

Arnulfo Miguel Rodríguez Peña

**Fórmulas residuais de tipo Bott e invariante de
Futaki para orbifolds complexos**

Belo Horizonte

Março - 2014

Arnulfo Miguel Rodríguez Peña

**Fórmulas residuais de tipo Bott e invariante de Futaki
para orbifolds complexos**

Tese apresentada como requisito à obtenção
do título de doutor pelo Programa de Pós-
Graduação em Matemática de UFMG.

Universidade Federal De Minas Gerais – UFMG

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Orientadores:

Maurício Corrêa Júnior e

Márcio Gomes Soares

Belo Horizonte

Março - 2014

Agradecimentos

Agradeço, de modo muito especial, aos meus pais Arnulfo Rodríguez Córdova e Lidia Peña Castillo e a toda minha família.

Agradeço a meu amor Alina pela paciência e companheirismo.

Sou grato ao meu professor Alex Molina Sotomayor que durante minha graduação na UNFV no Perú, me estimulou a aprender a Matemática.

Na PUCP encontrei um ambiente ideal para o estudo da Matemática e contei com o estímulo e a amizade de funcionários e de meus professores Rudy Rosas, Christian Valqui, Percy Fernandez, Julio Alcantara, Christian Figueroa e Jesús Zapata. Agradeço em especial aos professores Rudy Rosas (meu orientador do mestrado, com quem aprendi muitas coisas) e Percy Fernandez pelas suas recomendações para o doutorado na UFMG no Brasil.

Agradeço, de modo especial, aos meus professores na UFMG, Rogério Santos Mol, Fábio E. Brochero Martinez, Victor Guerassimov, Márcio Gomes Soares, Maurício Corrêa Júnior e André Gimenez Bueno.

Agradeço de modo muito especial aos meus orientadores Maurício Corrêa Júnior e Márcio Gomes Soares pelo apoio e estímulo, orientando-me de modo objetivo e correto, permitindo-me trabalhar com liberdade e tranquilidade, pelos ensinamentos e por acreditar em meu trabalho. Também sou grato pela sugestão do tema da tese, bem como pelas muitas conversas durante a elaboração da tese, das quais resultaram vários dos resultados deste trabalho, conversas que só fizeram aumentar meu gosto pela Matemática e minha admiração pelas suas pessoas.

Agradeço também, de modo especial, ao Prof. Arturo Fernández Pérez com quem tive valiosas conversas durante todo o percurso, sugerindo inclusive belas aplicações no resultado final deste trabalho. Também sou grato pela motivação e sua amizade. Agradeço também de modo especial a Fábio E. Brochero Martinez pela sua disposição, ajuda e

colaboração em este trabalho.

Sou muito grato aos membros da banca Renato Vidal da Silva Martins (UFMG), Marcos Benevenuto Jardim (UNICAMP), José Omegar Calvo Andrade (IMPA), Rogério Santos Mol (UFMG), Gilcione Nonato Costa (UFMG) pelos comentários e sugestões.

Finalmente, agradeço a Moisés Toledo pelos gráficos da tese, a Edwin Lopez Bambaren pela sua ajuda nos problemas de Latex, a secretaria (Andréa e Kelly) pelo profissionalismo sempre presente e pela amizade, a todos meus amigos na UFMG, a UFMG-Capes-CNPQ-Reuni pelo suporte financeiro durante toda a realização deste trabalho. Gostaria de agradecer, de uma maneira geral, a todas as pessoas que contribuíram para a realização desse sonho.

A cada dia sabemos mais e entendemos menos.

(Albert Einstein)

Resumo

Este trabalho é dividido em duas partes.

Na primeira parte do trabalho, no teorema 2.1, daremos uma primeira versão das fórmulas de Bott para um orbifold complexo compacto e com singularidades isoladas. No teorema 2.4, usando uma boa resolução e a classe de Chern local "top" do orbifold, daremos uma segunda versão do teorema 2.1.

Uma consequência interessante do teorema 2.1 é sua aplicação nos espaços projetivos ponderados $\mathbb{P}_\omega^n = \mathbb{P}(w_0, \dots, w_n)$. Por exemplo, uma vez garantida a existência de folheações holomorfas não triviais em \mathbb{P}_ω^n (proposição 2.12), deduziremos uma fórmula para a soma dos números de Milnor de um orbifold de uma folheação holomorfa com singularidades isoladas em \mathbb{P}_ω^n (corolário 2.13); em particular tal fórmula é uma obstrução para ter uma folheação não singular em \mathbb{P}_ω^n (corolário 2.14). No corolário 2.15, apresentaremos algumas relações entre o conjunto singular da folheação e o conjunto singular de \mathbb{P}_ω^2 . Finalizamos com alguns exemplos.

Como outra aplicação do teorema 2.1, similarmente ao caso suave, introduziremos os números de Baum-Bott orbifold associados as singularidades de uma folheação com singularidades isoladas em uma superfície orbifold compacta e com singularidades isoladas. Então, no teorema 2.19, deduziremos uma fórmula para a soma dos números de Baum-Bott orbifold para uma folheação com singularidades isoladas em \mathbb{P}_ω^2 . Consequentemente, nos corolários 2.22 e 2.24, daremos uma caracterização das folheações com singularidades radiais em \mathbb{P}_ω^2 . Finalizamos esta parte com alguns exemplos.

Como uma aplicação final do teorema 2.1, temos o teorema 2.25. Este teorema, junto com o corolário 2.13, nos permite dar uma cota para o grau de uma curva quase suave irredutível e invariante por uma folheação, em função do grau da folheação em \mathbb{P}_ω^2 ; isto é dado no corolário 2.28, que é o Problema de Poincaré em \mathbb{P}_ω^2 , foi dado primeiro em [12] (nós generalizamos este resultado: A hipótese $Sing(\mathcal{F}) \cap Sing(\mathbb{P}_\omega^2) = \emptyset$ não é necessária). De maneira mais geral, no teorema 2.29, daremos uma cota para o grau de uma hipersuperfície quase suave irredutível

invariante por uma folheação, em função do grau da folheação em \mathbb{P}_ω^n . Este último teorema é um trabalho em colaboração com Fabio E. Brochero e Maurício Corrêa Jr. (Veja [7]).

No teorema 2.4, com algumas hipóteses, daremos uma segunda versão da fórmula de Bott em um orbifold compacto com singularidades isoladas, em função de uma boa resolução do orbifold e da classe de Chern local "top", que é definida localmente entorno de cada singularidade do orbifold. Daremos uma interpretação geométrica da classe de Chern local "top" para folheações no corolário 2.5. É bem conhecido que a k -ésima superfície de Hirzebruch \mathcal{H}_k , para $k > 1$, é uma boa resolução de $\mathbb{P}(1 : 1 : k)$ e a partir disso derivamos o teorema 2.17.

Na segunda parte do trabalho, seguindo W. Ding e G. Tian [15], no teorema 3.5 daremos uma demonstração da fórmula de localização do invariante de Calabi-Futaki para um orbifold complexo compacto e com singularidades isoladas (o anulamento do invariante é uma condição necessária para a existência de métricas Kahler-Einstein no orbifold). Como aplicação dessa teoria, no teorema 3.8 nós estudaremos a não existência de métricas Kahler-Einstein nos espaços projetivos ponderados singulares bem formados. Finalizamos esta parte com alguns exemplos.

Palavras-chaves: Orbifolds, V -fibrados, classes de Chern orbifold (globais e locais), boa resolução, espaço projetivo ponderado, folheação holomorfa, superfície de Hirzebruch, número de Baum-Bott orbifold, problema de Poincaré, orbifold Kähler, orbifold Kähler-Einstein, invariante de Futaki orbifold.

Abstract

This work is divided into two parts.

In the first part of the work, in Theorem 2.1, we give a first version of Bott's formula for a compact complex orbifold with isolated singularities. In Theorem 2.4, using a good resolution and the local Chern class "top" of the orbifold, we give a second version of theorem 2.1.

An interesting consequence of theorem 2.1 is its application to weighted projective spaces $\mathbb{P}_\omega^n = \mathbb{P}(w_0, \dots, w_n)$. For example, since we guarantee the existence of nontrivial holomorphic foliations in \mathbb{P}_ω^n (proposition 2.12), we deduce a formula for the sum of the Milnor numbers of an orbifold of a holomorphic foliation with isolated singularities in \mathbb{P}_ω^n (corollary 2.13); in particular such a formula is an obstruction to a non-singular foliation in \mathbb{P}_ω^n (corollary 2.14). In corollary 2.15, we present some relations between the singular set of the foliation and the singular set of \mathbb{P}_ω^2 . We end with some examples.

As another application of theorem 2.1, similar to the smooth case, we introduce the Baum-Bott numbers associated with the singularities of a foliation with isolated singularities in a compact orbifold surface with isolated singularities. Then, in the Theorem 2.19, we deduce a formula for the sum of the Baum-Bott numbers orbifold for a foliation with isolated singularities in \mathbb{P}_ω^2 . Consequently, in the corollaries 2.22 and 2.24, we give a characterization of the foliations with radial singularities in \mathbb{P}_ω^2 . We end this part with some examples.

As a final application of the theorem 2.1, we have theorem 2.25. This theorem, together with corollary 2.13, allows us to give a limit to the degree of an almost smooth curve irreducible invariant by a foliation, as a function of the degree of the foliation in \mathbb{P}_ω^2 ; this is done in corollary 2.28, which is Poincaré Problem in \mathbb{P}_ω^2 , was given for the first time in [12] (we generalize this result: The hypothesis $Sing(\mathcal{F}) \cap Sing(\mathbb{P}_\omega^2) = \emptyset$ is not necessary). More generally, in theorem 2.29, we give a limit to the degree of an almost smooth hypersurface irreducible invariant by a foliation, as a function of the degree of the foliation in \mathbb{P}_ω^n . This last theorem is a work in collaboration with Fabio E. Brochero and Maurício Corrêa Jr. (see [7]).

In the theorem 2.4, under certain hypotheses, we give a second version of Bott's formula in a compact orbifold with isolated singularities, as a function of a good resolution of the orbifold and the local Chern class "top", which is defined locally around each singularity of the orbifold. We give a geometric interpretation of the local Chern class "top" for foliations in corollary 2.5. It is well known that the k -th surface Hirzebruch \mathcal{H}_k , for $k > 1$, is a good resolution of $\mathbb{P}(1 : 1 : k)$ and from this we derive theorem 2.17.

In the second part of the work, following W. Ding and G. Tian [15], we give in Theorem 3.5 a demonstration of the location formula for the Calabi-Futaki invariant for a compact complex orbifold with isolated singularities (the annulment of the invariant is a necessary condition for the existence of Kähler-Einstein metrics on the orbifold). As an application of this theory, we study in theorem 3.8 the non-existence of Kähler-Einstein metrics in well-formed singular weighted projective spaces. We end is part with some examples.

Key-words: Orbifolds, V -bundles, Chern classes orbifold (global and local), good resolution, weighted projective spaces, holomorphic foliation, Hirzebruch surface, number of Baum-Bott orbifold, Poincaré problem, Kähler orbifold, Kähler-Einstein orbifold, Futaki invariant orbifold.

Sumário

Introdução	10
1 Preliminares	14
1.1 Orbifolds	14
1.2 V-Feixes e V-Fibrados	16
1.3 Integração em orbifolds	22
1.4 Bons Representantes e Boa Resolução	22
1.5 Classes de Chern e Classes de Chern locais	24
1.6 Orbifold Kähler	27
2 Fórmulas residuais de tipo Bott para orbifolds complexos e aplicações . . .	29
2.1 Fórmulas residuais de tipo Bott	29
2.2 Aplicações: folheações em $\mathbb{P}^n(\omega)$	35
2.2.1 Espaço projetivo ponderado $\mathbb{P}^n(\omega)$	35
2.2.2 Fibrados de linhas em \mathbb{P}^n_ω	36
2.2.3 Folheações de dimensão um em \mathbb{P}^n_ω	38
2.2.4 Aplicações em \mathbb{P}^n_ω	39
2.3 Problema de Poincaré em espaços projetivos ponderados	55
3 Invariante de Futaki para orbifolds complexos	71
3.1 Invariante de Futaki em orbifolds	71
3.2 Fórmula de localização do invariante de Calabi-Futaki para orbifolds complexos	74
Referências	86

Introdução

Neste trabalho, seguindo Satake [32], exploraremos as fórmulas de localização de Bott para orbifolds complexos com singularidades isoladas. Este trabalho é dividido em duas partes. Na primeira parte daremos uma versão das fórmulas de Bott para um orbifold compacto com singularidades isoladas e suas diversas aplicações nas folheações holomorfas 1-dimensionais nos espaços projetivos ponderados. Na segunda parte provaremos a fórmula de localização do invariante de Calabi-Futaki para um orbifold Kähler compacto com singularidades isoladas (enunciado sem prova por W. Ding e G. Tian em 1992-[15]), o anulamento do invariante é uma condição necessária para a existência de métricas Kähler-Einstein no orbifold. Como aplicação mostraremos que os espaços projetivos ponderados singulares não admitem métricas Kähler-Einstein. Nas duas partes deste trabalho, e nas suas aplicações, exibimos diversos exemplos.

Orbifolds, ou V -variedades, foram introduzidos por I. Satake nos anos 50 (veja[32]) e foram redescobertos por W. Thurston nos anos 70 no contexto de geometria das 3-variedades (veja [35]). Tais objetos podem apresentar singularidades, mas elas são de tipo quociente. Mais formalmente, um orbifold M é um espaço complexo com a seguinte propriedade: cada ponto $p \in M$ possui uma vizinhança que é da forma U/G_p , onde U é um espaço complexo de dimensão n e G_p é um grupo finito de automorfismos de U . Então, se denotarmos o conjunto singular de M por $Sing(M)$, uma vez que o grupo agindo localmente em torno de um ponto não singular (ou regular) é trivial $G_p = \{e\}$, temos que $Reg(M) := M - Sing(M)$ é uma variedade suave.

Entre os objetos mais importantes associados aos orbifolds, temos os V -fibrados e as classes de Chern. Podemos pensar nos V -fibrados como fibrados no sentido usual na parte regular do orbifold $Reg(M)$ que se estendem naturalmente a todo M , localmente é um quociente de um fibrado no sentido usual pela ação do grupo G_p que age localmente no fibrado. O seja, localmente na vizinhança U de um ponto $p \in M$, dois pontos na mesma orbita do grupo G_p tem fibras na mesma orbita pela ação do grupo G_p no fibrado. As

classes de Chern podem ser pensadas como as clases de Chern usuais na parte regular $Reg(M)$ de M e que estendem naturalmente a todo o orbifold M , localmente são dadas como formas invariantes pela ação local do grupo que age localmente. Analogamente são definidas formas e campos em um orbifold.

Trabalharemos com singularidades abelianas, ou seja os grupos agindo localmente são abelianos.

Fórmulas de Bott para orbifolds complexos

Um dos resultados mais importantes nesta parte é o seguinte:

Teorema 0.1 *Seja M um orbifold compacto de dimensão n e com singularidades isoladas. Seja L um V -fibrado vetorial de posto 1 sobre M e ξ uma seção holomorfa de $TM \otimes L$, cujos zeros são isolados. Se P é um polinômio homogêneo invariante de grau n , então*

$$\int_M P(TM - L^\vee) = \sum_{p/\xi(p)=0} \frac{1}{\#G_p} Res_{\tilde{p}} \left\{ \frac{P(J\tilde{\xi})d\tilde{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{z}_n}{\tilde{\xi}_1 \cdots \tilde{\xi}_n} \right\},$$

onde $J\tilde{\xi} = \left(\frac{\partial \tilde{\xi}_i}{\partial \tilde{z}_j} \right)$ e $Res_{\tilde{p}} \left\{ \frac{P(J\tilde{\xi})d\tilde{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{z}_n}{\tilde{\xi}_1 \cdots \tilde{\xi}_n} \right\}$ é o resíduo de Grothendieck.

Seja M um orbifold, ξ um campo com singularidades isoladas. Dado $p \in M$, seja $(\tilde{U}, G_p, \varphi)$ uma carta de uma vizinhança U de p , o **índice de ξ em p** é definido por

$$\mathcal{I}_p(\xi) = \frac{1}{\#G_p} \mathcal{I}_{\tilde{p}}(\tilde{\xi}),$$

onde $\mathcal{I}_{\tilde{p}}(\tilde{\xi})$ é o índice de Poincaré Hopf de $\tilde{\xi}$ em \tilde{p} .

Com esta definição, outro dos resultados mais importantes de nosso trabalho é o seguinte

Teorema 0.2 *Nas hipóteses do teorema 0.1, seja $\sigma : \tilde{M} \rightarrow M$ uma boa resolução com $\sigma(D) = Sing(M)$. Suponha que $(\sigma^*L)^{VV}$ é localmente livre em M , então:*

$$\int_{\tilde{M}} c_n((\sigma^*(TM \otimes L))^{VV}) = \sum_{p \in Sing(M)} \int_{\tilde{M}} c_n(p, (\sigma^*(TM \otimes L))^{VV}) + \sum_{p/\xi(p)=0} \mathcal{I}_p(\xi).$$

Em particular suponha que $\sigma^*(TM \otimes L)$ é reflexivo. Sejam $\xi \in H^0(M, TM \otimes L)$ e $\sigma^*\xi \in H^0(\tilde{M}, \sigma^*(TM \otimes L))$, então

$$\sum_{p \in \text{Sing}(M)} \int_{\tilde{M}} c_n(p, \sigma^*(TM \otimes L)) = \sum_{\tilde{p} \in D/\sigma^*\xi(\tilde{p})=0} \mathcal{I}_{\tilde{p}}(\sigma^*\xi) - \sum_{p \in \text{Sing}(M)/\xi(p)=0} \mathcal{I}_p(\xi).$$

Aqui, $c_n(p, \cdot)$ denota a n -ésima classe de Chern local na singularidade p , ela é definida localmente em torno de cada singularidade do orbifold (capítulo 1.5).

Todas as aplicações e os diversos exemplos da primeira parte da tese são consequência (mas não direta) destes dois teoremas. Nas aplicações desta seção vale a pena mencionar uma (ela é um trabalho em colaboração de Fabio E. Brochero e Maurício Corrêa Jr. [7]), ela consiste em limitar o grau de uma hipersuperfície quase suave que é um invariante, em função do grau de uma folheação holomorfa 1-dimensional em um espaço projetivo ponderado. Este problema é conhecido como o Problema de Poincaré e foi tratado por primeira vez por H. Poincaré em 1981-[29]. Este problema bem como suas generalizações foram tratados por diversos autores, entre eles: D. Cerveau e A. Lins Neto em 1991-[10], M. M. Carnicer em 1994-[9], M. G. Soares em 1997-[33], M. Brunella e L. G. Mendes em 2000-[8], J. V. Pereira em 2002-[28], E. Esteves e S. Kleiman em 2003-[17] e M. Corrêa Jr e M. G. Soares em 2012-[12]. Em [33], M. G. Soares da uma primeira generalização do problema de Poincaré em \mathbb{P}^n e em [12], M. Corrêa Jr e M. G. Soares dão a primeira generalização do problema de Poincaré em $\mathbb{P}^2(w_0, w_1, w_2)$, o espaço projetivo ponderado 2-dimensional nos pesos w_0, w_1, w_2 . Então a generalização que daremos é para $\mathbb{P}^n(\omega)$, o espaço projetivo ponderado n -dimensional nos pesos $\omega = (w_0, \dots, w_n)$, ela é

Teorema 0.3 [7] *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa de dimensão um e com singularidades isoladas em \mathbb{P}_ω^n , $n \geq 3$. Seja $V = \{P = 0\} \hookrightarrow \mathbb{P}_\omega^n$ uma hipersuperfície quase suave, irredutível e invariante por \mathcal{F} . Suponha que $\deg(\mathcal{F}) \geq |\omega| + 1$. Então*

$$\deg(V) < \deg(\mathcal{F}) + \alpha_n |\omega| - 1,$$

$$\text{onde } \alpha_n = \begin{cases} \text{raiz positiva de } x(x+1)^n - 2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \alpha_{n-1} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Fórmula de localização do invariante de Calabi-Futaki para orbifolds Kähler compactos e aplicações

Sejam M um n -orbifold Kähler compacto com singularidades isoladas e X um campo de vetores holomorfo com singularidades isoladas não degeneradas em M . Denotemos $Sing(X) = \{p_1, \dots, p_k\}$. Para cada $p_\alpha \in Sing(X)$, definimos um endomorfismo não singular $L_\alpha(X) : T_p M \rightarrow T_p M$, dado por $L_\alpha(X)(Y) = D_Y X$. Denotemos por K_α a forma curvatura da métrica induzida em $T_p M$. Nos demonstraremos o seguinte

Teorema 0.4 *Denotemos por $f_M(X)$ o invariante de Calabi-Futaki em M (capítulo 3.1). Com as notações feitas acima, temos*

$$f_M(X) = \frac{1}{n+1} \sum_{p/X(p)=0} \frac{1}{\#G_p} \frac{Tr^{n+1}(L_p(X))}{Det(L_p(X))}.$$

Como aplicação deste teorema, demonstraremos que os espaços projetivos ponderados singulares bem formados não admitem métricas Kähler-Einstein.

1 Preliminares

1.1 Orbifolds

Um orbifold pode ser visto localmente como um espaço quociente de um espaço euclidiano baixo uma ação linear de um grupo finito. A noção de orbifold (ou V -variedade) foi introduzido por Satake [31] no contexto de automorfismos de formas nos anos 50, com o nome de V -variedade; por Thurston [35] no contexto da geometria das 3-variedades nos anos 70, foi então quando ganhou o nome de orbifold depois de uma votação de seus alunos. Nós trabalharemos com orbifolds complexos e comutativos (ou seja, todos os grupos considerados serão comutativos). Veja também [25], [1].

Definição 1.1 *Seja U um espaço topológico conexo. Uma **carta orbifold** (\tilde{U}, G, π) de U consiste de um aberto conexo $\tilde{U} \subset \mathbb{C}^n$, G um grupo finito que age de maneira holomorfa sobre \tilde{U} e π uma aplicação de \tilde{U} sobre U tal que π induz um homeomorfismo de \tilde{U}/G sobre U .*

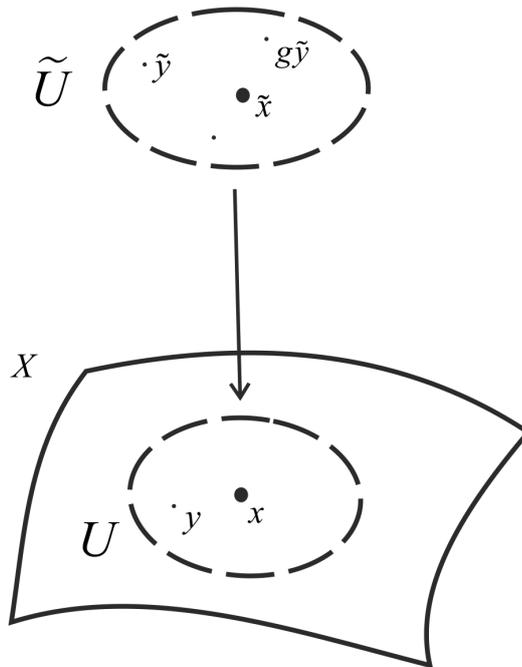
Definição 1.2 *Seja $U_1 \subset U_2$ aberto e conexo. Uma **injeção de cartas** $(\varphi, \sigma) : (\tilde{U}_1, G_1, \pi_1) \hookrightarrow (\tilde{U}_2, G_2, \pi_2)$ consiste de um mergulho $\varphi : \tilde{U}_1 \hookrightarrow \tilde{U}_2$ e um homomorfismo injetivo $\sigma : G_1 \hookrightarrow G_2$ tal que*

1. $\pi_2 \circ \varphi = \pi_1$,
2. φ é σ -equivariante : $\varphi(g \cdot x) = \sigma(g) \cdot \varphi(x)$ para todo $g \in G_1$,
3. $\text{Ker}(G_1) \cong \text{Ker}(G_2)$ (via σ), onde $\text{Ker}(G_i) = \{g \in G_i \mid g \cdot x = x, \forall x \in \tilde{U}_i\}$.

Definição 1.3 (Atlas orbifold) *Seja X um espaço topológico. Um **atlas orbifold** de X é dado por um recobrimento de X por abertos conexos (U_i) tal que*

1. *Cada U_i tem uma carta $(\tilde{U}_i, G_i, \pi_i)$,*
2. *para todo $x \in U_i \cap U_j$, existe $U_k \subset U_i \cap U_j$ vizinhança de x e duas injeções $\tilde{U}_k \hookrightarrow \tilde{U}_i$, $\tilde{U}_k \hookrightarrow \tilde{U}_j$.*

Definição 1.4 (Orbifold) *Um **orbifold** ou **V-variedade** é um espaço topológico conexo paracompacto com uma classe de equivalência de atlas orbifold ¹.*



Exemplo 1.5

1. *Toda variedade complexa $(X, \{U_i\}, \{\varphi_i\})$ é trivialmente um orbifold. As cartas são da forma $(\tilde{U}_i, G_i, \pi_i)$, onde $\tilde{U}_i = \varphi_i(U_i)$, G_i age trivialmente sobre \tilde{U} e $\pi_i = \varphi_i^{-1}$.*

¹ Sempre é possível refinar um atlas orbifold, ver [25].

2. Sejam $X = D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\} \subset \mathbb{C}$, $\tilde{D} = D$, μ_n o grupo das raízes n -ésimas da unidade agindo de forma $\varsigma \cdot z := \varsigma z$ para todo $(\varsigma, z) \in \mu_n \times \tilde{D}$ e $\pi = z^n : \tilde{D} \rightarrow D$. Então X é um orbifold com uma única carta orbifold (\tilde{D}, μ_n, π) .
3. Seja $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ um subgrupo comutativo finito, então \mathbb{C}^n/G é um orbifold. Vale a pena mencionar que se o grupo G não é comutativo então \mathbb{C}^n/G é ainda um orbifold, mas isso é no sentido geral em que os grupos agindo localmente não são necessariamente comutativos (veja [13]-lema 11.4.6).
4. Um fato bem conhecido é que toda variedade tórica X_Δ , onde Δ é um fan simplicial, é um orbifold (veja [13]-teorema 11.4.8). Como um exemplo muito importante desse tipo de orbifold temos os espaços projetivos ponderados $\mathbb{P}^n(w)$, na secção 2.2 falamos sobre tais espaços e algumas das suas propriedades; muitos dos resultados obtidos neste trabalho serão aplicados nestes espaços.

1.2 V-Feixes e V-Fibrados

Nesta seção definiremos e falaremos dos feixes e fibrados vetoriais orbifold. Uma boa referência pode ser vista em [4], [13] e [25].

Definição 1.6 *Sejam X um orbifold. Considere $j : X_{Reg} \hookrightarrow X$ a inclusão. Definimos \mathcal{O}_X (resp. C_X^∞) o feixe de funções holomorfas (respectivamente feixe das funções C^∞) por*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(U) &= \{f \in j_*\mathcal{O}_{X_{Reg}}(U) \mid f \text{ é localmente limitada}\}, \\ C_X^\infty(U) &= \{f \in j_*C_{X_{Reg}}^\infty(U) \mid \forall x \in U_{Sing} \exists (\tilde{U}_x, G_x, \pi_x) \\ &\quad \text{carta de um aberto } U_x \subset U \text{ contendo } x \text{ e} \\ &\quad \exists \tilde{f} \in ((\pi_x)_*C_{\tilde{U}_x}^\infty)^{G_x}(U_x)^2 \text{ tal que } \tilde{f} = f \circ \pi_x\}, \end{aligned}$$

para todo aberto $U \subset X$.

² \tilde{f} é G_x -invariante sobre \tilde{U}_x

Proposição 1.7 [25] *Sejam X um orbifold, $U \subset X$ aberto e $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Então $\forall x \in U_{Sing} \exists (\tilde{U}_x, G_x, \pi_x)$ carta de um aberto $U_x \subset U$ contendo x e $\exists \tilde{f} \in ((\pi_x)_* \mathcal{O}_{\tilde{U}_x})^{G_x}(U_x)$ tal que $\tilde{f} = f \circ \pi_x$.*

Definição 1.8 *Sejam X um espaço complexo, G um grupo e $G \rightarrow \text{Aut}X$ um homomorfismo de grupos. Seja \mathcal{F} um feixe coerente em X . Dizemos que **G age em \mathcal{F}** (sobre X), se*

1. *Para todo aberto $U \subset X$ tal que $gU = U, \forall g \in G$, G age no \mathbb{C} -espaço vetorial $\Gamma(U, \mathcal{F})$,*
2. *a ação de 1. é compatível com todas as restrições (induzidas pelas inclusões abertas $U' \hookrightarrow U$),*
3. *no caso 1., $g(f \cdot \eta) = g^* f \cdot g \eta$ para todo $\eta \in \Gamma(U, \mathcal{F}), f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U), g \in G$.*

Diremos que \mathcal{F} é um **G-feixe coerente** em X .

Observação 1.9 *Suponhamos que G age propriamente descontinuamente em X . Seja \mathcal{F} um G -feixe coerente em X . Então, $\forall x \in X, \forall g \in G$, a ação em X induz uma identificação $\mathcal{O}_{X,x} \cong \mathcal{O}_{X,gx}$, e a ação em \mathcal{F} induz uma identificação compatível $\mathcal{F}_x \cong \mathcal{F}_{gx}$. Se além disso $gx = x \forall g \in G$, então G age em \mathcal{F}_x .*

Definição 1.10 *Na definição anterior, denotaremos por $\text{Coh}^G(X)$ a categoria dos G -feixes coerentes em X .*

Definição 1.11 *Seja G um grupo finito, seja $G \rightarrow \text{Aut}X$ um homomorfismo de grupos. É bem conhecido que $X := Y/G$ também é um espaço complexo. Seja $\pi : Y \rightarrow X$ a projeção. Denotaremos $\pi_*^G : \text{Coh}^G(Y) \rightarrow \text{Coh}(X)$ dado por $\pi_*^G(\mathcal{F}) = (\pi_*(\mathcal{F}))^G$ o subfeixe maximal de $\pi_*(\mathcal{F})$ no qual G age trivialmente ($(\cdot)^G$ funtor : subfeixe G -invariante).*

Lema 1.12 π_*^G é um funtor exato (veja [4], 2.3).

Recordemos que um **feixe reflexivo** \mathcal{F} em um espaço complexo é um feixe coerente \mathcal{F} tal que o homomorfismo natural $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^{\vee\vee}$ é um isomorfismo, onde $\mathcal{F}^{\vee\vee}$ denota o duplo dual de \mathcal{F} .

Definição 1.13 *Sejam (X, x) um germe quociente, $\pi : (Y, y) \rightarrow (X, x)$ o recobrimento local suave (projecção) e $G = G_x$. Um feixe coerente \mathcal{F} em (X, x) é **V-livre** se alguma das duas condições (equivalentes) é satisfeita*

1. \mathcal{F} é reflexivo e $(\pi^*\mathcal{F})^{\vee\vee}$ é um feixe livre.
2. Existe um feixe livre $\tilde{\mathcal{F}}$ em (Y, y) tal que G age em $\tilde{\mathcal{F}}$ e tal que $\mathcal{F} \cong \pi_*^G(\tilde{\mathcal{F}})$.

Na verdade $\tilde{\mathcal{F}} = (\pi^*\mathcal{F})^{\vee\vee}$. Além disso, note que no caso em que (X, x) é suave, V-livre é o mesmo que livre.

Definição 1.14 *Sejam X um orbifold e \mathcal{F} um feixe coerente em X . \mathcal{F} é chamado **localmente V-livre** se $\mathcal{F}|_{(X, x)}$ é V-livre para todo $x \in X$.*

Observação 1.15 1. *Em dimensão dois:*

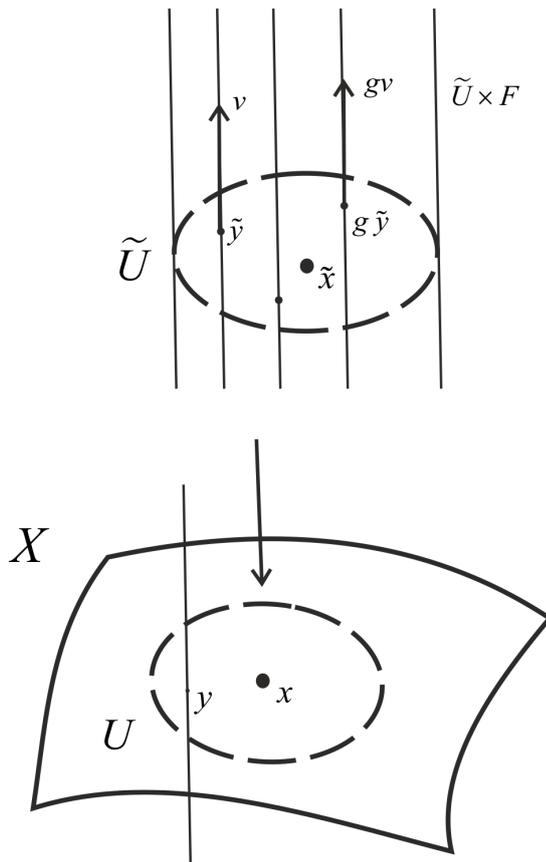
- a. *Em variedades: reflexivo é equivalente a localmente livre.*
 - b. *Em orbifolds: reflexivo é equivalente a localmente V-livre.*
2. *Em dimensão maior ou igual a três, essas noções não coincidem. Observe que, em espaços complexos, um feixe localmente livre é reflexivo.*

Exemplo 1.16 *Sejam X um orbifold, $\dim X = n$ e $j : X_{\text{Reg}} \hookrightarrow X$ a inclusão. Então os seguintes feixes são localmente V-livres*

1. $\Omega_X^1 := j_*(\Omega_{X_{\text{Reg}}}^1)$ o feixe de 1-formas holomorfas (reflexivo).
2. $\omega_X := (\wedge^n \Omega_X^1)^{\vee\vee}$.
3. $\mathcal{O}_X(D)$ para qualquer divisor de Weil D em X .

4. Denotemos por \mathcal{T}_X o **feixe tangente** de X . \mathcal{T}_X é o único feixe reflexivo tal que $\mathcal{T}_X|_{X_{Reg}}$ é o feixe tangente holomorfo de X_{Reg} . $\mathcal{T}_X = (\Omega_X^1)^\vee$.
5. Para $n = 1, 2$ feixes localmente V -livres são equivalente a Cohen-Macaulay (em orbifolds de dimensão arbitrária, feixe localmente V -livre é Cohen Macaulay) (veja [4], 2.7).

Definição 1.17 Seja $\rho : E \rightarrow X$ uma aplicação holomorfa sobrejetiva entre orbifolds. Seja F uma variedade complexa. Dizemos que ρ é um **V-fibrado** com **V-fibra** F se, para todo $x \in X$, existe um recobrimento local suave $\pi : \tilde{U} \rightarrow U = \tilde{U}/G$ para alguma vizinhança aberta U de x (com $G = G_x$) tal que existe uma G -ação de $\tilde{U} \times F$ sobre \tilde{U} com $E|_U \cong (\tilde{U} \times F)/G$ sobre U .



Observe que para todo $x \in X$, $\rho^{-1}(x) = F/G_x$ é um orbifold. Em particular $\rho^{-1}(x) = F$ para todo $x \in X_{Reg}$.

Definição 1.18 *Seja X um orbifold. Um **V-fibrado vetorial** E em X é um fibrado vetorial holomorfo E_{Reg} em X_{Reg} tal que $j_*\mathcal{E}_{X_{Reg}}$ é um feixe localmente V -livre, onde $j : X_{Reg} \hookrightarrow X$ é a inclusão e $\mathcal{E}_{X_{Reg}}$ é o feixe das seções de E_{Reg} .*

Observação 1.19 1. *Um fibrado vetorial holomorfo E_{Reg} em X_{Reg} é um V -fibrado vetorial em X se, e somente se, para todo recobrimento local suave $(Y, y) \rightarrow (X, x) = (Y, y)/G_x$ de X , existe um fibrado vetorial holomorfo \tilde{E}_Y junto com uma ação de grupos G_x tal que $(\tilde{E}_Y|_{(Y, y) - \text{Fix } G_x})/G_x \cong E_{Reg}|_{(X, x)}$. Além disso, \tilde{E}_Y e a G_x -ação em \tilde{E}_Y são então determinados unicamente por E_{Reg} .*

2. *Seja \mathcal{F} um feixe localmente V -livre em X . Então existe um V -fibrado vetorial E em X tal que \mathcal{F} é isomorfo ao feixe das seções de E . E é único a menos de isomorfismo.*

Exemplo 1.20 *Voltando às notações do exemplo 1.5-2. Considere o fibrado trivial orbifold dado pelo diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{D} \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\pi^E} & (\tilde{D} \times \mathbb{C})/\mu_n \\ \tilde{\rho} \downarrow & & \downarrow \rho \\ \tilde{D} & \xrightarrow{\pi} & D \end{array}$$

onde a ação de μ_n sobre $\tilde{D} \times \mathbb{C}$ é dada por $g \cdot (z, v) := (gz, gv)$.

Na seção 2.2 daremos um exemplo não trivial de um fibrado vetorial orbifold em $\mathbb{P}^n(w)$. Agora vamos definir alguns feixes importantes associados aos fibrados orbifold.

Definição 1.21 *Sejam X um orbifold e $\rho : E \rightarrow X$ um fibrado orbifold. Denotemos por $\mathcal{E}_{X_{Reg}}$ (resp. $\mathcal{E}_{X_{Reg}}^\infty$) o feixes de seções holomorfas (resp. feixe das seções C^∞) sobre $\rho|_{E_{Reg}} : E_{Reg} \rightarrow X_{Reg}$. Considere $j : X_{Reg} \hookrightarrow X$ a inclusão. Definimos \mathcal{E} (resp. \mathcal{E}^∞) o feixe de seções holomorfas (respectivamente feixe das seções C^∞) por*

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_X(U) &= \left\{ s \in j_* \mathcal{E}_{X_{Reg}}(U) \mid \forall x \in U_{Sing} \exists (\tilde{U}_x, G_x, \pi_x) \text{ carta de um aberto } U_x \subset U \right. \\
&\quad \text{contendo } x \text{ e } \exists (id, \tilde{s}) : \tilde{U}_x \rightarrow \tilde{U}_x \times \mathbb{C}^k \text{ } G_x\text{-equivariante} \\
&\quad \left. \text{tal que } \pi_x^E \circ (id, \tilde{s}) = s \circ \pi_x \right\} \\
\mathcal{E}_X^\infty(U) &= \left\{ s \in j_* \mathcal{E}_{X_{Reg}}^\infty(U) \mid \forall x \in U_{Sing} \exists (\tilde{U}_x, G_x, \pi_x) \text{ carta de um aberto } U_x \subset U \right. \\
&\quad \text{contendo } x \text{ e } \exists (id, \tilde{s}) : \tilde{U}_x \rightarrow \tilde{U}_x \times \mathbb{C}^k \text{ } G_x\text{-equivariante} \\
&\quad \left. \text{tal que } \pi_x^E \circ (id, \tilde{s}) = s \circ \pi_x \right\}
\end{aligned}$$

para todo aberto $U \subset X$.

Vamos explicar o que quer dizer G_x -equivariante. Seja $(\tilde{U} \times \mathbb{C}^k, G, \pi^E)$ uma carta de E . A ação de G sobre $\tilde{U} \times \mathbb{C}^k$ é dada por $g \cdot (\tilde{x}, v) = (g\tilde{x}, A(\tilde{x}, g)v)$, onde $A : \tilde{U} \times G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ é holomorfa e tal que $A(\tilde{x}, gh) = A(h\tilde{x}, g)A(\tilde{x}, h)$. Então $\tilde{s} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{C}^k$ é G -equivariante se $\tilde{s}(g\tilde{x}) = A(\tilde{x}, g)\tilde{s}(\tilde{x})$. Para mais detalhes desta última parte veja [25].

Definição 1.22 *Sejam X um orbifold, \mathcal{F} um feixe localmente V -livre em X e E o V -fibrado em X correspondente a \mathcal{F} . Uma **V-métrica** h em \mathcal{F} é uma métrica hermitiana h em E_{Reg} tal que π^*h estende a uma métrica hermitiana \tilde{h} em todo \tilde{E}_Y , para todo recobrimento local suave $\pi : (Y, y) \rightarrow (X, x)$ de X (projeção), onde \tilde{E}_Y é como na observação 1.19.*

Observação 1.23 *Usando partições da unidade orbifold (veja [25]), dados X e \mathcal{F} é sempre possível construir uma V -métrica h em \mathcal{F} .*

1.3 Integração em orbifolds

Definição 1.24 *Seja X um n -orbifold complexo e compacto, com um atlas orbifold $\{(\tilde{U}_i, G_i, \pi_i)\}$ e $w \in \Omega_X^n$ uma n -forma. A integral orbifold de w sobre X é definida por*

$$\int_X w = \sum_i \frac{1}{\#G_i} \int_{\tilde{U}_i} \pi_i^*(\rho_i w),$$

onde $\#G_i$ é a ordem do grupo G_i e (ρ_i) é uma partição da unidade orbifold subordinada ao recobrimento (U_i) de X , veja [1].

Seja X um orbifold, $x \in X$ e (\tilde{U}, G, π) uma carta de uma vizinhança U de x . Seja $\tilde{x} \in \tilde{U}$ (na fibra de x), se verifica que os grupos $G^x = \{g \in G \mid g \cdot \tilde{x} = \tilde{x}\}$ (o grupo de isotropia) e $\text{Ker}(G^x)$ não dependem de \tilde{x} . Denotaremos o último por $\text{Ker}(X)$, veja [25].

Observação 1.25 [25] *Denotemos por $X_{\text{Reg}} = X - \text{Sing}(X)$. Então*

$$\int_X w = \frac{1}{\#\text{Ker}(X)} \int_{X_{\text{Reg}}} w$$

1.4 Bons Representantes e Boa Resolução

Nosso próximo objetivo é definir as classes de Chern globais e locais para V-fibrados vetoriais em um orbifold e ver como elas estão relacionadas, mas para este fim precisamos primeiro definir alguns conceitos que serão fundamentais. Então nesta seção vamos definir o que é um bom representante de um conjunto analítico compacto conexo $W \subsetneq X$ com $\text{Sing}(X) \subset W$, quando X é um espaço complexo irredutível e normal. Nós também daremos algumas propriedades de bons representantes e finalmente vamos definir o que é uma boa resolução. Vale ressaltar que um orbifold é um espaço normal. Para mais detalhes veja [4].

Definição 1.26 *Seja X um espaço complexo irredutível e normal, seja $W \subset X$ subconjunto analítico compacto conexo com $\text{Sing}(X) \subset W$ e com $W \neq X$. Consideremos o germe*

(analítico) (X, W) de X ao longo de W . Diremos que um subconjunto aberto e conexo $V \subset X$ é um **bom representante** de (X, W) se

1. $W \subset V$,
2. ∂V é uma variedade real C^∞ ,
3. Existe uma contração C^∞ de V sobre W .

Observação 1.27 Sempre existem bons representantes (veja [4], 1.16).

Lema 1.28 Seja (X, W) como antes, suponha além disso que X é um orbifold. Sejam V_1, V_2 qualquer dois bons representantes de (X, W) . Então

1. Existe um isomorfismo canônico $H_{dR}^*(V_1) \cong H_{dR}^*(V_2) \cong H_S^*(W)$.
2. Existe um isomorfismo canônico $H_{dRc}^*(V_1) \cong H_{dRc}^*(V_2)$ (veja [4], 1.17).

Definição 1.29 Pelo lema anterior, podemos definir $H_{dRc}^*((X, W)) := H_{dRc}^*(V)$, onde V é um bom representante do germe (X, W) .

Observação 1.30 Seja (X, W) como no lema 1.28, e suponha $n = \dim X$. Então

1. $H_{dRc}^0((X, W)) = 0$.
2. $H_{dRc}^1((X, W)) = 0$.
3. $H_{dRc}^{2n}((X, W)) \cong \mathbb{C}$ canonicamente, via $[\mu] \mapsto \int_V \mu$, onde $[\mu] \in H_{dRc}^{2n}(V) \cong H_{dRc}^{2n}((X, W))$.
4. $H_{dRc}^*((X, W))$ é um anel.

Corolário 1.31 Se X e W são duas variedades com $\text{codim} W = 1$, então $H_{dRc}^k((X, W)) := H_{dRc}^{k-2}(W)$ para todo $k \geq 2$

Definição 1.32 Uma **boa resolução** de um orbifold X é uma resolução $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$ tal que o divisor excepcional D de σ é um divisor com cruzamentos normais. Para uma boa resolução de um orbifold com singularidades isoladas, vamos exigir que $\sigma(D)$ consista apenas de pontos isolados.

1.5 Classes de Chern e Classes de Chern locais

Nesta seção definiremos as classes de Chern globais e locais para V -fibrados vetoriais em um orbifold e finalmente mostraremos como elas se relacionam via uma resolução. A principal referência para esta seção é [4]. Para uma construção das classes de Chern globais mais rigorosa seguindo a ideia da construção feita por Milnor e Stasheff em variedades suaves, veja [25].

Sejam X um orbifold, \mathcal{F} um feixe localmente V -livre em X e h uma V -métrica em \mathcal{F} . Seja $n = \dim X$, $r = \text{Posto } \mathcal{F}$. Associaremos à tripla (X, \mathcal{F}, h) elementos $c_i(X, \mathcal{F}, h) \in H_{dR}^{2i}(X, \mathbb{C})$, para $i = 0, \dots, n$ da seguinte maneira:

Em X_{Reg} : Associamos a h a única conexão métrica ∇ em \mathcal{F} , agora associamos a ∇ o operador curvatura ∇^2 em \mathcal{F} ; seja Θ a correspondente $r \times r$ matriz de 2-formas (que existe em qualquer trivialização local de \mathcal{F}). Então definimos $C_i(h) := P_i(\frac{i}{2\pi}\Theta) \in \Gamma(X_{Reg}, \mathcal{E}^{2i})$, onde P_i é a i -ésima função polinomial elementar invariante $\mathbb{C}^{r \times r} \rightarrow \mathbb{C}$.

Como no caso suave, se verifica que $C_i(h) \in \Gamma(X, \mathcal{E}^{2i})$, $d(C_i(h)) = 0$ para todo i e que $c_i(\mathcal{F}) := [C_i(h)] \in H_{dR}^{2i}(X, \mathbb{C})$ não depende da escolha da métrica h ; $c_0(\mathcal{F}) = 1$.

Definição 1.33 1. Para toda orbifold X e todo feixe localmente V -livre \mathcal{F} em X , definimos as **classes de Chern** como $c_i(\mathcal{F}) \in H_{dR}^{2i}(X, \mathbb{C})$ ($i = 0, \dots, n$).
 $c(\mathcal{F}) := c_0(\mathcal{F}) + \dots + c_n(\mathcal{F}) \in H_{dR}^*(X, \mathbb{C})$ é a **classe de Chern total** de \mathcal{F} .

2. Definimos as **classes de Chern de X** por $c_i(X) := c_i(\mathcal{T}_X)$, onde \mathcal{T}_X é o feixe tangente a X .

Definição 1.34 *Seja X um orbifold compacto, $n = \dim X$. Seja \mathcal{F} um feixe localmente V -livre em X . Seja $k = \mathbb{Q}$ ou \mathbb{C} . Identificaremos $H^{2n}(X, k) \cong k$ por meio da integração nas classes sobre X . Para qualquer monômio $P = Z_1^{\lambda_1} \cdots Z_n^{\lambda_n} \in k[Z_1, \dots, Z_n]$ de grau n (ou seja $\sum_{1 \leq i \leq n} i \cdot \lambda_i = n$), definimos o **número de Chern** de \mathcal{F} com respeito a $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ por $P(c(\mathcal{F})) := c_1(\mathcal{F})^{\lambda_1} \cdots c_n(\mathcal{F})^{\lambda_n} \in H^{2n}(X, k) \cong k$.*

Mais geralmente, para qualquer polinômio homogêneo $P \in k[Z_1, \dots, Z_n]$ de grau n (ou seja, P é gerado sobre k pelos monômios de grau n) temos definido o número $P(c(\mathcal{F})) \in H^{2n}(X, k) \cong k$.

Lema 1.35 *Sejam (X, x) uma singularidade quociente isolada e \mathcal{F} um feixe localmente V -livre em (X, x) . Então existe uma resolução $\sigma : (\tilde{X}, D) \rightarrow (X, x)$ e um feixe localmente livre $\tilde{\mathcal{F}}$ em (\tilde{X}, D) tal que $\tilde{\mathcal{F}}|_{(\tilde{X}, D) - D} \cong \mathcal{F}|_{(X, x) - \{x\}}$ (veja [4], 3.7)*

Proposição 1.36 *Seja $\sigma : (\tilde{X}, D) \rightarrow (X, x)$ uma boa resolução de uma singularidade quociente isolada (X, x) . Suponha que $\tilde{\mathcal{F}}$ é um feixe localmente livre em \tilde{X} tal que $\mathcal{F} := (\sigma_* \tilde{\mathcal{F}})^{\vee\vee}$ é um feixe V -livre em X .*

1. *Sejam $U \subset V$ vizinhanças abertas de x em X tal que U é relativamente compacta em V e tal que U, V são bons representantes de (X, x) no sentido da definição 1.26. Então existem métricas h em \mathcal{F} e \tilde{h} em $\tilde{\mathcal{F}}$ tais que $\tilde{h}|_{\tilde{V} - \tilde{U}} = h|_{V - U}$*
2. *Seja $C_i(h) \in \Gamma(V, \mathcal{E}^{2i})$, respectivamente $C_i(\tilde{h}) \in \Gamma(\tilde{V}, \mathcal{E}^{2i})$ as formas de Chern associadas a (V, \mathcal{F}, h) , respectivamente $(\tilde{V}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{h})$. Então $c_i((\tilde{X}, D), \tilde{\mathcal{F}}) := c_i(\tilde{h}) - \sigma^* c_i(h) \in H_{dRc}^{2i}((\tilde{X}, D), \mathbb{C})$ não depende da escolha de U, V, h e \tilde{h} (veja [4], 3.10).*

Observação 1.37 *Em dimensão dois, a condição de ser feixe V -livre é automaticamente satisfeita. Isto segue da observação 1.15. Em dimensão $k \geq 3$, isto em geral não é certo; entretanto, na prática podemos começar com um feixe localmente V -livre \mathcal{F} em X e tomar uma resolução σ tal que $(\sigma^* \mathcal{F})^{\vee\vee}$ seja localmente livre.*

Definição 1.38 Na situação da proposição anterior, definimos a ***i*-ésima classe de Chern local** de $\tilde{\mathcal{F}}$ ao longo de D por

$$c_i(x, \tilde{\mathcal{F}}) := c_i((\tilde{X}, D), \tilde{\mathcal{F}}) := c_i(\tilde{h}) - \sigma^* c_i(h) \in H_{dRc}^{2i}((\tilde{X}, D), \mathbb{C}).$$

Lema 1.39 Seja X um orbifold compacto com singularidades isoladas e $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$ uma boa resolução. Seja $\tilde{\mathcal{F}}$ um feixe localmente livre em \tilde{X} . Suponhamos que $\mathcal{F} := (\sigma_* \tilde{\mathcal{F}})^{\vee\vee}$ é um feixe V -livre em X . Então $\sigma^* c(\mathcal{F}) = c(\tilde{\mathcal{F}}) - \sum_{x \in \sigma(D)} c((\tilde{X}, D_x), \tilde{\mathcal{F}})$ (em $H_{dR}^*(\tilde{X}, \mathbb{C})$) (veja [4], 3.11).

Definição 1.40 Seja $\sigma : (\tilde{X}, D) \rightarrow (X, x)$ uma boa resolução de uma singularidade quociente isolada. Seja $\tilde{\mathcal{F}}$ um feixe localmente livre em \tilde{X} tal que $\mathcal{F} := (\sigma_* \tilde{\mathcal{F}})^{\vee\vee}$ é V -livre em X . Seja $n = \dim X$. Seja $P \in \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n]$ um polinômio homogêneo de grau n ($\sum_{1 \leq i \leq n} i \cdot \lambda_i = n$). Definimos o **número de Chern local** de $\tilde{\mathcal{F}}$ em x com respeito a P como $P(c(x, \tilde{\mathcal{F}}))$ (lembramos que $H_{dRc}^*((\tilde{X}, D), \mathbb{C})$ é um anel com um isomorfismo natural $H_{dRc}^n((\tilde{X}, D), \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$, dado por integração).

Um resultado importante relacionando os números de Chern globais e locais é o seguinte (veja [4], 3.14):

Proposição 1.41 Seja $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$ uma boa resolução de um orbifold compacto com singularidades isoladas e de dimensão n . Seja $\tilde{\mathcal{F}}$ um feixe localmente livre em \tilde{X} tal que $\mathcal{F} := (\sigma_* \tilde{\mathcal{F}})^{\vee\vee}$ é localmente V -livre em X . Seja $P \in \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n]$ um polinômio homogêneo de grau n . Então

$$\int_X P(c(\mathcal{F})) = \int_{\tilde{X}} P(c(\tilde{\mathcal{F}})) - \sum_{x \in \sigma(D)} \int_{\tilde{X}} P(c(x, \tilde{\mathcal{F}})).$$

1.6 Orbifold Kähler

Nesta seção introduziremos rapidamente algumas definições referentes a orbifolds Kähler, tais definições serão necessárias no capítulo 3. Para maiores detalhes ver por exemplo [2], [27], [22], [15].

Seja M um orbifold complexo de dimensão n . Seja g uma V -métrica Hermitiana (ela é Riemanniana) em M . Em coordenadas locais (z_1, \dots, z_n) , considere a $(1, 1)$ -forma associada a g definida por

$$\omega_g = \sum_{i,j=1}^n g_{i\bar{j}} dz_i \wedge d\bar{z}_j,$$

onde $g_{i\bar{j}} = g\left(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right)$.

Definição 1.42 Diremos que (M, ω_g) é um **orbifold Kähler** se $d\omega_g \equiv 0$. Neste caso diremos que ω_g é a forma Kähler associada a g .

Definição 1.43 Seja (M, ω_g) um orbifold Kähler. Diremos que g é **Kähler-Einstein** se $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Ric_g = \lambda \omega_g$, onde Ric_g é a **Ricci form**, que em coordenadas locais é definida por

$$Ric_g = -\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \text{LogDet}(g_{k\bar{l}}) dz_i \wedge d\bar{z}_j.$$

(Observe que Ric_g é real e fechada). Diremos que um orbifold Kähler (M, ω_g) é um orbifold Kähler-Einstein se g é uma métrica Kähler-Einstein.

Definição 1.44 Seja (M, ω_g) um orbifold Kähler. Definimos a **curvatura escalar** associada a g por

$$s_g = -g^{i\bar{j}} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \text{LogDet}(g_{k\bar{l}}).$$

A seguinte proposição será importante para nós (proposição 3.2)

Proposição 1.45 Seja (M, ω_g) um orbifold Kähler. Toda métrica Kähler-Einstein tem curvatura escalar constante.

Demonstração.

Uma vez que g é uma métrica Kähler-Einstein, temos que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$Ric_g \wedge \omega_g^{n-1} = \lambda \omega_g^n, \quad (1-1)$$

onde n é a dimensão de M . Por outro lado, dado $z \in M$ nós podemos escolher coordenadas locais (z_1, \dots, z_n) tal que em z temos

$$\omega_g = \sum dz_i \wedge d\bar{z}_i$$

e

$$Ric_g = \sum -\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} \text{LogDet}(g_{k\bar{l}}) dz_i \wedge d\bar{z}_i.$$

Então

$$Ric_g \wedge \omega_g^{n-1} = -\frac{i}{2}(n-1)! \sum \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} \text{LogDet}(g_{k\bar{l}}) dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n = \frac{1}{n} s_g \omega_g^n.$$

Levando esta equação em 1-1, temos que

$$\lambda \omega_g^n = \frac{1}{n} s_g \omega_g^n.$$

Assim $s_g = n\lambda$.

□

2 Fórmulas residuais de tipo Bott para orbifolds complexos e aplicações

2.1 Fórmulas residuais de tipo Bott

Agora daremos uma primeira versão da forma residual de tipo Bott para um orbifold compacto e com singularidades isoladas. No teorema 2.4 daremos uma segunda versão. Finalmente veremos algumas consequências importantes, aplicações e exemplos nos espaços projetivos ponderados. Seguindo [3], [11] e [34], temos o seguinte teorema

Seja M um orbifold compacto, de dimensão n e com singularidades isoladas. Seja L um V -fibrado vetorial de posto 1. Considere as classes de Chern

$$c_k(TM - L^\vee) := c_k(TM) + c_{k-1}(TM)c_1(L) + \cdots + c_1(L)^k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

$$c^v(TM - L^\vee) = c_1^{v_1}(TM - L^\vee) \cdots c_n^{v_n}(TM - L^\vee), \quad v = (v_1, \dots, v_n),$$

$$n = v_1 + 2v_2 + \cdots + nv_n.$$

Em particular:

1. $c_1(TM - L^\vee) = c_1(TM) + c_1(L)$.
2. $c_n(TM - L^\vee) = c_n(TM \otimes L)$.

Denotemos $C^v = C_1^{v_1} \cdots C_n^{v_n}$, onde C_i é a i -ésima função elementar. Observe que qualquer polinômio homogêneo invariante P de grau n é uma combinação linear $P = \sum_v a_v C^v$, $a_v \in \mathbb{C}$.

Teorema 2.1 *Seja M um orbifold compacto de dimensão n e com singularidades isoladas. Seja L um V -fibrado vetorial de posto 1 sobre M e ξ uma seção holomorfa de $TM \otimes L$, cujos zeros são isolados. Se P é um polinômio homogêneo invariante de grau n , então*

$$\int_M P(TM - L^\vee) = \sum_{p/\xi(p)=0} \frac{1}{\#G_p} \text{Res}_p \left\{ \frac{P(J\tilde{\xi})d\tilde{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{z}_n}{\tilde{\xi}_1 \cdots \tilde{\xi}_n} \right\},$$

onde $J\tilde{\xi} = \left(\frac{\partial \tilde{\xi}_i}{\partial \tilde{z}_j} \right)$ e $\text{Res}_p \left\{ \frac{P(J\tilde{\xi})d\tilde{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{z}_n}{\tilde{\xi}_1 \cdots \tilde{\xi}_n} \right\}$ é o resíduo de Grothendieck.

Demonstração.

Sejam p_1, \dots, p_k os zeros de ξ . Escolha vizinhanças coordenadas disjuntas U_α ($\varphi_\alpha : \tilde{U}_\alpha \rightarrow U_\alpha$ carta orbifold, $p_\alpha \in U_\alpha$) tal que $U_\alpha \cap \text{Sing}(M) = \emptyset$ ou $U_\alpha \cap \text{Sing}(M) = \{p_\alpha\}$. Suponha $\{U_\alpha\}$ é uma cobertura trivializadora de ambos TM e L . Sobre cada \tilde{U}_α tomamos coordenadas locais $\tilde{z}^\alpha = (\tilde{z}_1^\alpha, \dots, \tilde{z}_n^\alpha)$ e o referencial holomorfo $\left\{ \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_n^\alpha} \right\}$ de TM . Nessas coordenadas temos

$$\tilde{\xi}^\alpha = \sum \tilde{\xi}_i^\alpha \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_i^\alpha},$$

onde ξ_i^α é uma seção holomorfa de $L|_{U_\alpha}$, $1 \leq i \leq n$.

Seja h_α a métrica hermitiana em \tilde{U}_α definida por $\langle \partial/\partial \tilde{z}_i^\alpha, \partial/\partial \tilde{z}_j^\alpha \rangle = \delta_j^i$. Considere também $\tilde{U}'_\alpha \subset \tilde{U}_\alpha$ e $U'_\alpha = \varphi_\alpha(\tilde{U}'_\alpha)$ para cada α . Tome uma métrica hermitiana h_0 qualquer em $M \setminus \cup \{p_\alpha\}$ e $\{\rho_0, \rho_\alpha\}$ uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{M \setminus \cup_\alpha \overline{U}'_\alpha, U_\alpha\}_\alpha$ (existem partições da unidade em um orbifold, veja [25], proposição III.1.19). Defina uma métrica hermitiana em M por $h = \rho_0 h_0 + \sum \rho_\alpha h_\alpha$. Temos então que para cada α , a curvatura métrica $K_h = 0$ em U'_α . Faça o mesmo para o fibrado L escolhendo a métrica dada por $H_\alpha = 1$ em \tilde{U}_α e H_0 qualquer em $M \setminus \cup \{p_\alpha\}$, temos então que $K_H = 0$ em U'_α .

Seguindo Chern, associamos a cada K_h e K_H (localmente) uma $n \times n$ matriz Ω^α com entradas $(1, 1)$ -formas C^∞ tal que, se P é um polinômio homogêneo invariante de grau n , então $P(\Omega^\alpha) = P(\Omega^\beta)$. Assim, a coleção $\{P(\Omega^\alpha)\}$ define uma (n, n) -forma global em M denotada por $P(\Omega)$. A (n, n) -forma $P(\Omega)$ se localiza nos zeros de ξ , ou seja $P(\Omega) = d\Psi$ em $M \setminus \{p/\xi(p) = 0\}$, onde Ψ é uma $(n, n-1)$ -forma em $M \setminus \{p/\xi(p) = 0\}$. Além disso,

$$\left[\left(\frac{i}{2\pi} \right)^n P(\Omega) \right] = P(TM - L^\vee) \in H_{DR}^{2n}(M, \mathbb{C}).$$

A forma explicita para Ψ em $B_\epsilon(p_\alpha)$ é localmente dada por:

$$\tilde{\Psi}^\alpha = (-1)^{n+1} P(J\tilde{\xi}^\alpha) \omega \wedge (\bar{\partial}\omega)^{n-1}, \quad (2-1)$$

onde

$$\omega = \frac{\langle d\tilde{z}, \tilde{\xi}^\alpha \rangle}{\langle \tilde{\xi}^\alpha, \tilde{\xi}^\alpha \rangle},$$

e conseqüentemente

$$\omega \wedge (\bar{\partial}\omega)^{n-1} = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n-1)!}{\langle \tilde{\xi}^\alpha, \tilde{\xi}^\alpha \rangle^n} (d\tilde{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{z}_n) \wedge \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \overline{\tilde{\xi}_i^\alpha} d\overline{\tilde{\xi}_1^\alpha} \wedge \cdots \wedge \widehat{d\overline{\tilde{\xi}_i^\alpha}} \wedge \cdots \wedge d\overline{\tilde{\xi}_n^\alpha} \right).$$

Usando a versão orbifold de Stokes (veja [31], [1] o [25]) temos

$$\begin{aligned} \int_M P\left(\frac{i}{2\pi}\Omega\right) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{M \cup B_\epsilon(p_\alpha)} P\left(\frac{i}{2\pi}\Omega\right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{M \cup B_\epsilon(p_\alpha)} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n P(\Omega) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{M \cup B_\epsilon(p_\alpha)} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n d\Psi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\Sigma_\alpha \int_{\partial B_\epsilon(p_\alpha)} -\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \Psi^\alpha \right). \end{aligned} \quad (2-2)$$

Calculemos

$$\int_{\partial B_\epsilon(p_\alpha)} -\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \Psi^\alpha = \frac{1}{\#G_{p_\alpha}} \int_{S_\epsilon^{2n-1}} -\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \tilde{\Psi}^\alpha. \quad (2-3)$$

Considere a aplicação $\phi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{2n}$ dada por $\phi(\tilde{z}) = (\tilde{z} + \tilde{\xi}(\tilde{z}), \tilde{z})$. Considere também o núcleo de Bochner Martinelli em $\mathbb{C}^{2n} \setminus \{0\}$ dado por

$$\beta_n(\tilde{z}, \tilde{u}) = \frac{l_n}{|\tilde{z} - \tilde{u}|^{2n}} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (\tilde{z}_i - \tilde{u}_i) \left(\bigwedge_{j \neq i} (d\tilde{z}_j - d\tilde{u}_j) \wedge d\tilde{u}_1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{u}_n \right),$$

onde $l_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}$. Se verifica que

$$\phi^* \beta_n = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \omega \wedge (\bar{\partial}\omega)^{n-1} \quad (2-4)$$

Levando (2-1) e (2-4) em (2-3) temos

$$\int_{\partial B_\epsilon(p_\alpha)} -\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \Psi^\alpha = \frac{1}{\#G_{p_\alpha}} \int_{S_\epsilon^{2n-1}} -\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n (-1)^{n+1} P(J\tilde{\xi}^\alpha) (2\pi i)^n \phi^* \beta_n$$

$$= \frac{1}{\#G_{p_\alpha}} \int_{S_\epsilon^{2n-1}} \mathbf{P}(J\tilde{\xi}^\alpha) \phi^* \beta_n = \frac{1}{\#G_{p_\alpha}} \operatorname{Res}_{\tilde{p}_\alpha} \left\{ \frac{\mathbf{P}(J\tilde{\xi}^\alpha) d\tilde{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{z}_n}{\tilde{\xi}_1^\alpha \cdots \tilde{\xi}_n^\alpha} \right\}.$$

Finalmente, levando esta última equação em (2-2) temos

$$\int_M \mathbf{P}\left(\frac{i}{2\pi}\Omega\right) = \sum_\alpha \frac{1}{\#G_{p_\alpha}} \operatorname{Res}_{\tilde{p}_\alpha} \left\{ \frac{\mathbf{P}(J\tilde{\xi}^\alpha) d\tilde{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{z}_n}{\tilde{\xi}_1^\alpha \cdots \tilde{\xi}_n^\alpha} \right\}.$$

□

Definição 2.2 [32] *Sejam M um orbifold, ξ um campo com singularidades isoladas. Dado $p \in M$, $(\tilde{U}, G_p, \varphi)$ carta de uma vizinhança U de p , o **índice de ξ em p** é definido por*

$$\mathcal{I}_p(\xi) = \frac{1}{\#G_p} \mathcal{I}_{\tilde{p}}(\tilde{\xi}),$$

onde $\mathcal{I}_{\tilde{p}}(\tilde{\xi})$ é o índice de Poincaré Hopf de $\tilde{\xi}$ em \tilde{p} .

Corolário 2.3 *No teorema 2.1, das propriedades dos resíduos segue que*

a.

$$\int_M c_n(TM \otimes L) = \sum_{p/\xi(p)=0} \mathcal{I}_p(\xi).$$

b. *Se os zeros de ξ são não degenerados (ou seja, $J\tilde{\xi}(\tilde{p}) \neq 0 \quad \forall p \in \operatorname{Sing}(\xi)$), temos*

$$\int_M c^v(TM - L^\vee) = \sum_{p/\xi(p)=0} \frac{1}{\#G_p} \frac{C^v(J\tilde{\xi}(\tilde{p}))}{\det(J\tilde{\xi}(\tilde{p}))}.$$

Teorema 2.4 *Nas hipóteses do teorema 2.1, seja $\sigma : \widetilde{M} \rightarrow M$ uma boa resolução com $\sigma(D) = \text{Sing}(M)$. Suponha que*

a. $TM \otimes L$ é localmente V -livre em M .

b. $\widetilde{TM \otimes L} := (\sigma^*(TM \otimes L))^{VV}$ é localmente livre.

Então:

$$\int_{\widetilde{M}} c_n(\widetilde{TM \otimes L}) = \sum_{p \in \text{Sing}(M)} \int_{\widetilde{M}} c_n(p, \widetilde{TM \otimes L}) + \sum_{p/\xi(p)=0} \mathcal{I}_p(\xi).$$

Demonstração.

Tendo em conta a observação 1.37, o resultado segue do corolário 2.3 e da proposição 1.41. □

No seguinte corolário daremos uma aplicação do teorema anterior 2.4. A grosso modo ele diz que coisa mede a classe de Chern local "top".

Corolário 2.5 *Nas hipóteses do teorema 2.4, suponha que $\sigma^*(TM \otimes L)$ é reflexivo. Sejam $\xi \in H^0(M, TM \otimes L)$ e $\sigma^*\xi \in H^0(\widetilde{M}, \sigma^*(TM \otimes L))$. Então*

$$\sum_{p \in \text{Sing}(M)} \int_{\widetilde{M}} c_n(p, \sigma^*(TM \otimes L)) = \sum_{\tilde{p} \in D/\sigma^*\xi(\tilde{p})=0} \mathcal{I}_{\tilde{p}}(\sigma^*\xi) - \sum_{p \in \text{Sing}(M)/\xi(p)=0} \mathcal{I}_p(\xi).$$

Demonstração.

A demonstração segue diretamente do fato que $\sigma : \widetilde{M} - D \cong M - \text{Sing}(M)$, uma vez que $\mathcal{I}_{\tilde{p}}(\sigma^*\xi) = \mathcal{I}_p(\xi)$ sempre que $p \notin \text{Sing}(M)$. □

Analogamente ao caso suave, nós definiremos o índice de Baum-Bott para uma superfície orbifold. Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa com singularidades isoladas em uma superfície orbifold M . Seja $p \in M$ uma singularidade de \mathcal{F} ; perto do ponto p a folheação é localmente dada por um campo de vetores holomorfo $\xi = \xi_1 \frac{\partial}{\partial z} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial w}$ ou por uma 1-forma holomorfa $\omega = \xi_1 dw - \xi_2 dz$, onde (z, w) são as coordenadas locais centradas no ponto $(0, 0)$ e ξ_1, ξ_2 são funções holomorfas com $\xi_1^{-1}(0) \cap \xi_2^{-1}(0) = \{(0, 0)\}$. Nós definimos

$$\mathcal{BB}(\mathcal{F}, p) = \frac{1}{\#G_p} \text{Res}_{(0,0)} \left(\frac{\text{Tr}^2(J\xi)}{\xi_1 \cdot \xi_2} dz \wedge dw \right).$$

2.2 Aplicações: folheações em $\mathbb{P}^n(\omega)$

Nesta seção daremos algumas aplicações dos resultados anteriores nas folheações holomorfas nos espaços projetivos ponderados. Primeiro definiremos em forma rápida os espaços projetivos ponderados, para mais detalhes veja [25], [16], depois definiremos os fibrados em linha orbifold nos espaços projetivos ponderados, com isso na mão nos definiremos o que é uma folheação holomorfa de dimensão um em um espaço projetivo ponderado (seguimos a definição dada em [12]) e finalmente daremos as aplicações.

2.2.1 Espaço projetivo ponderado $\mathbb{P}^n(\omega)$

Considere a ação em $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, dada por

$$\lambda \cdot (Z_0, \dots, Z_n) = (\lambda^{w_0} Z_0, \dots, \lambda^{w_n} Z_n), \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Denotaremos $\omega = (w_0, \dots, w_n)$, $|\omega| = w_0 + \dots + w_n$.

Definição 2.6 *Definimos o espaço projetivo ponderado nos pesos w_0, \dots, w_n por*

$$\mathbb{P}_\omega^n = \mathbb{P}^n(\omega) =: \mathbb{P}(w_0, \dots, w_n) := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim.$$

A partir de agora nós suporemos sempre que os espaços projetivos ponderados são **bem formados**, o seja $w_0, \dots, w_n \in \mathbb{Z}^+$ co primos 2 – 2.

Se verifica

1. Se $w_0 = \dots = w_n = 1$, $\mathbb{P}_\omega^n = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$.
2. $Sing(\mathbb{P}_\omega^n) = \{(1 : 0 : \dots : 0)_\omega, \dots, (0 : \dots : 0 : 1)_\omega\}$.

Além disso temos as seguintes aplicações canônicas

1. $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_\omega^n$ projeção canônica.
2. $\varphi : \mathbb{P}_\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{P}_\omega^n$, dada por $\varphi(Z_0 : \dots : Z_n) = (Z_0^{w_0} : \dots : Z_n^{w_n})_\omega$.

Observe que $\deg(\varphi) = w_0 \dots w_n$.

Veamos a mudança de coordenadas das cartas orbifold. Consideremos

$$U_i = \{[Z_0, \dots, Z_n]_\omega \in \mathbb{P}_\omega^n \mid Z_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}_\omega^n, \mu_{w_i} = \{z \in \mathbb{C}^* \mid z^{w_i} = 1\}.$$

Temos que μ_{w_i} induz uma ação em $\widetilde{U}_i = \mathbb{C}^n$, dada por

$$\lambda \cdot (Z_0, \dots, \widehat{Z}_i, \dots, Z_n) = (\lambda^{w_0} Z_0, \dots, \widehat{Z}_i, \dots, \lambda^{w_n} Z_n).$$

($U_i \cong \widetilde{U}_i / \mu_{w_i}$). A mudança de cartas vem dada por

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} : \widetilde{U}_i &\hookrightarrow \widetilde{U}_j \quad (j < i), \\ \varphi_{ij} \left((Z_0, \dots, \widehat{Z}_i, \dots, Z_n) \right) &= \left(\frac{Z_0}{Z_j^{w_0/w_j}}, \dots, \frac{\widehat{Z}_j}{Z_j}, \dots, \frac{1}{Z_j^{w_i/w_j}}, \dots, \frac{Z_n}{Z_j^{w_n/w_j}} \right). \end{aligned}$$

Temos assim que $(\mathbb{P}_\omega^n, [\{U_i\}])$ é um orbifold.

Observação 2.7 [25]

$$\text{Ker}(\mathbb{P}_\omega^n) = \{1\}$$

2.2.2 Fibrados de linhas em \mathbb{P}_ω^n

Seja $d \in \mathbb{Z}$. Considere a ação

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \\ (t, (Z_0, \dots, Z_n), Z) &\mapsto ((t^{w_0} Z_0, \dots, t^{w_n} Z_n), t^d Z) \end{aligned}$$

Definição 2.8 Definimos o V -fibrado vectorial linear em \mathbb{P}_ω^n por

$$\mathcal{O}_\omega(d) := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}) / \sim$$

A seguinte proposição descreve as seções holomorfas globais de $\mathcal{O}_\omega(d)$ para $d \geq 0$.

Proposição 2.9 Se $d \geq 0$, temos

$$H^0(\mathbb{P}_\omega^n, \mathcal{O}_\omega(d)) = \bigoplus_{w_0 k_0 + \dots + w_n k_n = d} \mathbb{C} \cdot (Z_0^{k_0} \dots Z_n^{k_n}).$$

Se verifica $\text{Pic}(\mathbb{P}_\omega^n) = \mathbb{Z} \cdot \mathcal{O}_\omega(1)$, com $\mathcal{O}_\omega(1)^{\otimes d} = \mathcal{O}_\omega(d)$. Além disso, se $\varphi : \mathbb{P}_\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{P}_\omega^n$ é como antes, então $\varphi^*(\mathcal{O}_\omega(1)) = \mathcal{O}(1)$ (φ é funtorial), veja [25].

Proposição 2.10 [25] Seja $\mathcal{O}_\omega(1)$ o fibrado hiperplano em \mathbb{P}_ω^n . Então

$$\int_{\mathbb{P}_\omega^n} c_1(\mathcal{O}_\omega(1))^n = \frac{1}{w_0 \cdots w_n}$$

Demonstração.

Pela observação 1.25 temos que

$$\int_{\mathbb{P}_\omega^n} c_1(\mathcal{O}_\omega(1))^n = \frac{1}{\#Ker(\mathbb{P}_\omega^n)} \int_{(\mathbb{P}_\omega^n)_{Reg}} c_1(\mathcal{O}_\omega(1))^n$$

Uma vez que $\#Ker(\mathbb{P}_\omega^n) = 1$, $\varphi^*(\mathcal{O}_\omega(1)) = \mathcal{O}(1)$ e $\text{deg}(\varphi) = w_0 \dots w_n$, temos que

$$\int_{\mathbb{P}_\omega^n} c_1(\mathcal{O}_\omega(1))^n = \int_{(\mathbb{P}_\omega^n)_{Reg}} c_1(\mathcal{O}_\omega(1))^n = \frac{1}{\text{deg}(\varphi)} \int_{\mathbb{P}^n} c_1(\mathcal{O}(1))^n = \frac{1}{w_0 \cdots w_n}$$

□

2.2.3 Folheações de dimensão um em \mathbb{P}_ω^n

Analogamente ao caso projetivo temos a seqüência de Euler, veja [25]

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{C}} \rightarrow \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_\omega(w_i) \rightarrow T\mathbb{P}_\omega^n \rightarrow 0$$

1. $1 \mapsto (w_0 Z_0, \dots, w_n Z_n)$.
2. $(P_0, \dots, P_n) \mapsto \pi_*(\sum_{i=0}^n P_i \frac{\partial}{\partial Z_i})$, onde $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_\omega^n$ é a projeção canônica.

Tensorizando com $\mathcal{O}_\omega(d-1)$, obtemos a seguinte seqüência exata

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_\omega(d-1) \rightarrow \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_\omega(w_i + d-1) \rightarrow T\mathbb{P}_\omega^n \otimes \mathcal{O}_\omega(d-1) \rightarrow 0$$

Definição 2.11 [12] *Uma folheação holomorfa de dimensão um e grau d em \mathbb{P}_ω^n é induzida por um elemento de $H^0(\mathbb{P}_\omega^n, T\mathbb{P}_\omega^n \otimes \mathcal{O}_\omega(d-1))$.*

Proposição 2.12 *Se $d > 1 - \text{Max}\{w_i + w_j/i \neq j\}$, então $H^0(\mathbb{P}_\omega^n, T\mathbb{P}_\omega^n \otimes \mathcal{O}_\omega(d-1)) \neq 0$.*

Demonstração.

O par $\Omega_{\mathbb{P}_\omega^n}^r \times \Omega_{\mathbb{P}_\omega^n}^{n-r} \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}_\omega^n}^n$ induz $\Omega_{\mathbb{P}_\omega^n}^r \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\Omega_{\mathbb{P}_\omega^n}^{n-r}, \Omega_{\mathbb{P}_\omega^n}^n)$. Por outro lado temos $K_{\mathbb{P}_\omega^n} = \mathcal{O}_\omega(-\sum_{i=0}^n w_i)$. Então $T\mathbb{P}_\omega^n = (\Omega_{\mathbb{P}_\omega^n}^1)^\vee = \Omega_{\mathbb{P}_\omega^n}^{n-1} \otimes (\Omega_{\mathbb{P}_\omega^n}^n)^\vee = \Omega_{\mathbb{P}_\omega^n}^{n-1}(\sum_{i=0}^n w_i)$.

Uma vez que $H^0(\mathbb{P}_\omega^n, T\mathbb{P}_\omega^n \otimes \mathcal{O}_\omega(d-1)) \cong H^0(\mathbb{P}_\omega^n, \Omega_{\mathbb{P}_\omega^n}^{n-1}(\sum_{i=0}^n w_i + d-1))$, o resultado segue de [16], corolário 2.3.4. \square

Assim, uma folheação holomorfa de dimensão um e grau d em \mathbb{P}_ω^n é induzida por um campo de vetores em $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ da forma $X = \sum_{i=0}^n P_i(Z) \frac{\partial}{\partial Z_i}$, onde cada P_i é um polinômio quase-homogêneo de tipo (w_0, \dots, w_n) e grau de quase-homogeneidade $d + w_i - 1$. Isso é

$$P_i(\lambda^{w_0} Z_0, \dots, \lambda^{w_n} Z_n) = \lambda^{d+w_i-1} P_i(Z_0, \dots, Z_n), \quad i = 0, \dots, n.$$

Observe que $Q\mathcal{R}_\omega + X$ define a mesma folheação que X , onde $\mathcal{R}_\omega = w_0 Z_0 \frac{\partial}{\partial Z_0} + \dots + w_n Z_n \frac{\partial}{\partial Z_n}$ é o campo radial e Q é um polinômio quase homogêneo de tipo (w_0, \dots, w_n) e grau de quase-homogeneidade $d - 1$.

2.2.4 Aplicações em \mathbb{P}_ω^n

Agora passaremos as aplicações e exemplos nos espaços projetivos ponderados. O seguinte corolário é uma aplicação do corolário 2.3 do teorema 2.1.

Corolário 2.13 *Seja ξ uma seção holomorfa de $T\mathbb{P}_\omega^n \otimes \mathcal{O}_\omega(d - 1)$ com singularidades isoladas, então*

$$\sum_{p/\xi(p)=0} \mathcal{I}_p(\xi) = \frac{1}{w_0 \cdots w_n} \sum_{j=0}^n (d - 1)^{n-j} P_j(\omega),$$

onde

$$P_j(\omega) = \sum_{i_0 < \dots < i_{j-1}} w_{i_0} \cdots w_{i_{j-1}} \quad \forall j > 0,$$

$P_0(\omega) = 1$. Em particular temos

a. *Se ξ tem singularidades não degeneradas, então*

$$\sum_{p/\xi(p)=0} \frac{1}{\#G_p} = \frac{1}{w_0 \cdots w_n} \sum_{j=0}^n (d - 1)^{n-j} P_j(\omega)$$

b. *Se ξ tem singularidades não degeneradas e $Sing(\xi) \cap Sing(\mathbb{P}_\omega^n) = \emptyset$, então*

$$\#Sing(\xi) = \frac{1}{w_0 \cdots w_n} \sum_{j=0}^n (d - 1)^{n-j} P_j(\omega) \quad (\in \mathbb{N})$$

Demonstração.

Do corolário 2.3, basta com demonstrar que

$$\int_{\mathbb{P}_\omega^n} c_n(T\mathbb{P}_\omega^n \otimes \mathcal{O}_\omega(d - 1)) = \frac{1}{w_0 \cdots w_n} \sum_{j=0}^n (d - 1)^{n-j} P_j(\omega).$$

Vejamos isso. Considerando a sequência de Euler

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{C}} \rightarrow \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_\omega(w_i) \rightarrow T\mathbb{P}_\omega^n \rightarrow 0,$$

temos que $c(T\mathbb{P}_\omega^n) = c(\underline{\mathbb{C}})c(T\mathbb{P}_\omega^n) = c(\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_\omega(w_i))$. Então

$$\begin{aligned} c_n(T\mathbb{P}_\omega^n \otimes \mathcal{O}_\omega(d-1)) &= \sum_{j=0}^n c_j(T\mathbb{P}_\omega^n) c_1(\mathcal{O}_\omega(d-1))^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^n c_j\left(\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_\omega(w_i)\right) c_1(\mathcal{O}_\omega(d-1))^{n-j}. \end{aligned} \quad (2-5)$$

Consideremos a aplicação (que é funtorial) $\varphi : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}_\omega^n$, dada por $\varphi([z_0 : \dots : z_n]) = ([z_0^{w_0} : \dots : z_n^{w_n}])$. Tendo em conta que $\varphi^* \mathcal{O}_\omega(k) = \varphi^*(\mathcal{O}_\omega(1)^{\otimes k}) = (\varphi^* \mathcal{O}_\omega(1))^{\otimes k} = \mathcal{O}(1)^{\otimes k} = \mathcal{O}(k)$ e a propriedade funtorial de φ , temos em (2-5)

$$\begin{aligned} \varphi^* c_n(T\mathbb{P}_\omega^n \otimes \mathcal{O}_\omega(d-1)) &= \sum_{j=0}^n c_j\left(\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}(w_i)\right) c_1(\mathcal{O}(d-1))^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^n (d-1)^{n-j} c_j\left(\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}(w_i)\right) c_1(\mathcal{O}(1))^{n-j}. \end{aligned} \quad (2-6)$$

Calculemos $c_j(\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}(w_i))$. Denotemos $c_1(\mathcal{O}(1)) = h$, temos então

$$\begin{aligned} c\left(\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}(w_i)\right) &= \prod_{i=0}^n c(\mathcal{O}(w_i)) = \prod_{i=0}^n (1 + c_1(\mathcal{O}(w_i))) \\ &= \prod_{i=0}^n (1 + w_i h) = 1 + \sum_{j=1}^{n+1} P_j(\omega) h^j, \end{aligned}$$

onde $P_j(\omega) = \sum_{i_0 < \dots < i_{j-1}} w_{i_0} \cdots w_{i_{j-1}} \quad \forall j > 0$ e $P_0(\omega) := 1$ (as funções simétricas elementares). Assim em (2-6) temos

$$\begin{aligned} \varphi^* c_n(T\mathbb{P}_\omega^n \otimes \mathcal{O}_\omega(d-1)) &= (d-1)^n h^n + \sum_{j=1}^n (d-1)^{n-j} c_j\left(\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}(w_i)\right) h^{n-j} \\ &= (d-1)^n h^n + \sum_{j=1}^n (d-1)^{n-j} P_j(\omega) h^j h^{n-j} \\ &= [(d-1)^n + \sum_{j=1}^n (d-1)^{n-j} P_j(\omega)] h^n \\ &= \left[\sum_{j=0}^n (d-1)^{n-j} P_j(\omega) \right] h^n. \end{aligned}$$

Finalmente temos

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{P}_\omega^n} c_n(T\mathbb{P}_\omega^n \otimes \mathcal{O}_\omega(d-1)) &= \frac{1}{\# \text{Ker} \mathbb{P}_\omega^n} \int_{(\mathbb{P}_\omega^n)_{\text{Reg}}} c_n(T\mathbb{P}_\omega^n \otimes \mathcal{O}_\omega(d-1)) \\
 &= \frac{1}{\text{grau } \varphi} \int_{\mathbb{P}^n} \varphi^* c_n(T\mathbb{P}_\omega^n \otimes \mathcal{O}_\omega(d-1)) \\
 &= \frac{1}{w_0 \cdots w_n} \sum_{j=0}^n (d-1)^{n-j} P_j(\omega). \tag{2-7}
 \end{aligned}$$

□

No seguinte corolário daremos algumas condições para ter uma folhação não singular em \mathbb{P}_ω^n .

Corolário 2.14 *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa de grau d e com singularidades isoladas em \mathbb{P}_ω^n . Temos*

- a. *Se $d > 0$ ou $d - 1 \nmid P_n(\omega)$, então $\text{Sing}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$. Para $n = 2$, se $d \geq 0$ então $\text{Sing}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$.*
- b. *Suponha \mathcal{F} é induzida por uma seção holomorfa ξ de $T\mathbb{P}_\omega^n \otimes \mathcal{O}_\omega(d-1)$. Se para algum i temos que $w_i = 1$ e $\text{deg}(\xi_i) > 0$, então $\text{Sing}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$.*

Demonstração.

Na parte a. se $\text{Sing}(\xi) = \emptyset$, então pelo corolário 2.13 temos $\sum_{j=0}^n (d-1)^{n-j} P_j(\omega) = 0$, então $d-1 \mid P_n$ e $d \leq 0$ (se $d > 0$, então $\sum_{j=0}^n (d-1)^{n-j} P_j(\omega) > 0$). Na segunda parte é suficiente analisar o caso $d = 0$. Suponha $d = 0$ e $\text{Sing}(\xi) = \emptyset$, então pelo corolário 2.13 temos que $1 = P_1(\omega) - P_2(\omega) \leq 0$. Na parte b. das hipóteses temos que $0 < \text{deg}(\xi_i) = d + w_i - 1 = d$, então pelo item anterior temos que $\text{Sing}(\xi) \neq \emptyset$. □

No seguinte corolário apresentaremos algumas relações entre o conjunto singular de uma folhação e o conjunto singular do espaço \mathbb{P}_ω^2 .

Corolário 2.15 *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa de grau d e com singularidades isoladas em \mathbb{P}_ω^2 . Temos*

1. *Para $\omega = (1, 1, k)$, $k > 1$. Se $k \nmid d^2$, então \mathcal{F} admite uma singularidade em $(0 : 0 : 1)_\omega$.*
2. *Para $\omega = (1, 1, k)$, $k > 1$, com $d \geq 0$. Se $(0 : 0 : 1)_\omega$ é uma singularidade não degenerada de \mathcal{F} , então \mathcal{F} admite pelo menos uma singularidade a mais.*
3. *Para $\omega = (w_0, w_1, w_2)$, com $d \neq 1$. Se $Sing(\mathcal{F})$ são não degeneradas, então $Sing(\mathcal{F}) \neq \{(1 : 0 : 0)_\omega, (0 : 1 : 0)_\omega, (0 : 0 : 1)_\omega\}$.*

Demonstração.

Na parte 1. suponha que \mathcal{F} não admite uma singularidade em $(0 : 0 : 1)_\omega$, então pelo corolário 2.13 temos que $\frac{d^2}{k} + d + 1 = \frac{(d-1)^2 + (d-1)P_1(\omega) + P_2(\omega)}{k} \in \mathbb{Z}$, em particular $k \mid d^2$. Na parte 2. suponha o contrario, então pelo corolário 2.13, $\frac{1}{k} = \frac{d^2 + kd + k}{k}$ o que é impossível uma vez que $k > 1$ e $d \geq 0$. Na parte 3. suponha o contrario, então pelo corolário 2.13, $\frac{1}{w_0} + \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} = \frac{(d-1)^2 + (d-1)P_1(\omega) + P_2(\omega)}{w_0 w_1 w_2}$. Então $d = 1$ ou $d = 1 - P_1(\omega)$. Pela hipótese $d \neq 1$, então $d = 1 - P_1(\omega)$. Mas isso é uma contradição pois pela proposição 2.12, $d > 1 - \text{Max}\{w_i + w_j / i \neq j\} > 1 - P_1(\omega)$.

□

Exemplo 2.16

1. Seja $\xi = Y^2 \frac{\partial}{\partial X} + Z \frac{\partial}{\partial Y} + X^3 \frac{\partial}{\partial Z}$, onde $d = 2$ e $\omega = (1, 1, 2)$.

Vamos calcular $\text{Sing}(\mathcal{F})$. Sabemos que $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \pi(\{p \in \mathbb{C}^3 - \{0\} / \mathcal{R}_p \wedge \xi_p = 0\})$.

De

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ Y^2 & Z & X^3 \\ X & Y & 2Z \end{vmatrix} = (2Z^2 - YX^3, 2ZY^2 - X^4, Y^3 - XZ) = 0,$$

temos o seguinte sistema (em $\mathbb{C}^3 - \{0\}$):

$$\begin{cases} 2Z^2 - YX^3 = 0 \\ 2ZY^2 - X^4 = 0 \\ Y^3 - XZ = 0, \end{cases}$$

que tem como solução a $(\sqrt[5]{2}\alpha Y, Y, \frac{\alpha^4}{\sqrt[5]{2}}Y^2)$, onde $Y \in \mathbb{C} - \{0\}$ e $\alpha^5 = 1$. Passando ao quociente (via π), temos que $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{(\sqrt[10]{8}\alpha^4 : \sqrt[10]{2}\alpha^3 : 1)_\omega / \alpha^5 = 1\}$. Observamos que as singularidades de \mathcal{F} podem ser estudadas na carta U_2 .

Agora estudaremos o campo ξ localmente. Considere o campo radial

$$\mathcal{R} = w_0 X \frac{\partial}{\partial X} + w_1 Y \frac{\partial}{\partial Y} + w_2 Z \frac{\partial}{\partial Z}.$$

Em $U_2 = \{Z \neq 0\}$, de $\mathcal{R} = 0$ temos que $\frac{\partial}{\partial Z} = -\frac{1}{2Z}(X \frac{\partial}{\partial X} + Y \frac{\partial}{\partial Y})$. Levando esta expressão de $\frac{\partial}{\partial Z}$ em ξ com $Z = 1$, temos a expressão local $\tilde{\xi}$ de ξ em U_2

$$\tilde{\xi} = (y^2 - \frac{1}{2}x^4) \frac{\partial}{\partial x} + (1 - \frac{1}{2}yx^3) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Suponha $\tilde{\xi} = (2y^2 - x^4) \frac{\partial}{\partial x} + (2 - yx^3) \frac{\partial}{\partial y}$, vamos calcular $\det(J\tilde{\xi})$.

$$\det(J\tilde{\xi}) = \begin{vmatrix} -4x^3 & 4y \\ -3yx^2 & -x^3 \end{vmatrix} = 4x^2(x^4 + 3y^2).$$

Uma vez que $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \text{Sing}(\mathcal{F})|_{U_2} = \{(\sqrt[10]{8}\beta, \sqrt[10]{2}\beta^2)/\beta^5 = 1\}$, concluímos que $\text{Sing}(\mathcal{F})$ são não degeneradas, $\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap \text{Sing}(\mathbb{P}_\omega^2) = \emptyset$ e $\#\text{Sing}(\mathcal{F}) = 5$. Temos então que o corolário 2.13–b é satisfeito.

2. Seja $\xi = Y^2 \frac{\partial}{\partial X} + Z \frac{\partial}{\partial Y} + XY^2 \frac{\partial}{\partial Z}$, onde $d = 2$ e $\omega = (1, 1, 2)$.

Vamos calcular $\text{Sing}(\mathcal{F})$. De

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ Y^2 & Z & XY^2 \\ X & Y & 2Z \end{vmatrix} = (2Z^2 - XY^3, 2ZY^2 - X^2Y^2, Y^3 - XZ) = 0,$$

temos o seguinte sistema (em $\mathbb{C}^3 - \{0\}$):

$$\begin{cases} 2Z^2 - XY^3 = 0 \\ (2Z - X^2)Y^2 = 0 \\ Y^3 - XZ = 0, \end{cases}$$

que tem como solução a $(X, 0, 0)$, $(X, \frac{\alpha}{\sqrt[3]{2}}X, \frac{1}{2}X^2)$, onde $X \in \mathbb{C} - \{0\}$ e $\alpha^3 = 1$. Passando ao quociente, temos que $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{(1 : 0 : 0)_\omega, (1 : \frac{\alpha}{\sqrt[3]{2}} : \frac{1}{2})_\omega/\alpha^3 = 1\}$. Observamos que as singularidades de \mathcal{F} podem ser estudadas na carta U_0 .

Agora estudaremos o campo ξ localmente.

Em $U_0 = \{X \neq 0\}$, de $\mathcal{R} = 0$ temos que $\frac{\partial}{\partial X} = -\frac{1}{X}(Y \frac{\partial}{\partial Y} + 2Z \frac{\partial}{\partial Z})$. Levando esta expressão de $\frac{\partial}{\partial X}$ em ξ com $X = 1$, temos a expressão local $\tilde{\xi}$ de ξ em U_0

$$\tilde{\xi} = (z - y^3) \frac{\partial}{\partial y} + y^2(1 - 2z) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Vamos calcular $\det(J\tilde{\xi})$.

$$\det(J\tilde{\xi}) = \begin{vmatrix} -3y^2 & 1 \\ 2y(1 - 2z) & -2y^2 \end{vmatrix} = 2y(3y^3 + 2z - 1).$$

Uma vez que $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \text{Sing}(\mathcal{F})|_{U_0} = \{(0, 0), (\frac{\alpha}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{2})/\alpha^3 = 1\}$, concluímos que $(0, 0)$ é degenerada e $(\frac{\alpha}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{2})$, com $\alpha^3 = 1$, são não degeneradas, sendo $\mathcal{I}_{(0,0)}(\xi) = 2$ e $\mathcal{I}_{(\frac{\alpha}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{2})}(\xi) = 1$. Uma vez que $\sum_{p/\xi(p)=0} \mathcal{I}_p(\xi) = 5$, o corolário 2.13 é satisfeito.

3. Seja $\xi = Y^3 \frac{\partial}{\partial X} + Z^7 \frac{\partial}{\partial Y} + X^6 \frac{\partial}{\partial Z}$, onde $d = 6$ e $\omega = (1, 2, 1)$.

Vamos calcular $\text{Sing}(\mathcal{F})$. De

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ Y^3 & Z^7 & X^6 \\ X & 2Y & Z \end{vmatrix} = (Z^8 - 2YX^6, ZY^3 - X^7, 2Y^4 - XZ^7) = 0,$$

temos o seguinte sistema (em $\mathbb{C}^3 - \{0\}$):

$$\begin{cases} Z^8 = 2YX^6 \\ ZY^3 = X^7 \\ 2Y^4 = XZ^7, \end{cases}$$

que tem como solução a $(X, \frac{\alpha^8}{\sqrt[25]{2}}X^2, \sqrt[25]{8}\alpha X)$, onde $X \in \mathbb{C} - \{0\}$ e $\alpha^{25} = 1$. Passando ao quociente (via π), temos que $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{(1 : \frac{\alpha^8}{\sqrt[25]{2}} : \sqrt[25]{8}\alpha)_\omega / \alpha^{25} = 1\}$. Observamos que as singularidades de \mathcal{F} podem ser estudadas na carta U_0 .

Agora estudaremos o campo ξ localmente.

Em $U_0 = \{X \neq 0\}$, de $\mathcal{R} = 0$ temos que $\frac{\partial}{\partial X} = -\frac{1}{X}(2Y \frac{\partial}{\partial Y} + Z \frac{\partial}{\partial Z})$. Levando esta expressão de $\frac{\partial}{\partial X}$ em ξ com $X = 1$, temos a expressão local $\tilde{\xi}$ de ξ em U_0

$$\tilde{\xi} = (-2y^4 + z^3) \frac{\partial}{\partial y} + (1 - y^3z) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Vamos calcular $\det(J\tilde{\xi})$.

$$\det(J\tilde{\xi}) = \begin{vmatrix} -8y^3 & 3z^2 \\ -3y^2z & -y^3 \end{vmatrix} = y^2(8y^4 + 9z^3).$$

Uma vez que $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \text{Sing}(\mathcal{F})|_{U_0} = \{(\frac{\alpha^8}{\sqrt[25]{2}}, \sqrt[25]{8}\alpha)/\alpha^{25} = 1\}$, concluímos que $\text{Sing}(\mathcal{F})$ são não degeneradas, $\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap \text{Sing}(\mathbb{P}_\omega^2) = \emptyset$ e $\#\text{Sing}(\mathcal{F}) = 25$. Temos então que o corolário 2.13–b é satisfeito.

4. Seja $\xi = Y^5 \frac{\partial}{\partial X} + X^5 \frac{\partial}{\partial Y} + YZ^2 \frac{\partial}{\partial Z}$, onde $d = 5$ e $\omega = (1, 1, 3)$.

Vamos calcular $\text{Sing}(\mathcal{F})$. De

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ Y^5 & X^5 & YZ^2 \\ X & Y & 3Z \end{vmatrix} = (3ZX^5 - Y^2Z^2, 3ZY^5 - XYZ^2, Y^6 - X^6) = 0,$$

temos o seguinte sistema (em $\mathbb{C}^3 - \{0\}$):

$$\begin{cases} 3ZX^5 = Y^2Z^2 \\ 3ZY^5 = XYZ^2 \\ Y^6 = X^6, \end{cases}$$

que tem como solução em U_0 a $(X, \alpha X, 0)$, $(X, \alpha X, 3\alpha^4 X^3)$, onde $X \in \mathbb{C} - \{0\}$ e $\alpha^6 = 1$, e tem como solução em U_2 a $(0, 0, Z)$, onde $Z \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Passando ao quociente, temos que $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \text{Sing}(\mathcal{F})|_{U_0} \cup \text{Sing}(\mathcal{F})|_{U_2}$, onde $\text{Sing}(\mathcal{F})|_{U_0} = \{(1 : \alpha : 0)_\omega, (1 : \alpha : 3\alpha^4)_\omega / \alpha^6 = 1\}$ e $\text{Sing}(\mathcal{F})|_{U_2} = \{(0 : 0 : 1)_\omega\}$.

Agora estudaremos o campo ξ localmente.

Em $U_0 = \{X \neq 0\}$, de $\mathcal{R} = 0$ temos que $\frac{\partial}{\partial X} = -\frac{1}{X}(Y \frac{\partial}{\partial Y} + 3Z \frac{\partial}{\partial Z})$. Levando esta expressão de $\frac{\partial}{\partial X}$ em ξ com $X = 1$, temos a expressão local $\tilde{\xi}$ de ξ em U_0

$$\tilde{\xi} = (1 - y^6) \frac{\partial}{\partial y} + (yz^2 - 3zy^5) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Vamos calcular $\det(J\tilde{\xi})$.

$$\det(J\tilde{\xi}) = \begin{vmatrix} -6y^5 & 0 \\ z^2 - 15zy^4 & 2yz - 3y^5 \end{vmatrix} = -6y^5(2yz - 3y^5).$$

Observamos que $\text{Sing}(\mathcal{F})|_{U_0} = \{(\alpha, 0), (\alpha, 3\alpha^4)/\alpha^6 = 1\}$ consiste de singularidades não degeneradas. Assim $\mathcal{I}_{(\alpha,0)}(\xi) = \mathcal{I}_{(\alpha,3\alpha^4)}(\xi) = 1$, sendo a soma dos índices das singularidades de ξ no aberto U_0 igual a 12 (observe que temos 12 singularidades).

Em $U_2 = \{Z \neq 0\}$, de $\mathcal{R} = 0$ temos que $\frac{\partial}{\partial Z} = -\frac{1}{3}(X\frac{\partial}{\partial X} + Y\frac{\partial}{\partial Y})$. Levando esta expressão de $\frac{\partial}{\partial Z}$ em ξ com $Z = 1$, temos a expressão local $\tilde{\xi}$ de ξ em U_2

$$\tilde{\xi} = (y^5 - \frac{1}{3}xy)\frac{\partial}{\partial x} + (x^5 - \frac{1}{3}y^2)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Vamos calcular $\det(J\tilde{\xi})$.

$$\det(J\tilde{\xi}) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}y & 5y^4 - \frac{1}{3}x \\ 5x^4 & -\frac{2}{3}y \end{vmatrix} = \frac{2}{9}y^2 - 5x^4(5y^4 - \frac{1}{3}x).$$

Observamos que $\text{Sing}(\mathcal{F})|_{U_2} = \{(0,0)\}$ é uma singularidade degenerada e $\mathcal{I}_{(0,0)}(\xi) = \frac{7}{3}$. Uma vez que $\sum_{p/\xi(p)=0} \mathcal{I}_p(\xi) = \frac{43}{3}$, o corolário 2.13 é satisfeito.

5. Sejam $w_0, \dots, w_n \in \mathbb{Z}^+$ coprimos 2 – 2. Suponha $w_i \neq w_j \forall i \neq j$. Considere o campo

$$X = \sum_{k=0}^n Z_k \frac{\partial}{\partial Z_k} \in H^0(\mathbb{P}_\omega^n, T\mathbb{P}_\omega^n),$$

onde $d = 1$.

Na carta afim $Z_i \neq 0$ (suponha $Z_i = 1$), de

$$R = \sum_{k=0}^n w_k Z_k \frac{\partial}{\partial Z_k} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial Z_i} = - \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{w_k}{w_i} Z_k \frac{\partial}{\partial Z_k},$$

temos a expressão local de X em U_i

$$X_i = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \left(1 - \frac{w_k}{w_i}\right) Z_k \frac{\partial}{\partial Z_k},$$

onde observamos que $\text{Sing}(X_i) = \{0\}$ e ela é não degenerada, logo

$$\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{(1 : 0 : \cdots : 0)_\omega, (0 : 1 : \cdots : 0)_\omega, \dots, (0 : 0 : \cdots : 1)_\omega\}.$$

Temos então que

$$\sum_{p/X(p)=0} \mathcal{I}_p(X) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{w_i} = \frac{P_n(\omega)}{w_0, \dots, w_n},$$

e assim o corolário 2.13 é satisfeito. Observe também o corolário 2.15-3.

A seguinte proposição é uma aplicação do corolário 2.5, mas antes de enunciar a proposição daremos alguns fatos que serão importantes para nós (veja [6],[18], [21], [26]). Denotaremos por $x = (x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2$ e $y = (y_0 : y_1) \in \mathbb{P}^1$ as coordenadas projetivas correspondentes. A **superfície de Hirzebruch**, $k \geq 0$ é

$$\mathcal{H}_k = \{(x, y) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid x_0 y_0^k = x_1 y_1^k\}.$$

Sejam

$$A = \{y_0 = 0\} \subset \mathcal{H}_k,$$

$$B = \{y_1 = 0\} \subset \mathcal{H}_k,$$

$$C = \{x_2 = 0\} \subset \mathcal{H}_k,$$

$$D = \{x_0 = x_1 = 0\} \subset \mathcal{H}_k.$$

Temos que \mathcal{H}_k é coberta por quatro abertos $U_i \cong \mathbb{C}^2$, $i = 1, 2, 3, 4$, que são definidos por

$$U_1 = \mathcal{H}_k - B \cup D : (z, w) = \left(\frac{y_0}{y_1}, \frac{x_2}{x_0}\right),$$

$$U_2 = \mathcal{H}_k - A \cup D : (z, w) = \left(\frac{y_1}{y_0}, \frac{x_2}{x_1}\right),$$

$$U_3 = \mathcal{H}_k - A \cup C : (z, w) = \left(\frac{y_1}{y_0}, \frac{x_1}{x_2}\right),$$

$$U_4 = \mathcal{H}_k - B \cup C : (z, w) = \left(\frac{y_0}{y_1}, \frac{x_0}{x_2}\right).$$

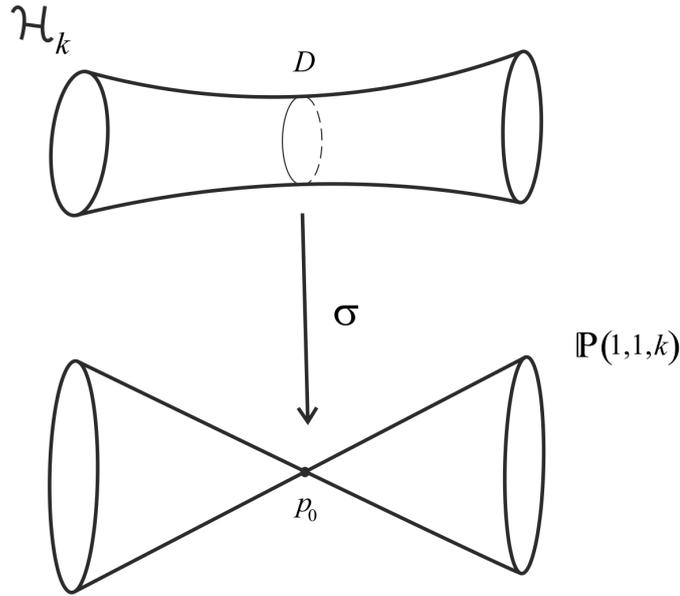
Como veremos a seguir, a k -ésima superfície de Hirzebruch pode ser definida também como $\mathbb{F}_k = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-k)) \longrightarrow \mathbb{P}^1$.

Denotemos por $\mathbb{P}_k^2 = \mathbb{P}(1, 1, k)$ e por $z = (z_0 : z_1 : z_2)_k$ as correspondentes coordenadas. Seja a subvariedade $\mathbb{V}_k = \{(z, y) \in \mathbb{P}_k^2 \times \mathbb{P}^1 \mid z_0 y_0 = z_1 y_1\}$, temos que $\mathbb{V}_k \cong \mathbb{F}_k$. O isomorfismo é dado por $\varphi : \mathbb{V}_k \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-k))$, $\varphi(z, y) = (z_2 : \lambda y^{\otimes k})$, onde λ é um número complexo determinado por $z_0^k = \lambda y_1^k$ e $z_1^k = \lambda y_0^k$. A inversa é dada por $\varphi^{-1}(z_2 : \lambda y^{\otimes k}) = ((\lambda^{\frac{1}{k}} y_1 : \lambda^{\frac{1}{k}} y_0 : z_2)_k, y)$.

O morfismo $\mathbb{P}_k^2 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$, dado por $(z, y) \mapsto ((x_0 = z_0^k : x_1 = z_1^k : x_2 = z_2), y)$ dá um biholomorfismo $\mathbb{V}_k \cong \mathcal{H}_k$.

Para $k \geq 1$, $D \subset \mathcal{H}_k \cong \mathbb{F}_k$ é a única seção com $D^2 = -k$, C é uma seção com $C^2 = k$ e A, B são duas fibras. Além disso se verifica que $\text{Pic}(\mathbb{F}_k) = \mathbb{Z}D \oplus \mathbb{Z}L$, com $D^2 = -k$, $DL = 1$ e $L^2 = 0$, onde L é uma fibra.

Denotemos por $p_0 = (0 : 0 : 1)_k \in \mathbb{P}_k^2$ o ponto singular e $\sigma = \pi_1|_{\mathbb{V}_k} : \mathbb{V}_k \longrightarrow \mathbb{P}_k^2$. Temos então que $\sigma(\{p_0\} \times \mathbb{P}^1) = \{p_0\}$ e $\sigma : \mathbb{V}_k - \{p_0\} \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}_k^2 - \{p_0\}$. Então a k -ésima superfície de Hirzebruch \mathbb{V}_k é o blow up de \mathbb{P}_k^2 no ponto singular p_0 , assim \mathbb{V}_k é uma resolução de \mathbb{P}_k^2 .



Teorema 2.17 *Considere $\sigma : \mathcal{H}_k \longrightarrow \mathbb{P}_k^2$ a resolução dada anteriormente. Seja $\xi \in H^0(\mathbb{P}_k^2, T\mathbb{P}_k^2 \otimes \mathcal{O}_k(d-1))$, então*

$$\sum_{\tilde{p} \in D / \sigma^* \xi(\tilde{p})=0} \mathcal{I}_{\tilde{p}}(\sigma^* \xi) - \mathcal{I}_{p_0}(\xi) = (d^2 + kd + k)(k - \frac{1}{k}),$$

onde $\sigma^{-1}(p_0) = D$.

Demonstração.

Do corolário 2.5, basta com calcular $\int_{\mathcal{H}_k} c_2(p_0, \sigma^*(T\mathbb{P}_k^2 \otimes \mathcal{O}_k(d-1)))$. Do teorema 2.4 e do corolário 2.13 temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{H}_k} c_2(p_0, \sigma^*(T\mathbb{P}_k^2 \otimes \mathcal{O}_k(d-1))) &= \int_{\mathcal{H}_k} c_2(\sigma^*(T\mathbb{P}_k^2 \otimes \mathcal{O}_k(d-1))) \\ &- \frac{(d-1)^2 + (d-1)P_1(w) + P_2(w)}{k}, \end{aligned} \quad (2-8)$$

onde $\omega = (1, 1, k)$. Calculemos

$$\begin{aligned} c_2(\sigma^*(T\mathbb{P}_k^2 \otimes \mathcal{O}_k(d-1))) &= c_2(\sigma^*T\mathbb{P}_k^2) + c_1(\sigma^*T\mathbb{P}_k^2)c_1(\sigma^*\mathcal{O}_k(d-1)) \\ &+ c_1(\sigma^*\mathcal{O}_k(d-1))^2. \end{aligned} \quad (2-9)$$

Da sequência de Euler

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{O}_k(1) \oplus \mathcal{O}_k(1) \oplus \mathcal{O}_k(k) \rightarrow T\mathbb{P}_k^2 \rightarrow 0,$$

temos que $c_2(\sigma^*T\mathbb{P}_k^2) = (1+2k)c_1(\sigma^*\mathcal{O}_k(1))^2$ e $c_1(\sigma^*T\mathbb{P}_k^2) = (2+k)c_1(\sigma^*\mathcal{O}_k(1))$. Levando isso na equação 2-9, temos que $c_2(\sigma^*(T\mathbb{P}_k^2 \otimes \mathcal{O}_k(d-1))) = (d^2 + kd + k)c_1(\sigma^*\mathcal{O}_k(1))^2$. Calculemos então $\sigma^*\mathcal{O}_k(1)$.

Seja $S = (z_0 = 0)$ em \mathbb{P}_k^2 , uma vez que $\mathcal{O}_k(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(S)$, basta com conhecer $\sigma^*(S)$. De $\sigma^{-1}(\{z_0 = 0\}) \cap U_3 = \{(\frac{x_0}{x_2} : \frac{x_1}{x_2} : 1), (1 : \frac{y_1}{y_0}) \mid \frac{x_1}{x_2} = 0\} \cup \{(\frac{x_0}{x_2} : \frac{x_1}{x_2} : 1), (1 : \frac{y_1}{y_0}) \mid (\frac{y_1}{y_0})^k = 0\}$, encontramos que $\sigma^*\mathcal{O}_k(1) = kL + D$, com $D^2 = -k$, $L^2 = 0$ e $LD = 0$.

Temos então que $\int_{\mathcal{H}_k} c_2(\sigma^*(T\mathbb{P}_k^2 \otimes \mathcal{O}_k(d-1))) = (d^2 + kd + k)(kL + D)^2 = (d^2 + kd + k)k$. Finalmente, levando isto na equação 2-8, o resultado segue uma vez que $P_1(\omega) = 2 + k$ e $P_2(\omega) = 1 + 2k$.

□

Observação 2.18 *Observe que esta proposição da outra demonstração do corolário 2.15-1. Vejamos isso. Suponha \mathcal{F} é induzida por uma seção holomorfa ξ de $T\mathbb{P}_\omega^2 \otimes \mathcal{O}_\omega(d-1)$, se \mathcal{F} não admite uma singularidade em p_0 , então*

$$\mathcal{I}_{p_0}(\xi) = 0 \text{ e } (d^2 + kd + k)\left(k - \frac{1}{k}\right) = \sum_{\tilde{p} \in D/\sigma^*\xi(\tilde{p})=0} \mathcal{I}_{\tilde{p}}(\sigma^*\xi) \in \mathbb{Z},$$

o que implica que $k|d^2$.

Teorema 2.19 *Seja ξ uma seção holomorfa de $T\mathbb{P}_\omega^2 \otimes \mathcal{O}_\omega(d-1)$ com singularidades isoladas, então*

$$\sum_{p/\xi(p)=0} \mathcal{BB}(\mathcal{F}, p) = \frac{1}{w_0 w_1 w_2} (|\omega| + d - 1)^2.$$

Demonstração.

De acordo com o teorema 2.1, basta com demonstrar

$$\int_{\mathbb{P}_\omega^2} c_1^2(T\mathbb{P}_\omega^2 - \mathcal{O}_\omega(1-d)) = \frac{1}{w_0 w_1 w_2} (|\omega| + d - 1)^2.$$

Vejamos isso.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{P}_\omega^2} c_1^2(T\mathbb{P}_\omega^2 - \mathcal{O}_\omega(1-d)) &= \int_{\mathbb{P}_\omega^2} \left(c_1(T\mathbb{P}_\omega^2) + c_1(\mathcal{O}_\omega(d-1)) \right)^2 \\ &= \frac{1}{\#Ker\mathbb{P}_\omega^2} \int_{(\mathbb{P}_\omega^2)_{Reg}} \left(|\omega| c_1(\mathcal{O}_\omega(1)) + (d-1) c_1(\mathcal{O}_\omega(1)) \right)^2 \\ &= \frac{1}{\text{grau } \varphi} \int_{\mathbb{P}^2} \varphi^* \left((|\omega| + d - 1)^2 c_1(\mathcal{O}_\omega(1))^2 \right) \\ &= \frac{1}{w_0 w_1 w_2} (|\omega| + d - 1)^2 \int_{\mathbb{P}^2} c_1(\mathcal{O}(1))^2 \\ &= \frac{1}{w_0 w_1 w_2} (|\omega| + d - 1)^2. \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.20 No exemplo 2.17-5 para $n = 2$, localmente na carta U_k , $k = 0, 1, 2$, temos que 0 é uma singularidade não degenerada de X , temos então que

$$\mathcal{BB}(\mathcal{F}, 0) = \frac{1}{w_k} \left(2 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right),$$

onde λ_1, λ_2 são os autovalores de $JX(0)$. Assim

$$\mathcal{BB}(\mathcal{F}, 0) = \frac{1}{w_k} \left(2 + \frac{w_k - w_i}{w_k - w_j} + \frac{w_k - w_j}{w_k - w_i} \right),$$

$\forall k = 0, 1, 2$. Um cálculo mostra que

$$\sum_{p/X(p)=0} \mathcal{BB}(\mathcal{F}, p) = \frac{1}{w_0 w_1 w_2} (w_0 + w_1 + w_2)^2.$$

Assim, uma vez que $d = 1$, o teorema anterior 2.19 é satisfeito.

Definição 2.21 Seja ξ uma seção holomorfa de $T\mathbb{P}_\omega^2 \otimes \mathcal{O}_\omega(d-1)$ com singularidades isoladas. Seja \mathcal{F} a folheação induzida por ξ . Dado $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$, diremos que p é uma singularidade **radial** se localmente (via uma carta orbifold) ξ é da forma

$$x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + \dots$$

Se todas as singularidades de ξ são radiais, então $\mathcal{BB}(\mathcal{F}, p) = 4\mathcal{I}_p(\xi) \forall p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$.

Então

$$\begin{aligned} \frac{1}{w_0 w_1 w_2} (|\omega| + d - 1)^2 &= \sum_{p/\xi(p)=0} \mathcal{BB}(\mathcal{F}, p) \\ &= 4 \sum \mathcal{I}_p(\xi) \\ &= 4 \frac{(d-1)^2 + (d-1)P_1(\omega) + P_2(\omega)}{w_0 w_1 w_2}, \end{aligned}$$

então $3(d-1)^2 + 2P_1(\omega)(d-1) + 4P_2(\omega) - P_1(\omega)^2 = 0$ e assim

$$d = \frac{1}{3} \left(3 - P_1(\omega) \pm 2\sqrt{P_1(\omega)^2 - 3P_2(\omega)} \right).$$

Temos então os seguintes corolários

Corolário 2.22 *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa de grau d e com singularidades isoladas em $\mathbb{P}(1, 1, k)$. Suponha que todas as singularidades são radiais, então $d = \frac{k-1}{3}$ ou $d = 1 - k$. Em particular, se $k = 1$, então $d = 0$.*

Demonstração.

Uma vez que $P_1(\omega) = 2 + k$ e $P_2(\omega) = 1 + 2k$, temos que $P_1(\omega)^2 - 3P_2(\omega) = (k - 1)^2$, assim $d = \frac{1}{3}(1 - k \pm 2(k - 1))$ e o resultado segue diretamente.

□

Exemplo 2.23 *O campo $X = -k\frac{\partial}{\partial Z_2}$ em $\mathbb{P}(1, 1, k)$, $k > 1$ tem grau $d = 1 - k$ e tem uma única singularidade que é de tipo radial na carta $U_2 : Z_2 = 1$. Observe que $d > 1 - \text{Max}\{w_i + w_j/i \neq j\} = -k$.*

Corolário 2.24 *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa de grau d e com singularidades isoladas em $\mathbb{P}(a^2 - b^2 + c, a^2 - 2ab + c, c)$. Suponha que todas as singularidades são radiais. Se $3 \nmid 2a - b$, então $d = 1 + b^2 - c$.*

Demonstração.

Na expressão

$$d = \frac{1}{3} \left(3 - P_1(\omega) \pm 2\sqrt{P_1(\omega)^2 - 3P_2(\omega)} \right),$$

uma vez que $w_0 = a^2 - b^2 + c$, $w_1 = a^2 - 2ab + c$ e $w_2 = c$, temos que $P_1(\omega)^2 - 3P_2(\omega) = (a^2 + b^2 - ab)^2$, então $d = 1 - c + b^2$ ou $d = 1 - c - \frac{1}{3}(2a - b)^2$ e se tem o resultado.

□

2.3 Problema de Poincaré em espaços projetivos ponderados

Nesta seção primeiro provaremos uma fórmula que nos dá a soma dos índices das singularidades de um campo de vetores holomorfo sobre uma hipersuperfície quase homogênea e quase suave (veja a definição abaixo), invariante pela folheação holomorfa de dimensão um em \mathbb{P}_ω^n induzida pelo campo. Depois como uma aplicação do resultado anterior daremos uma cota para o grau de tal hipersuperfície em \mathbb{P}_ω^2 . Finalmente enunciaremos uma generalização deste último resultado para espaços projetivos ponderados de dimensão arbitrária. Este último resultado é uma solução para uma versão do problema de Poincaré em espaços projetivos ponderados e um trabalho em colaboração com F. Enrique Brochero e Maurício Corrêa Jr. (Veja [7]).

Uma hipersuperfície **quase homogênea** V em \mathbb{P}_ω^n , de **grau de quase homogeneidade** d_0 , é dado por $V = \{f = 0\}$, onde $f \in H^0(\mathbb{P}_\omega^n, \mathcal{O}_\omega(d_0))$. Diremos que $V = \{f = 0\}$ é **quase suave** se seu cone tangente $V = \{f = 0\}$ em $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ é suave.

Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa de grau d e com singularidades isoladas em \mathbb{P}_ω^n . Suponha que \mathcal{F} é induzida por uma seção ξ de $T\mathbb{P}_\omega^n \otimes \mathcal{O}_\omega(d-1)$. Seja $V = \{P = 0\} \hookrightarrow \mathbb{P}_\omega^n$ uma hipersuperfície quase suave, irreduzível e invariante por \mathcal{F} e com grau de quase homogeneidade $\partial P = d_0$. Temos então

Teorema 2.25

$$\sum_{p \in V/\xi|_V(p)=0} \mathcal{I}_p(\xi|_V) = \frac{1}{w_0 \cdots w_n} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{k=0}^j (-1)^k P_{j-k}(\omega) d_0^{k+1} \right] (d-1)^{n-1-j}.$$

Em particular, se $V \cap \text{Sing}(\mathbb{P}_\omega^n) = \emptyset$ e $\xi|_V$ tem singularidades não degeneradas, então

$$\#(\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap V) = \frac{1}{w_0 \cdots w_n} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{k=0}^j (-1)^k P_{j-k}(\omega) d_0^{k+1} \right] (d-1)^{n-1-j} \in \mathbb{N}$$

Demonstração.

Do corolário 2.3–a, temos que

$$\sum_{p \in V/\xi|_V(p)=0} \mathcal{I}_p(\xi|_V) = \int_V c_{n-1}(TV \otimes \mathcal{O}_\omega(d-1)|_V).$$

Então, basta com calcular $\int_V c_{n-1}(TV \otimes \mathcal{O}_\omega(d-1)|_V)$. Considere a sequência de Euler

$$0 \longrightarrow TV \longrightarrow T\mathbb{P}_\omega^n|_V \longrightarrow N_V \longrightarrow 0,$$

onde N_V é o fibrado normal. Segue então

$$c(\mathbb{P}_\omega^n) = c(V)c(N_V).$$

Então

$$c_j(V) = c_j(\mathbb{P}_\omega^n) - c_{j-1}(V)c_1(N_V), \quad 1 \leq j \leq n-1. \quad (2-10)$$

Na prova do corolário 2.13, temos que

$$c_j(\mathbb{P}_\omega^n) = P_j(\omega)c_1(\mathcal{O}_\omega(1))^j. \quad (2-11)$$

Por outro lado, uma vez que

$$N_V = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_\omega^n}(V)|_V = \mathcal{O}_\omega(d_0)|_V,$$

segue que

$$c_1(N_V) = d_0c_1(\mathcal{O}_\omega(1)|_V) \quad (2-12)$$

Levando 2-11 e 2-12 em 2-10, temos

$$c_j(V) = \left(\sum_{k=0}^j (-1)^k P_j(\omega) d_0^k \right) c_1(\mathcal{O}_\omega(1))^j, \quad 0 \leq j \leq n-1.$$

Então

$$\begin{aligned} & c_{n-1}(TV \otimes \mathcal{O}_\omega(d-1)|_V) \\ &= c_{n-1}(V) + c_{n-2}(V)c_1(\mathcal{O}_\omega(d-1)) + \cdots + c_1(\mathcal{O}_\omega(d-1))^{n-1} \\ &= c_{n-1}(V) + c_{n-2}(V)c_1(\mathcal{O}_\omega(1))(d-1) + \cdots + c_1(\mathcal{O}_\omega(1))^{n-1}(d-1)^{n-1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \left[\left(\sum_{k=0}^j (-1)^k P_{j-k}(\omega) d_0^k \right) c_1(\mathcal{O}_\omega(1))^{n-1} \right] (d-1)^{n-1-j}. \end{aligned} \quad (2-13)$$

Calculemos $\int_V c_1(\mathcal{O}_\omega(1))^{n-1}$. Usando dualidade de Poincaré (veja [32], [25]), podemos ver a $V = \{f = 0\}$ como o dual de Poincaré de $c_1(\mathcal{O}_\omega(d_0))$, assim usando a proposição 2.10 temos

$$\begin{aligned} \int_V c_1(\mathcal{O}_\omega(1))^{n-1} &= \int_{\mathbb{P}_\omega^n} c_1(\mathcal{O}_\omega(1))^{n-1} \wedge c_1(\mathcal{O}_\omega(d_0)) \\ &= d_0 \int_{\mathbb{P}_\omega^n} c_1(\mathcal{O}_\omega(1))^n \\ &= \frac{d_0}{w_0 \cdots w_n}. \end{aligned}$$

Finalmente o resultado segue levando esta ultima equação em 2-13 e integrando sobre V .

□

Vejamos uma consequência importante desta proposição. Uma generalização do problema de Poincaré para \mathbb{P}_ω^2 é a seguinte

Teorema 2.26 [12] *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa de dimensão um e com singularidades isoladas em \mathbb{P}_ω^2 . Seja $S = \{P = 0\} \hookrightarrow \mathbb{P}_\omega^2$ uma curva quase suave, irredutível e invariante por \mathcal{F} tal que $Sing(\mathcal{F}) \cap Sing(\mathbb{P}_\omega^2) = \emptyset$. Então*

$$\deg(S) \leq \deg(\mathcal{F}) + |\omega| - 2.$$

Uma generalização do problema de Poincaré para \mathbb{P}^n é a seguinte

Teorema 2.27 [33] *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa de dimensão um e com singularidades isoladas em \mathbb{P}^n . Seja $V = \{P = 0\} \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície suave, irredutível e invariante por \mathcal{F} . Então*

$$\deg(V) \leq \deg(\mathcal{F}) + 1.$$

No teorema 2.29 enunciaremos uma generalização do problema de Poincaré para \mathbb{P}_ω^n , $n \geq 3$ (ver [7]). O seguinte corolário é uma generalização do teorema 2.26 (a hipótese $Sing(\mathcal{F}) \cap Sing(\mathbb{P}_\omega^2) = \emptyset$ não é necessária).

Corolário 2.28 *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa de dimensão um e com singularidades isoladas em \mathbb{P}_ω^2 . Seja $S = \{P = 0\} \hookrightarrow \mathbb{P}_\omega^2$ uma curva quase suave, irredutível e invariante por \mathcal{F} . Então*

$$\deg(S) \leq \deg(\mathcal{F}) + |\omega| - 2.$$

Demonstração.

Seja $\partial P = d_0$. No teorema 2.25 temos

$$\frac{1}{w_0 w_1 w_2} \left(-d_0^2 + (P_1(\omega) + d - 1)d_0 \right) = \sum_{p \in V / \xi|_V(p)=0} \mathcal{I}_p(\xi|_V) \geq 0.$$

Então $0 \leq d_0 \leq P_1(\omega) + d - 1$. Agora $d_0 \neq P_1(\omega) + d - 1$, pois $V \cap \text{Sing}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$ (veja [12]). De fato, suponha que $V \cap \text{Sing}(\mathcal{F}) = \emptyset$, em esse caso V é uma folha da folheação e temos um isomorfismo dos fibrados normais orbifold $N_{\mathcal{F}|_V} \cong N_V = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_\omega^2}(V)|_V = \mathcal{O}_\omega(d_0)|_V$. Desde que V é um orbifold e $V \cap \text{Sing}(\mathcal{F}) = \emptyset$, temos que $\deg(N_{\mathcal{F}|_V}) = 0$. Mais isso é absurdo desde que

$$\deg(N_{\mathcal{F}|_V}) = \deg(\mathcal{O}_\omega(d_0)|_V) = [\mathcal{O}_\omega(d_0)] \cdot V = [\mathcal{O}_\omega(d_0)] \cdot [\mathcal{O}_\omega(d_0)] = \frac{d_0^2}{w_0 w_1 w_2} \neq 0.$$

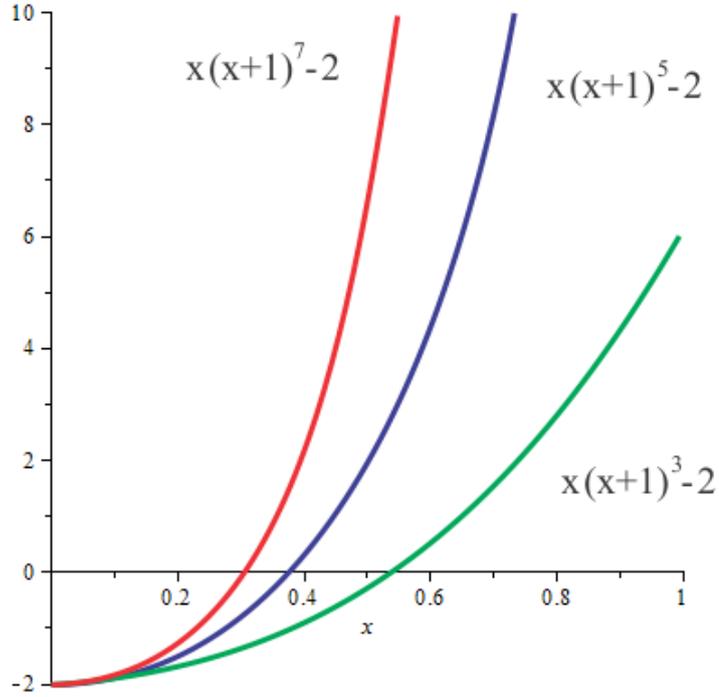
Assim $d_0 \leq P_1(\omega) + d - 2$, o que implica o resultado. □

Agora daremos uma generalização do corolário anterior para espaços projetivos ponderados de dimensão $n \geq 3$.

Teorema 2.29 [7] *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa de dimensão um e com singularidades isoladas em \mathbb{P}_ω^n , $n \geq 3$. Seja $V = \{P = 0\} \hookrightarrow \mathbb{P}_\omega^n$ uma hipersuperfície quase suave, irredutível e invariante por \mathcal{F} . Suponha que $\deg(\mathcal{F}) \geq |\omega| + 1$. Então*

$$\deg(V) < \deg(\mathcal{F}) + \alpha_n |\omega| - 1,$$

$$\text{onde } \alpha_n = \begin{cases} \text{raiz positiva de } x(x+1)^n - 2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \alpha_{n-1} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$



Demonstração.

Sejam $d_0 = \deg(V)$ e $d = \deg(\mathcal{F})$. Segue do teorema 2.25 que

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{k=0}^j (-1)^k P_{j-k}(w) d_0^{k+1} \right] (d-1)^{n-1-j} = (w_0 \cdots w_n) \sum_{p \in V/\xi|_V(p)=0} \mathcal{I}_p(\xi|_V) \geq 0. \quad (2-14)$$

Também, pelo corolário 2.13, temos

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n (d-1)^{n-k} P_k(w) - \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{k=0}^j (-1)^k P_{j-k}(w) d_0^{k+1} \right] (d-1)^{n-1-j} \\ &= (w_0 \cdots w_n) \left(\sum_{p \in \mathbb{P}_w^n/\xi(p)=0} \mathcal{I}_p(\xi) - \sum_{p \in V/\xi|_V(p)=0} \mathcal{I}_p(\xi|_V) \right) \geq 0. \end{aligned} \quad (2-15)$$

Demonstraremos que

$$d_0 \leq d - 1 + \alpha_n P_1(\omega).$$

Considere o polinômio $\Psi(t) \in \mathbb{Z}[t]$ definido por

$$\Psi(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^j (-1)^k P_{j-k}(\omega) t^{k+1} \right) (d-1)^{n-1-j},$$

e definimos $\Omega_n(t)$ como

$$\Omega_n(t) = \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Psi(t)}{t} \right), & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{d}{dt} \Psi(t), & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Afirmamos que $\Omega_n(t) \neq 0$ para todo $t \geq 0$ e $d \gg 0$. Vejamos isso, para cada m entero positivo, definimos

$$R_m(t) = \sum_{j=0}^m (-1)^j (m+1-j)t^{m-j} \quad \text{e} \quad Q_m(t) = R_m(t) - R_{m-1}(t),$$

onde $R_0(t) := 1$.

Lema 2.30 *Seja m um entero positivo. Se m é par, então o polinômio $Q_m(t)$ é positivo para todo $t \geq 0$.*

Demonstração.

O resultado é equivalente a demonstrar que o polinômio

$$F(t) = (t+1)^2 Q_m(t) = (m+1)t^{m+2} + 2t^{m+1} - (m+1)t^m + 2$$

é positivo para todo $t \geq 0$. Observe que $F(0) = 2$ e $F(t) \geq 4$ para todo $t \geq 1$, então é suficiente demonstrar que $F(t)$ é positivo em $[0, 1]$. Desde que

$$F'(t) = (m+1)t^{m-1}((m+2)t^2 + 2t - m),$$

os pontos críticos de $Q(t)$ são $t = -1$, $t = 0$ e $t = \frac{m}{m+2}$. Além disso

$$\begin{aligned} F\left(\frac{m}{m+2}\right) &= \left(\frac{m}{m+2}\right)^m \left((m+1) \left(\frac{m}{m+2}\right)^2 + 2 \left(\frac{m}{m+2}\right) - (m+1) \right) + 2 \\ &= \left(\frac{m}{m+2}\right)^m \left(\frac{-m^2 - 4m - 4}{(m+2)^2} \right) + 2 \\ &> \left(\frac{-m^2 - 4m - 4}{(m+2)^2} \right) + 2 = \frac{4(m+1)}{(m+2)^2} > 0. \end{aligned}$$

Portanto $Q_m(t) \geq \frac{4(m+1)}{(m+2)^2(t+1)^2} > 0$ para todo $t \geq 0$.

Lema 2.31 Para todo $k \geq 1$, temos $\frac{P_{k+1}(\omega)}{P_k(\omega)} < \frac{P_1(\omega)}{k+1}$.

Demonstração.

Seja $\check{\omega}_I$ a n -upla $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ omitindo as coordenadas ω_i com $i \in I$. Observe que

$$\begin{aligned} P_k(\omega)P_1(\omega) &= \sum_{i=1}^n \omega_i P_k(\omega) = \sum_{i=1}^n \omega_i (\omega_i P_{k-1}(\check{\omega}_i) + P_k(\check{\omega}_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_i^2 P_{k-1}(\check{\omega}_i) + \sum_{i=1}^n \omega_i P_k(\check{\omega}_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_i^2 P_{k-1}(\check{\omega}_i) + (k+1)P_{k+1}(\omega). \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\frac{P_{k+1}(\omega)}{P_k(\omega)} = \frac{P_1(\omega)}{k+1} - \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i^2 P_{k-1}(\check{\omega}_i)}{(k+1)P_k(\omega)} < \frac{P_1(\omega)}{k+1}.$$

Proposição 2.32 Suponha que $d \geq P_1(\omega) + 1$, então o polinômio $(-1)^{n-1}\Omega_n(t)$ é positivo para todo $t \geq 0$.

Demonstração.

Primeiro, consideremos o caso em que n é ímpar. Então

$$\begin{aligned}
 \Omega_n(t) &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^j (-1)^k P_{j-k}(\omega) (k+1) t^k \right) (d-1)^{n-1-j} \\
 &= \sum_{l=0}^{n-1} P_l(\omega) \left(\sum_{k=0}^{n-1-l} (-1)^k (k+1) t^k (d-1)^{n-1-k-l} \right) \\
 &= \sum_{l=0}^{n-1} P_l(\omega) (d-1)^{n-1-l} \left(\sum_{k=0}^{n-1-l} (-1)^k (k+1) s^k \right) \\
 &= \sum_{l=0}^{n-1} P_l(\omega) (d-1)^{n-1-l} (-1)^{n-1-l} R_{n-1-l}(s),
 \end{aligned}$$

onde $s = \frac{t}{d-1}$.

Podemos escrever $\Omega_n(t) - P_{n-1}(\omega)$ como

$$\sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} (d-1)^{n-2-2j} (P_{2j}(\omega)(d-1)R_{n-1-2j}(s) - P_{2j+1}R_{n-2-2j}(s)).$$

Por outro lado, pelo lema 2.31 e pela hipótese, sabemos que

$$P_{2l}(\omega)(d-1) \geq P_{2l}(\omega)P_1(\omega) \geq P_{2l+1}(\omega).$$

Temos então

$$\begin{aligned}
 P_{2j}(\omega)(d-1)R_{n-1-2j}(s) - P_{2j+1}R_{n-2-2j}(s) &\geq \\
 &2j(\omega)(d-1)R_{n-1-2j}(s) - P_{2j+1}|R_{n-2-2j}(s)| \\
 &2j(\omega)(d-1)(R_{n-1-2j}(s) - |R_{n-2-2j}(s)|) \\
 &2j(\omega)(d-1) \min \left\{ (n-2j)s^{n-1-2j}, Q_{n-1-2j}(s) \right\} \\
 &> 0.
 \end{aligned}$$

A última equação segue do lema 2.30. Assim $\Omega_n(t) > P_{n-1}(\omega)$ para todo $t \geq 0$.

No caso em que n é par, similarmente obtemos que

$$\begin{aligned}\Omega_n(t) &= \sum_{l=0}^{n-1} P_l(\omega)(d-1)^{n-2-l}(-1)^{n-1-l}R_{n-2-l}(s) \\ &= \sum_{j=0}^{\frac{n-2}{2}} (d-1)^{n-2-2j} (-P_{2j}(\omega)(d-1)R_{n-2-2j}(s) + P_{2j+1}R_{n-3-2j}(s)),\end{aligned}$$

e pelo argumento prévio, temos que cada término dessa suma é negativo, assim $\Omega_n(t) < 0$ para todo $t \geq 0$.

Agora, para finalizar a demonstração do teorema, consideraremos dois casos :

Se n ímpar :

Segue da proposição 2.32 que $\Psi'(t) = \Omega_n(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$. Então, Ψ é uma função crescente e pela equação (2-15), $\Psi(d_0) \leq \sum_{l=0}^n (d-1)^{n-l} P_l(\omega)$. Demonstraremos que $\Psi(d-1 + \alpha_n P_1(\omega)) > \sum_{l=0}^n (d-1)^{n-l} P_l(\omega)$. De fato, uma vez que

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^j (-1)^k P_{j-k}(\omega) t^{k+1} \right) (d-1)^{n-1-j} \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} P_l(\omega)(d-1)^{n-l} \sum_{k=0}^{n-1-l} (-1)^k \left(\frac{t}{d-1} \right)^{k+1} \\ &= \frac{t}{d-1+t} \sum_{l=0}^{n-1} P_l(\omega)(d-1)^{n-l} \left(1 - \left(\frac{-t}{d-1} \right)^{n-l} \right) \\ &= \frac{t}{d-1+t} \sum_{l=0}^{n-1} P_l(\omega)((d-1)^{n-l} - (-t)^{n-l}),\end{aligned}$$

então, colocando $t = d-1 + \alpha_n P_1(\omega)$ e usando que $P_{2k+1}(\omega) < \frac{1}{2k} \cdot P_{2k}(\omega)P_1(\omega)$ para cada $k \geq 1$, temos que

$$\begin{aligned}
 -\Psi(t) + \sum_{l=0}^n P_l(\omega)(d-1)^{n-l} &= \\
 &= P_n(\omega) + \frac{1}{d-1+t} \sum_{l=0}^{n-1} P_l(\omega)((d-1)^{n-l+1} - (-t)^{n-l+1}) \\
 &= P_n(\omega) + P_{n-1}(\omega) \frac{(d-1)^2 - t^2}{d-1+t} + \\
 &\quad + \frac{1}{d-1+t} \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} \left(P_{2k}(\omega)((d-1)^{n-2k+1} - t^{n-2k+1}) \right. \\
 &\quad \left. + P_{2k+1}(\omega)((d-1)^{n-2k} + t^{n-2k}) \right) \\
 &< \frac{1}{d-1+t} \sum_{k=1}^{\frac{n-3}{2}} P_{2k}(\omega) \left((d-1)^{n-2k} \left(d-1 + \frac{1}{2k} P_1(\omega) \right) - t^{n-2k} \left(t - \frac{1}{2k} P_1(\omega) \right) \right) \\
 &\quad + (d-1)^{n+1} - t^{n+1} + P_1(\omega)(d-1)^n + P_1(\omega)t^n.
 \end{aligned}$$

Então, para concluir a prova, é suficiente mostrar que cada término dessa suma é menor ou igual a zero, ou equivalentemente, colocando $s = d-1$, $P = P_1(\omega)$, temos que demonstrar que

i. $\left(\frac{t}{s}\right)^{n-2k} \geq \frac{s + \frac{1}{2k}P}{t - \frac{1}{2k}P}$ para cada $k = 1, \dots, \frac{n-3}{2}$ e

ii. $t^n(t - P) \geq s^n(s + P)$.

Para o item **i.**, o caso $n = 3$ é vazio, então podemos supor que $n \geq 5$. Pela desigualdade de Bernoulli, temos

$$\left(\frac{t}{s}\right)^{n-2k} = \left(1 + \frac{\alpha_n P}{s}\right)^{n-2k} \geq 1 + \frac{(n-2k)\alpha_n P}{s},$$

assim, é suficiente demonstrar que o lado direito desta desigualdade é maior que

$$\frac{s + \frac{1}{2k}P}{t - \frac{1}{2k}P} = 1 + \frac{(\frac{1}{k} - \alpha_n)P}{s + (\alpha_n - \frac{1}{2k})P}.$$

De fato, se $n \geq 7$, então $\alpha_n \geq \frac{2}{n}$ e

$$\begin{aligned} & (n-2k)\alpha_n \left(s + \left(\alpha_n - \frac{1}{2k} \right) P \right) - \left(\frac{1}{k} - \alpha_n \right) s \\ & > (n-2k)\alpha_n \left(s - \frac{1}{2k} P \right) - \left(\frac{1}{k} - \alpha_n \right) s \\ & > \left((n-2k)\alpha_n \frac{2k-1}{2k} - \frac{1}{k} + \alpha_n \right) s \\ & > \left(\frac{n}{2}\alpha_n - 1 \right) s > 0, \end{aligned}$$

e quando $n = 5$, temos que $k = 1$ e

$$(n-2k)\alpha_n \left(s + \left(\alpha_n - \frac{1}{2k} \right) P \right) - \left(\frac{1}{k} - \alpha_n \right) s > \left(\frac{5}{2}\alpha_5 + 3\alpha_5^2 \right) s > 0.$$

Finalmente, vamos a provar o item **ii**. Fazendo $U := \frac{s}{P} > 1$, observamos que

$$\begin{aligned} & t^n(t-P) - s^n(s+P) \\ & = (s + \alpha_n P)^n (s + (\alpha_n - 1)P) - s^{n+1} - P s^n \\ & = P^{n+1} \left((U + \alpha_n)^n (U + \alpha_n - 1) - U^{n+1} - U^n \right) \\ & = P^{n+1} \left(((n+1)\alpha_n - 2)U^n + \sum_{j=1}^{n+1} \left(\binom{n}{j} \alpha_n^j + \binom{n}{j-1} \alpha_n^{j-1} (\alpha_n - 1) \right) U^{n-j+1} \right) \\ & = P^{n+1} \left(((n+1)\alpha_n - 2)U^n + \sum_{j=0}^{n+1} \left(\frac{n+1}{j} \alpha_n - 1 \right) \binom{n}{j-1} \alpha_n^{j-1} U^{n-j+1} \right) \end{aligned}$$

Agora, o polinômio

$$F(X) = ((n+1)\alpha_n - 2)X^n + \sum_{j=0}^{n+1} \left(\frac{n+1}{j} \alpha_n - 1 \right) \binom{n}{j-1} \alpha_n^{j-1} X^{n-j+1}$$

e sua derivada $F'(X)$ satisfazem que

- O coeficiente principal é positivo,
- A lista dos outros coeficientes formam uma seqüência decrescente, e então esta só tem uma mudança do sinal,
- $F(0) < 0$ e $F'(0) < 0$,
- $F(1) = (1 + \alpha_n)^n \alpha_n - 2 = 0$.

Então, pela regra de sinais de Descartes, $F'(X)$ só tem uma raiz positiva e ela esta no intervalo $(0, 1)$, assim $F(X)$ é uma função crescente em $(1, \infty)$. Portanto

$$t^n(t - P) - s^n(s + P) = P^{n+1}F(U) \geq P^{n+1}F(1) = 0,$$

e assim o caso impar está provado.

Se n par :

Pela equação (2-14) sabemos que $\Psi(d_0) \geq 0$. Portanto, se definimos $\Phi(t) = \frac{\Psi(t)}{t}$, então $\Phi(d_0) \geq 0$ e da proposição 2.32 temos que $\Phi(t)$ é uma função decrescente.

Afirmamos que $\Phi(d - 1 + \alpha_n P_1(\omega)) < 0$, e portanto $d_0 < d - 1 + \alpha_n P_1(\omega)$. De fato, seguindo o mesmo procedimento usado previamente, temos que

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \frac{1}{d - 1 + t} \sum_{l=0}^{n-1} P_l(\omega)((d - 1)^{n-l} - (-t)^{n-l}) \\ &= \frac{1}{d - 1 + t} \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} \left(P_{2k}(\omega)((d - 1)^{n-2k+1} - t^{n-2k+1}) \right. \\ &\quad \left. + P_{2k+1}(\omega)((d - 1)^{n-2k} + t^{n-2k}) \right) \end{aligned}$$

Daqui, o mesmo argumento no caso ímpar funciona.

□

Observação 2.33 [7]

Por cálculo direto, podemos calcular os primeiros valores de α_n com 3 decimais:

n	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
α_n	0.543	0.388	0.306	0.256	0.221	0.195	0.175	0.160	0.147	0.136	0.127	0.119

Denotemos $R_n = x(x + 1)^n - 2$. Além disso, desde que

$$R_n \left(\frac{\ln n - \ln \ln n}{n} \right) < \frac{\ln n - \ln \ln n}{n} \exp(\ln n - \ln \ln n) - 2 = \frac{\ln n - \ln \ln n}{\ln n} - 2 < -1$$

e para qualquer constante $\epsilon > 0$, e todo $n \gg 0$

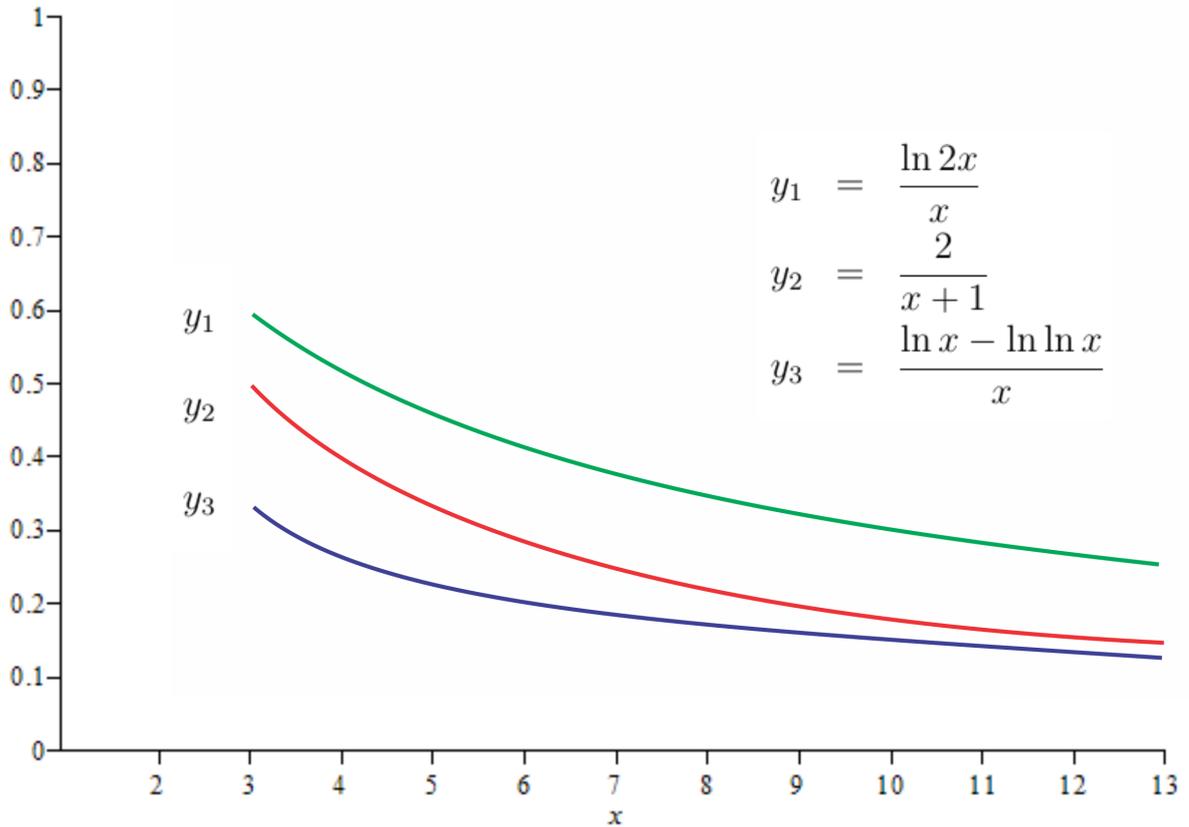
$$\begin{aligned} R_n \left(\frac{\ln n - (1 - \epsilon) \ln \ln n}{n} \right) &\approx \frac{\ln n - (1 - \epsilon) \ln \ln n}{n} \exp(\ln n - (1 - \epsilon) \ln \ln n) - 2 \\ &= (\ln n)^\epsilon \left(1 - \frac{\ln n - \ln \ln n}{\ln n} \right) - 2 \gg 0. \end{aligned}$$

Usando que $R_n(x)$ é uma função crescente em \mathbb{R}^+ , segue que

$$\frac{\ln n - \ln \ln n}{n} < \alpha_n < \frac{\ln n - (1 - \epsilon) \ln \ln n}{n} \quad \text{para todo } n \gg 0.$$

Em geral, do fato que $\frac{2}{n+1} \leq \frac{\ln n - \ln \ln n}{n}$ para todo $n \geq 27$, temos que

$$\max \left\{ \frac{2}{n+1}, \frac{\ln n - \ln \ln n}{n} \right\} < \alpha_n < \frac{\ln 2n}{n} \quad \text{para todo } n \geq 3.$$



Agora daremos uma família de exemplos de folhações holomorfas satisfazendo as condições do teorema 2.29 :

Exemplo 2.34 [7]

Sejam $a_0, b_0, a_1, \dots, a_n, b_n$ enteros positivos, com primos $2 - 2$ e tal que

$$\xi := a_0 + b_0 = \dots = a_n + b_n,$$

e considere o espaço projetivo ponderado bem formado $\mathbb{P}^{2n+1}(a_0, b_0, \dots, a_n, b_n)$.

Seja \mathcal{F} uma folhação holomorfa em $\mathbb{P}^{2n+1}(a_0, b_0, \dots, a_n, b_n)$, induzida por o campo de vetores quase-homogêneo

$$Z = \sum_{k=0}^n \left(\beta_k Y_k^{\beta_k - 1} \frac{\partial}{\partial X_k} - \alpha_k X_k^{\alpha_k - 1} \frac{\partial}{\partial Y_k} \right),$$

onde os $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{N}$ satisfazem a seguinte relação

$$\zeta = a_k \alpha_k = b_k \beta_k \quad \text{para todo } k = 0, \dots, n.$$

A hipersuperfície quase suave em $\mathbb{P}^{2n+1}(a_0, b_0, \dots, a_n, b_n)$ de grau ζ dada por

$$V = \left\{ \sum_{k=0}^n (X_k^{\alpha_k} + Y_k^{\beta_k}) = 0 \right\}$$

é invariante por \mathcal{F} e $\deg(\mathcal{F}) = \zeta - \xi + 1$. Além disso, desde que a_i e b_i dividem a ζ , segue que $\zeta \geq a_0 b_0 \cdots a_n b_n \gg (n+2)\xi$ e

$$\deg(\mathcal{F}) = \zeta - \xi + 1 \geq (n+1)\xi + 1 = 1 + \sum_{j=0}^n a_j + b_j.$$

Assim, a hipótese do teorema 2.29 é satisfeita.

Finalmente, temos

$$\deg(V) - \deg(\mathcal{F}) = \xi - 1 = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{j=0}^n a_j + b_j \right) - 1 < \alpha_{2n+1} \left(\sum_{j=0}^n a_j + b_j \right) - 1.$$

De maneira similar podemos construir uma folhação em espaços projetivos ponderados de dimensão par $\mathbb{P}^{2n+2}(a_0, b_0, \dots, a_n, b_n, a_{n+1})$, onde $\xi = a_k + b_k$ para todo $k = 0, \dots, n$.

Suponha que

$$\zeta = a_k \alpha_k = b_k \beta_k = a_{n+1} \alpha_{n+1} \quad \text{para todo } k = 0, \dots, n,$$

e considere o campo de vetores Z no exemplo anterior. Assim, a hipersuperfície quase suave em $\mathbb{P}^{2n+2}(a_0, b_0, \dots, a_n, b_n, a_{n+1})$ de grau ζ dada por

$$V = \left\{ \sum_{k=0}^n (X_k^{\alpha_k} + Y_k^{\beta_k}) + X_{n+1}^{\alpha_{n+1}} = 0 \right\}$$

é invariante por Z e nos obtemos a mesma conclusão.

Consideremos o caso ímpar (o caso par é similar). Em particular suponha que $n = 1$. Então em $\mathbb{P}^3(a_0, b_0, a_1, b_1)$, temos a seguinte quadro para infinitos valores de ξ . Observe que $\zeta = a_0 b_0 a_1 b_1$.

ξ	a_0	b_0	a_1	b_1
8	1	7	3	5
12	1	11	5	7
14	1	13	3	11
	1	13	5	9
16	3	13	5	11
	5	11	7	9
18	1	17	5	13
	1	17	7	11
	5	13	7	11
20	1	19	7	13
	1	19	9	11
	7	13	9	11
22	1	21	5	17
	3	19	5	17
	5	17	9	13
24	1	23	5	19
	1	23	7	17
	1	23	11	13
	5	19	7	17
	5	19	11	13
	7	17	11	13
\vdots				

3 Invariante de Futaki para orbifolds complexos

3.1 Invariante de Futaki em orbifolds

Neste capítulo nós definiremos o invariante de Futaki f_M ¹ para orbifolds compactos e com singularidades isoladas (o anulamento do invariante é uma condição necessária para a existência de métricas Kähler com curvatura seccional constante, em particular métricas Kähler-Einstein como veremos abaixo). Seguindo a G. Tian [36], [14], no teorema 3.5 daremos uma demonstração da fórmula de localização do invariante de Futaki² para orbifolds compactos e com singularidades isoladas (em [15], W. Ding e G. Tian enunciam sem prova). Depois exibiremos alguns exemplos e finalmente como uma aplicação mostraremos que os espaços projetivos singulares (bem formados) e com singularidades isoladas, não admitem métricas Kähler-Einstein. Uma demonstração deste último fato pode ser vista também em [37], [30].

Seja (M, ω_g) um n -orbifold Kähler compacto com singularidades isoladas e com $\Omega = c_1(M)$, onde Ω denota a Kähler classe em M , ou seja $\Omega = \left[\frac{i}{2\pi}\omega_g\right]$. Denotemos por $\eta(M)$ a álgebra de Lie de campos de vetores holomorfos em M (cada $X \in \eta(M)$ é localmente escrito como $X = X^i \frac{\partial}{\partial z_i}$, onde as X^i são funções holomorfas).

Seja h_g a única função, determinada por³

$$s_g - \frac{\int_M s_g \omega_g^n}{\int_M \omega_g^n} = \Delta_g h_g, \quad \int_M (e^{h_g} - 1) \omega_g^n = 0,$$

onde s_g é a curvatura escalar de g .

¹ Introduzido por Futaki para variedades Kähler com primeira classe de Chern positiva em 1983-[19], e por W. Ding e G. Tian para orbifolds em 1992-[15].

² A fórmula residual foi obtida primeiro por Futaki para variedades Kähler em 1988-[20].

³ Em uma variedade Kähler compacta, o seguinte fato é conhecido: Se $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^∞ com $\int_M \rho dV = 0$, então existe uma função $C^\infty f : M \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\rho = \Delta_g f$.

Então para qualquer $X \in \eta(M)$ definimos

$$f_M(X) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int_M X(h_g)\omega_g^n.$$

Desde que ω_g é fechada e X holomorfa, temos que $i_X\omega_g$ é $\bar{\partial}$ -fechada (pois $\bar{\partial}(i_X\omega_g) = (\bar{\partial}g_{i\bar{j}})X^i d\bar{z}_j = (\bar{\partial}\omega_g)(X) = 0$). Então, pelo teorema de decomposição de Hodge (veja [22]), podemos escrever

$$i_X\omega_g = \alpha - \bar{\partial}(\theta_X(g)),$$

onde α é uma 1-forma harmônica e $\theta_X(g)$ é uma função C^∞ . Salvo constante aditiva, $\theta_X(g)$ é unicamente determinada por g .

Proposição 3.1

$$f_M(X) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int_M h_g \Delta_g \theta_X(g) \omega_g^n.$$

Demonstração.

De $i_X\omega_g = \alpha - \bar{\partial}(\theta_X(g))$, nos temos que

$$\begin{aligned} f_M(X) &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int_M X(h_g)\omega_g^n \\ &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int_M X^i \frac{\partial h_g}{\partial z_i} \omega_g^n \\ &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int_M \left(g^{i\bar{j}} \alpha \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right) \frac{\partial h_g}{\partial z_i} - g^{i\bar{j}} \frac{\partial \theta_X(g)}{\partial \bar{z}_i} \frac{\partial h_g}{\partial z_i} \right) \omega_g^n. \end{aligned}$$

Finalmente o resultado segue de $\int_M g^{i\bar{j}} \alpha \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right) \frac{\partial h_g}{\partial z_i} \omega_g^n = \langle \alpha, \bar{\partial} h_g \rangle = \langle \bar{\partial}^* \alpha, h_g \rangle = 0$ (pois $\bar{\partial}^* \alpha = 0$, uma vez que M é uma variedade Kähler compacto e α é harmônica) e de $\left(- \int_M g^{i\bar{j}} \frac{\partial \theta_X}{\partial \bar{z}_i} \frac{\partial h_g}{\partial z_i} \right) \omega_g^n = - \langle \bar{\partial} \theta_X(g), \bar{\partial} h_g \rangle = \langle -\bar{\partial}^* \bar{\partial} \theta_X(g), \bar{\partial} h_g \rangle = \langle \Delta_g \theta_X(g), h_g \rangle$.

□

Portanto, sem perda de generalidade podemos assumir que $\alpha = 0$. É possível mostrar que f_M é independente da métrica g (ver [20], [36]). De fato isso segue também do teorema 3.5 abaixo. Temos então a seguinte proposição

Proposição 3.2 *Se M admite uma métrica com curvatura escalar constante, em particular se g é Kähler-Einstein, então*

$$f_M \equiv 0$$

Demonstração.

Tendo em conta a proposição 1.45, suponha que a curvatura escalar s_g é constante, então na definição de h_g , temos que $\Delta_g h_g \equiv 0$, então h_g é constante e assim $f_M \equiv 0$.

□

O seguinte lema será importante para nós, uma demonstração deste lema pode ser vista em [14], [36].

Lema 3.3

$$\begin{aligned} & (n+1)2^{n+1}f_M(X) \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{1}{j!(n-1)!} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int_M \left\{ \left(-\Delta_g \theta_X(g) + Ric_g + (n-2j)(\theta_X(g) + \omega_g) \right)^{n+1} \right. \\ & \quad \left. - \left(\Delta_g \theta_X(g) - Ric_g + (n-2j)(\theta_X(g) + \omega_g) \right)^{n+1} \right\} \\ & \quad - n\mu \sum_{j=0}^{n+1} \frac{(-1)^j (n+1-2j)^{n+1}}{j!(n+1-j)!} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int_M (\theta_X(g) + \omega_g)^{n+1}, \end{aligned}$$

onde

$$\mu = \frac{c_1(M) \cdot \Omega^{n-1}}{\Omega^n} = \frac{\int_M Ric_g \wedge \omega_g^{n-1}}{\int_M \omega_g^n}.$$

3.2 Fórmula de localização do invariante de Calabi-Futaki para orbifolds complexos

Sejam M um n -orbifold Kähler compacto com singularidades isoladas e $X \in \eta(M)$ com singularidades isoladas não degeneradas. Denotemos $Sing(X) = \{p_1, \dots, p_k\}$. Para cada $p_\alpha \in Sing(X)$, definimos um endomorfismo não singular $L_\alpha(X) : T_{p_\alpha}M \rightarrow T_{p_\alpha}M$, dado por $L_\alpha(X)(Y) = D_Y X$. Denotemos por K_α a forma curvatura da métrica induzida em $T_{p_\alpha}M$.

Lema 3.4

- a. $\bar{\partial}\Delta_g\theta_X(g) = i_X Ric_g$ ([36]).
- b. $\Delta_g\theta_X(g)|_{\{p_\alpha\}} = -Tr(L_\alpha(X))$.
- c. Se $\Omega = c_1(M)$, então $\theta_X(g) = -\Delta_g\theta_X(g)$.

Demonstração.

Veamos a.

$$\begin{aligned}
 i_X Ric_g &= -X^i \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} LogDet(g_{k\bar{l}}) d\bar{z}_j \\
 &= -\bar{\partial} \left(X^i \frac{\partial}{\partial z_i} LogDet(g_{k\bar{l}}) \right) \\
 &= -\bar{\partial} \left(X^i g^{k\bar{l}} \frac{\partial g_{k\bar{l}}}{\partial z_i} \right) \\
 &= -\bar{\partial} \left(X^i g^{k\bar{l}} \frac{\partial g_{i\bar{l}}}{\partial z_k} \right) \\
 &= -\bar{\partial} \left(g^{k\bar{l}} \frac{\partial}{\partial z_k} (X^i g_{i\bar{l}}) - g^{k\bar{l}} g_{i\bar{l}} \frac{\partial X^i}{\partial z_k} \right) \\
 &= -\bar{\partial} \left(g^{k\bar{l}} \frac{\partial}{\partial z_k} (X^i g_{i\bar{l}}) \right) \\
 &= -\bar{\partial} \left(g^{k\bar{l}} \frac{\partial}{\partial z_k} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l} \theta_X(g) \right) \\
 &= \bar{\partial} \Delta_g \theta_X(g).
 \end{aligned}$$

Vejam *b*. Seja $w_g = g_{i\bar{j}} dz_i d\bar{z}_j$. Desde que $i_X w_g = -\bar{\partial}\theta_X(g)$, temos que $g_{i\bar{j}} X^i = -\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j} \theta_X(g)$, então $\Delta_g \theta_X(g) = g^{i\bar{j}} \frac{\partial}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \theta_X(g) = -g^{i\bar{j}} \frac{\partial}{\partial z_i} (g_{i\bar{j}} X^i)$, assim $\Delta_g \theta_X(g)|_{\{p_\alpha\}} = -\sum \frac{\partial}{\partial z_i} X^i|_{\{p_\alpha\}} = -Tr(L_\alpha(X))$. Para a parte *c*. usaremos a identidade *a*. Temos então $\bar{\partial}\Delta_g \theta_X(g) = i_X Ric_g = i_X \frac{2\pi}{i} c_1(M) = i_X \omega_g = -\bar{\partial}\theta_X(g)$, então $\Delta_g \theta_X(g) + \theta_X(g)$ é holomorfa sobre M que é compacto, assim $\Delta_g \theta_X(g) = -\theta_X(g) + c$ para algum $c \in \mathbb{C}$, o resultado segue tomando $c = 0$.

□

Teorema 3.5 *Para qualquer $X \in \eta(M)$ com singularidades isoladas e não degenerados, temos*

$$f_M(X) = \frac{1}{n+1} \sum_{p/X(p)=0} \frac{1}{\#G_p} \frac{Tr^{n+1}(L_p(X))}{Det(L_p(X))}.$$

Demonstração.

Seja ϕ qualquer polinômio simétrico GL -invariante de grau $n+1$. Seja E um fibrado vetorial sobre M e h uma métrica hermitiana. Suponha que $\theta_X(h)$ é uma função $End(E)$ -avaliada que satisfaz:

$$\bar{\partial}\theta_X(h) = -i_X R_h,$$

donde R_h denota a forma curvatura de h , além disso, suponha que $\bar{\partial}R_h = 0$. Por simplicidade, escrevemos $\phi(\theta_X(h) + R_h)$ por

$$\phi(\underbrace{\theta_X(h) + R_h, \dots, \theta_X(h) + R_h}_{n+1\text{-vezes}}).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\phi(\theta_X(h) + R_h) &= (n+1)\phi(\bar{\partial}\theta_X(h), \theta_X(h) + R_h, \dots, \theta_X(h) + R_h) \\ &= -(n+1)\phi(i_X R_h, \theta_X(h) + R_h, \dots, \theta_X(h) + R_h) \\ &= -i_X \phi(\theta_X(h) + R_h) \quad (i_X \theta_X(h) = 0). \end{aligned}$$

Agora definimos a forma η em $M \setminus Z(X)$ por $\eta(Y) = g(Y, X)/g(X, X)$. Além disso, definimos uma série formal de formas por

$$\alpha = \phi(\theta_X(h) + R_h) \wedge \frac{\eta}{1 + \bar{\partial}\eta}.$$

Desde que X é holomorfo, temos $i_X \cdot \bar{\partial} = \bar{\partial} \cdot i_X$ e assim,

$$i_X(\bar{\partial}\eta) = \bar{\partial}(i_X\eta) = \bar{\partial}(\eta(X)) = 0.$$

Temos então que

$$\begin{aligned} i_X\alpha &= i_X\phi(\theta_X(h) + R_h) \wedge \frac{\eta}{1 + \bar{\partial}\eta} + \phi(\theta_X(h) + R_h) \wedge \frac{\eta(X)}{1 + \bar{\partial}\eta} \\ &= -\bar{\partial}\phi(\theta_X(h) + R_h) \wedge \frac{\eta}{1 + \bar{\partial}\eta} + \phi(\theta_X(h) + R_h) \wedge \frac{1}{1 + \bar{\partial}\eta} \\ &= -\bar{\partial}\alpha + \phi(\theta_X(h) + R_h) \wedge \frac{\bar{\partial}\eta}{1 + \bar{\partial}\eta} + \phi(\theta_X(h) + R_h) \wedge \frac{1}{1 + \bar{\partial}\eta} \\ &= -\bar{\partial}\alpha + \phi(\theta_X(h) + R_h). \end{aligned}$$

Denotemos por $[\beta]_k$ o termo de grau k em β . Tendo em conta que $[\alpha]_{2n+1} = 0$ ($\dim_{\mathbb{C}} M = n$), temos

$$[\phi(\theta_X(h) + R_h)]_{2n} = \bar{\partial}[\alpha]_{2n-1}.$$

Sejam p_1, \dots, p_k os zeros de X . Escolha vizinhanças coordenadas disjuntas $B_\epsilon(p_\alpha)$ ($\varphi_\alpha : \tilde{U}_\alpha \rightarrow B_\epsilon(p_\alpha) \simeq U_\alpha$, carta orbifold) tal que $B_\epsilon(p_\alpha) \cap \text{Sing}(M) = \emptyset$ ou $B_\epsilon(p_\alpha) \cap \text{Sing}(M) = \{p_\alpha\}$. Então

$$\begin{aligned} \int_M \phi(\theta_X(h) + R_h) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{M \setminus \cup B_\epsilon(p_\alpha)} [\phi(\theta_X(h) + R_h)]_{2n} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{M \setminus \cup B_\epsilon(p_\alpha)} \bar{\partial}[\alpha]_{2n-1} \\ &= -\sum_\alpha \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\epsilon(p_\alpha)} \alpha \quad (\text{Stokes orbifold, veja [31], [1] o [25]}) \\ &= -\sum_\alpha \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\#G_{p_\alpha}} \int_{\partial B_\epsilon(p_\alpha)} \phi(\theta_X(h) + R_h) \wedge \\ &\quad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \eta \wedge (\bar{\partial}\eta)^k. \end{aligned} \tag{3-1}$$

Usaremos a seguinte fórmula (veja [5]),

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int_{\partial B_\epsilon(p_\alpha)} \phi(\theta_X(h) + R_h) \wedge \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \eta \wedge (\bar{\partial}\eta)^k = - \int_{p_\alpha} \frac{\phi(\theta_X(h) + R_h)}{\text{Det}(L_\alpha(X) + K_\alpha)}, \quad (3-2)$$

onde K_α é a forma de curvatura da métrica g . Consideremos os seguintes fibrados

$$\begin{aligned} E_1 &= K_M^V \otimes L^{n-2j}, \text{ com} \\ R_{E_1} &= \text{Ric}_g + (n-2j)\omega_g, \\ \theta_{E_1} &= -\Delta_g \theta_X(g) + (n-2j)\theta_X(g). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= K_M \otimes L^{n-2j}, \text{ com} \\ R_{E_2} &= -\text{Ric}_g + (n-2j)\omega_g, \\ \theta_{E_2} &= \Delta_g \theta_X(g) + (n-2j)\theta_X(g). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_3 &= L^{n+1-2j}, \text{ com} \\ R_{E_3} &= (n+1-2j)\omega_g, \\ \theta_{E_3} &= (n+1-2j)\theta_X(g). \end{aligned}$$

Pela equação (3-1) no lema 3.3 (em relação aos fibrados E_1 , E_2 e E_3), temos

$$\begin{aligned} &(n+1)2^{n+1} f_M(X) \\ &= - \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!(n-j)!} \sum_{\alpha} \frac{1}{\#G_{p_\alpha}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int_{\partial B_\epsilon(p_\alpha)} (\theta_{E_1} + R_{E_1})^{n+1} \wedge \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \eta \wedge (\bar{\partial}\eta)^k \right) \\ &\quad + \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!(n-j)!} \sum_{\alpha} \frac{1}{\#G_{p_\alpha}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int_{\partial B_\epsilon(p_\alpha)} (\theta_{E_2} + R_{E_2})^{n+1} \wedge \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \eta \wedge (\bar{\partial}\eta)^k \right) \\ &\quad + n\mu \sum_{j=0}^{n+1} \frac{(-1)^j (n+1-2j)^{n+1}}{j!(n+1-j)!} \sum_{\alpha} \frac{1}{\#G_{p_\alpha}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int_{\partial B_\epsilon(p_\alpha)} \left(\frac{\theta_{E_3} + R_{E_3}}{n+1-2j} \right)^{n+1} \wedge \\ &\quad \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \eta \wedge (\bar{\partial}\eta)^k \right). \end{aligned}$$

Agora, usando a equação (3-2) temos

$$\begin{aligned}
 & (n+1)2^{n+1}f_M(X) \\
 = & \sum_{\alpha} \frac{1}{\#G_{p_{\alpha}}} \left\{ \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!(n-j)!} \int_{p_{\alpha}} \left(-\Delta_g \theta_X(g) + Ric_g + (n-2j)(\theta_X(g) + \omega_g) \right)^{n+1} \wedge \right. \\
 & \left(\frac{1}{\text{Det}(L_{\alpha}(X) + K_{\alpha})} \right) \\
 - & \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!(n-j)!} \int_{p_{\alpha}} \left(\Delta_g \theta_X(g) - Ric_g + (n-2j)(\theta_X(g) + \omega_g) \right)^{n+1} \wedge \\
 & \left(\frac{1}{\text{Det}(L_{\alpha}(X) + K_{\alpha})} \right) \\
 - & \left. n\mu \sum_{j=0}^{n+1} \frac{(-1)^j (n+1-2j)^{n+1}}{j!(n+1-j)!} \int_{p_{\alpha}} (\theta_X(g) + \omega_g)^{n+1} \wedge \left(\frac{1}{\text{Det}(L_{\alpha}(X) + K_{\alpha})} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (n+1)2^{n+1}f_M(X) \\
 = & \sum_{\alpha} \frac{1}{\#G_{p_{\alpha}}} \left\{ \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \int_{p_{\alpha}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (n-2j)^k \cdot \right. \\
 & \frac{(-\Delta_g \theta_X(g) + Ric_g)^{n+1-k} \wedge (\theta_X(g) + \omega_g)^k}{\text{Det}(L_{\alpha}(X) + K_{\alpha})} \\
 - & \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \int_{p_{\alpha}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (n-2j)^k \cdot \\
 & \frac{(\Delta_g \theta_X(g) - Ric_g)^{n+1-k} \wedge (\theta_X(g) + \omega_g)^k}{\text{Det}(L_{\alpha}(X) + K_{\alpha})} \\
 - & \left. \frac{n\mu}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{n+1}{j} (n+1-2j)^{n+1} \int_{p_{\alpha}} \frac{(\theta_X(g) + \omega_g)^{n+1}}{\text{Det}(L_{\alpha}(X) + K_{\alpha})} \right\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (n+1)2^{n+1}f_M(X) \\
 &= \sum_{\alpha} \frac{1}{\#G_{p_{\alpha}}} \left\{ \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (n-2j)^k \cdot \right. \right. \\
 & \quad \left. \int_{p_{\alpha}} \frac{\left((-\Delta\theta_X(g) + Ric_g)^{n+1-k} - (\Delta\theta_X(g) - Ric_g)^{n+1-k} \right) \wedge (\theta_X(g) + \omega_g)^k}{Det(L_{\alpha}(X) + K_{\alpha})} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{n\mu}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{n+1}{j} (n+1-2j)^{n+1} \int_{p_{\alpha}} \frac{(\theta_X(g) + \omega_g)^{n+1}}{Det(L_{\alpha}(X) + K_{\alpha})} \right\}.
 \end{aligned}$$

Seja $0 \leq k \leq n+1$. Usando a seguinte identidade

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (n-2j)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 2^n n! & \text{si } k = n \end{cases},$$

temos

$$\begin{aligned}
 & (n+1)2^{n+1}f_M(X) \\
 &= \sum_{\alpha} \frac{1}{\#G_{p_{\alpha}}} \left\{ \frac{1}{n!} \binom{n+1}{n} 2^n n! \int_{p_{\alpha}} \left((-\Delta_g\theta_X(g) + Ric_g) - (\Delta_g\theta_X(g) - Ric_g) \right) \wedge \right. \\
 & \quad \left. \frac{(\theta_X(g) + \omega_g)^n}{Det(L_{\alpha}(X) + K_{\alpha})} - n\mu 2^{n+1} \int_{p_{\alpha}} \frac{(\theta_X(g) + \omega_g)^{n+1}}{Det(L_{\alpha}(X) + K_{\alpha})} \right\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (n+1)2^{n+1}f_M(X) \\
 &= (n+1)2^{n+1} \sum_{\alpha} \frac{1}{\#G_{p_{\alpha}}} \int_{p_{\alpha}} \frac{(-\Delta_g\theta_X(g) + Ric_g) \wedge (\theta_X(g) + \omega_g)^n - \frac{n\mu}{n+1} (\theta_X(g) + \omega_g)^{n+1}}{Det(L_{\alpha}(X) + K_{\alpha})}.
 \end{aligned}$$

Temos então

$$f_M(X) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\#G_{p_{\alpha}}} \int_{p_{\alpha}} \frac{(-\Delta_g\theta_X(g) + Ric_g) \wedge (\theta_X(g) + \omega_g)^n - \frac{n\mu}{n+1} (\theta_X(g) + \omega_g)^{n+1}}{Det(L_{\alpha}(X) + K_{\alpha})}.$$

Dado que $\dim_{\mathbb{C}}\{p_{\alpha}\} = 0$, na integral anterior tomaremos só os termos de grau 0. Tomando os termos de grau 0 na série formal de formas $\frac{1}{Det(L_{\alpha}(X) + K_{\alpha})}$, temos

$$f_M(X) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\#G_{p_{\alpha}}} \frac{-\theta_X(g)^n \Delta_g \theta_X(g) - \frac{n\mu}{n+1} \theta_X(g)^{n+1}}{\text{Det}(L_{\alpha}(X))} \Big|_{\{p_{\alpha}\}}.$$

Por hipótese em M temos $\Omega = c_1(M)$. Então $\mu = 1$, e usando b . e c . no lema 3.4 temos finalmente

$$f_M(X) = \frac{1}{n+1} \sum_{\alpha} \frac{1}{\#G_{p_{\alpha}}} \frac{\text{Tr}^{n+1}(L_{\alpha}(X))}{\text{Det}(L_{\alpha}(X))}.$$

□

Vejam os alguns exemplos. O exemplo 3.6 é devido a Ding e Tian [15] (ver também [24], [23])

Exemplo 3.6

1. Seja $V = \{F = 0\} \subset \mathbb{P}^3$, onde $F = Z_0 Z_1^2 + Z_2 Z_3 (Z_2 - Z_3)$. Então V não admite uma métrica Kähler-Einstein. Vejamos isso. É fácil ver que $(1 : 0 : 0 : 0)$ é a única singularidade de V e ela é de tipo D_4 , pois no aberto U_0 , considerando a mudança de coordenadas $(z_1, z_2, z_3) \mapsto (2z_1, z_2 - 2z_3, z_2 + 2z_3)$, podemos supor que F é da forma $D_4 : f = z_1^2 - z_3(z_2^2 - 4z_3^2)$ ⁴. Agora considere o campo de vetores holomorfo $X = -Z_0 \frac{\partial}{\partial Z_0} + 2Z_1 \frac{\partial}{\partial Z_1} + Z_2 \frac{\partial}{\partial Z_2} + Z_3 \frac{\partial}{\partial Z_3}$. Uma vez que $dF(X) = 3F$, temos que V é invariante por X . Então considerando $X|_V$, temos que

$$\text{Sing}(X|_V) = \{(1 : 0 : 0 : 0), (0 : 1 : 0 : 0), (0 : 0 : 1 : 0), (0 : 0 : 0 : 1), (0 : 0 : 1 : 1)\}.$$

Calculemos a contribuição da fórmula de localização do invariante Futaki em cada aberto $U_i \cap V$ de V .

No aberto $U_0 \cap V$, temos que $X|_V = 3z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + 2z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + 2z_3 \frac{\partial}{\partial z_3}$. É conhecido que o aberto $U_0 \cap V$ admite a seguinte parametrização local $\varphi : (u, v) \in \mathbb{C}^2 \mapsto U_0 \cap V$, dada por

$$\begin{cases} z_1 = uv(u^4 - v^4) \\ z_2 = u^4 + v^4 \\ z_3 = u^2 v^2 \end{cases}$$

Então, é fácil ver que $\varphi^*(X|_V) = \frac{1}{2}(u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v})$. Assim a contribuição da fórmula de localização de Futaki em $(1 : 0 : 0 : 0)$ é

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{1^3}{1/4} = \frac{1}{2}.$$

No aberto $U_1 \cap V$, temos que $X|_V = -3z_0 \frac{\partial}{\partial z_0} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - z_3 \frac{\partial}{\partial z_3}$ e F é da forma

⁴ Localmente a singularidade é da forma \mathbb{C}^2/G , onde $G \subset SU(2)$ é o subgrupo diedral binário de ordem 8.

$f = z_0 + z_2 z_3 (z_2 - z_3)$. Uma vez que $\frac{\partial f}{\partial z_0}(0) = 1 \neq 0$, considerando a projeção $\pi(z_0, z_2, z_3) = (z_2, z_3) = (u, v)$, temos que localmente $X|_V = -(u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v})$. Assim a contribuição da fórmula de localização de Futaki em $(0 : 1 : 0 : 0)$ é

$$\frac{(-2)^3}{1} = -8.$$

No aberto $U_2 \cap V$, temos que $X|_V = -2z_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + 0z_3 \frac{\partial}{\partial z_3}$ e F é da forma $f = z_0 z_1^2 + z_3(1 - z_3)$. Uma vez que $\frac{\partial f}{\partial z_3}(0) = 1 \neq 0$, considerando a projeção $\pi(z_0, z_1, z_3) = (z_0, z_1) = (u, v)$, temos que localmente $X|_V = -2u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v}$. Assim a contribuição de fórmula da localização de Futaki em $(0 : 0 : 1 : 0)$ é

$$\frac{(-1)^3}{-2} = \frac{1}{2}.$$

No aberto $U_3 \cap V$, temos que $X|_V = -2z_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + 0z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$ e F é da forma $f = z_0 z_1^2 + z_2(z_2 - 1)$. Uma vez que $\frac{\partial f}{\partial z_2} \neq 0$ para $(0, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$, considerando a projeção $\pi(z_0, z_1, z_2) = (z_0, z_1) = (u, v)$, temos que localmente $X|_V = -2u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v}$. Assim a soma das contribuições da fórmula de localização de Futaki em $(0 : 0 : 0 : 1)$ e $(0 : 0 : 1 : 1)$ é

$$2 \frac{(-1)^3}{-2} = 1.$$

Finalmente temos que

$$f_V(X|_V) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - 8 + \frac{1}{2} + 1 \right) = -2 \neq 0,$$

portanto, V não admite métricas Kähler-Einstein.

2. Seja $V = \{F = 0\} \subset \mathbb{P}^3$, onde $F = Z_0Z_1^2 + Z_1Z_2^2 + Z_3^3$. Então V não admite uma métrica Kähler-Einstein. Vejamos isso. É fácil ver que $(1 : 0 : 0 : 0)$ é a única singularidade de V e ela é de tipo E_6 , pois no aberto U_0 , F é da forma $E_6 : f = z_1^2 + z_1z_2^2 + z_3^3$. Agora considere o campo de vetores holomorfo $X = -5Z_0\frac{\partial}{\partial Z_0} + Z_1\frac{\partial}{\partial Z_1} - 2Z_2\frac{\partial}{\partial Z_2} - Z_3\frac{\partial}{\partial Z_3}$. Uma vez que $dF(X) = -3F$, temos que V é invariante por X . Então considerando $X|_V$, temos que

$$\text{Sing}(X|_V) = \{(1 : 0 : 0 : 0), (0 : 1 : 0 : 0), (0 : 0 : 1 : 0)\}.$$

Calculemos a contribuição da fórmula de localização do invariante de Futaki em cada aberto $U_i \cap V$ de V .

No aberto $U_0 \cap V$, temos que $X|_V = 6z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + 3z_2\frac{\partial}{\partial z_2} + 4z_3\frac{\partial}{\partial z_3}$. É conhecido que o aberto $U_0 \cap V$ admite a seguinte parametrização local $\varphi : (u, v) \in \mathbb{C}^2 \mapsto U_0 \cap V$, dada por

$$\begin{cases} z_1 = (u^4 + 2\sqrt{-3}u^2v^2 + v^4)^3 \\ z_2 = 2\sqrt[4]{-3^3}uv(u^4 - v^4) \\ z_3 = -(u^8 + 14u^4v^4 + v^8) \end{cases}$$

Então, é fácil ver que $\varphi^*(X|_V) = \frac{1}{2}(u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v})$. Assim a contribuição da fórmula de localização de Futaki em $(1 : 0 : 0 : 0)$ é

$$\frac{1}{24} \cdot \frac{1^3}{1/4} = \frac{1}{6}.$$

No aberto $U_1 \cap V$, temos que $X|_V = -6z_0\frac{\partial}{\partial z_0} - 3z_2\frac{\partial}{\partial z_2} - 2z_3\frac{\partial}{\partial z_3}$ e F é da forma $f = z_0 + z_2^2 + z_3^3$. Uma vez que $\frac{\partial f}{\partial z_0}(0) = 1 \neq 0$, considerando a projeção $\pi(z_0, z_2, z_3) = (z_2, z_3) = (u, v)$, temos que localmente $X|_V = -3u\frac{\partial}{\partial u} - 2v\frac{\partial}{\partial v}$. Assim a contribuição de fórmula da localização de Futaki em $(0 : 1 : 0 : 0)$ é

$$\frac{(-5)^3}{6} = -\frac{125}{6}.$$

No aberto $U_2 \cap V$, temos que $X|_V = -3z_0\frac{\partial}{\partial z_0} + 3z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + z_3\frac{\partial}{\partial z_3}$ e F é da forma

⁵ Localmente a singularidade é da forma \mathbb{C}^2/G , onde $G \subset SL(2, \mathbb{C})$ é o subgrupo tetraédrico binário de ordem 24.

$f = z_0 z_1^2 + z_1 + z_3^3$. Uma vez que $\frac{\partial f}{\partial z_1}(0) = 1 \neq 0$, considerando a projeção $\pi(z_0, z_1, z_3) = (z_0, z_3) = (u, v)$, temos que localmente $X|_V = -3u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v}$. Assim a contribuição da fórmula de localização de Futaki em $(0 : 0 : 1 : 0)$ é

$$\frac{(-2)^3}{-3} = \frac{8}{3}.$$

Finalmente temos que

$$f_V(X|_V) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6} - \frac{125}{6} + \frac{8}{3} \right) = -6 \neq 0,$$

portanto, V não admite métricas Kähler-Einstein.

Exemplo 3.7 Sejam $w_0, \dots, w_n \in \mathbb{Z}^+$ coprimos 2-2. Suponha $w_i \neq w_j \forall i \neq j$. Considere o campo (veja o exemplo 2.17-5)

$$X = \sum_{k=0}^n Z_k \frac{\partial}{\partial Z_k} \in H^0(\mathbb{P}_\omega^n, T\mathbb{P}_\omega^n).$$

Sabemos que $\text{Sing}(\mathcal{F})$ são não degeneradas e

$$\text{Sing}(\mathcal{F}) = \left\{ (1 : 0 : \dots : 0)_\omega, (0 : 1 : \dots : 0)_\omega, \dots, (0 : 0 : \dots : 1)_\omega \right\}.$$

Temos então

$$\frac{1}{w_i} \frac{\text{Tr}^{n+1}(D_0 X_i)}{\text{Det}(D_0 X_i)} = \frac{1}{w_i} \frac{\left(\sum_{k \neq i} \left(1 - \frac{w_k}{w_i} \right) \right)^{n+1}}{\prod_{k \neq i} \left(1 - \frac{w_k}{w_i} \right)} = \frac{1}{w_i^2} \frac{\left(\sum_{k \neq i} (w_i - w_k) \right)^{n+1}}{\prod_{k \neq i} (w_i - w_k)}$$

Assim

$$f_{\mathbb{P}_\omega^n}(X) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \frac{1}{w_i^2} \frac{\left(\sum_{k \neq i} (w_i - w_k) \right)^{n+1}}{\prod_{k \neq i} (w_i - w_k)}$$

Observamos que o não anulamento de $f_{\mathbb{P}_\omega^n}(X)$ implica a não existência de uma métrica Kähler-Einstein em tal \mathbb{P}_ω^n (ou seja \mathbb{P}_ω^n bem formado e com $w_i \neq w_j \forall i \neq j$).

É bem conhecido que espaços projetivos complexos admitem uma métrica Kähler-Einstein. Menos simples é o fato que os espaços projetivos ponderados singulares não admitem métricas Kähler-Einstein, veja [37] [30]. Temos uma demonstração usando o teorema 3.5.

Teorema 3.8 *Os espaços projetivos ponderados singulares \mathbb{P}_ω^n (bem formados) não admitem métrica Kähler-Einstein*

Demonstração.

Generalizando o exemplo anterior 3.7, suponha $a_i w_j \neq a_j w_i \forall i \neq j$. Considere o campo

$$X = \sum_{k=0}^n a_k Z_k \frac{\partial}{\partial Z_k} \in H^0(\mathbb{P}_\omega^n, T\mathbb{P}_\omega^n).$$

A expressão local de X em U_i é

$$X_i = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \left(a_k - a_i \frac{w_k}{w_i} \right) Z_k \frac{\partial}{\partial Z_k},$$

onde observamos que $Sing(X_i) = \{0\}$ e ela é não degenerada, logo

$$Sing(\mathcal{F}) = \left\{ (1 : 0 : \dots : 0)_\omega, (0 : 1 : \dots : 0)_\omega, \dots, (0 : 0 : \dots : 1)_\omega \right\}.$$

Então, analogamente ao exemplo anterior 3.7, temos

$$f_{\mathbb{P}_\omega^n}(X) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \frac{1}{w_i^2} \frac{\left(\sum_{k \neq i} (a_k w_i - a_i w_k) \right)^{n+1}}{\prod_{k \neq i} (a_k w_i - a_i w_k)}.$$

Observe que escolher a_0, \dots, a_n em \mathbb{C} tal $a_i w_j \neq a_j w_i \forall i \neq j$ é uma condição aberta (ou seja, tais pontos representam um aberto próprio de \mathbb{P}^n). É possível escolher os a_i tal que $f_{\mathbb{P}_\omega^n}(X) \neq 0$. Observe que

$$\prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_i w_j - a_j w_i) f_{\mathbb{P}_\omega^n}(X)$$

é um polinômio homogêneo de grau $\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) - n = \frac{n^2+n+2}{2}$ nas variáveis a_0, \dots, a_n . Assim \mathbb{P}_ω^n (bem formado) não admite uma métrica Kähler-Einstein. □

Referências

- [1] Adem, A., Leida, J. e Ruan, Y. *Orbifolds and stringy topology*. Cambridge University Press, 2007.
- [2] Ballmann, W. Lectures on Kahler manifolds. ESI Lectures in Mathematics and Physics, 2006.
- [3] Baum, P. e Bott, R. *Essays on Topology and Related Topics, Memoires dedies a Georges de Rham*. Springer-Verlag, New York, 1970.
- [4] Blache, R. Chern classes and Hirzebruch-Riemann-Roch theorem for coherent sheaves on complex-projective orbifolds with isolated singularities. *Mathematische Zeitschrift*, vol. 222, páginas 7–57, 1996.
- [5] Bott, R. A residue formula for holomorphic vector – fields. *Journal of Differential Geometry*, vol. 1(3–4), páginas 311–330, 1967.
- [6] Brasselet, J.-P. *Introduction to Toric Varieties*. IMPA, 2008.
- [7] Brochero, F. E., Corrêa, M. e Rodríguez, A. M. Poincaré problem for weighted projective foliations. Preprint, 2014. <http://arxiv.org/abs/1406.4160>.
- [8] Brunella, M. e Mendes, L. G. Bounding the degree of solutions to pfaff equations. *Publicacions Mathematiques*, vol. 41, páginas 527–544, 1997.
- [9] Carnicer, M. M. The poincaré problem in the nondicritical case. *Annals of Mathematics*, vol. 140(2), páginas 289 – 294, 1994.
- [10] Cerveau, D. e Neto, A. L. Holomorphic foliations in \mathbb{P}^2 having an invariant algebraic curve. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 41(4), páginas 883 – 903, 1991.
- [11] Chern, S. S. Meromorphic vector fields and characteristic numbers. *Selected Papers, Springer-Verag, New York*, páginas 435–433, 1978.

-
- [12] Corrêa, M. B. e Soares, M. G. A note on Poincaré problem for quasi-homogeneous foliations. *American Mathematical Society*, vol. 140, páginas 3145 – 3150, 2012.
- [13] Cox, D., Little, J. e Schenck, H. *Toric Varieties*, vol. 124. Graduate Studies in Mathematics, 2010.
- [14] Demailly, J., Peternell, T., Tian, G. e Tyurin, A. *Transcendental Methods in Algebraic Geometry*. Springer, 1994.
- [15] Ding, W. e Tian, G. Kähler–Einstein metrics and the generalized Futaki invariant. *Inventiones mathematicae*, vol. 110, páginas 315–335, 1992.
- [16] Dolgachev, I. *Weighted Projective Varieties*, vol. 956 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1982.
- [17] Esteves, E. e Kleiman, S. Bounding solutions of pfaff equations. *Comm. Algebra*, vol. 31, páginas 3771 – 3793, 2003.
- [18] Fulton, W. *Introduction to Toric Varieties*. Princeton University Press, 1993.
- [19] Futaki, A. An obstruction to the existence of Kähler–Einstein metrics. *Inventiones mathematicae*, vol. 73, páginas 437–443, 1983.
- [20] Futaki, A. *Kähler–Einstein Metrics and integral Invariants*, vol. 1314. Springer Verlag, 1988.
- [21] Gauduchon, P. Hirzebruch surfaces and weighted projective planes. *Riemannian Topology and Geometric Structures on Manifolds*, vol. 271, páginas 25–48, 2009.
- [22] Huybrechts, D. *Complex Geometry An Introduction*. Springer, 2004.
- [23] Li, C. Some notes on Futaki invariant. 2007.
- [24] Lu, Z. On the Futaki invariants of complete intersections. *Duke Mathematical Journal*, vol. 100(2), 1999.
- [25] Mann, E. *Cohomologie quantique orbifoldes des espaces projectifs a poids*. Tesis Doctoral, 2005. <http://arxiv.org/abs/math/0510331v1>.

-
- [26] Matsuzawa, J.-I. Root systems and periods on Hirzebruch surfaces. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, vol. 29, páginas 411–438, 1993.
- [27] Moroianu, A. *Lectures on Kahler Geometry*. Cambridge University Press, 2007.
- [28] Pereira, J. V. On the Poincaré problem for foliations of general type. *Mathematische Annalen*, vol. 323, páginas 217 – 226, 2002.
- [29] Poincaré, H. Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré. *Rend. Circ. Mat.*, vol. 5, páginas 161 – 191, 1891.
- [30] Ross, J. e Thomas, R. Weighted projective embeddings, stability of orbifolds and constant scalar curvature Kähler metrics. 2009. <http://arxiv.org/abs/0907.5214>.
- [31] Satake, I. On a generalisation of the notion of manifolds. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, vol. 42, páginas 359–363, 1956.
- [32] Satake, I. The Gauss-Bonnet theorem for V-manifolds. *J. Mat. Soc. Japan*, vol. 9, páginas 464–492, 1957.
- [33] Soares, M. G. The Poincaré problem for hypersurfaces invariant by one-dimensional foliations. *Inventiones mathematicae*, vol. 128, páginas 495–500, 1997.
- [34] Soares, M. G. On Chern's proof of Baum-Bott's theorem. *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 333, páginas 757–761, 2001.
- [35] Thurston, W. P. *The geometry and topology of three-manifolds*. Princeton University Press, 1997.
- [36] Tian, G. *Canonical Metrics in Kahler Geometry*. Birkhauser Verlag, Basel–Boston–Berlin, 2000.
- [37] Viaclovsky, J. A. Einstein metrics and Yamabe invariants of weighted projective spaces. 2013. <http://arxiv.org/abs/1206.1285v2>.