 0) = \alpha_j.$$

E como

$$\text{Classe de Chern de } TD^\perp = D \cdot D = \sum_{j=0}^{\nu} i_{(z_j, 0)}(\mathcal{F}, D)$$

então

$$\text{Classe de Chern de } TD^\perp = \sum_{j=0}^{\nu} \alpha_j = -1.$$

A seguir, enunciamos um teorema de linearização devido a Poincaré (o leitor pode consultar [7]).

Teorema 4.2 (Linearização de Poincaré). *Sejam X campo de vetores holomorfo definido num aberto de $0 \in \mathbb{C}^2$, com única singularidade na origem, e seja $X_0 = \lambda_1 u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \lambda_2 u_2 \frac{\partial}{\partial u_2}$ a parte linear de X . Se*

1. $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}^-$ e $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$.
2. Não existe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, tal que $\lambda_1 = n\lambda_2$ ou $\lambda_2 = n\lambda_1$.

então podemos encontrar um único difeomorfismo holomorfo local ξ de \mathbb{C}^2 de modo que $\xi'(0) = Id$ e $\xi^*X = X_0$.

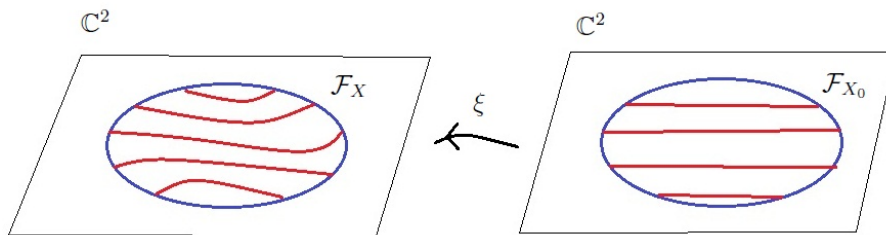


Figura 4.15: Linearização de folhas.

Para concluirmos com nossa demonstração do Teorema 4.1, precisamos do seguinte resultado e suas consequências devido a Grauert [25].

Teorema 4.3 (Grauert). *Seja M uma superfície complexa e $S \subset M$ uma superfície de riemann compacta. Suponha que a classe de Chern do fibrado normal de S seja negativa. Seja $(TS)^\perp$ o fibrado normal de S em M e S_0 a seção nula de $(TS)^\perp$. Então existem vizinhanças V de S em M e W de S_0 em $(TS)^\perp$ que são difeomorfas por um difeomorfismo holomorfo $\varphi : V \rightarrow W$ tal que $\varphi(S) = S_0$.*

Segue-se que se $S \subset M$ é uma superfície de Riemann de gênero 0 com classe de Chern -1 então, já que o fibrado $(TS)^\perp$ tem classe de Chern -1 , então $(TS)^\perp$ é equivalente ao fibrado $\tilde{\mathbb{C}}^2$ sobre \mathbb{P}^1 , obtida pela explosão em $0 \in \mathbb{C}^2$. A equivalência é um difeomorfismo holomorfo $\varphi : (TS)^\perp \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}^2$ que leva fibras em fibras, linearmente.

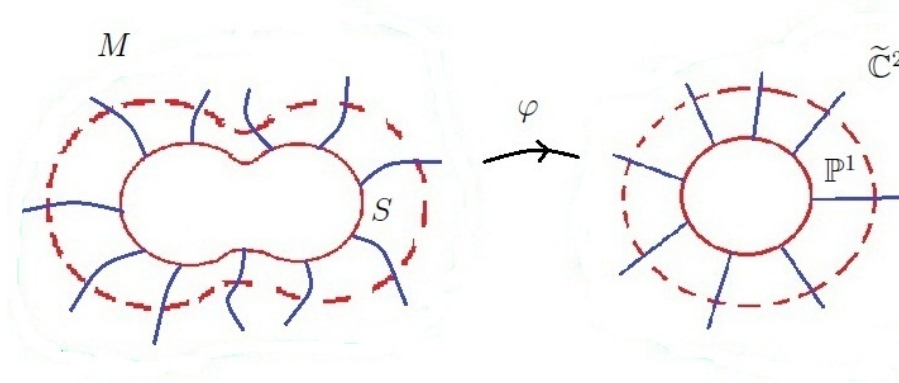
Como consequências do Teorema de Grauert, temos:

Corolário 4.1. *Seja $S \subset M$ mergulhado em M com classe de Chern -1 . Consideremos o fibrado $\tilde{\mathbb{C}}^2$ sobre \mathbb{P}^1 de posto 1, obtido pela explosão em $0 \in \mathbb{C}^2$. Então existem vizinhanças V de S em M e W de \mathbb{P}^1 em $\tilde{\mathbb{C}}^2$ que são difeomorfas, por um difeomorfismo holomorfo $\varphi : V \rightarrow W$ tal que $\varphi(S) = \mathbb{P}^1$.*

Para nosso objetivo, precisamos de um pequeno refinamento do corolário 4.1. Consideremos $S \subset M$ como no corolário 4.1 e seja \mathcal{G} uma folheação holomorfa não singular de dimensão complexa 1, definida numa vizinhança V de S e é transversal a S .

Corolário 4.2. *Seja $S \subset M$ e sejam $\mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}}$ e \mathbb{P}^1 como acima. Então existe um difeomorfismo $\varphi : V \rightarrow W$, como no corolário acima, tal que a imagem de qualquer folha de $\mathcal{G}|_V$ via φ está contida na fibra de $\tilde{\mathbb{C}}^2$ sobre \mathbb{P}^1 .*

Demonstração. Pelo Corolário 4.1 existe um biholomorfismo $\tilde{\varphi}$ entre vizinhanças \tilde{V} de S em M e \tilde{W} de \mathbb{P}^1 em $\tilde{\mathbb{C}}^2$, tal que $\tilde{\varphi}(S) = \mathbb{P}^1$. Consideremos



em \widetilde{W} a folheação $\widetilde{\mathcal{G}} = \widetilde{\varphi}_*(\mathcal{G})$ induzida por \mathcal{G} e seja $\pi : \widetilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ a explosão centrada em $0 \in \mathbb{C}^2$, então $\pi(\widetilde{\mathcal{G}})$ é uma folheação definida num entorno de $0 \in \mathbb{C}^2$. Logo pela Proposição 1.2, existe um campo de vetores X , que define a folheação $\pi(\widetilde{\mathcal{G}})$, num entorno $\pi(\widetilde{W}) \subset \mathbb{C}^2$ da origem. Como a folheação $\widetilde{\mathcal{G}}$ é transversal a \mathbb{P}^1 , consideramos a parte linear do campo X em 0 como

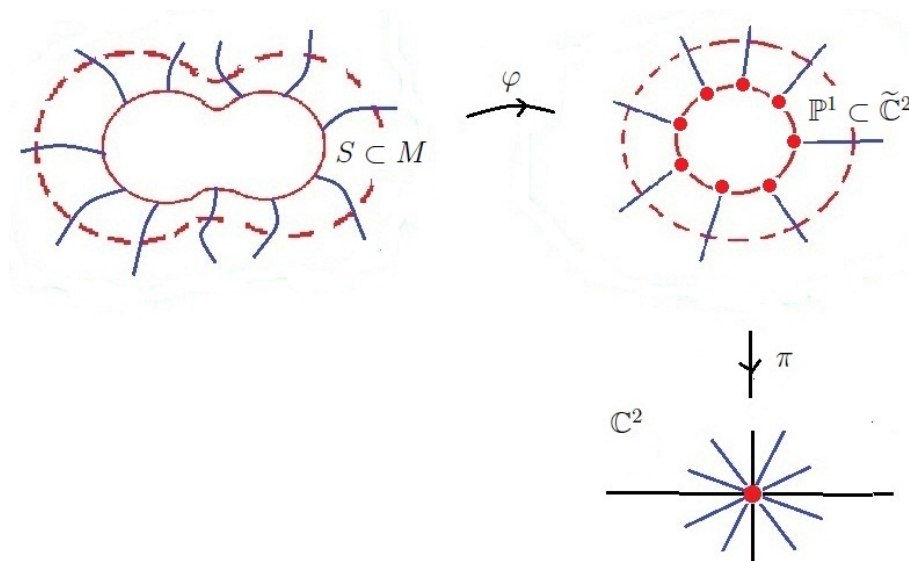
$$X_0 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Logo, pelo Teorema 4.2, existe um difeomorfismo ξ definido entre vizinhanças da origem U_1 e U_2 tal que $\xi_*(X) = X_0$. As curvas integrais de X_0 são linhas que passam pela origem. Consideremos a explosão $\widetilde{\xi} : \widetilde{U}_1 \rightarrow \widetilde{U}_2$ de ξ , onde $\widetilde{U}_1 = \pi^{-1}(U_1)$ e $\widetilde{U}_2 = \pi^{-1}(U_2)$. Portanto, a aplicação $\varphi = \widetilde{\xi} \circ \widetilde{\varphi}$ satisfaz as propriedades requeridas. \square

Finalmente, segue-se do Teorema 4.3 que existe uma equivalência entre o fibrado $p : M \rightarrow D$ e o fibrado obtido após de uma explosão $\pi : \widetilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$, isto é, existe um difeomorfismo φ entre M e $\widetilde{\mathbb{C}}^2$ que leva fibras em fibras e que, pelo Corolário 4.1, podemos considerar vizinhanças V de D em M e \widetilde{V} de \mathbb{P}^1 em $\widetilde{\mathbb{C}}^2$, difeomorfas via φ de modo que $\varphi(D) = \mathbb{P}^1$. A folheação $\mathcal{F}|_V$ é equivalente por esse biholomorfismo à folheação $\widetilde{\mathcal{F}}$ definida na vizinhança \widetilde{V} de \mathbb{P}^1 em $\widetilde{\mathbb{C}}^2$. Logo, pelo Corolário 4.2, segue-se que as imagens das folhas

CAPÍTULO 4. FOLHEAÇÕES COM GRUPO DE HOLONOMIA PRESCRITO 79

transversais a D pela vizinhança V estão contidas nas fibras do fibrado $\tilde{\mathbb{C}}^2$ sobre \mathbb{P}^1 , portanto as separatrizes de $\tilde{\mathcal{F}}$ estarão contidas nas fibras desse fibrado. A explosão π induz uma folheação \mathcal{F}_X via blow-down em \mathbb{C}^2 . Pela Proposição 1.2, para esta folheação, existe um campo de vetores X definido numa vizinhança da origem, tal que o transformado estrito da folheação \mathcal{F}_X coincide com a folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ que provém por meio de φ . Além disso, como a explosão π é não dicrítica, a folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ possui $\nu + 1$ singularidades, e como elas são simples então a folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ possui exatamente $\nu + 2$ curvas integrais, uma de elas é o divisor $\pi^{-1}(0)$, e por cada ponto singular passa uma separtriz $\tilde{\Gamma}_j \forall j = 1, \dots, \nu$, lisa e transversal a $\pi^{-1}(0)$. Logo, via blow-down, pelo Lema 2.1 tem-se que pela origem passam $\nu + 1$ separatrizes Γ_j . As separatrizes da folheação \mathcal{F}_X estarão contidas em $\nu + 1$ linhas complexas que passam por $0 \in \mathbb{C}^2$. Isso conclui a prova do teorema 4.1.



4.3 Generalização do teorema para varias explosões

Na construção feita na seção acima, poderíamos tomar $\alpha_0, \dots, \alpha_\nu$ tal que $\sum_{i=0}^\nu \alpha_i = n$, $n \in \mathbb{Z}$. Isto implicaria, pela Proposição 2.8 que a classe de Chern do fibrado normal a \mathbb{P}^1 seria n . Nessa seção estudaremos o Teorema 4.1 para o caso de varias explosões.

Teorema 4.4. *Seja $(U_\nu, \pi^{(\nu)}, D'_\nu)$ a sequência de ν explosões centrada em $0 \in \mathbb{C}^2$, onde $\pi^{(\nu)}(U_\nu) = U$. Sejam D_1, \dots, D_ν os divisores excepcionais contidos em D'_ν e S um subconjunto finito de D'_ν que contém propriamente todas as esquinas de D'_ν . Para cada $j = 1, \dots, \nu$ seja H_j o grupo de germes em $0 \in \mathbb{C}$ de difeomorfismos holomorfos que deixam fixo 0 e satisfazem as propriedades:*

1. *Para cada $p \in S \cap D_j$ existe um germe $g_p \in H_j$ que é linearizável e tal que o conjunto $A_j = \{g_p; p \in S \cap D_j\}$ gera H_j .*
2. *Se $S \cap D_j = \{p_1, \dots, p_r\}$, então $g_{p_1} \circ \dots \circ g_{p_r} = Id$. Além disso, para cada p_j , existe $\alpha_j \in \mathbb{C}$ tal que $g'_{p_j}(0) = \exp(2i\pi\alpha_j)$ e $\sum_{j=1}^r \alpha_j = c(D_j)$.*
3. *Se $D_l \cap D_j = p$ é uma esquina e $f_p \in H_l$, $g_p \in H_j$, onde $f'_p(0) = \exp(2i\pi\alpha)$, $g'_p(0) = \exp(2i\pi\beta)$ (α e β como no item acima), então $\alpha \cdot \beta = 1$.*

Então existe um campo de vetores holomorfo X em U , tal que se \mathcal{F}_ν é uma folheação singular de U_ν associado a X então,

- (a) *D'_ν é invariante por \mathcal{F}_ν .*
- (b) *O conjunto de singularidades de \mathcal{F}_ν é S .*

(c) O grupo de holonomia de $D_j \setminus S$ com respeito a \mathcal{F}_ν é H_j .

(d) A multiplicidade de X em $0 \in \mathbb{C}^2$ é $\nu = \#S - \#(\text{esquinas}) - 1$.

Para a prova de esse teorema, consideramos a superfície complexa U_ν obtida logo de ν explosões. Seja $D'_\nu = (\pi^{(\nu)})^{-1}(0)$ a união dos divisores, e $\pi^{(\nu)} : U_\nu \setminus D'_\nu \rightarrow U \setminus \{0\}$ é um difeomorfismo. Como $D'_\nu = \cup_{i=1}^{\nu'} D_\nu$, onde D_1, \dots, D_ν são divisores, então $D_i \cap D_j$ é vazio ou consiste de exatamente um ponto, chamado de ponto esquina de D'_ν . Além disso, se D_{i_1}, \dots, D_{i_l} é uma cadeia de divisores tal que $D_{i_r} \cap D_{i_{r+1}} \neq \emptyset$, $r = 1, \dots, l-1$, então $D_{i_r} \cap D_{i_l} = \emptyset$.

Consideremos em cada divisor D_j o conjunto $S_j = \{p_0^j, \dots, p_{r_j}^j\}$ que consiste de todas as interseções de D_j com os outros divisores D_i . Também consideramos para cada j um grupo de germes de difeomorfismos finitamente gerado $H_j = \{g_1^j, \dots, g_{r_j}^j\}$ tal que $g_1^j, \dots, g_{r_j}^j$ e $g_0^j = (g_1^j \circ \dots \circ g_{r_j}^j)^{-1}$ sejam linearizáveis, não necessariamente no mesmo sistema de coordenadas. Então pela seção anterior, obteremos uma superfície complexa M_j e uma folheação \mathcal{F}_j em M_j com as seguintes propriedades:

1. $D_j \subset M_j$ e a classe de Chern de TD_j^\perp em M_j é igual à classe de Chern do fibrado TD_j^\perp em U_ν .
2. O conjunto de singularidades de \mathcal{F}_j é S_j e cada uma de essas singularidades pode ser definida numa vizinhança de \mathcal{F}_j como em (4.2).

Suponhamos que $D_i \cap D_j = \{p\} \neq \emptyset$ e que \mathcal{F}_i é definida, em uma vizinhança $W_i \subset M_i$ de p , como

$$\frac{dx}{dT} = x, \quad \frac{dy}{dT} = \alpha y, \quad (4.9)$$

onde (x, y) é um sistema de coordenadas tal que $p = (0, 0)$ e $P_i \cap W_i = \{y = 0\}$. Analogamente, suponha que \mathcal{F}_j pode ser escrita em uma vizinhança

$W_j \subset M_j$ de p como

$$\frac{du}{dT} = u, \quad \frac{dv}{dT} = \beta v, \quad (4.10)$$

onde $W_j \cap D_j = \{v = 0\}$. Se $g_s^i \in H_i = \{g_1^i, \dots, g_{r_i}^i\}$ e $g_{s'}^j \in H_j = \{g_1^j, \dots, g_{r_j}^j\}$ são as holonomias de \mathcal{F}_i e \mathcal{F}_j com respeito a $p \in D_i$ e $p \in D_j$ respectivamente, então como elas são linearizáveis, segue-se que

$$(g_s^i)'(0) = \exp(2i\pi\alpha) \quad \text{e} \quad (g_{s'}^j)'(0) = \exp(2i\pi\beta).$$

Agora suponhamos que a seguinte equação de compatibilidade $\alpha \cdot \beta = 1$ é satisfeita. Afirmamos que as folheações geradas pelas equações (4.9) e (4.10) podem ser coladas em conjunto pelo difeomorfismo $\psi(x, y) = (y, x)$. De fato, da equação (4.9) segue-se que $y = c_1 x^\alpha$ e da equação (4.10) temos que $v = c_2 u^\beta$. Logo da equação de compatibilidade $\alpha \cdot \beta = 1$ obteremos que $u = c_3 v^\beta$, isto é, $(v, u) \in L(x, y)$. Logo $\psi(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (y, x)$. Assim, após de colagem de todas as folhas L_j da superfície complexa M_j e L_i da superfície M_i , estaremos colando as superfícies M_j e M_i , para assim obtermos uma nova superfície $M_i \cup M_j = M_{ij}$; esta superfície contém $D_i \cup D_j$ e uma folheação \mathcal{F}_{ij} em M_{ij} de modo que $D_i \cup D_j$ é invariante por \mathcal{F}_{ij} , e os grupos de holonomia de $D_i \setminus S_i$ e $D_j \setminus S_j$ são H_i e H_j .

Se a equação de compatibilidade é satisfeita em todos os pontos esquina de D'_ν , então colaremos em conjunto todas as superfícies complexas M_j e folheações \mathcal{F}_j com o fim de obtermos uma superfície $M_\nu \supset D'_\nu$ de tal forma que o grupo de holonomia de cada $D_j \setminus S_j$ é exatamente H_j e, pelo Teorema 4.3, a classe de Chern do fibrado normal TD_j^\perp em M_ν e em U_ν são as mesmas.

Notaremos que a classe de Chern do último divisor obtido pelo processo de explosão é -1 . Logo pelo Teorema de Grauert, a superfície M_ν pode ser projetada via blow-down à superfície $M_{\nu-1} \supset D_1 \cup \dots \cup D_{\nu-1}$. A classe de Chern de cada TD_j^\perp em $M_{\nu-1}$ coincide com a classe de Chern de TD_j^\perp em $U_{\nu-1}$. Para concluir com a demonstração do teorema, enunciamos um corolário da Proposição 1.2:

Corolário 4.3. *Seja $(U_\nu, \pi^{(\nu)}, D'_\nu)$ uma sequência de ν explosões centrada em $0 \in \mathbb{C}^2$, onde $\pi^{(\nu)}(U_\nu) = U$ é uma vizinhança de 0 e $\pi^{(\nu)}(D'_\nu) = \{0\}$. Suponha que $\tilde{\mathcal{F}}$ é uma folheação holomorfa em U_ν , cujas singularidades estão em D'_ν . Então existe um campo de vetores X em U tal que $\pi^{(\nu)*}(\mathcal{F}_X) = \tilde{\mathcal{F}}$.*

Demonstração. Como $\pi^{(\nu)} : U_\nu \setminus D'_\nu \rightarrow U \setminus \{0\}$ é um difeomorfismo, então \mathcal{F}_X é a folheação via blow down de $\tilde{\mathcal{F}}$, definida em $U \setminus \{0\}$. Segue-se, da Proposição 1.2 para \mathcal{F} , o resultado. \square

Logo, pelo Corolário 4.3, temos que a folheação \mathcal{F}_ν pode ser projetada via blow down à folheação $\mathcal{F}_{\nu-1}$ em $M_{\nu-1}$. Continuando esse processo indutivamente, obteremos finalmente uma folheação \mathcal{F}_0 numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$, e pela Proposição 1.2, esta folheação é definida por um campo de vetores X em $U \setminus \{0\}$.

Para concluir a prova do Teorema 4.4, o item (3), segue do Teorema 1 de [5].

Referências Bibliográficas

- [1] A. LINS NETO; B. SCARDUA. *Folheações Algébricas Complexas*. IMPA, 1997.
- [2] A. LINS NETO. *Construction of singular holomorphic vector fields and foliations in dimension two*. J. Differential Geom. 26 (1987), no. 1, 1–31.
- [3] A. SEIDENBERG. *Reduction of singularities of the differential equation $Ady=Bdx$* . Amer. J. Math. 90 1968 248–269.
- [4] B. SCÁRDUA; C. MORALES. *Geometry, Dynamics and Topology of Foliated Manifolds*. Publicações Matemáticas do IMPA. 24o Colóquio Brasileiro de Matemática. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2003.
- [5] C. CAMACHO; A. LINS NETO; P. SAD. *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields*. J. Differential Geometry 20 (1984) 143-174.
- [6] C. CAMACHO; A. LINS NETO. *Teoria geométrica das folheações*. Projeto Euclides, 9. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.

- [7] C. CAMACHO; P. SAD. *Pontos singulares de equações diferenciais analíticas*. 16º Colóquio Brasileiro de Matemática. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1987.
- [8] C. CAMACHO; P. SAD. *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields*. Ann. of Math. (2) 115 (1982), no. 3, 579–595.
- [9] F. CANO; D. CERVEAU. *Desingularization of nondicritical holomorphic foliations and existence of separatrices*. Acta Math. 169 (1992), no. 1-2, 1–103.
- [10] F. CANO; D. CERVEAU; J. DÉSERTI. *Théorie élémentaire des feuilletages holomorphes singuliers*. 207 pages. Collection Échelle, Berlin, 2013.
- [11] F. LORAY. *Pseudo-Groupe d'une singularité de feuilletage holomorphe en dimension deux*. (2005).
- [12] G. REEB. *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*. Actualités Sci. Indust., No. 1183, Hermann, Paris, 1952.
- [13] H. HAUSTER; J. LIPMAN; F. OORT; A. QUIRÓS. *Resolution of Singularities*. A research textbook in tribute to Oscar Zariski. Progress in Mathematics Vol 181, p. 109-128.
- [14] J. CANO. *Construction of invariant curves for singular holomorphic vector fields*. Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), no. 9, 2649–2650.
- [15] J. FERNANDEZ. *Clasificación analítica de foliaciones holomorfas singulares*. IMCA.

- [16] J. MATTEI; R. MOUSSU. *Holonomie et intégrales premières*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 13 (1980), no. 4, 469–523.
- [17] K. FRITZSCHE; H. GRAUERT. *From holomorphic functions to complex manifolds*. Graduate Texts in Mathematics, 213. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [18] K. KODAIRA. *Complex Manifolds and Deformation of Complex Structures*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [19] M. HIRSCH. *Differential topology*. Corrected reprint of the 1976 original. Graduate Texts in Mathematics, 33. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [20] M. SOARES; R. MOL. *Índices de Campos Holomorfos e Aplicações*. 23º Colóquio Brasileiro de Matemática, Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) (2001).
- [21] P. GRIFFITHS; J. HARRIS. *Principles of algebraic geometry*. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience, New York, 1978.
- [22] R. GUNNING; H. ROSSI. *Analytic functions of several complex variables*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2009.
- [23] R. MIRANDA. *Algebraic curves and Riemann surfaces*. Graduate Studies in Mathematics, 5. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
- [24] R. PÉREZ; J. YOCCOZ. *Germes de feuilletages holomorphes à holonomie prescrite*. Complex analytic methods in dynamical systems (Rio de Janeiro, 1992). Astérisque No. 222 (1994), 7, 345–371.

- [25] V. ARNOL'D. *Chapitre supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*. "Mir", Moscow, 1984.