

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

VINÍCIUS LAUAR
ORIENTADOR:
REMY DE PAIVA SANCHIS

**CADEIAS DE MARKOV E MARTINGAIS: UMA APLICAÇÃO NA
URNA DE PÓLYA**

BELO HORIZONTE - MG
NOVEMBRO - 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

VINÍCIUS LAUAR

CADEIAS DE MARKOV E MARTINGAIS: UMA APLICAÇÃO NA
URNA DE PÓLYA

Monografia de especialização apresentada
como parte dos requisitos para obtenção do
título de Especialista pelo Departamento de
Matemática do Instituto de Ciências Exatas
da Universidade Federal de Minas Gerais.

Orientador: Remy de Paiva Sanchis.

BELO HORIZONTE - MG
NOVEMBRO - 2014

Agradecimentos

- Agradeço ao meu orientador e amigo Remy,
- àquela que sempre me apoiou ao longo dos anos, minha esposa Nalu, a quem também dedico mais este trabalho,
- aos colegas nas disciplinas com quem partilhei momentos de aprendizado, tensão e boas gargalhadas, Luis Felipe Amaral, Sávio Ribas, Fernando Paim, Henrique Alves, Cláudia Pires, Douglas Danton, Vinícius Lara, Fernanda Roing, Henrique Cunha, Dafne Bessades, Maria Edwirges, Natália Maciel, Helem, Débora Paixão, Moacir Santos, Tulio Vales e Luana Amaral.
- às tão prestativas e gentis secretárias da pós Eliana Andrea e Eliana Kelly,
- à minha mãe pelas orações e meus pequenos Be e Ceci, pela inspiração,
- à Deus e
- quem não poderia ficar para trás, minha amada sogra, Dona Ruth!

Resumo

Este trabalho introduz dois temas de grande importância na teoria de probabilidade, a saber: i) cadeias de Markov e ii) Martingais e no fim, utiliza como exemplo ilustrativo o modelo da urna de Pólya como ilustração desses temas.

Mostramos o Teorema da existência e unicidade de distribuições estacionárias, o Teorema de convergência de martingais e alguns resultados para o modelo da urna de Pólya com configuração inicial $W_0 \geq 1$ bolas brancas e $B_0 \geq 1$ bolas pretas, e retorna-se $a \geq 1$ bolas adicionais da mesma cor da bola sorteada. Verificamos que i) a quantidade de bolas pretas no k -ésimo sorteio segue uma distribuição Beta (ou Uniforme) e, ii) a probabilidade de sortearmos uma bola preta em um instante k qualquer segue uma distribuição Bernoulli.

Abstract

In this work we introduce two subjects of great importance the Probability theory: i) Markov Chains and ii) Martingales and in the end, we illustrate both subjects with the Pólya urn model.

We've shown the Theorem of existence and uniqueness of stationary distribution, the Martingale convergency theorem and some results of the Pólya urn model with the inicial configuration of $W_0 \geq 1$ white balls and $B_0 \geq 1$ black balls, and returns of $a \geq 1$ additional balls of the same color of that one drawn. We've seen that i) the amount of black balls in the k -th draw follows a Beta (or Uniform) distribution and, ii) the probability of drawing a black ball in at any instant k follows a Bernoulli distribution.

Sumário

Introdução	ix
1 Introdução às Cadeias de Markov Finitas	1
1.1 Cadeias de Markov Finitas	1
1.2 Classificação dos estados de uma cadeia de Markov	5
1.3 Passeios aleatórios em grafos	8
1.4 Distribuições estacionárias	9
1.5 Reversibilidade e Inversão de tempo	15
2 Esperança Condicional e Martingais	17
2.1 Lei fraca dos grandes números, Lema de Fatou e Teoremas: da convergência dominada e da continuidade de Paul Lévy	17
2.2 Probabilidade Condicional	18
2.3 Esperança condicional relativa a uma partição	19
2.4 Esperança condicional relativa a uma σ -álgebra	20
2.5 Propriedades da esperança condicional	23
2.6 Martingais	24
3 Urna de Pólya	31
3.1 Distribuição Beta	31
3.2 Urna de Pólya: caso mais simples	32
3.3 Urna de Pólya caso geral	33
Referências Bibliográficas	37

Introdução

Este trabalho introduz dois temas de grande importância na teoria de probabilidade, a saber: i) cadeias de Markov e ii) Martingais e no fim, utiliza como exemplo ilustrativo o modelo da urna de Pólya como ilustração desses temas. Passemos agora à contextualização deste trabalho por meio da apresentação de três conceitos: i) processo estocástico, ii) cadeia de Markov e iii) martingal.

i) **Processos estocásticos** são modelos de probabilidade para processos que evoluem no tempo de maneira probabilística. Um Processo Estocástico é definido como uma coleção de variáveis aleatórias (X_t) indexadas por um parâmetro t pertencente a um conjunto T . Frequentemente T é tomado para ser o conjunto dos inteiros não-negativos (porém, outros conjuntos são perfeitamente possíveis) e (X_t) representa uma característica mensurável de interesse no tempo t . Por exemplo, X_t pode representar o nível de estoque de um produto no fim da semana t . O conjunto de valores que a variável X pode assumir é conhecido como espaço de estados.

ii) Uma **cadeia de Markov** é um caso particular de processo estocástico com estados discretos, embora o parâmetro t possa assumir valores em conjuntos discretos ou contínuos. Esse tipo de cadeia é de interesse especial pelo fato de gozar a propriedade Markoviana, chamada assim em homenagem ao matemático Andrei Andreyevich Markov. Essa propriedade afirma que os estados anteriores são irrelevantes para a predição dos estados seguintes, desde que o estado atual seja conhecido. Deste modo,

$$P(X_{t+1}|X_0, X_1, \dots, X_n) = P(X_{t+1}|X_n).$$

Como exemplo de cadeias de Markov, podemos pensar em jogos de tabuleiro os quais a posição do jogador depende apenas do sorteio de um dado. Neste caso, a posição resultante do jogador na jogada seguinte, dependerá apenas de sua posição atual e do número sorteado no dado, e não dependerá de como o jogo correu até a presente posição do jogador. Em contraste, jogos de baralho em que é possível saber quais cartas já foram sorteadas não são exemplos de cadeias de Markov, uma vez que a memória das cartas já retiradas influencia nas possíveis cartas a serem sorteadas.

iii) Na teoria da probabilidade, um **martingal** pode ser considerado como um modelo de jogo "honesto", no sentido de que o conhecimento dos eventos passados não influencia o valor esperado dos eventos futuros. Assim, um martingal é um processo estocástico para o qual, em certo instante de tempo t , o valor esperado do sorteio no próximo instante de

tempo, $t + 1$, é o mesmo observado no instante atual t , ainda que se tenha o conhecimento de todos os resultados anteriores do sorteio. Assim, pode-se dizer que martingais excluem a possibilidade de estratégias de jogo baseadas no histórico do jogo em questão. Como exemplo de martingal, podemos citar um jogo de cara ou coroa com uma moeda simétrica. Estamos interessados na quantia acumulada por uma pessoa que aposta a quantia de R\$1,00 a cada rodada. Se o resultado for cara, essa pessoa recebe e se for coroa, ela paga R\$1,00. Assim, o capital acumulado por essa pessoa no instante $t + 1$ depende apenas do capital acumulado até o instante imediatamente anterior, ou seja, t .

Conforme já foi dito, utilizamos o modelo da urna de Pólya para ilustrar tanto uma cadeia de Markov quanto um martingal. Este modelo será apresentado em duas versões, a primeira mais simples e a segunda uma generalização da primeira e a aplicação de martingal será utilizada para obtermos os resultados da segunda versão da urna de Pólya.

No primeiro caso, considere uma urna contendo uma bola branca e uma bola preta. Sorteia-se aleatoriamente uma bola da urna. Esta bola é retornada à urna juntamente com outra bola adicional da mesma cor da bola sorteada. Se existem j bolas pretas na urna após k bolas terem sido adicionadas, ou seja, após k sorteios, teremos $k + 2$ bolas dentro da urna e a probabilidade de se sortear outra bola preta será de $\frac{j}{k+2}$. A sequência de pares ordenados que representa o número de bolas pretas e brancas é uma cadeia de Markov com espaço de estados $\{1, 2, \dots\}^2$.

No segundo caso da urna de Pólya, a configuração inicial da urna pode conter mais de uma bola de cada cor e são colocadas na urna uma quantidade $a \geq 1$ de bolas após o sorteio, ao invés de apenas uma. Assim, considere uma urna contendo certa quantidade inicial fixa de bolas brancas, $(W_0) \geq 1$, e de bolas pretas, $(B_0) \geq 1$. Sorteia-se uma bola aleatoriamente e, posteriormente, retorna-se a bola sorteada juntamente com $a \in \mathbb{N}$ bolas adicionais da mesma cor da bola sorteada. Repita o experimento n vezes e denote por B_n o número de bolas pretas na urna após o n -ésimo sorteio e reposição na urna.

Para o problema da urna de Pólya estamos interessados em descobrir i) a distribuição de bolas pretas (ou brancas) no k -ésimo sorteio e, ii) a probabilidade de sortearmos uma bola preta (ou branca) em um instante k qualquer.

A urna de Pólya pode ser considerada um modelo "contrário" aos sorteios sem reposição, no sentido de que na urna de Pólya a probabilidade de se sortear bolas pretas (ou brancas) aumenta a cada vez que o resultado do experimento apresenta uma bola dessa cor, enquanto no sorteio sem reposição, cada vez que uma bola é sorteada, a probabilidade de uma bola da mesma cor aparecer no futuro torna-se menor. Outro resultado interessante da urna de Pólya é que os resultados do processo estocástico $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ da urna são permutáveis, mas não independentes. Ou seja, a sequência de variáveis aleatórias (X_n) não possui independência entre seus termos, entretanto a probabilidade de se retirar k bolas pretas nos n primeiros sorteios não depende da sequência de cores sorteadas, mas apenas do número acumulado de cada cor.

Após esta breve introdução sobre os assuntos desenvolvidos, o restante desta monogra-

fia segue organizado da seguinte forma: o primeiro capítulo trata das cadeias de Markov, alguns exemplos e apresenta o Teorema de existência e unicidade de uma distribuição limite de uma cadeia; o segundo capítulo apresenta alguns teoremas básicos de medida para apresentar a definição de martingal e apresentar o Teorema da convergência de martingal, sendo este último o principal objetivo do capítulo. No terceiro capítulo, apresentamos o modelo da urna de Pólya em sua versão mais simples e uma pequena generalização, como um exemplo dos assuntos tratados nos dois primeiros capítulos.

Capítulo 1

Introdução às Cadeias de Markov Finitas

Neste capítulo, apresentamos algumas definições básicas sobre processos Markovianos. A atenção é concentrada nos processos Markovianos com parametro de tempo discreto e espaço de estados finito, que chamaremos de cadeia de Markov. Nossas referências básicas são: [6] e [7].

1.1 Cadeias de Markov Finitas

A teoria de processos estocásticos preocupa-se com a investigação de estruturas de famílias de variáveis aleatórias X_t , onde t é um parâmetro relacionado a um conjunto de índices T . A realização de um processo estocástico $\{X_t, t \in T\}$ refere-se à atribuição de um valor possível de X_t para cada $t \in T$. O conjunto de índices t representa unidades discretas de tempo $T = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ e $\{X_t\}$ representa os resultados dos sucessivos experimentos. Como exemplo de processo estocástico podemos citar o nível de estoque de peças em uma loja ao fim da semana. Neste caso X_t refere-se ao número de peças no estoque e o parametro t refere-se à cada semana percorrida. Outro exemplo seria o número de chamadas por hora recebida em uma central telefônica.

Um processo de Markov é um processo que goza a propriedade de que, dado o valor de X_t , os valores para $X_s, s > t$, não dependem dos valores de $X_u, u < t$. Isso quer dizer que, a probabilidade de qualquer comportamento futuro do processo não depende do conhecimento sobre seu comportamento passado quando seu estado atual é conhecido. Como exemplo, tomemos o capital acumulado por uma pessoa que aposta em um jogo de cara ou coroa a quantia de R\$1,00 a cada rodada. Se o resultado for cara, essa pessoa recebe e se for coroa, ela paga R\$1,00. Assim, o capital acumulado por essa pessoa no instante t depende apenas do capital acumulado até o instante imediatamente anterior, ou seja, $t - 1$. Como nossa atenção está centrada na probabilidade do experimento mudar de um estado x para um outro estado qualquer, é comum organizar essas probabilidades de transição em uma matriz P , chamada de matriz de transição do processo. Nessa matriz, cada elemento a_{ij} , refere-se à probabilidade de passarmos do estado i para o estado j . Um processo de Markov com espaço de estados enumerável é chamado de cadeia de Markov. Uma cadeia de Mar-

kov finita é uma cadeia com espaço de estados finito. Em cadeias finitas, podemos definir a probabilidade de transição de um estado x para um estado y , $P(x, y)$. Formalmente:

Definição 1.1.1. *Uma sequência de variáveis aleatórias (X_0, X_1, \dots) é uma **cadeia de Markov** com espaços de estados finitos Ω e matriz de transição P se $\forall x, y \in \Omega$ e $t \geq 1$ e todos eventos $H_{t-1} = \cap_{s=0}^{t-1} \{X_s = x_s\}$ satisfazendo $P(X_{t-1} \cap \{X_t = x\}) > 0$, temos*

$$P\{X_{t+1} = y | H_{t-1} \cap \{X_t = x\}\} = P\{X_{t+1} = y | X_t = x\} = P(x, y). \quad (1.1)$$

A Equação (1.1), conhecida como **Propriedade de Markov**, afirma que a probabilidade condicional do experimento sair do estado x e chegar no estado y é a mesma, independentemente da sequência x_0, x_1, \dots, x_{t-1} de estados precedentes ao estado atual x . Desta forma, a matriz $P_{|\Omega| \times |\Omega|}$ é suficiente para descrever as probabilidades de transição entre os estados.

Ao considerar cadeias de Markov finitas, o espaço de estados Ω é composto por, digamos, $n \in \mathbb{N}$ elementos. Assim, cada linha i da matriz de transição P representa a distribuição de i , $P(i, \cdot)$, onde $i \in \Omega$. Como cada linha refere-se à distribuição de probabilidade de um estado da cadeia, dizemos que a matriz P é **estocástica**, ou seja, suas entradas são não negativas e $\sum_{y \in \Omega} P(x, y) = 1, \forall x \in \Omega$.

Exemplo 1.1.1. *Uma pessoa supersticiosa possui duas moedas A e B que são utilizadas para decidir qual pé do sapato deve calçar primeiro ao levantar de manhã. Assim, se no dia anterior a pessoa calçou primeiro o pé direito, ela joga a moeda A , caso contrário, ela joga a moeda B . Se o resultado do sorteio for cara, ela calça o mesmo pé do dia anterior, se não, ela muda o primeiro pé a ser calçado.*

Seja $\Omega = \{e, d\}$, e seja (X_0, X_1, \dots) a sequência do primeiro pé a ser calçado a cada manhã. A moeda não precisa, necessariamente, ser simétrica, assim, o indivíduo tendo calçado anteriormente o pé direito, troca o pé a ser calçado com probabilidade p e, vindo anteriormente do pé esquerdo, troca o pé a ser calçado com probabilidade q .

Apresentamos então a matriz de probabilidades dessa pessoa calçar primeiro o pé direito ou esquerdo nesta manhã, em relação ao pé que ela calçou primeiro na manhã anterior.

$$P = \begin{pmatrix} P(d, d) & P(d, e) \\ P(e, d) & P(e, e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Conclui-se assim que (X_0, X_1, \dots) é uma cadeia de Markov com matriz de transição P . Note que a primeira linha de P é a distribuição condicional de X_{t+1} dado que $X_t = d$, ao passo que a segunda linha é a distribuição condicional de X_{t+1} dado que $X_t = e$.

Assumindo que num domingo, nosso indivíduo calçou primeiro o pé direito. Estamos interessados em descobrir o que ocorre na segunda feira. Assim, ele tem probabilidade p de calçar o pé esquerdo e probabilidade $1 - p$ de manter o pé direito como o primeiro a ser calçado. Ou seja,

$$P\{X_1 = d | X_0 = d\} = 1 - p, \quad P\{X_1 = d | X_0 = e\} = p \quad (1.3)$$

Para terça feira, temos que considerar duas possibilidades para X_1

$$P\{X_2 = d|X_0 = d\} = (1 - p)(1 - p) + pq \quad (1.4)$$

ou então

$$P\{X_2 = e|X_0 = d\} = (1 - p)p + p(1 - p) \quad (1.5)$$

Desenvolvemos agora uma abordagem mais sistemática para encontrar as probabilidades de se calçar primeiro o pé direito ou esquerdo ao longo dos dias dado que o indivíduo começou este processo no instante de tempo inicial com o pé direito. Assim,

$$\mu_t = (P\{X_t = d|X_0 = d\}, P\{X_t = e|X_0 = d\}) \quad (1.6)$$

é o vetor linha que armazena a informação da distribuição.

Como partimos do pressuposto que a pessoa calça no instante inicial o sapato direito, dizemos que $\mu_0 = (1, 0)$, e a Equação (1.3) pode ser escrita como $\mu_1 = \mu_0 P$. Isso quer dizer que a atualização da distribuição se dá pela multiplicação do vetor no instante anterior pela matriz P à direita, ou seja,

$$\mu_t = \mu_{t-1} P \quad \forall t \geq 1. \quad (1.7)$$

Assim, pode-se afirmar que

$$\mu_t = \mu_0 P^t \quad \forall t \geq 0. \quad (1.8)$$

A partir desta forma de atualização da distribuição, é natural perguntarmos como a cadeia se comporta no longo prazo, ou seja, existe um limite para μ_t ? Se o limite da distribuição existir, ele deve satisfazer

$$\pi = \pi P.$$

O que implica que

$$\pi(d) = \frac{q}{p+q}, \quad \pi(e) = \frac{p}{p+q}$$

Defina

$$\Delta_t = \mu_t(d) - \frac{q}{p+q}, \quad \forall t \geq 0.$$

Então, pela definição de μ_{t+1} , temos que

$$\begin{aligned}
\Delta_{t+1} &= [\mu_t(d)(1-p) + (1-\mu_t(d))q] - \frac{q}{p+q} \\
&= \left[\mu_t(d)(1-p) + \left(\overbrace{\frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q}}^1 - \mu_t(d) \right) q \right] - \frac{q}{p+q} \\
&= \mu_t(d) - \frac{q}{p+q} - p\mu_t(d) + \frac{pq}{p+q} - q\mu_t(d) + \frac{q^2}{p+q} \\
&= \left(\mu_t(d) - \frac{q}{p+q} \right) (1-p-q) \\
&= \Delta_t(1-p-q)
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Como $\Delta_{t+1} = \left(\mu_t(d) - \frac{q}{p+q} \right) (1-p-q)$, podemos concluir que, para todo $p \in (0, 1)$ e $q \in (0, 1)$, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta_{t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\mu_t(d) - \frac{q}{p+q} \right) (1-p-q) = 0$$

logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(d) = \frac{q}{p+q} \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(e) = \frac{p}{p+q} \tag{1.10}$$

para qualquer distribuição inicial μ_0 . Isso implica que μ_t se aproxima de π quando $t \rightarrow \infty$.

É importante salientar que a distribuição no instante t pode ser obtida por meio de multiplicação matricial. Sejam (X_0, X_1, \dots) uma cadeia de Markov finita com espaço de estados Ω e matriz de transição P e o vetor linha μ_t a distribuição de X_t :

$$\mu_t(x) = P\{X_t = x\} \quad \forall x \in \Omega.$$

Condicionando nos estados anteriores a $(t+1)$, temos

$$\mu_{t+1}(y) = \sum_{x \in \Omega} P\{X_t = x\}P(x, y) = \sum_{x \in \Omega} \mu_t(x)P(x, y) \quad \forall y \in \Omega.$$

Na forma vetorial obtemos:

$$\mu_{t+1} = \mu_t P \quad t \geq 0$$

assim,

$$\mu_t = \mu_0 P^t \quad t \geq 0. \tag{1.11}$$

Neste trabalho, consideraremos cadeias de Markov com a mesma matriz de transição, porém com distribuições iniciais distintas. Assim, introduzimos a notação P_μ e E_μ para probabilidade e esperança, respectivamente, quando $\mu_0 = \mu$.

Deste modo, $P_x\{X_t = y\} = P^t(x, y)$, ou seja, a probabilidade de mover-se em t passos do

estado x para o y é dada pela (x, y) -ésima entrada de P^t . Essas entradas são chamadas de **probabilidades de transição em t passos**.

Notação: Para $x \in \Omega$, a linha da matriz P indexada por x será denotada por $P(x, \cdot)$.

A forma como a matriz P foi construída, resultou na representação das distribuições de cada estado como um vetor linha. Se a cadeia tem distribuição μ no instante t , então a distribuição no instante $(t + 1)$ é dada por μP . A multiplicação de um vetor linha por P à direita atualiza a distribuição em um instante de tempo. Surge então a seguinte questão: O que ocorre se multiplicarmos um vetor coluna f pela matriz P à esquerda? Onde f pode ser interpretado como uma função do espaço de estados Ω . Considere a x -ésima entrada do vetor resultante:

$$Pf(x) = \sum_y P(x, y)f(y) = \sum_y f(y)P_x\{X_1 = y\} = E_x(f(X_1)).$$

Assim, a x -ésima entrada de Pf mostra o valor da função f no estado do instante seguinte, dado que estamos no estado x no presente instante. Multiplicar um vetor coluna por P à esquerda partimos de uma função no espaço de estado atual para o valor esperado daquela função no instante seguinte.

1.2 Classificação dos estados de uma cadeia de Markov

Apresenta-se nesta seção os conceitos de **irredutibilidade** e **aperiodicidade**. Trata-se de duas propriedades importantes, presentes em um número significativo de cadeias de Markov, e necessárias para a demonstração do Teorema da existência de distribuições estacionárias.

Definição 1.2.1. Dados dois estados $x, y \in \Omega$, dizemos que o estado y é acessível desde o estado x , denota-se $x \rightarrow y$, se existe uma trajetória que parte do estado x em direção ao estado y , ou seja, se existe um inteiro não negativo (possivelmente dependente de x e y) n_{xy} tal que $P^{n_{xy}}(x, y) > 0$.

Note que vale a transitividade para a definição acima, ou seja, se $x \rightarrow y$ e $y \rightarrow z$, então $x \rightarrow z$.

Definição 1.2.2. Diremos que dois estados, x e y se comunicam, denota-se $x \leftrightarrow y$, se x é acessível desde y e se y é acessível desde x , ou seja, existem dois inteiros n_{xy} e n_{yx} tais que $P^{n_{xy}}(x, y) > 0$ e $P^{n_{yx}}(y, x) > 0$.

Definição 1.2.3. Um estado $x \in \Omega$ é chamado **essencial** se, para todo y tal que $x \rightarrow y$ ocorre que $x \rightarrow y$.

Lema 1.2.1. Se x é um estado essencial e $x \rightarrow y$, então y é essencial.

Demonstração. Se $y \rightarrow x$, então $x \rightarrow z$. Então, como x é essencial, $z \rightarrow x$, logo $z \rightarrow x$. \square

Pelo lema acima, estados em uma única classe de comunicação são todos essenciais ou todos não essenciais. As classes de comunicação podem ser classificadas como essenciais ou não essenciais. Se $[x] = \{x\}$ e x não é essencial, então quando a cadeia deixar o estado x , ela não retorna mais. Se $[x] = \{x\}$ e x é essencial, então a cadeia nunca deixa o estado x a partir de sua primeira visita a ele. Estados como esse são chamados de **absorventes**.

Lema 1.2.2. *Toda cadeia finita possui pelo menos uma classe essencial.*

Demonstração. Construiremos intuitivamente a sequência (y_0, y_1, \dots) . Fixemos um estado inicial y_0 . Para $k \geq 1$, dado (y_0, \dots, y_{k-1}) o processo termina se y_{k-1} for essencial. Caso contrário, encontre y_k tal que $y_{k-1} \rightarrow y_k$, mas que $y_k \not\rightarrow y_{k-1}$.

Esta sequência não admite estados repetidos, pois se $j < k$ e $y_k \rightarrow y_j$, então teríamos $y_k \rightarrow y_j \rightarrow y_{k-1}$, uma contradição com o fato de $y_k \not\rightarrow y_{k-1}$. Como o espaço de estados é finito e a sequência não admite repetição de elementos, ela deve terminar em algum estado essencial. \square

Definição 1.2.4. *Uma cadeia P é chamada **irredutível** se todos os estados comunicam entre si.*

Definição 1.2.5. *Seja $\mathcal{T}(x) = \{t \geq 1 : P^t(x, x) > 0\}$ o conjunto de tempos nos quais é possível para a cadeia retornar à sua posição inicial x . O **período** do estado x é definido como o máximo divisor comum (mdc) de $\mathcal{T}(x)$.*

Lema 1.2.3. *Se P é irredutível, então $\text{mdc}[\mathcal{T}(x)] = \text{mdc}[\mathcal{T}(y)]$, $\forall x, y \in \Omega$.*

Demonstração. Sejam dois estados x e y . Como P é irredutível, existem inteiros r e l tais que $P^r(x, y) > 0$ e $P^l(y, x) > 0$. Seja $m = r + l$. Então podemos afirmar que $m \in \mathcal{T}(x) \cap \mathcal{T}(y)$ e $\mathcal{T}(x) \subset \mathcal{T}(y) - m$, deste modo, $\text{mdc}[\mathcal{T}(y)]$ divide todos os elementos de $\mathcal{T}(x)$. Conclui-se que $\text{mdc}[\mathcal{T}(y)] \leq \text{mdc}[\mathcal{T}(x)]$. Analogamente, $\text{mdc}[\mathcal{T}(x)] \leq \text{mdc}[\mathcal{T}(y)]$, o que implica a igualdade desejada. \square

Definição 1.2.6. *Para uma cadeia irredutível, o período da cadeia é definido como o período comum a todos os estados. A cadeia é chamada de **aperiódica** se todos os estados possuem período 1. Uma cadeia que não é aperiódica é chamada de **periódica**.*

Proposição 1.2.1. *Se P é aperiódica e irredutível, então existe um inteiro r tal que $P^r(x, y) > 0$ $\forall x, y \in \Omega$.*

Demonstração. Utiliza-se o seguinte resultado: todo subconjunto dos números naturais que é fechado para soma e contém $\text{mdc} = 1$ deve conter todos, exceto uma quantidade finita de números inteiros.

Para $x \in \Omega$, lembre-se que $\mathcal{T}(x) = \{t \geq 1 : P^t(x, x) > 0\}$. Como a cadeia é aperiódica, o $\text{mdc}[\mathcal{T}(x)] = 1$. O conjunto $\mathcal{T}(x)$ é fechado para soma, ou seja, se $s, t \in \mathcal{T}(x)$, então $P^{s+t}(x, x) \geq P^s(x, x)P^t(x, x) > 0$, assim, $s + t \in \mathcal{T}(x)$. Então, existe um $t(x)$ tal que $t \geq t(x)$

que implica que $t \in \mathcal{T}(x)$. Por irredutibilidade, sabe-se que para qualquer $y \in \Omega$, existe um $r = r(x, y)$ tal que $P^r(x, y) > 0$. Então, para $t \geq t(x) + r$,

$$P^t(x, y) \geq P^{t-r}(x, x)P^r(x, y) > 0.$$

Se $t \geq t'(x) = t(x) + \max_{y \in \Omega} r(x, y)$, temos $P^t(x, y) > 0 \forall y \in \Omega$. Se $t \geq \max_{x \in \Omega} t'(x)$, então $P^t(x, y) > 0 \forall x, y \in \Omega$. \square

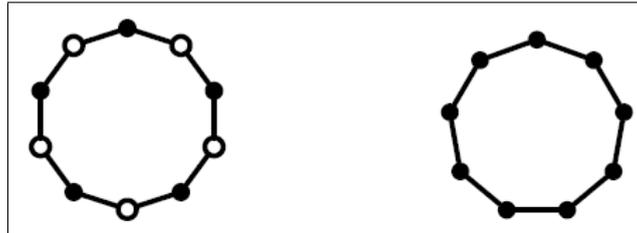


Figura 1.1: O passeio aleatório em \mathbb{Z}_{10} é periódico e passeio aleatório em \mathbb{Z}_9 é aperiódico.

Exemplo 1.2.1. (*Passeio aleatório no n -ciclo*) Seja $\Omega = \mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, o conjunto de restos módulo n . Considere a seguinte matriz de transição:

$$P(j, k) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } k \equiv j + 1 \pmod{n}, \\ 1/2 & \text{se } k \equiv j - 1 \pmod{n}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1.12)$$

A cadeia de Markov (X_t) associada à matriz P é denominada **passeio aleatório simétrico no n -ciclo**. Os estados desta cadeia podem ser pensados como pontos igualmente espaçados em um círculo, como na Figura (1.1).

A cadeia descrita por (1.12) pode ser interpretada da seguinte maneira: a cada passo, uma moeda é lançada. Se o resultado for cara, move-se um passo no sentido horário. Se o resultado for coroa, move-se um passo no sentido anti-horário.

Mais especificamente, suponha que Z é uma variável aleatória que assume com a mesma probabilidade os valores -1 e 1 . Caso o estado atual da cadeia seja $j \in \mathbb{Z}_n$, então o próximo estado será $j + Z \pmod{n}$. Assim, para todo $k \in \mathbb{Z}_n$,

$$P\{(j + Z) \pmod{n} = k\} = P(j, k).$$

Em outras palavras, a distribuição de $(j + Z) \pmod{n} = P(j, k)$.

Exemplo 1.2.2. Seja um passeio aleatório simples em um ciclo de comprimento ímpar (veja Figura (1.1)). A cadeia é irredutível com período 2. O conjunto de espaço de estados Ω pode ser particionado em duas classes, **ímpar** e **par**, de modo que a cadeia só realiza transições entre estados de classes complementares.

Supondo x_0 um estado par, a distribuição de probabilidade da cadeia depois de $2t$ passos é dada por $P^{2t}(x_0, \cdot)$ e possui suporte nos estados pares, enquanto a distribuição da cadeia depois de $2t + 1$

passos possui suporte nos estados ímpares. Assim, não se pode esperar que a distribuição de $P^t(x_0, \cdot)$ convirja à medida que $t \rightarrow \infty$.

Problemas de periodicidade podem ser solucionados por meio de uma modificação na matriz de transição.

Definição 1.2.7. Dada uma matriz de transição arbitrária P , seja $Q = \frac{I+P}{2}$, onde I é a matriz identidade de mesma dimensão que a matriz P . A matriz Q é denominada **versão preguiçosa de P** .

A matriz Q pode ser interpretada da seguinte maneira: a cada passo, joga-se uma moeda simétrica. Se o resultado for cara, dá-se um passo na matriz P , se o resultado for coroa, não se altera o presente estado. Como $Q(x, x) > 0$, para todo $x, y \in \Omega$, a matriz de transição Q é aperiódica.

Exemplo 1.2.3. (O n -ciclo revisitado) Tome o passeio aleatório no n -ciclo definido no Exemplo (1.2.1). Qualquer passeio aleatório no n -ciclo, onde $n \geq 1$ é irredutível. Além disso, todo passeio aleatório em qualquer ciclo de comprimento par é periódico, uma vez que $\text{mdc}\{t : P^t(x, x) > 0\} = 2$ (veja Figura (1.1)), enquanto todo passeio aleatório em um ciclo de comprimento ímpar é aperiódico.

A matriz de transição Q para o passeio aleatório preguiçoso no n -ciclo é

$$Q(j, k) = \begin{cases} 1/4 & \text{se } k \equiv j + 1 \pmod{n}, \\ 1/2 & \text{se } k \equiv j \pmod{n}, \\ 1/4 & \text{se } k \equiv j - 1 \pmod{n}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1.13)$$

O passeio aleatório preguiçoso no n -ciclo é irredutível e aperiódico para todo n .

1.3 Passeios aleatórios em grafos

Definição 1.3.1. Um **grafo** $G = (V, E)$ consiste em um conjunto de vértices V , e um conjunto de elos E , onde os elementos de E são pares não ordenados de vértices: $E \subset \{\{x, y\} : x, y \in V, x \neq y\}$.

Pode-se pensar nos elementos de E como um conjunto de pontos, onde dois pontos x e y são unidos por um linha se e somente se $\{x, y\}$ é um elemento do conjunto de elos. Quando $\{x, y\} \in E$, diz-se que y é um **vizinho** de x , denota-se $y \sim x$ (e também que x é vizinho de y). O **grau** $\text{deg}(x)$ de um vértice x é definido como o número de vizinhos de x .

Dado um grafo $G = (V, E)$, pode-se definir o passeio aleatório simples em G como a cadeia de Markov com espaço de estados V e matriz de transição

$$P(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\text{deg}(x)} & \text{se } x \sim y \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1.14)$$

Deste modo, se a cadeia encontra-se no vértice x , examina-se então todos os vizinhos de x , escolhe-se um aleatoriamente com probabilidade uniforme e a cadeia move-se para o vértice escolhido.

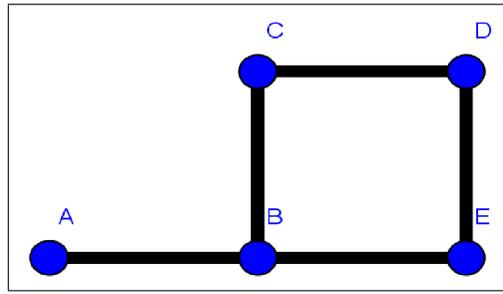


Figura 1.2: Um exemplo de grafo com conjunto de vértices $\{A,B,C,D,E\}$ e com 5 elos.

Exemplo 1.3.1. Considere o grafo G da Figura (1.2). A matriz de transição do passeio aleatório simples é dada por

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Observação: algumas vezes é conveniente permitir que uma extremidade possua um vértice que a conecta com ela mesma, ou seja, um **loop**. Também pode ser interessante permitir múltiplas extremidades conectando um único par de vértices. Loops e extremidades múltiplas afetam o grau de um vértice e são considerados como opções quando um passeio aleatório simples escolhe uma direção.

1.4 Distribuições estacionárias

Nesta seção estamos interessados em estudar o comportamento de longo prazo das probabilidades de transição. Assim, o objetivo desta seção é provar que, sob certas restrições, cadeias de Markov finitas convergem para uma distribuição de equilíbrio, chamada distribuição estacionária. Como vimos no Exemplo (1.1.1), a distribuição π em Ω satisfaz

$$\pi = \pi P. \quad (1.15)$$

Definição 1.4.1. Uma distribuição que satisfaça (1.15) é chamada de **distribuição estacionária** da cadeia de Markov.

Deste modo, um processo estocástico X_t para $t \in T$ é chamado **estacionário** se $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $t > n$ implica que a distribuição conjunta das famílias de variáveis aleatórias $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h})$ e $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ são a mesma para todo $h \in \mathbb{N}$ e $t_i \in T$. Isso quer dizer que o processo está em equilíbrio e independe dos instantes de tempo t_i . Assim, a distribuição de X_t é a mesma para todo t .

Note que (1.15) pode ser escrita para cada elemento, ou seja,

$$\pi(y) = \sum_{x \in \Omega} \pi(x)P(x, y) \quad \forall y \in \Omega \quad (1.16)$$

Exemplo 1.4.1. Considere um passeio aleatório simples em um grafo $G = (V, E)$. Para qualquer vértice $y \in V$, segue que

$$\sum_{x \in V} \deg(x)P(x, y) = \sum_{x \sim y} \frac{\deg(x)}{\deg(y)} = \deg(y).$$

Para obtermos uma medida de probabilidade, devemos normalizar por $\sum_{y \in V} \deg(y) = 2|E|$. Assim, obtemos a medida de probabilidade

$$\pi(y) = \frac{\deg(y)}{2|E|} \quad \forall y \in \Omega,$$

que é proporcional aos graus, é sempre uma distribuição estacionária para o passeio. Para o grafo da Figura (1.2), temos $\pi = (\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10})$

Nesta seção, assumimos que qualquer cadeia de Markov (X_0, X_1, \dots) possui espaço de estados Ω finito e matriz de transição P .

Definição 1.4.2. Para $x \in \Omega$, chama-se **hitting time** para x ao

$$\tau_x = \min\{t \geq 0 : X_t = x\},$$

primeiro instante de tempo o qual a cadeia visita o estado x . Definimos também

$$\tau_x^+ = \min\{t \geq 1 : X_t = x\}.$$

Quando $X_0 = x$, τ_x^+ é chamado de **primeiro tempo de retorno**.

Lema 1.4.1. Para quaisquer estados x e y de uma cadeia irredutível, $E_x(\tau_y^+) < \infty$.

Demonstração. A definição de irredutibilidade implica que existe um inteiro $r > 0$ e um ε real positivo tal que, para quaisquer dois estados $x, w \in \Omega$, existe um $j \leq r$ com $P^j(x, w) > \varepsilon$. Então, para qualquer valor de X_t , a probabilidade de atingir o estado y em um instante de tempo entre t e $t + r$ é pelo menos ε . Então, para $k > 0$, temos

$$\begin{aligned} P_x\{\tau_y^+ > kr\} &= \sum_{z \in \Omega} P_x(X_r = z, \tau_y^+ > kr | \tau_y^+ > r) \underbrace{P_x(\tau_y^+ > r)}_{< 1 - \varepsilon} P_x(X_r = z) \quad (1.17) \\ &\leq (1 - \varepsilon) \sum_{z \in \Omega} P_z(\tau_y^+ > (k-1)r) P_x(X_r = z) \\ &\leq (1 - \varepsilon) \max_{z \in \Omega} P_z(\tau_y^+ > (k-1)r) \underbrace{\sum_{z \in \Omega} P(X_r = z)}_{=1} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Aplicando a Equação (1.17) k vezes obtemos

$$P_x\{\tau_y^+ > kr\} \leq (1 - \varepsilon)^k. \quad (1.19)$$

Como Y é uma variável aleatória que assume valores inteiros não negativos, temos que

$$E(Y) = \sum_{t \geq 0} P\{Y > t\}.$$

Deste modo, $P_x\{\tau_y^+ > t\}$ é uma função decrescente de t e (1.19) é suficiente para limitar todos os termos da expressão para $E_x(\tau_y^+)$:

$$E_x(\tau_y^+) = \sum_{t \geq 0} P_x\{\tau_y^+ > t\} \leq \sum_{k \geq 0} r P_x\{\tau_y^+ > kr\} \leq r \sum_{k \geq 0} (1 - \varepsilon)^k < \infty. \quad (1.20)$$

Estamos usando o fato de que na primeira desigualdade de (1.20),

$$\sum_{t \geq 0} P(\tau > t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{r-1} \underbrace{P(\tau > kr + i)}_{\leq P(\tau > kr)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} r P(\tau > kr)$$

□

Para construir uma candidata à distribuição estacionária, considere um passeio da cadeia de um estado arbitrário z de volta a z . Como as visitas a z fracionam a trajetória da cadeia em segmentos identicamente distribuídos, é de se esperar que a fração média de tempo por segmento gasta em cada estado y coincida com a fração de longo prazo do tempo gasto em y .

Proposição 1.4.1. *Seja P a matriz de transição de uma cadeia de Markov irredutível. Então:*

(i) *existe uma distribuição de probabilidade π em Ω tal que $\pi = \pi P$ e $\pi(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$, além disso,*

$$(ii) \pi(x) = \frac{1}{E_x(\tau_x^+)}.$$

Demonstração. Seja $z \in \Omega$ um estado arbitrário de uma cadeia de Markov. Examinaremos o tempo que a cadeia passa, em média, em cada estado entre suas visitas a z . Definimos:

$\tilde{\pi}(y)$ = número de visitas a y antes de retornar a z , começando em z .

$$\tilde{\pi}(y) = \sum_{t=0}^{\infty} P_z\{X_t = y, \tau_z^+ > t\} \quad (1.21)$$

Ou seja, a Equação (1.21) diz que o número esperados de visitas ao estado y antes de se retornar ao estado z é dado pela soma das probabilidades em todos os instantes de tempo da cadeia retornar ao estado z em mais de t passos e estar no estado y no instante de tempo t .

Segue que, para qualquer estado y ,

$$\tilde{\pi}(y) = \sum_{t=0}^{\infty} P_z\{X_t = y, \tau_z^+ > t\} \leq \sum_{t \geq 0} P_z\{X_t = x, \tau_z^+ > t\} P(x, y) = E_z(\tau_z^+) < \infty.$$

Em que a última desigualdade se deve ao Lema (1.4.1).

Partimos então da definição de estacionariedade para cada elemento dada pela Equação (1.16).

$$\sum_x \tilde{\pi}(x) P(x, y) = \sum_x \left(\sum_{t=0}^{\infty} P_z\{X_t = x, \tau_z^+ > t\} \right) P(x, y). \quad (1.22)$$

Mas $\{\tau_z^+ > t\} = \{\tau_z^+ \geq t + 1\}$ é um evento determinado apenas por X_0, \dots, X_t , assim,

$$P_z\{X_t = x, \tau_z^+ \geq t + 1\} P(x, y) = P_z\{X_t = x, X_{t+1} = y, \tau_z^+ \geq t + 1\}. \quad (1.23)$$

Então,

$$\sum_x \tilde{\pi}(x) P(x, y) = \sum_x \left(\sum_{t=0}^{\infty} P_z\{X_t = x, \tau_z^+ > t\} \right) P(x, y) = \sum_{x \in \Omega} \sum_{t=0}^{\infty} P_z\{X_t = x, X_{t+1} = y, \tau_z^+ \geq t+1\}.$$

Trocando a ordem das somas na equação (1.22) e usando a equação (1.23), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \Omega} \tilde{\pi}(x) P(x, y) &= \sum_{t=0}^{\infty} P_z\{X_{t+1} = y, \tau_z^+ \geq t + 1\} \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} P_z\{X_t = y, \tau_z^+ \geq t\}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \sum_x \left(\sum_{t=0}^{\infty} P_z\{X_t = x, \tau_z^+ > t\} \right) P(x, y) &= \sum_{t=1}^{\infty} (P_z\{X_t = y, \tau_z^+ \geq t\}) \\ &= \tilde{\pi}(y) - P_z\{X_0 = y, \tau_z^+ > 0\} + \sum_{t=1}^{\infty} P_z\{X_t = y, \tau_z^+ = t\} \\ &= \tilde{\pi}(y) - \underbrace{P_z\{X_0 = y\}}_A + \underbrace{P_z\{X_{\tau_z^+} = y\}}_B \end{aligned}$$

Caso I: se $y = z$, segue que $A = 1$ e $B = 1$. Caso II: se $y \neq z$, segue que $A = 0$ e $B = 0$.

Assim, em ambos os casos, $\sum_x \tilde{\pi}(x) P(x, y) = \tilde{\pi}(y)$ e assim, $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}P$. Para concluir a prova, normaliza-se $\sum_x \tilde{\pi}(x) = E_z(\tau_z^+)$ para obtermos uma medida de probabilidade:

$$\pi(x) = \frac{\tilde{\pi}(x)}{E_z(\tau_z^+)} \text{ satisfaz } \pi = \pi P. \quad (1.25)$$

Como a Equação (1.25) é válida para qualquer $x \in \Omega$, podemos tomar $x = z$. Assim,

obtemos

$$\pi(x) = \frac{\tilde{\pi}(x)}{E_z(\tau_z^+)} = \frac{1}{E_x(\tau_x^+)}.$$

Até o presente momento obtemos o resultado do ítem ii deste teorema para a situação em que $x = z$. Entretanto, o próximo Teorema (1.4.3) nos mostrará que esta medida será única para todo $x \in \Omega$. \square

Ao multiplicação de uma matriz de transição P por um vetor coluna à direita resulta no valor esperado de uma função nos estados em um instante de tempo adiante.

Definição 1.4.3. Funções que são invariantes pela multiplicação por P à esquerda são chamadas *harmônicas*, ou seja, $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é harmônica em x se

$$h(x) = \sum_{y \in \Omega} P(x, y)h(y). \quad (1.26)$$

Uma função é harmônica em $D \subset \Omega$ se for harmônica em todo estado $x \in D$. Se h for um vetor coluna, então uma função harmônica em todo Ω satisfaz a equação matricial $Ph = P$.

Lema 1.4.2. Suponha que P é irredutível, então uma função h harmônica em todo ponto de Ω é constante.

Demonstração. Uma vez que Ω é finito, existe um estado x_0 tal que $h(x_0) = M$ é maximal. Se para algum estado z tal que $P(x_0, z) > 0$ temos que $h(z) < M$, então

$$h(x_0) = P(x_0, z)h(z) + \sum_{y \neq z} P(x_0, y)h(y) < M.$$

Segue que $h(z) = M$ para todo estado z tal que $P(x_0, z) > 0$.

Por irredutibilidade, para qualquer estado $y \in \Omega$, existe uma sequência $x_0, x_1, \dots, x_n = y$ com $P(x_i, x_{i+1}) > 0$. Repetições sucessivas do argumento acima resultam que $h(y) = h(x_{n-1}) = \dots = h(x_0) = M$. Logo, h é constante. \square

Teorema 1.4.3. Seja P a matriz de transição de uma cadeia de Markov irredutível. Existe uma única distribuição de probabilidade π que satisfaz $\pi = \pi P$.

Demonstração. Pela Proposição (1.4.1), existe pelo menos uma medida que satisfaz $\pi = \pi P$. Então, pelo Lema (1.4.2), $\dim \text{Ker}\{P - I\} = 1$, então o posto das colunas de $P - I$ é $|\Omega| - 1$. Como o posto das linhas possui o mesmo valor do posto das colunas de uma matriz quadrada, segue que a equação de vetores linhas $\nu = \nu P$ também possui um espaço de soluções unidimensional. Este espaço contém apenas um único vetor cujas entradas somam 1. \square

Proposição 1.4.2. Se π é estacionária para a matriz de transição P , então $\pi(y_0) = 0$, para todo estado não essencial y_0 .

Demonstração. Seja \mathcal{C} uma classe de comunicação essencial. Então,

$$\pi P(\mathcal{C}) = \sum_{z \in \mathcal{C}} (\pi P)(z) = \sum_{z \in \mathcal{C}} \left[\sum_{y \in \mathcal{C}} \pi(y) P(y, z) + \sum_{y \notin \mathcal{C}} \pi(y) P(y, z) \right].$$

Trocamos então a ordem dos somatórios da primeira soma da expressão acima e obtemos

$$\pi P(\mathcal{C}) = \sum_{y \in \mathcal{C}} \pi(y) \sum_{z \in \mathcal{C}} P(y, z) + \sum_{z \in \mathcal{C}} \sum_{y \notin \mathcal{C}} \pi(y) P(y, z).$$

Para $y \in \mathcal{C}$ temos que $\sum_{z \in \mathcal{C}} P(y, z) = 1$, então

$$\pi P(\mathcal{C}) = \pi(\mathcal{C}) + \sum_{z \in \mathcal{C}} \sum_{y \notin \mathcal{C}} \pi(y) P(y, z). \quad (1.27)$$

Como π é invariante, então $\pi P(\mathcal{C}) = \pi(\mathcal{C})$. Assim, na Equação (2.4) temos que $\pi(y) P(y, z) = 0$ para todo $y \notin \mathcal{C}$ e $z \in \mathcal{C}$.

Suponha que y_0 não seja essencial. A prova do Lema (1.2.2) mostra que existe uma sequência de estados $y_0, y_1, y_2, \dots, y_r$ satisfazendo $P(y_{i-1}, y_i) > 0$ tal que os estados $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{r-1}$ não são essenciais e y_r pertence à classe de comunicação essencial \mathcal{C} . Como $P(y_{r-1}, y_r) > 0$ e $\pi(y_{r-1}) P(y_{r-1}, y_r) = 0$, segue que $\pi(y_{r-1}) = 0$. Se $\pi(y_k) = 0$, então

$$0 = \pi(y_k) = \sum_{y \in \Omega} \pi(y) P(y, y_k).$$

Segue que $\pi(y) P(y, y_k) = 0$ para todo y . Em particular, $\pi(y_{k-1}) = 0$. Segue de forma indutiva reversa ao longo da sequência que $\pi(y_0) = 0$. \square

Proposição 1.4.3. *A distribuição estacionária π para uma matriz de transição P é única se, e somente se existe uma única classe de comunicação essencial.*

Demonstração. (\Leftarrow) Suponha que exista uma única classe de comunicação essencial \mathcal{C} . Denotamos $P|_{\mathcal{C}}$ a restrição da matriz P à classe dos estados em \mathcal{C} . Suponha que $x \in \mathcal{C}$ e $P(x, y) > 0$. Então como x é essencial e $x \rightarrow y$, temos que $y \rightarrow x$, logo $y \in \mathcal{C}$. Isso implica que $P|_{\mathcal{C}}$ é matriz de transição irredutível em \mathcal{C} . Logo, existe uma única distribuição estacionária $\pi^{\mathcal{C}}$ para $P|_{\mathcal{C}}$. Seja π uma probabilidade em Ω , com $\pi = \pi P$. Pela Proposição (1.4.2), $\pi(y) = 0$ para $y \notin \mathcal{C}$, assim, π está definida em \mathcal{C} . Consequentemente, para $x \in \mathcal{C}$,

$$\pi(x) = \sum_{y \in \Omega} \pi(y) P(y, x) = \sum_{y \in \mathcal{C}} \pi(y) P(y, x) = \sum_{y \in \mathcal{C}} \pi(y) P_{\mathcal{C}}(y, x),$$

e π restrita a \mathcal{C} , segue que $\pi(x) = \pi^{\mathcal{C}}$, para todo $x \in \mathcal{C}$. Então,

$$\pi(x) = \begin{cases} \pi^{\mathcal{C}}, & \text{se } x \in \mathcal{C}, \\ 0, & \text{se } x \notin \mathcal{C}. \end{cases}$$

e a solução para $\pi = \pi P$ é única.

(\Rightarrow) Suponha que existam distintas classes de comunicação essenciais para P , digamos \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 . A restrição de P a cada uma dessas classes é irredutível. Então, para $i = 1, 2$, existe uma medida π em \mathcal{C}_i , a qual é estacionária para $P_{\mathcal{C}_i}$. Além disso, cada π_i é estacionária para P , logo P tem mais de uma distribuição estacionária. \square

1.5 Reversibilidade e Inversão de tempo

Definição 1.5.1. Dizemos que uma medida de probabilidade π definida em Ω satisfaz as **equações de balanço detalhado** se

$$\pi(x)P(x, y) = \pi(y)P(y, x), \forall x, y \in \Omega$$

Proposição 1.5.1. Seja P a matriz de transição de uma cadeia de Markov com espaço de estados Ω . Então toda distribuição π satisfazendo as equações de balanço detalhado é estacionária para P .

Demonstração. Basta somar em y ambos os lados das equações de balanço detalhado. Assim,

$$\sum_{y \in \Omega} \pi(y)P(y, x) = \sum_{y \in \Omega} \pi(x)P(x, y) = \pi(x) \underbrace{\sum_{y \in \Omega} P(x, y)}_1 = \pi(x),$$

pois P é estocástica. \square

Se as equações de balanço equilibrado valem, então

$$\pi(x_0)P(x_0, x_1) \dots P(x_{n-1}, x_n) = \pi(x_n)P(x_n, x_{n-1}) \dots P(x_1, x_0). \quad (1.28)$$

E a Equação (1.28) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$P_\pi\{X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n\} = P_n\{X_0 = x_n, X_1 = x_{n-1}, \dots, X_n = x_0\}.$$

Ou seja, se uma cadeia (X_t) satisfaz as equações de balanço detalhado e possui distribuição inicial estacionária, então a distribuição de (X_0, X_1, \dots, X_n) é a mesma distribuição de $(X_n, X_{n-1}, \dots, X_0)$. Por isso, uma distribuição que satisfaz as equações de balanço detalhado é chamada de **reversível**.

Exemplo 1.5.1. Considere um passeio aleatório simples em um grafo G . Vimos no Exemplo (1.4.1) que a distribuição $\pi(x) = \frac{\deg(x)}{2|E|}$ é estacionária. Como

$$\pi(x)P(x, y) = \frac{\deg(x)}{2|E|} \frac{\mathbb{I}_{x \sim y}}{\deg(x)} = \frac{\deg(y)}{2|E|} \frac{\mathbb{I}_{y \sim x}}{\deg(y)} = \pi(y)P(y, x).$$

Segue que a cadeia é reversível.

Definição 1.5.2. *Seja uma cadeia de Markov irredutível com matriz de transição P e distribuição estacionária π . A cadeia de Markov com matriz de transição $\hat{P}(x, y) = \frac{\pi(y)P(y, x)}{\pi(x)}$ é chamada de **tempo de reversão** de uma cadeia de Markov.*

Proposição 1.5.2. *Seja (X_t) uma cadeia de Markov irredutível com matriz de transição P e distribuição estacionária π . Denota-se (\hat{X}_t) a cadeia de tempo revertido com matriz de transição \hat{P} . Então π é estacionária para \hat{P} , e para qualquer $x_0, \dots, x_t \in \Omega$, temos*

$$P_\pi\{X_0 = x_0, \dots, X_t = x_t\} = P_\pi\{\hat{X}_0 = x_t, \dots, \hat{X}_t = x_0\}.$$

Demonstração.

$\sum_{y \in \Omega} \pi(y) \hat{P}(y, x) = \sum_{y \in \Omega} \pi(y) \frac{\pi(x)P(x, y)}{\pi(y)} = \pi(x)$, mostra a estacionariedade de π para \hat{P} .

Para mostrar a igualdade das probabilidades das duas trajetórias, usamos o fato que, para cada i ,

$$P(x_{i-1}, x_i) = \pi(x_i) \frac{\hat{P}(x_i, x_{i-1})}{\pi(x_{i-1})}.$$

Então, observa-se que

$$\begin{aligned} P_\pi\{X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n\} &= \pi(x_0)P(x_0, x_1)P(x_1, x_2)\dots P(x_{n-1}, x_n) \\ &= \pi(x_n)\hat{P}(x_n, x_{n-1})\dots \hat{P}(x_2, x_1)\hat{P}(x_1, x_0) \\ &= P_\pi\{\hat{X}_0 = x_n, \dots, \hat{X}_n = x_0\} \end{aligned}$$

□

Assim, se uma cadeia com matriz de transição P é reversível, então $\hat{P} = P$.

Capítulo 2

Esperança Condicional e Martingais

Outra classe importante de processos estocásticos são martingais, que passaremos a estudar nesta parte do texto. Todavia, alguns conteúdos técnicos precisam ser trabalhados previamente. Então este capítulo segue organizado da seguinte forma: na primeira seção, apresentamos alguns resultados de teoria da medida e de probabilidade, que serão utilizados no restante do capítulo. Por não serem objeto central desta monografia não serão demonstrados, mas as referências serão indicadas. Após essa primeira seção mais técnica, apresentaremos conceitos básicos de probabilidade condicional e esperança condicional, para que possamos discutir o elemento central deste capítulo: o conceito de Martingal e o Teorema de convergência de martingais.

Neste capítulo, nossas referências básicas são: [1], [2], [3], [4], [5] e [6].

2.1 Lei fraca dos grandes números, Lema de Fatou e Teoremas: da convergência dominada e da continuidade de Paul Lévy

Teorema 2.1.1 (Lei fraca dos grandes números). *Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com*

$$xP(|x_i| > x) \rightarrow 0 \text{ quando } x \rightarrow \infty.$$

Seja $S_n = X_1 + \dots + X_n$ e seja $\mu_n = E(X_1 \mathbb{I}_{(|X_1| \leq n)})$. Então, $\frac{S_n}{n} - \mu_n \rightarrow 0$ em probabilidade.

Demonstração. disponível em [2], p. 60. □

Lema 2.1.2 (Lema de Fatou). *Se a sequência de funções (f_n) pertence ao espaço mensurável $M(X, \mathcal{F})$, então*

$$\int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

Demonstração. disponível em [1], p. 33. □

Teorema 2.1.3 (Teorema da convergência dominada). *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge q.t.p. a uma função mensurável real f . Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$, para todo n , então f é integrável e*

$$\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Demonstração. disponível em [1], p. 44. □

Teorema 2.1.4 (Teorema da continuidade de Paul Lévy). *Sejam F_1, F_2, \dots funções de distribuição e $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ suas respectivas funções características. Se φ_n converge pontualmente para um limite φ e se φ é contínua no ponto zero, então*

1. *existe uma função de distribuição F tal que $F_n \rightarrow F$ fracamente e,*
2. *φ é a função característica de F .*

Demonstração. disponível em [5], p. 237. □

2.2 Probabilidade Condicional

Definição 2.2.1. *Sejam (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade e $B, A \in \mathcal{F}$ eventos tais que $P(B) > 0$ e $P(A) \geq 0$. A medida de probabilidade $P(A|B)$ em (Ω, \mathcal{F}) é chamada **probabilidade de A condicional ao evento B**:*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (2.1)$$

Se (B_n) for uma partição de Ω e se conhecermos cada probabilidade $P(A|B_n)$ e $P(B_n)$, a probabilidade de A pode ser construída pela **fórmula da probabilidade total**:

$$P(A) = \sum_{n \geq 1} P(A|B_n)P(B_n).$$

Estamos assumindo que $P(B_n) > 0$, para todo n .

Essas probabilidades podem ser explicadas por meio da função simples $f : \Omega \rightarrow [0, 1]$, que é constante em cada B_n :

$$f(\omega) = \sum_{n \geq 1} P(A|B_n) \mathbb{I}_{B_n}(\omega).$$

A variável aleatória $f(\omega)$ é uma boa estimação para $P(A)$, quando ω é escolhido aleatoriamente de acordo com a medida de probabilidade P , quando $\omega \in B_n$, temos que $f(\omega) = P(A|B_n)$. Se o experimento for repetido um número suficientemente grande de vezes, a Lei dos Grandes Números garante que a média de f converge para

$$E[f] = P(A).$$

Temos então para qualquer conjunto $B = \cup B_n$, temos

$$P(A \cap B) = \int_B f dP.$$

A variável aleatória f é chamada de **probabilidade condicional de A com relação à partição $\{B_n\}_{n \geq 1}$** .

2.3 Esperança condicional relativa a uma partição

Trataremos agora do conceito de esperança condicional para uma partição enumerável do espaço de probabilidade.

Suponha que $P(B) > 0$. Se X for integrável, podemos considerar a esperança de X com relação à medida $P(\cdot|B)$, chamada **esperança condicional com relação a B** ,

$$E(X|B) = \int X(\omega)P(d\omega|B) = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP. \quad (2.2)$$

Seja $\{B_n\}_{n \geq 1}$ uma partição de Ω , ou seja, uma família de conjuntos $B_n \in \mathcal{F}$ com $\cup_n B_n = \Omega$, e $B_n \cap B_m = \emptyset$, quando $n \neq m$. Tal partição gera uma sub σ -álgebra $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$, contendo todas as uniões dos conjuntos B_n . Se $P(B_n) > 0$, definimos $E(X|B_n)$ como em (2.2). Caso $P(B_n) = 0$, definimos $E(X|B_n) = 0$. Assim, para qualquer variável aleatória integrável X , definimos uma nova variável aleatória $E(X|\mathcal{B}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$E(X|\mathcal{B})(\omega) = \sum_{n \geq 1} E(X|B_n)\mathbb{I}_{B_n}(\omega), \quad (2.3)$$

chamada, **versão de esperança condicional de X com relação a \mathcal{B}** .

De fato, $\omega \rightarrow E(X|\mathcal{B})(\omega)$ é \mathcal{B} -mensurável. Além disso, para qualquer conjunto mensurável B ,

$$\int_B E(X|\mathcal{B})dP = \sum_{n \geq 1} \int_{B \cap B_n} E(X|B_n)dP = \sum_{n \geq 1} P(B \cap B_n)E(X|B_n). \quad (2.4)$$

Se assumirmos que $B \in \mathcal{B}$, então, B é uma união dos elementos $B_k, k \in S$, o que implica que $P(B \in B_n) = P(B_n)\mathbb{I}_S(n)$, onde $\mathbb{I}_S(n) = 1$, se $n \in S$ e 0, caso contrário. Usando a definição de $E[X|B_n]$, o último termo em (2.4) é igual a

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{I}_S(n) \int_{B_n} X dP = \int_B X dP.$$

Então a variável aleatória $E(X|\mathcal{B})$ satisfaz

$$\int_B E(X|\mathcal{B})dP = \int_B X dP, \quad \forall B \in \mathcal{B}. \quad (2.5)$$

Lema 2.3.1. *Sejam (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade e $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ uma sub σ -álgebra. Sejam Y_1, Y_2*

duas variáveis aleatórias integráveis \mathcal{B} -mensuráveis. Então $Y_1 = Y_2$ em quase todo ponto se e somente se

$$\int_B Y_1 dP = \int_B Y_2 dP \quad \forall B \in \mathcal{B}. \quad (2.6)$$

Demonstração.

(\Rightarrow) Seja $D = \{\omega \in \Omega; Y_1(\omega) \neq Y_2(\omega)\}$ tal que D é \mathcal{B} -mensurável. Por hipótese, $P(D) = 0$. Então,

$$\int Y_1(\omega) dP = \underbrace{\int_D Y_1(\omega) dP}_{=0} + \int_{\Omega \setminus D} Y_1(\omega) dP = \underbrace{\int_D Y_2(\omega) dP}_{=0} + \int_{\Omega \setminus D} Y_2(\omega) dP = \int Y_2(\omega) dP$$

(\Leftarrow) Defina $B = \{\omega : Y_1(\omega) > Y_2(\omega)\}$. Como $B \in \mathcal{B}$ (2.6) implica que $P(B) = 0$, isto é, $P(Y_1 \leq Y_2) = 1$. Fazendo o raciocínio análogo para $B = \{\omega : Y_1(\omega) < Y_2(\omega)\}$ temos que $P(Y_1 \geq Y_2) = 1$. Conclui-se que $P(Y_1 = Y_2) = 1$. \square

2.4 Esperança condicional relativa a uma σ -álgebra

Na seção anterior tratamos da esperança condicional com relação a uma partição enumerável do espaço de probabilidade que foi definida como $E(X|\mathcal{B})(\omega) = \sum_{n \geq 1} E(X|B_n)\mathbb{I}_{B_n}(\omega)$. Chegamos à conclusão que:

1. $E(X|\mathcal{B})$ é \mathcal{B} -mensurável,
2. a relação $\int_B E(X|\mathcal{B}) dP = \int_B X dP, \quad \forall B \in \mathcal{B}$ é satisfeita e,
3. qualquer variável satisfazendo às duas propriedades acima é, em quase todo ponto, igual a $E(X|\mathcal{B})$.

Todavia, a ausência de enumerabilidade não permite a extensão da definição de esperança condicional a uma sub σ -álgebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ geral como em $E(X|\mathcal{B})(\omega) = \sum_{n \geq 1} E(X|B_n)\mathbb{I}_{B_n}(\omega)$. Problemas surgem ao considerar conjuntos mensuráveis $B \in \mathcal{G}$ com probabilidade nula. Nestes casos, a relação $E(X|\mathcal{B})(\omega) = \sum_{n \geq 1} E(X|B_n)\mathbb{I}_{B_n}(\omega)$ não pode ser usada para definir $E(X|\mathcal{G})$.

Definiremos então a esperança condicional com respeito a uma sub σ -álgebra, verificaremos sua existência, unicidade em quase todo ponto e a compatibilidade com o caso de partição enumerável de Ω .

Definição 2.4.1. *Seja $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ uma sub σ -álgebra e $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória positiva e integrável. Qualquer variável aleatória $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça:*

1. $Y \in \mathcal{G}$, ou seja, Y é \mathcal{G} mensurável, e
2. $\forall A \in \mathcal{G}, \int_A X dP = \int_A Y dP$.

é chamada de uma *versão da esperança condicional de X com relação a \mathcal{G}* . Denota-se por $E(X|\mathcal{G})$, segue que $Y = E(X|\mathcal{G})$ e $\int_B E(X|\mathcal{G})dP = \int_B YdP = \int_B XdP, \quad \forall B \in \mathcal{G}$.

Segue da definição que, se $B = \Omega$,

$$E[E(X|\mathcal{G})] = \int E(X|\mathcal{G})dP = \int XdP = E(X). \quad (2.7)$$

Lema 2.4.1. *Se Y satisfaz (1) e (2) da definição de esperança condicional, então Y é integrável.*

Demonstração. Seja $A = \{Y > 0\} \in \mathcal{G}$.

$$\begin{aligned} \int_A YdP &= \int_A XdP \leq \int_A |X|dP \\ \int_{A^c} -YdP &= \int_{A^c} -XdP \leq \int_{A^c} |X|dP. \end{aligned}$$

Segue que $E|Y| \leq E|X|$. □

Mostraremos agora a unicidade da esperança condicional e posteriormente a existência.

Teorema 2.4.2. *Se Y' também satisfaz (1) e (2), então*

$$\int_A YdP = \int_A Y'dP \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Demonstração. Seja $A = \{Y - Y' \geq \varepsilon > 0\}$. Segue que

$$0 = \int_A X - XdP = \int_A Y - Y'dP \geq \varepsilon P(A),$$

logo $P(A) = 0$ e $P(Y - Y' \geq \varepsilon) = 0$. Tome $A = \{Y - Y' > 0\} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \{Y - Y' \geq \frac{1}{n}\}$

Como a equação vale para todo ε , segue que $Y \leq Y'$ quase certamente. Com o raciocínio análogo, trocando os papéis de Y e de Y' , segue que $Y = Y'$ quase certamente. □

Mostraremos a existência da esperança condicional, mas primeiramente precisamos do conceito de medida absolutamente contínua e do Teorema de Radon-Nikodym, cuja demonstração não será feita neste trabalho.

Definição 2.4.2. *Uma medida ν é chamada de absolutamente contínua em relação a μ , denota-se $\nu \ll \mu$, se $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$.*

Teorema 2.4.3. (Radon-Nikodym) *Sejam μ e ν medidas σ -finitas em (Ω, \mathcal{G}) . Se $\nu \ll \mu$, então existe uma função $f \in \mathcal{G}$ tal que $\forall A \in \mathcal{G}$,*

$$\int_A fd\mu = \nu(A).$$

f é denotada por $\frac{d\nu}{d\mu}$ e é chamada de *derivada de Radon-Nikodym*.

Para uma demonstração deste teorema, o leitor interessado poderar consultar [1] e [2].

Teorema 2.4.4. *Suponha que $X \geq 0$ e $\nu(A) = \int_A X dP \quad \forall A \in \mathcal{G}$. Então $\frac{d\nu}{dP}$ é uma versão de $E(X|\mathcal{G})$.*

Demonstração. Pelo Teorema da convergência dominada, ν é uma medida finita em (Ω, \mathcal{G}) e a definição de integral implica que $\nu \ll P$. O Teorema de Radon-Nikodym garante a existência de uma função positiva \mathcal{G} -mensurável Y tal que

$$\nu(A) = \int_A Y dP, \quad \forall A \in \mathcal{G}.$$

Então, Y é a densidade de Radon-Nikodym $\frac{d\nu}{dP}$ e é determinada unicamente, a menos de conjuntos de medida zero. \square

Verificaremos agora, que esta última definição de esperança condicional, coincide com aquela para uma partição enumerável de Ω .

Exemplo 2.4.1. *Seja \mathcal{D} a σ -álgebra gerada por uma partição enumerável mensurável $\{D_n\}_{n \geq 1}$. Como $E(X|\mathcal{D})$ é \mathcal{D} -mensurável, ela é constante em cada D_n , ou seja, $E(X|\mathcal{D})(\omega) = b_n$, para todo $(\omega) \in D_n$. Então, para todo n , temos*

$$b_n P(B_n) = b_n \int_{B_n} dP = \int_{B_n} E(X|\mathcal{D}) dP = \int_{B_n} X dP.$$

Então, quando $P(B_n) > 0$, temos

$$b_n = \frac{1}{P(B_n)} \int_{B_n} X dP,$$

que coincide com (2.3) para todo B_n de medida positiva. Como os outros conjuntos possuem medida zero e aparecem em um número enumerável de vezes, temos então uma versão da esperança condicional.

Exemplo 2.4.2. *Suponha que $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, ou seja, \mathcal{G} é a maior sub σ -álgebra de \mathcal{F} . Segue que:*

$$E(X|\mathcal{G}) = \int_B X dP = X, \quad \forall B \in \mathcal{F}.$$

Exemplo 2.4.3. *Suponha que \mathcal{G} seja a menor sub σ -álgebra de \mathcal{G} , ou seja, $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$. Então, teremos que $E(X|\mathcal{G}) = E(X)$ q.t.p.. Este fato ocorre porque $E(X|\mathcal{G})$ deve ser constante em Ω . Assim,*

$$E(X|\mathcal{G}) = \int E(X|\mathcal{G}) dP = \int X dP = E(X).$$

Os dois últimos exemplos, mostram que $E(X|\mathcal{G})$ nos dá uma aproximação de X , e quanto mais fina \mathcal{G} , melhor a aproximação obtida.

2.5 Propriedades da esperança condicional

Mostraremos nesta seção, algumas propriedades básicas da esperança condicional.

Lema 2.5.1. *A esperança condicional é linear, ou seja, $E(aX + Y|\mathcal{G}) = aE(X|\mathcal{G}) + E(Y|\mathcal{G})$*

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{G}$. Então $\int_A \{aE(X|\mathcal{G}) + E(Y|\mathcal{G})\}dP = a \int_A E(X|\mathcal{G})dP + \int_A E(Y|\mathcal{G})dP = a \int_A XdP + \int_A YdP = \int_A aX + YdP$. \square

Lema 2.5.2. *Se $X \leq Y$ então $E(X|\mathcal{G}) \leq E(Y|\mathcal{G})$.*

Demonstração.

$$\int_A E(X|\mathcal{G})dP = \int_A XdP \leq \int_A YdP = \int_A E(Y|\mathcal{G})dP.$$

Seja $A = \{E(X|\mathcal{G}) - E(Y|\mathcal{G}) \geq \varepsilon > 0\}$. Segue que $P(A) = 0$, para todo $\varepsilon > 0$. \square

Lema 2.5.3. *(Teorema da convergência monótona - versão condicional) Se $X_n \geq 0$ e $X_n \nearrow X$ com $E(X) < \infty$, então $E(X_n|\mathcal{G}) \nearrow E(X|\mathcal{G})$.*

Demonstração. Seja $Y_n = X - X_n$. Queremos mostrar que $E(Y_n|\mathcal{G}) \searrow 0$. Como Y_n é uma sequência decrescente, (2.5.2) implica que $Z_n = E(Y_n|\mathcal{G})$ decresce para um limite Z_∞ . Se $A \in \mathcal{G}$, então

$$\int_A Z_n dP = \int_A Y_n dP.$$

Quanto $n \rightarrow \infty$, $Y_n \searrow 0$. Pelo Teorema da convergência dominada, $\int_A Z_\infty dP = 0$, para todo $A \in \mathcal{G}$, então $Z_\infty = 0$. \square

Corolário 2.5.4. *Se Y_n é uma sequência de variáveis aleatórias positivas e integráveis, então*

$$E\left(\sum_{n \geq 1} Y_n | \mathcal{G}\right) = \sum_{n \geq 1} E(Y_n | \mathcal{G}) \quad q.t.p..$$

Lema 2.5.5. *Seja X integrável e \mathcal{G}, \mathcal{H} duas sub σ -álgebras, tais que $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$. Então*

$$E[E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}] = E(X|\mathcal{G}) = E[E(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}] \quad q.t.p..$$

Demonstração. $E[E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}]$ e $E[E(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}]$ estão bem definidas, pois $E(X|\mathcal{H})$ e $E(X|\mathcal{G})$ são integráveis.

Para a primeira igualdade, pela definição de $E(\cdot|\mathcal{H})$,

$$\int_H E[E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}]dP = \int_H E(X|\mathcal{G})dP \quad \forall H \in \mathcal{H}.$$

Em particular, como $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$,

$$\int_G E[E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}]dP = \int_G E(X|\mathcal{G})dP \quad \forall G \in \mathcal{G}.$$

Pela definição de $E(X|\mathcal{G})$,

$$\int_G E(X|\mathcal{G})dP = \int_G XdP, \quad \forall G \in \mathcal{G}.$$

Para a segunda igualdade, como $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}, \forall G \in \mathcal{G}$,

$$\int_G E[E(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}]dP = \int_H E(X|\mathcal{H})dP = \int_G XdP.$$

□

Lema 2.5.6. (Desigualdade de Jensen - versão condicional) Se φ é uma função convexa e $E|X|, E|\varphi(X)| < \infty$, então

$$\varphi(E(X|\mathcal{G})) \leq E(\varphi(X)|\mathcal{G}) \quad (2.8)$$

Demonstração. Seja $S = \{(a, b); a, b \in \mathbb{Q}, ax + b \leq \varphi(x) \forall x\}$. Então $\varphi(x) = \sup\{ax + b; (a, b) \in S\}$. Se $\varphi(x) \geq ax + b$, então os Lemas (2.5.1) e (2.5.2) implicam que

$$E(\varphi(X)|\mathcal{F}) \geq aE(X|\mathcal{F}) + b \quad q.t.p..$$

Tomando o *sup* em $(a, b) \in S$ resulta em:

$$E(\varphi(X)|\mathcal{F}) \geq \varphi(E(X)|\mathcal{F}) \quad q.t.p..$$

□

2.6 Martingais

Uma vez apresentado o conceito de esperança condicional, podemos trabalhar com a definição de martingal e seu teorema de convergência.

Definição 2.6.1. Uma *filtração* é uma sequência crescente $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ de sub σ -álgebras $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{F}$. Uma sequência de variáveis aleatórias $(X_n)_{n \geq 1}$ em (Ω, \mathcal{F}) é *adaptada a* $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ se $X_n \in \mathcal{F}_n, \forall n$. Uma sequência dupla $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$, onde $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ é uma filtração e $(X_n)_{n \geq 1}$ é adaptada a $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ é chamada de *sequência estocástica*.

Definição 2.6.2. Uma sequência estocástica $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$, na qual $X_n \in L^1$ é chamada

1. um *martingal* se, para todo $n \geq 1$,

$$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$$

2. um *submartingal* se, para todo $n \geq 1$,

$$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq X_n$$

3. um *supermartingal* se, para todo $n \geq 1$,

$$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq X_n$$

Passemos agora a alguns exemplos de martingais.

Exemplo 2.6.1. Seja $(a_n)_{n \geq 1}$ uma sequência não decrescente. Se $X_n = a_n$, para todo n , então $(X_n)_{n \geq 1}$ é um submartingal.

Exemplo 2.6.2. Considere o passeio aleatório simples em \mathbb{Z} : $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$, onde $P(Y_k = +1) = 1 - P(Y_k = -1) = p$, com $p \in (0, 1)$. Como $|S_n| \leq n$, então $S_n \in L^1, \forall n \geq 1$. Além disso, ao tomarmos $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ como uma filtração natural,

$$E(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(S_n + Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) = S_n + E(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) = S_n + 2p - 1.$$

S_n é um martingal quando $p = \frac{1}{2}$, submartingal quando $p > \frac{1}{2}$ e supermartingal quando $p < \frac{1}{2}$.

Definição 2.6.3. Quando a filtração é associada a uma sequência de variáveis aleatórias como $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$, nós a chamamos de **filtração natural** associada à $(Y_n)_{n \geq 1}$.

Suponha que X_n seja um martingal com relação a \mathcal{G}_n e seja \mathcal{F}_n a filtração natural. Então i) $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{G}_n$ e ii) X_n é um martingal com relação a \mathcal{F}_n .

Para verificar (i), note que \mathcal{F}_n é a menor σ -álgebra para a qual X_n é adaptada. Como X_n é um \mathcal{G}_n martingal, então $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{G}_n$.

Para verificar (ii), veja que

$$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E[E(X_{n+1}|\mathcal{G}_n)|\mathcal{F}_n] = E[E(X_n|\mathcal{G}_n)|\mathcal{F}_n] = E(X_n|\mathcal{F}_n) = X_n.$$

Teorema 2.6.1. Se X_n é um supermartingal, então, para $n > m$, $E(X_n|\mathcal{F}_m) \leq X_m$.

Demonstração. Por definição, o resultado é válido para $n = m + 1$. Seja $n = m + k, k \geq 2$. Então, o Lema (2.5.2) e a definição nos permite concluir que

$$E(X_{m+k}|\mathcal{F}_m) = E[E(X_{m+k}|\mathcal{F}_{m+k-1})|\mathcal{F}_m] \leq E(X_{m+k-1}|\mathcal{F}_m).$$

Por indução, segue que $E(X_n|\mathcal{F}_m) \leq X_m$. □

Teorema 2.6.2.

1. Se X_n é um submartingal, então para $n > m$, $E(X_n|\mathcal{F}_m) \geq X_m$.
2. Se X_n é um martingal, então para $n > m$, $E(X_n|\mathcal{F}_m) = X_m$.

Demonstração.

1. Basta ver que $(-X)$ é um supermartingal. A demonstração segue do Teorema (2.6.1).
2. Como X_n é super e submartingal, segue que, para $n > m$, $E(X_n|\mathcal{F}_m) = X_m$. \square

Teorema 2.6.3. *Se X_n é um martingal com relação a \mathcal{F}_n e φ é uma função convexa com $E|\varphi(X_n)| < \infty \forall n$, então $\varphi(X_n)$ é um submartingal com relação a \mathcal{F}_n .*

Demonstração. Pela desigualdade de Jensen e pela definição de martingal,

$$E(\varphi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) \geq \varphi(E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)) = \varphi(X_n).$$

\square

Corolário 2.6.4. *Se $p \geq 1$ e $E|X_n|^p < \infty \forall n$, então $|X_n|^p$ é submartingal relação a \mathcal{F}_n .*

Teorema 2.6.5. *Se X_n é um submartingal com relação a \mathcal{F}_n e φ é uma função convexa e crescente com $E|\varphi(X_n)| < \infty \forall n$, então $\varphi(X_n)$ é um submartingal com relação a \mathcal{F}_n . Consequentemente,*

1. *Se X_n é um submartingal, então $(X_n - a)^+$ é um submartingal.*
2. *Se X_n é um supermartingal, então $\min\{X_n, a\}$ é um supermartingal.*

Demonstração. A demonstração segue diretamente da desigualdade de Jensen, pois

$$E(\varphi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) \geq \varphi(E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)) \geq \varphi(X_n).$$

\square

Nossa meta é provar o Teorema de convergência de martingais, entretanto, antes de atingirmos esse ponto, precisamos primeiro introduzir o conceito de upcrossing, e logo em seguida, enunciar e demonstrar o Teorema de upcrossings. Feito isso, podemos passar para o nosso objetivo central deste capítulo.

Suponha que $y = \{y_n; n \geq 0\}$ seja uma sequência de números reais e $[a, b] \in \mathbb{R}$ um intervalo. Um **upcrossing** de $[a, b]$ é definido pelo cruzamento realizado por y em $[a, b]$ na direção ascendente. Veja a Figura (2.1). De maneira mais precisa:

Definição 2.6.4. *Seja $T_1 = \min\{n; y_n \leq a\}$, o primeiro instante de tempo em que y atinge o intervalo $(-\infty, a]$, e $T_2 = \min\{n > T_1; y_n \geq b\}$, o primeiro instante de tempo subsequente quando y atinge o intervalo $[b, \infty)$. Chamamos o intervalo $[T_1, T_2]$ de um **upcrossing** de $[a, b]$. Além disso, sejam*

$$T_{2k-1} = \min\{n > T_{2k-2}; y_n \leq a\}, \quad T_{2k} = \min\{n > T_{2k-1}; y_n \geq b\},$$

para $k \geq 2$, então os upcrossings de $[a, b]$ são os intervalos $[T_{2k-1}, T_{2k}]$, para $k \geq 1$.

Chamaremos os $U_n(a, b; y)$ de número de upcrossings de $[a, b]$ pela subsequência y_0, y_1, \dots, y_n , e $U(a, b; y) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(a, b; y)$ de número total de tais upcrossings por y . Para provar o Teorema da desigualdade upcrossing, enunciaremos primeiramente os seguintes lemas:

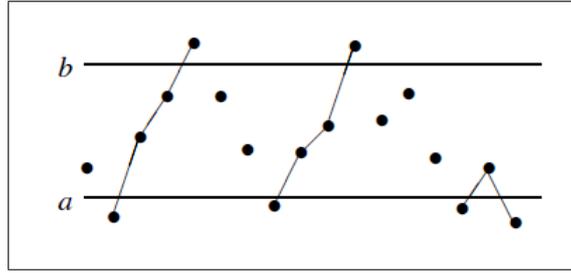


Figura 2.1: Upcrossings de (a, b) . As linhas ascendentes indicam os incrementos que são incluídos na sequência de y .

Lema 2.6.6. Se (Y_n) é uma \mathcal{F}_n submartingal e φ é uma função convexa crescente com $E|\varphi(Y_n)| < \infty \forall n \in \mathbb{N}$, então $\varphi(Y_n)$ é um \mathcal{F}_n submartingal.

Demonstração. Pela desigualdade de Jensen, temos que:

$$E(\varphi(Y_{n+1})|\mathcal{F}_n) \geq \varphi(E(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n)) \geq \varphi(E(Y_n|\mathcal{F}_n)) = \varphi(Y_n)$$

□

Corolário 2.6.7. Se Y_n é um \mathcal{F}_n submartingal, então $(Y_n - a)^+$ também é submartingal.

Demonstração. Como $(Y_n - a)^+$ é convexa e crescente. Então usando (2.6.5), obtemos o resultado desejado. □

Lema 2.6.8. Se $U(a, b; y) < \infty$ para todos racionais a e b tais que $a < b$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ existe, embora possa ser infinito.

Demonstração. Suponha que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ não exista e sejam $\liminf y_n = \lambda$ e $\limsup y_n = \mu$, com $\lambda < \mu$.

Então, existem $a, b \in \mathbb{Q}; \lambda < a < b < \mu$. Logo $y_n \leq a$ e $y_n \geq b$ para infinitos n . Segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \infty$, uma contradição com a hipótese de $U(a, b; y) < \infty$. Assim, $\lambda = \mu$. □

Teorema 2.6.9. (Desigualdade upcrossing) Suponha que (Y, \mathcal{F}) seja um submartingal e $U_n(a, b; Y)$ o número de upcrossings de $[a, b]$ por Y até o instante n . Se $a < b$ então $EU_n(a, b; Y) \leq \frac{E((Y_n - a)^+)}{b - a}$.

Demonstração. Seja $Z_n = (Y_n - a)^+$. Pelo Teorema (2.6.5), (Z, \mathcal{F}) é um submartingal não negativo. Upcrossings por Y de $[a, b]$ equivalem a upcrossings por Z de $[0, b - a]$, então $U_n(a, b; Y) = U_n(0, b - a; Z)$.

$[T_{2k-1}, T_{2k}], k \geq 1$ são os upcrossings por Z de $[0, b - a]$. Defina a função indicadora:

$$\mathbb{I}_i = \begin{cases} 1, & \text{se } i \in (T_{2k-1}, T_{2k}], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como $\{\mathbb{I}_i = 1\} = \cup_k \{T_{2k-1} \leq i - 1\} \setminus \{T_{2k} \leq i - 1\}$, é um evento que depende apenas de

Y_0, Y_1, \dots, Y_{i-1} , segue que \mathbb{I}_i é \mathcal{F}_{i-1} mensurável. Então podemos afirmar que

$$(b-a)U_n(0, b-a; Z) \leq E \left(\sum_{i=1}^n (Z_i - Z_{i-1}) \mathbb{I}_i \right), \quad (2.9)$$

uma vez que cada upcrossing de $[0, b-a]$ contribui com uma quantia de pelo menos $b-a$ à soma. Entretanto,

$$\begin{aligned} E((Z_i - Z_{i-1}) \mathbb{I}_i) &= E(E[(Z_i - Z_{i-1}) \mathbb{I}_i | \mathcal{F}_{i-1}]) = E([E(Z_i | \mathcal{F}_{i-1}) - E(Z_{i-1} | \mathcal{F}_{i-1})] \mathbb{I}_i) \\ &= E([E(Z_i | \mathcal{F}_{i-1}) - Z_{i-1}] \mathbb{I}_i) \leq E(E(Z_i | \mathcal{F}_{i-1}) - Z_{i-1}) = E(Z_i) - E(Z_{i-1}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Na primeira igualdade usamos que $E(E(X|\mathcal{F})) = E(X)$ e a desigualdade se dá por tratarmos de um submartingal.

Usando a Equação (2.9),

$$\begin{aligned} (b-a)U_n(0, b-a; Z) &\leq E(Z_n) - E(Z_{n-1}) + E(Z_{n-1}) - E(Z_{n-2}) + \dots - E(Z_1) + E(Z_1) - E(Z_0) \\ &= E(Z_n) - E(Z_0) \leq E(Z_n). \end{aligned}$$

Deste modo,

$$(b-a)U_n(0, b-a; Z) \leq E(Z_n) - E(Z_0) \leq E(Z_n) = E(Y_n - a)^+,$$

o que implica que

$$EU_n(a, b; Y) \leq \frac{E((Y_n - a)^+)}{b-a}.$$

□

Passamos agora para o Teorema da convergência de martingais.

Teorema 2.6.10. (Teorema da convergência de martingais) *Seja (Y, \mathcal{F}) um submartingal e suponha que $\exists M; \forall n, E(Y_n^+) \leq M$. Então existe uma variável aleatória Y_∞ , tal que $Y_n \xrightarrow{q.t.p.} Y_\infty$.*

Demonstração. Pelo Teorema da desigualdade upcrossing,

$$EU_n(a, b; y) \leq \frac{E(Y_n - a)^+}{b-a} \leq \frac{E(Y_n^+) + |a|}{b-a}.$$

Como $U(a, b; y) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(a, b; y)$, segue que

$$EU(a, b; y) = E \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(a, b; y) \leq \frac{M + |a|}{b-a}$$

nesta última desigualdade, usamos que $\forall n, E(Y_n^+) \leq M$. Segue então que $U(a, b; y) \stackrel{q.t.p.}{<} \infty$, pois $EU(a, b; y) < \infty \Rightarrow U(a, b; y) \stackrel{q.t.p.}{<} \infty$. Como os racionais são um conjunto enumerável, $U(a, b; y) \stackrel{q.t.p.}{<} \infty \Rightarrow P(U(a, b; y)) = 1, \forall a, b \in \mathbb{Q}$. Então, pelo Lema (2.6.8), $Y_n \xrightarrow{q.t.p.} Y_\infty$.

Queremos mostrar então que $P(|Y_\infty| < \infty) = 1$.

Como $|Y_n| = 2Y_n^+ - Y_n$ e $E(Y_n|\mathcal{F}_0) \geq Y_0$, segue que

$$E(|Y_n||\mathcal{F}_0) = 2E(Y_n^+|\mathcal{F}_0) - E(Y_n|\mathcal{F}_0) \leq 2E(Y_n^+|\mathcal{F}_0) - Y_0.$$

Nesta última desigualdade usamos o fato de $E(Y_n|\mathcal{F}_0) \geq E(Y_0|\mathcal{F}_0)$, uma vez que (Y_n) é submartingal.

Pelo Lema de Fatou,

$$E(|Y_\infty||\mathcal{F}_0) = E(\liminf |Y_n||\mathcal{F}_0) \stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \liminf E(|Y_n||\mathcal{F}_0) \leq 2 \liminf E(Y_n^+|\mathcal{F}_0) - Y_0$$

Definamos $Z = \liminf E(Y_n^+|\mathcal{F}_0)$. Então,

$$E(Z) = E(\liminf E(Y_n^+|\mathcal{F}_0)) \stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \liminf \underbrace{(E(E(Y_n^+|\mathcal{F}_0)))}_{E(Y_n^+) \leq M} \leq M \Rightarrow E(Z) \leq M.$$

Segue então que $Z <^{\text{q.t.p.}} \infty \Rightarrow E(|Y_\infty||\mathcal{F}_0) <^{\text{q.t.p.}} \infty \Rightarrow P(|Y_\infty| < \infty|\mathcal{F}_0) = 1$. Então,

$$P(|Y_\infty| < \infty) = E(\mathbb{I}_{\{|Y_\infty| < \infty\}}) = E(E(\mathbb{I}_{\{|Y_\infty| < \infty\}}|\mathcal{F}_0)) = E(P(|Y_\infty| < \infty|\mathcal{F}_0)) = 1$$

□

Capítulo 3

Urna de Pólya

Apresentamos neste último capítulo o problema da urna de Pólya que é um exemplo tanto de cadeias de Markov, apresentadas no Capítulo 1, quanto de convergência de martingais, apresentada no Capítulo 2. Entretanto, antes de entrarmos no modelo da urna de Pólya, precisamos apresentar na primeira seção deste capítulo a distribuição beta, para a qual a distribuição dos sorteios das bolas pretas deverá convergir. Posteriormente, passaremos à versão mais simples da urna de Pólya, considerando uma urna com apenas duas bolas e acrescentando uma bola a cada sorteio. Posteriormente, faremos o caso um pouco mais geral, no qual a urna começa com mais de duas bolas e adiciona-se a bolas a cada sorteio.

Neste capítulo nossas referências básicas são: [2], [6] e [7].

3.1 Distribuição Beta

Nesta seção apresentaremos a distribuição beta, sua densidade e função característica para que possamos apresentar os dois casos da urna de Pólya nas duas seções subseqüentes.

Definição 3.1.1. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$. Uma variável aleatória possui uma **distribuição beta** se sua densidade é dada por*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}, & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $\beta(a, b)$ refere-se à função Beta, dada por:

$$\beta(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \quad (3.2)$$

A distribuição beta é utilizada para modelar fenômenos aleatórios cujos valores possíveis encontram-se em um intervalo $[c, d]$. Ao tomar c como a origem e $d - c$ como a unidade de medida, o intervalo $[c, d]$ pode ser transformado no intervalo $[0, 1]$.

Quanto $a = b$, a densidade da beta é simétrica em $\frac{1}{2}$. Para o caso em que $a = b = 1$, temos a distribuição uniforme. Se $b > a$, a densidade é assimétrica à esquerda (no sentido

que valores menores tornam-se mais prováveis) como pode ser visto na figura (3.1).

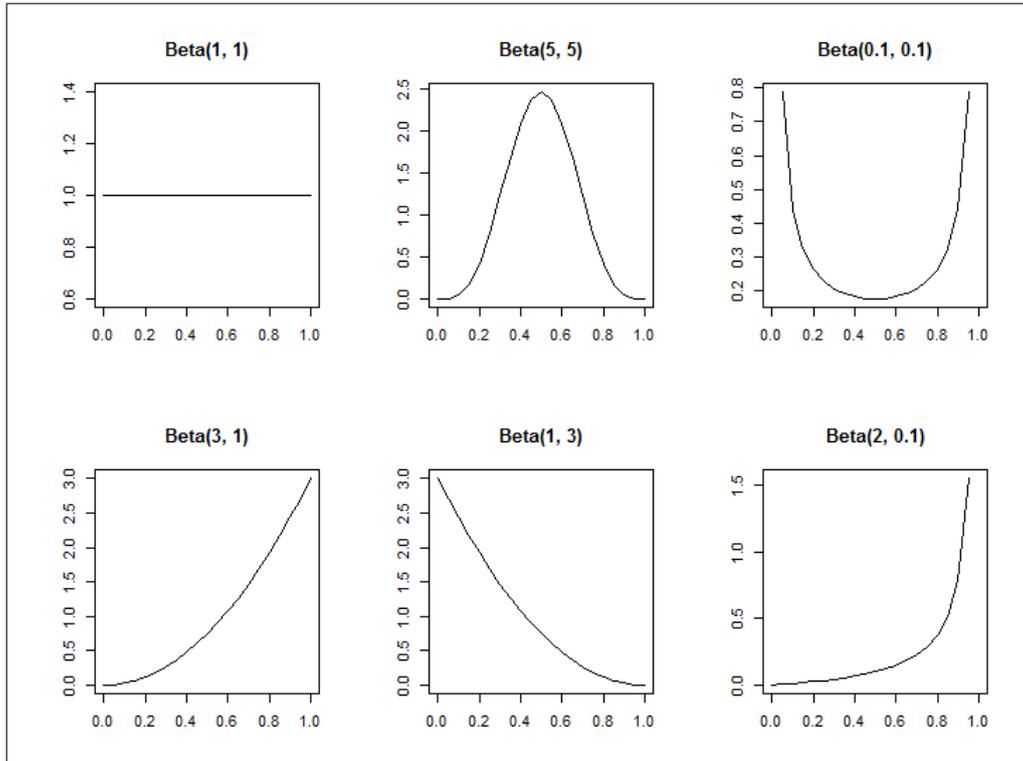


Figura 3.1: Densidade da distribuição beta para vários valores dos parâmetros a e b .

Por fim, a função característica da distribuição $Beta(a, b)$ é dada por:

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_0^1 e^{itx} f_X(x) dx = \frac{1}{\beta(a, b)} \int_0^1 e^{itx} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

3.2 Urna de Pólya: caso mais simples

Considere uma urna contendo uma bola branca e uma bola preta. Sorteia-se aleatoriamente uma bola da urna. Esta bola é retornada à urna juntamente com outra bola adicional da mesma cor da bola sorteada. Se existem j bolas pretas na urna após k bolas terem sido adicionadas, ou seja, após k sorteios, teremos $k + 2$ bolas dentro da urna e a probabilidade de se sortear outra bola preta será de $\frac{j}{k+2}$. A sequência de pares ordenados que representa o número de bolas pretas e brancas é uma cadeia de Markov com espaço de estados $\{1, 2, \dots\}^2$. Um resultado surpreendente sobre este modelo da urna de Pólya é que a distribuição do número de bolas pretas após k sorteios é uniforme, como veremos a seguir.

Lema 3.2.1. *Seja B_k o número de bolas pretas na urna de Pólya após k bolas terem sido adicionadas. A distribuição de B_k é uniforme em $\{1, 2, \dots, k + 1\}$.*

Demonstração. Sejam U_0, U_1, \dots, U_n variáveis aleatórias independentes e uniformemente distribuídas no intervalo $[0, 1]$ e $L_k = |\{l \in \{0, 1, \dots, k\}; U_l \leq U_0\}|$ o número de U_0, U_1, \dots, U_k que são menores ou iguais a U_0 .

O evento $\{L_k = j, L_{k+1} = j + 1\}$ ocorre se e somente se U_0 é o $(j + 1)$ -ésimo menor elemento e U_{k+1} é um dos $(j + 1)$ menores dentre $\{U_0, U_1, \dots, U_{k+1}\}$. Existem $j \cdot (k!)$ ordenações de $\{U_0, U_1, \dots, U_{k+1}\}$ satisfazendo esse evento. Uma vez que as U_l são uniformemente distribuídos, todas as $(k + 2)!$ ordenações são equiprováveis, e

$$P\{L_k = j, L_{k+1} = j + 1\} = \frac{j(k!)}{(k + 2)!} = \frac{j}{(k + 2)(k + 1)}. \quad (3.3)$$

Como cada ordenação de $\{U_0, U_1, \dots, U_k\}$ é equiprovável, segue que $P\{L_k = j\} = \frac{1}{k+1}$. Então temos:

$$P\{L_{k+1} = j + 1 | L_k = j\} = \frac{P\{L_{k+1} = j + 1, L_k = j\}}{P\{L_k = j\}} = \frac{j}{(k + 2)(k + 1)} \frac{k + 1}{1} = \frac{j}{k + 2}. \quad (3.4)$$

Como $L_{k+1} \in \{j, j + 1\}$, dado que $L_k = j$, segue que

$$P\{L_{k+1} = j | L_k = j\} = 1 - P\{L_{k+1} = j + 1 | L_k = j\} = 1 - \frac{1}{k + 2} = \frac{k - j + 2}{k + 2}. \quad (3.5)$$

Como L_1 e B_1 possuem a mesma distribuição, pelas equações (3.4) e (3.5), as sequências $(L_k)_{k=1}^n$ e $(B_k)_{k=1}^n$ possuem as mesmas probabilidades de transição, então as sequências $(L_k)_{k=1}^n$ e $(B_k)_{k=1}^n$ possuem a mesma distribuição.

Uma vez que, após o conjunto ter sido ordenado, a posição de U_0 em $\{U_0, U_1, \dots, U_k\}$ é uniforme entre as $k + 1$ posições possíveis, temos que L_k é uniformemente distribuído em $\{1, \dots, k + 1\}$. Concluimos então que B_k é uniforme em $\{1, 2, \dots, k + 1\}$. \square

3.3 Urna de Pólya caso geral

Passaremos agora ao segundo caso da urna de Pólya. À diferença do primeiro, neste caso a configuração inicial da urna pode conter mais de uma bola de cada cor e são colocadas na urna uma quantidade $a \geq 1$ de bolas após o sorteio, ao invés de apenas uma. Portanto, pode-se dizer que este caso constitui uma generalização do primeiro.

Considere uma urna contendo certa quantidade inicial fixa de bolas brancas, $W_0 \geq 1$, e de bolas pretas, $B_0 \geq 1$. Sorteia-se uma bola aleatoriamente e, posteriormente, retorna-se a bola sorteada juntamente com $a \in \mathbb{N}$ bolas adicionais da mesma cor da bola sorteada. Repita o experimento n vezes e denote por B_n o número de bolas pretas na urna após o n -ésimo sorteio e reposição na urna.

Vale a pena ressaltar que se $a = 1$, temos o caso mais simples da urna de Pólya e, embora estamos tratando de $a \in \mathbb{N}$, cabe uma observação para os casos particulares com a assumindo valores fora dos naturais. O primeiro deles seria o caso em que $a = 0$, no qual temos sorteios com reposição. O segundo seria o caso em que $a = -1$, assim, temos sorteios sem reposição.

Após essa observação, damos sequência com o lema que mostra qual a distribuição limite

da proporção de bolas pretas sobre o total de bolas.

Teorema 3.3.1. *A sequência $(\rho_n)_{n \geq 0}$, com $\rho_n = \frac{B_n}{B_n + W_n}$ converge q.t.p. para uma variável aleatória ρ_∞ cuja distribuição é uma Beta $\left(\frac{B_0}{a}, \frac{W_0}{a}\right)$.*

Demonstração. Seja

$$X_n = \begin{cases} 1, & \text{se uma bola preta foi escolhida no } n\text{-ésimo sorteio,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Defina $\mathcal{F}_n = \sigma(X_i; 1 \leq i \leq n)$ como a filtração natural desta sequência e note que, $(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ segue uma distribuição $Ber\left(\frac{B_n}{B_n + W_n}\right)$.

Mostraremos que $(\rho_n)_{n \geq 0}$ é um \mathcal{F} -martingal.

$$\begin{aligned} E(\rho_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= E\left(\frac{B_{n+1}}{B_{n+1} + W_{n+1}} \middle| \mathcal{F}_n\right) = E\left(\frac{B_{n+1}}{B_0 + W_0 + (n+1)a} \middle| \mathcal{F}_n\right) \\ &= \frac{1}{B_0 + W_0 + (n+1)a} E\left(\underbrace{B_n + aX_{n+1}}_{B_{n+1}} \middle| \mathcal{F}_n\right) = \frac{1}{B_0 + W_0 + (n+1)a} \left(B_n + a \underbrace{\frac{B_n}{B_n + W_n}}_{\stackrel{(*)}{=} E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)} \right) \\ &= \frac{B_n(B_n + W_n + a)}{(B_0 + W_0 + (n+1)a)(B_n + W_n)} = \frac{B_n(B_n + W_n + a)}{(B_n + W_n + a)(B_n + W_n)} = \frac{B_n}{B_n + W_n} = \rho_n \end{aligned}$$

Onde em $(*)$ usamos o fato de que $(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ segue uma distribuição $Ber\left(\frac{B_n}{B_n + W_n}\right)$.

Como $E(\rho_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \rho_n$, segue que a sequência (ρ_n) é um martingal e, por definição, um submartingal. Note que $\rho_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Então o Teorema da convergência de martingais garante que existe uma variável aleatória ρ_∞ tal que $\rho_n \xrightarrow{q.t.p.} \rho_\infty, n \rightarrow \infty$.

Agora que verificamos que a sequência ρ_n converge para uma variável aleatória ρ_∞ , podemos estudar a distribuição desta variável.

Denotemos o conjunto $\{k \text{ bolas pretas nos primeiros } n \text{ sorteios}\}$ por B_k^n . Segue então que

$$P(B_k^n) = \binom{n}{k} \frac{B_0(B_0 + a) \dots (B_0 + (k-1)a) W_0(W_0 + a) \dots (W_0 + (n-k-1)a)}{(B_0 + W_0)(B_0 + W_0 + a) \dots (B_0 + W_0 + (n-1)a)}. \quad (3.6)$$

Um resultado interessante que obtemos com a Equação (3.6) é que a sequência de X_n não possui independência entre seus termos, entretanto, a probabilidade de retirar k bolas pretas nos primeiros n sorteios, $(0 \leq k \leq n)$ não depende da sequência de cores sorteadas, mas apenas do número acumulado de cada cor. Assim, as variáveis X_1, X_2, \dots, X_n da urna de Pólya são permutáveis, mas não independentes.

Dividindo todos os termos do numerador e o denominador de (3.6) por a , e chamando $\frac{B_0}{a}$ e $\frac{W_0}{a}$ de B e W , respectivamente e usando os fatos¹: i) $\Gamma(B) = (B-1)!$ e ii) $B\Gamma(B) = \Gamma(B+1)$,

¹Neste texto usamos a Função Gama (denota-se Γ) definida por: $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$, onde $z > 0$, e posteriormente usaremos a Função Beta (denota-se β) definida por uma composição de Funções Gama: $\beta(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{\Gamma(B+k)}{\Gamma(B)} \frac{\Gamma(W+n-k)}{\Gamma(W)}}{\frac{B(B+1)\dots(B+k-1)W(W+1)\dots(W+(n-k-1))}{(B+W)(B+W+1)(B+W+(n-1))}} = \frac{\Gamma(B+k)}{\Gamma(B)} \frac{\Gamma(W+n-k)}{\Gamma(W)} \frac{\Gamma(B+W)}{\Gamma(B+W+n)} \\ & \frac{\Gamma(B+W+n)}{\Gamma(B+W)} \\ & = \frac{\beta(B+k, W+n-k)}{\beta(B, W)} = \frac{\beta\left(\frac{B_0}{a} + k, \frac{W_0}{a} + n - k\right)}{\beta\left(\frac{B_0}{a}, \frac{W_0}{a}\right)}. \end{aligned}$$

isto é:

$$P(B_k) = \binom{n}{k} \frac{\beta\left(\frac{B_0}{a} + k, \frac{W_0}{a} + n - k\right)}{\beta\left(\frac{B_0}{a}, \frac{W_0}{a}\right)}.$$

Tomando a função característica, obtemos:

$$\begin{aligned} \phi_{\rho_n}(t) &= E(e^{it\rho_n}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{it\frac{B_0+ka}{B_0+W_0+na}} \int_0^1 p^k (1-p)^{n-k} \frac{p^{B-1}(1-p)^{W-1}}{\beta(B, W)} dp \\ &= e^{it\frac{B_0}{B_0+W_0+na}} \frac{1}{\beta(B, W)} \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(p e^{it\frac{a}{B_0+W_0+na}}\right)^k (1-p)^{n-k} p^{B-1}(1-p)^{W-1} dp \end{aligned}$$

pelo teorema binomial,

$$= e^{it\frac{B_0}{B_0+W_0+na}} \frac{1}{\beta(B, W)} \int_0^1 \left(p e^{it\frac{a}{B_0+W_0+na}} + (1-p)\right)^n p^{B-1}(1-p)^{W-1} dp$$

Tomando $\left(p e^{it\frac{a}{B_0+W_0+na}} + (1-p)\right)^n$ e dividindo o numerador e o denominador do expoente $it\frac{a}{B_0+W_0+na}$ por a , obtemos

$$\begin{aligned} \left(p e^{it\frac{a}{B_0+W_0+na}} + (1-p)\right)^n &= \left[p \left(1 + \frac{it}{B+W+n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + (1-p)\right]^n \\ &= \left[p + \frac{itp}{B+W+n} + O\left(\frac{p}{n^2}\right) + 1-p\right]^n \\ &= \left[1 + \frac{itp}{B+W+n} + O\left(\frac{p}{n^2}\right)\right]^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{itp}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Então, pelo Teorema da convergência dominada, e tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{it\frac{B_0}{B_0+W_0+na}} \frac{1}{\beta\left(\frac{B_0}{a}, \frac{W_0}{a}\right)} \int_0^1 e^{itp} p^{\frac{B_0}{a}-1} (1-p)^{\frac{W_0}{a}-1} dp = \frac{1}{\beta\left(\frac{B_0}{a}, \frac{W_0}{a}\right)} \int_0^1 e^{itp} p^{\frac{B_0}{a}-1} (1-p)^{\frac{W_0}{a}-1} dp$$

que é a função característica da distribuição $Beta\left(\frac{B_0}{a}, \frac{W_0}{a}\right)$.

Então, pelo Teorema da continuidade de Paul Levy, temos que ρ_∞ converge para uma distribuição $Beta\left(\frac{B_0}{a}, \frac{W_0}{a}\right)$. \square

Referências Bibliográficas

- [1] BARTLE, R. G.; The Elements of Integration. John Wiley & Sons, Inc, 1966.
- [2] DURRET, R.; Probability: theory and examples, 4th ed. Cambridge: University Press, 2010.
- [3] FRIEDLI, S.; Probabilidade 2. Notas de aula.
- [4] GRIMMETT, G., STIRZAKER, D.; Probability and Random Processes, 3rd ed. Oxford: University Press, 2007.
- [5] JAMES, B.; Probabilidade: um curso em nível intermediário, 3.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
- [6] KARLIN, S.; A First Course in Stochastic Processes, 2nd ed. Academic Press, Inc, 1975.
- [7] LEVIN, D. A., PERES, Y., WILMER, E. L.; Markov Chains and Mixing Times. American Mathematical Society, 2006.