

Curvas com Modelos Canônicos em Scrolls

Danielle Franco Nicolau Lara

Belo Horizonte 2014

Universidade Federal de Minas Gerais

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

Curvas com Modelos Canônicos em Scrolls

por

Danielle Franco Nicolau Lara

Orientador: Prof. Renato Vidal da Silva Martins

Belo Horizonte 2014

Curvas com Modelos Canônicos em Scrolls

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida por **Danielle Franco Nicolau Lara**.

Belo Horizonte, Agosto de 2014.

Prof. **Renato Vidal da Silva Martins**.

Orientador

Banca examinadora:

Prof. Renato Vidal da Silva Martins

Prof. Daniel Levcovitz

Prof. Simone Marchesi

Prof. Ethan Guy Cotterill

Prof. André Luís Contiero

Prof. Andre Gimenez Bueno

Prof. Arturo Fernandez Perez

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Exatas, **ICEX**, como requisito parcial para obtenção do título de **DOUTOR EM MATEMÁTICA**.

À minha família.

Agradecimentos

A Deus. Fonte de minha inspiração.

A minha família, meus pais Álvaro e Rosemeire obrigada pelo exemplo e incentivo. Vinícius, meu marido, companheiro fiel em todo percurso. Sem seu apoio não teria conseguido. Esta conquista também é sua.

As minhas colegas de estudo, Adriana, Jeanne e Lia.

O professor Renato Vidal da Silva Martins. Obrigada pelo apoio, incentivo e paciência. Em especial por ter sido meu orientar por 6 anos, desde o mestrado. Agradeço todos conselhos e conversas ao longo desses anos.

Os professores Israel Vainsencher e Simone Marchesi, que me acompanharam em todo o doutoramento, e cujas observações e ajuda contribuíram para o desenvolvimento desta pesquisa.

Os professores da banca, que aceitaram com amor o convite. Obrigada pelas observações.

A todos muito obrigada!

Resumo

Seja C uma curva integral e projetiva cujo modelo canônico C' está contido em um scroll racional normal S de dimensão n . Estudamos, principalmente, propriedades de C , tais como gonalidade e o tipo de singularidade, no caso em que $n = 2$ e C é não Gorenstein, e no caso em que $n = 3$, o scroll S é suave, e C' é interseção completa contida em S . Provamos também que uma curva racional monomial com um único ponto singular está contida em um scroll bidimensional se e somente se sua gonalidade é no máximo 3, e está contida em um scroll de dimensão 3 se e somente se sua gonalidade é no máximo 4.

Palavras-chave: modelo canônico, scroll, curva não Gorenstein, curvas monomiais.

Abstract

Let C be an integral and projective curve whose canonical model C' lies on a rational normal scroll S of dimension n . We mainly study some properties on C , such as gonality and the kind of singularities, in the case where $n = 2$ and C is non-Gorenstein, and in the case where $n = 3$, the scroll S is smooth, and C' is a set theoretic complete intersection inside S . We also prove that a rational monomial curve with just one singular point lies on a surface scroll iff its gonality is at most 3, and that it lies on a threefold scroll iff its gonality is at most 4.

Keywords: canonical model, scroll, non-Gorenstein curve, monomials curves.

Sumário

Introdução	4
1 Preliminares	6
1.1 Modelo Canônico	6
1.2 Semigrupo de Valores	11
2 Modelos Canônicos em Scrolls Bidimensionais	13
2.1 Geometria do Scroll	13
2.2 Modelo Canônico no Scroll	15
2.2.1 Curvas Racionais no Scroll	17
3 Modelos Canônicos em Scrolls Tridimensionais	28
3.1 Descrição do S_{mnr}	28
3.2 Modelo canônico em S_{mnr}	29
Referências Bibliográficas	44

Introdução

Este trabalho tem como objetivo estudar curvas com modelos canônicos em scrolls racionais normais. Aqui vale ressaltar o que entendemos por modelo canônico. Seguimos o conceito dado por Rosenlicht em seu artigo *Equivalence Relations on Algebraic Curves* de 1952 [R]. Seja C curva irredutível, reduzida, projetiva sobre um corpo algebricamente fechado, de gênero aritmético g . Seu sistema linear canônico induz em seu modelo não singular \overline{C} um morfismo $\overline{C} \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$. A imagem de tal morfismo é a curva C' , denominada *modelo canônico* de C .

Em 1939, Babbage mostrou que uma curva suave C é trigonal se e somente se C' está contida em um scroll suave de dimensão 2, [B]. O resultado foi então generalizado para curvas singulares Gorenstein de vários modos e por diferentes autores. Anos mais tarde, Stöhr e Rosa em [RS] ampliaram a afirmação para scrolls bidimensionais singulares, ou seja, cones, a partir de um conceito mais geral de gonalidade, onde o g_d^1 podia eventualmente admitir pontos de base não-removíveis. A maneira de formalizar este fato foi apresentada por Coppens [Cp] e em [S], Stöhr estabeleceu uma forma de lidar com esta condição, ainda mantendo a linguagem de divisores. Essencialmente troca-se na definição usual de gonalidade, feixe inversível por feixe livre de torção de posto 1 ou, equivalentemente, morfismo por pincel de retas.

Martins em [M1] e [M2] estudou o caso em que a curva não precisa ser, necessariamente, Gorenstein. Analogamente, verificou que os modelos canônicos de curvas trigonais também estão contidos em scrolls bidimensionais (possivelmente singulares). A partir do estudo de propriedades de C' , deduziu propriedades sobre C , tais como número de pontos não-Gorenstein, grau de singularidades destes, unicidade e pontos de base do g_3^1 .

Neste trabalho nos perguntamos exatamente sobre a recíproca deste fato. O que se pode dizer sobre C caso C' esteja contida em um scroll? Começamos com scrolls bidimensionais (como aqueles estudados pelos autores acima) e derivamos propriedades sobre C , que pudemos verificar no Teorema 2.2.1. Além disso mostramos que vale a recíproca no caso

racional monomial, Teorema 2.2.4.

As propriedades que derivamos sobre C já levam em conta conceitos introduzidos por Kleiman e Martins em [KM], publicado alguns anos depois. Neste artigo, os autores caracterizaram curvas cujo modelo canônico é projetivamente normal e curvas cujo modelo canônico é aritmeticamente normal. Tais curvas foram ditas, respectivamente, *nearly Gorenstein* e *nearly normal*.

Na sequência, provamos que duas curvas não hiperelíticas com apenas um ponto singular que é uniramificado são isomorfas se e somente se os seus modelos canônicos são os mesmos, Teorema 2.2.5.

Por fim, estudamos o caso de curvas com modelos canônicos em scrolls tridimensionais. No Teorema 3.2.1 fazemos uma análise análoga de propriedades de C a partir de C' quando C' é interseção de duas superfícies no scroll.

E, em seguida, provamos que uma curva racional monomial é tetragonal se e somente se seu modelo canônico está contido em um scroll tridimensional, Teorema 3.2.2.

O primeiro capítulo contém conceitos preliminares de grande importância para a tese. Discutimos mais sobre sistemas lineares com ponto de base não removíveis, além de apresentarmos a definição formal de modelo canônico de uma curva.

Ainda no Capítulo 1, na Seção 2, trazemos uma abordagem sobre semigrupo de valores de um ponto singular de uma curva, conceito que será usado nos Capítulos 2 e 3 na demonstração de teoremas.

O Capítulo 2 é, todo ele, dedicado a curvas com modelo canônico em scrolls bidimensionais. Apresentamos na primeira seção a geometria do scroll, que no caso bidimensional pode ser mais detalhada como foi em [RS].

A segunda seção já é devotada à prova dos Teoremas 2.2.1, 2.2.4 e 2.2.5.

Além disso fazemos uma análise sobre curvas racionais no scroll, apresentando uma maneira bem simples de encontrar o modelo canônico de curvas racionais monomiais uniramificadas que possuem uma singularidade, Proposição 2.2.2. Apresentamos também uma fórmula que nos ajuda a verificar quando uma curva monomial racional está contida em um scroll de dimensão d , Lema 2.2.3.

O Capítulo 3 é dedicado ao caso de curvas com modelos canônicos no scroll tridimensional e provamos os Teoremas 3.2.1 e 3.2.2.

Apresentamos também algumas tabelas com exemplos de curvas racionais monomiais de gênero baixo cujo modelo canônico está contido em scrolls de dimensão 2 e/ou 3.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Modelo Canônico

Nesta seção introduzimos conceitos importantes que utilizamos em todo trabalho. Inicialmente, seja C um esquema unidimensional integral e completo, definido sobre um corpo algebricamente fechado k .

Seja g o gênero aritmético da curva C com feixe estrutural \mathcal{O}_C , ou simplesmente \mathcal{O} . Se $\pi : \bar{C} \rightarrow C$ é a normalização, seja $\bar{\mathcal{O}} := \pi_*(\mathcal{O}_{\bar{C}})$ e $\mathcal{C} := \mathcal{H}om(\bar{\mathcal{O}}, \mathcal{O})$, o condutor de $\bar{\mathcal{O}}$ em \mathcal{O} . Denotaremos por ω_C , ou simplesmente ω , o feixe dualizante de C .

Definição 1.1.1. Dizemos que uma curva C de gênero g é *Gorenstein* se satisfaz as seguintes condições equivalentes:

- (i) $\dim \bar{\mathcal{O}}_P/\mathcal{O}_P = \dim \mathcal{O}_P/\mathcal{C}_P$ para todo $P \in C$.
- (ii) ω é inversível, isto é, $\omega_P \cong \mathcal{O}_P$ para todo $P \in C$.
- (iii) $g = 0$ ou existe o morfismo $\varphi_\omega : C \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$.

Às curvas que não forem Gorenstein nos referimos simplesmente por *não Gorenstein*, o mesmo valendo para os pontos que não satisfazem às igualdades dos itens (i) e (ii).

Definição 1.1.2. Uma curva C é dita *hiperelítica* se satisfaz as seguintes condições equivalentes:

- (i) Existe um morfismo de grau 2 de $C \rightarrow \mathbb{P}^1$.
- (ii) Existe um feixe inversível \mathcal{F} tal que $\deg \mathcal{F} = h^0(\mathcal{F}) = 2$.

Podemos verificar as equivalências das definições acima em [KM, Teo 4.3].

Curvas hiperelíticas são Gorenstein, como verificado em [R, Teo 17].

Definição 1.1.3. Um *sistema linear de dimensão r em C* é um conjunto da forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{F}, V) := \{x^{-1}\mathcal{F} \mid x \in V \setminus 0\}$$

em que \mathcal{F} é um feixe coerente de ideais fracionários em C e V é um subespaço vetorial de $H^0(\mathcal{F})$ de dimensão $r + 1$. O *grau* de um sistema linear é o inteiro

$$d := \deg \mathcal{F} := \chi(\mathcal{F}) - \chi(\mathcal{O})$$

Note, em particular, que se $\mathcal{O} \subset \mathcal{F}$ então

$$\deg \mathcal{F} = \sum_{P \in C} \dim(\mathcal{F}_P / \mathcal{O}_P).$$

Usaremos a notação g_d^r para representar um “sistema linear de grau d e dimensão r ”. O sistema linear é dito *completo* se $V = H^0(\mathcal{F})$, neste caso escrevemos simplesmente $\mathcal{L} = |\mathcal{F}|$. Finalmente, a *gonalidade* de C é o menor d para o qual existe um g_d^1 em C , ou equivalentemente, um feixe livre de torção \mathcal{F} de posto 1 em C com grau d e $h^0(\mathcal{F}) \geq 2$. Um ponto $P \in C$ é dito um *ponto de base de \mathcal{L}* se $x\mathcal{O}_P \subsetneq \mathcal{F}_P$ para todo $x \in V$. O *segundo sistema linear* associado a \mathcal{L} é um conjunto da forma

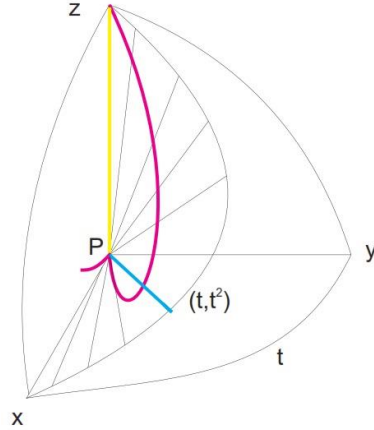
$$\mathcal{L}' := \{x^{-1}\mathcal{F}' \mid x \in V \setminus 0\}$$

onde $\mathcal{F}' \leq \mathcal{F}$ é o menor divisor que satisfaz a relação $V \subseteq H^0(\mathcal{F}')$. Este sistema linear depende somente de \mathcal{L} , mas não depende da escolha do feixe \mathcal{F} . Um ponto de base de \mathcal{L} é dito *removível* se não é um ponto de base de \mathcal{L}' . Então, P é um ponto de base não removível de \mathcal{L} se \mathcal{F}_P não é um \mathcal{O}_P -module livre; em particular, P é singular no caso afirmativo.

Esta definição difere da definição usual de sistema linear já que se troca feixe inversível por feixe livre de torção de posto 1. Esta alteração é necessária por trabalharmos com curvas singulares que podem admitir ponto de base *não-removíveis* (para maiores detalhes ver M. Coppens [Cp]). Isto foi feito com sucesso por R. Rosa and K.-O. Stöhr em [RS] obtendo resultados geométricos para curvas trigonais Gorenstein que se encaixariam perfeitamente com os resultados conhecidos no caso de curvas suaves.

Exemplo 1.1.4. Considere a curva $C := \overline{(t^3, t^4, t^5)} \subset \mathbb{P}^3$.

C está contida no cone $S := \{(x : y : z : w) \in \mathbb{P}^3 \mid xz = y^2\}$.



Considere os pontos $P := (0 : 0 : 0 : 1)$ e $\infty := (0 : 0 : 1 : 0)$ e as retas $L_t := \{(1 : t : t^2 : u) \mid u \in k\} \cup \{P\}$ e $L_\infty := \{(0 : 0 : 1 : u) \mid u \in k\} \cup \{P\}$. Temos que L_t encontra C em P e $P_t = (t^3, t^4, t^5)$ e L_∞ encontra C em P e ∞ .

Geometricamente, temos é um g_2^1 com ponto de base não-removível.

Escreva $k(C) = k(t)$, considere $\mathcal{F} := \mathcal{O}_C \langle 1, t \rangle$, temos:

$$\deg_Q((t-c)^{-1}\mathcal{F}) = \begin{cases} 1 & \text{se } Q = P \\ 1 & \text{se } Q = P_c \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad \deg_Q(\mathcal{F}) = \begin{cases} 1 & \text{se } Q = P \\ 1 & \text{se } Q = \infty \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Logo $\mathcal{L}(\mathcal{F}, \langle 1, t \rangle)$ descreve este sistema linear.

Mas $\mathcal{O}_P = k \oplus t^3 \overline{\mathcal{O}}_P$ e $\mathcal{F}_P = \mathcal{O}_P + t \mathcal{O}_P = k \oplus kt \oplus t^3 \overline{\mathcal{O}}_P$, que não é um \mathcal{O}_P -módulo livre.

Logo \mathcal{F} não é inversível, mas apenas livre de torsão de posto 1.

Dados um esquema integral A , uma aplicação $\varphi : A \rightarrow C$ e um feixe \mathcal{G} em C , seja

$$\mathcal{O}_A \mathcal{G} := \varphi^* \mathcal{G} / \text{Torsion}(\varphi^* \mathcal{G}).$$

Dado um feixe coerente \mathcal{F} em C seja $\mathcal{F}^n := \text{Sym}^n \mathcal{F} / \text{Torsion}(\text{Sym}^n \mathcal{F})$. Se \mathcal{F} é inversível, então $\mathcal{F}^n = \mathcal{F}^{\otimes n}$.

Definição 1.1.5. Definimos $\widehat{C} := \text{Proj}(\oplus \omega^n)$ o blowup de C ao longo de ω . Se $\widehat{\pi} : \widehat{C} \rightarrow C$ é o morfismo natural, sejam $\widehat{\mathcal{O}} = \widehat{\pi}_*(\mathcal{O}_{\widehat{C}})$ e $\widehat{\mathcal{O}}\omega := \widehat{\pi}_*(\mathcal{O}_{\widehat{C}}\omega)$. Em [R, p 188 top] Rosenlicht mostrou que o sistema linear $\mathcal{L}(\mathcal{O}_{\widehat{C}}\omega, H^0(\omega))$ é livre de ponto base. Ele considerou então o morfismo $\kappa : \overline{C} \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ definido por \mathcal{L} e chamou $C' := \kappa(\overline{C})$ de *modelo canônico* de C . Ele

também provou em [R, Teo 17] que se C é não hiperelítica, o mapa $\pi : \overline{C} \rightarrow C$ se fatora por $\pi' : C' \rightarrow C$. Neste caso, tome $\mathcal{O}' := \pi'_*(\mathcal{O}_{C'})$. Em [KM, Dfn 4.9] encontramos uma outra caracterização de C' . Ele é a imagem do morfismo

$$\widehat{k} : \widehat{C} \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$$

definido pelo sistema linear

$$\widehat{\mathcal{L}}(\mathcal{O}_{\widehat{C}}\omega, H^0(\omega)).$$

De acordo com o Teorema de Rosenlicht, como ω é gerado pelas seções globais, nós temos que

$$\widehat{k} : \widehat{C} \rightarrow C'$$

é um isomorfismo se C é não hiperelítica.

Seja $\overline{\mathcal{O}}\omega := \pi_*(\mathcal{O}_{\overline{C}}\omega)$ e tome $\lambda \in H^0(\omega)$ tal que $(\overline{\mathcal{O}}\omega)_P = \overline{\mathcal{O}}_P\lambda$ para todo ponto singular $P \in C$. Tal diferencial existe pois $H^0(\omega)$ gera $\overline{\mathcal{O}}\omega$ como foi provado em [R, p188 top], e também porque C possui finitos pontos singulares e k é infinito já que é algebricamente fechado. Seja

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_\lambda := \omega/\lambda$$

Assim, temos

$$\mathcal{C}_P \subset \mathcal{O}_P \subset \mathcal{W}_P \subset \widehat{\mathcal{O}}_P = \mathcal{O}'_P \subset \overline{\mathcal{O}}_P$$

para todo ponto singular $P \in C$, e a igualdade acontece se C não hiperelítica.

Definição 1.1.6. Seja $P \in C$. De acordo com [BF, p433] dizemos que P é *Kunz* se

$$\dim(\overline{\mathcal{O}}_P/\mathcal{O}_P) = \dim(\mathcal{O}_P/\mathcal{C}_P) + 1$$

e, de acordo com [BF, p418] dizemos que P é *quase Gorenstein* se

$$\dim(\overline{\mathcal{O}}_P/\mathcal{O}_P) = \dim(\mathcal{O}_P/\mathcal{C}_P) + \dim(\text{Ext}^1(k, \mathcal{O}_P)) - 1.$$

Uma outra caracterização é dada por [BF, Prp 21], um ponto $P \in C$ é *Kunz* se

$$\eta_P := \dim(\mathcal{W}_P/\mathcal{O}_P) = 1$$

e qualquer tal ponto é não Gorenstein e também quase Gorenstein. Finalmente, dizemos que C é *Kunz* se todos seus pontos não Gorenstein o forem. Por outro lado, pontos Gorenstein

são sempre quase Gorenstein, e para qualquer ponto não Gorenstein P de uma curva (não hiperelítica) temos que é quase Gorenstein se

$$\mu_P := \dim(\mathcal{O}'_P/\mathcal{W}_P) = 1$$

devido a [BF, Prp 28]. Isso nos leva a definir dois invariantes

$$\eta := \sum_{P \in C} \eta_P \quad \mu := \sum_{P \in C} \mu_P$$

que nos dão a seguinte, importante, relação

$$g = g' + \eta + \mu$$

onde g' é o gênero de C' . É provado em [BF, Prp. 21] que pontos Kunz são quase Gorenstein, isto é,

$$\eta_P = 1 \implies \mu_P = 1$$

Finalmente, seguindo [KM, Dfn 5.7], dizemos que C é *nearly Gorenstein* se C tem um único ponto não Gorenstein P que também é quase Gorenstein; e dizemos que C é *nearly normal* se $h^0(\mathcal{O}/C) = 1$, isto é, C possui um único ponto não Gorenstein P e o feixe $\mathcal{M}_{\{P\}}$ associado ao seu ideal maximal é igual ao condutor \mathcal{C} .

Observação 1.1.7. A importância dos conceitos acima descritos é explicada no que se segue:

- (i) C é nearly Gorenstein se e somente se é não Gorenstein e C' é projetivamente normal, segundo [KM, Teo. 6.5].
- (ii) C é nearly normal se somente se é não Gorenstein e C' é aritmeticamente normal, devido [KM, Teo. 5.10].
- (iii) P é Gorenstein se e somente se $\eta_P = \mu_P = 0$, e P é não Gorenstein se e somente se $\eta_P, \mu_P > 0$, mostrado em [BF, p. 438 top]. Além disso, se $\eta_P = 1$ então $\mu_P = 1$, o que pode ser verificado em [BF, Prp. 21]. Em particular, uma curva Kunz com um único ponto não Gorenstein é o mais perto de Gorenstein que temos.
- (iv) O grau em \mathbb{P}^{g-1} de C' é dado pela equação $\deg(C') = 2g - 2 - \eta$, onde g é o gênero aritmético de C , segundo [M1].

1.2 Semigrupo de Valores

Dado um ponto uniramificado $P \in C$ e uma função $x \in k(C)^*$, seja

$$v_P(x) := v_{\bar{P}}(x) \in \mathbb{Z}$$

em que \bar{P} representa o ponto de \bar{C} sobre P , e $v_{\bar{P}}$ é a valorização do D.V.R. $\bar{\mathcal{O}}_P$. O *semigrupo de valores* de P é

$$S = S_P := v_P(\mathcal{O}_P).$$

Como \mathcal{O}_P é um anel, S satisfaz as propriedades de semigrupo de valores, a saber:

- (i) se $a, b \in S$ então $a + b \in S$
- (ii) $0 \in S$
- (iii) $\mathbb{N} \setminus S$ é finito.

Apresentamos também dois elementos de S , a saber:

$$\alpha = \alpha_P := \min(S \setminus \{0\}) \quad \text{e} \quad \beta = \beta_P := \min(v_P(\mathcal{C}_P)). \quad (1.1)$$

O número α é dito a multiplicidade de S e o número β é o condutor de S .

Para uso posterior vamos definir

$$S^* = S_P^* := \{a \in S \mid a \leq \beta\}. \quad (1.2)$$

e

$$\delta = \delta_P := \mathbb{N} \setminus S$$

que coincide com o grau de singularidade P , isto é, $\delta = \dim(\bar{\mathcal{O}}_P/\mathcal{O}_P)$.

O *vetor Frobenius* de S é $\gamma := \beta - 1$ e um conjunto

$$K = K_P := \{a \in \mathbb{Z} \mid \gamma - a \notin S\} \quad (1.3)$$

cuja importância irá aparecer mais tarde. Definimos também, o seguinte conjunto

$$K^* = K_P^* := \{a \in K \mid a < \beta\}. \quad (1.4)$$

Definição 1.2.1. Seja $P \in C$. Definimos a *multiplicidade* de P por

$$m_C(P) = \dim(\overline{\mathcal{O}}_P/\mathfrak{m}_P\overline{\mathcal{O}}_P),$$

então P é singular se sua multiplicidade é pelo menos 2. Dizemos que um ponto P uniramificado é *monomial* se $\widehat{\mathcal{O}}_P = k[[t^{n_1}, \dots, t^{n_r}]]$, onde t é o parâmetro local em \overline{P} .

Exemplo 1.2.2. Seja k um corpo de característica zero e

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^4 \\ (X : Y) &\mapsto (X^4Y^6 : X^7Y^3 : X^9Y : X^{10} : Y^{10}) \end{aligned}$$

e $C = \varphi(\mathbb{P}^1)$. C é uma curva algébrica integral e completa, possui uma única singularidade em $P = (0 : 0 : 0 : 0 : 1)$ e tem gênero aritmético 5. Tome $\overline{P} = (0 : 1)$ a pré imagem de P . Considerando $x = X/Y$, temos $k(\mathbb{P}^1) = k(x)$ e $\mathcal{O}_{\overline{P}, \mathbb{P}^1} = k[x]_{(x)}$ e como $\varphi = (x^4 : x^7 : x^9 : x^{10} : 1)$ e, vendo $k(C)$ em $k(\mathbb{P}^1)$ segue que

$$\mathcal{O}_{P,C} = k[x^4, x^7, x^9, x^{10}]_{(x^4, x^7, x^9, x^{10})}$$

e que

$$\widehat{\mathcal{O}}_P = k + kx^4 + kx^7 + kx^8 + kx^9 + kx^{10} + kx^{11} + \dots$$

Temos $g = \delta_P = \dim(\overline{\mathcal{O}}_P/\mathcal{O}_P) = \dim(k[[x]]/\mathcal{O}_P) = 5$. E,

$$S = S_P = v_P(\mathcal{O}_P) = v_P(\widehat{\mathcal{O}}_P) = \{0, 4, 7, \rightarrow\}$$

onde a seta \rightarrow significa que a partir do elemento anterior, todos os naturais pertencem ao subconjunto. Temos $\alpha = 4$, $\gamma = 6$ e $K = K_P = \{0, 1, 3, 4, 5, 7, \rightarrow\}$.

Capítulo 2

Modelos Canônicos em Scrolls Bidimensionais

Stöhr e Rosa em [RS] mostraram que curvas Gorenstein são trigonais se e somente se vivem em um scroll (possivelmente singular). Para simplificar, neste capítulo scroll será sempre bidimensional. Nesse sentido nos perguntamos se podemos estender tal resultado para curvas não Gorenstein. Martins em [M1] mostrou que se a curva C não Gorenstein for trigonal, então seu modelo canônico C' está contido em um scroll. Mas não há conhecimento se a volta de tal teorema é válida. Neste capítulo estudaremos características que determinadas curvas devem assumir caso seu modelo canônico viva em um scroll, em particular mostraremos que se o modelo canônico de uma curva monomial racional não Gorenstein C está contido em um scroll, então C é trigonal.

Começaremos por apresentar resultados sobre curvas no scroll. Para maiores detalhes veja [SV] e [RS].

2.1 Geometria do Scroll

O scroll $S_{mn} \subset \mathbb{P}^N$ é uma superfície que, depois de uma escolha de coordenadas projetivas, é dado pelas equações

$$S_{mn} := \left\{ (X_0 : \dots : X_N) \in \mathbb{P}^N \mid \text{rank} \begin{pmatrix} X_0 & \dots & X_{n-1} & X_{n+1} & \dots & X_{N-1} \\ X_1 & \dots & X_n & X_{n+2} & \dots & X_N \end{pmatrix} < 2 \right\}$$

onde $0 \leq m \leq n$ e $m + n = N - 1$. Então S_{mn} é a união disjunta de retas

$$L_{(a;b)} := \overline{(a^n : a^{n-1}b : \dots : b^n : 0 : \dots : 0), (0 : \dots : 0 : a^m : a^{m-1}b : \dots : b^m)},$$

com $(a : b) \in \mathbb{P}^1$, ligando pontos de duas curvas racionais não singulares

$$\begin{aligned} D &:= \{(a^n : a^{n-1}b : \dots : b^n : 0 : \dots : 0) \mid (a : b) \in \mathbb{P}^1\} \\ E &:= \{(0 : \dots : 0 : a^m : a^{m-1}b : \dots : b^m) \mid (a : b) \in \mathbb{P}^1\}. \end{aligned}$$

Temos $0 := (1 : 0)$ e $\infty := (0 : 1)$, o scroll S_{mn} é a superfície algébrica projetiva racional não singular se $m > 0$ e um cone caso contrário. Neste último, E é um ponto. O scroll pode ser coberto por quatro cartas afins obtidas removendo de S_{mn} o par de retas $L_0 \cup D$, $L_0 \cup E$, $L_\infty \cup D$ e $L_\infty \cup E$.

Para representar curvas contidas no scroll, escolhamos a última carta. Assim,

$$\begin{aligned} U &:= \{(x_0, \dots, x_N) \in S_{mn} \mid x_0 \neq 0\} = S_{mn} \setminus (L_\infty \cup E) \\ &= \{(a^0 : \dots : a^n : a^0b : \dots : a^mb) \mid (a, b) \in k^2\} \cong \mathbb{A}^2 \end{aligned}$$

Fixada a carta, toda curva projetiva irredutível C contida em S_{mn} , diferente de L_∞ e E , pode ser unicamente determinada pela curva plana irredutível

$$c_\ell(x)y^\ell + \dots + c_1(x)y + c_0(x) = 0 \quad c_\ell(x) \neq 0 \quad (2.1)$$

onde x e y podem ser naturalmente vistos como funções racionais em C .

Stöhr e Viana em [SV] mostraram que o grau de C é dado por

$$\deg(C) = d + \ell m \quad (2.2)$$

onde d é o menor inteiro tal que

$$\deg c_i(x) \leq d - i(N - 1 - 2m) \quad i \in \{0, 1, \dots, \ell\} \quad (2.3)$$

E, se $p_a(C)$ é seu o gênero aritmético, de acordo com [S1], temos as seguintes fórmulas para uma curva irredutível contida em S_{mn} :

se $m > 0$ então

$$2p_a(C) - 2 = (2\ell - 2) \deg(C) - (N - 1)\ell^2 + (N - 3)\ell. \quad (2.4)$$

se $m = 0$ então

$$p_a(C) = (q - 1)(\deg(C) - 1) - \frac{1}{2}q(q - 1)(N - 1) \quad (2.5)$$

onde $q = \lceil \deg(C)/(N - 1) \rceil$.

2.2 Modelo Canônico no Scroll

Como já foi dito, pode-se ver em [M1, M2, RS, SV] que o modelo canônico de uma curva trigonal vive em um scroll (possivelmente degenerado). E, para curvas Gorenstein, isto caracteriza trigonalidade. Nesta seção faremos o contrário, isto é, iremos supor que C' vive em um scroll e estabeleceremos condições para C , curva não Gorenstein. Assumiremos que todas as curvas tem gênero maior ou igual a 4, caso contrário o modelo canônico viveria em um plano, que é certamente um scroll. Se a dimensão do espaço é fixa, como no caso do modelo canônico, então podemos escrever S_{mn} como S_m , pois n está determinado por m e a dimensão do espaço.

Teorema 2.2.1. *Seja C uma curva não Gorenstein com $g \geq 4$ tal que seu modelo canônico C' está contido no scroll S_m , e seja ℓ o número genérico de pontos na interseção de C' e uma reta de S_m .*

Seja g' o gênero de C' . Então:

- (i) $\ell \leq 3$ se $m > 0$ e $\ell \leq 2$ se $m = 0$;
- (ii) se $\ell = 1$ então C é racional, e se $m > 0$ então $C' \cong \mathbb{P}^1$, em particular, os pontos singulares de C são não Gorenstein;
- (iii) se $\ell = 2$ então
 - (a) se $m > 0$, então C é nearly Gorenstein;
 - (b) se $m = 0$, então $g - g' \leq 3$; em particular, C é nearly Gorenstein;
- (iv) se $\ell = 3$ então:
 - (a) C é quase Gorenstein se e somente se é Kunz;
 - (b) $m \geq (g - 3)/3$ e a igualdade acontece se e somente se $g - g' = 2$;
- (v) se $m = 0$ e $g - g' = 3$ então:
 - (a) C' não encontra o vértice se e somente se é hiperelítica;
 - (b) C' encontra o vértice se e somente se é nearly normal;
- (vi) $\text{gon}(C) \leq \text{gon}(C') + g - g'$;
- (vii) se $m > 0$ então $\text{gon}(C') \leq \ell$

(viii) se $m = 0$ e $g - g' = 3$, então $\text{gon}(C) \leq 5$

Demonstração. De acordo com [M1, Lem. 3.3] temos que o grau de C' em \mathbb{P}^{g-1} é $2g - 2 - \eta$. Suponha que $m > 0$. Aplicando (2.4) a C' temos

$$g' = (\ell - 1) \left(\left(1 - \frac{g}{2} \right) \ell + (2g - \eta - 3) \right) \quad (2.6)$$

Note que o segundo fator do lado direito da igualdade é uma função linear decrescente de ℓ com raiz $(4g - 2\eta - 6)/(g - 2) \leq (4g - 8)/(g - 2) = 4$. Como $g' \geq 0$, segue que $\ell \leq 4$. Se $\ell = 4$ nós temos $\eta = 1$ e $g' = 0$, mas $\eta = 1$ implica que C tem um único ponto não Gorenstein P com $\eta_P = 1$ o que implica em $\mu_P = 1$. Portanto $g = g' + \eta + \mu = 0 + 1 + 1 = 2$ o que não pode acontecer já que $g \geq 4$.

Agora, assumamos que $m = 0$. De (2.2) e (2.3) temos $2g - 2 - \eta - \ell(g - 2) \geq 0$, então

$$\ell \leq 1 + \frac{g - \eta}{g - 2} \quad (2.7)$$

logo $\ell \leq 3$ e a igualdade acontece se $\eta = 1$ e $g = 3$, que não pode ocorrer por causa da nossa suposição sobre o gênero. Então (i) está provada.

Agora, suponha que $\ell = 1$. Então, claramente, C' é racional e então também será C . Se $m > 0$, por (2.6) temos $g' = 0$, i.e., $C' \cong \mathbb{P}^1$. Em particular, C' é não singular e conseqüentemente os pontos singulares de C devem ser não Gorenstein, pois o blowup que nos fornece o modelo canônico C' leva pontos Gorenstein e pontos Gorenstein. Então (ii) está provada.

Para provar (iii), suponha que $\ell = 2$. Se $m > 0$ temos por (2.6) que $g - g' = \eta + 1$, então $\mu = 1$ e, por definição, C é nearly Gorenstein, então (a) segue. Se $m = 0$, por (2.7), temos $\eta \leq 2$. Se aplicarmos (2.5) a C' teremos

$$g' = (q - 1)(2g - \eta - 3) - \frac{1}{2}q(q - 1)(g - 2) \quad (2.8)$$

com

$$q = \lceil 1 + (g - \eta)/(g - 2) \rceil. \quad (2.9)$$

Como $\eta = 1$ ou 2 , então $q = 2$ ou 3 . Se $q = 2$ nós temos por (2.8) que $g' - g = \eta + 1$ então $g - g' \leq 3$. Enquanto se $q = 3$ temos por (2.9) que $g = 3$ e $\eta = 1$. Em particular, $g - g' \leq 3$ e (b) segue.

Agora, com o objetivo de provar (iv), suponha que $\ell = 3$ e $m > 0$. Temos por (2.6) que $g - g' = 2\eta$, então claramente C é quase Gorenstein se e somente se é Kunz. E combinando (2.2) e (2.3) para $\ell = 3$, chegamos a

$$2g - 2 - \eta - 3m - 3(g - 2 - 2m) \geq 0$$

o que nos dá

$$m \geq \frac{g-3}{3} + \frac{\eta-1}{3}$$

então $m \geq (g-3)/3$ e a igualdade ocorre se e só se $\eta = 1$, isto é, $g - g' = 2$.

Continuando, suponha que $m = 0$ e $g - g' = 3$ para provar (v). Então $g - 1 = g' + 2$ e assim $C' \subset \mathbb{P}^{g'+2}$. Além disso, $g - g' = 3$ implica em $\eta = 2$. Dessa forma

$$\begin{aligned} \deg(C') &= 2g - 2 - \eta \\ &= 2g - 2 - 2 \\ &= 2(g' + 3) - 4 \\ &= 2g' + 2 \end{aligned}$$

Então C' é a curva de gênero g' contida no cone de $\mathbb{P}^{g'+2}$ com grau $2g' + 2$. Portanto C' não passa pelo vértice do cone se e somente se é hiperelítica, devido a [S2, Teo. 2.1], e C' passa pelo vértice se e somente se é nearly normal, por causa de [M1, Teo. 2.4].

Para provar (vi), seja $\mathcal{F}' := \mathcal{O}_{C'}\langle 1, x \rangle$ o feixe livre de torção de posto 1 que computa a gonalidade de C' , para $x \in k(C') = k(C)$. Seja $\mathcal{F} := \mathcal{O}_C\langle 1, x \rangle$. Como $\pi' : C' \rightarrow C$ é birracional, preserva cohomologia por imagens diretas e, em particular, temos que $H^0(C, \pi'_*(\mathcal{F}')) = \langle 1, x \rangle$, então $\mathcal{O} \subset \mathcal{F} \subset \pi'_*(\mathcal{F}')$ e também

$$\deg_C \pi'_*(\mathcal{F}') = \deg_{C'} \mathcal{F}' + g - g'$$

mas $\text{gon}(C) \leq \deg_C(\mathcal{F}) \leq \deg_C \pi'_*(\mathcal{F}')$ e $\text{gon}(C') = \deg_{C'}(\mathcal{F}')$, assim o item segue. Se $m > 0$ então a regra de S_{mn} corta um g_ℓ^1 em C' , dessa forma (vii) segue também. Agora se $m = 0$ e $g - g' = 3$, então por (v), $\text{gon}(C') = 2$ em qualquer caso, de modo que $\text{gon}(C) \leq 5$. Isto prova (viii) e concluímos a prova. \square

2.2.1 Curvas Racionais no Scroll

Considere o morfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \\ (s : t) & \longmapsto & (s^{a_n} : t^{a_1} s^{a_n - a_1} : \dots : t^{a_{n-1}} s^{a_n - a_{n-1}} : t^{a_n}) \end{array}$$

A imagem C deste mapa é também chamada de *curva racional monomial*, que, por simplicidade, denotamos por

$$C = (1 : t^{a_1} : \dots : t^{a_{n-1}} : t^{a_n}).$$

A propriedade chave de nosso interesse é o que segue abaixo. Para provar este fato, basta lembrar das definições de semigrupos do Capítulo 1, Seção 2.

Proposição 2.2.2. *Seja $C = (1 : t^{a_1} : \dots : t^{a_{n-1}} : t^{a_n})$ uma curva racional monomial tal que $a_n = a_{n-1} + 1$, seja $P = (1 : 0 : \dots : 0) \in C$. Então*

$$\mathcal{W} = \mathcal{O}_C \langle 1, t^{b_1}, \dots, t^{b_{g-1}} \rangle$$

onde $\{0, b_1, \dots, b_{g-1}\} = K_P^*$.

Demonstração. Primeiro devemos mostrar que K^* possui g elementos. De fato, como $a_n = a_{n-1} + 1$, temos que P é o único ponto singular de C , então $g = \delta = \#(K^*)$ pela construção de K . Seja $\bar{P} := (1 : 0) \in \mathbb{P}^1$ e seja $\lambda \in \Omega_{k(C)|k}$ uma diferencial. Temos que $(\omega/\lambda)_P$ é o maior entre os \mathcal{O}_P -ideais fracionários F em $k(C)$, satisfazendo a propriedade que $\text{Res}_{\bar{P}}(f\lambda) = 0$ para todo $f \in F$. Tomando $\lambda := dt/t^\beta$ concluímos que

$$(\omega/\lambda)_P = k \oplus kt^{b_1} \oplus \dots \oplus kt^{b_{g-1}} \oplus \mathcal{C}_P$$

e por isso λ é a diferencial previamente definida, e $\omega/\lambda = \mathcal{W}$. Seja $\mathcal{F} := \mathcal{O}_C \langle 1, t^{b_1}, \dots, t^{b_{g-1}} \rangle$. É suficiente provar que $\deg(\mathcal{F}) = 2g - 2$. Claramente

$$\deg \mathcal{F} = \dim(\mathcal{F}_P/\mathcal{O}_P) + \dim(\mathcal{F}_\infty/\mathcal{O}_\infty)$$

e como ∞ é não singular temos que $\dim(\mathcal{F}_\infty/\mathcal{O}_\infty) = b_{g-1} = \beta - 2$. Em outras palavras, pela dualidade local, $\dim(\mathcal{O}_P/\mathcal{C}_P) = \dim(\overline{\mathcal{O}}_P/\mathcal{W}_P) = \dim(\overline{\mathcal{O}}_P/\mathcal{F}_P)$. Assim $\beta = 2g - \dim(\mathcal{F}_P/\mathcal{O}_P)$ e o resultado segue. \square

O resultado acima é de suma importância, uma vez que nos dá uma forma de encontrar o modelo canônico de curvas racionais monomiais uniramificadas que possuem uma singularidade.

O próximo resultado é mais geral, válido para scrolls de qualquer dimensão, e será muito útil para as próximas seções.

Lema 2.2.3. *A curva monomial racional $(1 : t^{a_1} : \dots : t^{a_N}) \subset \mathbb{P}^N$ está contida em um d -fold scroll $S_{m_1 m_2 \dots m_d}$ se e somente se existe uma partição do conjunto $\{0 = a_0, a_1, \dots, a_N\}$ em d subconjuntos, com, respectivamente, $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_d + 1$ elementos, tal que tais elementos de todos subconjuntos podem ser reordenados formando uma progressão aritmética de mesma razão.*

Demonstração. O d -fold scroll $S_{m_1 m_2 \dots m_d}$ é o conjunto de pontos $(x_0 : \dots : x_N) \subset \mathbb{P}^N$ tal que o posto da matriz

$$\begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_{m_1-1} & x_{m_1+1} & \dots & x_{m_1+m_2} & \dots & x_{m_1+\dots+m_{d-1}+d-1} & \dots & x_{N-1} \\ x_1 & \dots & x_{m_1} & x_{m_1+2} & \dots & x_{m_1+m_2+1} & \dots & x_{m_1+\dots+m_{d-1}+d} & \dots & x_N \end{pmatrix}$$

é menor que 2.

Mais explicitamente, a matriz acima é composta por submatrizes menores da forma

$$\begin{pmatrix} x_{m_1+\dots+m_i+i} & x_{m_1+\dots+m_i+i+1} & \dots & x_{m_1+\dots+m_i+m_{i+1}+i-1} \\ x_{m_1+\dots+m_i+i+1} & x_{m_1+\dots+m_i+i+2} & \dots & x_{m_1+\dots+m_{i+1}+i} \end{pmatrix}$$

Como temos $x_i = t^{a_i}$, as submatrizes acima nos dão a partição do conjunto de inteiros a'_i s, que, distribuídos convenientemente, é

$$\{a_0, \dots, a_{m_1}\}, \{a_{m_1+1}, \dots, a_{m_1+m_2+1}\}, \dots, \{a_{m_1+\dots+m_{d-1}+d-1}, \dots, a_N\}.$$

Os elementos de cada subconjunto da partição formam uma progressão aritmética já que como as submatrizes se relacionam, eles também se relacionarão. A razão deve ser a mesma por causa da relação das matrizes. \square

A partir deste lema temos uma “fórmula” que nos garante quando uma curva C está contida em um d -fold scroll. Daí a sua importância.

Com estes resultados em mãos, analisamos todas curvas não Gorenstein deste formato com gênero até 7 cujo modelo canônico está contido em um scroll. Podemos verificar a aplicabilidade do Teorema 2.2.1 para esta curva. Esta análise se encontra na Tabela 1.

TABELA 1

g	C	gn		C'	eq	ℓ	m	Scroll
4	$(1 : t^5 : t^6 : t^7 : t^8 : t^9)$	2	NN	$(1 : t : t^2 : t^3)$	$y - x^3$	1	0	S_{02}
	$(1 : t^4 : t^6 : t^7 : t^9)$	3	K	$(1 : t^2 : t^4 : t^3)$	$x^3y - 1$	1	0	S_{02}
	$(1 : t^4 : t^5 : t^7 : t^8)$	3	K	$(1 : t : t^2 : \frac{1}{t^3})$	$x^3y - 1$	1	0	S_{02}
	$(1 : t^5 : t^6 : t^7 : t^8 : t^9)$	2	NN	$(1 : t : t^2 : t^3)$	$y - x^2$	1	1	S_{11}
	$(1 : t^3 : t^7 : t^8)$	3	–	$(1 : t : \frac{1}{t^3} : \frac{1}{t^2})$	$x^3y - 1$	1	1	S_{11}
g	C	gn		C'	eq	ℓ	m	Scroll
5	$(1 : t^6 : t^7 : \dots : t^{10} : t^{11})$	2	NN	$(1 : t : t^2 : t^3 : t^4)$	$y - x^4$	1	0	S_{03}
	$(1 : t^4 : t^6 : t^9 : t^{10} : t^{11})$	3	NG	$(1 : t^2 : t^4 : t^6 : t^5)$	$y^2 - x^5$	2	0	S_{03}
	$(1 : t^5 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{10} : t^{11})$	3	NG	$(1 : t : t^2 : t^3 : \frac{1}{t^2})$	$x^2y - 1$	1	0	S_{03}
	$(1 : t^5 : t^6 : t^8 : t^9)$	3	NG	$(1 : \frac{1}{t} : \frac{1}{t^2} : \frac{1}{t^3} : \frac{1}{t^6})$	$y - x^6$	1	0	S_{03}
	$(1 : t^5 : t^6 : t^7 : t^9 : t^{10})$	3	K	$(1 : t : t^2 : t^3 : \frac{1}{t^4})$	$x^4y - 1$	1	0	S_{03}
	$(1 : t^6 : t^7 : \dots : t^{10} : t^{11})$	2	NN	$(1 : t^2 : t^4 : t : t^3)$	$y^2 - x$	2	1	S_{12}
	$(1 : t^3 : t^8 : t^9 : t^{10})$	3	NG	$(1 : t^3 : t^6 : t^2 : t^5)$	$y^3 - x^2$	3	1	S_{12}
	$(1 : t^3 : t^7 : t^{10} : t^{11})$	3	K	$(1 : t^3 : t^6 : t^4 : t^7)$	$y^3 - x^4$	3	1	S_{12}
	$(1 : t^4 : t^7 : t^9 : t^{10})$	3	NG	$(1 : t : t^2 : \frac{1}{t^3} : \frac{1}{t^2})$	$x^3y - 1$	1	1	S_{12}
	$(1 : t^4 : t^5 : t^{10} : t^{11})$	3	–	$(1 : t : t^2 : \frac{1}{t^4} : \frac{1}{t^3})$	$x^4y - 1$	1	1	S_{12}
$(1 : t^5 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{10} : t^{11})$	3	NG	$(1 : t^2 : t^4 : t^3 : t^5)$	$y^2 - x^3$	2	1	S_{12}	
6	$(1 : t^7 : t^8 : \dots : t^{12} : t^{13})$	2	NN	$(1 : t : t^2 : t^3 : t^4 : t^5)$	$y - x^5$	1	0	S_{04}
	$(1 : t^4 : t^6 : t^{11} : t^{12} : t^{13})$	3	NG	$(1 : t^2 : t^4 : t^6 : t^8 : t^7)$	$y^2 - x^7$	2	0	S_{04}
	$(1 : t^7 : t^8 : \dots : t^{12} : t^{13})$	2	NN	$(1 : t : t^2 : t^3 : t^4 : t^5)$	$y - x^4$	1	1	S_{13}
	$(1 : t^3 : t^8 : t^{12} : t^{13})$	3	K	$(1 : t^3 : t^6 : t^9 : t^5 : t^8)$	$y^3 - x^5$	3	1	S_{13}
	$(1 : t^5 : t^8 : t^9 : t^{11} : t^{12})$	3	–	$(1 : t : t^2 : t^3 : \frac{1}{t^3} : \frac{1}{t^2})$	$x^3y - 1$	1	1	S_{13}
	$(1 : t^5 : t^6 : t^9 : t^{12} : t^{13})$	3	–	$(1 : t : t^2 : t^3 : \frac{1}{t^4} : \frac{1}{t^3})$	$x^4y - 1$	1	1	S_{13}
	$(1 : t^5 : t^6 : t^7)$	3	–	$(1 : t : t^2 : t^3 : \frac{1}{t^5} : \frac{1}{t^4})$	$x^5y - 1$	1	1	S_{13}
	$(1 : t^5 : t^7 : t^9 : t^{11} : t^{12} : t^{13})$	3	NG	$(1 : t^2 : t^3)$	$y^2 - x^5$	2	1	S_{13}
	$(1 : t^7 : t^8 : \dots : t^{12} : t^{13})$	2	NN	$(1 : t : t^2 : t^3 : t^4 : t^5)$	$y - x^3$	1	0	S_{04}
	$(1 : t^3 : t^{10} : t^{11})$	3	–	$(1 : t^3 : t^6 : \frac{1}{t} : t^2 : t^5)$	$xy^3 - 1$	3	2	S_{22}
$(1 : t^4 : t^9 : t^{10} : t^{11})$	3	–	$(1 : t : t^2 : t^4 : t^5 : t^6)$	$y - x^4$	1	2	S_{22}	

7	$(1 : t^3 : t^{11} : t^{12} : t^{13})$	3	–	$(1 : t^3 : t^6 : t^9 : t^2 : t^5 : t^8)$	$y^3 - x^2$	3	2	S_{23}
	$(1 : t^3 : t^{10} : t^{13} : t^{14})$	3	–	$(1 : t^3 : t^4 : t^6 : t^7 : t^9 : t^{10})$	$y^3 - x^4$	3	2	S_{23}
	$(1 : t^4 : t^6 : t^{13} : t^{14} : t^{15})$	3	NG	$(1 : t^2 : t^4 : t^6 : t^8 : t^{10} : t^9)$	$y^2 - x^9$	2	0	S_{05}
	$(1 : t^5 : t^6 : t^{13} : t^{14})$	3	–	$(1 : t : t^2 : t^5 : t^6 : t^7 : t^8)$	$y - x^5$	1	2	S_{23}
	$(1 : t^5 : t^9 : t^{11} : t^{12} : t^{13})$	3	–	$(1 : t : t^2 : t^4 : t^5 : t^6 : t^7)$	$y - x^4$	1	2	S_{23}
	$(1 : t^6 : t^7 : t^{10} : t^{11} : t^{14} : t^{15})$	3	–	$(1 : t : t^4 : t^5 : t^6 : t^7 : t^8)$	$y - x^4$	1	1	S_{14}
	$(1 : t^6 : t^7 : t^8 : t^{10} : t^{11})$	3	–	$(1 : t : t^5 : t^6 : t^7 : t^8 : t^9)$	$y - x^5$	1	1	S_{14}
	$(1 : t^6 : t^7 : t^8 : t^9)$	3	–	$(1 : t : t^6 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{10})$	$y - x^6$	1	1	S_{14}
	$(1 : t^6 : t^9 : t^{10} : t^{11} : t^{12} : t^{13})$	3	–	$(1 : t : t^3 : t^4 : t^5 : t^6 : t^7)$	$y - x^3$	1	1	S_{14}
	$(1 : t^6 : t^8 : t^{10} : t^{11} : t^{13} : t^{14} : t^{15})$	3	NG	$(1 : t^2 : t^4 : t^6 : t^8 : t^5 : t^7)$	$y^2 - x^5$	2	1	S_{14}
	$(1 : t^7 : t^9 : t^{10} : t^{11} : t^{13} : t^{14} : t^{15})$	3	NG	$(1 : t : t^2 : t^3 : t^4 : t^5 : \frac{1}{t^2})$	$x^2y - 1$	1	0	S_{05}

onde convenientemente adotamos

g := gênero

gn := gonalidade

K := Kunz

NG := nearly Gorenstein

NN := nearly normal

Alguns comentários sobre a Tabela 1. Primeiramente, note que a parametrização local da origem pode afetar o comportamento no infinito. Por exemplo, poderíamos não ter considerado o “ t^6 ” quando descrevemos a $C = (1 : t^3 : t^5 : t^6 : t^7)$ que é irrelevante para propósitos locais. Mas, se isso ocorresse, C , estaria contido agora em \mathbb{P}^3 , com singularidade no infinito $(0 : 0 : 0 : 1)$ de grau 1.

Podemos também verificar os resultados do teorema anterior. Os casos em que $\ell = 2$ são todos curvas Kunz, nearly normal ou nearly Gorenstein. Por outro lado, se $\ell = 3$ e $m > 0$, a curva ou é Kunz ou de nenhum tipo especial.

Note também que, pelo menos para gênero até 7, não há curvas racionais monomiais contidas no scroll com gonalidade maior que 3. Este não é um fato particular, como veremos a seguir.

Teorema 2.2.4. *O modelo canônico de uma curva monomial racional C , com um único ponto singular, está contida em um scroll se, e somente se, $\text{gon}(C) \leq 3$.*

Demonstração. A volta já é conhecida. Para a ida, seja

$$C' = (1 : t^{b_1} : t^{b_2} : \dots : t^{b_{g-1}}) \subset \mathbb{P}^{g-1}.$$

e tome

$$A = \{b_1, b_2, \dots, b_{g-1}\}.$$

Seja S o semigrupo do ponto singular $P \in C$ e $K = K_P$. Nós temos

$$A = K^*$$

e $b_{g-1} = \beta - 2 = \gamma - 1$. Além disso,

$$\{\gamma - \alpha + 1, \dots, \gamma - 1\} \subset A \text{ e } \gamma - \alpha \notin A$$

pela própria definição de K . Nós temos $\gamma - \alpha < 0$ se e somente se $\alpha = \beta$, isto é, $\mathcal{C}_P = \mathfrak{m}_P$, que é equivalente a dizer que C é nearly normal, e então $\text{gon}(C) = 2$, como podemos ver em [KM, Teo 3.4] e [M1, Teo 2.1]. Por outro lado, $\gamma - \alpha = 0$ nunca acontece pela definição de β . Então devemos assumir $\gamma - \alpha > 0$.

Agora, para termos C' contida em um scroll, pelo Lema 2.2.3, existe uma partição de A em dois subconjuntos, digamos A_1 e A_2 onde o primeiro tem o zero como um de seus elementos, e os dois formam uma progressão aritmética de mesma razão. Chamemos de r esta razão.

Se $r = 1$, então necessariamente

$$A_1 = \{0, 1, 2, \dots, a\}$$

$$A_2 = \{\gamma - \alpha + 1, \gamma - \alpha + 2, \gamma - \alpha + 3, \dots, \gamma - 1\}$$

e pode-se verificar que

$$S^* = \{0, \alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, \dots, \gamma - a - 1, \beta\}$$

Agora seja

$$\mathcal{F} := \mathcal{O}_C \langle 1, t \rangle$$

Nós temos que \mathcal{F} tem grau 1 no ∞ e 0 em todos outros pontos exceto em P . Além disso,

$$\mathcal{F}_P = kt \oplus kt^{\gamma-a} \oplus \mathcal{O}_P$$

por isso $\dim(\mathcal{F}_P/\mathcal{O}_P) = 2$ e $\deg(\mathcal{F}) = 3$. Logo C é trigonal.

Para provarmos o resultado para $r = 2$, assumiremos $\alpha \geq 3$, pois se $\alpha = 1$, $C = \mathbb{P}^1$ e $\text{gon}(C) = 1$; se $\alpha = 2$ então C é hiperelítica, em particular, $\text{gon}(C) = 2$. De fato, se $\alpha = 2$, tome $\mathcal{F} = \mathcal{O}_C\langle 1, t^2 \rangle$. Então \mathcal{F} tem grau 0 em todo ponto menos no ∞ , onde seu grau é 2. Então $\text{deg}(\mathcal{F}) = \text{gon}(C) = 2$.

Mas se $\alpha \geq 3$, então $\gamma - 1, \gamma - 2 \in K$. Agora um dos dois números é par, e deve estar em A_1 já que $r = 2$. Segue que todos os números pares menores que γ estão em K . Seja b o primeiro número ímpar em K .

Se γ é par, então todos os pares positivos menores que γ não estão em S . O que concluímos que

$$S^* = \{0, \gamma - b + 2, \gamma - b + 4, \gamma - b + 6, \dots, \beta - 2, \beta\} \quad (2.10)$$

e se γ é ímpar, todos números ímpares menores que γ não estão em S e teremos que S^* deve ser como (2.10) novamente.

Seja $\mathcal{F} := \mathcal{O}_C\langle 1, t^2 \rangle$. Então \mathcal{F} tem grau 0 em todo ponto menos em P e no ∞ , que possui grau 2. Como

$$\mathcal{F}_P = kt^2 \oplus \mathcal{O}_P$$

temos que \mathcal{F} tem grau 1 em P e $\text{deg}(C) = \text{gon}(C) = 3$.

Para provar o resultado para $r \geq 3$, assumimos que $\alpha \geq 4$, pois se $\alpha = 3$, então $\mathcal{O}_C\langle 1, t^3 \rangle$, tem grau 0 em todo ponto exceto no infinito ∞ , onde seu grau é 3. Assim teremos $\text{gon}(C) \leq \text{deg}(\mathcal{F}) = 3$.

Mas se $\alpha \geq 4$, então $\gamma - 1, \gamma - 2, \gamma - 3 \in K$. Como $r \geq 3$, há três números em diferentes conjuntos da partição que define o scroll. Isto é impossível, a menos que dimensão fosse pelo menos 3, o que não é o caso. \square

Encerramos esta seção com um simples, porém possivelmente importante, resultado sobre curvas monomiais. Isto porque talvez possa ajudar na classificação futura de curvas não Gorenstein a partir de seu modelo canônico.

Teorema 2.2.5. *Duas curvas não hiperelíticas com apenas um ponto singular que é uniramificado e monomial são isomorfas se e somente se os seus modelos canônicos são os mesmos.*

Demonstração. A implicação é imediata. Para provar a recíproca, tome C_1 e C_2 tais curvas. Assuma que $C'_1 = C'_2$, i.e., elas tem o mesmo modelo canônico. Por [R, Teo. 17], toda curva não hiperelítica é birracionalmente equivalente ao seu modelo canônico. Então seus

modelos não singulares \overline{C}_1 e \overline{C}_2 são isomorfos. Portanto basta provar que $\mathcal{O}_{C_1, P_1} \cong \mathcal{O}_{C_2, P_2}$ em que P_1 e P_2 são pontos singulares de C_1 e C_2 , respectivamente. Mas o anel local de dois pontos monomiais com o mesmo número de ramificações são isomorfos se e somente se seus semigrupos de valores coincidem. Assim, provaremos que $S_{P_1} = S_{P_2}$. Temos que $C'_1 = C'_2$ se e só se $H^0(\omega_{C_1}) = H^0(\omega_{C_2})$ que é equivalente a dizer que $H^0(\mathcal{W}_{C_1}) = H^0(\mathcal{W}_{C_2})$. Agora, para $i = 1, 2$, podemos escrever $H^0(\mathcal{W}_{C_i}) = \langle x_1, \dots, x_{\overline{g}_i}, y_1, \dots, y_{\delta_{P_i}} \rangle$, onde \overline{g}_i é o gênero de \overline{C}_i , e δ_{P_i} é o grau de singularidade de P_i . Como $\overline{g}_1 = \overline{g}_2$ segue que $\delta_{P_1} = \delta_{P_2}$. Usando o fato dos pontos serem uniramificados, temos que $v_{P_i}(\{y_1, \dots, y_{\delta_{P_i}}\}) = K_{P_i}^*$ para $i = 1, 2$. Portanto $K_{P_1}^* = K_{P_2}^*$.

Dessa maneira é suficiente provar que o semigrupo de valores tem o mesmo condutor. De fato, em caso afirmativo, $K_{P_1} = K_{P_2}$. Mas se a última igualdade acontece, tome $s \in S_{P_1}$. Então $\gamma - s \notin K_{P_1} = K_{P_2}$. Assim $s = \gamma - (\gamma - s) \in S_{P_2}$. Analogamente temos que $S_{P_2} \subset S_{P_1}$. Então $S_{P_1} = S_{P_2}$ como queríamos.

Vamos então provar que os semigrupos possuem o mesmo condutor, i.e., $\beta_{P_1} = \beta_{P_2}$.

Afirmção: $\gamma_{P_1} < \beta_{P_2}$. De fato, assuma que $\gamma_{P_1} = \beta_{P_2}$, então $\gamma_{P_2} = \gamma_{P_1} - 1 \in K_{P_1}^* = K_{P_2}^*$, logo $\gamma_{P_2} \in K_{P_2}^*$ que não pode acontecer. Agora, se $\gamma_{P_1} > \beta_{P_2}$, nós temos que $\gamma_{P_1} - 1 \in K_{P_1}^* = K_{P_2}^*$, mas $\gamma_{P_1} - 1 \geq \beta_{P_2}$ e, portanto, não podem estar em $K_{P_2}^*$ que é uma outra contradição. Portanto, a afirmação segue e, de forma análoga, $\gamma_{P_2} < \beta_{P_1}$. Logo $\gamma_{P_1} < \beta_{P_2}$ e $\gamma_{P_1} \notin K_{P_2}^*$ implica $\gamma_{P_1} \notin K_{P_2}$ e, semelhantemente, $\gamma_{P_2} \notin K_{P_1}$. Então, por definição, $\gamma_{P_2} - \gamma_{P_1} \in S_{P_2}$ e $\gamma_{P_1} - \gamma_{P_2} \in S_{P_1}$. Mas $S_{P_1}, S_{P_2} \subset \mathbb{N}$. Então $\gamma_{P_2} - \gamma_{P_1} \geq 0$ e $\gamma_{P_1} - \gamma_{P_2} \geq 0$. Então $\gamma_{P_1} = \gamma_{P_2}$ e $\beta_{P_1} = \beta_{P_2}$, como desejávamos. \square

Até aqui analisamos curvas com apenas um ponto singular. Consideremos agora a lista de curvas racionais monomiais com gênero, no máximo, 7, com dois pontos singulares, cujo modelo canônico está contido em um scroll.

Ao contrário da Tabela 1, esta tabela foi computada sem a ajuda de um algoritmo, o qual estamos ainda a procura.

O método foi encontrar, curva a curva, um candidato a feixe dualizante, o que não nos pareceu imediato.

TABELA 2

Gênero 4 - com $g_0 = 2$ e $g_\infty = 2$			
C	C'	gon	Scroll
$C = (1 : t^3 : t^4 : t^5 : t^8)$	$C' = (1 : t : t^3 : t^4)$	3	S_{11}
$C = (1 : t^3 : t^4 : t^5 : t^8 : t^{10})$	$C' = (1 : t : t^3 : t^5)$	3	S_{02}
Gênero 5 - com $g_0 = 2$ e $g_\infty = 3$			
$C = (1 : t^3 : t^4 : t^5 : t^6 : t^{10})$	$C' = (1 : t : t^3 : t^4 : t^5)$	3	S_{12}
$C = (1 : t^3 : t^4 : t^5 : t^7 : t^{12} : t^{14})$	$C' = (1 : t : t^3 : t^5 : t^7)$	3	S_{03}
$C = (1 : t^3 : t^4 : t^5 : t^8)$	$C' = (1 : t : t^3 : t^4 : t^7)$	3	S_{12}
$C = (1 : t^3 : t^4 : t^5 : t^7 : t^9 : t^{12})$	$C' = (1 : t : t^3 : t^4 : t^5)$	3	S_{12}
$C = (1 : t^4 : t^5 : t^6 : t^7 : t^{10})$	$C' = (1 : t : t^2 : t^4 : t^5)$	3	S_{12}
$C = (1 : t^4 : t^5 : t^6 : t^7 : t^{10} : t^{12})$	$C' = (1 : t : t^3 : t^4 : t^5)$	3	S_{03}
$C = (1 : t^3 : t^5 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{12})$	$C' = (1 : t^2 : t^3 : t^4 : t^5)$	3	$S_{03}; S_{12}$
$C = (1 : t^3 : t^5 : t^7 : t^{10} : t^{12})$	$C' = (1 : t^2 : t^3 : t^5 : t^7)$	3	S_{12}

Gênero 6 - com $g_0 = 2$ e $g_\infty = 4$			
C	C'	gon	Scroll
$C = (1 : t^3 : t^4 : t^5 : t^6 : t^7 : t^{12})$	$C' = (1 : t : t^3 : t^4 : t^5 : t^6)$	3	S_{13}
$C = (1 : t^3 : t^4 : t^5 : t^{12} : t^{14})$	$C' = (1 : t : t^3 : t^5 : t^7 : t^9)$	3	S_{04}
$C = (1 : t^3 : t^4 : t^5 : t^7 : t^{10})$	$C' = (1 : t : t^3 : t^4 : t^6 : t^9)$	3	S_{13}
$C = (1 : t^3 : t^4 : t^5 : t^9 : t^{12})$	$C' = (1 : t : t^3 : t^4 : t^6 : t^7)$	3	S_{22}
Gênero 6 - com $g_0 = 3$ e $g_\infty = 3$			
$C = (1 : t^4 : t^5 : t^6 : t^7 : t^{11})$	$C' = (1 : t : t^2 : t^4 : t^5 : t^6)$	3	S_{22}
$C = (1 : t^4 : t^5 : t^6 : t^7 : t^{12} : t^{14})$	$C' = (1 : t : t^2 : t^4 : t^6 : t^8)$	3	S_{04}
$C = (1 : t^3 : t^5 : t^7 : t^{12} : t^{14})$	$C' = (1 : t : t^2 : t^3 : t^5 : t^7)$	3	S_{13}
$C = (1 : t^3 : t^5 : t^7 : t^8 : t^{11})$	$C' = (1 : t^2 : t^3 : t^5 : t^6 : t^9)$	3	S_{13}
$C = (1 : t^3 : t^5 : t^7 : t^{10})$	$C' = (1 : t^2 : t^3 : t^5 : t^6 : t^8)$	3	S_{22}
Gênero 6 - com $g_0 = 4$ e $g_\infty = 2$			
$C = (1 : t^5 : t^6 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{12})$	$C' = (1 : t : t^2 : t^3 : t^5 : t^6)$	3	S_{13}
$C = (1 : t^5 : t^6 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{12} : t^{14})$	$C' = (1 : t : t^2 : t^3 : t^5 : t^7)$	3	S_{13}
$C = (1 : t^3 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{12})$	$C' = (1 : t : t^3 : t^4 : t^6 : t^7)$	3	S_{22}
$C = (1 : t^4 : t^6 : t^7 : t^9 : t^{13} : t^{14})$	$C' = (1 : t^2 : t^3 : t^4 : t^6 : t^8)$	3	S_{04}
Gênero 7 - com $g_0 = 2$ e $g_\infty = 5$			
$C = (1 : t^3 : t^4 : t^5 : t^6 : t^7 : t^8 : t^{14})$	$C' = (1 : t : t^2 : t^3 : t^4 : t^6 : t^7)$	3	S_{14}
$C = (1 : t^3 : t^4 : t^5 : t^{14} : t^{16})$	$C' = (1 : t : t^3 : t^5 : t^7 : t^9 : t^{11})$	3	S_{05}
$C = (1 : t^3 : t^4 : t^5 : t^7 : t^{12} : t^{15})$	$C' = (1 : t : t^3 : t^4 : t^6 : t^7 : t^9)$	3	S_{23}
$C = (1 : t^3 : t^4 : t^5 : t^9 : t^{13} : t^{16})$	$C' = (1 : t : t^3 : t^4 : t^6 : t^7 : t^{10})$	3	S_{23}
Gênero 7 - com $g_0 = 3$ e $g_\infty = 4$			
$C = (1 : t^4 : t^5 : t^6 : t^7 : t^8 : t^{13})$	$C' = (1 : t : t^2 : t^4 : t^5 : t^6 : t^7)$	3	S_{23}
$C = (1 : t^4 : t^5 : t^6 : t^7 : t^{14} : t^{16})$	$C' = (1 : t : t^2 : t^4 : t^6 : t^8 : t^{10})$	3	S_{05}
$C = (1 : t^3 : t^5 : t^7 : t^{14} : t^{16})$	$C' = (1 : t^2 : t^3 : t^5 : t^7 : t^9 : t^{11})$	3	S_{14}
$C = (1 : t^3 : t^5 : t^7 : t^{10})$	$C' = (1 : t^2 : t^3 : t^5 : t^6 : t^8 : t^{11})$	3	S_{23}
$C = (1 : t^3 : t^5 : t^7 : t^8 : t^{12} : t^{15})$	$C' = (1 : t^2 : t^3 : t^5 : t^6 : t^8 : t^9)$	3	S_{23}
Gênero 7 - com $g_0 = 4$ e $g_\infty = 3$			
$C = (1 : t^5 : t^6 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{13})$	$C' = (1 : t : t^2 : t^3 : t^5 : t^6 : t^7)$	3	S_{23}
$C = (1 : t^5 : t^6 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{14} : t^{16})$	$C' = (1 : t : t^2 : t^3 : t^5 : t^7 : t^9)$	3	S_{14}
$C = (1 : t^3 : t^7 : t^8 : t^{11})$	$C' = (1 : t : t^3 : t^4 : t^6 : t^7 : t^{10})$	3	S_{23}
$C = (1 : t^3 : t^7 : t^8 : t^{10} : t^{12} : t^{15})$	$C' = (1 : t : t^3 : t^4 : t^6 : t^7 : t^9)$	3	S_{23}
$C = (1 : t^4 : t^6 : t^7 : t^9 : t^{14} : t^{16})$	$C' = (1 : t^2 : t^3 : t^4 : t^6 : t^8 : t^{10})$	3	S_{05}

Note que o Teorema 2.2.4 continua válido para curvas C monomiais racionais não Gorenstein com dois pontos singulares de gênero até 7.

Capítulo 3

Modelos Canônicos em Scrolls Tridimensionais

Neste capítulo, estudaremos curvas não Gorenstein cujo modelo canônico está contido no scroll racional normal tridimensional. Nosso objetivo é obter resultados similares aos que tivemos no capítulo anterior. Para isto, precisamos colocar o problema dentro de um quadro mais intrínseco, fazendo uso da caracterização de scrolls como projetivização de um fibrado.

3.1 Descrição do S_{mnr}

De uma forma muito construtiva, prova-se em [Rd, Teo 2.5 p. 17] a existência do isomorfismo

$$\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(r)) \xrightarrow{\sim} S_{mnr} \subset \mathbb{P}^{m+n+r+2} \quad (3.1)$$

Na verdade o resultado é válido para scrolls de qualquer dimensão.

Seja $S := S_{mnr}$ e $\mathcal{E} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(r)$. De acordo com [EH, p. 5 mid], o scroll S é também a imagem do morfismo racional induzido pelo fibrado tautológico $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$. Por definição, S é a união disjunta de planos determinados por um parâmetro comum de três curvas racionais normais de grau m, n, r contidas em espaços projetivos complementares. O isomorfismo em (3.1) é tal que toda fibra de $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{P}^1$ é levada a um plano, que nós chamamos de a fibra sobre S . Portanto, de acordo com [Rd, Lem. 2.7 p. 18], nós temos que

$$\text{Pic}(\mathbb{P}(\mathcal{E})) = \mathbb{Z}H \oplus \mathbb{Z}F$$

em que F é a classe da fibra, e, se S é suave, H é a classe de hiperplanos.

Agora, definimos o *bigrau* de uma superfície $M \subset S$ como

$$\text{bideg}(M) := (a, b)$$

se é escrita como

$$M = aH + bF \in \text{Pic}(S).$$

3.2 Modelo canônico em S_{mnr}

Tendo em mente o que foi feito na seção anterior, nós provamos o seguinte resultado.

Teorema 3.2.1. *Seja C curva não Gorenstein de gênero $g \geq 6$, cujo modelo canônico C' está contido em um scroll de dimensão três S , visto como interseção de duas superfícies de S de bigraus (a, b) e (c, d) , com a, b, c e $d \geq 0$. Seja ℓ o número genérico de pontos de interseção de C' e um plano em S , então*

(i) $\ell \leq 2$.

(ii) *Se $\ell = 1$ então $C' \cong \mathbb{P}^1$ e, em particular, C é racional e os pontos singulares de C são não Gorenstein. Mais ainda, C é nearly Gorenstein se e somente se $b = d = 1$.*

(iii) *Se $\ell = 2$ então C é nearly Gorenstein. C é também Kunz se e somente se (a, b) ou (c, d) é da forma $(2, 1)$.*

Demonstração. Seja $S := S_{mnr}$ um scroll tridimensional e tome $X \subset S$ a curva dada pela interseção de duas superfícies de S de bigraus (a, b) e (c, d) . Então, no anel de Chow $A(S)$, nós podemos escrever

$$X = (aH + bF) \cdot (cH + dF)$$

Agora vamos calcular o grau de $X \subset \mathbb{P}^{m+n+r+2}$. Ele corresponde à interseção de X com a classe de hiperplanos H em $A(S)$. Como as fibras não se cruzam, então $F^2 = 0$. Além disso, a partir da descrição (extrínseca) geométrica do scroll, deduzimos, [EH, p. 7 mid], que $\deg S = H^3 = m + n + r$. Consequentemente

$$\begin{aligned} \deg X &= (aH + bF)(cH + dF)H \\ &= acH^3 + (ad + bc)H^2F + bdHF^2 \\ &= acH^3 + (ad + bc)H^2F \\ &= ac(m + n + r) + (ad + bc)H^2F \end{aligned}$$

Assim basta saber o valor de H^2F . A partir de [Rd, Ch. A.4, Claim p. 28] nós temos que $H^2F = 1$, então

$$\deg X = ac(m + n + r) + ad + bc \quad (3.2)$$

Para calcular o gênero aritmético de X , escreva a resolução de \mathcal{O}_X como

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-(a+c)H - (b+d)F) \rightarrow \mathcal{O}_S(-aH - bF) \oplus \mathcal{O}_S(-cH - dF) \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

Então

$$\begin{aligned} p_a(X) &= 1 - \chi(\mathcal{O}_X) \\ &= 1 - \chi(\mathcal{O}_S) + \chi(\mathcal{O}_S(-aH - bF)) + \chi(\mathcal{O}_S(-cH - dF)) \\ &\quad - \chi(\mathcal{O}_S(-(a+c)H - (b+d)F)) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Vamos, agora, calcular a característica de Euler. Seja \mathcal{T}_S o fibrado tangente e K_S o feixe canônico. Para simplificar, escreva $c_i := c_i(\mathcal{T}_S)$ para as classes de Chern. Tome um $D \in \text{Pic}(S)$ arbitrário. Pelo Teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch nós temos que

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{O}_S(D)) &= \deg(\text{ch}(\mathcal{O}_S(D)) \cdot \text{td}(\mathcal{T}_S))_3 \\ &= \deg \left(\left(1 + D + \frac{1}{2} D^2 + \frac{1}{6} D^3 \right) \left(1 + \frac{1}{2} c_1 + \frac{1}{12} (c_1^2 + c_2) + \frac{1}{24} c_1 c_2 \right) \right)_3 \\ &= \frac{1}{24} c_1 c_2 + \frac{1}{12} D(c_1^2 + c_2) + \frac{1}{4} D^2 c_1 + \frac{1}{6} D^3 \\ &= 1 - p_a(S) + \frac{1}{12} D(c_1^2 + c_2) + \frac{1}{4} D^2 c_1 + \frac{1}{6} D^3 \\ &= 1 + \frac{1}{12} D((K_S)^2 + c_2) - \frac{1}{4} D^2 K_S + \frac{1}{6} D^3 \end{aligned}$$

Agora $K_S = -3H + (e-2)F$ onde $e := m + n + k$. Portanto

$$\chi(\mathcal{O}_S(D)) = 1 + \frac{1}{12} D(9H^2 + 6(2-e)HF + c_2) + \frac{1}{4} D^2(3H + (2-e)F) + \frac{1}{6} D^3 \quad (3.4)$$

Para calcular a segunda classe de Chern do fibrado tangente, escreva

$$c_2 = pH^2 + qHF$$

Por um lado, note que

$$\begin{aligned} 1 &= 1 - p_a(S) = \frac{1}{24} c_1 c_2 = \frac{1}{24} (3H + (2-e)F)(pH^2 + qHF) \\ &= \frac{1}{24} (3pH^3 + (3q + (2-e)p)H^2F) \\ &= \frac{1}{24} (3pe + 3q + (2-e)p) \end{aligned}$$

então temos

$$2(e+1)p + 3q = 24 \quad (3.5)$$

Por outro lado, note que $\chi(\mathcal{O}_S(H)) = e + 3$ já que $H^0(\mathcal{O}_S(H)) = e + 3$ e $H^i(\mathcal{O}_S(H)) = 0$ para $i > 0$. Fazendo $D = H$ em (3.4) obtemos

$$e + 3 = 1 + \left(\frac{20+p}{12}\right)H^3 + \left(\frac{18-9e+q}{12}\right)H^2F$$

logo

$$ep + q = e + 6 \quad (3.6)$$

Combinando (3.5) e (3.6) chegamos a

$$c_2 = 3H^2 + (6 - 2e)HF$$

Agora, escrevendo $D = hH + fF$ e substituindo c_2 em (3.4) temos

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{O}_S(D)) = 1 + & \frac{(hH + fF)(12H^2 + (18 - 8e)HF)}{12} + \\ & + \frac{(h^2H^2 + 2hfHF)(3H + (2 - e)F)}{4} + \frac{(h^3H^3 + 3h^2fH^2F)}{6} \end{aligned}$$

que nos dá

$$\chi(\mathcal{O}_S(hH + fF)) = 1 + \frac{2e-9}{6}h + f + \frac{e+1}{2}h^2 + \frac{3}{2}hf + \frac{e}{6}h^3 + \frac{1}{2}h^2f \quad (3.7)$$

Combinando (3.3) e (3.7) temos

$$p_a(X) = ac \left(b + d - 1 + \frac{e(a+c-2)}{2} \right) + \frac{ad(a-3) + bc(c-3)}{2} + 1 \quad (3.8)$$

Aplicando (3.2) ao modelo canônico $C' \subset \mathbb{P}^{g-1}$, temos que

$$\deg(C') = eac + ad + bc. \quad (3.9)$$

Seja g' o gênero de C' . Segue que

$$\begin{aligned} \deg(C') &= 2g - 2 - \eta \\ &= 2(g' + \eta + \mu) - 2 - \eta \\ &= 2g' + \eta + 2\mu - 2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Agora, suponha que $C' \subset S$ e que é dada pela interseção de superfícies de bigraus (a, b) e (c, d) . Nesse caso, combinando (3.8), (3.9) e (3.10), somos levados a

$$eac + ad + bc = (2(b+d-1) + e(a+c-2))ac + (a-3)ad + (c-3)bc + \eta + 2\mu$$

mas como $e = g - 3$ teremos

$$((g - 3)(3 - a - c) + 2(1 - b - d))ac + (4 - a)ad + (4 - c)bc - \eta - 2\mu = 0. \quad (3.11)$$

Computemos agora o valor de ℓ . Por definição, ℓ é o número genérico de pontos de interseção de C' e um plano em S . Mas os planos em S são as fibras. Então

$$\begin{aligned} \ell &= (aH + bF)(cH + dF)F \\ &= acH^2F + (ad + bc)HF^2 + bdF^3 \end{aligned}$$

Lembrando que $H^2F = 1$ e $F^2 = 0$, nós temos

$$\ell = ac \quad (3.12)$$

Considere agora $\ell = 1$. Primeiramente, os planos de S cortam um g_1^1 de C' , então $C' \cong \mathbb{P}^1$ e, em particular, C é racional, e seus pontos singulares são não Gorenstein. Além disso, como $g' = 0$ podemos escrever $g = \eta + \mu$, e considerando $\ell = 1$ encontramos $a = c = 1$ por (3.12). Substituindo esses valores em (3.11), chegamos a

$$b + d - \mu - 1 = 0$$

e o item (ii) segue.

Se $\ell = 2$ teremos $a = 2$ e $c = 1$ ou $a = 1$ e $c = 2$ por (3.12). Sem perda de generalidade, assumamos que o primeiro caso ocorre. Substituindo esses valores em (3.11), temos

$$4 - b - \eta - 2\mu = 0$$

mas como $b \geq 0$ e $\eta, \mu \geq 1$, segue que $\mu = 1$, isto é, C é nearly Gorenstein. A curva será também Kunz se e somente se $b = 1$ e o item (iii) segue. Pode-se verificar que ℓ não pode ser maior ou igual a 3, e o item (i) segue como queríamos. □

A fim de exemplificarmos o teorema acima, segue a Tabela 3, que contém a lista de todas as curvas não Gorenstein de gênero no máximo 8, com um único ponto singular, cujo modelo canônico está contido em um scroll de dimensão 3, mas não em um scroll de dimensão 2.

TABELA 3

g	C	gon	C'	Scroll
6	$(1 : t^4 : t^7 : t^8 : t^9)$	4	$(1 : t^4 : t^5 : t^7 : t^8 : t^9)$	S_{012}
	$(1 : t^4 : t^7 : t^{10} : t^{12} : t^{13})$	4	$(1 : t^3 : t^4 : t^6 : t^7 : t^8)$	S_{012}
	$(1 : t^5 : t^6 : t^{13} : t^{14})$	4	$(1 : t^2 : t^5 : t^6 : t^7 : t^8)$	$S_{111}; S_{003}$
	$(1 : t^5 : t^7 : t^8 : t^{11} : t^{12} : t^{13})$	4	$(1 : t^3 : t^5 : t^6 : t^7 : t^8)$	S_{012}
7	$(1 : t^4 : t^7 : t^{12} : t^{13})$	4	$(1 : t : t^4 : t^5 : t^7 : t^8 : t^9)$	$S_{112}; S_{022}$
	$(1 : t^4 : t^9 : t^{14} : t^{15})$	4	$(1 : t^3 : t^4 : t^5 : t^7 : t^8 : t^9)$	$S_{022}; S_{112}$
	$(1 : t^4 : t^9 : t^{10} : t^{11} : t^{15})$	4	$(1 : t^4 : t^5 : t^6 : t^8 : t^9 : t^{10})$	$S_{022}; S_{112}$
	$(1 : t^4 : t^{10} : t^{11} : t^{12} : t^{13})$	4	$(1 : t^2 : t^3 : t^4 : t^6 : t^7 : t^8)$	$S_{022}; S_{112}; S_{004}$
	$(1 : t^5 : t^7 : t^{11} : t^{12} : t^{13})$	4	$(1 : t : t^3 : t^5 : t^6 : t^7 : t^8)$	S_{013}
	$(1 : t^5 : t^7 : t^8)$	4	$(1 : t^2 : t^5 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{10})$	S_{112}
	$(1 : t^5 : t^7 : t^9 : t^{14} : t^{13})$	4	$(1 : t^3 : t^5 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{10})$	S_{013}
	$(1 : t^5 : t^8 : t^{11} : t^{12} : t^{13} : t^{14})$	4	$(1 : t^2 : t^3 : t^5 : t^6 : t^7 : t^8)$	$S_{013}; S_{022}$
	$(1 : t^5 : t^8 : t^9 : t^{11} t^{12})$	4	$(1 : t^4 : t^5 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{10})$	S_{013}
	$(1 : t^5 : t^8 : t^9 : t^{10} : t^{11})$	4	$(1 : t^5 : t^6 : t^8 : t^9 : t^{10} : t^{11})$	S_{013}
	$(1 : t^6 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{10})$	4	$(1 : t^2 : t^6 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{10})$	S_{112}
	$(1 : t^6 : t^8 : t^9 : t^{10} : t^{12} : t^{13})$	4	$(1 : t^4 : t^6 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{10})$	S_{013}
$(1 : t^6 : t^8 : t^9 : t^{11} : t^{12} : t^{13})$	4	$(1 : t^3 : t^5 : t^6 : t^7 : t^8 : t^9)$	S_{013}	
8	$(1 : t^4 : t^{11} : t^{13} : t^{14})$	4	$(1 : t : t^3 : t^4 : t^5 : t^7 : t^8 : t^9)$	S_{122}
	$(1 : t^4 : t^{10} : t^{13} : t^{14} : t^{15})$	4	$(1 : t^2 : t^4 : t^5 : t^6 : t^8 : t^9 : t^{10})$	S_{005}
	$(1 : t^4 : t^{10} : t^{11} : t^{16} : t^{17})$	4	$(1 : t^4 : t^6 : t^7 : t^8 : t^{10} : t^{11} : t^{12})$	S_{113}
	$(1 : t^4 : t^9 : t^{14} : t^{15})$	4	$(1 : t : t^4 : t^5 : t^6 : t^8 : t^9 : t^{10})$	S_{113}
	$(1 : t^4 : t^9 : t^{10} : t^{11})$	4	$(1 : t^4 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{11} : t^{12} : t^{13})$	S_{113}
	$(1 : t^4 : t^7 : t^{16} : t^{17})$	4	$(1 : t^3 : t^4 : t^7 : t^8 : t^{10} : t^{11} : t^{12})$	$S_{122}; S_{023}$
	$(1 : t^5 : t^9 : t^{12} : t^{13} : t^{15} : t^{16})$	4	$(1 : t^3 : t^4 : t^5 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{10})$	S_{023}
	$(1 : t^5 : t^9 : t^{11} : t^{13} : t^{16} : t^{17})$	4	$(1 : t^4 : t^5 : t^6 : t^8 : t^9 : t^{10} : t^{11})$	S_{023}
	$(1 : t^5 : t^9 : t^{11} : t^{12})$	4	$(1 : t^5 : t^6 : t^7 : t^9 : t^{10} : t^{11} : t^{12})$	S_{023}
	$(1 : t^5 : t^8 : t^{12} : t^{13} : t^{14})$	4	$(1 : t^2 : t^4 : t^5 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{10})$	S_{122}

g	C	gon	C'	Scroll
8	$(1 : t^5 : t^8 : t^{14} : t^{16} : t^{17})$	4	$(1 : t^3 : t^5 : t^6 : t^8 : t^9 : t^{10} : t^{11})$	S_{023}
	$(1 : t^5 : t^7 : t^{13} : t^{15} : t^{16})$	4	$(1 : t^2 : t^3 : t^5 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{10})$	S_{113}
	$(1 : t^5 : t^7 : t^8 : t^9)$	4	$(1 : t^2 : t^5 : t^7 : t^9 : t^{10} : t^{11} : t^{12})$	S_{113}
	$(1 : t^5 : t^6 : t^{13} : t^{14})$	4	$(1 : t^4 : t^5 : t^6 : t^9 : t^{10} : t^{11} : t^{12})$	S_{023}
	$(1 : t^5 : t^6 : t^{12} : t^{13})$	4	$(1 : t^5 : t^6 : t^7 : t^{10} : t^{11} : t^{12} : t^{13})$	S_{023}
	$(1 : t^6 : t^9 : t^{11} : t^{14} : t^{15} : t^{16})$	4	$(1 : t^2 : t^3 : t^5 : t^6 : t^7 : t^8 : t^9)$	$S_{023}; S_{113}$
	$(1 : t^6 : t^9 : t^{10} : t^{13} : t^{14} : t^{16} : t^{17})$	4	$(1 : t^3 : t^4 : t^6 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{10})$	$S_{014}; S_{023}$
	$(1 : t^6 : t^9 : t^{10} : t^{11} : t^{13} : t^{14})$	4	$(1 : t^5 : t^6 : t^8 : t^9 : t^{10} : t^{11} : t^{12})$	S_{014}
	$(1 : t^6 : t^9 : t^{10} : t^{11} : t^{12} : t^{13})$	4	$(1 : t^6 : t^7 : t^9 : t^{10} : t^{11} : t^{12} : t^{13})$	S_{014}
	$(1 : t^6 : t^8 : t^{11} : t^{13} : t^{14} : t^{15})$	4	$(1 : t : t^3 : t^5 : t^6 : t^7 : t^8 : t^9)$	S_{014}
	$(1 : t^6 : t^8 : t^{10} : t^{11} : t^{14} : t^{15})$	4	$(1 : t^4 : t^6 : t^8 : t^9 : t^{10} : t^{11} : t^{12})$	S_{014}
	$(1 : t^6 : t^8 : t^9 : t^{12} : t^{13})$	4	$(1 : t : t^4 : t^6 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{10})$	S_{014}

Para um scroll bidimensional, temos, como provado no capítulo anterior, que o modelo canônico C' de uma curva racional monomial C está contida no scroll se e somente se C for trigonal. Analisando a tabela acima notamos que a gonalidade de toda curva monomial racional que está contida em um scroll de dimensão 3 mas não em um scroll bidimensional é 4. Isto nos leva a pensar que, provavelmente, um resultado similar exista para scrolls tridimensionais.

Teorema 3.2.2. *O modelo canônico de uma curva racional monomial C , com um único ponto singular, está contido em um scroll tridimensional mas não em um scroll bidimensional se e somente se $\text{gon}(C) = 4$.*

Demonstração. Seja C' , S , K e A como na prova do Teorema 2.2.4. Suponha, primeiramente, que C' está contida em um scroll tridimensional mas não em um scroll bidimensional. Pelo Lema 2.2.3, existe uma partição de A em três subconjuntos, digamos A_1 , A_2 e A_3 em que o primeiro tem o zero como elemento e o terceiro tem $\gamma - 1$, e todos os três formam uma progressão aritmética de mesma razão. Seja r esta razão. Se $r = 1$, então necessariamente

$$A_1 = \{0, 1, 2, \dots, a\}$$

$$A_2 = \{b, b + 1, b + 2, \dots, c\}$$

$$A_3 = \{\gamma - \alpha + 1, \gamma - \alpha + 2, \gamma - \alpha + 3, \dots, \gamma - 1\}$$

e pode-se verificar que

$$S = \{0, \alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, \dots, \gamma - b - 1, \gamma - b + 1, \gamma - b + 2, \gamma - b + 3, \dots, \gamma - a - 1, \beta\}$$

Agora seja

$$\mathcal{F} := \mathcal{O}_C\langle 1, t \rangle$$

Temos que \mathcal{F} tem grau 1 no ∞ e 0 em todo ponto exceto em P . Além disso,

$$\mathcal{F}_P = kt \oplus kt^{\gamma-c} \oplus kt^{\gamma-a} \oplus \mathcal{O}_P$$

dessa forma $\dim(\mathcal{F}_P/\mathcal{O}_P) = 3$ e $\deg(\mathcal{F}) = 4$. Assim $\text{gon}(C) \leq 4$. Ela tem que ser 4, pois caso contrário C' estaria contida em um scroll bidimensional pelo Teorema 2.2.4.

Se $r = 2$, escreva

$$A_1 = \{0, 2, 4, \dots, a\}$$

$$A_2 = \{b, b + 2, b + 4, \dots, c\}$$

$$A_3 = \{d, d + 2, d + 4, \dots, e\}$$

com $b < d$. Podemos assumir $\alpha \geq 3$. Mas se $\alpha \geq 3$, então $\gamma - 1, \gamma - 2 \in K$. Devemos considerar dois casos.

Caso 1. γ é par.

Dessa forma, $e = \gamma - 1$. Se $a = \gamma - 2$, então todos os números pares estão em K . Temos b e d números ímpares, e, também, todos os pares positivos menores que γ não estão em S pois o elemento simétrico $\gamma - i$ é par para todo par i . Então α é ímpar. Além disso $\alpha > \gamma/2$ já que 2α é par, e nenhum número positivo par pertence a S^* , logo $2\alpha > \beta$. Temos também que $\gamma - \alpha$ é ímpar e não pertence a K . Então $d = \gamma - \alpha + 2$ e $c < \gamma - \alpha$. Conclui-se que

$$S^* = \{0, \alpha, \alpha + 2, \alpha + 4, \dots, \gamma - c - 2, \gamma - b + 2, \gamma - b + 4, \gamma - b + 6, \dots, \beta - 2, \beta\} \quad (3.13)$$

Agora seja

$$\mathcal{F} := \mathcal{O}_C\langle 1, t^2 \rangle \quad (3.14)$$

Nós temos que \mathcal{F} tem grau 2 no ∞ e 0 em todo ponto exceto em P . Além disso,

$$\mathcal{F}_P = kt^2 \oplus kt^{\gamma-c} \oplus \mathcal{O}_P$$

assim $\dim(\mathcal{F}_P/\mathcal{O}_P) = 2$ e $\deg(\mathcal{F}) = 4$. Logo $\text{gon}(C) \leq 4$ que, como visto acima, é suficiente para nossos propósitos.

Se $a \neq \gamma - 2$, todos os números ímpares estão em K , b é par e d é ímpar, e, igualmente, todos ímpares positivos menores que γ não estão em S . Então α é par.

Afirmção: $\alpha > \gamma/2$. De fato, caso contrário, como $\gamma - \alpha$, que não pertence a K , é par, implica $\alpha \in A_1$; além disso, $\gamma - \alpha < n\alpha < \gamma - 1$ para um inteiro n , então $\gamma - n\alpha < \alpha$ não pertence a K , que contradiz o fato de $\alpha \in A_1$ e prova o que afirmamos. Por isso

$$S^* = \{0, \alpha, \alpha + 2, \alpha + 4, \dots, \gamma - a - 2, \beta\}. \quad (3.15)$$

Tomando \mathcal{F} como em (3.14), temos que \mathcal{F} tem grau 2 no ∞ e 0 em todo ponto menos em P . Além disso,

$$\mathcal{F}_P = kt^2 \oplus kt^{\gamma-a} \oplus \mathcal{O}_P$$

assim $\dim(\mathcal{F}_P/\mathcal{O}_P) = 2$ e $\deg(\mathcal{F}) = 4$.

Caso 2. γ é ímpar.

Se $a = \gamma - 1$, então todos números pares estão em K . Temos b e d números ímpares, e, também, todos inteiros ímpares positivos menores que γ não pertencem a S . Então α é par. Neste caso não há restrição a α comparado a $\gamma/2$ e pode-se verificar que S^* pode ser escrito exatamente como em (3.13).

Se $a \neq \gamma - 1$, todos números ímpares pertencem a K , b é par e d é ímpar, e, igualmente, todos inteiros pares menores que γ não pertencem a S . Então α é ímpar. Além disso $\alpha > \gamma/2$ já que $2\alpha > \gamma$, e S^* pode ser escrito exatamente como em (3.15). Assim, podemos usar (3.14) para calcular que a gonalidade é 4.

Para provar a suficiência para $r = 3$, podemos assumir $\alpha \geq 4$. De fato, se $\alpha = 1$ temos $C = \mathbb{P}^1$ cuja gonalidade é 1, se $\alpha = 2$, C é hiperelítica, e se $\alpha = 3$, então $\mathcal{O}(1, t^3)$ computa gonalidade 3 para C . Em todo caso, C' está contida em um scroll bidimensional devido ao Teorema 2.2.4. Portanto, $\gamma - 1, \gamma - 2, \gamma - 3$ estão em K e pertencem a diferentes subconjuntos da partição de A . Em particular, todos os múltiplos de 3 menores que γ pertencem a K . Temos então três opções: $\gamma = 3n$, $\gamma = 3n + 1$ ou $\gamma = 3n + 2$ para $n \in \mathbb{N}$. Se $\gamma = 3k$, o simétrico de um múltiplo de 3 é um múltiplo de 3 também, então nenhum múltiplo de 3 está em S^* . Se b (resp. d) é o primeiro inteiro positivo em S congruente a 1 (resp. 2) mod 3, é fácil ver que

$$S^* = \{0, b, b + 3, b + 6, \dots, \gamma - 2\} \cup \{d, d + 3, d + 6, \dots, \gamma - 1\} \cup \{\beta\}$$

Seja $\mathcal{F} := \mathcal{O}_C(1, t^3)$. Então \mathcal{F} tem grau 0 em todo ponto exceto em P e no ∞ , onde tem grau 3. Além disso $\mathcal{F}_P = kt^3 \oplus \mathcal{O}_P$, então \mathcal{F} tem grau 1 em P e $\deg(\mathcal{F}) = \text{gon}(C) = 4$.

Se $\gamma = 3n + 1$ ou $\gamma = 3n + 2$ para $n \in \mathbb{N}$, a prova é análoga.

Agora, se $r > 3$, podemos assumir $\alpha \geq 5$, pois se $\alpha = 4$, então $\mathcal{F} := \mathcal{O}_C\langle 1, t^4 \rangle$ tem grau 4 e é o que precisamos. Assim se $\alpha \geq 5$, então $\gamma - 1, \gamma - 2, \gamma - 3, \gamma - 4 \in K$ e estão em diferentes subconjuntos da partição de A . Mas isto não pode ocorrer.

Reciprocamente, suponha que $\text{gon}(C) = 4$ e vamos provar que C' está contida em um scroll tridimensional mas não em um scroll de dimensão 2. Por [AM, p. 10], a gonalidade de C é computada pelo feixe

$$\mathcal{F} := \mathcal{O}\langle 1, t^n \rangle$$

para algum $n \in \mathbb{Z}$ diferente de zero. Note que

$$\text{deg}_\infty \mathcal{F} = \begin{cases} n & \text{se } n > 0 \\ 0 & \text{se } n \leq 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

além disso,

$$\text{deg}_P(\mathcal{F}) = \#(v(\mathcal{F}_P) \setminus S) = \#\{s \in S \mid s + n \notin S\} \quad (3.17)$$

e o grau de \mathcal{F} é zero em todo ponto. Em particular, se n é positivo, então $1 \leq n \leq 4$ já que C tem gonalidade 4.

Para o restante, vamos analisar as possibilidades de S de acordo com cada n . Para isto, vamos dividir o semigrupo em blocos de inteiros consecutivos, isto é, escreva

$$S = \{0\} \cup B_1 \cup \dots \cup B_b \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq \beta\}$$

onde

$$B_i = \{s_i, s_i + 1, \dots, s_i + l_i\}$$

com $s_i + l_i + 1 \notin S$ e também $s_i < s_j$ se $i < j$. Isso é, B_i é o i -ésimo bloco de inteiros consecutivos de S , e b é o número de blocos de inteiros positivos em S menores que o condutor β .

Caso 1. $n = 1$.

Se assim for, $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t \rangle$ e $\text{deg}_\infty(\mathcal{F}) = 1$. Então $\text{deg}_P(\mathcal{F}) = 3$. A partir de (3.17) é fácil ver que $\text{deg}_P(\mathcal{F}) = b + 1$, então $b = 2$, isto é, S tem dois blocos.

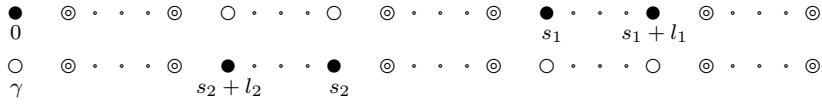
Para calcular K^* por meio de S^* nós fazemos uma figura da seguinte maneira:

- (a) cada inteiro de 0 a γ corresponde a um círculo;
- (b) na primeira linha, temos de 0 a $\lfloor \gamma/2 \rfloor$ ordenados da esquerda para direita;
- (c) a segunda linha, vai de $\lceil \gamma/2 \rceil$ a γ ordenados da direita para a esquerda;

(d) os elementos de S são pretos, os de $K \setminus S$ são circulados duplamente, e os números restantes são brancos.

Em outras palavras, a figura é esboçada de maneira que a e $\gamma - a$ estão na mesma coluna, para todo a , assim K^* pode ser facilmente calculado. Basta notar também que a e $\gamma - a$ não podem estar ambos em S , caso contrário γ deveria pertencer a S , o que não ocorre.

Há duas possibilidades para S^* (e K^*). A primeira é

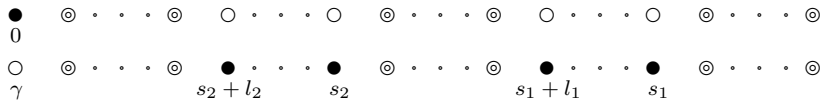


Portanto podemos dividir K^* em três subconjuntos de mesma razão 1, a saber:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \{0, 1, \dots, \gamma - (s_2 + l_2 + 1)\} \\
 A_2 &= \{\gamma - s_2 + 1, \gamma - s_2 + 2, \dots, \gamma - (s_1 + l_1 + 1)\} \\
 A_3 &= \{\gamma - s_1 + 1, \gamma - s_1 + 2, \dots, \gamma - 1\}
 \end{aligned}$$

logo C' está contida em um scroll de dimensão 3.

A segunda possibilidade é



e novamente podemos dividir K^* em três subconjuntos de razão 1, que coincidem com A_1, A_2, A_3 acima, então C' está contida, também, em um scroll tridimensional.

Caso 2. $n = 2$.

Se assim for, $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t^2 \rangle$ e $\deg_\infty(\mathcal{F}) = 2$. Então $\deg_P(\mathcal{F}) = 2$. Para o conjunto restante

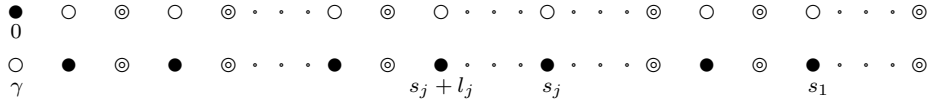
$$E := \{s + 2 \notin S \mid s \in S\}$$

e relembremos, de (3.17), que

$$2 = \deg_P(\mathcal{F}) = \#(E)$$

Note que $2 \in E$. Além disso, se existe um bloco $B_j = \{s_j, s_j + 1, \dots, s_j + l_j\} \subset S^*$ com $l_j \geq 1$, então $s_j + l_j + 1 \in E$. Portanto, existe, no máximo, um tal bloco, e devemos ter $s_j \geq \lceil \gamma/2 \rceil$ caso contrário, existiria um outro bloco B_m com $l_m = 2l_j$. Além disso, $s_i + l_i + 2 \in S$ para

todo i . Finalmente, $s_1 > \lceil \gamma/2 \rceil$, caso contrário $\gamma \in S$, o que não pode acontecer, e $s_1 + 2i \in S$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Então, se existe um bloco com mais que um elemento, a figura genérica é

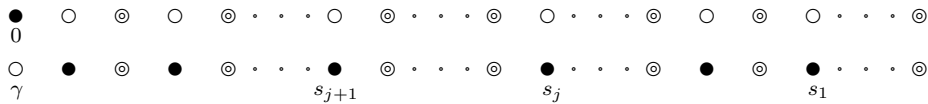


Assim podemos dividir K^* em três subconjuntos com razão 2, a saber:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{0, 2, \dots, \gamma - (s_j + l_j + 1)\} \\ A_2 &= \{\gamma - s_j + 1, \gamma - s_j + 3, \dots, \gamma - 1 \text{ or } \gamma - 2\} \\ A_3 &= \{\gamma - s_1 + 2, \gamma - s_1 + 4, \dots, \gamma - 1 \text{ or } \gamma - 2\} \end{aligned}$$

então C' está contida em um scroll tridimensional.

Se todos os blocos tem apenas um elemento, então existe um único s_j tal que $s_j + 2 \notin S$, e a figura genérica é



Assim podemos dividir K^* em três subconjuntos com razão 2, a saber:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{0, 2, \dots, \gamma - s_j - 2 \text{ or } \gamma - 1 \text{ or } \gamma - 2\} \\ A_2 &= \{\gamma - s_{j+1} + 2, \gamma - s_{j+1} + 4, \dots, \gamma - s_j - 2 \text{ or } \gamma - 1 \text{ or } \gamma - 2\} \\ A_3 &= \{\gamma - s_1 + 2, \gamma - s_1 + 4, \dots, \gamma - 1 \text{ or } \gamma - 2\} \end{aligned}$$

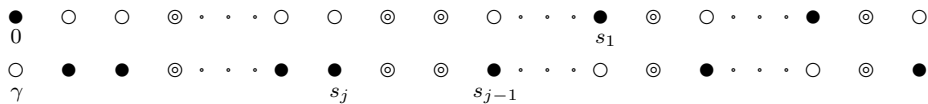
então C' está contida em um scroll tridimensional.

Caso 3. $n = 3$.

Se assim for, $\mathcal{F} = \mathcal{O}(1, t^3)$ e $\deg_\infty(\mathcal{F}) = 3$. Então

$$1 = \deg_P(\mathcal{F}) = \#(E := \{s + 3 \notin S \mid s \in S\})$$

Podemos assumir $\alpha \geq 4$, caso contrário $\deg(\mathcal{F}) = 3$ e C é trigonal. Portanto $3 \in E$. Este fato nos fornece que $s + 3 \in S$ para todo $s \in S \setminus \{0\}$, assim os blocos B_i tem no máximo 2 elementos. Seja B_j o primeiro bloco com 2 elementos. Claramente, $s_j \geq \lceil \gamma/2 \rceil$ caso contrário, existiria um outro bloco com 3 elementos. A figura genérica para este caso é



e podemos dividir K^* em três subconjuntos com razão 3, a saber:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{0, 3, \dots, \gamma - 1 \text{ or } \gamma - 2 \text{ or } \gamma - 3\} \\ A_2 &= \{\gamma - s_j + 2, \gamma - s_j + 4, \dots, \gamma - 1 \text{ or } \gamma - 2 \text{ or } \gamma - 3\} \\ A_3 &= \{s_1 \text{ or } s_{j-1} \pm 1, \dots, \gamma - 1 \text{ or } \gamma - 2 \text{ or } \gamma - 3\} \end{aligned}$$

logo C' está contida em um scroll tridimensional. O caso em que não há blocos com 2 elementos é similar.

Caso 4. $n = 4$.

Neste caso, $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t^4 \rangle$ e $\deg_\infty(\mathcal{F}) = 4$. Então

$$0 = \deg_P(\mathcal{F}) = \#(E := \{s + 4 \notin S \mid s \in S\})$$

Note novamente que $\alpha \geq 4$ pois caso contrário C deverá ser trigonal. Assim efetivamente $\alpha = 4$ desde que $E = \emptyset$. Então todo múltiplo de 4 está em S . Seja a tal que $\gamma \equiv a \pmod{4}$. Claramente, γ não é múltiplo de 4, portanto podemos escrever $\{1, 2, 3\} = \{a, b, c\}$. Nós temos que S^* admite no máximo dois elementos, digamos b' e c' , para os quais $b' \equiv b \pmod{4}$ e $c' \equiv c \pmod{4}$. Vamos considerar três casos. O primeiro deles é o que tanto b' quanto c' não existem. Assim, podemos dividir K^* em três subconjuntos de razão 4, a saber:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{0, 4, 8, \dots, \gamma - a\} \\ A_2 &= \{b, b + 4, b + 8, \dots, \gamma - c\} \\ A_3 &= \{c, c + 4, c + 8, \dots, \gamma - b\} \end{aligned}$$

então C' está contida em um scroll tridimensional.

Se existir tal b' , mas não c' em S^* , então podemos dividir K^* em três subconjuntos de razão 4, a saber:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{0, 4, 8, \dots, \gamma - a\} \\ A_2 &= \{c, c + 4, c + 8, \dots, \gamma - b\} \\ A_3 &= \{\gamma - b' + 4, \gamma - b' + 8, \dots, \gamma - c\} \end{aligned}$$

assim C' vive em um scroll tridimensional.

Finalmente, se existe tanto b' quanto c' em S^* , então podemos dividir K^* em três sub-

conjuntos de mesma diferença 4, a saber:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{0, 4, 8, \dots, \gamma - a\} \\ A_2 &= \{\gamma - b' + 4, \gamma - b' + 8, \dots, \gamma - c\} \\ A_3 &= \{\gamma - c' + 4, \gamma - c' + 8, \dots, \gamma - b\} \end{aligned}$$

então C' está contida em um scroll tridimensional.

Agora, se $n < 0$, por uma questão de conveniência, escreva $n = -m$. Como $\deg_\infty \mathcal{F} = 0$, temos que

$$4 = \deg_P(\mathcal{F}) = \#(E := \{s \in S \mid s - m \notin S\})$$

Além disso, $-m$ e γ pertencem em E , então

$$2 = \#(E \setminus \{-m, \gamma\}) \quad (3.18)$$

Agora considere o conjunto $B := \{b \in \mathbb{N} \mid \gamma - m + 1 \leq b \leq \gamma - 1\}$. Primeiro vemos que

$$\#(B \cap S) \geq m - 3 \quad (3.19)$$

De fato, os inteiros de $\gamma + 1$ a $\gamma + m - 1$ pertencem a S já que $\gamma + 1$ é o condutor de S . Por isso, qualquer elemento de B pode ser escrito como $s - m$ para $s \in S$; como $\#(B) = m - 1$, podemos usar (3.18) para concluir que $\#(B \cap S) \geq (m - 1) - 2$.

Por outro lado, se $b \in B \cap S$ é tal que $m \nmid b$, então claramente $b - rm \in E \setminus \{-m, \gamma\}$ para um certo r . Portanto podemos refinar (3.19) como

$$\#(B \cap S) \geq m - 3 + \#(\{b \in B \cap S \mid m \nmid b\}) \quad (3.20)$$

mas isto implica claramente em $m \leq 4$. De fato, se $m \geq 5$ então, por (3.19), temos que $\#(B \cap S) \geq 2$, então existe um não múltiplo de m em $B \cap S$. Mas por (3.20), na realidade, $\#(B \cap S) \geq 3$, e podemos encontrar pelo menos dois não múltiplos de m em $B \cap S$, logo $\#(B \cap S) \geq 4$. Isto nos dá, pelo menos, três não múltiplos de m em $B \cap S$ e usando (3.20) mais uma vez temos que $\#(B \cap S) \geq m > \#(B)$, que é uma contradição.

Então $n \geq -4$, e deixamos para o leitor verificar que os possíveis semigrupos para os casos em que n é -1 , -2 , -3 e -4 são, respectivamente, os mesmos que aqueles que correspondem aos casos em que n é 1 , 2 , 3 e 4 , que já foram analisados. \square

A teoria apresentada acima é referente a curvas racionais monomiais não Gorenstein com um único ponto singular.

Consideremos, agora, a lista de todas as curvas racionais monomiais não Gorenstein de gênero no máximo 7 com dois pontos singulares cujo modelo canônico está contido em um scroll tridimensional.

TABELA 4

Genus 6 - com $g_0 = 2$ e $g_\infty = 4$			
C	C'	gon	Scroll
$C = (1 : t^3 : t^4 : t^5 : t^6 : t^8 : t^{12})$	$C' = (1 : t : t^3 : t^4 : t^5 : t^7)$	4	S_{012}
$C = (1 : t^3 : t^4 : t^5 : t^7 : t^8 : t^{12})$	$C' = (1 : t : t^3 : t^4 : t^5 : t^8)$	4	S_{012}
$C = (1 : t^3 : t^4 : t^5 : t^9)$	$C' = (1 : t : t^3 : t^4 : t^5 : t^9)$	4	$S_{111}; S_{012}$
Genus 6 - com $g_0 = 3$ e $g_\infty = 3$			
$C = (1 : t^4 : t^5 : t^6 : t^7 : t^{10})$	$C' = (1 : t : t^2 : t^4 : t^5 : t^8)$	4	S_{012}
$C = (1 : t^4 : t^5 : t^6 : t^7 : t^9 : t^{11} : t^{14})$	$C' = (1 : t : t^2 : t^4 : t^5 : t^7)$	4	S_{012}
$C = (1 : t^3 : t^5 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{10} : t^{14})$	$C' = (1 : t^2 : t^3 : t^5 : t^6 : t^7)$	4	S_{012}
Genus 6 - com $g_0 = 4$ e $g_\infty = 2$			
$C = (1 : t^3 : t^7 : t^8 : t^{11}t^{13})$	$C' = (1 : t : t^3 : t^4 : t^6 : t^8)$	4	S_{012}
$C = (1 : t^4 : t^6 : t^7 : t^9 : t^{10} : t^{11} : t^{14})$	$C' = (1 : t^2 : t^3 : t^4 : t^6 : t^7)$	4	$S_{003}; S_{012}; S_{111}$
$C = (1 : t^4 : t^5 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{12})$	$C' = (1 : t^3 : t^4 : t^5 : t^7 : t^8)$	4	$S_{111}; S_{012}$
$C = (1 : t^4 : t^5 : t^7 : t^{10} : t^{12})$	$C' = (1 : t^3 : t^4 : t^5 : t^7 : t^9)$	4	S_{111}
Genus 7 - com $g_0 = 2$ e $g_\infty = 5$			
$(1 : t^3 : t^4 : t^5 : t^7 : t^{10} : t^{14})$	$(1 : t : t^3 : t^4 : t^5 : t^7 : t^8)$	4	S_{112}
$(1 : t^3 : t^4 : t^5 : t^7 : t^{10} : t^{12} : t^{16})$	$(1 : t : t^3 : t^4 : t^5 : t^7 : t^9)$	4	S_{112}
$(1 : t^3 : t^4 : t^5 : t^7 : t^{11} : t^{12} : t^{16})$	$(1 : t : t^3 : t^4 : t^5 : t^8 : t^9)$	4	$S_{112}; S_{022}$
$(1 : t^3 : t^4 : t^5 : t^7 : t^{11})$	$(1 : t : t^3 : t^4 : t^5 : t^7 : t^{11})$	4	S_{112}
$(1 : t^3 : t^4 : t^5 : t^6 : t^{11})$	$(1 : t : t^3 : t^4 : t^5 : t^6 : t^{11})$	4	S_{013}
$(1 : t^3 : t^4 : t^5 : t^6 : t^{11})$	$(1 : t : t^3 : t^4 : t^5 : t^6 : t^8)$	4	$S_{112}; S_{013}$
$(1 : t^3 : t^4 : t^5 : t^9 : t^{12} : t^{13} : t^{18})$	$(1 : t : t^3 : t^4 : t^5 : t^6 : t^9)$	4	S_{013}
$(1 : t^3 : t^4 : t^5 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{14})$	$(1 : t : t^3 : t^4 : t^5 : t^6 : t^{10})$	4	S_{013}

Genus 7 - com $g_0 = 3$ e $g_\infty = 4$			
C	C'	gn	Scroll
$(1 : t^4 : t^5 : t^6 : t^7 : t^9 : t^{12})$	$(1 : t : t^2 : t^4 : t^5 : t^7 : t^{10})$	4	S_{013}
$(1 : t^4 : t^5 : t^6 : t^7 : t^{11} : t^{14})$	$(1 : t : t^2 : t^4 : t^5 : t^6 : t^8)$	4	$S_{022}; S_{112}$
$(1 : t^4 : t^5 : t^6 : t^7 : t^9 : t^{10} : t^{12} : t^{16})$	$(1 : t : t^2 : t^4 : t^5 : t^6 : t^8)$	4	$S_{022}; S_{004}; S_{112}$
$(1 : t^4 : t^5 : t^6 : t^7 : t^9 : t^{10} : t^{14})$	$(1 : t : t^2 : t^4 : t^5 : t^6 : t^{10})$	4	$S_{022}; S_{112}$
$(1 : t^4 : t^5 : t^6 : t^7 : t^{11})$	$(1 : t : t^2 : t^4 : t^5 : t^6 : t^{10})$	4	$S_{112}; S_{022}$
$(1 : t^3 : t^5 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{10} : t^{11} : t^{16})$	$(1 : t^2 : t^3 : t^5 : t^6 : t^7 : t^8)$	4	$S_{013}; S_{022}; S_{112}$
$(1 : t^3 : t^5 : t^7 : t^8 : t^{10} : t^{14})$	$(1 : t^2 : t^3 : t^5 : t^6 : t^7 : t^9)$	4	S_{013}
$(1 : t^3 : t^5 : t^7 : t^8 : t^{12})$	$(1 : t^2 : t^3 : t^5 : t^6 : t^7 : t^{10})$	4	S_{112}
Genus 7 - com $g_0 = 4$ e $g_\infty = 3$			
C	C'	gn	Scroll
$(1 : t^5 : t^6 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{12})$	$(1 : t : t^2 : t^3 : t^5 : t^6 : t^9)$	4	S_{013}
$(1 : t^5 : t^6 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{11} : t^{13} : t^{16})$	$(1 : t : t^2 : t^3 : t^5 : t^6 : t^8)$	4	$S_{022}; S_{013}; S_{112}$
$(1 : t^3 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{10} : t^{14})$	$(1 : t : t^3 : t^4 : t^6 : t^7 : t^8)$	4	$S_{112}; S_{022}$
$(1 : t^3 : t^7 : t^8 : t^{13} : t^{15})$	$(1 : t : t^3 : t^4 : t^6 : t^8 : t^{10})$	4	S_{013}
$(1 : t^4 : t^6 : t^7 : t^9 : t^{10} : t^{11} : t^{12} : t^{16})$	$(1 : t^2 : t^3 : t^4 : t^6 : t^7 : t^8)$	4	$S_{112}; S_{022}; S_{004}$
$(1 : t^4 : t^6 : t^7 : t^9 : t^{10} : t^{13})$	$(1 : t^2 : t^3 : t^4 : t^6 : t^7 : t^{10})$	4	$S_{112}; S_{022}$
$(1 : t^4 : t^6 : t^7 : t^9 : t^{11} : t^{14})$	$(1 : t^2 : t^3 : t^4 : t^6 : t^7 : t^9)$	4	S_{013}

Uma característica importante analisada para curvas monomiais racionais não Gorenstein C com um único ponto singular é que seu modelo canônico C' está contido em um scroll tridimensional e não em um scroll bidimensional, se e somente se $gon(C) = 4$. Note que esta caracterização para os exemplos listados na tabela acima continua sendo verdade, mesmo C tendo dois pontos singulares. Nossa intuição nos leva a acreditar que esta afirmação seja válida para toda curva não Gorenstein C de gênero g com dois pontos singulares, o que foi verificado para gênero até 7.

Outra consideração é a respeito da generalização do Teorema 3.2.2. Poderíamos generalizá-lo para scroll de dimensão d ? Novamente nossa intuição nos leva a acreditar que sim, e diversos exemplos nos confirmam. Porém sua demonstração é bastante trabalhosa.

Referências Bibliográficas

- [AM] L. F. F. Abrantes, R. V. Martins, *Gonality of non-Gorenstein curves of genus five*, Bull. Brazilian Math. Soc., to appear.
- [ACGH] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, and J. Harris, *Geometry of algebraic curves*, Springer-Verlag (1985).
- [B] D. W. Babbage, *A note on the quadrics through a canonical curve*, J. London Math. Soc., 14, 310–315 (1939).
- [BDF] V. Barucci, D. E. Dobbs, M. Fontana, *Maximality Properties in Numerical Semigroups and Applications to One-Dimensional Analytically Irreducible Local Domains*, Memoirs of American Mathematical Society 125 (598) (1997)
- [BDF1] V. Barucci, M. D’Anna, R. Fröberg, *Analytically Unramified One-Dimensional Semilocal Rings and their Value Semigroups*, Journal of Pure and Applied Algebra 147 (2000) 215-254
- [BDF2] V. Barucci, M. D’Anna, R. Fröberg, *The Semigroup of Values of a One-dimensional Local Ring with Two Minimal Primes*, Communications in Algebra 28 (8) (2000) 3607-3633
- [BF] V. Barucci, R. Fröberg, *One-Dimensional Almost Gorenstein Rings*, Journal of Algebra 188 (1997) 418-442
- [C] C. Carvalho, *Linear Systems on Singular Curves*, Manuscripta Mathematica 98 (1999) 155-163
- [Cp] M. Coppens, *Free Linear Systems on Integral Gorenstein Curves*, Journal of Algebra 145 (1992) 209-218

- [D] M. D'Anna, *Canonical Module and one dimension Analytically Irreducible Arf Domains*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Decker, 185 (1997)
- [EH] D. Eisenbud, J. Harris, *On Varieties of Minimal Degree*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 46 (1987) 3-13
- [EKS] D. Eisenbud, J. Koh, M. Stillmann (appendix with J. Harris), *Determinantal Equations for Curves of High Degree*, American Journal of Mathematics 110 (1988) 513-539
- [En] F. Enriques, *Sulle curve canoniche di genera p cello spazio a $p - 1$ dimensioni*, Rend. Accad. Sci. Ist. Bologna, 23, 80–82 (1919).
- [H] M. Homma, *Singular Hyperelliptic Curves*, Manuscripta Mathematica 98 (1999) 21-36
- [KM] S. L. Kleiman, R. V. Martins, *The Canonical Model of a Singular Curve*, Geometria Dedicata. 139 (2009), 139-166.
- [M1] R. V. Martins, *On Trigonal Non-Gorenstein Curves with Zero Maroni Invariant*, Journal of Algebra 275 (2004) 453-470
- [M2] R. V. Martins, *On Rosenlicht's Theorem for the Canonical Model of a Non-Gorenstein Curve*, preprint
- [N] M. Noether, *Über die invariante Darstellung algebraischer Funktionen*, Math. Ann. 17 (1880), 263–284.
- [P] K. Petri, *Über die invariante Darstellung algebraischer Funktionen einer Veränderlichen*, Math. Ann., 88, 242–289 (1922).
- [Rd] M. Reid, *Chapters on Algebraic Surfaces*
- [R] M. Rosenlicht, *Equivalence Relations on Algebraic Curves*, Annals of Mathematics 56 (1952) 169-191
- [Rs] R. Rosa, *Non-Classical Trigonal Curves*, Journal of Algebra 225 (2000) 359-380
- [RS] R. Rosa, K.-O. Stöhr, *Trigonal Gorenstein Curves*, Journal of Pure and Applied Algebra 174 (2002) 187-205
- [S] H. Stichtenoth, *Algebraic Function Fields and Codes*, Springer-Verlag (1993)

- [S1] K.-O. Stöhr, *On the Poles of Regular Differentials of Singular Curves*, Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática 24 (1993) 105-135
- [S2] K.-O. Stöhr, *Hyperelliptic Gorenstein Curves*, Journal of Pure and Applied Algebra 135 (1999) 93-105
- [SV] K.-O. Stöhr, P. Viana, *Weierstrass gap sequences and moduli varieties of trigonal curves*, Journal of Pure and Applied Algebra 81 (1992) 63-82.