UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado

SOBRE PROCESSOS DE AGLOMERAÇÃO DISTRIBUÍDA

Silvério Lúcio de Moura

Orientador:
Bernardo Nunes Borges de Lima

Belo Horizonte - MG
2014

Resumo

No algoritmo de aglomeração distribuída introduzido por Coffman, Courtois, Gilbert e Piret [5], cada vértice de $\mathbb{Z}^d$ recebe inicialmente uma quantidade de um recurso, em seguida a cada iteração o vértice transfere todo seu recurso para o vértice vizinho que nesta etapa detém o máximo de recurso dentre todos os vizinhos. Prova-se neste trabalho que, se a distribuição inicial dos recursos é invariante sob as translações no reticulado, o fluxo em cada vértice para após finitas etapas e que também nunca tais recursos escapam para o infinito, no sentido de que, para um dado vértice, a esperança da quantidade final de recurso é menor que a esperança da quantidade inicial.

Palavras-chave: distribuição de recursos, aglomeração distribuída, fluxo de recursos, grafos em $\mathbb{Z}^d$, florestas, árvores, árvores com terminal único.

Abstract

In a distributed clustering algorithm introduced by Coffman, Courtois, Gilbert and Piret [5], each vertex of $\mathbb{Z}^d$ receives an initial amount of resource, at each iteration, transfers all of its resource to the neighboring vertex which currently holds the maximum amount of resource. It proves in this work that for a initial distribution of resources invariant under lattice translations, the flow of resource at each vertex terminates after finitely many steps and that resources nevertheless escape to infinity, in sense that the final amount of resource at a given vertex is strictly smaller in expectation than the initial amount.

Keywords: distribution of resources, distributed clustering, flow of resources, graphs in $\mathbb{Z}^d$, forests, trees, one-ended trees.

Para
Ana Maria,
esposa,
companheira,
amiga,
meu porto seguro.

Agradecimentos

Esta é a única página em que eu uso a primeira pessoa do singular, e com uma justa razão: desejo expressar minha gratidão. Agradeço a todos os professores do Departamento de Matemática com os quais tive o privilegio de conviver. Em particular à Profa Susana que me colocou no rumo certo no início da graduação, á Profa Ana Cristina que sempre me deu apoio e motivação durante a pós-graduação, ao Prof Marcelo Hilário que me ajudou muito a compreender paarte dos artigos, aos meus amigos Lilian, Pedro Henrique e Pedro Franklin pelo apoio ajuda e suporte sempre na hora certa, ao meu orientador além da minha gratidão, minha admiração, pela sua paciência, coragem e otimismo. Quero registrar também a gentileza e atenção das secretárias do Colegiado de Pós-graduação, Andrea e Kelly.

Conteúdo

Lista de Figuras

CAPÍTULO 1

Introdução

O objetivo desta dissertação é estudar em todos o seus detalhes os artigos *Fixation for Distributed Clustering Processes* [10] escrito por Hilário, M. R., Louidor, O., Newman, C. M., Rolla, L. T., Sheffield S. e Sidoravicius, V., e *Escape of Resources in Distributed Clustering Processes* [3] escrito por van der Berg, J., Hilário, M. R., Holroyd A. E.,.

O primeiro artigo [10] descreve e estuda um fluxo de recursos, distribuídos inicialmente de forma aleatória nos vértices de $\mathbb{Z}^d$ com $d \geq 1$, durante uma série discreta de etapas onde vértices mais ricos em recursos atraem os recursos dos vértices vizinhos menos ricos. A dinâmica acima é um algoritmo de *aglomeração distribuída* e foi introduzida por Coffman, Courtois, Gilbert e Piret, em 1991 em [5], onde são mencionados exemplos destes tipos de fenômenos em vários campos da ciência, tais como Biologia e Ciência da Computação. Todo o Capítulo 2 desta dissertação será dedicado a esse artigo.

O interesse está focado no estudo dos seguintes fenômenos, considerando a propriedade de estabilidade desta dinâmica:

Questão 1. Cada vértice a menos de uma quantidade finita de vezes transfere seus recursos para o mesmo vértice fixado?

Questão 2. O fluxo em cada vértice termina após uma quantidade finita de etapas?

Questão 3. Se a resposta à questão anterior é afirmativa, o valor esperado do recurso final é igual ao valor esperado do recurso inicial?

Como mencionado no artigo [10], van den Berg e Meester em [4] consideraram o modelo em $\mathbb{Z}^2$ com quantidade de recursos iniciais i.i.d., continuamente distribuídos e responderam a Questão 1. A saber, eles mostraram que a probabilidade do evento “a menos de uma quantidade finita de etapas, o vértice x transfere seu recurso para um mesmo vértice fixado”, é igual a

1. Eles também responderam a Questão 2 em qualquer dimensão e com recursos assumindo valores em $\mathbb{N}$, provando que a probabilidade do evento "a menos de uma quantidade finita de etapas o vértice x transfere seu recurso para si próprio" é igual a 1.

O Capítulo 3 desta dissertação tem sua atenção voltada para o estudo do artigo [3], onde será respondida a Questão 3 negativamente para $d \geq 2$: existe uma distribuição inicial não-negativa para a qual os recursos não escapam para o infinito. De fato o teorema principal a ser provado mostrará que nestas condições existe uma distribuição inicial tal que para um tempo muito grande a média da distribuição será menor que a distribuição inicial.

Também será visto que para $d = 1$ o resultado principal é falso.

CAPÍTULO 2

Fixação para um Processo de Aglomeração Distribuída

1 O modelo e a dinâmica do Processo

O propósito desta seção é discutir a dinâmica para o modelo de aglomeração distribuída a ser estudado, bem como desenvolver exemplos esclarecedores, para o melhor entendimento do artigo [10]. Aqui também serão estabelecidas as definições, convenções e notações a serem usadas em todo o trabalho deste capítulo. Ao final será enunciado o teorema principal cuja prova será totalmente desenvolvida na próxima seção.

Após uma distribuição inicial aleatória de recursos nos vértices do grafo $\mathbb{Z}^d$ com $d \geq 1$, será estudado o processo de fluxo em etapas discretas dos recursos nestes vértices. Assim inicialmente a cada vértice $x \in \mathbb{Z}^d$ está assinalada aleatoriamente uma quantidade de recursos medida por um número real positivo com a seguinte notação, $0 \leq C_0(x) < \infty$, distribuídos de acordo com uma distribuição qualquer, invariante por translação.

Cada ponto $x \in \mathbb{Z}^d$ é representado pelas coordenadas de números inteiros $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_d\}$ e a distancia $\delta(x, y)$ entre dois pontos x, y é definida pela fórmula

$$\delta(x, y) = \sum_{i=1}^{d} \left| x_i - y_i \right|,$$

e dois vértices são ditos *adjacentes* em $\mathbb{Z}^d$ se $\delta(x, y) = 1$.

Deste modo será denotado por $x \sim y$ dois vértices adjacentes e escreve-se $x \simeq y$ se $x = y$ ou $x \sim y$. Com essas definições e notações tem-se o conjunto $\mathcal{G}_x = \{y : y \simeq x\}$ significando o conjunto de todos os vertices adjacentes a x bem como o próprio x. No caso particular de $\mathbb{Z}^2$ tem-se $\mathcal{G}_x = \{y_1, y_2, y_3, y_4, x\}$ como pode-se ver na Figura 1.1. Define-se o vértice $a_n(x) \in \mathcal{G}_x$ como o vértice adjacente ao vértice x ou o próprio x que detém a maior quantidade de

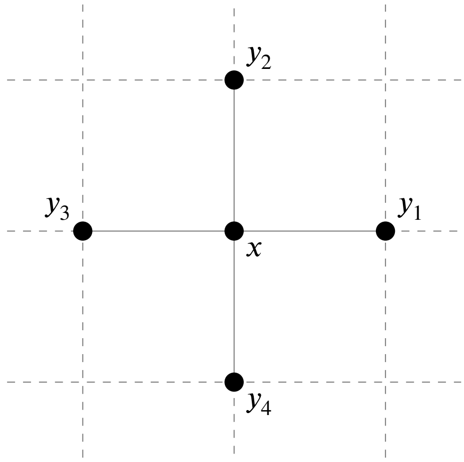


Figura 1.1: Representação do conjunto $\mathscr{G}_x$, quando $d = 2$

recursos na etapa $n = 0, 1, 2, \ldots$, formalmente,

$$a_n(x) = \begin{cases} \text{argmax}\left\{C_n(y),\, y \in \mathscr{G}_x\right\}, & \text{se} \quad C_n(x) > 0 \\ x, & \text{se} \quad C_n(x) = 0 \end{cases}$$

onde $C_n(x)$ é o recurso no vértice x, na etapa n.

Agora descreve-se a dinâmica do processo em $\mathbb{Z}^d$. Ela é definida indutivamente com se segue. Na etapa n cada vértice x detendo uma certa quantidade de recurso $C_n(x)$ transferirá seus recursos para o vértice $a_n(x) \in \mathscr{G}_x$ que possui o recurso máximo. Todos os vértices serão atualizados simultaneamente desta forma, levando ao estado na etapa $n+1$, isto é a $\left(C_{n+1}(x),\, x \in \mathbb{Z}^d\right)$, onde $C_{n+1}(x) = \sum_{x \in E_n(y)} C_n(x)$ é a soma dos recursos transferidos para x na etapa n. Configura-se um *empate* quando mais de um vértice $y \in \mathscr{G}_x$ possui o mesmo

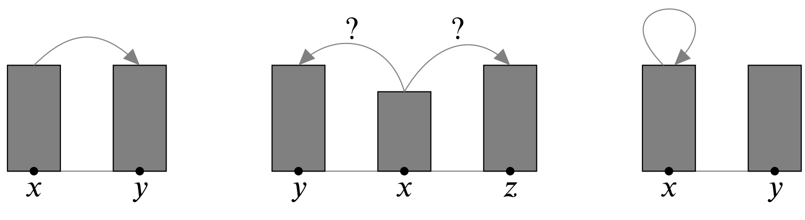


Figura 1.2: Situações possíveis de empates

recurso máximo e neste caso o vértice $a_n(x)$ é escolhido aleatoriamente entre tais vértices. Na figura 1.2 estão representadas situações em que pode haver um empate: na primeira a partir da esquerda tem-se que o vértice y foi sorteado, $y = a_n(x)$, e recebe os recursos de x; na segunda tem-se as duas possibilidades entre os vizinhos e o sorteio determinará quem será o $a_n(x)$; e, finalmente, na terceira o vértice x foi sorteado e envia recurso para si mesmo, $a_n(x) = x$.

Com o intuito de melhor mostrar como funciona a dinâmica do processo um exemplo simples será útil, usando a idéia expressa em [5], representada na figura 1.3. Este exemplo representa a transferência de recursos em um subconjunto de $\mathbb{Z}$, quando $d = 1$, com 10 pontos consecutivos na reta, representando os vértices neste caso. Os números são recursos e as setas mostram a direção da transferência. Observa-se que para $x = -1$ supõe-se

$x =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$C_0(x) =$	$0,65 \rightarrow$	$0,80 \rightarrow$	$0,90 \leftarrow$	$0,85 \leftarrow$	$0,70 \leftarrow$	$0,15$	$0,30$	$0,25 \rightarrow$	$0,80$	$0,65 \rightarrow\ ?$
$C_1(x) =$	0	$0,65 \rightarrow$	$2,55 \leftarrow$	$0,70 \leftarrow$	$0,15$	0	$0,30$	0	$1,05$	0
$C_2(x) =$	0	0	$3,90 \leftarrow$	$0,15$	0	0	$0,30$	0	$1,05$	0
$C_3(x) =$	0	0	$4,05$	0	0	0	$0,30$	0	$1,05$	0

Figura 1.3: Fluxo dos recursos quando $d = 1$

um valor do recurso menor do que $0,80$ do vértice $x = 1$, por isso o valor do recurso em $x = 0$, isto é, $0,65$ é transferido para $x = 1$. Da mesma forma entende-se que no vértice $x = 10$ existe um recurso maior do que $0,80$ situado no vértice $x = 8$ daí a transferência de $x = 9$ para $x = 10$.

Portanto, como pode-se ver os recursos movem-se de acordo com a dinâmica até a etapa $n = 3$, quando então permanecem estabilizados, mostrando sua fixação.

Note-se que após estas etapas todos os recursos que estavam distribuídos aleatoriamente nos vértices, na etapa 0, concentram-se, agora, em somente três vértices. Nas figuras 1.4, 1.5, 1.6 e 1.7 a mesma dinâmica representada num gráfico. Define-se também o conjunto $E_n(y) = \left\{x \in \mathcal{G}_y : a_n(x) = y\right\}$, em

Etapa 0

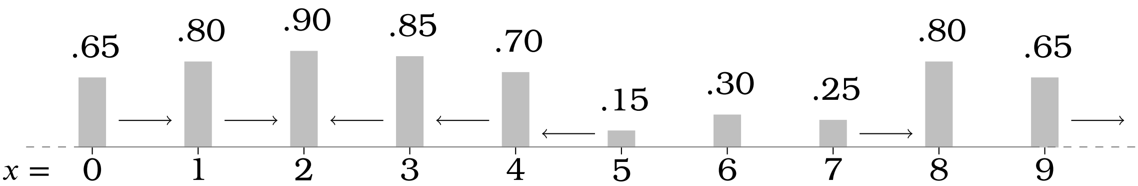


Figura 1.4: Distribuição inicial dos recursos na etapa 0.

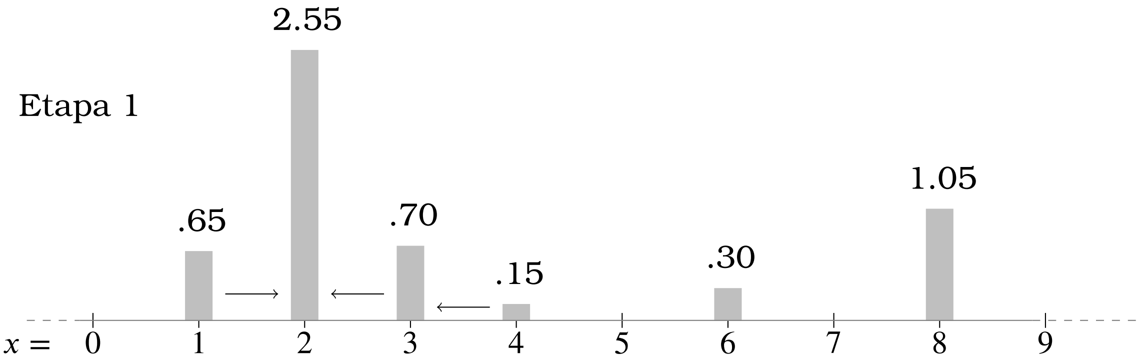


Figura 1.5: Recursos na etapa 1 após transferências.

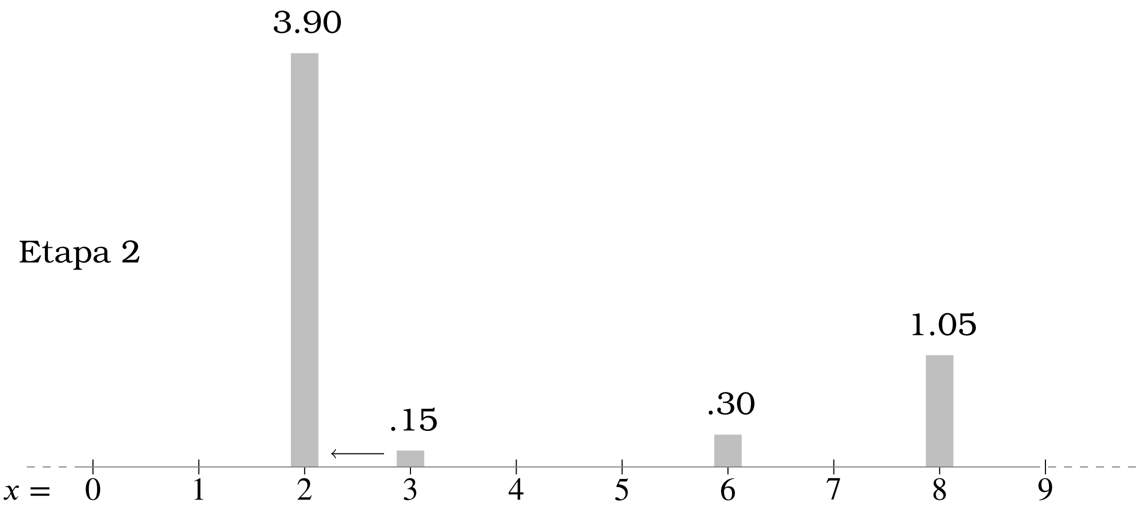


Figura 1.6: Recursos na etapa 2 após transferências

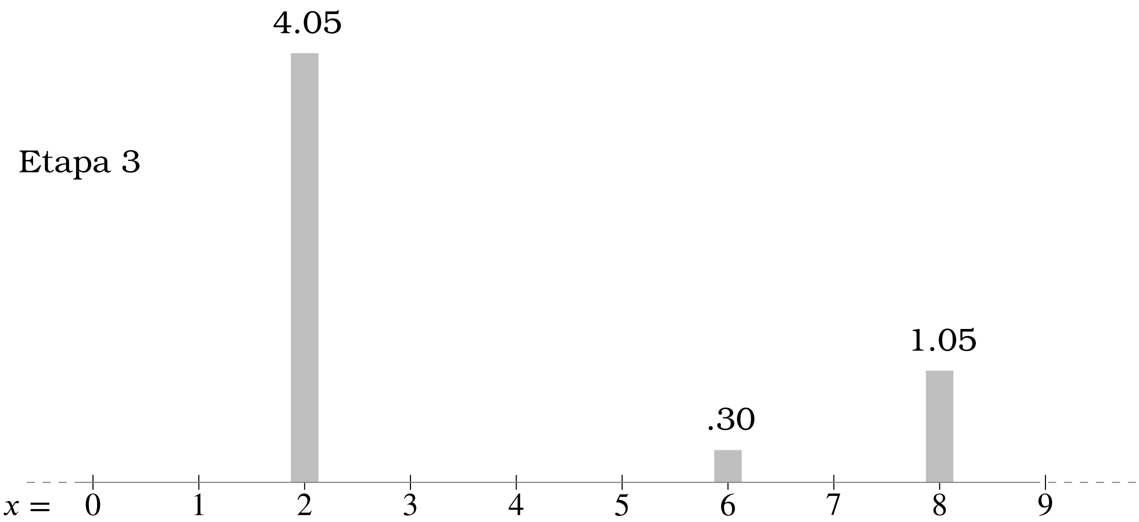


Figura 1.7: Recursos na etapa 3, já fixados.

palavras são os vértices x adjacentes ao vértice y que transferem recursos para o vértice y, e a figura 1.8 mostra um exemplo deste conjunto em $\mathbb{Z}^2$, nela é importante observar que as áreas dos círculos nos vértices representam a quantidade de recursos designados para aqueles vértices.

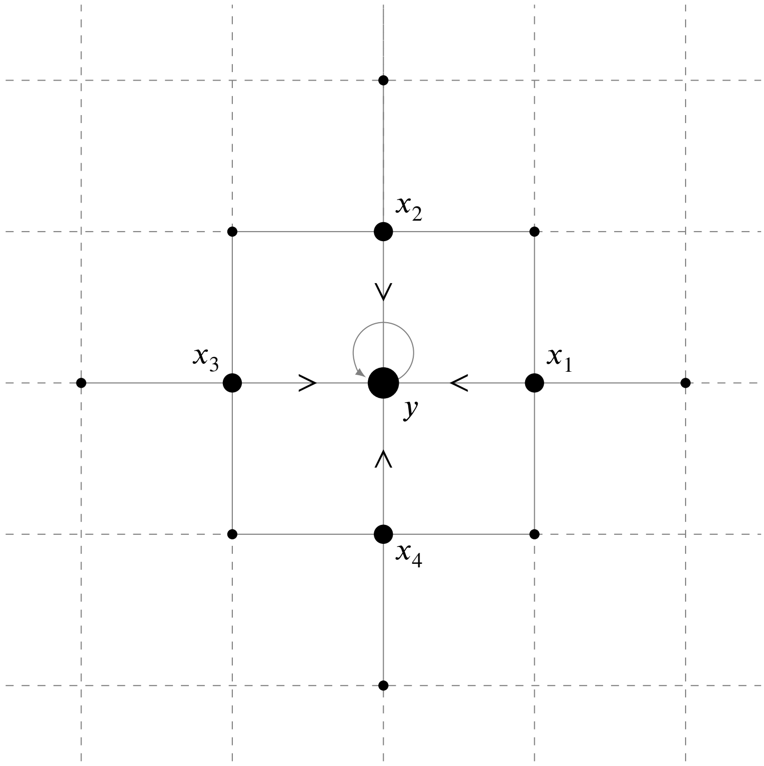


Figura 1.8: Representação de um exemplo do conjunto $E_n(y)$, quando $d = 2$

Também é necessário observar que a menos de possíveis empates e os respectivos desempates durante a dinâmica, somente a condição inicial é aleatória. Sejam a medida de probabilidade $\mathbb{P}$ e o valor esperado $\mathbb{E}$ para as quantidades de recursos iniciais e os possíveis empates.

Este modelo é um exemplo de uma estrutura proveniente de um estado inicial desordenado que se organiza a si mesmo durante o processo.

Respondendo à questão 2 mencionada no Capítulo 1, da forma mais geral possível e considerando qualquer dimensão, bem como qualquer invariância por translação na distribuição inicial, enuncia-se o teorema principal deste capítulo.

Teorema 1.1. *Em $\mathbb{Z}^d$, $\forall\, d \geq 1$, para qualquer distribuição inicial de recursos invariante por translação, quase certamente, o fluxo em cada vértice para após uma quantidade finita de etapas.*

A prova do Teorema 1.1, isto é, da fixação local dos recursos, será objeto da Seção 2 e consistirá essencialmente na eliminação de todas as possibilidades que levariam a um cenário diferente, que será feito considerando os lemas enunciados na Seção 2 e suas combinações. Para alcançar este objetivo será usado o *Princípio de Transporte de Massa*, cuja demonstração pode ser vista no Apêndice,

Agora introduz-se algumas notações adicionais que serão úteis nas formulações de tais lemas e suas respectivas demonstrações.

Para a cardinalidade de um conjunto será usada a notação $|\cdot|$. Para cada $x \in \mathbb{Z}^d$ e $n = 0, 1, \ldots,$ *somente* um dos eventos descritos a seguir ocorrerá:

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_n(x) &= \left[C_n(x) = 0\right], \\
\mathscr{B}_n(x) &= \left[C_n(x) > 0,\ E_n(x) = \{x\}\right], \\
\mathscr{C}_n(x) &= \left[E_n(x) = \{z\} \text{ para algum } z \neq x\right], \\
\mathscr{D}_n(x) &= \left[\left|E_n(x)\right| > 1\right], \\
\mathscr{E}_n(x) &= \left[E_n(x) = \varnothing\right].
\end{aligned}$$

Também para cada $n = 0, 1 \ldots,$ define-se

$$\begin{aligned}
C'_n(x) &:= C_n\left(a_n(x)\right), \\
L_{n+1}(v) &:= a_n\left(L_n(v)\right) \quad \text{com } L_0(v) = v, \\
S_n(w) &:= \{v : L_n(v) = w\}.
\end{aligned}$$

Com os seguintes significados: $L_n(v)$ é a localização na etapa n do recurso que inicialmente começou no vértice v, e $S_n(w)$ denota o conjunto de todos o vértices cujo recurso inicial está localizado no vértice $w = L_n(v)$ na etapa n, observando-se que $C'_n(x) \geq C_n(x)$.

Recordando que $E_n(x)$ é o conjunto dos vértices na vizinhança de x que transferem recursos para x e $a_n(x)$, é o vértice da vizinhança de x que tem o maior recurso, cabem algumas considerações a respeito das notações dos eventos descritos acima:

- $\mathscr{A}_n(x) = \left[C_n(x) = 0\right]$

  O recurso no vértice x é zero, não tem o que transferir e sendo coerente transfere "nada" para si mesmo.

- $\mathscr{B}_n(x) = \left[C_n(x) > 0,\ E_n(x) = \{x\}\right]$

  Neste caso o vértice x possui o maior recurso dentre os vértices adjacentes a ele, pois $a_n(x) = x$. Logo ele transfere o recurso para si mesmo.

- $\mathscr{C}_n(x) = \left[E_n(x) = \{z\} \text{ para algum } z \neq x\right]$

Aqui o vértice que tem o maior recurso é algum z adjacente a x e diferente deste, $a_n(x) = z$.

- $\mathscr{D}_n(x) = \left[\left|E_n(x)\right| > 1\right]$

  Existem mais de um vértice com recurso maior do que os demais adjacentes. Um deles será sorteado para ser o $a_n(x)$.

- $\mathscr{E}_n(x) = \left[E_n(x) = \varnothing\right]$

  O vértice x e adjacentes têm a mesma quantidade de recursos. Não existe o $a_n(x)$.

A Figura 1.9 exibe um diagrama que ajuda a entender as notações usadas no texto.

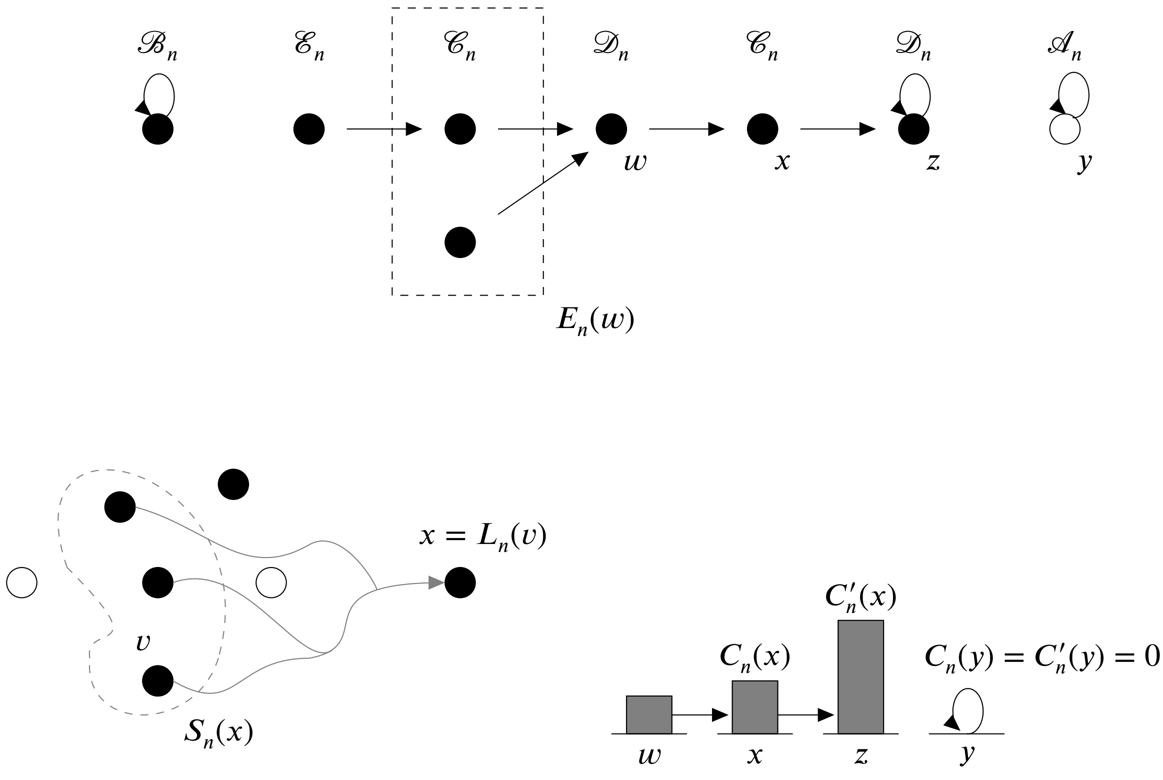


Figura 1.9: Diagrama esquemático para a notação usada. Os círculos brancos representam vértices sem recurso

2 Prova do Teorema Principal

Nesta seção serão enunciados e demonstrados os lemas e um corolário que juntos levarão à demonstração do teorema principal enunciado na Seção 1.

Lema 2.1. *Para cada* x, $\mathbb{P}\left[\mathscr{D}_n(x) \text{ i. v.}\right] = \mathbb{P}\left[\mathscr{E}_n(x) \text{ i. v.}\right] = 0$.

Prova: Primeiramente, $\mathscr{E}_n(x) = \left[E_n(x) = \varnothing\right]$ ocorre para no máximo um valor de n, após o qual sempre se tem $\mathscr{A}_n(x) = \left[C_n(x) = 0\right]$. Realmente por definição $E_n(x)$ é o conjunto dos elementos que enviam recursos para o vértice x, sendo vazio, os recursos em x nesta etapa findaram, i. e., $C_n(x) = 0$, daí a ocorrência de $\mathscr{A}_m(x)$, $\forall\, m > n$. Portanto fica claro que $\mathscr{E}_n(x)$ ocorre apenas para um valor de x, resultando $\mathbb{P}\left[\mathscr{E}_n(x) \text{ i.v.}\right] = 0$ e a primeira parte do enunciado fica provada.

Agora, como $\mathscr{D}_n(x) = \left[\left|E_n(x)\right| > 1\right]$ segue que $\mathscr{D}_n(x) = \left[|E_n(x)| - 1 > 0\right]$ e é o evento que tem mais de um vértice que transfere recursos para x. A Figura 2.1 é uma representação esquemática dos conjuntos $\mathscr{G}_x$ e $E_n(x)$, onde as áreas dos círculos representam a quantidade de recursos em cada vértice. No caso

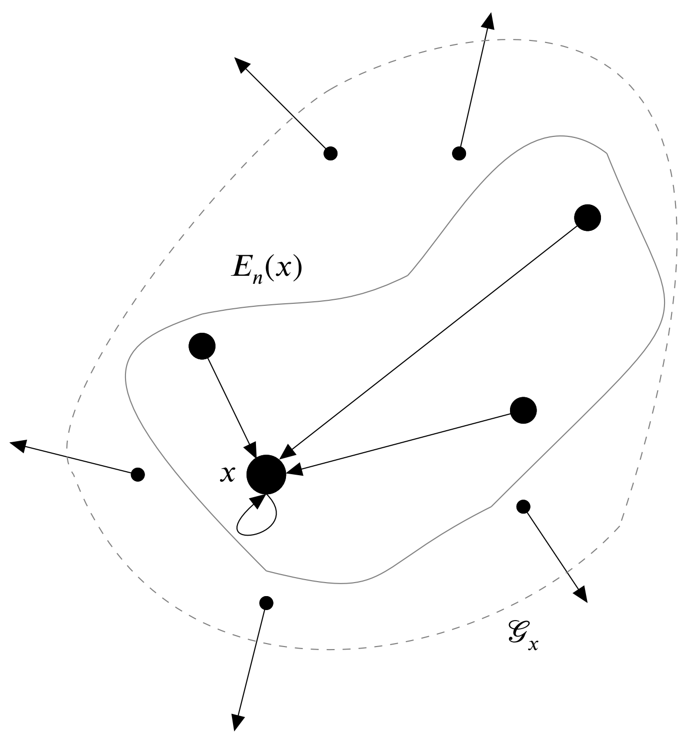


Figura 2.1: Diagrama esquemático dos conjuntos $\mathscr{G}_x$ e $E_n(x)$

acima tem-se que $E_n(x) = \{z \in \mathscr{G}_x : a_n(z) = x\}$ com $a_n(z) = \operatorname{argmax}\{C_n(x), x \in \mathscr{G}_z\}$ se $C_n(z) > 0$, e $a_n(z) = z$ se $C_n(z) = 0$

Então o valor esperado da variável $\left|E_n(x)\right|$ será

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|E_n(x)\right|\right] &= \mathbb{E}\ \left[\left|\{x+w \in \mathcal{G}_x\ :\ a_n(x+w)=x\}\right|\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\sum_w \mathbb{1}_{\left[a_n(x+w)=x\right]}\right]\\ &= \sum_w \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\left[a_n(x+w)=x\right]}\right]\\ &= \sum_w \mathbb{P}\left[a_n(x+w)=x\right]\end{aligned}$$

De acordo com a invariância por translação pode-se escrever

$$\mathbb{E}\left[\left|E_n(x)\right|\right] = \sum_w \mathbb{P}\left[a_n(x)=x-w\right]. \tag{2.1}$$

Considerando a partição do espaço $\Omega = \bigcup_w \{a_n(x)=x-w\}$ onde os eventos $\left[a_n(x)=x-w\right]$ são disjuntos tem-se que

$$1 = \mathbb{P}\left(\Omega\right) = \mathbb{P}\left[\bigcup_w a_n(x)=x-w\right] = \sum_w \mathbb{P}\left[a_n(x)=x-w\right]. \tag{2.2}$$

Por (2.1) e (2.2) segue que

$$\mathbb{E}\ \left[\left|E_n(x)\right|\right] = 1.$$

Definindo $D_n(x) = \left|E_n(x)\right| - 1$, e calculando o valor esperado da variável $D_n(x)$ resulta

$$\mathbb{E}\left[D_n(x)\right] = \mathbb{E}\left[\left|E_n(x)\right|-1\right] = \mathbb{E}\left[\left|E_n(x)\right|\right] - 1 = 0,$$

pois $\mathbb{E}\left[\left|E_n(x)\right|\right] = 1$ como demonstrado acima. Sabe-se ainda que:

$$D_n(x) = D_n(x)^+ - D_n^-(x) = \mathbb{1}_{\left[D_n(x)\right]\geq 0} - \mathbb{1}_{\left[D_n(x)<0\right]}. \tag{2.3}$$

Onde, $D_n^+(x) = \max(D_n(x), 0)$ e $D_n^-(x) = -\min\{D_n(x), 0\} = -\max\{-D_n(x), 0\}$. O valor esperado da expressão em (2.3) será

$$\mathbb{E}\left[D_n(x)\right] = \mathbb{E}\left[D_n^+(x)\right] - \mathbb{E}\left[D_n^-(x)\right] = \mathbb{E}\left[D_n(x)\right] = \mathbb{P}\left[D_n(x)\geq 0\right] - \mathbb{P}\left[D_n(x)<0\right]. \tag{2.4}$$

Como $\mathbb{E}\left[D_n(x)\right] = 0$, como demonstrado acima, chega-se a conclusão abaixo,

$$\mathbb{P}\left[D_n(x)\geq 0\right] = \mathbb{P}\left[D_n(x)<0\right]. \tag{2.5}$$

Por outro lado,

$D_n(x)^+ = 1 \cdot \mathbb{1}_{[D_n(x)\geq 0]} + 0 \cdot \mathbb{1}_{[D_n(x)<0]}$

$\mathbb{E}\left[D_n(x)^+\right] = \mathbb{E}\ \mathbb{1}_{[D_n(x)\geq 0]} = \mathbb{P}\left[D_n(x) \geq 0\right]$, e como $D_n(x) = \left|E_n(x)\right| - 1$ e $D_n(x) \geq 0$ vem que

$\left|E_n(x)\right| - 1 \geq 0 \Longrightarrow \left|E_n(x)\right| \geq 1.$

Ainda tem-se a relação,

$\mathbb{E}\left[D_n^-(x)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{[D_n(x)<0]}\right] = \mathbb{P}\left[D_n(x) < 0\right].$

Como $D_n(x) = \left|E_n(x)\right| - 1$ e $D_n(x) < 0$ resulta que $\left|E_n(x)\right| < 1$ acarretando $\left|E_n(x)\right| = 0$ e consequentemente $D_n(x) = -1$.

É válida a seguinte relação

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[D_n^+(x)\right] &= \mathbb{E}\left[D_n(x) \cdot \mathbb{1}_{[D_n(x)>0]}\right] \\ &\geq \mathbb{E}\left[1 \cdot \mathbb{1}_{[D_n(x)]>0}\right] \\ &= \mathbb{P}\left[D_n(x) > 0\right]. \end{aligned} \tag{2.6}$$

e ainda considerando os resultados de (2.5) e (2.6) conclui-se a seguinte expressão

$$\mathbb{P}\left[D_n(x) > 0\right] \leq \mathbb{E}\left[D_n^+(x)\right] = \mathbb{E}\left[D_n^-(x)\right] = \mathbb{P}\left[D_n(x) = -1\right].$$

Tem-se assim que como $\mathbb{P}\left[D_n(x) = -1\right] = \mathbb{P}\left[\left|E_n(x)\right| = 0\right]$ e $\mathbb{P}\left[\left|E_n(x)\right| = 0\right] = \mathbb{P}\left[E_n(x) = \varnothing\right] = \mathbb{P}\left[\mathscr{E}_n(x)\right]$ implica que $\mathbb{P}\left[D_n(x) > 0\right] \leq \mathbb{P}\left[\mathscr{E}_n(x)\right]$.

Ou seja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[D_n(x) > 0\right] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[\mathscr{E}_n(x)\right] \leq 1 \tag{2.7}$$

Onde a desigualdade acima segue do fato de que $\mathscr{E}_n(x)$ ocorre para no máximo um valor de n.

Como $\sum_n \mathbb{P}\left[D_n(x) > 0\right] < \infty$ ou $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[\left|E_n(x)\right| > 1\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[\left|\mathscr{D}_n(x)\right|\right] < \infty$, segue pelo Lema de Borel-Cantelli que $\mathbb{P}\left[\mathscr{D}_n(x) \text{ i. v.}\right] = 0$, provando a segunda parte do enunciado do lema. ■

Observação. *É importante notar que $C_{n+1}(x) > C_n(x)$ somente pode ocorrer no evento $\mathscr{D}_n(x)$. Assim como a sequência $\left(C_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é não-negativa e a partir de um determinado índice n ela será não-crescente, quase certamente, temos que $\lim_{n\to\infty} C_n(x)$ existe, quase certamente.*

Lema 2.2. *Em um vértice fixado, quase certamente, os empates não podem ocorrer infinitas vezes.*

Prova: Para um par de vértices $y \simeq x$, seja o conjunto:

$$\mathcal{T}_n(x, y) = \left\{0 < C_n(x) = C_n(z) = \max\{C_n(w), w \simeq y\right\} \text{ para algum } z \simeq y, z \neq x\}.$$

que denota o evento em que existe um *empate* no vértice y, na etapa n, e x é um dos candidatos para seus recursos, onde $\max\{C_n(w), w \simeq y\}$ significa o maior recurso nos vértices adjacentes a y ou igual y.

Seja $\mathscr{F}_{y,n}$ a σ-álgebra gerada por

$$\left(C_m(z),\ m \leq n \text{ e } z \in \mathbb{Z}^d\right) \quad \text{e} \quad \left(a_m(z), m \leq n \text{ e } z \in \mathbb{Z}^d \text{ ou } m = n \text{ e } z \neq y\right)$$

que significam: os recursos no vértice z em etapas anteriores a n ou na própria etapa n, e os vértices na vizinhança de $y \neq z$ que recebem os recursos nas etapas anteriores a n ou na etapa n no vértice y.

A σ-álgebra $\mathscr{F}_{y,n}$ contém todas as informações até a etapa n, exceto por um possível desempate no vértice y na n-ésima etapa.

Seja $M^n_{x\backslash y} = \left|E_n(x)\backslash\{y\}\right|$ a variável aleatória. Nota-se que $M^n_{x\backslash y}$ e $\mathcal{T}_n(x, y)$ são $\mathscr{F}_{y,n}$-mensuráveis. No âmbito da σ-álgebra $\mathscr{F}_{y,n}$ tem-se:

- Se $M^n_{x\backslash y} = \left|E_n(x)\backslash\{y\}\right| = 0$ e também ocorre $\mathcal{T}_n(x, y)$ ou seja um empate, então, com probabilidade no mínimo $\frac{1}{2}$, ocorrerá $a_n(y) \neq x$. Esta afirmação é válida em todo o espaço $\mathbb{Z}^d$, mas para maior clareza no entendimento admite-se o raciocínio quando $d = 2$, o que não invalida o processo em geral. Então para $\mathbb{Z}^2$ tem-se, tomando como referência a notação na Figura 2.2, o conjunto $E_n(x) = \{v_1, v_2, v_3, y, x\}$ representa o conjunto dos vértices que poderão transmitir recursos para o vértice x, neste caso $a_n(v) = x$. Então

  $$M^n_{x\backslash y} = \left|E_n(x)\backslash\{y\}\right| = \left|\{v_1, v_2, v_3, x\}\right| = 4$$

  Como $M^n_{x\backslash y} = 0$, todos os vértices na adjacência do vértice x,exceto o vértice x, enviam recursos para outros vértices diferentes de x, exceto o vértice y. Havendo empate nos cinco vértices tem-se que $\mathbb{P}\left(\left[a_n(y) = x\right]\right) = \frac{1}{5}$ implicando que $\mathbb{P}\left(\left[a_n(y) \neq x\right]\right) = \frac{4}{5}$. Se ocorre empate em quatro vértices resulta $\mathbb{P}\left(\left[a_n(y) \neq x\right]\right) = \frac{3}{4}$, em três vértices $\mathbb{P}\left(\left[a_n(y) \neq x\right]\right) = \frac{2}{3}$ e final-

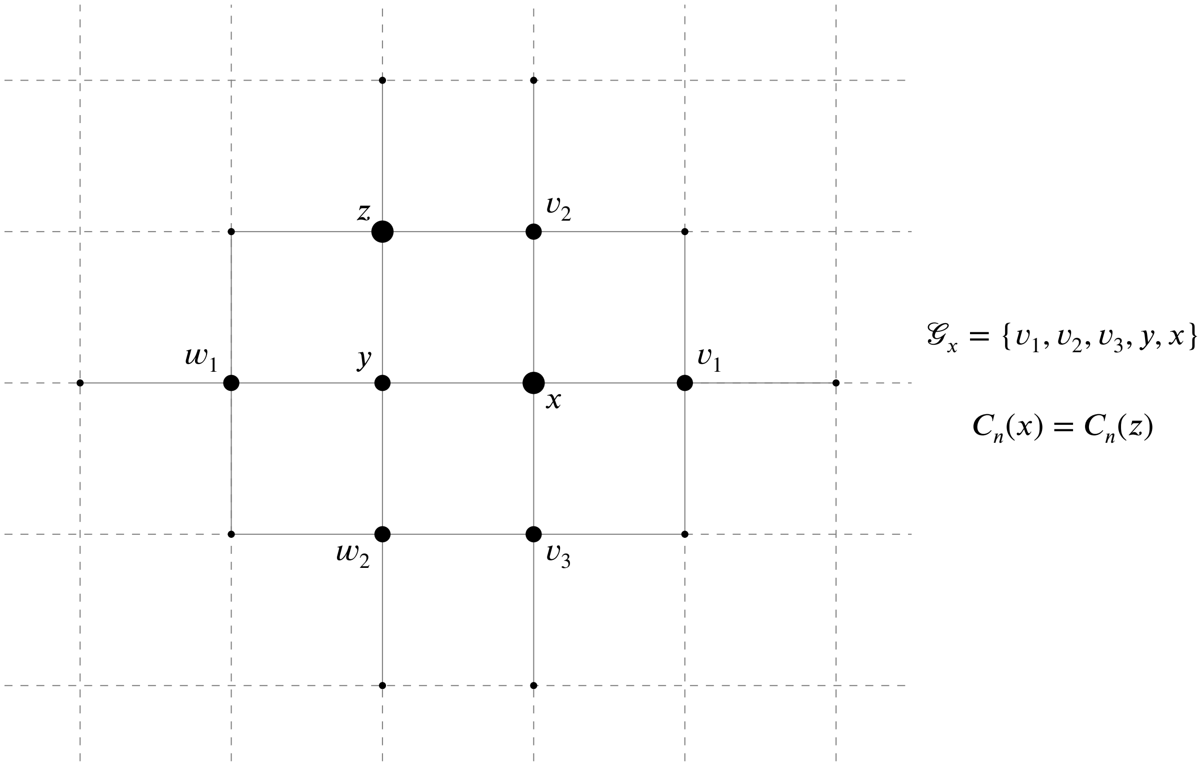


Figura 2.2: Conjunto $\mathscr{G}_x$, o vértice z, e uma possível configuração para $d = 2$

mente em dois vértices $\mathbb{P}\left(\left[a_n(y) \neq x\right]\right) = \dfrac{1}{2}$ que é o menor valor dentro das probabilidades nestes casos. Desse modo segue que ocorrerá o evento $\mathscr{E}_n(x) = \left[E_n(x) = \varnothing\right]$, assim $C_n(x) = 0$ para todo $m > n$. Portanto o evento $\mathscr{T}_n(x, y)$, que representa os empates, não pode ocorrer novamente.

- Se $M^n_{x\backslash y} = \left|E_n(x)\backslash\{y\}\right| > 0$ e também ocorre $\mathscr{T}_n(x, y)$, ou seja empate, então com probabilidade no mínimo $\dfrac{1}{2d+1}$, ocorrerá $a_n(y) = x$. Resultando na ocorrência do evento $\mathscr{D}_n(x) = \left[E_n(x) > 1\right]$. Portanto a ocorrência de $\mathscr{T}_n(x, y)$, empate, infinitas vezes *implica* também, quase certamente, a ocorrência de $\mathscr{D}_n(x)$ infinitas vezes e pelo Lema 2.1,

$$\mathbb{P}\left(\left[\mathscr{D}_n(x) \text{ infinitas vezes}\right]\right) = 0$$

Finalizando a prova. ∎

Lema 2.3. *Para cada vértice $x \in \mathbb{Z}^d$, somente um dos eventos seguintes* *ocorrerá, quase certamente:* $\limsup_n \mathscr{A}_n(x)$, $\limsup_n \mathscr{B}_n(x)$ *ou* $\limsup_n \mathscr{C}_n(x)$, *onde:*

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_n(x) &= \left[C_n(x) = 0\right] \\
\mathscr{B}_n(x) &= \left[C_n(x) > 0,\ E_n(x) = \{x\}\right] \\
\mathscr{C}_n(x) &= \left[E_n(x) = \{v\},\ \textit{para algum } v \neq x\right].
\end{aligned}$$

Prova: Fixado $x \in \mathbb{Z}^d$, pelos Lemas 2.1 e 2.2 pode-se tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\mathscr{D}_n(x)$ e $\mathscr{E}_n(x)$ não ocorram e nem exista um empate em qualquer vértice $y \in \mathscr{G}_x$, adjacente a x, para todo $n \geq n_0$.

Se $\mathscr{A}_n(x)$ ocorre para algum $x \in \mathbb{N}$, também ocorrerá para todo $m > n$.

Assim basta provar que se $\mathscr{C}_n(x)$ ocorre para algum $n \geq n_0$, então $\mathscr{C}_{n+1}(x)$ também ocorrerá.

Agora se $\mathscr{C}_n(x) = \left[E_n(x) = \{v\},\ \text{para algum } v \neq x\right]$ ocorre com $E_n(x) = \{y\}$ e $z = a_n(x)$, tem-se

$$C_{n+1}(z) \geq C_n(x) > C_n(y) = C_{n+1}(x)$$

É necessário comentar a expressão acima com desigualdades e igualdades entre recursos na vizinhança de x: a primeira desigualdade pode ser não-estrita, havendo a possibilidade da quantidade de recurso no vértice z na etapa $n+1$ ser igual a quantidade transferida do vértice x na etapa n, caso o recurso do vértice z tenha sido transferido para um outro vértice na sua vizinhança tenha recurso maior. A segunda desigualdade é estrita pois a hipótese diz para $n \geq n_0$ não ocorre empates, logo estes dois vértices vizinhos, x e y, nunca terão recursos iguais, e finalmente, a igualdade final é fruto da transferência de recursos de acordo com a dinâmica do processo na etapa $n+1$. A situação descrita é facilmente compreendida com a ajuda da Figura 2.3. Portanto $a_{n+1}(x) \neq x$, e desde que $\mathscr{D}_n(x)$ e $\mathscr{E}_n(x)$ foram excluídos, deve-se ter $\mathscr{C}_{n+1}(x)$. Logo o evento $\mathscr{C}_n(x)$ ocorre para todo $m > n$. ■

Pelo Lema 2.3 pode-se definir, de forma única, $\mathscr{A}$-vértice, $\mathscr{B}$-vértice e $\mathscr{C}$-vértice, conforme a ocorrência de $\limsup_n \mathscr{A}_n(x)$, $\limsup_n \mathscr{B}_n(x)$ e $\limsup_n \mathscr{C}_n(x)$, respectivamente.

Corolário 2.4. *Para todo* $x \in \mathbb{Z}^d$, $\lim_n \left(C'_n(x) - C_n(x)\right) = 0$, *quase certamente.*

Prova: Para provar este corolário será seguida a estratégia esboçada a seguir

Relembrando que $C'_n(x) := C_n(a_n(x))$ pode-se examinar as duas hipóteses a seguir:

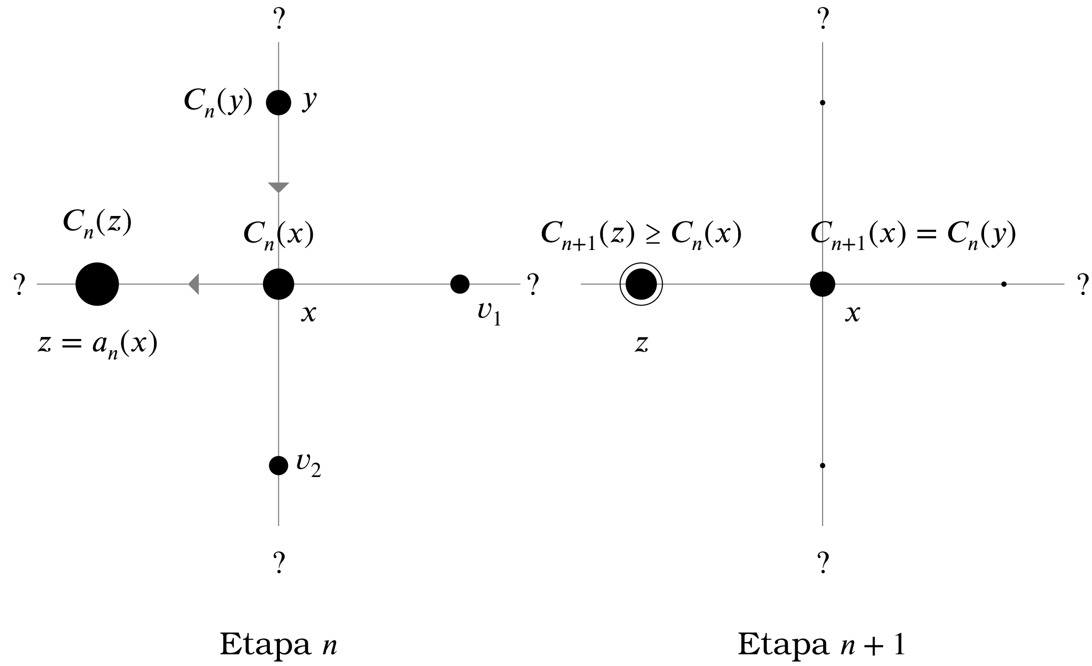


Figura 2.3: Representação dos recursos nas etapas n e $n+1$ quando $d = 2$

- Se x é um $\mathscr{A}$-vértice, ou seja ocorre $\limsup_n \mathscr{A}_n(x)$, onde $\mathscr{A}_n(x) = \left[C_n(x) = 0\right]$ e neste caso $a_n(x) = x$, por definição segue que $C_n'(x) = C_n(a_n(x)) = C_n(x) = 0$, para todo n suficientemente grande, logo $C_n'(x) - C_n(x) = 0$, implicando a convergência quase certamente.

- Se x é um $\mathscr{B}$-vértice, ou seja ocorre $\limsup_n \mathscr{B}_n(x)$, onde $\mathscr{B}_n(x) = \left[C_n(x) > 0,\ E_n(x) = \{x\}\right]$ resulta $C_n'(x) = C_n(a_n(x)) = C_n(x)$, logo $C_n'(x) - C_n(x) = 0$, para todo n suficientemente grande, acarretando a convergência quase certamente.

Eliminadas as hipóteses acima resta analisar a terceira hipótese: se x é um $\mathscr{C}$-vértice.

Isto significa que para x ocorre *unicamente* $\limsup_n \mathscr{C}_n(x)$, onde $\mathscr{C}_n(x) = [E_n(x) = \{z\}$, para algum $z \neq x]$ ou seja o vértice $z \in E_n(x)$ é o único vértice que manda recurso para x na etapa n.

Tome n_0 de modo que $\mathscr{C}_n(x)$ ocorre para todo $n \geq n_0$.

Pelo Lema 2.1 pode-se assumir que $\mathscr{D}_n(z) = \left[\left|E_n(z)\right| > 1\right]$ não ocorrerá para qualquer $z \in \mathscr{G}_x$ e $n \geq n_0$, pois $\mathbb{P}[\mathscr{D}_n(z) \text{ i. v.}] = 0$, em particular $C_{n+1}(z) \leq C_n(z)$, pois z transfere seu recurso para x.

<u>Afirmação</u>: $C'_{n+2d}(x) \leq C_n(x)$ para todo $n \geq n_0$, onde $C'_{n+2d}(x) = C_{n+2d}(a_{n+2d}(x))$.

Desde que, adicionalmente, $C_{n+2d}(x) \leq C'_{n+2d}(x)$ e $\lim_n C_n(x)$ exista, veja observação após a prova do Lema 2.1, tem-se então

$$C_{n+2d}(x) \le C'_{n+2d}(x) \le C_n(x) \Longrightarrow C_{n+2d}(x) \le C_n(x)$$

o que finalizará a prova. Logo basta mostrar a afirmação acima.

Sejam n_0 fixado e $n \ge n_0$. Com $m \ge n$ define-se o conjunto

$$V_m = \left\{ y \sim x \,:\, C_m(y) > C_n(x) \right\}.$$

Pode-se descrever o conjunto V_m da seguinte forma: são todos os vértices

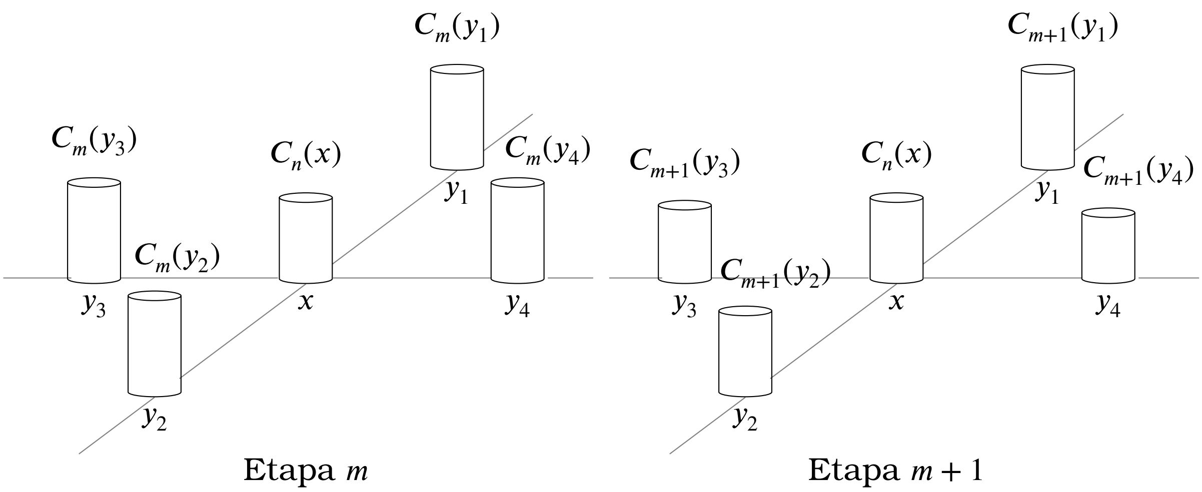


Figura 2.4: Para $d = 2$, recursos nas etapas m e $m+1$ nos vértices vizinhos a x, referenciados ao vértice x com recurso $C_n(x)$ na etapa n.

y adjacentes ao vértice x, tomado como referência, tais que na etapa m a quantidade de recurso em y é maior do que a quantidade de recurso em x na etapa n.

Como os recursos não crescem mais, na etapa $m+1$ os vértices mantém os seus recursos ou os transferem resultando que $V_{m+1} \subseteq V_m$. A Figura 2.4 consiste, para $d = 2$ e tomando sempre como referência o vértice x e o seu respectivo recurso na etapa n, da representação particular em que os recursos nos vértices adjacentes a ele são iguais na etapa m e na etapa seguinte após a transferência de recursos foram alterados, mostrando que o novo conjunto de vértices adjacentes pode permanecer igual ou diminuir como é o caso representado.

Além do mais a ocorrência de $\mathscr{C}_n(x)$ implica que o vértice que recebe recurso de x é diferente de x, i. e., $a_n(x) \neq x$ e como $\mathscr{D}_n\left(a_n(x)\right) = \left[\left|E_n(a_n(x))\right| > 1\right]$ não pode ocorrer, por hipótese, $a_n(x)$ é um $\mathscr{C}$-vértice e tem-se o conjunto

$E_n\left(a_n(x)\right) = \{x\}$. Assim $C_{n+1}\left(a_n(x)\right) = C_n(x)$ e portanto $a_n(x) \notin V_{n+1}$

Se $V_{n+1} = \varnothing$ a prova está finalizada.

Se $V_{n+1} \neq \varnothing$ novamente encontra-se $a_{n+1}(x) \in V_{n+1} \backslash V_{n+2}$.

Prosseguindo desta maneira e como $\left|V_n\right| < 2d$ encontramos $V_{n+j} = \varnothing$ para algum $j \in \{1, \ldots, 2d\}$ o que conclui a prova da afirmação. ■

Lema 2.5. *Para cada $k \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{Z}^d$ fixados,*
$\mathbb{P}\left[0 < C_n'(x) - C_n(x) < \delta,\ \left|S_n(x)\right| \leq k\right] \to 0,$ *uniformemente em n, quando $\delta \to 0$.*

Prova: Antes de iniciar a prova deste lema faz-se necessário discorrer sobre o significado do que se pretende provar.

O evento para o qual é calculada a probabilidade, isto é,

$$\left[0 < C_n'(x) - C_n(x) < \delta,\ \left|S_n(x)\right| \leq k\right],$$

tem duas partes: a primeira diz que a quantidade de recurso no vértice que recebe recurso de x na etapa n, i. e., $C_n'(x) = C_n(a_n(x))$ difere muito pouco do recurso no vértice x também na etapa n, $C_n(x)$, e $C_n'(x) > C_n(x)$. A segunda parte afirma que a quantidade de vértices cujos recursos iniciais se juntam em x, na etapa n, é limitado pr um valor $k \in \mathbb{N}$.

Deseja-se provar que a probabilidade deste evento tende a zero, uniformemente, quando a diferença dos recursos fica inferior a δ que, por sua vez, torna-se cada vez menor. Segue, agora, a prova.

Seja $v \in \mathbb{Z}^d$ e considere $S_n\left(L_n(v)\right)$ como o conjunto dos vértices cujos *recursos iniciais*, se juntarão ao recurso do vértice v na etapa n. $L_n(v)$ é o vértice, na etapa n, em que está localizado o recurso que inicialmente estava no vértice v. De acordo com as regras da dinâmica do processo, uma vez que duas ou mais fontes inicialmente distintas se juntam, elas não mais se separam.

Defina, agora, $N_n(v) := \left|S_n\left(L_n(v)\right)\right|$ como o número de vértices no conjunto $S_n(L_n(v))$ definido acima.

Para cada vértice v fixado, o conjunto $S_n(v)$ poderá ou não ser acrescentado de vértices com recursos iniciais em $L_{n+1}(v)$ ao se passar para a etapa $n+1$, constituindo-se assim o conjunto $S_{n+1}(L_n(v))$. resultando $N_{n+1}(v) \geq N_n(v)$. Assim $N_n(v)$ é não-decrescente em n.

Sejam $A_n(v) = C_n\left(L_n(v)\right)$ a quantidade total de recurso no vértice $L_n(v)$, na etapa n, e $A_n'(v) = C_n'\left(L_n(v)\right) = C_n\left(a_n\left(L_n(v)\right)\right) = C_n\left(L_{n+1}(v)\right)$. Pelo fato de

$C_{n+1}\left(L_n(v)\right) \geq C_n\left(L_n(v)\right)$ resulta que para cada vértice v, o valor de

$$A'_n(v) - A_n(v) = C_n\left(L_{n+1}(v)\right) - C_n\left(L_n(v)\right)$$

é não-negativo, e como os recursos ao longo das etapas tendem a diminuir pode-se fazer a seguinte afirmação:

AFIRMAÇÃO: Para cada vértice v fixo, a sequência $(A'_n(v) - A_n(v))_{n\in\mathbb{N}}$ somente pode decrescer nas etapas n tais que $N_n(v)$ cresce, isto é, o tamanho do conjunto $S_n(v)$ aumenta.

Para provar esta afirmação, suponha que $N_n(v)$ não cresça, isto é, $N_n(v) = N_{n+1}(v)$, quer dizer entre as etapas n e $n+1$ não há contribuição de nenhum vértice ao conjunto $S_n(v)$, assim $S_n(v) = S_{n+1}(v)$, como pode ser observado na figura 2.5. Então neste caso deseja-se mostrar que

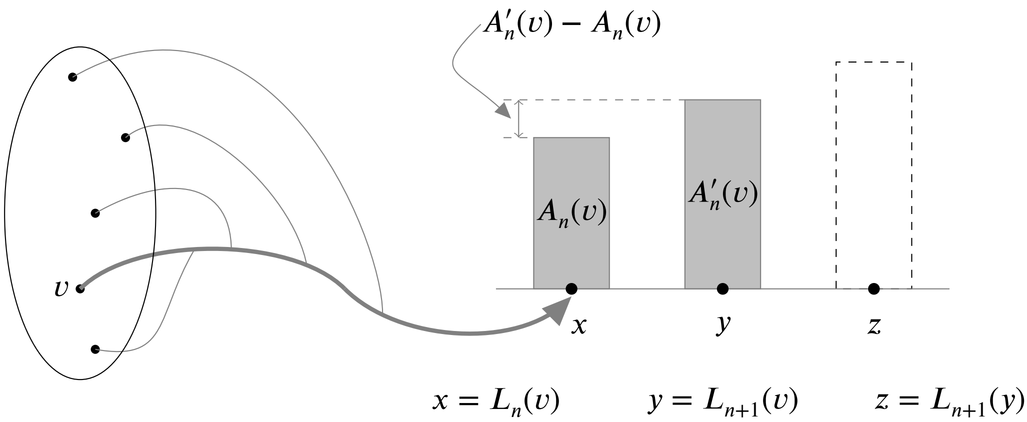


Figura 2.5: Representação dos recursos na etapa n e do conjunto $S_n(v)$.

(2.8) $$A'_{n+1}(v) - A_{n+1}(v) \geq A'_n(v) - A_n(v).$$

Na etapa $n+1$ os recursos do vértice $x = L_n(v)$ são transferidos para o vértice $y = a_n(L_n(v)) = L_{n+1}(v)$, e como não existe contribuição de um outro conjunto para o vértice y temos que $A_{n+1}(v) = A_n(v)$, logo, demonstrar (2.8) é o mesmo que mostrar que

$$A'_{n+1}(v) \geq A'_n(v),$$

ou, equivalentemente, que

$$C_{n+1}(a_{n+1}(L_{n+1}(v))) \geq C_n(a_n(L_n(v))).$$

Na Figura 2.6, que representa a etapa $n+1$ é interessante observar que no

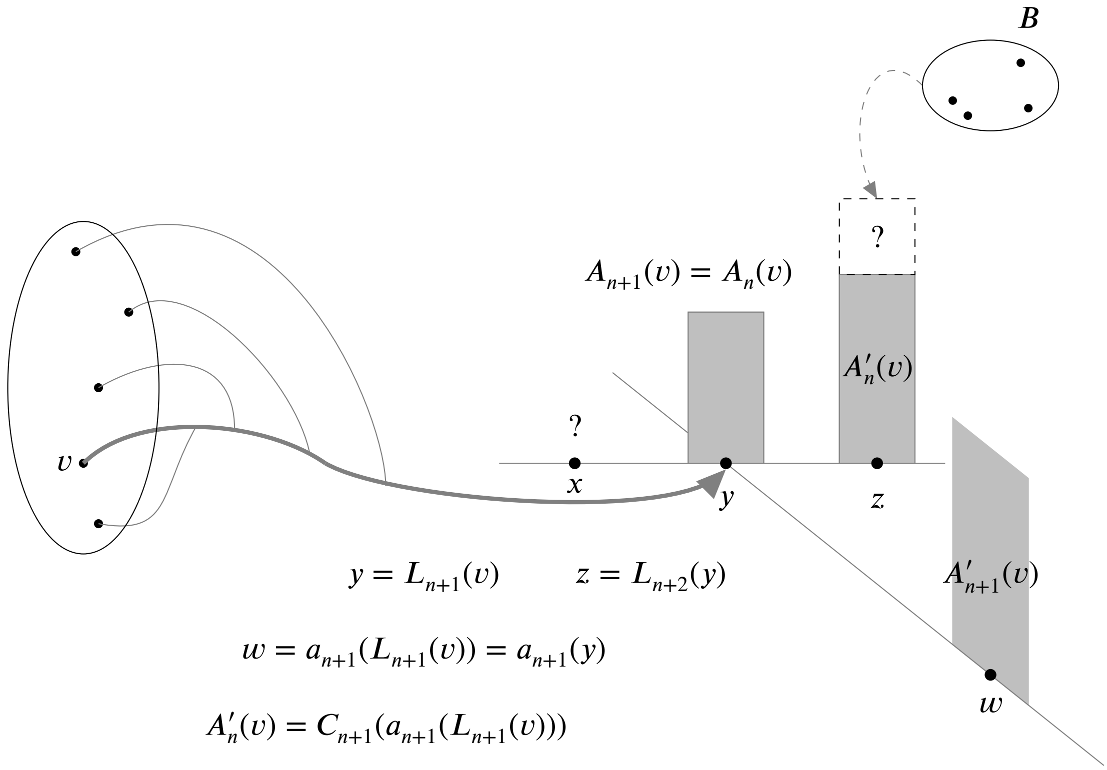


Figura 2.6: Recursos na etapa $n+1$, $S_n(v)$ e o possível vértice w.

vértice x após a transferência para y existe o sinal de interrogação indicando que não se sabe o que ocorre aí, e para efeito desta demonstração não há interesse neste fato. Vê-se que em y agora existe o valor transferido de x. Em z tem-se a $A'_n(v)$ transferido de y e pode-se ter a contribuição de um outro grupo de vértices constituindo o conjunto B e além disto pode existir um outro vértice w, vizinho de y com recursos superiores aos de z e que atrai os recursos de daquele.

Além disso z também é vizinho de y. Desta forma tem-se a as seguintes relações entre os recursos:

$$A'_{n+1}(v) = C_{n+1}(a_{n+1}(y)) \geq Cn + 1(z) \geq A'_n(v).$$

Resultando em

$$A'_{n+1}(v) \geq A'_n(v),$$

e como sabe-se que $A_{n+1}(v) = A_n(v)$, subtraindo em ambos os membros da desigualdade acima implica que

$$A'_{n+1}(v) - A_{n+1}(v) \geq A'_n(v) - A_n(v).$$

Logo, se a diferença $A'_n(v) - A_n(v)$ diminui, então houve contribuição, o que mostra a afirmação.

É, portanto, natural falar para

$$\left[A'_n(v) - A_n(v); \exists n \text{ tal que } N_n(v) \le k, k \in \mathbb{N}, \text{ e } A'_n(v) > A_n(v)\right],$$

do seu *ínfimo*, isto é

$$X = \inf_n \left[A'_n(v) - A_n(v); n \text{ tal que } N_n(v) \le k, k \in \mathbb{N}, \text{ e } A'_n(v) > A_n(v)\right]$$

que é uma variável aleatória *estritamente positiva*.

Calculando a probabilidade vem

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[0 < A'_n(v) - A_n(v) < \delta,\ N_n(v) \le k\right] &\le \mathbb{P}\left[\inf_{[A'_n(v) > A_n(v)]} \left[A'_n(v) - A_n(v)\right] < \delta,\ N_n(v) \le k\right] \\ &\le \mathbb{P}\left[X < \delta\right] \to 0, \quad \text{com } \delta \to 0.\end{aligned}$$

Em particular, para k fixado,

(2.9) $$\mathbb{P}\left[0 < A'_n(v) - A_n(v) < \delta,\ N_n(v) \le k\right] \to 0, \text{ uniforme em } n, \text{ com } \delta \to 0.$$

O limite em (2.9) será relacionado com o resultado desejado via um uso quantitativo do Princípio do Transporte de Massa. Omite-se δ, k de agora em diante e denota-se o evento em (2.9) por $\mathscr{U}_n(v)$ ou seja

$$\mathscr{U}_n(v) = \left[0 < A'_n(v) - A_n(v) < \delta,\ N_n(v) \le k\right].$$

Para $x \in \mathbb{Z}^d$, denote por $\mathscr{V}_n(x)$ o evento $\mathscr{U}_n(v)$ ocorrendo para algum $v \in S_n(x)$, isto é, $\mathscr{V}_n(x) = \bigcup_{v \in S_n(x)} \mathscr{U}_n(v)$. Se $\mathscr{U}_n(v)$ ocorre para algum v, então ele ocorre para todos eles porque os valores de A_n, A'_n e N_n são constantes dentro de $S_n(x)$ e iguais a $C_n(x), C'_n(x)$ e $\left|S_n(x)\right|$, respectivamente. Para $x \in \mathbb{Z}^d$ e escrevendo $m(v,x) = \mathbb{1}_{[L_n(v)=x, \mathscr{U}_n(v)]}$ tem-se tomando o somatório em x,

$$\begin{aligned}\sum_x m(v,x) &= \sum_x \mathbb{1}_{[L_n(v)=x, \mathscr{U}_n(v)]} \\ &= \sum_x \mathbb{1}_{[L_n(v)=x]} \cdot \mathbb{1}_{[\mathscr{U}_n(v)]} && \text{o segundo fator não depende de } x, \text{ logo,} \\ &= \mathbb{1}_{[\mathscr{U}_n(v)]} \sum_x \mathbb{1}_{[L_n(v)=x]} && \text{o somatório será 1 para algum } x.\end{aligned}$$

Resultando $\sum_x m(v,x) = \mathbb{1}_{[\mathscr{U}_n(v)]}$. A invariância da translação do processo dá

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_y m(w, w+y)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_y \mathbb{1}_{[L_n(w)=w+y,\, \mathscr{U}_n(w)]}\right] \\
&= \sum_y \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{[L_n(w)=w+y,\, \mathscr{U}_n(w)]}\right] \\
&= \sum_y \mathbb{P}\left[L_n(w) = w+y,\, \mathscr{U}_n(w)\right] \\
&= \sum_y \mathbb{P}\left[L_n(w-y) = w,\, \mathscr{U}_n(w-y)\right], \quad \text{translação}
\end{aligned}$$

Calculando no sentido inverso obtemos $\mathbb{E}\left[\sum_y m(w,w+y) = \mathbb{E}\sum_y m(w-y,w)\right]$. Significando o seguinte,

$$\mathbb{E}\left[\sum_x m(w,x)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_v m(v,w)\right] \quad \forall w. \tag{2.10}$$

Como foi demonstrado acima $\mathbb{1}_{\mathscr{U}_n(v)} = \sum_x m(v,x)$, e tomando a esperança

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\mathscr{U}_n(v)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathscr{U}_n(v)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_x m(v,x)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_x m(x,v)\right] \qquad \text{por (2.10)} \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_x \mathbb{1}_{[\mathscr{U}_n(x),\, L_n(x)=v]}\right] \qquad \text{pela definição} \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_x \mathbb{1}_{[\mathscr{V}_n(v),\, x\in S_n(v)]}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{[\mathscr{V}_n(v)]}\right] \sum_x \mathbb{1}_{[x\in S_n(v)]} \\
&= \mathbb{P}\left[\mathscr{V}_n(v)\right] \cdot \left|S_n(v)\right| \geq \mathbb{P}\left[\mathscr{V}_n(v)\right], \quad \forall\, x, v.
\end{aligned}$$

Resulta

$$\mathbb{P}\left[\mathscr{U}_n(v)\right] \geq \mathbb{P}\left[\mathscr{V}_n(x)\right], \quad \forall\, x, v.$$

Agora, $\mathscr{V}_n(x)$ é exatamente o evento considerado na afirmação deste lema e como $\mathbb{P}\left[\mathscr{U}_n(v)\right] \to 0$, uniformemente em n, quando $\delta \to 0$, fica provado o resultado. ∎

Utilizando os resultados obtidos nos lemas anteriores bem como no Corolário 2.4 passa-se à prova do teorema principal enunciado na Seção 1.

Prova do Teorema 1.1: Pelo Lema 2.3 um e somente um dos eventos $\limsup_n \mathscr{A}_n(x)$,

$\limsup_n \mathscr{B}_n(x)$ ou $\limsup_n \mathscr{C}_n(x)$, ocorrerá, quase certamente..

Se $\mathbb{P}\left[\limsup_n \left[a_n(x) \neq x\right]\right] = 0$, quando $n \to \infty$, conclui-se que o evento $[\limsup_n \mathscr{C}_n(x)]$ não ocorrerá, quase certamente, ocorrendo portanto $\mathscr{A}_n(x)$ ou $\mathscr{B}_n(x)$, o que dá a fixação. Logo basta provar que $\mathbb{P}\left[\limsup_n \left[a_n(x) \neq x\right]\right] = 0$

Tomando qualquer $\delta > 0$, se $a_n(x) \neq x$ tem-se os seguintes resultados:

(i) $C_n'(x) = C_n(x)$, caracterizando um empate em x, ou

(ii) $C_n'(x) - C_n(x) \geq \delta$, ou

(iii) $0 < C_n'(x) - C_n(x) < \delta$

Levando-se em conta o que diz o Lema 2.2 e o Corolário 2.4 as probabilidades dos dois primeiros eventos tendem a 0, quando $n \to \infty$.

Resta, portanto, considerar o último evento. E neste caso para qualquer escolha de $k \in \mathbb{N}$, este evento pode ser dividido em dois casos, a saber:

1) $\left|S_n(x)\right| = N_n(x) \leq k$, ou

2) $\left|S_n(x)\right| = N_n(x) > k$.

Pela equação (2.9) no Lema 2.5, a probabilidade de que ocorra o primeiro caso tende a 0, uniformemente a 0, quando $\delta \to 0$. Portanto, para concluir a prova do teorema basta mostrar que $\lim\limits_{k \to +\infty} \left[N_n(x) > k\right] = 0$.

Define-se a função de massa

$$m(v, x) = \mathbb{1}_{[L_n(v)=x]}.$$

Assim, pode-se escrever

$$N_n(x) = \left|S_n(x)\right| = \sum_v \mathbb{1}_{[L_n(v)=x]} = \sum_v m(v, x).$$

Tomando a esperança de ambos lados, resulta

$$\mathbb{E}\left[N_n(x)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_v m(v, x)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_x m(v, x)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_x \mathbb{1}_{[L_n(v)=x]}\right] = \mathbb{E}[1] = 1.$$

Onde na segunda igualdade foi utilizada o Princípio de Transporte de Massa.

Logo, pela Desigualdade de Tchebychev, segue

$$\mathbb{P}\left[N_n(x) > k\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[N_n(x)\right]}{k} = \frac{1}{k}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Finalmente $\lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}\left[N_n(x) > k\right] = 0$, concluindo a prova do Teorema 1.1. ■

CAPÍTULO 3

Fuga de Recursos em Processos de Aglomeração Distribuída

1 Definições e o enunciado do resultado principal

Nesta seção, com o propósito de melhor esclarecer o contexto, as notações convenções e definições poderão ser repetidos ou apresentadas de forma diferente, e, é claro serão introduzidos novos. Assim, da mesma forma como definido no Capítulo 2, considera-se para $d \geq 1$, inteiro, o reticulado com dimensão d, i.e., o grafo com vértices em $\mathbb{Z}^d$ e o conjunto de elos compreendendo todos os pares de vértices (x, y) $(= (y, x))$ com $|x - y| = 1$, onde $|\cdot|$ denota a norma em $\mathbb{R}$ e tais vértices são ditos adjacentes. A notação $\mathbb{Z}^d$ será usada para o grafo como também para o conjunto de vértices e tal uso ficará claro no contexto.

A dinâmica do processo no modelo de '*distribuição aglomerada*' introduzido por Coffman, Courtois, Gilbert e Piret [5] é o mesma descrita no capítulo acima citado. Apenas fazendo um breve resumo: para cada vértice x do reticulado $\mathbb{Z}^d$ será designado aleatoriamente um número não-negativo $C_0(x) \in [0, \infty)$ que será entendido como a quantidade de recurso inicial depositado no vértice x na etapa 0. A família $\left(C_0(x); x \in \mathbb{Z}^d\right)$ não será necessariamente assumida independente. Então a cada etapa do processo cada vértice transfere seu recurso para o vértice mais *rico* na sua vizinhança.

Recordando, a evolução é definida recursivamente, como anteriormente. Suponha que na etapa n a *quantidade de recurso* em cada vértice x seja denotada por $C_n(x)$ e seja o conjunto $\mathcal{G}(x) = \left\{y \in \mathbb{Z}^d \ : \ |x - y| \leq 1\right\}$ a *vizinhança* de x, onde ele próprio está incluso e, ainda, o conjunto

$$E_n(x) = \left\{ y \in \mathcal{G}(x) \ : \ C_n(y) = \max_{z \in \mathcal{G}(x)} C_n(z) \right\}.$$

Agora seja um vértice v escolhido uniformemente ao acaso no conjunto $E_n(x)$, independentemente para cada x e toma-se

$$a_n(x) = \begin{cases} x, & \text{se } C_n(x) = 0, \\ v, & \text{se } C_n(x) > 0. \end{cases}$$

Observa-se que $a_n(x)$ é o vértice para o qual os recursos localizados em x na etapa n (se existir algum) serão transferidos durante a etapa $n+1$ na evolução do processo.

Tem-se também a seguinte notação para os recursos na etapa $n+1$ no vértice x,

$$C_{n+1}(x) := \sum_{y:\, a_n(y)=x} C_n(y).$$

Para um determinado vértice x será usada a notação $C_\infty(x)$ para representar $\lim\limits_{n\to\infty} C_n(x)$.

Se para, todo n suficientemente grande, tem-se $a_n(x) = x$ e $a_n(v) \neq x$ para todos os vizinhos v de x, diz-se que o fluxo em x *termina* após finitas etapas e neste caso o limite de $C_n(x)$ é atingido após finitas iterações e será denominado *quantidade final do recurso* em x.

Se para todo n suficientemente grande $a_{n+1}(x) = a_n(x)$ diz-se que x, a menos uma quantidade finita de etapas, transfere seu recurso para o mesmo vértice fixado.

Define-se ainda para um vértice x, a variável aleatória $C_0(x)$ como o *a quantidade de recurso inicial na etapa em* x, e a família $\left(C_0(x); x \in \mathbb{Z}^d\right)$ como *configuração inicial*. De forma análoga tem-se que $\left(C_n(x); x \in \mathbb{Z}^d\right)$ será a *configuração na etapa* n.

Considera-se que um *empate* ocorre no vértice x quando a cardinalidade de $E_n(x)$ é estritamente maior do que um, e neste caso $a_n(x)$ é escolhido uniformemente ao acaso entre os vértices na vizinhança de x que maximiza $C_n(x)$.

É importante observar que fora os possíveis desempates toda a aleatoriedade está contida na configuração inicial, e logo que um vértice tenha recurso zero assim ele permanecerá. Além disso, os recursos transferidos de dois ou mais vértices para o mesmo vértice, estes serão somados no vértice que os recebe.

Finalmente enuncia-se o resultado a ser provado, na Seção 3.

Teorema 1.1. *Seja $d \leq 2$. Existe uma distribuição invariante por translação para uma configuração inicial $\left(C_0(x); x \in \mathbb{Z}^d\right)$ tal que para cada $x \in \mathbb{Z}^d$*

$$\mathbb{E}\left[C_\infty(x)\right] < \mathbb{E}\left[C_0(x)\right] \tag{1.1}$$

O Teorema 1.1 será provado na Seção 3, para tal tarefa na Seção 2 será construída uma coleção aleatória de árvores (floresta) com *terminal único*, imersa em $\mathbb{Z}^d$, de uma forma invariante por translação e também será apresentada um breve discussão sobre florestas aleatórias em $\mathbb{Z}^d$. Aos vértices desta floresta serão alocados quantidades de recursos de modo que durante a evolução do processo cada recurso segue o único caminho autoevitante para o infinito na floresta.

A conclusão do Teorema 1.1 é falsa para $d = 1$. De fato, suponha que o evento, "os recursos iniciando na origem não param após uma quantidade finita de etapas" tem probabilidade positiva, então pela invariância da translação existe, com probabilidade positiva, uma quantidade de vertices para os quais o recurso inicial não pararão após uma quantidade finita de etapas. Segue daí que, com probabilidade positiva, existem uma quantidade infinita de etapas nas quais o recurso entra ou deixa a origem, contradizendo a fixação provada no Capítulo 2 deste trabalho. Observe que o mesmo argumento pode ser generalizado, por exemplo, para qualquer grafo da forma $\mathbb{Z} \times G$ onde G é um grafo-vértice transitivo finito. (Para tais grafos a invariância por translação é substituída pela invariância por automorfismo)

2 Florestas em $\mathbb{Z}^d$ invariantes por translação

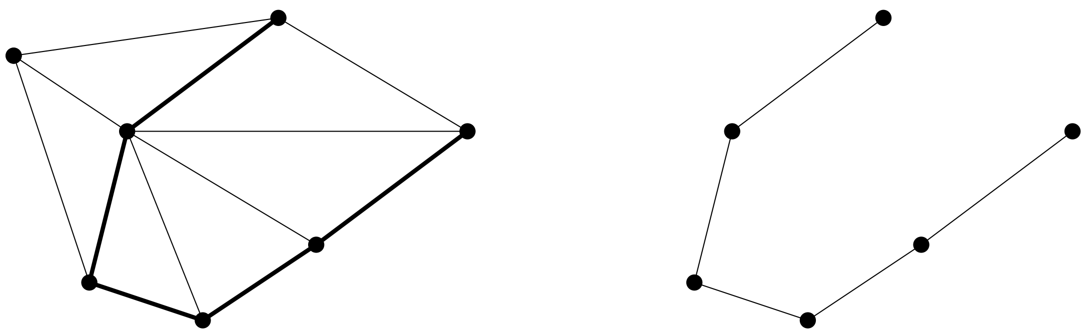
Nesta seção serão utilizados conceitos da Teoria dos Grafos, cuja referência é [6]. Um *grafo* é um par $G = (V, E)$ de conjuntos, onde $E \subseteq V \times V$. Os elementos do conjunto V são chamados de *vértices* de G e os elementos de E são denominados os *elos* do grafo G. Dado $e = \langle x, y \rangle \in E$ diz-se que x, y são vértices *vizinhos* em G, simplifica-se escrevendo $e = xy$. O *grau* de um vértice x é o número de elos que possuem tal vértice, e, ainda um grafo é *conexo* se para todo $x, y \in V$, existe um caminho em G ligando x a y, onde um *caminho* é um grafo não-vazio $C = (V, E)$ da forma

$$V = \left\{x_0, x_1, \dots, x_k\right\} \quad E = \left\{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\right\}$$

e os x_i são todos distintos

Para o grafo $G = (V, E)$ se $W \subset V$ e $F \subset E$ então $H = (W, F)$ é denominado *subgrafo* de G.

Os vértices x_0 e x_k estão ligados por C e são chamados de *terminais*, a Figura 2.1 mostra um exemplo com um grafo finito. Quando $x_0 = x_k$ tem-se um *ciclo* ou *circuito*. Um caminho é denominado *autoevitante* se todos os seus vértices são distintos.



G C

Figura 2.1: Representação de um grafo finito G e um caminho C em G.

Seja $G = (V, E)$ um grafo infinito, ou seja com os conjuntos da forma:

$$V = \left\{\dots, x_0, x_1, \dots, x_k, \dots\right\} \quad E = \left\{\dots, x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k, \dots\right\}$$

onde também todos os x_i são distintos. Valem todas as definições dadas acima e no restante deste trabalho serão considerados grafos infinitos. Uma

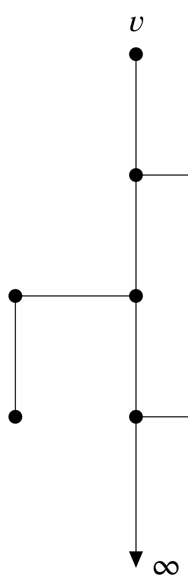


Figura 2.2: Terminal único partindo de um vértice v.

floresta de G é um subgrafo de G que não tem ciclos e uma *árvore* é uma floresta conexa. Um subgrafo gera G se ele contém todos os vértices de G. Uma *floresta geradora* em G é um subgrafo de G que é uma floresta e que gera G, e a mesma afirmação vale para a árvore, que será denominada *árvore geradora*. Os vértices de uma floresta T que possuem somente um vizinho são chamadas de *folhas*. Um caminho autoevitante infinito iniciando em um dado vértice é denominado *terminal*, na Figura 2.2 pode-se ver um exemplo de terminal único partindo de um vértice $v \in \mathbb{Z}^2$. O *número de terminais* de uma árvore é o número de terminais distintos iniciando em um vértice. Uma árvore é denominada *terminal único* se ela tem um terminal. Foi escolhido um reticulado inteiro de dimensão d como o grafo subjacente. Para esta escolha a literatura provê inúmeras construções de florestas geradoras aleatórias com distribuição invariante por translação, ver [1] e [13]

Neste trabalho será discutido uma construção baseada em uma árvore geradora mínima em duas dimensões, que se passa a descrever a seguir.

Sejam E um conjunto de elos de um reticulado $\mathbb{Z}^2$ e a família $\{U_e; e \in E\}$ de variáveis aleatórias independentes distribuídas uniformemente no intervalo $[0, 1]$.

Para cada ciclo do reticulado será excluído o elo para o qual o valor de U é o máximo no ciclo de elos. Após estas exclusões o grafo resultante será denominado de *floresta geradora minimal* que é, quase certamente, uma árvore de terminal único invariante e ergódica sob as translações no reticulado, ver [9].

Usando a floresta geradora minimal em $\mathbb{Z}^2$ pode-se construir uma floresta aleatória em $\mathbb{Z}^d$ com $d > 2$ onde a distribuição é invariante sob as translações do reticulado, no qual cada componente é um terminal único.

Para tal considere $\mathbb{Z}^d$ como $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^{d-2}$ e em cada *'camada'* $\mathbb{Z}^2 \times \{z\}$, onde z percorre $\mathbb{Z}^{d-2}$ faz-se a imersão de uma cópia da árvore geradora minimal T_z. O subgrafo de $\mathbb{Z}^d$ resultante é uma floresta minimal geradora invariante por translação com terminais únicos como componentes. Na Figura 2.3 representam-se as camadas em $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^2$. O acima descrito leva ao seguinte lema.

Lema 2.1. *Para cada $d \geq 2$, existe uma floresta aleatória invariante por translação em $\mathbb{Z}^d$, na qual cada componente conexa é um terminal único, quase certamente.*

Corolário 2.2. *Para cada $d \geq 2$, existe uma floresta aleatória invariante por translação T em $\mathbb{Z}^d$, para a qual as duas propriedades seguintes valem, quase*

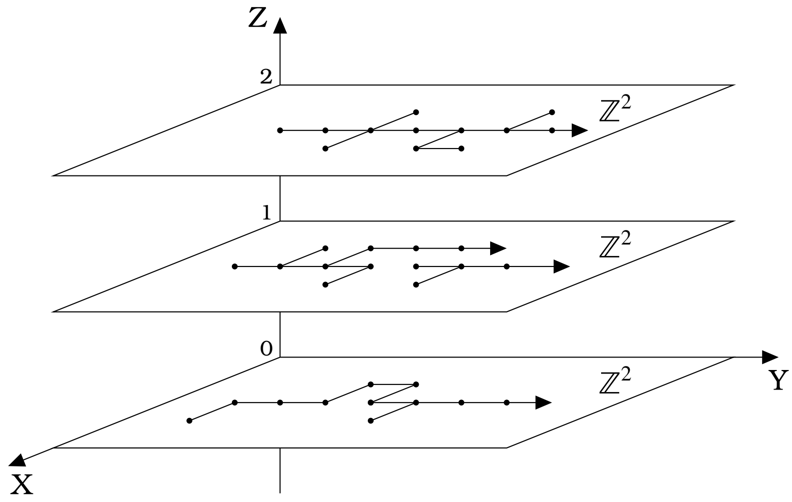


Figura 2.3: Para $d = 3$, tem-se três camadas da decomposição $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}$.

certamente

(i) Toda componente conexa de T é terminal único.

(ii) Todo elo de $\mathbb{Z}^2$ no qual os extremos estão em T, é um elo de T.

Prova: Seja H uma floresta geradora como no Lema 2.1 e define-se os seguintes conjuntos:
$E(H)$ é conjunto de elos de H e $V(H)$ é o conjunto de vértices de H.
Seja $\widetilde{H}$ a floresta com o conjunto de vértices definidos por
$V(\widetilde{H}) = \{2v \;:\; v \in V(H)\} \cup \{u + v \;:\; \langle u, v\rangle \in E(H)\}$ e o conjunto de elos
$E(\widetilde{H}) = \{\langle 2v, u + v\rangle \;:\; \langle u, v\rangle \in E(H)\}$.

Pode-se dizer que os conjuntos acima fazem com que $\widetilde{H}$ corresponda à floresta que é obtida quando H é ampliado duas vezes.

Como se pode ver a construção com estes novos conjuntos fazem corresponder cada elo $\langle u, v\rangle$ de H a dois elos $\langle 2v, u + v\rangle$ e $\langle u + v, 2u\rangle$ em $\widetilde{H}$.

Observe que $\widetilde{H}$ é uma floresta aleatória que é invariante com respeito às translações de $2\mathbb{Z}^d$ e que possui a propriedade de que todo par de vértices x, y satisfazendo a relação $|u - v| = 1$ está conectado por um elo em $\widetilde{H}$.

Afim de se configurar a invariância com respeito à *todas* as translações de $\mathbb{Z}^d$ seja W um elemento uniformemente aleatório do cubo $\{0, 1\}^d$, independente de $\widetilde{H}$ e faça $T = \widetilde{H} + W$. ■

3 Prova do resultado principal

Para toda esta seção considera-se a dimensão $d \geq 2$ fixada.

Como pode-se ver pelo enunciado do Teorema 1.1 o objetivo é mostrar que existe uma distribuição tal que para um número suficientemente grande de etapas a esperança do recurso nesta etapa é menor que a esperança do recurso inicial em cada vértice de $\mathbb{Z}^d$. Assim será mostrado que existe uma configuração inicial $\left(C_0(x); x \in \mathbb{Z}^d\right)$ com distribuição invariante por translação e que vale (1.1), no Teorema 1.1.

Entretanto, antes de prosseguir faz-se necessário introduzir alguns conceitos, definições e notações que ajudarão a provar os lemas e o próprio teorema.

Seja T uma floresta aleatória em $\mathbb{Z}^d$ dada como no Corolário 2.2.

(a) Para vértices x e y escreve-se $x \sim y$ se $\langle x, y\rangle$ é um elo de T.

(b) Define-se uma ordem parcial (aleatória) $\leq$ em $\mathbb{Z}^d$. Diz-se $y \leq x$ se, e somente se x e y são vértices de T e x pertence a um único caminho infinito autoevitante em T iniciando em y.

(c) Se $y \leq x$ diz-se que x um *ancestral* de y e que y é um *descendente* de x.

(d) Se $y \leq x$ e $x \sim y$ diz-se que x é o *pai* de y. É importante ressaltar que cada vértice de T possui um único pai. Ademais, para todo vértice v de T, exatamente um vértice em $\{x \ : \ x \sim v\}$ é o pai de v, e os outros são descendentes de v. A Figura 3.1 mostra um vértice x com dois descendentes, onde este vértice é o pai de y.

(e) Define-se, agora, para cada vértice $x \in \mathbb{Z}^d$, a quantidade inicial de recurso no vértice x:

$$C_0(x) = \begin{cases} \sum\limits_{y \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{1}_{[y \leq x]}, & \text{se } x \in T \\ 0, & \text{se } x \notin T. \end{cases} \tag{3.1}$$

Observe que se $x \in T$, então $C_0(x)$ é o número de descendentes de x. Como toda componente conexa de T é um terminal único segue que este número é finito de acordo com as definições acima. Portanto, deve-se notar que como a distribuição de T é invariante sob as translações de $\mathbb{Z}^d$, a família $\left(C_0(x); x \in \mathbb{Z}^d\right)$ também será.

(f) Define-se uma sequência encaixada, decrescente, de florestas que serão descritas para descrever a dinâmica dos recursos quando $C_0(x)$ é dado por 3.1. Para uma floresta S, seja $\phi(S)$ a floresta obtida a partir de S

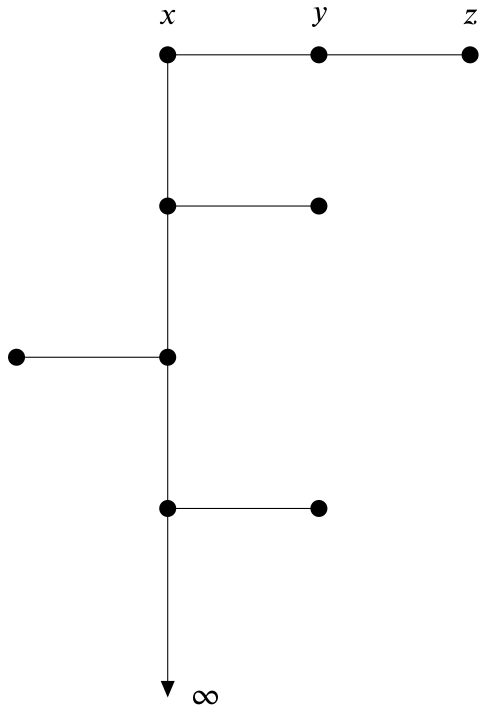


Figura 3.1: Vértice pai x e descendentes y e z.

eliminando-se todas suas folhas, i. e., vértices que têm somente um vizinho. Seja $T_0 = T$ e para $n = 1, 2, \ldots$ define-se indutivamente $T_n = \phi(T_{n-1})$. Na Figura 3.2 pode-se ver a aplicação ϕ agindo.

A observação seguinte é justificável pelas definições anteriores, e o exame da situação representada na Figura 3.2.

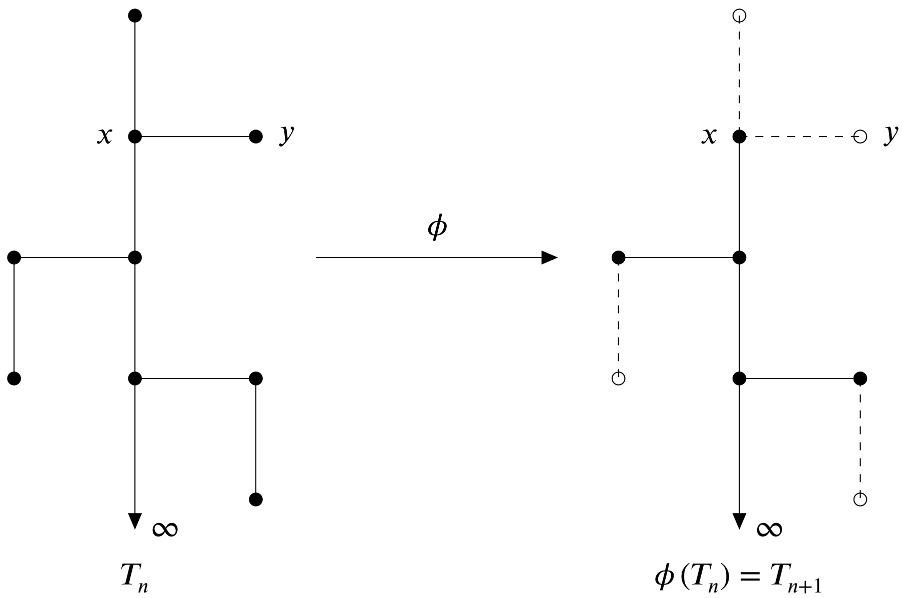


Figura 3.2: Representação da aplicação ϕ.

Observação 3.1. *Sejam y um vértice de T, x o pai de y e $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Então x está em T_{n+1} se, e somente se, y está em T_n.*

Lema 3.2. *Para todo vértice x em T, existe um índice finito n_0 (dependendo de x) tal que, para todo $n \geq n_0$, x não pertence a T_n*

Prova: Pela Observação (3.1), $n_0(x)$ é no máximo 1 mais o número de descendentes de x. E como visto anteriormente este número é finito. ■

Lema 3.3. *Suponha que, para todo x, $C_0(x)$ é dado por (3.1). Então para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*

$$C_n(x) \begin{cases} > \sum\limits_{\substack{y:\, y\sim x,\\ y\leq x}} C_n(y), & \text{se } x \in T_n \\ = \ 0, & \text{se } x \notin T_n. \end{cases} \tag{3.2}$$

Prova: A prova será por indução em n.

Para $n = 0$, pela expressão (3.1) vê-se que com $y \in T_0 (= T)$ pode-se escrever

$$C_0(y) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{1}_{[z \leq y]}$$

Por outro lado se $x \in T_0$ e ainda com $x \sim y$, $y \leq x$, i. e., x é pai de y sabe-se, também por (3.1), que

$$C_0(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{1}_{[y \leq x]}$$

Tomando o somatório em ambos os lados da primeira expressão vem que,

$$\sum_{\substack{y:\, y\sim x,\\ y\leq x}} C_0(y) = \sum_{\substack{y:\, y\sim x,\\ y\leq x}} \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{1}_{[z \leq y]} = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{x\}} \mathbb{1}_{[z \leq x]} = C_0(x) - 1.$$

Logo,

$$C_0(x) > \sum_{\substack{y:\, y\sim x,\\ y\leq x}} C_0(y)$$

Se $x \notin T_0$, então $C_0(x) = 0$ por definição. Logo o resultado está provado para $n = 0$.

Seguindo com a demonstração por indução, suponha que dado n, nesta etapa vale a equação (3.2). Como T foi inicialmente tomado como uma floresta de acordo com o Corolário 2.2 e considerando ainda que dois vértices de T_n são vizinhos em $\mathbb{Z}^d$, eles estarão conectados por um elo de T_n.

Pelo descrito acima e a expressão (3.2), vê-se claramente que para cada vértice v de T_n, tem-se que $a_n(v)$ (recordando: é o vértice para o qual os recursos, em v, no tempo n são transferidos na etapa $n+1$) é o pai de v, isto é, $v \sim a_n$ e $v \leq a_n(v)$.

Na expressão (3.2), verifica-se se um vértice $x \notin T_n$, fora de T_n, o valor de $C_n(x) = 0$, assim na etapa $n+1$ tem-se

$$C_{n+1}(x) = 0 \qquad \text{se } x \notin T_{n+1}, \tag{3.3}$$

$$C_{n+1}(x) = \sum_{\substack{y\,:\, y\sim x,\\ y\leq x}} C_n(y) \qquad \text{se } x \in T_{n+1}. \tag{3.4}$$

Onde (3.4) vem da definição dada na Seção 1 deste capítulo.

Agora aplicando (3.2) no vértice y, na etapa n, tem-se que

$$C_n(y) > \sum_{\substack{z\,:\, z\sim y,\\ z\leq y}} C_n(z) \tag{3.5}$$

Tomando o somatório em ambos os lados da expressão acima obtem-se,

$$\sum_{\substack{y\,:\, y\sim x,\\ y\leq x}} C_n(y) > \sum_{\substack{y\,:\, y\sim x,\\ y\leq x}} \sum_{\substack{z\,:\, z\sim y,\\ z\leq y}} C_n(z) \tag{3.6}$$

E agora, aplicando (3.4), e a Observação (3.1), e ainda observando que para $x \in T_n \backslash T_{n+1}$, também vale, desde que ambos os lados de (3.4) são iguais a zero, segue que para $x \in T_{n+1}$ obtemos,

$$C_{n+1}(x) = \sum_{\substack{y\,:\, y\sim x,\\ y\leq x}} C_n(y) > \sum_{\substack{y\,:\, y\sim x,\\ y\leq x}} \sum_{\substack{z\,:\, z\sim y,\\ z\leq y}} C_n(z) = \sum_{\substack{y\,:\, y\sim x,\\ y\leq x}} C_{n+1}(y). \tag{3.7}$$

Vê-se que as equações (3.3) e (3.7) valendo para a etapa $n+1$ e reescritas abaixo

$$C_{n+1}(x) \begin{cases} > \displaystyle\sum_{\substack{y\,:\, y\sim x,\\ y\leq x}} C_{n+1}(y), & \text{se } x \in T_{n+1} \\ = 0. & \text{se } x \notin T_{n+1}. \end{cases}$$

finalizam o processo de prova por indução, provando o Lema. ■

Prova do Teorema 1.1: Seja $x \in \mathbb{Z}^d$ e a configuração inicial $\left(C_0(x); x \in \mathbb{Z}^d\right)$. Pelo Lema 3.3, $C_n(x) = 0$ se $x \notin T_n$, e invocando o Lema 3.2, com um n_0 tal que $n \geq n_0$ implicando $x \notin T_n$, tem-se quase certamente, que $C_n(x) = 0$ para todo n suficientemente grande.

Assim $\lim\limits_{n\to\infty} C_n(x) = 0$, quase certamente.

$$\mathbb{E}\left[C_0(x)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{1}_{[y \leq x]}\right] = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{[y \leq x]}\right] = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}\left[y \leq x\right].$$

Como as árvores geradoras minimais são invariantes por translação, pela definição de $C_0(x)$ temos que $\mathbb{P}\left[C_0(x) > 0\right] > 0$.

E como a $\mathbb{P}\left[C_0(x) > 0\right] > 0$ acarreta

$$\mathbb{E}\left[C_0(x)\right] > 0$$

segue que

$$0 = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} C_n(x)\right] = \mathbb{E}\left[C_\infty(x)\right] < \mathbb{E}\left[C_0(x)\right]$$
$$\mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} C_n(x)\right] < \mathbb{E}\left[C_0(x)\right].$$

concluindo a prova do teorema. ■

Com o resultado anterior fica provado que existe uma configuração inicial que leva à desigualdade do enunciado do Teorema 1.1.

CAPÍTULO 4

Observações e Problemas abertos

Nos capítulos anteriores foram estudados os resultados obtidos nos artigos [10] e [3], onde foram analisadas o fluxo das distribuições em vértices, numa quantidade grande de etapas.

O propósito deste pequeno capítulo é destacar a importância de algumas observações relativa aos temas objeto dos capítulos anteriores. Nele serão tratadas observações que se aplicam a todo o trabalho, bem como a proposição de outras questões.

A primeira delas é relativa a mencionada obviedade de $\mathbb{E}\left[C_0(x)\right] > 0$ para todo vértice x. Acontece, entretanto, que este valor esperado é até mesmo ∞, como se vê nos cálculos a seguir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[C_0(x)\right] &= \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}\left[y \le x\right] = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}\left[x + y \le x\right] \\ &= \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}\left[x \le x - y\right] = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}\left[x \le y\right] = \infty.\end{aligned}$$

onde a segunda e quarta igualdades são resultado de substituições e a terceira é válida devido à invariância por translação e a igualdade final segue do fato de que x tem uma quantidade infinita de ancestrais, quase certamente.

Como mencionado em [3] não é possível construir um exemplo no qual os recursos escapam para o infinito, exceto quando a quantidade de recurso inicial num dado vértice tem um valor esperado finito. É interessante perguntar se tais exemplos existem.

Particularmente, na construção idealizada em [3], a configuração inicial foi escolhida de tal forma que, quase certamente, a dinâmica induzida acontece em uma floresta com componentes com terminal único, imersa em $\mathbb{Z}^d$, e em cada etapa os recursos são transferidos do vértice com recurso não-nulo para o seu respectivo vértice pai. Não fica claro se para toda configuração inicial com estas propriedades o valor esperado da quantidade de recurso inicial em um vértice é infinita. Essas considerações são formuladas mais formalmente nas duas questões seguintes.

Questão 4. Suponha que $\left(C_0(x), x \in \mathbb{Z}^d\right)$ tenha uma distribuição invariante por translação e é positiva nos vértices de uma floresta com terminais únicos. Alem disso, suponha que durante a n-ésima etapa da evolução, todo vértice no qual $C_{n-1}(x) > 0$ transfere seu recurso para o seu vértice pai. É o caso em que $\mathbb{E}\left[C_0(x)\right] = \infty$?

Questão 5. Existe uma distribuição invariante por translação para uma configuração inicial na qual $\mathbb{E}\left[C_\infty(x)\right] < \mathbb{E}\left[C_0(x)\right] < \infty$?

Uma resposta negativa para a Questão 4 acarretaria uma resposta positiva para a Questão 5.

APÊNDICE

Princípio do Transporte de Massa

Neste apêndice, que é um resumo do artigo [8], será discutido o importante *Princípio de Transporte de Massa*. Informações mais detalhadas poderão ser encontradas no artigo citado.

Inicialmente algumas definições e ao final o Teorema do Princípio de Transporte de Massa.

Definição Seja $G = (V, E)$ um grafo infinito. Uma aplicação bijetiva $f : V \to V$ tal que o elo $\langle f(u), f(v) \rangle \in E$ se, e somente se, o elo $\langle u, v \rangle \in E$ é chamado *automorfismo de grafos* para G. O grafo G é dito *transitivo* se para qualquer $u, v \in V$ existe um automorfismo f de grafos tal que $f(u) = v$.

Definição Sejam $G = (V, E)$ um grafo transitivo e $\mathrm{Aut}(G)$ o grupo de automorfismos de G e H um subgrupo fechado de $\mathrm{Aut}(G)$. Para $v \in V$ defina *estabilizador* de v como o subgrupo $\mathrm{Aut}_H(v) = \{h \in H : hv = v\}$. Então H é dito ser *unimodular* se para todo $u, v \in V$

$$\left|\mathrm{stab}_H(u)v\right| = \left|\mathrm{stab}_H(v)u\right|$$

O grupo G é dito ser *unimodular* se existe um subgrupo fechado unimodular H de $\mathrm{Aut}(G)$ que age transitivamente em V.

Definição Seja H grupo enumerável e suponha que S é um conjunto simétricos de geradores. Defina um grafo $G = (H, S)$ com o conjunto de vértices H tal que o elo $\langle u, v \rangle$ é um elo se, e somente se, $s \in S$ tal que $u = vs$. O grafo G é chamado um *grafo de Cayley à direita* de H.

Considere uma variável X aleatória como um automorfismo invariante tomando valores em um conjunto finito F dos elos do grafo $G = (V, F)$; uma invariância de automorfismo significa que para qualquer conjunto de elos $\left\{\langle x_1, y_1 \rangle, \ldots, \langle x_k, y_k \rangle\right\}$ e qualquer automorfismo f de G a distribuição de

$$\left(X\left(\langle x_1, y_1 \rangle, \ldots, \langle x_k, y_k \rangle\right)\right),$$

é o mesmo que

$$\left(X\left(\langle f(x_1), f(y_1)\rangle, \ldots, \langle f(x_k), f(y_k)\rangle\right)\right)$$

(Um exemplo básico de tal variável é quando X é uma percolação de elos.) Seja $m : V \times V \times F^E \to \mathbb{R}$ uma função que é invariante sob a ação diagonal de Aut(G), i. e. tal que para todo automorfismo g e todos $u, v \in V$, também todo $\omega \in F^V$ tem-se $m(u, v, \omega) = m(gu, gv, g\omega)$. Intuitivamente pensa-se em $m(u, v, w)$ como a quantidade de massa transportada de u para v quando $X = \omega$.

Teorema (Teorema do Princípio de Transporte de Massa)**.** *Se G é um grafo transitivo e unimodular, então a quantidade de massa esperada transportada para fora de um vértice é igual a quantidade de massa transportada para o próprio vértice, i. e., para qualquer vértice u*

$$\mathbb{E}\sum_{v\in V} m(u, v, X) = \mathbb{E}\sum_{v\in V} m(v, u, X).$$

A prova do teorema fica bem mais simples se for considerada restrita aos grafos de Cayley.

Prova: Se u e v são vértices, então eles também são membros de um subjacente grupo H e existe um único elemento $h = vu^{-1} \in H$ tal que $v = hu$. Assim

$$\begin{aligned}\sum_{v\in V} \mathbb{E}m(u, v, X) &= \sum_{h\in H} \mathbb{E}m(u, hu, X) = \sum_{h\in H} \mathbb{E}m(h^{-1}u, u, h^{-1}X) \\ &= \sum_{h\in H} \mathbb{E}m(h^{-1}u, u, X) = \sum_{v\in V} \mathbb{E}m(v, u, X).\end{aligned}$$

onde a terceira igualdade segue da invariância do automorfismo de X. ■

Referências Bibliográficas

[1] Alexander, K. S.,*Percolation and minimal spanning forests in infinite graphas.* Ann. Probab., **19** (1991), no. 4, 87-104.

[2] van den Berg, J., Ermakov, A., *On a distributed clustering process of Coffman, Courtois, Gilbert and Piret.* J. Appl. Probab. **35** (1998), no. 4, 919-924.

[3] van den Berg, J., Hilário, M. R., Holroyd, A. E., *Escape of resources in distributed clustering processes.* Elet. Comm. em Prob. **15**, no. 40, (2010), 442-448.

[4] van den Berg, J., Meester, R. W. J. *Stability properties in graphs.* Random Structures Algotithms **2** (1991), no 3, 335-341.

[5] Coffman, E., Courtois, P. J., Gilbert, E., Piret, P, *A distributed clustering process,* J. Appl. Probab. **28** (1991), no. 4, 737-750.

[6] Diestel, Reinhard, *Graph Theory*, third edition, Springer-Verlag, 2005.

[7] Grimmett, G., *Percolation*, Springer-Verlag, New York, 1989, ISBN 3-540-996843-1.

[8] Häggström, O., Jonassom, J., *Uniqueness and non-uniqueness in percolation theory.* Probability Surveys **3** (2006), 289-344.

[9] Lyons, R., Peres, O., Schramm, *Minimal spanning forests.* Ann. Probab., **34**, (2006), no. 5, 1665-1692.

[10] Hilário, M. R., Louidor, O., Newman, C. M., Rolla, L. T., Sheffield, S., Sidoravicius, V., *Fixation for distributed clustering processes.* Comm. Pure and Appl. Math. **63** (2009), no. 7, 926-934.

[11] James, B. R., *Probabilidade: um curso em nível intermediário*, Impa, Projeto Euclides, 1981.

[12] Shiryaev, A. N., *Probability*, second edition, Springer-Verlag, New York, 1996. ISBN 0-387-94549-0.

[13] Pemantle, R., *Choosing a spanning tree for the integer lattice uniformly.* Ann. Probab., **19**, (1991), no. 4, 1550-1574.