

MEGUMI MIYATA

**Curso de Pós-Graduação- Especialização em MATEMÁTICA PARA
PROFESSORES: ÊNFASE EM CÁLCULO**

SANGAKU- A GEOMETRIA SAGRADA

Belo Horizonte

2014

MEGUMI MIYATA

SANGAKU- A GEOMETRIA SAGRADA

A monografia apresentada ao curso de Especialização em Matemática Para Professores-Ênfase em Cálculo- do programa de Pós-graduação da Universidade Federal de Minas Gerais- UFMG, como requisito parcial à obtenção do título de Especialista.

Área de Concentração: Cálculo

Orientador: Professor Paulo Antônio Fonseca Machado.

Belo Horizonte

2014

Dedico este trabalho aos meus pais, Chuta Miyata e Masae Miyata, pelo esforço incondicional dispensado à minha formação.

AGRADECIMENTOS

- A Deus por iluminar sempre meus caminhos, tornando possível a conclusão de mais esta etapa;
- Aos meus pais, pela dedicação e motivando e incentivando a conclusão desta etapa;
- Ao meu orientador, professor Paulo Antônio Machado, por sua dedicação e sábia orientação, possibilitando-me a conclusão deste trabalho;
- Ao amigo e companheiro Adilton Costa Silva, pelas valiosas sugestões e importantes comentários;
- À minha amiga Ilza Maria Pereira, pelo incentivo constante;
- Aos coordenadores pelo trabalho de alto nível e permanente apoio;
- E finalmente a UFMG e todos os professores e funcionários, pela colaboração e amizade.

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de descrever o “Sangaku”(ou San Gaku) – também chamado “Matemática sagrada” - e apresentar a resolução de alguns exemplos.

O “Sangaku” são placas de madeira, dispostas em templos e santuários japoneses escrito em “Kanbun” (uma antiga forma de escrita japonesa), que contém problemas matemáticos, principalmente sobre geometria, criado durante o período “Edo”, que perdurou por dois séculos no Japão (sec. XVII ao XIX), e foi usado como oferendas votivas aos deuses ou como desafio às congregações e visitantes.

ABSTRACT

This paper aims to describe the "Sangaku" (or San Gaku) - also called "sacred mathematics" - the resolution and present some examples.

The "Sangaku" are wooden boards arranged in Japanese temples and shrines in writing "Kanbun" (an ancient form of Japanese writing), which contains mathematical problems mainly on geometrical, created during the "Edo", which lasted for two centuries in Japan (sec. XVII to XIX), and was used as votive offerings to the gods or as a challenge to congregations and visitors offerings.

Lista de figuras

Figuras	Página
01 Imagem-Tokugawa Ieyasu	12
02 Templo budista.....	13
03 Imagem- Soroban	14
04 Gravuras em placas de madeira de problemas de Sangaku.....	15
05 Figura conforme descrição do problema 01	18
06 Figura do problema 01 em desenvolvimento.....	18
07 Figura conforme descrição do problema 02.....	20
08 Figura do problema 02 em desenvolvimento.....	20
09 Figura conforme descrição do problema 03.....	23
10 Figura do problema 03 em desenvolvimento.....	23
10.1 Triângulo formado pelos vértices ABC.....	24
11 Figura conforme descrição do problema 04.....	26
11.1 Simetria da figura do problema 04.....	26
11.2 Figura do problema 04 em desenvolvimento.....	27
12 Figura conforme descrição do problema 05.....	30
12.1 Figura do problema 05 em desenvolvimento.....	30
13 Figura conforme descrição do problema 06.....	34
13.1 Figura do problema 06 em desenvolvimento.....	35
14 Figura conforme descrição do problema 07.....	36
14.1 Figura do problema 07 em desenvolvimento.....	36
15 Problema 08.....	39

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UFMG.....UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

SUMÁRIO

Item		Página
	Introdução	10
1	História	11
2	Problemas “Sangaku”	17
2.1	Problema 01	17
2.2	Problema 02	20
2.3	Problema 03	23
2.4	Problema 04	26
2.5	Problema 05	30
2.6	Problema 06	34
2.7	Problema 07	36
2.8	Problema 08	39
3	Conclusões	40
4	Referências bibliográficas	41

INTRODUÇÃO

A palavra japonesa Sangaku, literalmente, significa “tábuas de madeira”, referindo-se a placas de madeira que eram dependuradas nos templos budistas e xintoístas japoneses, contendo importantes descobertas matemáticas, principalmente na área da geometria.

O fato de se dependurar as tábuas nos templos japoneses teve um duplo sentido. Primeiro, para agradecer aos deuses daqueles templos pelas descobertas matemáticas e, segundo, para dar honra aos seus autores.

É importante notar que a história do Japão é dividida em períodos, que vão desde o primeiro, chamado “Período de Jomon (8000 – 300 aC)” até o presente – décimo quarto – que é chamado “Período Heisei (1989 ...)”

Quanto ao desenvolvimento do Sangaku, no Japão, pessoas de diversas origens, tais como samurais, comerciantes, agricultores e até mesmo crianças, destacadamente, ajudaram na criação desses problemas matemáticos.

O Sangaku se constitui não somente de problemas geométricos, mas também aritméticos e algébricos. Dentre os problemas do Sangaku, há predominância dos de geometria plana, embora muitos deles sejam tridimensionais, envolvendo esferas em que, em algumas delas, figura-se até a intersecção de um cilindro e mais outra esfera.

Estes problemas Sangaku foram criados durante o “Período Edo” (1603 a 1867), caracterizado pelo isolamento do Japão em relação ao mundo ocidental.

Tal isolamento levou o Japão a um grande desenvolvimento das artes e da matemática, de tal forma que os livros japoneses de Geometria, com teoremas matemáticos desconhecidos no Ocidente, passaram a ser reconhecidos, bem como os seus autores matemáticos. Assim, muitos teoremas matemáticos ditos “europeus” já haviam sido resolvidos pelos matemáticos japoneses, ou seja, antes da “descoberta ocidental”. Exemplo desse fato é um problema matemático de 1824, exposto na prefeitura de Gumma, que é uma variante do “Teorema de círculos tangentes de Descartes”.

Delineadas algumas circunstâncias cronológicas e características do Sangaku, também denominado “Geometria Sagrada” e/ou “Matemática dos Deuses”, o presente trabalho visa desenvolver uma visão relativa ao tema, bem como apresentar, a título de exemplificação, a resolução de alguns problemas Sangaku.

1 - HISTÓRIA

O Japão é um arquipélago formado por diversas ilhas, sendo as principais *Kyushu*, *Shikoku*, *Honshue* e *Hokkaido*. Destaca-se, ainda que se trata de uma das maiores economias da Terra e com elevados índices de desenvolvimento humano e intelectual.

Conforme especifica Arconcher (2010) , entre 1603 e 1867, conhecidos como período Edo, foram desenvolvidas determinadas tendências japonesas de artes plásticas, matemática e ciências. No ano de 1868 que se iniciou a ocidentalização do Japão com a reforma *Meiji*, dando origem, assim, ao Japão contemporâneo.

Sobre o período Edo, Fuser (2008) explica que este foi uma fase da história do Japão em que ela foi governada pelos xoguns, que teve início em março de 1603 permanecendo até maio de 1868, com último detentor do poder Edo, ao seu fim, foram restaurados os governos do Imperador Tenno. Além do exposto, esse período também ficou amplamente conhecido por iniciar a fase do Japão moderno.

Para Arconcher (2010), durante boa parte do período Edo que o Japão vivenciava, ele ficou de certa forma isolado, pois limitou ou não manteve contato com os países vizinhos históricos, principalmente, Coreia e China, sendo proibidos quaisquer livros ocidentais ou contato com estrangeiros, sob ameaça de pena de morte. O comércio com o ocidente foi mantido apenas com a Holanda, sendo que as embarcações comerciais desse país podiam aportar num único ponto da baía de Nagasaki.

Segundo o autor, sob o domínio do governo da família *Tokugawa*, ao estilo feudal (*Xogunato*), os japoneses se dedicavam às artes plásticas com abundância de formas e cores vivas.



Figura 01- Tokugawa Iyeyasu - primeiro xogun da família Tokugawa
(Wikipédia.org/.wik/xogunato-Tokugawa)

Arconcher (2010) enfatiza que, além das artes, no período Edo, o Japão ainda desenvolveu a matemática a partir de bases e conhecimentos chineses, adotando como referência o chinês Jiuhang Suanshu, possibilitando que, de algum modo, a sabedoria matemática fosse transmitida a todo o Japão. Desta forma, de maneira singular e autônoma, a matemática japonesa foi se desenvolvendo, apresentando alguns avanços em paralelo ao Ocidente, outros não.

Conforme o autor, dentre tais avanços ocorridos, foram, como exemplo, a tradição do Sangaku, sendo estes problemas de geometria que eram exibidos nos templos e santuários japoneses, tanto budistas quanto xintoístas, conforme exemplo da figura 02.



Figura 02-Templo budista

Fonte:es.wikipedia.org

De acordo com Arconcher (2010), os seis primeiros livros de Euclides de matemática foram traduzidos pelo missionário jesuíta Matteo Ricci, que o fez para o chinês no final do século XVI. A principal finalidade do referido missionário foi difundir a doutrina cristã entre os chineses.

Entretanto, o autor observa que a verdadeira grande contribuição introduzida à cultura chinesa se deu a partir de programa de traduções de livros ocidentais que abordavam a geometria e astronomia. Contudo, a tradução feita por Matteo Ricci dos livros de Geometria para o chinês foram somente os comentários a respeito dos seis primeiros livros de Euclides que, posteriormente, foram transmitidos ao Japão.

Destaca-se, conforme especifica Fugakawa (1998), que no século VI a matemática japonesa estava sendo fortemente influenciada pela matemática chinesa, mas, anteriormente, a atividade era inicial, simples e, assim sendo, não restaram registros.

Entretanto, segundo Fugakawa (1998), os japoneses já haviam criado um sistema e um calendário sobre contagem decimal fundamentado em potências de 10, mas com origens desconhecidas e não comprovadas. O que se sabia era a forte influência dos chineses sobre a cultura japonesa, pois, as obras clássicas da matemática desse povo já eram estudadas pelos japoneses, como foi o caso do *Jiuzhang suanshu* (*Computação em nove capítulos*), cuja origem data do final da dinastia Han (208 A.C. -08 D.C.).

O autor salienta que ao término do século VII, foi fundado, pelo imperador Tenji, uma escola, tendo como parte do currículo a Aritmética. Mas,

foi no início do século VIII, por meio do imperador Monbu, que foram instituídas as primeiras escolas com matemática.

Dá-se início, a um fenômeno cultural sem precedentes na história da matemática, pois, como aponta Fugakawa (1998), no período Edo, os matemáticos japoneses foram desenvolvendo grandiosas e importantes habilidades na aplicação do ábaco (*soroban*), conforme figura 03.

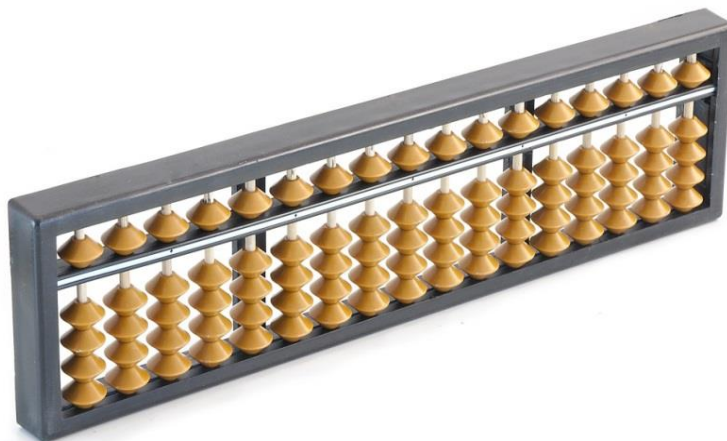


Figura 03 - Imagem –Soroban (www.miniladeducational.com)

Foi uma época em que o Japão apresentava uma organização administrativa centralizada e, por isso, precisava de trabalhadores competentes e capazes para realizar e fiscalizarem cobranças de impostos, que significava em média entre 40% a 60% da colheita.

Para tanto, Fugakawa (1998) afirma que eram oferecidos concursos públicos aos interessados em preencher tais cargos, resultando no aparecimento das verdadeiras escolas matemáticas. Havia, para cada escola dessas, um líder e um grupo de discípulos que praticavam juntos, desafios matemáticos.

É nesse contexto cultural que, segundo o autor, começou a surgir o Kabun, ou seja, gravuras e escritas em uma língua japonesa antiga com teoremas geométricos.



Figura 04 – Gravuras em placas de madeira de problemas de Sangaku.

Fonte: es.wikipedia.org

Tais gravuras eram feitas em madeira, chamadas *Sangaku* (FIGURA 04), ofertadas como oferendas em santuários xintoístas e nos templos budistas aos deuses, além de apresentarem resultados geométricos a partir de figuras artisticamente trabalhadas, seguidas de um texto explicativo.

Além do exposto, Fugakawa (1998) corrobora que o kabun também era aplicado para serem lançados desafios aos matemáticos rivais, visto que tratava-se de soluções de problemas complexos e difíceis de serem apresentados.

Para o autor, no início do período Edo atravessado pelo Japão, as gravuras chegavam a ocupar, normalmente, placas retangulares de aproximadamente 50 cm por 30 cm. As gravuras de tempos mais recentes se encontram em placas de madeira de 180 cm por 90 cm.

Sempre foi comum nas gravuras maiores, serem observadas a exposição de diversos problemas geométricos, pois, a autoria desses trabalhos é, geralmente, múltipla. O mais provável é que tenha tido contribuições de muitos seguidores de um matemático líder.

Atualmente, o professor japonês *Hidetoshi Fukagawa* é o principal responsável pela divulgação do *Sangaku*. Existe um livro de sua autoria e do professor Dan Pedoe (falecido), intitulado *Japanese Temple Geometry Problems* (The Charles Babbage Research Centre-Winnipeg, Canadá - 1989).

Nesse livro, o professor Fukagawa exibe 250 problemas geométricos provenientes de vários *Sangakus*.

Para Rehmeier (2008), Fukagawa tem consagrado o Sangaku, por dar continuidade a esta arte que surgiu pela primeira com a publicação em 1989 por Daniel Pedoe e Hidetoshi, ao lançarem o livro *Japanese Temple Geometry*.

Existe uma diversidade de quantidade de problemas que, segundo Fugakawa (1998), envolvem circunferências e elipses. De acordo com o autor, a elipse sempre é analisada a partir de uma secção plana de um cilindro de revolução, jamais como um lugar geométrico.

Além disso, destaca-se, ainda, que problemas que envolvem elipses são, geralmente, estudados por meio da aplicação de propriedades deduzidas dessa forma de concepção.

Quanto ao grau de dificuldade dos problemas, é em geral elevado, podendo ser observada a partir da grande competência apresentada pelos matemáticos japoneses que viveram no período *Edo*, quanto à utilização da Álgebra Elementar na resolução de problemas geométricos.

Segundo o autor, a forma geral de trabalho dos matemáticos do período *Edo* foi (i) tradução para a linguagem algébrica da situação geométrica, (ii) resolução das equações correspondentes até encontrar a solução ou desenvolvimento algébrico até demonstrar a propriedade. E principalmente, nesse segundo passo que se encontra transformações algébricas muito sutis.

É interessante enfatizar que não existem mais muitas das gravuras originais, sendo os *Sangakus* conhecidos por meio de manuscritos do período *Edo*. O mais antigo manuscrito que se tem notícias e que é conhecido, data do ano de 1751.

2 – PROBLEMAS SANGAKU

Segundo Pennick (1980), o termo geometria significa a medição da terra, sendo ela, talvez, uma das primeiras manifestações da civilização em seu nascedouro. Acredita-se que a geometria tenha sido desenvolvida a partir de uma habilidade primitiva, que requeria a manipulação da medida, considerado por muitos, nos tempos antigos, magia. O autor corrobora que a magia, ciência e religião eram elementos inseparáveis, formando um conjunto de habilidades pelo sacerdócio.

Desta forma, o desenvolvimento da matemática, no Japão, destaca-se no Período Edo, em que os Elementos de Euclides e demais clássicos influenciaram, de forma significativa, a matemática japonesa, levando consecutivamente ao interesse dos japoneses pela geometria euclidiana.

Mas, a independência japonesa da China, relativa aos conhecimentos matemáticos, deu-se com o desenvolvimento dos chamados *Sangakus*. Trata-se de quadros de madeira, nos quais estão escritos teoremas matemáticos com problemas de geometria. Neles, podem ser observados cálculos, gravuras de círculos e elipses. Assim, acredita-se que os templos japoneses, principalmente os budistas, se tornaram locais de aprendizado de matemática e desenvolvimento desses teoremas.

São templos com base quadrada, representando estabilidade, venerada pelos budistas. Contudo, resta saber se a geometria escrita nos *Sangakus* foi de fato aplicada nas suas construções.

Diante do exposto, neste trabalho, serão apresentados exemplos matemáticos de *Sangaku*, tendo como base a Geometria Euclidiana.

2.1 - Problema 01

Este problema foi extraído da coleção *Suri Shinpen- Matemática dos santuários e Templos*, de Saito Gigi (1816- 1889). Conforme o problema 01, constata-se que os centros de um colar de círculos de raio “ r ” são vértices de um polígono de “ n ” lados, como mostrado na figura 05. Sendo S_1 e S_2 a soma das áreas dos setores circulares interiores e exteriores ao polígono, respectivamente, mostre que $S_2 - S_1 = 2\pi r^2$.

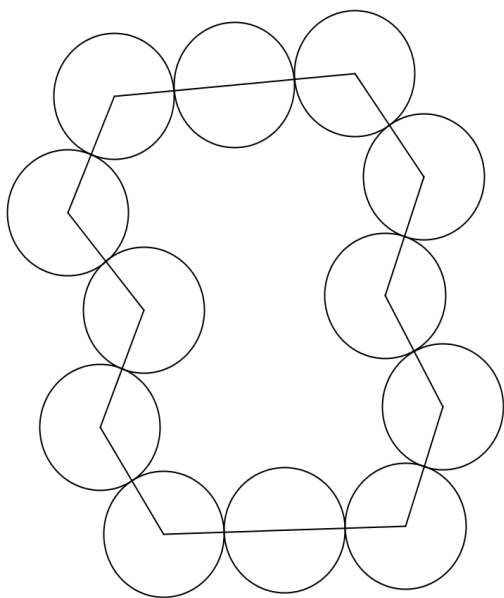


Figura 05- figura conforme descrição do problema 01.

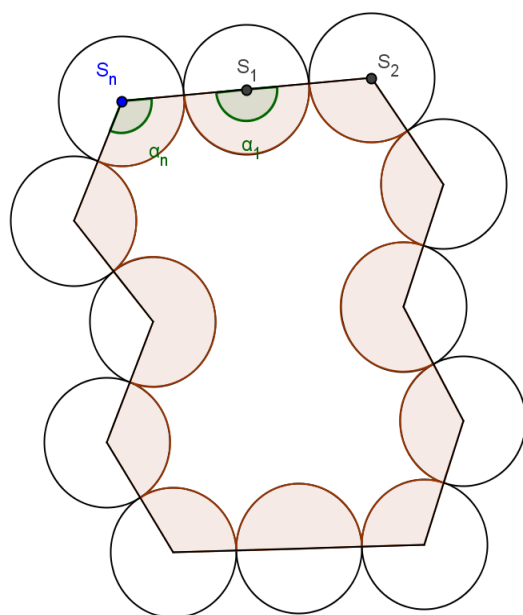


Figura 06 - figura do problema 01 em desenvolvimento.

Resolução:

Sabe-se que a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados, convexo ou não, é: $S_n = (n - 2) 180^\circ$ e que a área de um setor circular de raio r e amplitude α é:

$$A_c = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ}.$$

Sejam A_i os centros dos círculos do colar e α_i os correspondentes ângulos internos do polígono, conforme a figura 06 do problema 01.

Lembrando-se que: $S_1 = \sum_{i=1}^n \frac{\pi r^2 \alpha_i}{360^\circ}$

Temos, então:

$$S_1 = \frac{\pi r^2}{360^\circ} \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

Assim:

$$S_1 = \frac{\pi r^2}{360^\circ} (n - 2) 180^\circ$$

Portanto:

$$S_1 = \frac{(n-2)\pi r^2}{2}$$

Observe que S_2 é a área dos n círculos subtraídos da área S_1 , isto é:

$$S_2 = n\pi r^2 - S_1$$

Tendo-se a equação $S_2 - S_1$ e igualando à mesma equação, substituindo S_2 por $n\pi r^2 - S_1$, obtém-se:

$$S_2 - S_1 = n\pi r^2 - S_1 - S_1$$

Então:

$$S_2 - S_1 = n\pi r^2 - 2S_1$$

Agora, substituindo S_1 , após a igualdade, obtemos:

$$S_2 - S_1 = n\pi r^2 - 2 \frac{(n-2)\pi r^2}{2}$$

Simplificando, tem-se:

$$S_2 - S_1 = n\pi r^2 - n\pi r^2 + 2\pi r^2$$

Resultando:

$$S_2 - S_1 = 2\pi r^2$$

2.2 - Problema 02

Problema extraído do manuscrito *Jinbyô Bukkaku Sangakushu* – Coleção de *Sangakus* da Escola de *Aída*, escrito por *Aída Yasuaki* (1747-1817), originalmente proposto por *Kobata Atsukumi*, um de seus estudantes, e colocado no templo do Castelo de *Toba* em 1800.

Conforme os dados do problema 02 tem-se um grande círculo de diâmetro $2R=100$, que circunscreve o triângulo NMP e de forma que A é ponto médio de MP e BC são paralelos a MP , conforme figura 06. No problema é solicitado encontrar o lado $q = AC$ em termos de R , sabendo que A é ponto médio de um lado do triângulo maior.

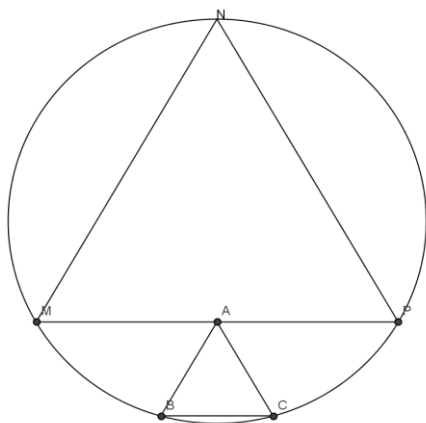


Figura 07- figura conforme descrição do problema 02.

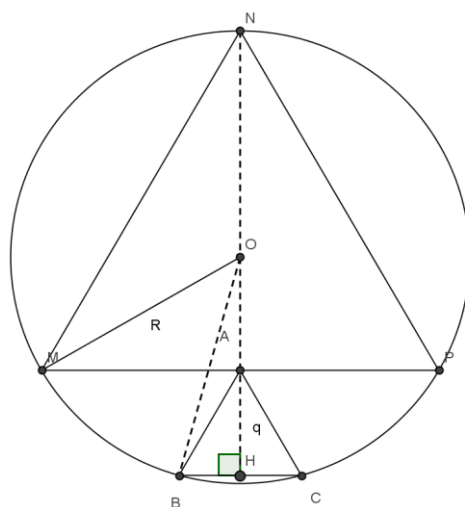


Figura 08- figura do problema 02 em desenvolvimento.

Resolução:

Observando o triângulo formado pelos pontos OHB mostrado em detalhe na figura 08, nota-se que $OB = R$, em que o segmento AO é o apótema do triângulo equilátero. Seja o centro O da circunferência é o ortocentro e baricentro do triângulo equilátero. Logo, seu comprimento equivale a $\frac{1}{3}$ do valor da altura h do triângulo, ou seja, $AO = \frac{1}{3}h$.

Desta forma, podemos constatar também que o raio R equivale a $\frac{2}{3}$ do valor da altura h do triângulo. Assim, podemos escrever:

$$R = \frac{2}{3}h$$

Portanto:

$$h = \frac{3}{2}R$$

Consideremos que o apótema equivale à metade do valor do raio da circunferência, ou seja:

$$AO = \frac{R}{2}$$

Como o triângulo menor também é equilátero, utilizando o teorema de Pitágoras, tem-se:

$$q^2 = (AH)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$$

Resultando:

$$AH = \frac{q\sqrt{3}}{2}$$

Sabe-se que HB é igual à $\frac{BC}{2}$, que equivale à $\frac{q}{2}$.

Agora examinando o triângulo formado pelos pontos AHC .

Verifica-se que:

$$OH = AO + AH$$

Substituindo os valores acima, obtemos:

$$OH = \left(\frac{R}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}q}{2}\right)$$

Utilizando o Teorema de Pitágoras no $\triangle OBH$, temos:

$$R^2 = (OH)^2 + (HB)^2$$

Substituindo os valores de OH e HB , teremos:

$$R^2 = \left(\frac{R}{2} + \frac{q\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$$

Desenvolvendo, obtém-se:

$$R^2 = \frac{R^2}{4} + \frac{2Rq\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}q^2 + \frac{q^2}{4}$$

$$4R^2 = R^2 + 2R\sqrt{3}q + 4q^2$$

Obtemos:

$$4q^2 + 2R\sqrt{3}q - 3R^2 = 0$$

Para tornar a equação mais simples, dividimo-la por 4.

E chega-se a uma equação do segundo grau em que:

$$q^2 + \frac{Rq\sqrt{3}}{2} - \frac{3R^2}{4} = 0$$

Resolvendo a equação, para obter as raízes, tem-se:

$$\Delta = \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{3R^2}{4}\right)$$

$$\Delta = \frac{3R^2}{4} + \frac{12R^2}{4}$$

$$\Delta = \frac{15R^2}{4}$$

$$q = \frac{-\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right) \pm \frac{R\sqrt{15}}{2}}{2} = q_1 = \frac{-\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{R\sqrt{15}}{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \quad q_2 = \frac{-\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{R\sqrt{15}}{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

Como $q > 0$, a única solução possível é:

$$q_1 = \frac{-\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{R\sqrt{15}}{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{(\sqrt{15} - \sqrt{3})R}{4} \cong 0,535R$$

2.3 - Problema 03

Problema proposto por *Yamasaki Tsugujiro*, no Templo de *Meiseirinji*, em *Ogaki*, 1865. Neste problema tem-se, em um losango, dois círculos vermelhos de raio r , dois brancos de raio r_1 e cinco azuis de raio r_2 . Pede-se que demonstre : $r_2 = \frac{r_1}{2}$

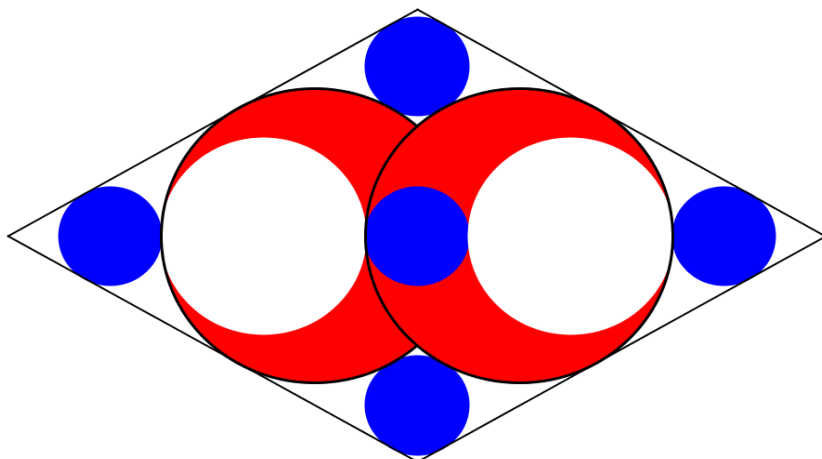


Figura 09 – figura conforme descrição do problema 03.

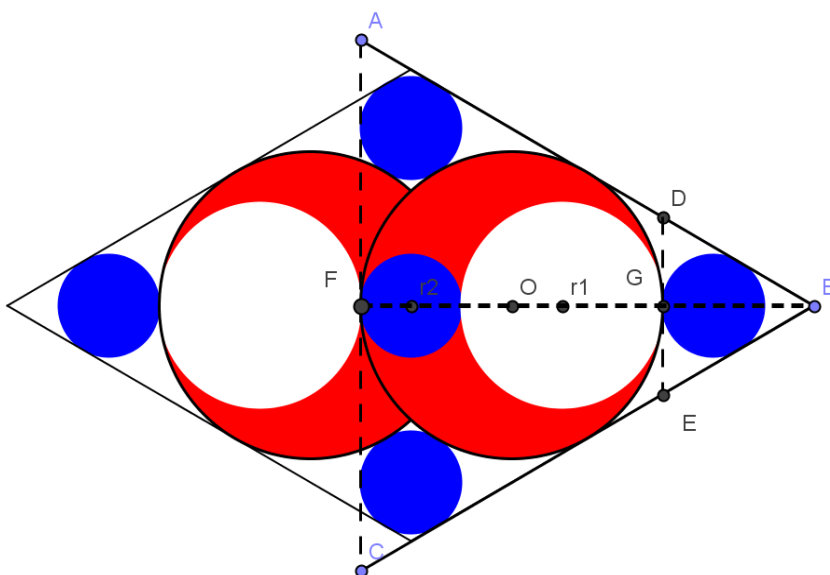


Figura 10- figura do problema 03 em desenvolvimento.

Resolução:

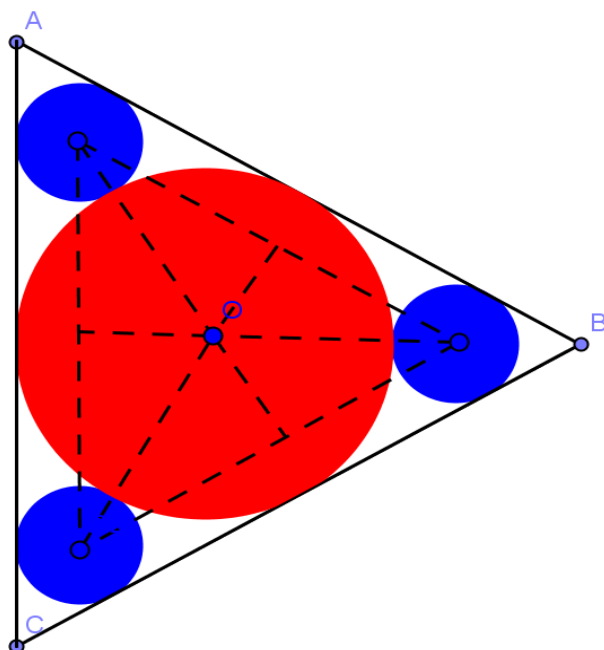


Figura 10.1 - Triângulo formado pelos vértices ABC

Construindo um triângulo ABC conforme figura 10.1, que circunscreve e tangencia o círculo maior (vermelho) de raio r_1 e três círculos menores (azuis) de raios r_2 . Agora se tracejando os segmentos que ligam os centros dos círculos menores entre si e os centros dos círculos menores com o centro do círculo maior obtemos três triângulos que podemos observar que são congruentes:

$$\triangle OO_1O_3 \equiv \triangle OO_1O_2 \equiv \triangle OO_2O_3$$

Concluindo-se que o triângulo formado pelos centros dos círculos menores e o centro do círculo maior são congruentes podemos deduzir que o triângulo formado pelos vértices A, B e C é um triângulo equilátero.

Então, temos:

$$FG = 2r_2 + 2r_1$$

Sabe-se que também:

$$FG = 2r$$

Igualando as duas equações:

$$2r = 2r_2 + 2r_1$$

Dividindo a equação por dois, obtemos:

$$r = r_2 + r_1$$

Como o círculo de raio r está inscrito no triângulo equilátero, temos:

$$r = \frac{1}{3} h$$

Onde h refere-se à altura desse triângulo equilátero e l é o lado desse mesmo triângulo

Sabemos que $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

Então: $r = \frac{1}{6} l\sqrt{3}$

Analisando o triângulo menor $\triangle BDE$, temos:

$$BG = h - 2r$$

$$BG = \frac{l\sqrt{3}}{2} - \frac{l\sqrt{3}}{3}$$

$$BG = l \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$BG = \frac{l\sqrt{3}}{6}$$

Nota-se que o valor de BG é igual ao de r

$$BG = r$$

No triângulo menor, sabe-se que $r_2 = \frac{1}{3} BG$

Então: $r_2 = \frac{1}{3} r$

Portanto: $r = 3 r_2$

Assim, temos:

$$3r_2 = r_1 + r_2$$

Isolando r_1 , temos:

$$r_1 = 3r_2 - r_2$$

Logo, conclui-se que: $r_2 = \frac{r_1}{2}$

2.4 - Problema 04

Problema do *Sangaku* do santuário de *Katayamahiko*, 1873. Como mostra a figura 09, em um setor de raio R , dois círculos de raios r são tangentes entre si e tocam o setor internamente. Um pequeno círculo de raio t toca o setor e uma corda de comprimento d tangente aos círculos de raio r . Se $d = 3,62438$ e $2t = 0,34$, pede-se, no problema, o valor de $2r$

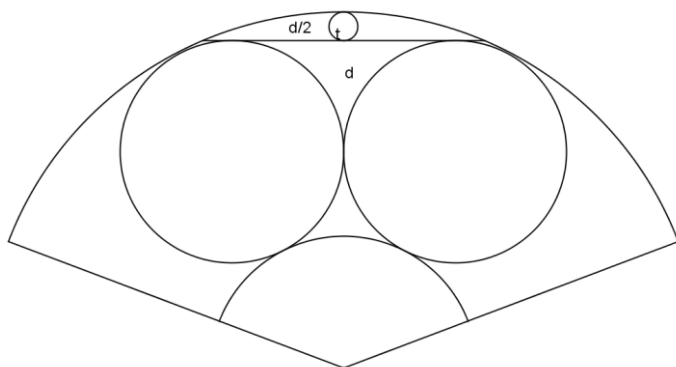


Figura 11 – figura conforme descrição do problema 04.

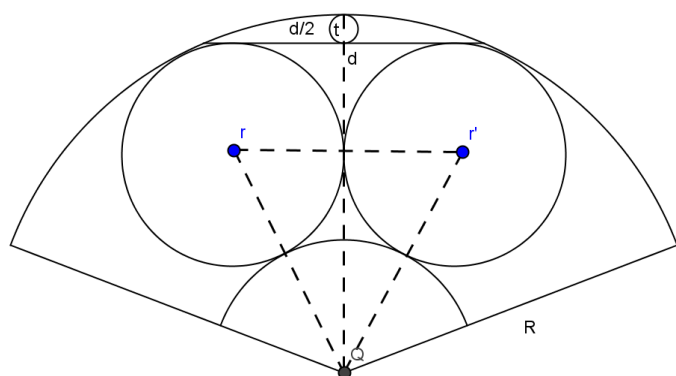


Figura 11.1- simetria da figura do problema 04

Tracejando-se uma reta que divide ao meio a figura do problema 04, podemos verificar que o lado esquerdo e o lado direito da mesma são iguais, pois a distância do círculo raio de círculo r e r' é o mesmo em ambos os lados. A distância entre os raios r e r' com o raio R também são congruentes, o que pode se deduzir que há uma simetria na figura.

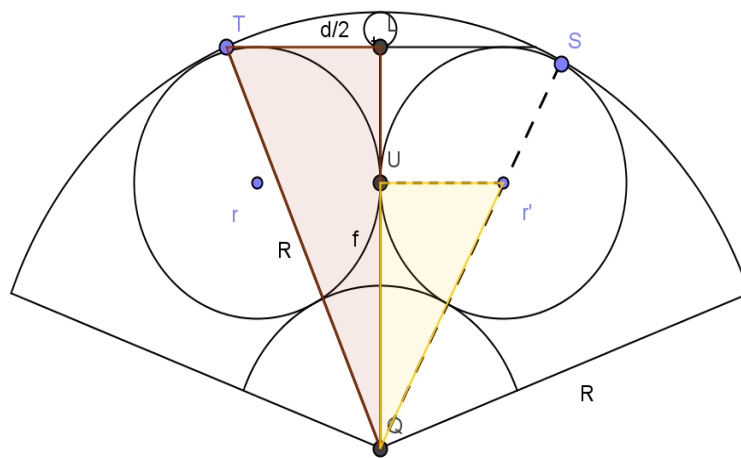


Figura 11.2- figura do problema 04 em desenvolvimento.

Resolução:

Traça-se uma linha auxiliar à esquerda, formando o triângulo TLQ, mostrada na figura 11.2, e aplicando-se o Teorema de Pitágoras a esse triângulo retângulo, formado por essa linha, tem-se:

$$R^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + (R - 2t)^2$$

$$R^2 = \frac{d^2}{4} + R^2 - 4Rt + 4t^2$$

Tirando o m.m.c, obtemos:

$$4R^2 = d^2 + 4R^2 - 16Rt + 16t^2$$

Subtraindo e somando os valores com a mesma incógnita, tem-se:

$$16Rt = d^2 + 16t^2$$

Isolando R, obtém-se:

$$R = \frac{d^2 + 16t^2}{16t}$$

$$R = \frac{d^2}{16t} + t \quad (1)$$

Agora, aplicando-se o Teorema de Pitágoras, à direita ao triângulo formado pelos vértices r'U Q da figura 11:

$$(R - r)^2 = r^2 + (R - 2t - r)^2$$

Produzindo:

$$R^2 - 2Rr + r^2 = r^2 + [R - (2t + r)]^2$$

Desenvolvendo a equação:

$$R^2 - 2Rr + r^2 = r^2 + R^2 - 2R(2t + r) + (2t + r)^2$$

$$R^2 - 2Rr + r^2 = r^2 + R^2 - 4Rt - 2Rr + 4t^2 + 4tr + r^2$$

$$r^2 + R^2 - 4Rt - 2Rr + 4t^2 + 4tr + r^2 - R^2 + 2Rr - r^2 = 0$$

Subtraindo e somando os valores com a mesma incógnita, obtém-se:

$$r^2 + 4t^2 + 4tr = 4Rt$$

Dividindo a equação por 4t:

$$\frac{r^2}{4t} + \frac{4t^2}{4t} + \frac{4tr}{4t} = R$$

Obtém-se:

$$R = \frac{r^2}{4t} + t + r \quad (2)$$

Igualando as duas expressões (1) e (2) para resolver:

$$\frac{d^2}{16t} + t = r + t + \frac{r^2}{4t}$$

$$\frac{d^2}{16t} = r + t + \frac{r^2}{4t} - t$$

$$\frac{d^2}{16t} = r + \frac{r^2}{4t}$$

Obtemos uma equação do segundo grau em r :

$$4r^2 + 16tr - d^2 = 0$$

Encontramos, com isso, as raízes desta equação:

$$\Delta = (16t^2) - 4.4.(d)^2$$

$$\Delta = 256t^2 + 16d^2$$

$$r = \frac{-16t \pm \sqrt{256t^2 + 16d^2}}{2.4}$$

Lembrando que $d = 3,62438$ e $2t = 0,34$ então $t = \frac{0,34}{2} \rightarrow t = 0,17$

$$r = \frac{-16 \cdot 0,17 \pm \sqrt{256 \cdot (0,17)^2 - 16 \cdot (3,62438)^2}}{8}$$

$$r = \frac{-2,72 \pm \sqrt{7,3984 - 210,17808}}{8}$$

$$r = \frac{-2,72 \pm \sqrt{217,57648}}{8}$$

Como $r > 0$, a única solução possível é:

$$r = \frac{-2,72 + \sqrt{217,57648}}{8}$$

$$r = \frac{-2,72 + 14,750473}{8}$$

$$r = \frac{12,030473}{8}$$

$$r = 1,5038091$$

Então: $2r = 3,0076$

2.5 - Problema 05

Problema extraído de um *Sangaku* exposto no santuário de *Ohma Shinmeisha*, na Vila de *Yamada*, prefeitura de *Gumma*, em 1821. Neste problema, temos um losango $ABCD$ de lado a . Sua diagonal $BD = 2t$ é considerada variável. Seja $S(t)$ a área do losango menos a área do quadrado da diagonal BD e lado x . Encontre o valor de x em função de a , quando $S(t)$ for máxima.

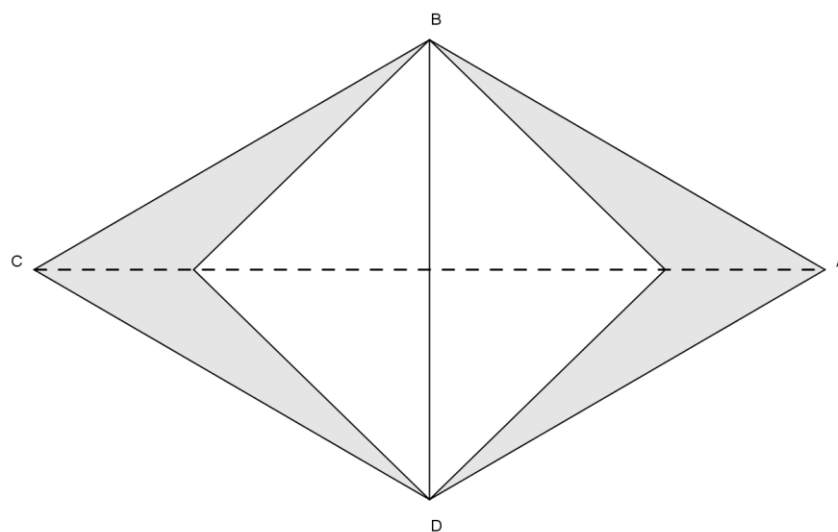


Figura 12- figura conforme descrição do problema 05.

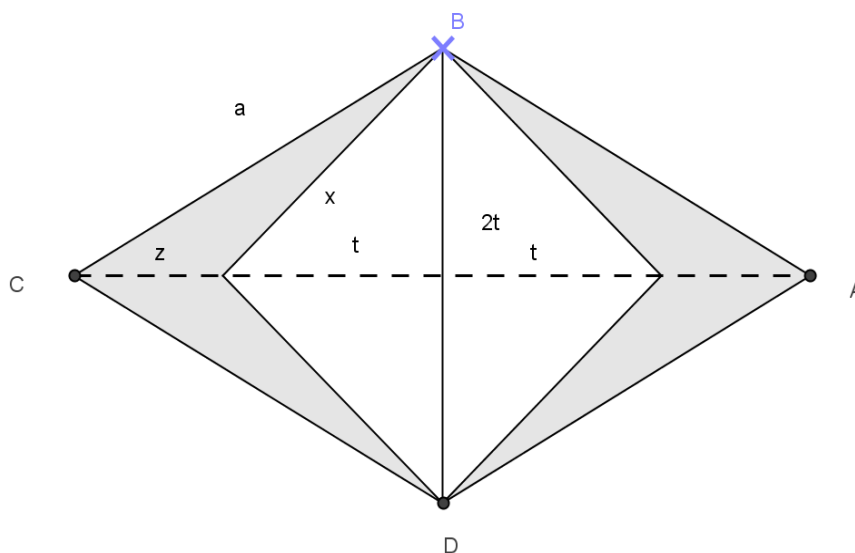


Figura 12.1- Figura do problema 05 em desenvolvimento.

Resolução:

Conforme a figura 10.1, temos:

$$x^2 = t^2 + t^2$$

$$x^2 = 2t^2$$

$$\text{Então: } x = \sqrt{2} t$$

Sabe-se que a área de um losango qualquer é dada por: $A = \frac{Dd}{2}$ e que

$S(t)$ é a área do losango, subtraindo a área do quadrado.

O problema quer saber o valor de x , quando $S(t)$ for máximo.

No triângulo formado pelos segmentos z , a e x (onde t é o valor máximo de x), tem-se:

$$a^2 = t^2 + z^2$$

$$a^2 - t^2 = z^2$$

Isolando “ z ”, temos:

$$z = \sqrt{a^2 - t^2}$$

Assim, a área do losango é:

$$A_l = \frac{\text{Diagonal maior} \cdot \text{diagonal menor}}{2} = \frac{2 \cdot 2t \cdot \sqrt{a^2 - t^2}}{2}$$

$$A_l = 2t\sqrt{a^2 - t^2}$$

E a área do quadrado é: $A_q = x \cdot x$

$$\boxed{x^2 = 2t^2}$$

Tendo os valores das áreas do losango e do quadrado em função de t e substituindo-os na equação: $S(t) = A_l - A_q$

Temos:

$$S(t) = 2t\sqrt{a^2 - t^2} - 2t^2$$

$$S(t) = 2t \cdot (a^2 - t^2)^{-1/2} - 2t^2$$

Derivando:

$$S'(t) = 2t \left[\frac{1}{2} (a^2 - t^2)^{-1/2} \cdot (-2t) \right] + (a^2 - t^2)^{1/2} \cdot 2 - 4t$$

$$S'(t) = 2t \frac{1}{2\sqrt{a^2-t^2}}(-2t) + \frac{2}{\sqrt{a^2-t^2}} - 4t$$

$$S'(t) = -\frac{2t^2}{\sqrt{a^2-t^2}} + 2\sqrt{a^2-t^2} - 4t$$

Dividindo por 2

$$\frac{S'(t)}{2} = \sqrt{a^2-t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{a^2-t^2}} - 2t$$

Igualando a zero, temos:

$$\sqrt{a^2-t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{a^2-t^2}} - 2t = 0$$

Tirando m.m.c : $\sqrt{a^2-t^2}$

$$\frac{(\sqrt{a^2-t^2})(\sqrt{a^2-t^2}) - t^2 - 2t(\sqrt{a^2-t^2})}{(\sqrt{a^2-t^2})} = \frac{0}{\sqrt{a^2-t^2}}$$

Tem-se:

$$a^2 - t^2 - t^2 - 2t\sqrt{a^2-t^2} = 0$$

$$a^2 - 2t^2 - 2t\sqrt{a^2-t^2} = 0$$

$$a^2 - 2t^2 = 2t\sqrt{a^2-t^2}$$

$$\frac{a^2-2t^2}{2t} = \sqrt{a^2-t^2}$$

$$\frac{a^2}{2t} - \frac{2t^2}{2t} = \sqrt{a^2-t^2}$$

Elevando ao quadrado os dois lados:

$$\left(\frac{a^2}{2t} - t\right)^2 = (\sqrt{a^2-t^2})^2$$

$$\frac{a^4}{4t^2} - 2\frac{a^2}{2t}t + t^2 = a^2 - t^2$$

$$\frac{a^4}{4t^2} - a^2 + t^2 = a^2 - t^2$$

$$-2t^2 = \frac{a^4}{4t^2} - 2a^2$$

Tirando o m.m.c: $4t^2$

$$-\frac{8t^4}{4t^2} = \frac{a^4}{4t^2} - \frac{8a^2t^2}{4t^2}$$

Obtém-se:

$$8t^4 - 8a^2t^2 + a^4 = 0$$

Fazendo: $t^2 = g$

Temos a equação: $8g^2 - 8a^2g + a^4 = 0$, o que nos leva a uma equação do 2º grau. Com isso, obtemos as raízes da equação:

$$\Delta = (-8a^2)^2 - 4(8)(a^4)$$

$$\Delta = 64a^2 - 32a^4$$

$$\Delta = 32a^4$$

$$g = \frac{8a^2 \pm \sqrt{32a^4}}{16}$$

$$g = \frac{4a^2 \pm a^2\sqrt{8}}{8}$$

Agora, substituindo $t^2 = g$

$$t^2 = \frac{4a^2 \pm a^2\sqrt{8}}{8}$$

Considerando $t < 0$ a solução possível:

$$t^2 = \frac{4a^2 - a^2\sqrt{8}}{8}$$

Em função de x :

$$x = \sqrt{2} \cdot t \rightarrow t = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

Substituindo, agora, o valor de $t = \frac{x}{\sqrt{2}}$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{a^2(4 - \sqrt{8})}{8}$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{a^2(4 - \sqrt{8})}{8}$$

Dividindo tudo por 2, temos:

$$x^2 = \frac{a^2(4 - \sqrt{8})}{4}$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2(4-\sqrt{8})}{4}}$$

$$x = a \sqrt{\frac{(4-\sqrt{8})}{4}}$$

Então, obtém-se:

$$x = a \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

2.6 - Problema 06

Problema proposto por *Ikeda Sadakazu*, em 1826, e exposto em um santuário em *Azabu*, Tóquio.

O Problema descreve três quadrados de lados a , c e d , que tocam a reta l , e cada um tem um vértice em comum com um quadrado de lado b , como mostrado na figura 13. Pede-se demonstrar que $b = 2d$.

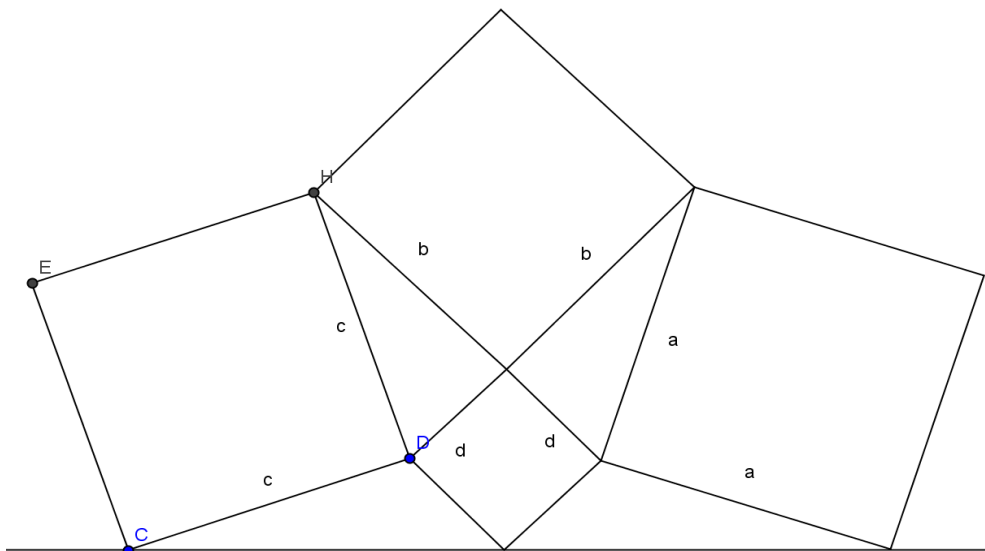


Figura 13- figura conforme descrição do problema 06.

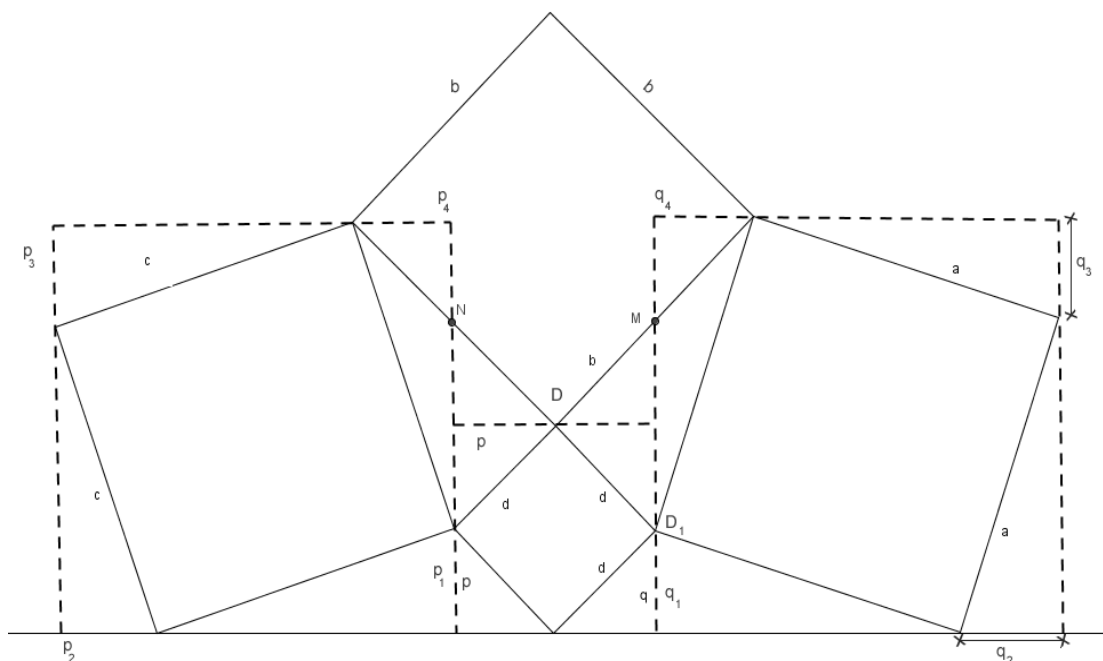


Figura 13.1- figura do problema 06 em desenvolvimento.

Resolução:

Tracejando três quadrados auxiliares, conforme demonstra a figura 13.1, para resolver o problema, pode-se observar que:

$$q = q_1 = q_2 = q_3 = q_4$$

E que:

M é o ponto médio do lado b, logo: $MD = \frac{b}{2}$

Assim, podemos afirmar que:

$$p = p_1 = p_2 = p_3 = p_4$$

E que:

Nb é o ponto médio e $Nb = \frac{b}{2}$

Então podemos afirmar que:

$\triangle MSD \approx \triangle NDT$ (são congruentes), logo $MS = p$ e $NT = q$

Assim, S é o ponto médio de MD_1 , e $MS = SD_1 = p$. Isso significa que os ângulos MDS e DSD_1 são congruentes.

Logo: $b = 2d$

2.7 - Problema 07

Problema de um *Sangaku*, dedicado ao santuário de *Ushikawa*, na prefeitura de *Aichi*, em 1850, atualmente perdido.

Como mostrado na figura 14, os eixos maiores de duas elipses idênticas E_1 e E_2 com centro comum O são perpendiculares. Os vértices A , B e D do quadrado $ABCD$ estão sobre a elipse E_1 , enquanto que o vértice C está no eixo maior de E_1 e na elipse E_2 . No problema, pede-se demonstrar que o lado do quadrado é igual à metade do comprimento do eixo menor.

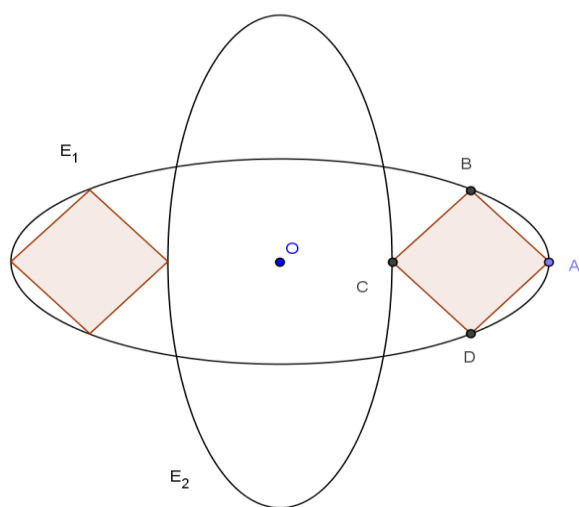


Figura 14- figura conforme descrição do problema 07.

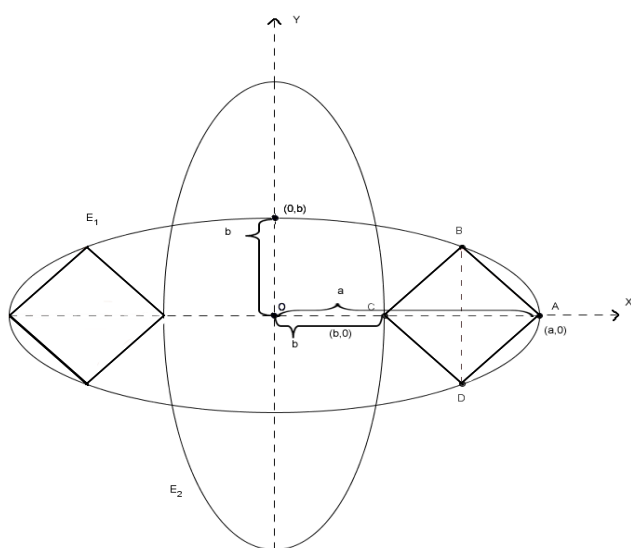


Figura 14.1- figura do problema 07 em desenvolvimento.

Para esta questão, usaremos a Geometria Analítica. Seja que o eixo maior de E_1 é o eixo x e o eixo maior de E_2 é o eixo y .

Se a é o tamanho do semieixo maior de E_1 e b é o tamanho do semieixo menor de E_1 , temos que:

$$E_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{e} \quad E_2: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Afirma-se que A pertence ao eixo x , pois uma vez que C pertence ao eixo x , os pontos B e D podem ser encontrados intersectando E_1 com um círculo de centro em C e raio $|CB|$. Isto mostra que B e D são simétricos em relação ao eixo x . Logo, o ângulo de $\overline{BC}$ com o eixo x é o mesmo de $\overline{CD}$ com o eixo x .

Assim, este ângulo deve ser de 45° , uma vez que $\widehat{BCD}$ é reto. Com isto, é evidente a afirmação feita.

É fácil ver que $C = (b, 0)$ e $A = (a, 0)$

Uma vez que ambos pertencem ao eixo x e às elipses.

Veja que a reta (B, C) tem equação $y = x - b$, pois a inclinação é 1, uma vez que o ângulo que a reta faz com o eixo x é 45° , e esta reta deve conter o ponto $C = (b, 0)$.

De modo análogo, vemos que a reta (A, B) : $y = -x + a$

Como $B \in \text{reta}(A, B) \cap \text{reta}(B, C)$, temos que B é a solução de:

$$\begin{cases} y = x - b \\ y = -x + a \end{cases}$$

$$B = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2} \right)$$

Como $B \in E_1$, devemos ter que:

$$\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4a^2} + \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4b^2} = 1$$

$$4b^2(a^2 + 2ab + b^2) + 4a^2(a^2 - 2ab + b^2) = 16a^2b^2$$

$$a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 + a^4 - 2a^3b + a^2b^2 - 4a^2b^2 = 0$$

$$a^4 - 2a^3b - 2a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 = 0$$

$$(a^2 - b^2).(a^2 - 2ab - b^2) = 0$$

Como $a > b > 0$ temos que:

$$a^2 - b^2 \neq 0 \quad \text{e} \quad a^2 - 2ab - b^2 = 0 \quad \text{condição}$$

$$a = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 + 4b^2}}{2}$$

$$a = \frac{2b \pm 2b\sqrt{2}}{2}$$

Como $a > 0$, temos que $a = b + b\sqrt{2}$

Note que a diagonal do quadrado $ABCD$ mede

$$|AC| = |a - b|$$

$$b + b\sqrt{2} - b$$

$$b\sqrt{2}.$$

Como a diagonal mede $b\sqrt{2}$, temos que o lado do quadrado mede b .

Assim temos:

$$(b\sqrt{2})^2 = x^2 + x^2$$

$$2b^2 = 2x^2$$

$$x = \sqrt{b^2}$$

$$x = b$$

2.8 - Problema 08

Problema proposto por *Kuno Hiromoto*, colocado, em 1844, no santuário de *Atsuta*, por *Takeuchi Shukey*(1815- 1873), atualmente perdida e substituída por uma réplica. Dois planos paralelos, separados por uma distância d , cortam uma esfera de raio r . Calcule a área S da seção da esfera entre os planos em termos de d e r .

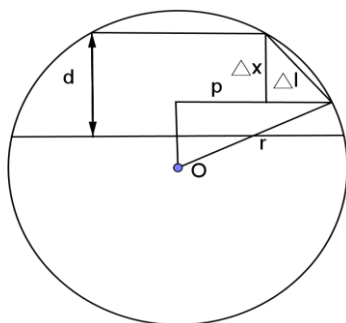


Figura 15- problema 08.

Resolução:

Seja x a variável de integração. Para os pequenos valores de Δx , o arco Δl pode ser considerado uma linha reta.

Então:

$$\frac{\Delta x}{\Delta l} = \frac{p}{r}$$

$$p\Delta l = r\Delta x$$

Considere “ s ” a área da região. Desta forma, a sua variação denotada por Δs é

$$\Delta s = 2\pi \underbrace{p\Delta l}_{r\Delta x}$$

$$\text{Assim: } 2\pi r\Delta x$$

Integrando Δs em função de x , no intervalo de 0 a d , temos:

$$\int_0^d 2\pi r\Delta x$$

$$2\pi r \int_0^d \Delta x$$

$$2\pi r [x]_0^d$$

Resultando em: $2\pi r d$

3 – CONCLUSÕES

Relativamente aos problemas propostos pelo *Sangaku*, há um grande número deles envolvendo circunferências, elipses e triângulos. A elipse é sempre analisada como uma seção plana de um cilindro de revolução, nunca como um lugar geométrico. O grau de dificuldade desses problemas é, em geral, elevado.

Atualmente, constata-se, nos concursos e avaliações matemáticas nacionais dos vários níveis de ensino, a presença de problemas com características no estilo *Sangaku*. Isso prova a importância desse estilo matemático, na atualidade, universalmente.

Analisando o *Sangaku*, sob o ponto de vista matemático e sociocultural, é inegável a sua contribuição para a afirmação cultural japonesa, pois exigiu disciplina e obstinação no desenvolvimento da aplicabilidade dos principais teoremas da época e exigiu também a prática, disseminação e preservação dos valores culturais japoneses, tais como identidade religiosa e identidade política, evitando a cristianização e ocidentalização do País.

Portanto, o *Sangaku*- a *Matemática dos Deuses* - tornou-se, destacadamente, para a cultura japonesa, o elemento identificável de soberania, que possibilitou aos japoneses se superarem, diante de ameaças estrangeiras, isolando-se, aparentemente, e, concomitantemente, tirando proveito do que de melhor a ciência Matemática ocidental – europeia - lhes oferecia. Desta forma, simbolizando a conjunção entre a fé (Religião), a objetividade e ação (Ciência) e a sabedoria (Filosofia), que integram, até hoje, o espírito, a natureza, a inteligência, enfim, o estilo de vida japonês.

4 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Fukagawa Hidetoshi, Tony Rothman. "Japanese Temple Geometry"- 1998.
- Wikipédia-Xogunato-Tokugawa(2014).
- PENNICK "Geometria Sagrada" -1980, p7 e 9.
- FUSER, Igor - **História Viva:** Japão: 500 anos de história, 100 anos de imigração. - São Paulo: Duetto Editorial, 2008.
- REHMEYER, Julie Geometria Sagrada. **Science News**, v. 1, n.1-março, 2008.
- ARCONCHER, Cláudio Sangaku a Geometria Sagrada - (2010)