UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Sobre o Grau de Componentes dos Espaços das Folheações Holomorfas de Codimensão Um em $\mathbb{CP}^n$

Daniel Carlos Leite

Belo Horizonte, janeiro de 2015

Daniel Carlos Leite

Sobre o Grau de Componentes dos Espaços das Folheações Holomorfas de Codimensão Um em $\mathbb{CP}^n$

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais para a obtenção do título de Doutor em matemática.

Área de Concentração: Geometria Algébrica

Orientador: Prof. Dr. Israel Vainsencher

Belo Horizonte, janeiro de 2015

Dedicatória

À minha esposa Vanessa
e meu filho João Lucas.

Agradecimentos

- Ao Senhor Jesus pela cura que me permitiu cursar a pós-graduação.
- Aos meus pais, Luiz e Juliana, por acreditarem que o estudo era a melhor forma dos seus filhos terem um futuro digno. Hoje eles têm certeza disso. Lutaram muito para manter seus filhos na escola. Obrigado papai e mamãe!
- À minha esposa por acreditar que iríamos conquistar o que viemos buscar além das fronteiras de Mato Grosso. Com a chegada do nosso filho, João Lucas, não tenho dúvida que a família é um projeto divino.
- À todos os nossos familiares, meus e da minha esposa, que direta ou indiretamente nos ajudaram. Obrigado todos vocês!
- À todos os irmãos da Igreja Assémbleia de Deus do bairro São Francisco. Obrigado pela amizade e pelas orações!
- Ao professor Israel que foi bem mais do que um orientador desde que cheguei em Belo Horizonte. Ele sabe disso. Boa vontade e paciência não faltaram ao compartilhar seus conhecimentos comigo.
- Aos meus professores e colegas do departamento de matemática da UFMG. Em especial, àqueles do grupo de folheações holomorfas e geometria algébrica que compartilharam seus conhecimentos comigo.
- Aos professores André Contiero, Hamid Hassanzadeh, Maurício Barros e Severino Collier pela leitura desta tese. Suas correções e sugestões contribuiram para chegarmos na apresentação final deste trabalho.
- Ao CNPQ pelo apoio financeiro.

Resumo

Dois dos principais invariantes discretos de uma variedade projetiva são a dimensão e o grau. Os espaços de folheações holomorfas de codimensão um e grau d no espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^n$, $n \geq 3$ são subesquemas do espaço projetivo $\mathbb{CP}\left(H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1(d+1))\right)$ definidos pelas equações da condição de integrabilidade, $w \wedge dw = 0$.

Nesta tese determinamos os graus de certas componentes dos espaços de folheações holomorfas de codimensão um em $\mathbb{CP}^n$, $n \geq 3$. Para cada inteiro $r \geq 1$, seja $\mathcal{R}(2, 2r+1)$ o conjunto das folheações induzidas por 1-formas do tipo $2FdG - (2r+1)GdF$, onde F, G denotam polinômios homogêneos de graus $2, 2r+1$. X. Gomez-Mont e A. Lins Neto mostraram em [2] que $\mathcal{R}(2, 2r+1)$ é uma componente irredutível do espaço das folheações holomorfas de grau $2r+1$. Mais tarde, J. V. Pereira, F. Cukierman e I. Vainsencher mostraram em [5] que essa componente é racional e genericamente reduzida. Estes calcularam o grau dessa componente para $r = 1$, $n \leq 5$ e conjecturaram alguns valores em dimensões maiores.

Nosso resultado principal é a obtenção de uma fórmula para o grau da componente $\mathcal{R}(2, 2r+1)$ para $r \geq 1$ em dimensão arbitrária $n \geq 2$, a saber,

$$\binom{N}{N_2} - (r+1)\sum_{k=\theta}^{N_2-1} M_{rk}\left(\sum_{i=\theta}^{k}(r+1)^i(2r+1)^{k-i}\left(\sum_{t=0}^{i-\theta} M_{it\theta}2^t\right)M_{rik}\right)(2r+3)^{N_2-(k+1)}$$

onde

$$\begin{cases} N_i = \binom{n+i}{n} - 1, N = N_2 + N_{2r+1}, M_{rk} = \binom{N}{N_{2r+1}+k+1}, \theta = N_2 - n - 1, \\ M_{it\theta} = \binom{n+1}{i-\theta-t}(-1)^t\binom{N_2+t}{t} \text{ e } M_{rik} = (-1)^{k-i}\binom{N_{2r+1}+k-i}{k-i} \end{cases}$$

O cálculo do grau de $\mathcal{R}(2, 2r+1)$ nos casos tratados em [5, lemma 5.2, pág. 23] exigiu a resolução das indeterminações do mapa racional $\rho : (F, G) \mapsto 2FdG - (2r+1)GdF$. Trilhamos aqui uma abordagem distinta. Ao invés de fazer um estudo local do lugar de indeterminação do mapa ρ, efetuamos uma explosão preliminar *apenas no espaço das quádricas.* Isto nos permitiu descrever, em coordenadas adequadas, o lugar de indeterminação do novo mapa racional induzido, notadamente nos habilitando a lidar com r, n arbitrários. Para facilidade da leitura, apresentamos separadamente os casos $r = 1$ e $r = 2$ antes de fazer o caso geral.

Abstract

Two of the main discrete invariants of a projective variety are its dimension and degree. The spaces of holomorphic foliations of codimension one and degree d in $\mathbb{CP}^n$, $n \geq 3$ are subschemes of the projective space $\mathbb{CP}\left(H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1(d+1))\right)$ defined by the equations of conditon of integrability, $w \wedge dw = 0$.

We determine in this thesis the degrees of certain components of the spaces of holomorphic foliations of codimension one in $\mathbb{CP}^n$, $n \geq 3$. For each integer $r \geq 1$, let $\mathcal{R}(2, 2r+1)$ denote the set of foliations induced by 1-forms of type $2FdG - (2r+1)GdF$, where F, G denote homogeneous polinomials of degrees $2, 2r+1$. X. Gomez-Mont e A. Lins Neto proved in [2] that $\mathcal{R}(2, 2r+1)$ is an irreducible component of the space of holomorphic foliations of degree $2r+1$. After, J. V. Pereira, F. Cukierman and I. Vainsencher proved in [5] that it is a rational and generically reduced component. They found the degree of that component for $r = 1$, $n \leq 5$ and conjectured a few more in higher dimensions.

Our main result gives a closed formula for the degree of the component $\mathcal{R}(2, 2r+1)$ for $r \geq 1$ in arbitrary dimension $n \geq 2$, to wit,

$$\binom{N}{N_2} - (r+1) \sum_{k=\theta}^{N_2-1} M_{rk} \left(\sum_{i=\theta}^{k} (r+1)^i (2r+1)^{k-i} \left(\sum_{t=0}^{i-\theta} M_{it\theta} 2^t \right) M_{rik} \right) (2r+3)^{N_2-(k+1)}$$

where

$$\begin{cases} N_i = \binom{n+i}{n} - 1, N = N_2 + N_{2r+1}, M_{rk} = \binom{N}{N_{2r+1}+k+1}, \theta = N_2 - n - 1, \\ M_{it\theta} = \binom{n+1}{i-\theta-t}(-1)^t \binom{N_2+t}{t} \text{ e } M_{rik} = (-1)^{k-i}\binom{N_{2r+1}+k-i}{k-i} \end{cases}$$

The calculation of the degree of $\mathcal{R}(2, 2r+1)$ in the cases treated in [5, lemma 5.2, p. 23] required the resolution of the indeterminacies of the rational map $\rho : (F, G) \mapsto 2FdG - (2r+1)GdF$. We pursue here a different track. Instead of the local study of the indeterminacy locus of that map ρ, we perform a preliminary blow up *solely in the space of quadrics.* This has allowed us to describe, in suitable coordinates, the indeterminacy locus of the rational map induced on the blownup varity, thus enabling us to deal with arbitrary r, n. For conveniency of the reader, we explain separately the cases $r = 1$ and $r = 2$ before tackling the general case.

Sumário

Introdução

É sabido que uma folheação holomorfa de codimensão 1 e grau d no espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^n$, ou simplesmente $\mathbb{P}^n$, é induzida por uma 1-forma polinomial $\omega = \sum_{i=0}^{n} A_i dx_i$ tal que

1. A_i é um polinômio homogêneo de grau $d+1$ para todo $i = 0, \cdots, n$;
2. A 1-forma é projetiva: $\sum_{i=0}^{n} A_i x_i = 0$;
3. A 1-forma é integrável: $\omega \wedge d\omega = 0$.

O conjunto singular da folheação induzida por ω é a interseção das hipersuperfícies $\{A_i = 0\}$ para $i = 0, \cdots, n$. O conjunto das folheações de codimensão um e grau d que tem o conjunto singular de codimensão pelo menos igual a dois é um subconjunto algébrico do espaço projetivo das seções globais do fibrado $\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d+2)$,

$$\mathbb{P}\left(H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d+2))\right),$$

e é denotado por $\mathcal{F}(n,d)$.

Um importante problema no estudo das folheações holomorfas é a classificação das componentes irredutíveis de $\mathcal{F}(n,d)$.

Quando $d = 0$ ou $d = 1$, todas as componentes são conhecidas para dimensão n arbitrária (cf. [10]).

Para $d = 2$, A. Lins Neto e D. Cerveau em [3] descreveram todas as componentes para $n \geq 3$. Há seis: uma do tipo *pull-back linear*, uma *excepcional*, duas *logarítmicas* e duas *racionais*. Este último tipo será abordado com mais detalhes porque é dele que trata este trabalho.

Outras componentes tipo pull-back não linear foram descritas por A. Lins Neto, D. Cerveau e S. J. Edixhoven [4] e, recentemente, generalizadas por W. Costa e Silva em [13].

Desde que dois dos principais invariantes discretos de uma variedade algébrica irredutível são a sua dimensão e o seu grau, surge naturalmente o seguinte problema de interesse da geometria enumerativa.

Problema: Calcular o grau das componentes irredutíveis de $\mathcal{F}(n,d)$ que são conhecidas.

Sejam F e G polinômios homogêneos em $n+1$ variáveis, $x_0, x_1, \cdots, x_n$, de graus a e b, respectivamente, e tais que $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$, onde $mdc(p,q) = 1$. A função racional $\frac{F^q}{G^p}$ é uma integral primeira para a folheação induzida pela 1-forma $\omega = qGdF - pFdG$. Essa folheação possui grau igual a $a+b-2$ e portanto pertence a $\mathcal{F}(n, a+b-2)$. Para $n \geq 3$, foi provado em [2] que esse conjunto é uma componente irredutível do espaço de folheações; o membro genérico é uma folheação tangente às fibras do mapa racional

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{CP}^n & \dashrightarrow & \mathbb{CP}^1 \\ x = (x_0, \cdots, x_n) & \mapsto & (F^q(x) : G^p(x)) \end{array}$$

Vamos denotar essa componente por $\mathcal{R}(a, b)$.

Em [2] X. Gomez-Mont e A. Lins Neto mostraram que $\mathcal{R}(a, b)$ é uma componente irredutível do espaço das folheações holomorfas $\mathcal{F}(n, a + b - 2)$. Mais tarde, Em [5] J. V. Pereira, F. Cukerman e I. Vainsencher mostraram que para $n \geq 3$, $\mathcal{R}(a, b)$ é uma componente racional e genericamente reduzida, cf. theorem 2.1. Estes trataram também do cálculo do grau dessas componentes nos casos a seguir descritos.

Quando a divide b eles mostraram que o grau da variedade $\mathcal{R}(a, b)$ é igual a

$$\begin{pmatrix} N_a + N_b - 1 \\ N_a \end{pmatrix} - \frac{b}{a} \begin{pmatrix} N_a + N_b - 1 \\ N_a - 1 \end{pmatrix}$$

onde N_d é a dimensão do espaço projetivo $\mathbb{P}(S_d)$ com $S_d = H^0 (\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d))$, isto é, o espaço dos polinômios homogêneos de grau d nas coordenadas homogêneas de $\mathbb{P}^n$.

Além desses casos, apenas o grau da componente $\mathcal{R}(2, 3)$ foi calculada para dimensão $n \leq 5$. Eles conjecturaram o grau de algumas componentes de $\mathcal{R}(2, 2r + 1)$ em dimensões maiores, onde r é um inteiro positivo.

Neste trabalho, obtivemos o grau da componente $\mathcal{R}(2, 3)$ em dimensão n arbitrária. Conseguimos provar que o seu grau é dado pela fórmula

$$\binom{N}{N_2} - 2 \sum_{k=\theta}^{N_2-1} M_k \left(\sum_{i=\theta}^{k} 2^i 3^{k-i} \left(\sum_{t=0}^{i-\theta} M_{it\theta} 2^t \right) M_{ik} \right) 5^{N_2-(k+1)}$$

onde

$$\begin{cases} N_i = \binom{n+i}{n} - 1, N = N_2 + N_3, M_k = \binom{N}{N_3+k+1}, \theta = N_2 - n - 1, \\ M_{it\theta} = \binom{n+1}{i-\theta-t} (-1)^t \binom{N_2+t}{t} \text{ e } M_{ik} = (-1)^{k-i} \binom{N_3+k-i}{k-i} \end{cases}$$

Esse é o conteúdo do teorema 1.2.12. Aliás, os valores não coincidem com aqueles conjecturados em [5], exceto quando $r = 1$. Um erro na construção do algorítmo provavelmente interferiu nos valores quando $r > 1$.

Em seguida, conseguimos estender os resultados para a componente $\mathcal{R}(2, 5)$ também em dimensão arbitrária, cf. teorema 1.3.6. Esses dois resultados compreendem o primeiro capítulo.

A extensão dos resultados para a componente $\mathcal{R}(2, 5)$ permitiu-nos generalizar para as componentes $\mathcal{R}(2, 2r + 1)$. Mais especificamente, nós provamos no teorema 2.2.2 que para cada par de números inteiros positivos (n, r), o grau da componente $\mathcal{R}(2, 2r + 1)$ é dado pela fórmula

$$\binom{N}{N_2} - (r+1) \sum_{k=\theta}^{N_2-1} M_{rk} \left(\sum_{i=\theta}^{k} (r+1)^i (2r+1)^{k-i} \left(\sum_{t=0}^{i-\theta} M_{it\theta} 2^t \right) M_{rik} \right) (2r+3)^{N_2-(k+1)}$$

onde

$$\begin{cases} N_i = \binom{n+i}{n} - 1, \;\; N = N_2 + N_{2r+1}, \;\; M_{rk} = \binom{N}{N_{2r+1}+k+1}, \;\; \theta = N_2 - n - 1, \\ M_{it\theta} = \binom{n+1}{i-\theta-t}(-1)^t\binom{N_2+t}{t} \;\text{ e }\; M_{rik} = (-1)^{k-i}\binom{N_{2r+1}+k-i}{k-i}. \end{cases}$$

Capítulo 1

O grau das componentes $\mathcal{R}(2,3)$ e $\mathcal{R}(2,5)$ em dimensão arbitrária

1.1 Preliminares

Começaremos o capítulo introduzindo notações e resumindo alguns resultados sobre as componentes racionais $\mathcal{R}(a,b)$, enfatizando o cálculo do grau nos casos conhecidos. Os detalhes podem ser encontrados nas referências [5] e [3].

Sejam d um número inteiro positivo e S_d o espaço das seções globais do feixe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$, ou seja, o espaço de polinômios homogêneos de grau d em $n+1$ indeterminadas. Denote por $\mathcal{R}(a,b)$ o fecho da imagem do mapa racional

$$\begin{array}{rccc} \overline{\rho}_{a,b}: & X = \mathbb{P}(S_a) \times \mathbb{P}(S_b) & \dashrightarrow & \mathbb{P}\left(H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(a+b))\right) \\ & (F,G) & \longmapsto & pFdG - qGdF \end{array}$$

onde $a/b = p/q$ com p,q inteiros positivos sem fator comum. O leitor verificará facilmente que o lugar de indeterminação é formado pelos pares $F = L^a, G = L^b$, $L \in \mathbb{P}(S_1)$. Entretanto, o *esquema de indeterminação* é não reduzido. Voltaremos a esse ponto mais adiante.

Mostra-se em ([5], thm. 2.1) que, para $n \geq 2$, a variedade $\mathcal{R}(a,b)$ é uma componente irredutível e genericamente reduzida do espaço de folheações $\mathcal{F}(n, a+b-2)$.

Considere também o mapa racional

$$\begin{array}{rccc} \rho_{a,b}: & X & \dashrightarrow & \mathbb{P}\left(S_{a+b-2} \otimes \bigwedge^2 S_1\right) \\ & (F,G) & \longmapsto & dF \wedge dG \end{array}$$

e a contração pelo campo radial

$$i_R : \mathbb{P}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathbb{P}\left(H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(a+b))\right)$$

onde $\mathcal{V} \subset S_{a+b-2} \otimes \bigwedge^2 S_1$ é o subespaço vetorial das 2-formas fechadas. Então, $\overline{\rho}_{a,b} = i_R \circ \rho_{a,b}$; os mapas $\overline{\rho}_{a,b}$ e $\rho_{a,b}$ têm esquematicamente o mesmo lugar de indeterminação; o grau da componente $\mathcal{R}(a,b)$ é o grau da sua imagem inversa $i_R^{-1}\mathcal{R}(a,b)$, (cf. [5, prop. 4.1]).

Adotaremos as seguintes notações que aparecerão com bastante frequência no restante do texto

$$\mathcal{R}(a,b): \text{ a imagem inversa } i_R^{-1}\mathcal{R}(a,b) \tag{1.1}$$

$$\rho_{a,b}: \text{ o mapa racional } (F,G) \mapsto dF \wedge dG \tag{1.2}$$

$$B: \text{ o esquema de indeterminação do mapa } \rho_{a,b}. \tag{1.3}$$

Para obter o grau da componente $\mathcal{R}(2,3)$ em dimensão $n \leq 5$, em [5] os autores descreveram o fibrado tangente do esquema de indeterminação B como sendo igual a

$$T_{(L^2,L^3)}B = \left\{ (F',G') \in T_{(L^2,L^3)}X \mid G' = \frac{3}{2}LF' \right\}.$$

Eles explodiram a bi-Veronese $L \mapsto (L^2, L^3)$ em X para obterem o mapa racional

$$\rho'_{2,3}: X' \dashrightarrow \mathbb{P}\left(S_3 \otimes \overset{2}{\wedge} S_1 \right),$$

cujo lugar de indeterminação B' é igual ao subfibrado do divisor excepcional E'

$$B' = \mathbb{P}\left(N_{V|B}\right) \subset \mathbb{P}\left(N_{V|X}\right) \ = \ E'. \tag{1.4}$$

Essa igualdade permitiu-lhes calcularem o grau dessa componente para dimensões baixas, cf. [5], lemma 5.1 e lemma 5.2.

A seguir, mostraremos como contornamos a dificuldade de resolver o mapa $\rho_{2,3}$ de modo que o grau da componente $\mathcal{R}(2,3)$ fosse calculado em dimensão arbitrária. Em poucas palavras, trocamos a explosão da bi-Veronese pela explosão da Veronese *só no primeiro fator*, $\mathbb{P}(S_2)$.

1.2 O grau da componente $\mathcal{R}(2,3)$ em dimensão arbitrária

Nesta seção descreveremos as explosões para resolver o mapa racional $\rho_{2,3}$ em dimensão arbitrária. Diferentemente do feito em [5], aqui começaremos explodindo o produto

$$\left(\check{\mathbb{P}}^2 = V\right) \times \mathbb{P}(S_3) \subset \mathbb{P}(S_2) \times \mathbb{P}(S_3) =: X.$$

Isto é, ao invés de explodirmos a variedade X ao longo da subvariedade V pelo mergulho bi-Veronese

$$\begin{array}{ccc} V & \hookrightarrow & X = \mathbb{P}(S_2) \times \mathbb{P}(S_3) \\ L & \longmapsto & \left(L^2, L^3\right) \end{array} \tag{1.5}$$

explodiremos X ao longo da subvariedade $V \times \mathbb{P}(S_3)$ pelo mergulho Veronese apenas no primeiro fator

$$\begin{array}{rcl} V \times \mathbb{P}(S_3) & \hookrightarrow & X = \mathbb{P}(S_2) \times \mathbb{P}(S_3) \\ (L, G) & \longmapsto & \big(L^2, G\big) \end{array} \tag{1.6}$$

Vamos usar repetidas vezes a seguinte notação

$$B' : \text{ o esquema de indeterminação do mapa } \rho'_{2,3} \tag{1.7}$$

onde $\rho'_{2,3}$ é o mapa racional induzido por $\rho_{2,3}$ na explosão da variedade X com o novo centro de explosão acima.

Mostraremos que B' (cf. o diagrama abaixo (1.8)) é um esquema que é uma interseção completa local. Mais especificamente, mostraremos que o ideal do esquema B' (1.8) é localmente da forma $J' = \langle z_1, z_2, \cdots, z_t, \varepsilon^2 \rangle$, onde $z_1, z_2, \cdots, z_t, \varepsilon^2$ é uma sequência regular no anel de coordenadas locais da variedade X', e ε denota uma equação local do divisor excepcional E'. Além disso, a redução B'_r, localmente definida por $J'_r = \langle z_1, z_2, \cdots, z_t, \varepsilon \rangle$, é um fibrado projetivo sobre V. Sendo X'' a explosão da variedade X' ao longo do esquema de indeterminação B', segue ([8, 7.17.3, pág. 168]) que uma resolução do mapa $\rho_{2,3}$ terminará se encaixando num diagrama da forma

$$\begin{tikzcd}
E'' \arrow[rr, hook] \arrow[d] & & X'' \arrow[d, "\pi''"] \arrow[dddr, bend left, "\rho''_{2,3}"] & \\
B' \arrow[r, hook] & 2E' \arrow[dr, hook] & & \\
B'_r = \mathbb{P}\left(N_{V|\mathbb{P}(S_2)}\right) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] \arrow[d] & E' = \mathbb{P}\left(N_{V|\mathbb{P}(S_2)}\right) \times \mathbb{P}(S_3) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] \arrow[d] & X' \arrow[d, "\pi'"] \arrow[dr, dotted, "\rho'_{2,3}"] & \\
V \arrow[r, hook] & V \times \mathbb{P}(S_3) \arrow[r, hook] & X \arrow[r, dotted, "\rho_{2,3}"] & \mathbb{P}\left(S_3 \otimes \bigwedge^2 S_1^\vee\right)
\end{tikzcd} \tag{1.8}$$

em que o segundo divisor excepcional E'' é um fibrado projetivo sobre a base B' (cf. [6, appendix B.7.1, p. 437]).

A observação elementar abaixo é fundamental para o restante do texto.

Observação 1.2.1. Fixados polinômios homogêneos não nulos, $F_1, \ldots, F_m$ de graus $d_1, \ldots, d_m$, existe uma mudança de coordenadas

$$\begin{cases} x_0 & \mapsto & x_0 \\ x_i & \mapsto & x_i + \lambda_i x_0,\ i = 1, \cdots, n \end{cases},$$

de modo que

$$\begin{cases} F_1 & \mapsto & x_0^{d_1} + \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ F_m & \mapsto & x_0^{d_m} + \cdots \end{cases}$$

a menos de multiplicação por constante.

De fato, existem escalares $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tais que $F_k(1, \lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq 0$, $k = 1, \cdots, m$, porque o conjunto das suas raízes é o complementar de um aberto denso. Com isso,

$$F_k \mapsto F_k(x_0, x_1 + \lambda_1 x_0, \cdots, x_n + \lambda_n x_0) = F_k(1, \lambda_1, \cdots, \lambda_n) x_0^{d_k} + \cdots, \quad k = 1, \cdots, m.$$

Então, a ação do grupo linear geral $\mathbb{G} = GL_{n+1}(\mathbb{C})$ sobre $X = \mathbb{P}(S_a) \times \mathbb{P}(S_b)$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G} \times X & \longrightarrow & X \\ (\sigma, F, G) & \mapsto & (\sigma F, \sigma G) \end{array} \tag{1.9}$$

deixa uma única órbita fechada $\{(x_i^a, x_i^b); i = 0, \cdots, n\}$ e as vizinhanças transladadas $\{(x_i^a + \cdots, x_i^b + \cdots); i = 0, \cdots, n\}$ cobrem X.

O mapa $\rho_{a,b}$ é equivariante pela ação. Consequentemente, o mapa induzido $\rho'_{a,b}$ também o é. Sabe-se que o lugar de indeterminação de uma mapa racional equivariante sob a ação de um grupo linear é fechado, invariante e portanto contém órbita fechada.

Sendo assim, as nossas contas locais poderão ser feitas na vizinhança de um representante da única órbita fechada da variedade X, a saber, o par (x_0^a, x_0^b).

1.2.1 A resolução do mapa $\rho_{2,3}$

No sentido de obter os resultados que justificam o diagrama (1.8) acima, podemos usar a observação 1.2.1 e tomar os polinômios

$$\begin{aligned} F = & \quad x_0^2 + \sum_{j=1}^{n} a_{0j} x_0 x_j + \sum_{j \geq i=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \\ G = & \; x_0^3 + \sum_{k=1}^{n} b_{00k} x_0^2 x_k + \sum_{\substack{k \geq j \geq i=0 \\ j>0}}^{n} b_{ijk} x_i x_j x_k \end{aligned} \tag{1.10}$$

na vizinhança $a_{00} = b_{000} = 1$ da variedade X.

Vamos explicitar as equações locais do centro de explosão mencionado em (1.6). Sejam

$$\begin{cases} L = x_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ F = x_0^2 + \sum_{j=1}^{n} a_{0j} x_0 x_j + \sum_{j \geq i=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \end{cases}$$

nas vizinhanças em tela das variedades V e $\mathbb{P}(S_2)$, respectivamente. Temos

$$L^2 = x_0^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i^2 x_i^2 + 2 \sum_{j=1}^{n} c_j x_0 x_j + 2 \sum_{j>i=1}^{n} c_i c_j x_i x_j$$

Então,

$$F = L^2 \text{ se, e somente se, } \begin{cases} c_i^2 = a_{ii}, & \text{para} \quad i = 1, \cdots, n \\ 2c_j = a_{0j}, & \text{para} \quad j = 1, \cdots, n \\ 2c_i c_j = a_{ij}, & \text{para} \quad j \geq i = 1, \cdots, n. \end{cases}$$

Das duas primeiras relações seguem que $a_{jj} = \frac{1}{4}a_{0j}^2$ para $j = 1, \cdots, n$. Por outro lado, da segunda e terceira relações seguem que $a_{ij} = \frac{1}{2}a_{0i}a_{0j}$ para $j \geq i = 1, \cdots, n$. Portanto, as equações locais que definem o mergulho (1.6) são

$$
\begin{aligned}
a_{ii} &= \frac{1}{4}a_{0i}^2 \quad para \quad i = 1, \cdots, n && (1.11)\\
a_{ij} &= \frac{1}{2}a_{0i}a_{0j} \quad para \quad j > i = 1, \cdots, n && (1.12)
\end{aligned}
$$

Essas equações geram o ideal do centro de explosão na vizinhança em tela. Sendo assim, temos apenas dois "tipos" de escolhas possíveis para a equação local do primeiro divisor excepcional E':

$$
\begin{cases} \varepsilon = a_{ii} - \frac{1}{4}a_{0i}^2, & \text{ou} \\ \varepsilon = a_{ij} - \frac{1}{2}a_{0i}a_{0j}. \end{cases}
$$

Vamos mostrar adiante (prop. 1.2.4), que em qualquer dessas vizinhanças o esquema de indeterminação B' definido em (1.7) é uma interseção completa local. Agora, precisamos entender o comportamento das equações locais do esquema de indeterminação B definido em (1.3). Para isso, lembramos que um elemento da variedade $\mathbb{P}\left(S_3 \otimes \overset{2}{\wedge} S_1\right)$ que está na imagem do mapa $\rho_{2,3}$ é uma 2-forma do tipo $\sum\limits_{m>l=0}^{n} \left[(\partial_l F)(\partial_m G) - (\partial_m F)(\partial_l G)\right] dx_l \wedge dx_m$, onde ∂_t denota a derivada parcial com relação a x_t para $0 \leq t \leq n$.

Defina

$$
A_{lm} = (\partial_l F)(\partial_m G) - (\partial_m F)(\partial_l G), \text{para } m > l = 0, \cdots, n. \tag{1.13}
$$

Então, cada coeficiente A_{lm} da 2-forma acima são polinômios homogêneos de grau 3, cujos coeficientes por sua vez são geradores locais do ideal do esquema B (ver def. 1.3).

Vamos denotar por

$$
J: \text{ o ideal dos geradores locais do esquema } B. \tag{1.14}
$$

Observação 1.2.2. Os coeficientes do polinômio A_{lm} são polinômios quadráticos com termos do tipo $a_{st}b_{ijk}$, onde a_{st} e b_{ijk} são os coeficientes dos polinômios (1.10) em que $a_{00} = b_{000} = 1$. Destes polinômios quadráticos, os únicos com termos lineares são aqueles que comparecem como coeficientes dos monômios $x_0x_ix_j$ do polinômio A_{0m}. De fato, temos que

$$
dF = \left(2x_0 + \sum_{i=1}^{n} a_{0i}x_i\right) dx_0 + \cdots
$$

$$
dG = \left(3x_0^2 + 2\sum_{i=1}^{n} b_{00i}x_0x_i + \sum_{j \geq i=1}^{n} b_{0ij}x_ix_j\right) dx_0 + \cdots
$$

Os únicos polinômios que são coeficientes das 1-formas dF e dG que possui algum coeficiente constante são esses explicitados acima. Eles são exatamente os coeficientes de dx_0. Por isso, apenas no polinômio A_{0m} teremos monômios com coeficientes com termos lineares. Além disso, apenas os monômios do tipo $x_0x_ix_j$ de A_{0m} terão coeficientes com termos lineares porque eles serão formados a partir do termo $2x_0$ que aparece na escrita do primeiro coeficiente de dF acima.

O mesmo argumento se aplica para o caso em que G possui grau maior, uma vez que dF continua o mesmo. Sendo assim, os únicos monômios de A_{0m} que possuem coeficientes com algum termo linear ($\neq 0$) são aqueles do tipo $x_0 x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$.

De acordo com a observação (1.2.2), fixando $l = 0$, podemos obter o seguinte subconjunto do ideal J

$$J_1 : \text{coeficiente dos monômios } x_0 x_i x_j \text{ do polinômio } A_{0m},\ j \geq i = 0, \cdots, n. \tag{1.15}$$

Isto é, J_1 é o ideal gerado pelos coeficientes do tipo $b_{ijk} + \cdots$. Obteremos um conjunto gerador para J_1 que formará uma sequência regular no anel de coordenadas locais de X (1.6). Esse conjunto será de extrema importância para identificarmos o esquema B' (ver definição 1.7).

Temos o seguinte lema

Lema 1.2.3. *O ideal J_1 definido acima é gerado por* $\dim \mathbb{P}(S_3)$ *elementos que formam uma sequência regular no anel de coordenadas locais de X. Além disso, J_1 é um ideal primo.*

Demonstração. De fato, vamos começar explicitando um conjunto gerador do ideal J_1 satisfazendo a primeira parte do enunciado. Para isso, escrevemos o par $(F, G) \in X$ como em [7, pág. 287],

$$F = x_0^2 + x_0 F_1 + F_2 \quad \text{e} \quad G = x_0^3 + x_0^2 G_1 + x_0 G_2 + G_3,$$

onde F_i é um polinômio homogêneo de grau i e G_j é um polinômio homogêneo de grau j, não dependentes da variável x_0. Então,

$$\begin{aligned} &dF \wedge dG = \\ &2x_0^3 dx_0 \wedge dG_1 + 2x_0^2 dx_0 \wedge dG_2 + 2x_0 dx_0 \wedge dG_3 - 3x_0^3 dx_0 \wedge dF_1 - 2x_0^2 G_1 dx_0 \wedge dF_1 + x_0^3 dF_1 \wedge dG_1 \\ &+ x_0^2 dF_1 \wedge dG_2 - x_0 G_2 dx_0 \wedge dF_1 + x_0 dF_1 \wedge dG_3 + x_0^2 F_1 dx_0 \wedge dG_1 + x_0 F_1 dx_0 \wedge dG_2 + F_1 dx_0 \wedge dG_3 \\ &- 3x_0^2 dx_0 \wedge dF_2 - 2x_0 G_1 dx_0 \wedge dF_2 + x_0^2 dF_2 \wedge dG_1 + x_0 dF_2 \wedge dG_2 - G_2 dx_0 \wedge dF_2 + dF_2 \wedge dG_3. \end{aligned}$$

Podemos agrupar os termos da seguinte forma que nos é conveniente

$$\begin{gathered} dF \wedge dG = \\ x_0^3 \left[2dx_0 \wedge dG_1 - 3dx_0 \wedge dF_1\right] + x_0^2 \left[F_1 dx_0 \wedge dG_1 - 2G_1 dx_0 \wedge dF_1 - 3dx_0 \wedge dF_2 + \right. \\ \left. 2dx_0 \wedge dG_2\right] + x_0 \left[2dx_0 \wedge dG_3 - G_2 dx_0 \wedge dF_1 + F_1 dx_0 \wedge dG_2 - 2G_1 dx_0 \wedge dF_2\right] + \\ x_0^3 dF_1 \wedge dG_1 + x_0^2 \left[dF_1 \wedge dG_2 + dF_2 \wedge dG_1\right] + x_0 \left[dF_1 \wedge dG_3 + dF_2 \wedge dG_2\right] + \\ F_1 dx_0 \wedge dG_3 - G_2 dx_0 \wedge dF_2 + dF_2 \wedge dG_3 \end{gathered} \tag{1.16}$$

Agora, note que os geradores do ideal J_1 (cf. 1.15) são aqueles que comparecem como coeficientes dos monômios $x_0 x_i x_j$ do polinômio A_{0i} (cf. 1.13, pág.8) no desenvolvimento da

2-forma (1.16) acima. Então, de acordo com a observação 1.2.2 e conforme o agrupamento acima escolhido, devemos impor que

$$\begin{aligned} 2dx_0 \wedge dG_1 - 3dx_0 \wedge dF_1 &= 0 \qquad (1.17)\\ F_1 dx_0 \wedge dG_1 - 2G_1 dx_0 \wedge dF_1 - 3dx_0 \wedge dF_2 + 2dx_0 \wedge dG_2 &= 0 \qquad (1.18)\\ 2dx_0 \wedge dG_3 - G_2 dx_0 \wedge dF_1 + F_1 dx_0 \wedge dG_2 - 2G_1 dx_0 \wedge dF_2 &= 0 \qquad (1.19) \end{aligned}$$

A equação (1.17) é equivalente a

$$dx_0 \wedge d\,(2G_1 - 3F_1) = 0.$$

Então, o lema da divisão ([5, lemma 2.2, pág. 6]) implica na existência de um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$d\,(2G_1 - 3F_1) = \lambda dx_0.$$

Como F_1 e G_1 não dependem de x_0, devemos ter $\lambda = 0$. Ou seja, $2G_1 - 3F_1 = 0$. Portanto, temos

$$\underbrace{G_1}_{\text{os coef. são } (b_{00k})_{k\geq 1}} = \underbrace{\frac{3}{2}F_1}_{\text{os coef. são polinômios lineares nas variáveis } a_{0k}} \qquad (1.20)$$

Substituindo a equação (1.20) na equação (1.18), obtemos

$$dx_0 \wedge d\left(-\frac{3}{4}F_1^2 - 3F_2 + 2G_2\right) = 0.$$

Como antes, o lema da divisão implica que

$$-\frac{3}{4}F_1^2 - 3F_2 + 2G_2 = 0,$$

ou seja,

$$\underbrace{G_2}_{\text{os coef. são } (b_{0jk})_{k\geq j\geq 1}} = \underbrace{\frac{3}{8}F_1^2 + \frac{3}{2}F_2}_{\text{os coef. são polinômios quadráticos nas variáveis } a_{st}} \qquad (1.21)$$

Finalmente, substituindo as equações (1.20) e (1.21) na equação (1.19), obtemos

$$dx_0 \wedge d\left(2G_3 + \frac{1}{8}F_1^3 - \frac{3}{2}F_1F_2\right) = 0.$$

Outra vez, o lema da divisão implica que

$$2G_3 + \frac{1}{8}F_1^3 - \frac{3}{2}F_1F_2 = 0,$$

ou ainda,

$$\underbrace{G_3}_{\text{os coef. são } (b_{ijk})_{k\geq j\geq i\geq 1}} = \underbrace{-\frac{1}{16}F_1^3 + \frac{3}{4}F_1F_2}_{\text{os coef. são polinômios cúbicos nas variáveis } a_{st}} \tag{1.22}$$

Portanto, as equações (1.20), (1.21) e (1.22) mostram que G é obtido em função de F. Especificamente,

$$J_1 = \Big\langle \left(b_{00k} - \phi_k^1\right)_{1\leq k\leq n}, \left(b_{0jk} - \phi_{jk}^2\right)_{1\leq l\leq k\leq n}, \left(b_{ijk} - \phi_{ijk}^3\right)_{1\leq i\leq j\leq k\leq n} \Big\rangle \tag{1.23}$$

é o ideal do gráfico do mapa

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\dim \mathbb{P}(S_2)} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\dim \mathbb{P}(S_2)} \times \mathbb{C}^{\dim \mathbb{P}(S_3)} \\ (a_{st}) & \longmapsto & \left((a_{st}), (\phi_k^1), \left(\phi_{jk}^2\right), \left(\phi_{ijk}^3\right)\right) \end{array}$$

onde ϕ_k^1, ϕ_{jk}^2 e ϕ_{ijk}^3 são polinômios de graus um, dois e três respectivamente, ambos dependentes apenas das variáveis a_{st}.

Portanto, $\dim V(J_1) = \dim \mathbb{P}(S_2)$ e a ordem dos geradores em (1.23) formam uma sequência regular no anel de coordenadas locais de X. Em particular, a segunda parte segue imediatamente. Isso encerra a demonstração do lema. □

Posto isso, podemos enunciar e provar a seguinte proposição.

Proposição 1.2.4. *O ideal J' do local de indeterminação B', é igual ao transformado total (pull-back) do ideal J (1.14), é gerado por uma sequência regular de comprimento $\dim \mathbb{P}(S_3) + 1$ e vale a igualdade $J' = J_1' + \langle \varepsilon^2 \rangle$, onde J_1' representa o transformado total do ideal J_1 e ε denota uma equação local para o divisor excepcional E'.*

Demonstração. Vamos dividir em duas afirmações.

Afirmação 1.2.5. Seja $\overline{J}$ o ideal gerado pelos coeficientes de

$$dF \wedge dG \mod J_1. \tag{1.24}$$

Então temos

$$dF \wedge dG = \frac{3}{2}\left(F_2 - \frac{1}{4}F_1^2\right)\left(\frac{1}{2}F_1 dx_0 \wedge dF_1 - dx_0 \wedge dF_2 + \frac{1}{2}dF_2 \wedge dF_1\right) \mod J_1 \tag{1.25}$$

e $J' = J_1' + \overline{J}'$, onde $\overline{J}'$ é o transformado total de $\overline{J}$.

No lema 1.2.3 acima, obtivemos a escrita da 2-forma (1.16). Além disso, os geradores locais do ideal J_1 são obtidos pelas relações (1.20), (1.21) e (1.22). Agora, lembramos que essas relações originaram da condição do anulamento das primeiras três parcelas da 2-forma (1.16), conforme o agrupamento de termos apresentado lá. Então,

$$\begin{aligned} dF \wedge dG \mod J_1 &= \tfrac{3}{4}F_1\left(F_2 - \tfrac{1}{4}F_1^2\right)dx_0 \wedge dF_1 - \tfrac{3}{2}\left(F_2 - \tfrac{1}{4}F_1^2\right)dx_0 \wedge dF_2 + \\ &\quad + \tfrac{3}{4}\left(F_2 - \tfrac{1}{4}F_1^2\right)dF_2 \wedge dF_1 \\ &= \tfrac{3}{2}\left(F_2 - \tfrac{1}{4}F_1^2\right)\left(\tfrac{1}{2}F_1 dx_0 \wedge dF_1 - dx_0 \wedge dF_2 + \tfrac{1}{2}dF_2 \wedge dF_1\right). \end{aligned}$$

Agora, por um lado, temos que $J = J_1 + \overline{J}$. Por outro lado, as equações locais do centro de explosão, $V \times \mathbb{P}(S_3)$, não envolvem a parte linear b_{ijk} dos geradores de J_1. Somente os coeficientes a_{ij} são substituídos pelas relações da explosão dadas pelas equações (1.11) e (1.12). Isso significa que o transformado total do ideal J_1 é um ideal J_1' gerado por uma sequência regular no anel de coordenadas locais da variedade X', que são exatamente os transformados totais dos geradores exibidos do ideal J_1. Portanto, J_1 e J_1' possuem a mesma quantidade de geradores, todas do tipo $b_{ijk} + \cdots$. Então, $J' = J_1' + \overline{J}'$. Isso encerra nossa primeira afirmação.

Para terminarmos a demonstração, basta provarmos a segunda afirmação abaixo.

Afirmação 1.2.6. $\overline{J}' = \langle \varepsilon^2 \rangle$.

Para isso, precisamos mostrar primeiro que os dois fatores de $dF \wedge dG \mod J_1$ conforme (1.25), são tais que os transformados totais dos seus coeficientes possuem ε como fator. Vamos mostrar, primeiramente, que os transformados totais dos coeficientes de $F_2 - \frac{1}{4}F_1^2$ possuem ε como fator, para qualquer escolha da equação local ε. Para isso, lembre que para $F \in \mathbb{P}(S_2)$ como escolhido no início desta seção, temos

$$F_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{0i}x_i \quad \text{e} \quad F_2 = \sum_{j \geq i=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

Sendo assim, a expressão $F_2 - \frac{1}{4}F_1^2$ torna-se

$$F_2 - \frac{1}{4}F_1^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{ii} - \frac{1}{4}a_{0i}^2 \right) x_i^2 + \sum_{j>i=1}^{n} \left(a_{ij} - \frac{1}{2}a_{0i}a_{0j} \right) x_ix_j$$

Ora, se $\varepsilon = a_{ii} - \frac{1}{4}a_{0i}^2$, então $a_{jj} - \frac{1}{4}a_{0j}^2 = \varepsilon d_{jj}$ para $j \neq i$ e $a_{ij} - \frac{1}{2}a_{0i}a_{0j} = \varepsilon d_{ij}$. Então, os transformados totais dos coeficientes de $F^2 - \frac{1}{4}F_1^2$ admitem ε como fator. Analogamente, se $\varepsilon = a_{ij} - \frac{1}{2}a_{0i}a_{ij}$, então $a_{ii} - \frac{1}{4}a_{0i}^2 = \varepsilon d_{ii}$ e $a_{lk} - \frac{1}{2}a_{0l}a_{0k} = \varepsilon d_{lk}$ para $l \neq i$ e $k \neq j$. Logo, também nesse caso os transformados totais dos coeficientes de $F_2 - \frac{1}{4}F_1^2$ admitem ε como fator. Portanto, em qualquer caso, os transformados totais dos coeficientes de $F_2 - \frac{1}{4}F_1^2$ admitem ε como fator.

Resta mostrarmos que os transformados totais dos coeficientes do segundo fator de (1.25),

$$\frac{1}{2}F_1dx_0 \wedge dF_1 - dx_0 \wedge dF_2 + \frac{1}{2}dF_2 \wedge dF_1$$

também admitem ε como fator. Para isso, observe que

$$\frac{1}{2}F_1dx_0 \wedge dF_1 - dx_0 \wedge dF_2 + \frac{1}{2}dF_2 \wedge dF_1 = d\left(F_2 - \frac{1}{4}F_1^2 \right) \wedge dx_0 + \frac{1}{2}d\left(F_2 - \frac{1}{4}F_1^2 \right) \wedge dF_1.$$

Pelo que acabamos de mostrar, fica evidente que novamente ε é fator dos transformados totais dos coeficientes dessa 1-forma. Para terminarmos a afirmação, observe que obtivemos a seguinte igualdade

$$dF \wedge dG \;=\; \tfrac{3}{2}\left(F_2 - \tfrac{1}{4}F_1^2\right) d\left(F_2 - \tfrac{1}{4}F_1^2\right) \wedge \left(dx_0 + \tfrac{1}{2}dF_1\right) \mod J_1.$$

Basta concluir que o transformado total do ideal gerado pelos coeficientes dos fatores

$$F_2 - \frac{1}{4}F_1^2, \quad d\left(F_2 - \frac{1}{4}F_1^2\right) \quad \text{e} \quad dx_0 + \frac{1}{2}dF_1$$

é igual ao ideal $\langle \varepsilon^2 \rangle$. Temos que

$$\begin{aligned}
F_2 - \tfrac{1}{4}F_1^2 &= \sum_{i_1=1}^{n} \underbrace{\left(a_{i_1i_1} - \frac{1}{4}a_{0i_1}^2\right)}_{\varepsilon d_{i_1i_1}} x_{i_1}^2 + \sum_{i_2>i_1=1}^{n} \underbrace{\left(a_{i_1i_2} - \frac{1}{2}a_{0i_1}a_{0i_2}\right)}_{\varepsilon d_{i_1i_2}} x_{i_1}x_{i_2};\\
d\left(F_2 - \tfrac{1}{4}F_1^2\right) &= \sum_{i_1=1}^{n} \left(a_{i_1i_1} - \tfrac{1}{4}a_{0i_1}^2\right) 2x_{i_1}dx_{i_1} + \sum_{i_2>i_1=1}^{n} \left(a_{i_1i_2} - \tfrac{1}{2}a_{0i_1}a_{0i_2}\right)\left(x_{i_1}dx_{i_2} + x_{i_2}dx_{i_1}\right)\\
&= \sum_{i_2>i_1=1}^{n} \left[2\underbrace{\left(a_{i_1i_1} - \frac{1}{4}a_{0i_1}^2\right)}_{\varepsilon d_{i_1i_1}} x_{i_1} + \underbrace{\left(a_{i_1i_2} - \frac{1}{2}a_{0i_1}a_{0i_2}\right)}_{\varepsilon d_{i_1i_2}} x_{i_2}\right] dx_{i_1};\\
dx_0 + \tfrac{1}{2}dF_1 &= dx_0 + \tfrac{1}{2}\sum_{i_1=1}^{n} a_{0i_1}dx_{i_1}.
\end{aligned}$$

Para qualquer escolha da equação local para o divisor excepcional, ε, temos que

- O ideal gerado pelos transformados totais dos coeficientes de $F_2 - \frac{1}{4}F_1^2$ é $\langle \varepsilon \rangle$.
- O ideal gerado pelos transformados totais dos coeficientes de $d\left(F_2 - \frac{1}{4}F_1^2\right)$ é $\langle \varepsilon \rangle$.
- O ideal gerado pelos transformados totais dos coeficientes de $dx_0 + \frac{1}{2}dF_1$ é $\langle 1 \rangle$.

Portanto, o ideal gerado pelos transformados totais dos coeficientes da 2-forma (1.25) é igual a $\langle \varepsilon^2 \rangle$. Isso prova a nossa segunda afirmação. Essas duas afirmações encerram a demonstração da proposição. $\square$

Isso prova o que afirmamos no início desta seção em (1.8): uma única explosão da variedade $X' = \widetilde{\mathbb{P}(S_2)} \times \mathbb{P}(S_3)$, ao longo do esquema de indeterminação B', induz um morfismo $\rho_{23}'' : X'' \to \mathbb{P}\left(S_3 \otimes \bigwedge^2 S_1\right)$, onde o divisor excepcional E'' é um fibrado projetivo sobre a base B'.

Seja E_V' a restrição do primeiro divisor excepcional à variedade V (mergulhada em $V \times \mathbb{P}(S_3)$ como gráfico da Veronese de cúbicas, cf. (1.8)). Então, temos que

$$E_V' = \mathbb{P}\left(N_{V|\mathbb{P}(S_2)}\right). \tag{1.26}$$

Isto é, E_V' é o divisor excepcional da explosão da variedade $\mathbb{P}(S_2)$ ao longo da Veronese V.

O lema seguinte mostra que E_V' se identifica com a variedade, cuja fibra sobre uma forma linear $L \in V$, é a projetivização do espaço das formas quadráticas módulo L, $\mathrm{Sym}_2(S_1/\langle L \rangle)$. Assim, se $L = x_0$, então um elemento na fibra de E_V' sobre L é uma forma quadrática do tipo $F' = \sum_{j \geq i=1}^{n} d_{ij}x_ix_j$.

Lema 1.2.7. *$E'_V = \mathbb{P}\left(S_2\mathcal{Q} \otimes \mathcal{O}_V(2)\right)$, onde $\mathcal{Q}$ é o quociente na sequência tautológica*

$$\mathcal{O}_V(-1) \rightarrowtail S_1 \twoheadrightarrow \mathcal{Q}$$

Demonstração. [11, prop. 4.4, pag. 208]. □

Seja

$$B'_r : \text{a redução do esquema } B'. \tag{1.27}$$

Pela proposição 1.2.4, o ideal de B'_r é igual a $J'_r = J'_1 + \langle \varepsilon \rangle$. Segue dos últimos dois resultados o seguinte

Corolário 1.2.8. *Vale a igualdade $B'_r = E'_V$.*

Demonstração. Vamos começar mostrando que as fibras sobre x_0 de ambos os esquemas coincidem. Para isso, vamos explicitar o transformado total de J_1 (lema 1.2.3) na mesma vizinhança estudada anteriormente. Lembre que o ideal que define B'_r é $J'_1 + \langle\varepsilon\rangle$ (cf. (1.27)), enquanto o ideal de B' é $J'_1 + \langle\varepsilon^2\rangle$. Os geradores do ideal J'_1 são exatamente os transformados totais dos geradores do ideal J_1, cujas relações são dadas pelas equações (1.20), (1.21) e (1.22), mais a equação do divisor excepcional ε. Vamos supor que a vizinhança da fibra seja dada pela escolha $\varepsilon = a_{11} - \frac{1}{4}a_{01}^2$, ou seja, $\{d_{11} = 1\}$. Neste caso, temos

$$a_{jj} = \varepsilon d_{jj} + \frac{1}{4}a_{0j}^2 \quad \text{para } j \neq 1 \quad \text{e} \quad a_{ij} = \varepsilon d_{ij} + \frac{1}{2}a_{0i}a_{0j} \quad \text{para } j > i = 1, \cdots, n.$$

Substituindo essas relações nas equações (1.20), (1.21) e (1.22), temos

$$\begin{aligned}
G_1 &= \tfrac{3}{2}F_1 \\
G_2 &= \tfrac{3}{8}F_1^2 + \tfrac{3}{2}\underbrace{\left[\left(\varepsilon + \frac{1}{4}a_{01}^2\right)x_1^2 + \sum_{j=2}^{n}\left(\varepsilon d_{jj} + \frac{1}{4}a_{0j}^2\right)x_j^2 + \sum_{j>i=1}^{n}\left(\varepsilon d_{ij} + \frac{1}{2}a_{0i}a_{0j}\right)x_ix_j\right]}_{F_2} \\
&= \tfrac{3}{8}F_1^2 + \tfrac{3}{2}\left[\tfrac{1}{4}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{0j}^2x_j^2 + 2\sum_{j>i=1}^{n} a_{0i}a_{0j}x_ix_j\right) + \varepsilon\underbrace{\left(x_1^2 + \sum_{j=2}^{n} d_{jj}x_j^2 + \sum_{j>i=1}^{n} d_{ij}x_ix_j\right)}_{F'}\right] \\
&= \tfrac{3}{8}F_1^2 + \tfrac{3}{2}\left[\tfrac{1}{4}F_1^2 + \varepsilon F'\right] \\
&= \tfrac{3}{4}F_1^2 + \tfrac{3}{2}\varepsilon F' \\
G_3 &= -\tfrac{1}{16}F_1^3 + \tfrac{3}{4}F_1\left[\tfrac{1}{4}F_1^2 + \varepsilon F'\right] \\
&= -\tfrac{1}{16}F_1^3 + \tfrac{3}{16}F_1^3 + \tfrac{3}{4}\varepsilon F' \\
&= \tfrac{1}{8}F_1^3 + \tfrac{3}{4}\varepsilon F'
\end{aligned}$$

onde $F' = x_1^2 + \sum_{\substack{j \geq i = 1 \\ (i,j) \neq (1,1)}}^{n} d_{ij}x_ix_j$ é um polinômio quadrático na vizinhança em tela do fibrado $\mathbb{P}(N_{V|\mathbb{P}(S_2)})$ (cf. (1.26) e lema 1.2.7). Então, o ideal J'_1 está definido pelas três novas relações acima e pela equação ε do divisor excepcional E'. Mas, essas relações são equivalentes a

$$G_1 = \frac{3}{2}F_1, \quad G_2 = \frac{3}{4}F_1^2 \quad \text{e} \quad G_3 = \frac{1}{8}F_1^3. \tag{1.28}$$

Isto é, as equações que definem J_1' não dependem das variáveis da fibra d_{ij}. Substituindo-as em $G = x_0^3 + x_0^2 G_1 + x_0 G_2 + G_3$ e restringindo à origem, obtemos

$$G = x_0^3$$

que representa a imagem da reta $L = x_0 \in V$ pelo mergulho

$$\begin{array}{ccc} V & \hookrightarrow & \mathbb{P}(S_3) \\ L & \mapsto & L^3. \end{array}$$

Portanto, temos a igualdade em cada vizinhança $\{d_{11} = 1\}$ da fibra. Neste caso, temos explicitamente a vizinhança sendo representada pelo polinômio

$$F' = x_1^2 + \sum_{\substack{j \geq i = 1 \\ (i,j) \neq (1,1)}}^{n} d_{ij} x_i x_j.$$

A escolha das outras vizinhanças é desnecessária. Isso porque a vizinhança escolhida acima contém um representante da única órbita fechada de E', a saber, pares do tipo (L'^2, L^3) onde L' é uma forma linear módulo L. Agora, usamos o resultado geral de que a ação do grupo linear $\mathbb{G} = GL_{\mathbb{C}}(n+1)$ sobre X induzida na explosão X' deixa invariante tanto B_r', quanto $\mathbb{P}\left(N_{V|\mathbb{P}(S_2)}\right)$. Portanto, ambas as variedades contêm a órbita fechada. Sendo assim, a igualdade das fibras numa vizinhança de um ponto dessa órbita, implica na igualdade em qualquer outra hipótese.

Com isso, denotando por $(B_r')_0$ e por E_0' as fibras de B_r' e E_V' sobre x_0, as contas mostraram que ambas as fibras coincidem localmente. Para obtermos a igualdade dos fechos, basta mostrarmos que B_r' é irredutível. Então, suponha por absurdo que $(B_r')_0$ seja redutível. Sendo assim, como $\mathbb{G}$ é conexo, as hipotéticas componentes irredutíveis também são invariantes pela ação ([12, prop. 8.2(d), pág. 59]). Sendo assim, cada componente contém a única órbita fechada. Isso implica que na vizinhança explicitada acima, o ideal do esquema B_r' definido pelas três relações (1.28) não é primo, uma contradição. Portanto, temos a igualdade $(B_r')_0 = E_0'$.

Para finalizarmos, usamos o fato de que a ação de $\mathbb{G}$ na fibra E_0' reproduz todas as outras fibras porque a ação é transitiva na base V, ou seja, $\mathbb{G} \cdot E_0' = E_V'$. Isso implica que $E_V' = \mathbb{G} \cdot E_0' = \mathbb{G} \cdot (B_r')_0 \subseteq B_r'$. Em seguida, como as fibras de B_r' sobre V são todas irredutíveis e de mesma dimensão, então B_r' é uma variedade irredutível. Portanto, a inclusão $E_V' \subseteq B_r'$ é uma igualdade. Isso encerra nossa demonstração. $\square$

Com esse resultado, justificamos o esboço da resolução do mapa $\rho_{2,3}$ apresentado em nosso diagrama (1.8) no início desta seção.

1.2.2 O cálculo do grau da componente $\mathcal{R}(2,3)$

Nesta seção vamos descrever todos os passos para calcular o grau da componente $\mathcal{R}(2,3)$ conforme as informações acima. No final, obteremos nosso principal resultado que é o teorema 1.2.12. Nesse sentido, vamos começar com a seguinte proposição

Proposição 1.2.9. *O grau da componente $\mathcal{R}(2,3)$ é dado pela integral*

$$\int_{X''} (h_1 + h_2 - [E''])^{\dim(X)}$$

onde $h_1 = c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}(1)\right)$, $h_2 = c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_3)}(1)\right)$ e $[E''] = c_1\mathcal{O}_{X''}(E'')$.

Demonstração. Denotando por h a classe hiperplana de $\mathbb{P}\left(S_3 \otimes \overset{2}{\wedge} S_1\right)$, temos que

$$\left(\rho''_{2,3}\right)^* h = m_1 h_1 + m_2 h_2 + m_3[E'] + m_4[E'']$$

onde m_1, m_2, m_3 e m_4 são números inteiros e $[E'] = c_1(\mathcal{O}_{X''}(E'))$. Esses coeficientes são determinados usando ([5, remark 5.1, pág. 17]) e ([6, prop. 1.8, pág. 21]). No aberto $U = X - (V \times \mathbb{P}(S_3))$ apenas as classes h_1 e h_2 sobrevivem. Então, $\left(\rho''_{2,3}\right)^*_U h = (\rho_{2,3})^*_U h = m_1h_1 + m_2h_2$. Mas, como o mapa $\rho_{2,3}$ é bihomogêneo de bigrau (1,1), devemos ter $m_1 = m_2 = 1$. Agora, as equações locais que definem B' (prop. 1.2.4) mostram que a imagem do mapa

$$\left(S_3 \otimes \overset{2}{\wedge} S_1\right)^{\vee} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}(-1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_3)}(-1) \to \mathcal{O}_{X'}$$

é igual a $\mathcal{I}(B')$, o ideal da indeterminação B'. Isto é,

$$\left(S_3 \otimes \overset{2}{\wedge} S_1\right)^{\vee} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}(-1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_3)}(-1) \twoheadrightarrow \mathcal{I}(B')$$

Então, $m_3 = 0$. Agora, explodindo o esquema B', obtemos

$$\left(S_3 \otimes \overset{2}{\wedge} S_1\right)^{\vee} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}(-1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_3)}(-1) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{X''}(-E'')$$

Portanto, $m_4 = -1$. Com isso, obtemos

$$\left(\rho''_{2,3}\right)^* h = h_1 + h_2 - [E''].$$

$\square$

Embora essa proposição nos diga como calcular o grau da componente, o cálculo efetivo é feito passando para os ciclos do esquema B'_r, onde os ciclos de B' estão suportados. Mas, isso trataremos mais adiante. No momento, notamos que essa integral pode ser separada em duas somas

$$\int_{X''} (h_1 + h_2)^{\dim(X)} + \int_{X''} \sum_{k=1}^{\dim(X)} \binom{\dim(X)}{k} (-[E''])^k (h_1 + h_2)^{\dim(X)-k}, \tag{1.29}$$

onde a primeira integral acima é sobre os ciclos que estão fora de E'' e a segunda é a integral sobre os ciclos que estão em E'', ou seja, sobre V (cf. 1.8). Vamos simplificar as notações escrevendo $N_i = \dim \mathbb{P}(S_i)$ para $i = 1, 2, 3$ e $\dim(X) = N$. Com isso, temos que

$$N_1 = n, N_2 = \binom{n+2}{n} - 1, N_3 = \binom{n+3}{n} - 1 \text{ e } N = N_2 + N_3. \tag{1.30}$$

Para a primeira integral temos o valor

$$\int_{X''} (h_1 + h_2)^N = \int_{X''} \binom{N}{N_2} h_1^{N_1} h_2^{N_2} = \binom{N}{N_2}. \tag{1.31}$$

Para calcular a segunda integral em (1.29), precisamos entender a soma

$$\sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \left(- [E'']\right)^k (h_1 + h_2)^{N-k}. \tag{1.32}$$

Para isso, vamos usar a fórmula de projeção ([6, th. 3.2(c), pág. 50]) para a inclusão $E'' \overset{j}{\hookrightarrow} X''$ para obter

$$\begin{aligned}
[E'']^k &= c_1\mathcal{O}_{X''}(E'')^{k-1} \cap j_\star[E''] \\
&= j_\star \left(c_1\mathcal{O}_{X''}(E'')_{E''}^{k-1} \cap [E'']\right) \\
&= j_\star \left(c_1 \left(\mathcal{O}_{X''}(-E'')_{E''}^\star\right)^{k-1} \cap [E'']\right) \\
&= j_\star \left(c_1 \left(\mathcal{O}_{E''}(1)^\vee\right)^{k-1} \cap [E'']\right) \\
&= (-1)^{k-1} j_\star \left(c_1\mathcal{O}_{E''}(1)^{k-1} \cap [E'']\right)
\end{aligned}$$

e a definição ([6, def. 1.4, pág. 13]) para obter na integral (1.32)

$$\begin{aligned}
&\int_{X''} \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \left(- [E'']\right)^k (h_1 + h_2)^{N-k} = \\
&\quad = \int_{X''} \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} j_\star \left[(-1)^k \left((-1)^{k-1} c_1 \left(\mathcal{O}_{E''}(1)\right)^{k-1}\right) (h_1 + h_2)^{N-k}\right] \\
&\quad\quad = \int_{E''} \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} (-1)^{2k-1} c_1 \left(\mathcal{O}_{E''}(1)\right)^{k-1} (h_1 + h_2)^{N-k}.
\end{aligned}$$

Além disso, como a restrição $\pi''_{E''} : E'' \to B'$ é um $\mathbb{P}^{N_3}$-fibrado sobre a base B', então da definição de classe de Segre ([6, sec. 3.1, pág. 47]), temos

$$\int_{E''} \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} (-1)^{2k-1} c_1 \left(\mathcal{O}_{E''}(1)\right)^{k-1} (h_1+h_2)^{N-k} =$$

$$= \int_{B'} \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} (-1) s_{(k-1)-N_3} \left(N_{B'|X'}\right) (h_1+h_2)^{N-k}$$

$$= \int_{B'} - \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} s_{(k-1)-N_3} \left(N_{B'|X'}\right) (h_1+h_2)^{N-k}.$$

Note que na soma da última linha acima, podemos tomar $k > N_3$ porque classes de Segre de índices negativos são nulas ([6, prop. 3.1(a), pág. 48]). Então,

$$\int_{B'} - \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} s_{(k-1)-d} \left(N_{B'|X'}\right) (h_1+h_2)^{N-k} =$$

$$= \int_{B'} - \sum_{k=N_3+1}^{N} \binom{N}{k} s_{(k-1)-N_3} \left(N_{B'|X'}\right) (h_1+h_2)^{N-k}$$

$$= \int_{B'} - \sum_{k=0}^{N_2-1} \binom{N}{N_3+k+1} s_k \left(N_{B'|X'}\right) (h_1+h_2)^{N_2-(k+1)}.$$

Agora, na integral acima as classes h_1 e h_2 estão ambas restritas a V. Então, $h_1 = c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}(1)\right)_{B'_r} = 2h$, $h_2 = c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_3)}(1)\right)_{B'_r} = 3h$, onde $h = c_1\left(\mathcal{O}_V(1)\right)$. Pela proposição 1.2.4 e definição (1.27), temos $[B'] = 2[B'_r]$ porque J' é o ideal do esquema B' e B'_r é a sua redução. Além disso, como são iguais os grupos de Chow de um esquema e o de sua redução, precisamos apenas saber calcular $s_k\left(N_{B'|X'}\right)_{|B'_r}$ para $k \leq \dim(B') = N_2 - 1$. Com isso, temos

$$\int_{B'} - \sum_{k=0}^{N_2-1} \binom{N}{N_3+k+1} s_k \left(N_{B'|X'}\right) (h_1+h_2)^{N_2-(k+1)} \cap [B'] =$$

$$= - \int_{B'_r} \sum_{k=0}^{N_2-1} \binom{N}{N_3+k+1} s_k \left(N_{B'|X'}\right)_{|B'_r} (2h+3h)^{N_2-(k+1)} \cap 2[B'_r]$$

$$= -2 \int_{B'_r} \sum_{k=0}^{N_2-1} \binom{N}{N_3+k+1} s_k \left(N_{B'|X'}\right)_{|B'_r} (2h+3h)^{N_2-(k+1)} \cap [B'_r],$$

onde as omissões de $\cap[E'']$ e $\cap[B']$ nas integrais anteriores, tornaram-se explícitas agora para uma maior clareza no surgimento da multiplicação da integral pelo número 2. Além disso, como $h^l = 0$ para $l > \dim V = N_1$, a soma que realmente contribui na integral acima é

$$\sum_{k=N2-N_1-1}^{N_2-1} \binom{N}{N_3+k+1} s_k \left(N_{B'|X'}\right)_{|B'_r} (5h)^{N_2-(k+1)}.$$

Portanto, temos que

$$\int_{X''} \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \left(-\left[E''\right]\right)^k (h_1 + h_2)^{N-k} =$$

$$-2 \int_{B'_r} \sum_{k=N2-N_1-1}^{N_2-1} \binom{N}{N_3 + k + 1} s_k \left(N_{B'|X'}\right)_{|B'_r} (5h)^{N_2-(k+1)} . \quad (1.33)$$

Resta apenas dizer como calcular $s_k \left(N_{B'|X'}\right)_{|B'_r}$. Isso é feito a partir da seguinte proposição, utilizada também para tratar o caso geral $\mathcal{R}(2, 2r+1)$.

Proposição 1.2.10. *Sejam Z, D subvariedades fechadas não singulares de uma variedade não singular Y. Suponha $Z \subset D \subset Y$ e que D seja um divisor de Y. Suponha que, localmente, o ideal de Z seja gerado pela sequência regular $z_0, z_1, \cdots, z_r$ onde z_0 é a equação que define o divisor D. Se $Z_t := V\left(z_0^t, z_1, \cdots, z_r\right) \subset tD$ é um "engordamento" de Z, então temos a relação entre os módulos conormais,*

$$\left(\check{N}_{Z_t|tD}\right)_{|Z} = \check{N}_{Z|D}.$$

Demonstração. Denotaremos por A o anel de coordenadas de uma vizinhança afim da variedade Y. Seja z'_i a imagem de z_i no anel de coordenadas $A'_t := A/\left\langle z_0^t\right\rangle$ do divisor tD, e seja

$$I'_t = \langle z'_1, \cdots, z'_r\rangle \subset A'_t.$$

Seja $\overline{I}_1$ a imagem de I'_t no anel de coordenadas $A'_1 = A'_t/\left\langle z'_0\right\rangle$ do divisor D. Os quocientes

$$\overline{A}_t = \frac{A'_t}{I'_t}, \quad \overline{A}_1 = \frac{A'_1}{I'_1}$$

são os anéis de coordenadas dos esquemas Z_t e da sua redução Z, respectivamente.

Tudo o que precisamos mostrar é que existe um isomorfismo natural

$$\frac{I'_t}{(I'_t)^2} \otimes_{\overline{A}_t} \overline{A}_1 = \overline{I}_1/\overline{I}_1^2,$$

onde o membro esquerdo representa a restrição do conormal, $\left(\check{N}_{Z_t|tD}\right)_{|Z}$. Pelas descrições das equações locais, ambos os $\overline{A}_1$-módulos são localmente livres de posto r em virtude da regularidade da sequência dos geradores (cf. [9, cor. 5.11, pág. 153]).

A sobrejeção de A_t-módulos $I'_t \twoheadrightarrow \overline{I}_1$ induz $I'_t/(I'_t)^2 \twoheadrightarrow \overline{I}_1/(\overline{I}_1)^2$ e daí segue a sobrejeção

$$\tfrac{I'_t}{(I'_t)^2} \otimes_{\overline{A}_t} \overline{A}_1 \twoheadrightarrow \overline{I}_1/(\overline{I}_1)^2.$$

Tendo em vista que são $\overline{A}_1$-módulos localmente livres de mesmo posto, temos o isomorfismo desejado. □

Por definição e pela proposição imediatamente acima temos que

$$\mathcal{N} := \left(N_{2E'|X'}\right)_{|B'_r} = \mathcal{O}_{E'}(-2)_{|B'_r} = \mathcal{O}_{B'_r}(-2)$$

e

$$\left(N_{B'|2E'}\right)_{|B'_r} = N_{B'_r|E'}.$$

Como

$$B'_r = \mathbb{P}\left(N_{V|\mathbb{P}(S_2)}\right) \quad \text{e} \quad E' = \mathbb{P}\left(N_{V|\mathbb{P}(S_2)}\right) \times \mathbb{P}(S_3),$$

a sequência exata

$$TB'_r \rightarrowtail TE'_{|B'_r} \twoheadrightarrow N_{B'_r|E'}$$

nos permite concluir que $N_{B'_r|E'} = T\mathbb{P}(S_3)$ (ao menos para fins de cálculos de classes de Chern). Além disso, temos a seguinte

Afirmação 1.2.11. A sequência de fibrados

$$N_{B'_r|E'} \rightarrowtail \left(N_{B'|X'}\right)_{|B'_r} \twoheadrightarrow \mathcal{N} = \mathcal{O}_{B'_r}(-2) \tag{1.34}$$

é exata.

Demonstração. De fato, sejam A o anel de coordenadas locais de X', I o ideal do divisor $2E'$ e J' o ideal do esquema B' em X'. Sendo assim, $\overline{A} = A/J'$ é o anel de coordenadas locais de B'. Se denotarmos $\overline{J'} = J' \cdot (A/I)$, ou seja, $\overline{J'}$ como sendo o ideal do esquema B' em $2E'$, então $A' = A/I$ é o anel de coordenadas locais de $2E'$.

Com isso, J'/J'^2 e $\overline{J'}/\overline{J'}^2$ possuem estruturas de $\overline{A}$-módulo. Além disso, ambos são localmente livres (cf. prop. 1.2.4). Com isso, o mapa quociente $J'/J'^2 \twoheadrightarrow \overline{J'}/\overline{J'}^2$ dá lugar à seguinte sequência de $\overline{A}$-módulos localmente livres

$$\mathcal{K} \rightarrowtail J'/J'^2 \twoheadrightarrow \overline{J'}/\overline{J'}^2 \tag{1.35}$$

onde o núcleo $\mathcal{K}$ tem posto um.

Por outro lado, a sequência (1.35) também é exata como A-módulos. Portanto, temos um mapa sobrejetivo à esquerda na sequência de A-módulos seguinte

$$I/I^2 \twoheadrightarrow \mathcal{K} \rightarrowtail J'/J'^2 \twoheadrightarrow \overline{J'}/\overline{J'}^2. \tag{1.36}$$

Sendo assim, temos também o mapa sobrejetivo de $\overline{A}$-módulos $\overline{A} \otimes_{A/I} I/I^2 \twoheadrightarrow \mathcal{K}$. Mas, ambos são localmente livres de posto um. Portanto, são isomorfos. Com isso, podemos reescrever a sequência exata (1.35) assim:

$$\overline{A} \otimes_{A/I} I/I^2 \rightarrowtail J'/J'^2 \twoheadrightarrow \overline{J'}/\overline{J'}^2, \tag{1.37}$$

onde todos os $\overline{A}$-módulos são localmente livres. Isso mostra que temos uma sequência exata de fibrados conormais

$$\left(\check{N}_{2E'|X'}\right)_{|B'} \rightarrowtail \check{N}_{B'|X'} \twoheadrightarrow \check{N}_{B'|X'}.$$

Tomando a restrição dessa sequência à B'_r (1.27), temos a sequência exata de fibrados

$$\left(\check{N}_{2E'|X'}\right)_{|B'_r} \rightarrowtail \left(\check{N}_{B'|X'}\right)_{|B'_r} \twoheadrightarrow \check{N}_{B'_r|X'}.$$

A sequência (1.34) do enunciado é dual desta última sequência. Isso encerra nossa afirmação. $\square$

Com isso, deduzimos da sequência (1.34) que

$$\begin{aligned}
s\left(N_{B'|X'}\right)_{|B'_r} &= s\left(T\mathbb{P}(S_3)\right) s\left(\mathcal{O}_{B'_r}(-2)\right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{N_3} s_k\left(T\mathbb{P}(S_3)\right)\right)\left(\sum_{k=0}^{N_2-1} s_k\left(\mathcal{O}_{B'_r}(-2)\right)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\sum_{i=0}^{k} s_i\left(\mathcal{O}_{B'_r}(-2)\right) s_{k-i}\left(T\mathbb{P}(S_3)\right)}_{s_k\left(N_{B'|X'}\right)_{|B'_r}}
\end{aligned}$$

porque $s_k\left(T\mathbb{P}(S_3)\right) = 0$ para $k > N_3$ e $s_k\left(\mathcal{O}_{B'_r}(-2)\right) = 0$ para $k > \dim B'_r = N_2 - 1$, ([6, prop. 3.1, pág. 48]). Portanto, podemos escrever a equação

$$s_k\left(N_{B'|X'}\right)_{|B'_r} = \sum_{i=0}^{k} s_i\left(\mathcal{O}_{B'_r}(-2)\right) s_{k-i}\left(T\mathbb{P}(S_3)\right) \tag{1.38}$$

para $0 \leq k \leq N-1$.

A seguir, vamos precisar da relação

$$s_i = -c_i - s_1 c_{i-1} - s_2 c_{i-2} - \cdots - s_{i-1}, \quad \text{para } i \geq 0 \quad ([6, \text{pág. } 50]).$$

Além disso, $c_1\left(\mathcal{O}_{B'_r}(-2)\right) = -2c_1\left(\mathcal{O}_{B'_r}(1)\right)$ e $c_i\left(\mathcal{O}_{B'_r}(-2)\right) = 0$ para $i > 1$. Então,

$$s_i\left(\mathcal{O}_{B'_r}(-2)\right) = (-1)^i c_1^i\left(\mathcal{O}_{B'_r}(-2)\right) = 2^i c_1^i\left(\mathcal{O}_{B'_r}(1)\right).$$

Substituindo no somatório (1.38), ficamos com

$$s_k\left(N_{B'|X'}\right)_{|B'_r} = \sum_{i=0}^{k} 2^i c_1^i\left(\mathcal{O}_{B'_r}(1)\right) s_{k-i}\left(T\mathbb{P}(S_3)\right) \tag{1.39}$$

para $0 \leq k \leq N-1$. Como B'_r é um $\mathbb{P}^{(N_2-N_1-1)}$-fibrado sobre V (1.8) , então

$$c_1^i\left(\mathcal{O}_{B'_r}(1)\right) = s_{i-(N_2-N_1-1)}\left(N_{V|\mathbb{P}(S_2)}\right).$$

Isso implica que

$$c_1^i = 0, \quad \text{para} \quad 0 \leq i < N_2 - N_1 - 1 \quad \text{e} \quad i > N_2 - 1.$$

Levando essas informações para (1.39), temos que

$$s_k\left(N_{B'|X'}\right)_{|B'_r} = \sum_{i=N_2-N_1-1}^{k} 2^i s_{i-(N_2-N_1-1)}\left(N_{V|\mathbb{P}(S_2)}\right) s_{k-i}\left(T\mathbb{P}(S_3)\right) \tag{1.40}$$

para $0 \leq k \leq N-1$.

A seguir, vamos explicitar $s_k\left(N_{V|\mathbb{P}(S_2)}\right)$ e $s_k\left(T\mathbb{P}(S_3)\right)$, para $0 \leq k \leq N_1$.

Torcendo a sequência exata

$$\mathcal{O}_V(-1)\otimes S_1 \rightarrowtail S_2 \twoheadrightarrow S_2\mathcal{Q}$$

por $\mathcal{O}_V(2)$, obtemos outra sequência exata

$$\mathcal{O}_V(1)\otimes S_1 \rightarrowtail S_2\otimes\mathcal{O}_V(2) \twoheadrightarrow S_2\mathcal{Q}\otimes\mathcal{O}_V(2).$$

Então, temos

$$s\left(N_{V|\mathbb{P}(S_2)}\right) = s\left(S_2\mathcal{Q}\otimes\mathcal{O}_V(2)\right) = s^{-1}\left(\mathcal{O}_V(1)\otimes S_1\right)s\left(S_2\otimes\mathcal{O}_V(2)\right) = \frac{c\left(\mathcal{O}_V(1)\otimes S_1\right)}{c\left(S_2\otimes\mathcal{O}_V(2)\right)}$$

por ([11, prop. 4.4, pág. 208]) e ([6, thm. 3.2(e), pág. 50]). Mas,

$$c\left(\mathcal{O}_V(1)\otimes S_1\right) = \sum_{i=0}^{N_1+1}\left[1+c_1\mathcal{O}_V(1)\right]^i c_{N_1+1-i}\left(S_1\right) = \left[1+c_1\mathcal{O}_V(1)\right]^{N_1+1} = (1+h)^{N_1+1};$$

$$c\left(S_2\otimes\mathcal{O}_V(2)\right) = \sum_{i=0}^{N_2+1}\left[1+c_1\mathcal{O}_V(2)\right]^i c_{N_2+1-i}\left(S_2\right) = \left[1+c_1\mathcal{O}_V(2)\right]^{N_2+1} = (1+2h)^{N_2+1}$$

por ([6, Remark 3.2.3]) e porque $c\left(S_2\right) = c\left(S_1\right) = 1$.

Então,

$$s\left(N_{V|\mathbb{P}(S_2)}\right) = \frac{c\left(\mathcal{O}_V(1)\otimes S_1\right)}{c\left(S_2\otimes\mathcal{O}_V(2)\right)} = \frac{(1+h)^{N_1+1}}{(1+2h)^{N_2+1}} = (1+h)^{N_1+1}(1+2h)^{-(N_2+1)} =$$
$$\left(\sum_{i=0}^{N_1}\binom{N_1+1}{i}h^i\right)\left(\sum_{j=0}^{N_1}\binom{-(N_2+1)}{j}2^jh^j\right) = \sum_{k=0}^{N_1}\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{N_1+1}{k-i}\binom{-(N_2+1)}{i}2^i\right)h^k.$$

Isso implica que

$$s_k\left(N_{V|\mathbb{P}(S_2)}\right) = \left(\sum_{i=0}^{k}\binom{N_1+1}{k-i}\binom{-(N_2+1)}{i}2^i\right)h^k \tag{1.41}$$

para $0\leq k\leq N_1$, onde $\binom{-(N_2+1)}{i} = (-1)^i\binom{N_2+i}{i}$.

Por outro lado, lembrando da sequência de Euler

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_3)} \rightarrowtail \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_3)}(1)^{\oplus N_3+1} \twoheadrightarrow T\mathbb{P}(S_3)$$

vem

$$c\left(T\mathbb{P}(S_3)\right) = \frac{c\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_3)}(1)^{\oplus N_3+1}\right)}{c\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_3)}\right)} = (1+h_2)^{N_3+1}.$$

Logo,

$$s\left(T\mathbb{P}(S_3)\right) = \frac{1}{c\left(T\mathbb{P}(S_3)\right)} = \frac{1}{(1+h_2)^{N_3+1}} = (1+h_2)^{-(N_3+1)} = \sum_{k=0}^{N_3+1}\binom{-(N_3+1)}{k}h_2^k.$$

Restringindo à base V, temos

$$s\left(T\mathbb{P}(S_3)_V\right) = \sum_{k=0}^{N_3+1} \binom{-(N_3+1)}{k} (3h)^k = \sum_{k=0}^{N_1} \binom{-(N_3+1)}{k} 3^k h^k.$$

Portanto,

$$s_k\left(T\mathbb{P}(S_3)\right) = \binom{-(N_3+1)}{k} 3^k h^k \tag{1.42}$$

para $0 \leq k \leq N_1$, onde $\binom{-(N_3+1)}{k} = (-1)^k \binom{N_3+k}{k}$.

Agora, substituindo as equações (1.41) e (1.42) na equação (1.40), obtemos

$$\begin{aligned} s_k\left(N_{B'|X'}\right)_{|B'_r} &= \sum_{i=\theta}^{k} 2^i \left(\sum_{l=0}^{i-\theta} \binom{N_1+1}{i-\theta-l} \binom{-(N_2+1)}{l} 2^l \right) h^{i-\theta} \binom{-(N_3+1)}{k-i} 3^{k-i} h^{k-i} \\ &= \sum_{i=\theta}^{k} 2^i 3^{k-i} \left(\sum_{t=0}^{i-\theta} \binom{N_1+1}{i-\theta-t} \binom{-(N_2+1)}{t} 2^t \right) \binom{-(N_3+1)}{k-i} h^{k-\theta} \end{aligned} \tag{1.43}$$

para $0 \leq k \leq N_2 - 1$ e $\theta = N_2 - N_1 - 1$.

Finalmente, substituindo essa equação (1.43) na integral (1.33), obtemos

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \left(-[E'']\right)^k (h_1+h_2)^{N-k} = \\ &-2 \sum_{k=\theta}^{N_2-1} \binom{N}{N_3+k+1} \left(\sum_{i=\theta}^{k} 2^i 3^{k-i} \left(\sum_{t=0}^{i-\theta} \binom{N_1+1}{i-\theta-t} \binom{-(N_2+1)}{t} 2^t \right) \binom{-(N_3+1)}{k-i} h^{k-\theta} \right) \\ &\qquad (5h)^{N_2-(k+1)} \cap [V]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \left(-[E'']\right)^k (h_1+h_2)^{N-k} = \\ &-2 \sum_{k=\theta}^{N_2-1} \binom{N}{N_3+k+1} \left(\sum_{i=\theta}^{k} 2^i 3^{k-i} \left(\sum_{t=0}^{i-\theta} \binom{N_1+1}{i-\theta-t} \binom{-(N_2+1)}{t} 2^t \right) \binom{-(N_3+1)}{k-i} \right) \\ &\qquad 5^{N_2-(k+1)} h^{k-\theta} h^{N_2-(k+1)} \cap [V] = \\ &-2 \sum_{k=\theta}^{N_2-1} \binom{N}{N_3+k+1} \left(\sum_{i=\theta}^{k} 2^i 3^{k-i} \left(\sum_{l=0}^{i-\theta} \binom{N_1+1}{i-\theta-l} \binom{-(N_2+1)}{l} 2^l \right) \binom{-(N_3+1)}{k-i} \right) \\ &\qquad 5^{N_2-(k+1)} h^{\dim V} \cap [V]. \end{aligned}$$

Portanto, esta equação, juntamente com as equações (1.29) e (1.31), determina a seguinte fórmula para o grau da componente $\mathcal{R}(2,3)$ em dimensão arbitrária $n \geq 2$:

$$\int_{X''} (h_1 + h_2 - [E''])^N = \binom{N}{N_2} - 2\sum_{k=\theta}^{N_2-1} M_k \left(\sum_{i=\theta}^{k} 2^i 3^{k-i} \left(\sum_{t=0}^{i-\theta} M_{it\theta} 2^t\right) M_{ik}\right) 5^{N_2-(k+1)}$$

onde

$$M_k = \binom{N}{N_3 + k + 1}, \tag{1.44}$$
$$M_{it\theta} = \binom{n+1}{i-\theta-t}\binom{-(N_2+1)}{t} = \binom{n+1}{i-\theta-t}(-1)^t\binom{N_2+t}{t},$$
$$M_{ik} = \binom{-(N_3+1)}{k-i} = (-1)^{k-i}\binom{N_3+k-i}{k-i},$$
$$\theta = N_2 - n - 1 \text{ e } N_2, N_3, N \text{ conforme (1.31).}$$

Com isso, temos demonstrado o seguinte teorema.

Teorema 1.2.12. *O grau da componente $\mathcal{R}(2,3)$ em dimensão $n \geq 2$ é igual a*

$$\binom{N}{N_2} - 2\sum_{k=\theta}^{N_2-1} M_k \left(\sum_{i=\theta}^{k} 2^i 3^{k-i} \left(\sum_{t=0}^{i-\theta} M_{it\theta} 2^t\right) M_{ik}\right) 5^{N_2-(k+1)}$$

onde $N_2, N_3, N, M_k, M_{it\theta}, M_{ik}$ e θ são dados conforme (1.31) *e* (1.44).

□

Denotando a sequência numérica acima por $(a_n)_{n\geq 2}$, então o n-ésimo termo dessa sequência é o grau da componente $\mathcal{R}(2,3)$ em dimensão n. Os primeiros termos estão apresentados na tabela abaixo e foram obtidos usando o Sistema de Computação Algébrica Maple. Um procedimento para explicitar o cálculo pode ser encontrado no apêndice (A).

n	Grau da componente $\mathcal{R}(2,3)$
2	770
3	6254612
4	481152797320
5	803161672838504856

1.3 O grau da componente $\mathcal{R}(2,5)$ em dimensão arbitrária

1.3.1 A resolução do mapa $\rho_{2,5}$

O propósito aqui é obter resultados análogos aos da seção anterior para a componente $\mathcal{R}(2,5)$, servindo de uma ponte para as generalizações do capítulo seguinte. Para isso, assim como antes, explodiremos a variedade $X = \mathbb{P}(S_2) \times \mathbb{P}(S_5)$ ao longo da subvariedade

$V\times\mathbb{P}(S_5)$, onde o mergulho no primeiro fator é o mergulho Veronese $V \ni L \mapsto L^2 \in \mathbb{P}(S_2)$. Pela observação 1.2.1, podemos tomar

$$\begin{cases} F = & x_0^2 + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{0j}x_0x_j + \sum\limits_{j\geq i=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \\ G = & x_0^5 + \sum\limits_{j_1>0}^{n} b_{0000j_1}x_0^4x_{j_1} + \sum\limits_{j_2>j_1\geq 0}^{n} b_{000j_1j_2}x_0^3x_{j_1}x_{j_2} + \\ & + \cdots + \sum\limits_{j_5\geq j_4\geq j_3\geq j_2\geq j_1>0}^{n} b_{j_1j_2j_3j_4j_5}x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}x_{j_4}x_{j_5} \end{cases}$$

polinômios homogêneos nas vizinhanças $a_{00} = b_{00000} = 1$ da variedade X.

Observação 1.3.1. Sejam B o esquema de indeterminação do mapa

$$\rho_{2,5} : (F, G) \mapsto dF \wedge dG$$

e J o ideal correspondente na vizinhança escolhida. Pela observação 1.2.1, podemos realizar nossas contas no aberto $a_{00} = b_{00000} = 1$ da variedade X. Como na seção anterior, vamos denotar por J_1 o ideal gerado por todos os coeficientes dos monômios do tipo $x_0x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}x_{j_4}$ do polinômio A_{0m} (cf. eq. 1.13 e obs. 1.2.2). A observação 1.2.2 permite concluir que o ideal $J_1 \subset J$ possui, pelo menos, $\dim\mathbb{P}(S_5)$ geradores locais com termos de grau um linearmente independentes, do tipo $b_{j_1j_2j_3j_4j_5} + \cdots$, onde os índices satisfazem $j_5 \geq j_4 \geq j_3 \geq j_2 \geq j_1 \geq 0$ e são não nulos simultaneamente.

O lema adiante mostra que o ideal J_1 é gerado exatamente por $\dim\mathbb{P}(S_5)$ equações locais, uma para cada coeficiente do polinômio $G = x_0^5 + b_{00001}x_0^4x_1 + b_{00002}x_0^4x_2 + \cdots$ escrito logo acima.

Lema 1.3.2. *O ideal J_1 determina a subvariedade $V(J_1) \subset X$ dos pares (F, G) tais que*

$$\begin{aligned} G_1 &= \tfrac{5}{2}F_1 \\ G_2 &= \tfrac{15}{8}F_1^2 + \tfrac{5}{2}F_2 \\ G_3 &= \tfrac{5}{16}F_1^3 + \tfrac{15}{4}F_1F_2 \\ G_4 &= -\tfrac{5}{128}F_1^4 + \tfrac{15}{16}F_1^2F_2 + \tfrac{15}{8}F_2^2 \\ G_5 &= \tfrac{3}{256}F_1^5 - \tfrac{5}{32}F_1^3F_2 + \tfrac{15}{16}F_1F_2^2, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{cases} F = x_0^2 + x_0F_1 + F_2, \\ G = x_0^5 + x_0^4G_1 + x_0^3G_2 + x_0^2G_3 + x_0G_4 + G_5 \end{cases}$$

em que os F_i (resp. G_j) são independentes da variável x_0 e homogêneos de grau i (resp. j) para $1 \leq i \leq 2$ e $1 \leq j \leq 5$. Portanto, os geradores do ideal J_1 formam uma sequência regular no anel de coordenadas locais de X.

Demonstração. Sejam $(F, G) \in X$ como estipulado acima. Então, o ideal J é gerado por todos os coeficientes dos polinômios homogêneos no desenvolvimento da 2-forma $dF \wedge dG$, enquanto que a ideal J_1 é gerado apenas pelos coeficientes dos monômios do tipo $x_0x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}x_{j_4}x_{j_5}dx_0 \wedge dx_j$ (cf. obs. 1.3.1):

$$\begin{aligned} dF \wedge dG = {} & x_0^5\left[2dx_0 \wedge dG_1 - 5dx_0 \wedge dF_1\right] + x_0^4\left[2dx_0 \wedge dG_2 + F_1 dx_0 \wedge dG_1\right. \\ & \left. -5dx_0 \wedge dF_2 - 4G_1 dx_0 \wedge dF_1\right] + x_0^3\left[2dx_0 \wedge dG_3 + F_1 dx_0 \wedge dG_2\right. \\ & \left. -4G_1 dx_0 \wedge dF_2 - 3G_2 dx_0 \wedge dF_1\right] + x_0^2\left[2dx_0 \wedge dG_4 + F_1 dx_0 \wedge dG_3\right. \\ & \left. -3G_2 dx_0 \wedge dF_2 - 2G_3 dx_0 \wedge dF_1\right] + x_0\left[2dx_0 \wedge dG_5 + F_1 dx_0 \wedge dG_4\right. \\ & \left. -2G_3 dx_0 \wedge dF_2 - G_4 dx_0 \wedge dF_1\right] + x_0^5 dF_1 \wedge dG_1 + x_0^4\left[dF_1 \wedge dG_2\right. \\ & \left. +dF_2 \wedge dG_1\right] + x_0^3\left[dF_1 \wedge dG_3 + dF_2 \wedge dG_2\right] + x_0^2\left[dF_1 \wedge dG_4\right. \\ & \left. +dF_2 \wedge dG_3\right] + x_0\left[dF_1 \wedge dG_5 + dF_2 \wedge dG_4\right] \\ & + F_1 dx_0 \wedge dG_5 - G_4 dx_0 \wedge dF_2 + dF_2 \wedge dG_5. \end{aligned} \tag{1.45}$$

De acordo com a observação 1.3.1, o ideal J_1 corresponde ao anulamento das cinco primeiras parcelas da 2-forma (1.45) conforme o agrupamento acima, a saber

$$2dx_0 \wedge dG_1 - 5dx_0 \wedge dF_1 = 0 \tag{1.46}$$
$$2dx_0 \wedge dG_2 + F_1 dx_0 \wedge dG_1 - 5dx_0 \wedge dF_2 - 4G_1 dx_0 \wedge dF_1 = 0 \tag{1.47}$$
$$2dx_0 \wedge dG_3 + F_1 dx_0 \wedge dG_2 - 4G_1 dx_0 \wedge dF_2 - 3G_2 dx_0 \wedge dF_1 = 0 \tag{1.48}$$
$$2dx_0 \wedge dG_4 + F_1 dx_0 \wedge dG_3 - 3G_2 dx_0 \wedge dF_2 - 2G_3 dx_0 \wedge dF_1 = 0 \tag{1.49}$$
$$2dx_0 \wedge dG_5 + F_1 dx_0 \wedge dG_4 - 2G_3 dx_0 \wedge dF_2 - G_4 dx_0 \wedge dF_1 = 0 \tag{1.50}$$

A equação (1.46) implica, pelo lema da divisão (cf. [5, lemma 2.2, pág. 6]), que existe um escalar λ tal que
$$d\left(2G_1 - 5F_1\right) = \lambda dx_0.$$
Mas, isso é possível somente quando $\lambda = 0$, porque F_1 e G_1 são polinômios que não dependem da variável x_0. Com isso, temos a igualdade $2G_1 - 5F_1 = 0$, ou seja,

$$G_1 = \frac{5}{2}F_1 \tag{1.51}$$

Substituindo esta equação (1.51) na equação (1.47) acima, obtemos

$$\begin{aligned} & 2dx_0 \wedge dG_2 + F_1 dx_0 \wedge d\left(\frac{5}{2}F_1\right) - 5dx_0 \wedge dF_2 - 4\left(\frac{5}{2}F_1\right)dx_0 \wedge dF_1 = 0; \\ & 2dx_0 \wedge dG_2 + \frac{5}{2}F_1 dx_0 \wedge dF_1 - 5dx_0 \wedge dF_2 - 10F_1 dx_0 \wedge dF_1 = 0; \\ & 2dx_0 \wedge dG_2 - \frac{15}{2}F_1 dx_0 \wedge dF_1 - 5dx_0 \wedge dF_2 = 0; \\ & dx_0 \wedge d\left(2G_2 - \frac{15}{4}F_1^2 - 5F_2\right) = 0. \end{aligned}$$

Outra vez pelo lema da divisão, a última igualdade implica em

$$2G_2 - \frac{15}{4}F_1^2 - 5F_2 = 0,$$

ou ainda,

$$G_2 = \frac{15}{8}F_1^2 + \frac{5}{2}F_2 \tag{1.52}$$

Em seguida, substituindo as equações (1.51) e (1.52) na equação (1.48), obtemos

$$\begin{aligned}2dx_0 \wedge dG_3 + F_1 dx_0 \wedge d\left(\frac{15}{8}F_1^2 + \frac{5}{2}F_2\right) - 4\left(\frac{5}{2}F_1\right) dx_0 \wedge dF_2 \\ - 3\left(\frac{15}{8}F_1^2 + \frac{5}{2}F_2\right) dx_0 \wedge dF_1 = 0\end{aligned}$$

que implica em

$$\begin{aligned}2dx_0 \wedge dG_3 + \frac{15}{4}F_1^2 dx_0 \wedge dF_1 + \frac{5}{2}F_1 dx_0 \wedge dF_2 - 10F_1 dx_0 \wedge dF_2 - \frac{45}{8}F_1^2 dx_0 \wedge dF_1 \\ - \frac{15}{2}F_2 dx_0 \wedge dF_1 = 0; \\ 2dx_0 \wedge dG_3 - \frac{15}{8}F_1^2 dx_0 \wedge dF_1 - \frac{15}{2}F_1 dx_0 \wedge dF_2 - \frac{15}{2}F_2 dx_0 \wedge dF_1 = 0; \\ dx_0 \wedge d\left(2G_3 - \frac{5}{8}F_1^3 - \frac{15}{2}F_1 F_2\right) = 0.\end{aligned}$$

Segue, mais uma vez, pelo lema da divisão que

$$G_3 = \frac{5}{16}F_1^3 + \frac{15}{4}F_1 F_2 \tag{1.53}$$

Agora, a substituição das equações (1.51), (1.52) e (1.53) na equação (1.49), implica em

$$\begin{aligned}2dx_0 \wedge dG_4 + F_1 dx_0 \wedge d\left(\frac{5}{16}F_1^3 + \frac{15}{4}F_1 F_2\right) - 3\left(\frac{15}{8}F_1^2 + \frac{5}{2}F_2\right) dx_0 \wedge dF_2 \\ - 2\left(\frac{5}{16}F_1^3 + \frac{15}{4}F_1 F_2\right) dx_0 \wedge dF_1 = 0; \\ 2dx_0 \wedge dG_4 + \frac{15}{16}F_1^3 dx_0 \wedge dF_1 + \frac{15}{4}F_1^2 dx_0 \wedge dF_2 + \frac{15}{4}F_1 F_2 dx_0 \wedge dF_1 - \frac{5}{8}F_1^3 dx_0 \wedge dF_1 \\ - \frac{15}{2}F_1 F_2 dx_0 \wedge dF_1 - \frac{45}{8}F_1^2 dx_0 \wedge dF_2 - \frac{15}{2}F_2 dx_0 \wedge dF_2 = 0; \\ 2dx_0 \wedge dG_4 + \frac{5}{16}F_1^3 dx_0 \wedge dF_1 - \frac{15}{8}F_1^2 dx_0 \wedge dF_2 - \frac{15}{4}F_1 F_2 dx_0 \wedge dF_1 - \frac{15}{2}F_2 dx_0 \wedge dF_2 = 0; \\ dx_0 \wedge d\left(2G_4 + \frac{5}{64}F_1^4 - \frac{15}{8}F_1^2 F_2 - \frac{15}{4}F_2^2\right) = 0.\end{aligned}$$

Novamente a última linha implica que

$$G_4 \quad = \quad -\frac{5}{128}F_1^4 + \frac{15}{16}F_1^2F_2 + \frac{15}{8}F_2^2 \tag{1.54}$$

pelo lema da divisão.

Finalmente, substituindo as equações (1.51), (1.52), (1.53) e (1.54) na equação (1.50), obtemos

$$\begin{aligned}
2dx_0 \wedge dG_5 + F_1 dx_0 \wedge d\left(-\frac{5}{128}F_1^4 + \frac{15}{16}F_1^2F_2 + \frac{15}{8}F_2^2\right) - 2\left(\frac{5}{16}F_1^3 + \frac{15}{4}F_1F_2\right) dx_0 \wedge dF_2 \\
- \left(-\frac{5}{128}F_1^4 + \frac{15}{16}F_1^2F_2 + \frac{15}{8}F_2^2\right) dx_0 \wedge dF_1 = 0; \\
2dx_0 \wedge dG_5 - \frac{5}{32}F_1^4 dx_0 \wedge dF_1 + \frac{15}{8}F_1^2F_2 dx_0 \wedge dF_1 + \frac{15}{16}F_1^3 dx_0 \wedge dF_2 + \frac{15}{4}F_1F_2 dx_0 \wedge dF_2 \\
- \frac{5}{8}F_1^3 dx_0 \wedge dF_2 - \frac{15}{2}F_1F_2 dx_0 \wedge dF_2 + \frac{5}{128}F_1^4 dx_0 \wedge dF_1 - \frac{15}{16}F_1^2F_2 dx_0 \wedge dF_1 \\
- \frac{15}{8}F_2^2 dx_0 \wedge dF_1 = 0; \\
2dx_0 \wedge dG_5 - \frac{15}{128}F_1^4 dx_0 \wedge dF_1 + \frac{15}{16}F_1^2F_2 dx_0 \wedge dF_1 - \frac{15}{8}F_2^2 dx_0 \wedge dF_1 - \frac{15}{4}F_1F_2 dx_0 \wedge dF_2 \\
+ \frac{5}{16}F_1^3 dx_0 \wedge dF_2 dx_0 \wedge dF_2 = 0; \\
dx_0 \wedge d\left(2G_5 - \frac{3}{128}F_1^5 + \frac{5}{16}F_1^3F_2 - \frac{15}{8}F_1F_2^2\right) = 0.
\end{aligned}$$

Mais uma vez o lema da divisão, aplicado nesta última linha, implica que

$$G_5 \quad = \quad \frac{3}{256}F_1^5 - \frac{5}{32}F_1^3F_2 + \frac{15}{16}F_1F_2^2. \tag{1.55}$$

Essa última equação completa a demonstração. $\square$

Com esse lema podemos demonstrar a seguinte proposição

Proposição 1.3.3. *O esquema de indeterminação B'* (cf. obs. 1.3.1) *é uma interseção completa local.*

Demonstração. Como na proposição 1.2.4, vamos denotar por J' e J_1' os transformados totais dos ideais J e J_1, respectivamente. Iremos mostrar que $J' = J_1' + \langle \varepsilon^3 \rangle$, ou seja, que o ideal do esquema de indeterminação B' é igual ao ideal J'. Como antes, observamos que as relações de explosão apresentadas nas equações (1.11) e (1.12), não alteram os coeficientes $b_{j_1j_2j_3j_4j_5}$ do polinômio G que são os termos lineares das equações geradoras do ideal J_1, conforme a observação 1.3.1. Como antes, $J = J_1 + \overline{J}$, onde $\overline{J}$ é o ideal gerado pelos coeficientes da 2-forma $dF \wedge dG \mod J_1$. Sendo assim, basta tomarmos o transformado total do ideal $\overline{J}$. Então, vamos calcular $dF \wedge dG \mod J_1$. Substituindo as relações do lema 1.3.2 acima em (1.45), obtemos

$$
\begin{aligned}
dF \wedge dG \mod J_1 &= \\
&= \frac{15}{16} F_1 \left(\frac{1}{16} F_1^4 - \frac{1}{2} F_1^2 F_2 + F_2^2 \right) dx_0 \wedge dF_1 - \frac{15}{8} \left(\frac{1}{16} F_1^4 - \frac{1}{2} F_1^2 F_2 + F_2^2 \right) dx_0 \wedge dF_2 \\
&\quad + \frac{15}{16} \left(\frac{1}{16} F_1^4 - \frac{1}{2} F_1^2 F_2 + F_2^2 \right) dF_2 \wedge dF_1 \\
&= \frac{15}{8} \left(\frac{1}{16} F_1^4 - \frac{1}{2} F_1^2 F_2 + F_2^2 \right) \left(\frac{1}{2} F_1 dx_0 \wedge dF_1 - dx_0 \wedge dF_2 + \frac{1}{2} dF_2 \wedge dF_1 \right) \\
&= \frac{15}{8} \left(F_2 - \frac{1}{4} F_1^2 \right)^2 \left(dx_0 \wedge d \left(\frac{1}{4} F_1^2 - F_2 \right) + \frac{1}{2} d \left(F_2 - \frac{1}{4} F_1^2 \right) \wedge dF_1 \right) \\
&= \frac{15}{8} \left(F_2 - \frac{1}{4} F_1^2 \right)^2 \left(d \left(F_2 - \frac{1}{4} F_1^2 \right) \wedge dx_0 + \frac{1}{2} d \left(F_2 - \frac{1}{4} F_1^2 \right) \wedge dF_1 \right) \\
&= \frac{15}{8} \left(F_2 - \frac{1}{4} F_1^2 \right)^2 d \left(F_2 - \frac{1}{4} F_1^2 \right) \wedge \left(dx_0 + \frac{1}{2} dF_1 \right).
\end{aligned}
$$

Novamente precisamos do ideal gerado pelos coeficientes dos fatores

$$
F_2 - \frac{1}{4} F_1^2, \quad d \left(F_2 - \frac{1}{4} F_1^2 \right) \quad \text{e} \quad dx_0 + \frac{1}{2} dF_1.
$$

Mas, pela proposição 1.2.4, temos que

- O ideal gerado pelos transformados dos coeficientes de $\left(F_2 - \frac{1}{4} F_1^2 \right)$ é $\langle \varepsilon^2 \rangle$;
- O ideal gerado pelos transformados dos coeficientes de $d \left(F_2 - \frac{1}{4} F_1^2 \right)$ é $\langle \varepsilon \rangle$;
- O ideal gerado pelos transformados dos coeficientes de $dx_0 + \frac{1}{2} dF_1$ é $\langle 1 \rangle$.

Portanto, o ideal gerado pelos transformados dos coeficientes da 2-forma $dF \wedge dG \mod J_1$ é igual a $\langle \varepsilon^3 \rangle$. Isso completa nossa demonstração. □

Para o que segue, denotaremos também

$$
B'_r : \text{ a redução do esquema } B'. \tag{1.56}
$$

Então, segue da proposição acima e do lema (1.2.7) o seguinte

Corolário 1.3.4. *O esquema B'_r (1.56) é igual à restrição do divisor excepcional E' à subvariedade $V \subset V \times \mathbb{P}(S_5)$, ou seja, vale a igualdade $B'_r = E'_V = \mathbb{P}\left(N_{V|\mathbb{P}(S_2)}\right)$.*

Demonstração. Como na demonstração do corolário 1.2.8, vamos mostrar que as fibras sobre x_0 de ambos os esquemas coincidem. Para isso, vamos explicitar o transformado total de J_1 (lema 1.3.2) na vizinhança em questão. Lembre que o ideal que define B'_r é $J'_1 + \langle \varepsilon \rangle$. Os geradores do ideal J'_1 são exatamente os transformados totais dos geradores do ideal J_1, cujas relações são dadas pelas equações do lema 1.3.2, mais a equação do divisor excepcional ε. Vamos supor que a vizinhança da fibra seja dada pela escolha $\varepsilon = a_{11} - \frac{1}{4}a_{01}^2$. Neste caso, temos $a_{jj} = \varepsilon d_{jj} + \frac{1}{4}a_{0j}^2$ para $j \neq 1$ e $a_{ij} = \varepsilon d_{ij} + \frac{1}{2}a_{0i}a_{0j}$ para $j > i = 1, \cdots, n$. Substituindo essas relações nas equações do lema (1.3.2), temos

$$\begin{aligned}
G_1 &= \tfrac{5}{2}F_1 \\
G_2 &= \tfrac{15}{8}F_1^2 + \tfrac{5}{2}\left(\tfrac{1}{4}F_1^2 + \varepsilon F'\right) \\
&= \tfrac{5}{2}F_1^2 + \tfrac{5}{2}\varepsilon F' \\
G_3 &= \tfrac{5}{16}F_1^3 + \tfrac{15}{4}F_1\left(\tfrac{1}{4}F_1^2 + \varepsilon F'\right) \\
&= \tfrac{5}{4}F_1^3 + \tfrac{15}{4}\varepsilon F_1' \\
G_4 &= -\tfrac{5}{128}F_1^4 + \tfrac{15}{16}F_1^2\left(\tfrac{1}{4}F_1^2 + \varepsilon F'\right) + \tfrac{15}{8}\left(\tfrac{1}{4}F_1^2 + \varepsilon F'\right)^2 \\
&= \tfrac{5}{16}F_1^4 + \varepsilon(\cdots) \\
G_5 &= \tfrac{3}{256}F_1^5 - \tfrac{5}{32}F_1^3\left(\tfrac{1}{4}F_1^2 + \varepsilon F'\right) + \tfrac{15}{16}F_1\left(\tfrac{1}{4}F_1^2 + \varepsilon F'\right)^2 \\
&= \tfrac{1}{32}F_1^5 + \varepsilon(\cdots)
\end{aligned}$$

onde $F' = x_1^2 + \sum_{\substack{j \geq i = 1 \\ (i,j) \neq (1,1)}}^{n} d_{ij}x_ix_j$ é um polinômio quadrático na vizinhança $\{d_{11} = 1\}$ do fibrado $\mathbb{P}(N_{V|\mathbb{P}(S_2)})$ (cf. lema 1.2.7). Então, o ideal que define J_1' é obtido exatamente das equações acima juntamente com a equação do divisor excepcional ε. Ou seja, esse ideal está definido pela equação ε e pelas relações

$$G_1 = \frac{5}{2}F_1, \quad G_2 = \frac{5}{2}F_1^2, \quad G_3 = \frac{5}{4}F_1^3, \quad G_4 = \frac{5}{16}F_1^4 \quad \text{e} \quad G_5 = \frac{1}{32}F_1^5.$$

Substituindo em $G = x_0^5 + x_0^4G_1 + x_0^3G_2 + x_0^2G_3 + x_0G_4 + G_5$ e retringindo à origem, obtemos

$$G = x_0^5$$

Novamente, isso corresponde ao mergulho $L \mapsto L^5$ de V em $\mathbb{P}(S_5)$. A partir daqui, segue a mesma conclusão como no corolário 1.2.8. Isso encerra nossa demonstração. $\square$

1.3.2 O cálculo do grau da componente $\mathcal{R}(2,5)$

Os resultados obtidos acima nos fornecem uma resolução do mapa $\rho_{2,5}$ esquematizado pelo diagrama seguinte

$$
\begin{tikzcd}
E'' \arrow[rr, hook] \arrow[d] & & X'' \arrow[d, "\pi''"] \arrow[ddr, bend left, "\rho''_{2,5}"] & \\
B' \arrow[r, hook] & 3E' \arrow[dr, hook] & & \\
B'_r = \mathbb{P}\left(N_{V|\mathbb{P}(S_2)}\right) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] \arrow[d] & E' = \mathbb{P}\left(N_{V|\mathbb{P}(S_2)}\right) \times \mathbb{P}(S_5) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] \arrow[d] & X' \arrow[d, "\pi'"] \arrow[dr, dotted, "\rho'_{2,5}"] & \\
V \arrow[r, hook] & V \times \mathbb{P}(S_5) \arrow[r, hook] & X \arrow[r, dotted, "\rho_{2,5}"] & \mathbb{P}\left(S_5 \otimes \bigwedge^2 S_1\right)
\end{tikzcd}
\tag{1.57}
$$

onde

$$X' = \widetilde{\mathbb{P}(S_2)} \times \mathbb{P}(S_5) \xrightarrow{\pi'} X = \mathbb{P}(S_2) \times \mathbb{P}(S_5)$$

é a explosão da variedade X ao longo da subvariedade $V \times \mathbb{P}(S_5)$ pelo mergulho Veronese no primeiro fator: $(L, G) \mapsto (L^2, G)$.

Fica como exercício para o eleitor, verificar que usando argumentos inteiramente análogos àqueles da demonstração da proposição 1.2.9, podemos mostrar que

Proposição 1.3.5. *O grau da componente $\mathcal{R}(2,5)$ é dado pela integral*

$$\int_{X''} (h_1 + h_2 - [E''])^{\dim(X)}$$

onde $h_1 = c_1\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}(1)$, $h_2 = c_1\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_5)}(1)$ e $[E''] = c_1\mathcal{O}_{X''}(E'')$.

□

Além disso, também seguindo os argumentos apresentados na demonstração do teorema 1.2.12, fazendo as devidas substituições abaixo apresentadas

$$h_1 = 2h, \qquad h_2 = 5h, \qquad [B'] = 3[B'_r] \qquad \text{e}$$

$$s\left(N_{B'|X'}\right)_{B'_r} = s\left(T\mathbb{P}(S_5)\right) s\left(\mathcal{O}_{B'_r}(-3)\right),$$

conseguimos demonstrar o seguinte teorema

Teorema 1.3.6. *O grau da componente $\mathcal{R}(2,5)$ em dimensão $n \geq 2$ é igual a*

$$\binom{N}{N_2} - 3\sum_{k=\theta}^{N_2-1} M_k \left(\sum_{i=\theta}^{k} 3^i 5^{k-i} \left(\sum_{t=0}^{i-\theta} M_{it\theta} 2^t\right) M_{ik}\right) 7^{N_2-(k+1)}$$

onde

$$N_i = \tbinom{n+i}{n} - 1, N = N_2 + N_5, M_k = \tbinom{N}{N_5+k+1},$$

$$M_{ik} = (-1)^{k-i}\tbinom{N_5+k-i}{k-i}, \ \theta = N_2 - n - 1$$

$$M_{it\theta} = \tbinom{n+1}{i-\theta-t}(-1)^t\tbinom{N_2+t}{t},$$

$\square$

Novamente, os primeiros números da sequência dada pelo teorema acima estão na tabela abaixo e foram obtidos usando o Sistema de Computação Algébrica Maple. Um procedimento que calcula a fórmula acima pode ser encontrado no apêndice (A).

n	Grau da componente $\mathcal{R}(2,5)$
2	35067
3	27389258692
4	5858642997232446492
5	914527193579654202584864190666
6	170674183975852666371782648512918003360467780
7	57913654141367746960536005347794751951050640428533657750491488

Capítulo 2

O grau da componente $\mathcal{R}(2, 2r+1)$ em dimensão arbitrária

2.1 A resolução do mapa $\rho_{2,2r+1}$

Neste capítulo iremos descrever uma maneira de calcular o grau da componente $\mathcal{R}(2, 2r+1)$ em dimensão arbitrária. Pelo que foi visto no capítulo anterior, tudo o que precisamos é dar uma generalização para a proposição 1.2.4 ou, equivalentemente, para a proposição 1.3.3. Para isso, vamos nos manter fiéis às notações dos capítulos anteriores, ou seja,

$$B \quad \text{é o esquema de indeterminação do mapa} \quad \rho_{2,2r+1} : (F, G) \mapsto dF \wedge dG, \tag{2.1}$$

cujo ideal continua denotado por J. Sejam

$$F = x_0^2 + x_0 F_1 + F_2$$

e

$$G = x_0^{2r+1} + x_0^{2r} G_1 + x_0^{2r-1} G_2 + \cdots + x_0 G_{2r} + G_{2r+1} \tag{2.2}$$

o par de polinômios homogêneos da variedade $X = \mathbb{P}(S_2) \times \mathbb{P}(S_{2r+1})$ escritos em coordenadas locais na vizinhança $a_{00} = 1$ e $b_{00\cdots 0} = 1$. Então, uma indução sobre r nos dá a igualdade

$$\begin{aligned} dF \wedge dG \;=\; & \sum_{k=0}^{2r} x_0^{2r+1-k} \left[2dx_0 \wedge dG_{k+1} + F_1 dx_0 \wedge dG_k - (2r+2-k) G_{k-1} dx_0 \wedge dF_2 \right. \\ & \left. -(2r+2-(k+1)) G_k dx_0 \wedge dF_1\right] + \sum_{k=0}^{2r} x_0^{2r+1-k} \left[dF_1 \wedge dG_{k+1} + dF_2 \wedge dG_k\right] \\ & + F_1 dx_0 \wedge dG_{2r+1} - G_{2r} dx_0 \wedge dF_2 + dF_2 \wedge dG_{2r+1} \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde entendemos $G_0 = 1$ e $G_{-1} = 0$.

De fato, para $r=1$ a igualdade vale pela equação (1.16) (ver também a equação (1.45) para o caso $r=2$). Suponha que vale a igualdade para $r-1$. Escreva

$$G = x_0^2 \underbrace{\left(x_0^{2r-1} + x^{2r-2}G_1 + \cdots + x_0 G_{2r-2} + G_{2r-1}\right)}_{\widetilde{G}} + x_0 G_{2r} + G_{2r+1}.$$

Com isso,

$$dG = x_0^2 d\widetilde{G} + 2x_0\widetilde{G}dx_0 + x_0 dG_{2r} + G_{2r}dx_0 + dG_{2r+1}$$
$$dF = 2x_0dx_0 + x_0dF_1 + F_1dx_0 + dF_2$$

Então,

$$dF\wedge dG = x_0^2 dF\wedge d\widetilde{G} + 2x_0\widetilde{G}dF\wedge dx_0 + x_0dF\wedge dG_{2r} + G_{2r}dF\wedge dx_0 + dF\wedge dG_{2r+1}$$

$$= x_0^2\left(\sum_{k=0}^{2r-2} x_0^{2r-(k+1)}\left[2dx_0\wedge dG_{k+1} + F_1dx_0\wedge dG_k - (2r-k)G_{k-1}dx_0\wedge dF_2 - (2r-(k\right.\right.$$

$$\left.+1))G_kdx_0\wedge dF_1\right] + \sum_{k=0}^{2r-2} x_0^{2r-(k+1)}\left[dF_1\wedge dG_{k+1} + dF_2\wedge dG_k\right] + F_1dx_0\wedge dG_{2r-1} - G_{2r-2}$$

$$\left. dx_0\wedge dF_2 + dF_2\wedge dG_{2r-1}\right) - 2x_0^2\widetilde{G}dx_0\wedge dF_1 - 2x_0\widetilde{G}dx_0\wedge dF_2 + 2x_0^2dx_0\wedge dG_{2r} + x_0^2$$

$$dF_1\wedge dG_{2r} + x_0F_1dx_0\wedge dG_{2r} + x_0dF_2\wedge dG_{2r} - x_0G_{2r}dx_0\wedge dF_1 - G_{2r}dx_0\wedge dF_2$$

$$+ 2x_0dx_0\wedge dG_{2r+1} + x_0dF_1\wedge dG_{2r+1} + F_1dx_0\wedge dG_{2r+1} + dF_2\wedge dG_{2r+1}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{2r-2} x_0^{2r+1-k}\left[2dx_0\wedge dG_{k+1} + F_1dx_0\wedge dG_k - (2r-k)G_{k-1}dx_0\wedge dF_2 - (2r-(k\right.\right.$$

$$\left.+1))G_kdx_0\wedge dF_1\right] + 2x_0^2dx_0\wedge dG_{2r} + x_0^2F_1dx_0\wedge dG_{2r-1} - x_0^2G_{2r-2}dx_0\wedge dF_2 - 2x_0^2\widetilde{G}$$

$$\left. dx_0\wedge dF_1 + 2x_0dx_0\wedge dG_{2r+1} + x_0F_1dx_0\wedge dG_{2r} - 2x_0\widetilde{G}dx_0\wedge dF_2 - x_0G_{2r}dx_0\wedge dF_1\right)$$

$$+\left(\sum_{k=0}^{2r-2} x_0^{2r+1-k}\left[dF_1\wedge dG_{k+1} + dF_2\wedge dG_k\right] + x_0^2dF_1\wedge dG_{2r} + x_0^2dF_2\wedge dG_{2r-1} + x_0\right.$$

$$\left. dF_1\wedge dG_{2r+1} + x_0dF_2\wedge dG_{2r}\right) + F_1dx_0\wedge dG_{2r+1} - G_{2r}dx_0\wedge dF_2 + dF_2\wedge dG_{2r+1}$$

Mas,

$$-2x_0^2\widetilde{G}dx_0\wedge dF_1 = \sum_{k=0}^{2r-1} x_0^{2r+1-k}\left(-2dx_0\wedge dF_1\right)$$

e

$$-2x_0\widetilde{G}dx_0\wedge dF_2 = \sum_{k=0}^{2r} x_0^{2r+1-k}\left(-2dx_0\wedge dF_2\right)$$

Sendo assim,

$$dF \wedge dG =$$

$$\left(\sum_{k=0}^{2r-2} x_0^{2r+1-k}\left[2dx_0 \wedge dG_{k+1} + F_1 dx_0 \wedge dG_k - (2r-k)G_{k-1}dx_0 \wedge dF_2 - (2r-(k+1))G_k\right.\right.$$

$$\left. dx_0 \wedge dF_1\right] + \underbrace{2x_0^2 dx_0 \wedge dG_{2r} + x_0^2 F_1 dx_0 \wedge dG_{2r-1} - x_0^2 G_{2r-2} dx_0 \wedge dF_2 - 2x_0^2 \widetilde{G} dx_0 \wedge dF_1}_{\text{eleva a soma anterior para } 0 \leq k \leq 2r-1}$$

$$\left. + \underbrace{2x_0 dx_0 \wedge dG_{2r+1} + x_0 F_1 dx_0 \wedge dG_{2r} - 2x_0 \widetilde{G} dx_0 \wedge dF_2 - x_0 G_{2r} dx_0 \wedge dF_1}_{\text{eleva a soma anterior para } 0 \leq k \leq 2r}\right) +$$

$$\sum_{k=0}^{2r} x_0^{2r+1-k}\left[dF_1 \wedge dG_{k+1} + dF_2 \wedge dG_k\right] + F_1 dx_0 \wedge dG_{2r+1} - G_{2r} dx_0 \wedge dF_2 + dF_2 \wedge dG_{2r+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{2r} x_0^{2r+1-k}\left[2dx_0 \wedge dG_{k+1} + F_1 dx_0 \wedge dG_k - (2r+2-k)G_{k-1}dx_0 \wedge dF_2 - (2r+2-(k\right.$$

$$\left.+1))G_k dx_0 \wedge dF_1\right] + \sum_{k=0}^{2r} x_0^{2r+1-k}\left[dF_1 \wedge dG_{k+1} + dF_2 \wedge dG_k\right] + F_1 dx_0 \wedge dG_{2r+1} - G_{2r} dx_0 \wedge dF_2$$

$$+ dF_2 \wedge dG_{2r+1}.$$

Portanto, a igualdade também vale para r.

Como antes, denotaremos por $J_1 \subset J$ o ideal dos geradores locais distinguidos com algum termo linear $\neq 0$, ou seja, os coeficientes dos monômios do tipo $x_0 x_{i_1} \cdots x_{i_{2r}}$ do polinômio A_{0m} que é coeficiente da 2-forma $dx_0 \wedge dx_k$ (cf. eq. 1.13 e obs. 1.2.2). Estes geradores existem, embora implicitamente, na expansão (2.3).

Vamos começar provando uma generalização do lema 1.2.3.

Lema 2.1.1. *O ideal J_1 definido acima é o ideal da subvariedade $V(J_1) \subset X$ de todos os pares (F, G) tais que*

$$G_{k+1} = \sum_{a=0}^{b} \frac{\prod_{i=0}^{k-a}(2r+1-2i)}{2^{k+1-a}(k+1-2a)!a!} F_1^{k+1-2a} F_2^a,$$

onde $b = \frac{k}{2}$ se k é par e $b = \frac{k+1}{2}$ se k é ímpar. Portanto, o ideal J_1 é gerado por uma sequência regular de comprimento $\dim \mathbb{P}(S_3)$ *no anel de coordenadas locais de X.*

Demonstração. Vamos começar fixando r. Então, o ideal J_1 corresponde aos coeficientes da equação

$$2dx_0 \wedge dG_{k+1} + F_1 dx_0 \wedge dG_k - (2r+2-k)G_{k-1}dx_0 \wedge dF_2 - (2r+2-(k+1))G_k dx_0 \wedge dF_1 = 0$$

no desenvolvimento (2.3), para $k \geq 0$. Pela equação acima com $k = 0$ e $k = 1$, temos

$$2dx_0 \wedge dG_1 - (2r+1)dx_0 \wedge dF_1 = 0$$

e

$$2dx_0 \wedge dG_2 + F_1 dx_0 \wedge dG_1 - (2r+1)dx_0 \wedge dF_2 - (2r)G_1 dx_0 \wedge dF_1 = 0.$$

Daí vem

$$G_1 = \frac{2r+1}{2} F_1$$

e

$$G_2 = \frac{(2r+1)(2r-1)}{8} F_1^2 + \frac{2r+1}{2} F_1 F_2$$

que está de acordo com nosso enunciado. Usando indução em k, vamos provar o caso em que k é par. O outro caso se faz de modo semelhante.

Suponha que k é par. Nesse caso, temos

$$\begin{aligned}
&2dx_0 \wedge dG_{k+1} + F_1 dx_0 \wedge d\left(\sum_{a=0}^{\frac{k}{2}} \frac{\prod_{i=0}^{k-1-a}(2r+1-2i)}{2^{k-a}(k-2a)!a!} F_1^{k-2a} F_2^a\right) - \\
&(2r+2-k)\left(\sum_{a=0}^{\frac{k-2}{2}} \frac{\prod_{i=0}^{k-2-a}(2r+1-2i)}{2^{k-1-a}(k-1-2a)!a!} F_1^{k-1-2a} F_2^a\right) dx_0 \wedge dF_2 - \\
&(2r+2-(k+1))\left(\sum_{a=0}^{\frac{k}{2}} \frac{\prod_{i=0}^{k-1-a}(2r+1-2i)}{2^{k-a}(k-2a)!a!} F_1^{k-2a} F_2^a\right) dx_0 \wedge dF_1 \quad = \quad 0
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
d\left(\sum_{a=0}^{\frac{k}{2}} \frac{\prod_{i=0}^{k-1-a}(2r+1-2i)}{2^{k-a}(k-2a)!a!} F_1^{k-2a} F_2^a\right) &= \left(\sum_{a=0}^{\frac{k}{2}-1} \frac{\prod_{i=0}^{k-1-a}(2r+1-2i)}{2^{k-a}(k-1-2a)!a!} F_1^{k-1-2a} F_2^a\right) dF_1 + \\
&\quad \left(\sum_{a=1}^{\frac{k}{2}} \frac{\prod_{i=0}^{k-1-a}(2r+1-2i)}{2^{k-a}(k-2a)!(a-1)!} F_1^{k-2a} F_2^{a-1}\right) dF_2 \\
&= \left(\sum_{a=0}^{\frac{k-2}{2}} \frac{\prod_{i=0}^{k-1-a}(2r+1-2i)}{2^{k-a}(k-1-2a)!a!} F_1^{k-1-2a} F_2^a\right) dF_1 + \\
&\quad \left(\sum_{a=0}^{\frac{k-2}{2}} \frac{\prod_{i=0}^{k-2-a}(2r+1-2i)}{2^{k-1-a}(k-2-2a)!a!} F_1^{k-2-2a} F_2^a\right) dF_2,
\end{aligned}$$

a equação acima implica em

$$
\begin{aligned}
2dx_0 \wedge dG_{k+1} + \left(\sum_{a=0}^{\frac{k-2}{2}} \frac{\prod_{i=0}^{k-1-a}(2r+1-2i)}{2^{k-a}(k-1-2a)!a!} F_1^{k-2a} F_2^a \right) dx_0 \wedge dF_1 + \\
\left(\sum_{a=0}^{\frac{k-2}{2}} \frac{\prod_{i=0}^{k-2-a}(2r+1-2i)}{2^{k-1-a}(k-2-2a)!a!} F_1^{k-1-2a} F_2^a \right) dx_0 \wedge dF_2 - \\
(2r+2-k) \left(\sum_{a=0}^{\frac{k-2}{2}} \frac{\prod_{i=0}^{k-2-a}(2r+1-2i)}{2^{k-1-a}(k-1-2a)!a!} F_1^{k-1-2a} F_2^a \right) dx_0 \wedge dF_2 - \\
(2r+2-(k+1)) \left(\sum_{a=0}^{\frac{k}{2}} \frac{\prod_{i=0}^{k-1-a}(2r+1-2i)}{2^{k-a}(k-2a)!a!} F_1^{k-2a} F_2^a \right) dx_0 \wedge dF_1 &= 0
\end{aligned}
$$

ou ainda

$$
\begin{aligned}
2dx_0 \wedge dG_{k+1} - \left(\sum_{a=0}^{\frac{k}{2}} \frac{(2r+1-2(k-a))\prod_{i=0}^{k-1-a}(2r+1-2i)}{2^{k-a}(k-2a)!a!} F_1^{k-2a} F_2^a \right) dx_0 \wedge dF_1 - \\
\left(\sum_{a=0}^{\frac{k-2}{2}} \frac{(2r+1-2(k-1-a))\prod_{i=0}^{k-2-a}(2r+1-2i)}{2^{k-1-a}(k-1-2a)!a!} F_1^{k-1-2a} F_2^a \right) dx_0 \wedge dF_2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Segue daqui que

$$
\begin{aligned}
2dx_0 \wedge dG_{k+1} - \left(\sum_{a=0}^{\frac{k}{2}} \frac{\prod_{i=0}^{k-a}(2r+1-2i)}{2^{k-a}(k-2a)!a!} F_1^{k-2a} F_2^a \right) dx_0 \wedge dF_1 - \\
\left(\sum_{a=0}^{\frac{k-2}{2}} \frac{\prod_{i=0}^{k-1-a}(2r+1-2i)}{2^{k-1-a}(k-1-2a)!a!} F_1^{k-1-2a} F_2^a \right) dx_0 \wedge dF_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Essa última igualdade é equivalente a

$$
2dx_0 \wedge dG_{k+1} - dx_0 \wedge d \left(\sum_{a=0}^{\frac{k}{2}} \frac{\prod_{i=0}^{k-a}(2r+1-2i)}{2^{k-a}(k+1-2a)!a!} F_1^{k+1-2a} F_2^a \right) = 0
$$

ou seja,

$$
dx_0 \wedge d \left(2G_{k+1} - \sum_{a=0}^{\frac{k}{2}} \frac{\prod_{i=0}^{k-a}(2r+1-2i)}{2^{k-a}(k+1-2a)!a!} F_1^{k+1-2a} F_2^a \right) = 0.
$$

Essa equação implica, pelo lema da divisão (cf. [5, lemma 2.2, pág. 6]), que

$$G_{k+1} = \sum_{a=0}^{\frac{k}{2}} \frac{\prod_{i=0}^{k-a}(2r+1-2i)}{2^{k+1-a}(k+1-2a)!a!} F_1^{k+1-2a} F_2^a$$

□

Para o resultado que desejamos, precisamos do lema a seguir.

Lema 2.1.2.

$$dF \wedge dG = \frac{\prod_{i=0}^{r}(2r+1-2i)}{r!2^r} \left(F_2 - \frac{1}{4}F_1^2\right)^r d\left(F_2 - \frac{1}{4}F_1^2\right) \wedge \left(dx_0 + \frac{1}{2}dF_1\right) \mod J_1.$$

Demonstração. Vamos começar provando que na decomposição de $dF \wedge dG$, o segundo somatório $\sum_{k=0}^{2r} x_0^{2r+1-k} [dF_1 \wedge dG_{k+1} + dF_2 \wedge dG_k]$ é identicamente nulo módulo o ideal J_1 (2.1.1). De fato, suponha que k seja ímpar. Temos

$$\begin{aligned}
(dF_1 \wedge dG_{k+1} + dF_2 \wedge dG_k) \mod J_1 = \\
dF_1 \wedge d\left(\sum_{a=0}^{\frac{k+1}{2}} \frac{\prod_{i=0}^{k-a}(2r+1-2i)}{2^{k+1-a}(k+1-2a)!a!} F_1^{k+1-2a} F_2^a\right) \\
+ dF_2 \wedge d\left(\sum_{a=0}^{\frac{k-1}{2}} \frac{\prod_{i=0}^{k-1-a}(2r+1-2i)}{2^{k-a}(k-2a)!a!} F_1^{k-2a} F_2^a\right) \\
= \left(\sum_{a=1}^{\frac{k+1}{2}} \frac{\prod_{i=0}^{k-a}(2r+1-2i)}{2^{k+1-a}(k+1-2a)!(a-1)!} F_1^{k+1-2a} F_2^{a-1}\right) dF_1 \wedge dF_2 \\
+ \left(\sum_{a=0}^{\frac{k-1}{2}} \frac{\prod_{i=0}^{k-1-a}(2r+1-2i)}{2^{k-a}(k-1-2a)!a!} F_1^{k-1-2a} F_2^a\right) dF_2 \wedge dF_1
\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{a=0}^{\frac{k-1}{2}} \frac{\prod_{i=0}^{k-1-a}(2r+1-2i)}{2^{k-a}(k-1-2a)!a!} F_1^{k-1-2a} F_2^a \right) dF_1 \wedge dF_2$$

$$+ \left(\sum_{a=0}^{\frac{k-1}{2}} \frac{\prod_{i=0}^{k-1-a}(2r+1-2i)}{2^{k-a}(k-1-2a)!a!} F_1^{k-1-2a} F_2^a \right) dF_2 \wedge dF_1$$

$$= 0.$$

O caso em que k é par se faz de modo análogo. Com isso, temos que

$$dF \wedge dG = (F_1 dx_0 \wedge dG_{2r+1} - G_{2r} dx_0 \wedge dF_2 + dF_2 \wedge dG_{2r+1}) \mod J_1.$$

Desenvolvendo o membro direito da equação, temos

$$dF \wedge dG =$$

$$F_1 dx_0 \wedge d \left(\sum_{a=0}^{r} \frac{\prod_{i=0}^{2r-a}(2r+1-2i)}{2^{2r+1-a}(2r+1-2a)!a!} F_1^{2r+1-2a} F_2^a \right)$$

$$- \left(\sum_{a=0}^{r} \frac{\prod_{i=0}^{2r-1-a}(2r+1-2i)}{2^{2r-a}(2r-2a)!a!} F_1^{2r-2a} F_2^a \right) dx_0 \wedge dF_2$$

$$+ dF_2 \wedge d \left(\sum_{a=0}^{r} \frac{\prod_{i=0}^{2r-a}(2r+1-2i)}{2^{2r+1-a}(2r+1-2a)!a!} F_1^{2r+1-2a} F_2^a \right) \mod J_1.$$

Isto é,

$dF \wedge dG =$

$$F_1 \left(\sum_{a=0}^{r} \frac{\prod_{i=0}^{2r-a} (2r+1-2i)}{2^{2r+1-a}(2r-2a)!a!} F_1^{2r-2a} F_2^a \right) dx_0 \wedge dF_1 +$$

$$F_1 \left(\sum_{a=0}^{r-1} \frac{\prod_{i=0}^{2r-1-a} (2r+1-2i)}{2^{2r-a}(2r-1-2a)!a!} F_1^{2r-1-2a} F_2^a \right) dx_0 \wedge dF_2 -$$

$$\left(\sum_{a=0}^{r} \frac{\prod_{i=0}^{2r-1-a} (2r+1-2i)}{2^{2r-a}(2r-2a)!a!} F_1^{2r-2a} F_2^a \right) dx_0 \wedge dF_2 +$$

$$\left(\sum_{a=0}^{r} \frac{\prod_{i=0}^{2r-a} (2r+1-2i)}{2^{2r+1-a}(2r-2a)!a!} F_1^{2r-2a} F_2^a \right) dF_2 \wedge dF_1 \mod J_1.$$

Somando as duas parcelas centrais, fica assim

$dF \wedge dG =$

$$\left(\sum_{a=0}^{r} \frac{\prod_{i=0}^{2r-a} (2r+1-2i)}{2^{2r+1-a}(2r-2a)!a!} F_1^{2r-2a} F_2^a \right) F_1 dx_0 \wedge dF_1 -$$

$$\left(\sum_{a=0}^{r} \frac{(2r+1-2(2r-a)) \prod_{i=0}^{2r-1-a} (2r+1-2i)}{2^{2r-a}(2r-2a)!a!} F_1^{2r-2a} F_2^a \right) dx_0 \wedge dF_2 +$$

$$\left(\sum_{a=0}^{r} \frac{\prod_{i=0}^{2r-a} (2r+1-2i)}{2^{2r+1-a}(2r-2a)!a!} F_1^{2r-2a} F_2^a \right) dF_2 \wedge dF_1 \mod J_1,$$

ou seja,

$dF \wedge dG =$

$$\left(\sum_{a=0}^{r} \frac{\prod_{i=0}^{2r-a}(2r+1-2i)}{2^{2r+1-a}(2r-2a)!a!} F_1^{2r-2a} F_2^{a} \right) F_1 dx_0 \wedge dF_1 -$$

$$\left(\sum_{a=0}^{r} \frac{\prod_{i=0}^{2r-a}(2r+1-2i)}{2^{2r-a}(2r-2a)!a!} F_1^{2r-2a} F_2^{a} \right) dx_0 \wedge dF_2 +$$

$$\left(\sum_{a=0}^{r} \frac{\prod_{i=0}^{2r-a}(2r+1-2i)}{2^{2r+1-a}(2r-2a)!a!} F_1^{2r-2a} F_2^{a} \right) dF_2 \wedge dF_1 \mod J_1.$$

Podemos agrupar essa soma para obter o equivalente

$$dF \wedge dG = \left(\sum_{a=0}^{r} \frac{\prod_{i=0}^{2r-a}(2r+1-2i)}{2^{2r-a}(2r-2a)!a!} F_1^{2r-2a} F_2^{a} \right) \left(\frac{1}{2} F_1 dx_0 \wedge dF_1 - dx_0 \wedge dF_2 + \frac{1}{2} dF_2 \wedge dF_1 \right)$$

$$= \left(\sum_{a=0}^{r} \frac{\prod_{i=0}^{2r-a}(2r+1-2i)}{2^{2r-a}(2r-2a)!a!} F_1^{2r-2a} F_2^{a} \right) d\left(F_2 - \frac{1}{4} F_1^2 \right) \wedge \left(dx_0 + \frac{1}{2} dF_1 \right) \mod J_1 \quad (2.4)$$

Pela última linha, resta mostrar que

$$\left(\sum_{a=0}^{r} \frac{\prod_{i=0}^{2r-a}(2r+1-2i)}{2^{2r-a}(2r-2a)!a!} F_1^{2r-2a} F_2^{a} \right) = \frac{\prod_{i=0}^{r}(2r+1-2i)}{r!2^r} \left(F_2 - \frac{1}{4} F_1^2 \right)^r$$

Para isso, devemos observar que

$$(2r-2a)! = 2^{r-a}(r-a)! \left(\prod_{i=a+1}^{r} (2r+1-2i) \right).$$

Além disso,

$$\prod_{i=0}^{2r-a}(2r+1-2i) = \left(\prod_{i=0}^{r}(2r+1-2i)\right)\left(\prod_{i=r+1}^{2r-a}(2r+1-2i)\right) =$$
$$= \left(\prod_{i=0}^{r}(2r+1-2i)\right)(-1)^{r-a}\left(\prod_{i=r+1}^{2r-a}(2i-(2r+1))\right)$$
$$= \left(\prod_{i=0}^{r}(2r+1-2i)\right)(-1)^{r-a}\left(\prod_{i=a+1}^{r}(2r+1-2i)\right).$$

Substituindo estas duas igualdades em (2.4), obtemos

$$\left(\sum_{a=0}^{r}\frac{\prod_{i=0}^{2r-a}(2r+1-2i)}{2^{2r-a}(2r-2a)!a!}F_1^{2r-2a}F_2^a\right) =$$
$$= \left(\sum_{a=0}^{r}\frac{\left(\prod_{i=0}^{r}(2r+1-2i)\right)(-1)^{r-a}\left(\prod_{i=a+1}^{r}(2r+1-2i)\right)}{2^{2r-a}2^{r-a}(r-a)!\left(\prod_{i=a+1}^{r}(2r+1-2i)\right)a!}F_1^{2r-2a}F_2^a\right)$$

$$= \left(\sum_{a=0}^{r}\frac{\left(\prod_{i=0}^{r}(2r+1-2i)\right)(-1)^{r-a}}{2^{2r-2a}2^{r}(r-a)!a!}F_1^{2r-2a}F_2^a\right)$$
$$= \frac{\left(\prod_{i=0}^{r}(2r+1-2i)\right)}{r!2^r}\left(\sum_{a=0}^{r}\frac{r!(-1)^{r-a}}{2^{2r-2a}(r-a)!a!}F_1^{2r-2a}F_2^a\right)$$
$$= \frac{\prod_{i=0}^{r}(2r+1-2i)}{r!2^r}\left(F_2-\frac{1}{4}F_1^2\right)^r.$$

Isso encerra nossa demonstração. □

Agora, seja B' o esquema de indeterminação do mapa $\rho'_{2,2r+1}$ induzido por $\rho_{2,2r+1}$ na explosão X' (cf. 2.5). Podemos provar o caso geral da proposição 1.2.4

Proposição 2.1.3. *O local de indeterminação B' definido acima é uma interseção completa local.*

Demonstração. Segue do lema acima que

$$dF\wedge dG = \frac{\prod_{i=0}^{r}(2r+1-2i)}{r!2^r}\left(F_2-\frac{1}{4}F_1^2\right)^r d\left(F_2-\frac{1}{4}F_1^2\right)\wedge\left(dx_0+\frac{1}{2}dF_1\right) \mod J_1$$

Repetindo os argumentos na demonstração da proposição 1.2.4, o transformado total do ideal gerado pelas equações locais que são os coeficientes do membro direito da equação acima é igual ao produto

$$\langle \varepsilon^r \rangle \langle \varepsilon \rangle = \left\langle \varepsilon^{r+1} \right\rangle$$

e temos a igualdade de ideais $J = J_1 + \overline{J}$. Além disso, o transformado total do ideal J_1 (2.1.1) é um ideal J_1', cujos geradores formam uma sequência regular no anel de coordenadas locais da variedade X', inclusive com o mesmo número de geradores. O que acabamos de obter no início desta demonstração é que o transformado total do ideal $\overline{J}$ é igual ao ideal $\langle \varepsilon^{r+1} \rangle$. Portanto, o ideal J' é o transformado total do ideal J e é igual a $J_1' + \langle \varepsilon^{r+1} \rangle$. Com isso, terminamos a demonstração. □

Seja B_r' o esquema que é a redução do esquema de indeterminação B'. Como corolário dessa proposição e do lema 1.2.7 temos o caso geral do corolário 1.2.8,

Corolário 2.1.4. $B_r' = E_V' = \mathbb{P}\left(N_{V|\mathbb{P}(S_2)}\right)$.

Demonstração. Como na demonstração do lema 1.2.8, suponha que a equação do divisor excepcional é $\varepsilon = a_{11} - \frac{1}{4} a_{01}^2$. Então, façamos os transformados totais das equações do lema 2.1.1. Vamos supor o caso onde k é par,

$$\begin{aligned}
G_{k+1} &= \sum_{a=0}^{\frac{k}{2}} \frac{\prod_{i=0}^{k-a} (2r+1-2i)}{2^{k+1-a}(k+1-2a)!a!} F_1^{k+1-2a} F_2^a \\
&= \sum_{a=0}^{\frac{k}{2}} \frac{\prod_{i=0}^{k-a} (2r+1-2i)}{2^{k+1-a}(k+1-2a)!a!} F_1^{k+1-2a} \left(\frac{1}{4} F_1^2 + \varepsilon F' \right)^a \\
&= \sum_{a=0}^{\frac{k}{2}} \frac{\prod_{i=0}^{k-a} (2r+1-2i)}{2^{k+1-a}(k+1-2a)!a!} F_1^{k+1-2a} \left(\frac{1}{2^{2a}} F_1^{2a} + \varepsilon F' (\cdots) \right) \\
&= \sum_{a=0}^{\frac{k}{2}} \frac{\prod_{i=0}^{k-a} (2r+1-2i)}{2^{k+1-a}(k+1-2a)!a!} \frac{1}{2^{2a}} F_1^{k+1} + \varepsilon F' (\cdots) \\
&= \left(\sum_{a=0}^{\frac{k}{2}} \frac{\prod_{i=0}^{k-a} (2r+1-2i)}{2^{a}(k+1-2a)!a!} \right) \frac{1}{2^{k+1}} F_1^{k+1} + \varepsilon F' (\cdots)
\end{aligned}$$

De modo análogo, se k for ímpar, conseguimos mostrar que

$$
\begin{aligned}
G_{k+1} = \sum_{a=0}^{\frac{k+1}{2}} \frac{\prod_{i=0}^{k-a}(2r+1-2i)}{2^{k+1-a}(k+1-2a)!a!} F_1^{k+1-2a}\left(\frac{1}{4}F_1^2 + \varepsilon F'\right)^a \\
= \left(\sum_{a=0}^{\frac{k+1}{2}} \frac{\prod_{i=0}^{k-a}(2r+1-2i)}{2^{a}(k+1-2a)!a!} \right) \frac{1}{2^{k+1}} F_1^{k+1} + \varepsilon F'(\cdots).
\end{aligned}
$$

onde em ambos os casos $F' = x_1^2 + \sum_{\substack{j \geq i = 1 \\ (i,j) \neq (1,1)}}^{n} d_{ij} x_i x_j$ (cf. lema 1.2.7). Deste modo, o ideal de B'_r é gerado pelas equações acima juntamente com a equação do divisor excepcional ε. Então, substituindo em (2.2) e restringindo à origem, ficamos com

$$
G = x_0^{2r+1}
$$

O restante segue análogo à demonstração do corolário 1.2.8. $\square$

2.2 O cálculo do grau da componente $\mathcal{R}(2, 2r+1)$

Como no capítulo anterior, os resultados da seção precedente determinam o diagrama,

$$
\begin{tikzcd}
E'' \arrow[rr, hook] \arrow[d] & & X'' \arrow[dd, "\pi''"] \arrow[dddr, "\rho''_{2,2r+1}"] & \\
B' \arrow[r, hook] & (r+1)E' \arrow[dr, hook] & & \\
B'_{red} = \mathbb{P}\left(N_{V|\mathbb{P}(S_2)}\right) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] \arrow[d] & E' = \mathbb{P}\left(N_{V|\mathbb{P}(S_2)}\right) \times \mathbb{P}(S_{2r+1}) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] \arrow[d] & X' \arrow[d, "\pi'"] \arrow[dr, dotted, "\rho'_{2,2r+1}"] & \\
V \arrow[r, hook] & V \times \mathbb{P}(S_{2r+1}) \arrow[r, hook] & X \arrow[r, dotted, "\rho_{2,2r+1}"] & \mathbb{P}\left(S_{2r+1} \otimes \bigwedge^2 S_1\right)
\end{tikzcd}
\tag{2.5}
$$

em que E'' é um fibrado projetivo sobre a base B' (cf. [6, appendix B.7.1, pág. 437]).

Para calcularmos o grau da componente $\mathcal{R}(2, 2r+1)$, precisamos da generalização da proposição 1.2.9. Em seguida, usamo-la para obter um resultado generalizado do teorema 1.2.12. Nesse sentido temos

Proposição 2.2.1. *O grau da componente $\mathcal{R}(2, 2r+1)$ é dado pela integral*

$$
\int_{X''} \left(h_1 + h_2 - [E'']\right)^{\dim(X)}
$$

onde $h_1 = c_1\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}(1)$, $h_2 = c_1\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_{2r+1})}(1)$ *e* $[E''] = c_1\mathcal{O}_{X''}(E'')$.

$\square$

A demonstração segue naturalmente usando as mesmas argumentações como no § 1.2.9. Por isso, não há necessidade de repetí-la aqui e pode ser deixado como exercício. Com essa proposição podemos enunciar e provar o seguinte teorema

Teorema 2.2.2. *O grau da componente $\mathcal{R}(2, 2r+1)$ em dimensão $n \geq 2$ é igual a*

$$\binom{N}{N_2} - (r+1) \sum_{k=\theta}^{N_2-1} M_{rk} \left(\sum_{i=\theta}^{k} (r+1)^i (2r+1)^{k-i} \left(\sum_{t=0}^{i-\theta} M_{it\theta} 2^t \right) M_{rik} \right) (2r+3)^{N_2-(k+1)}$$

onde

$$\begin{cases} N_i = \binom{n+i}{n} - 1, \ N = N_2 + N_{2r+1}, \ M_{rk} = \binom{N}{N_{2r+1}+k+1}, \ \theta = N_2 - n - 1, \\ M_{it\theta} = \binom{n+1}{i-\theta-t} (-1)^t \binom{N_2+t}{t} \quad e \quad M_{rik} = (-1)^{k-i} \binom{N_{2r+1}+k-i}{k-i} \end{cases}$$

Demonstração. Vamos seguir os mesmos passos utilizados na demonstração do teorema 1.2.12. Separando a integral da proposição 2.2.1 em duas integrais, sendo a primeira no complementar do segundo divisor excepcional E'' e a segunda sobre a base V (cf. 2.5), temos que a primeira vale

$$\int_{X''} (h_1 + h_2)^N = \int_{X''} \binom{N}{N_2} h_1^{N_2} h_2^{N_{2r+1}} = \binom{N}{N_2}, \tag{2.6}$$

enquanto que a segunda integral sobre a base V, vale

$$\int_{X''} \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \left(-[E'']\right)^k (h_1 + h_2)^{N-k} \quad = \quad - \int_{E''} \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} c_1 \mathcal{O}_{E''}(1)^{k-1} (h_1 + h_2)^{N-k}$$

onde $h_1 = 2h$, $h_2 = (2r+1)h$ e $h = c_1 \mathcal{O}_V(1)$. Então,

$$\begin{aligned} &\int_{X''} \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \left(-[E'']\right)^k (h_1 + h_2)^{N-k} = \\ &\qquad - \int_{E''} \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} c_1 \mathcal{O}_{E''}(1)^{k-1} \left((2r+3)h\right)^{N-k} = \\ &\qquad\qquad - \int_{B'} \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} s_{(k-1)-N_{2r+1}} \left(N_{B'|X'}\right) (2r+3)^{N-k} h^{N-k}. \end{aligned}$$

Mas, $[B'] = (r+1)[B'_r]$ pela proposição 2.1.3 e $\left(N_{(r+1)E'|X'}\right)_{B'_r} = \mathcal{O}_{E'}(-(r+1))$. Com isso, $\left(N_{B'|(r+1)E'}\right)_{B'_r} = \left(N_{B'_r|E'}\right)_{B'_r} = T\mathbb{P}(S_{2r+1})$ segue da proposição 1.2.10 e da afirmação abaixo.

Afirmação 2.2.3. A sequência de fibrados

$$T\mathbb{P}(S_{2r+1}) \rightarrowtail \left(N_{B'|X'}\right)_{B'_r} \twoheadrightarrow \mathcal{N} = \mathcal{O}_{B'_r}(-(r+1))$$

é exata.

Demonstração. Análoga à demonstração da afirmação 1.34. $\square$

Sendo assim, a última integral acima restrita a B'_r fica

$$\int_{X''} \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \left(-[E'']\right)^k (h_1+h_2)^{N-k} =$$
$$-(r+1)\int_{B'_{red}} \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} s_{(k-1)-N_{2r+1}} \left(N_{B'|X'}\right)_{B'_{red}} (2r+3)^{N-k} h^{N-k} =$$
$$-(r+1)\int_{B'_{red}} \sum_{k=N_{2r+1}+1}^{N} \binom{N}{k} s_{(k-1)-N_{2r+1}} \left(N_{B'|X'}\right)_{B'_{red}} (2r+3)^{N-k} h^{N-k} =$$
$$-(r+1)\int_{B'_{red}} \sum_{k=0}^{N_2-1} \binom{N}{N_{2r+1}+k+1} s_k \left(N_{B'|X'}\right)_{B'_{red}} (2r+3)^{N_2-(k+1)} h^{N_2-(k+1)} \tag{2.7}$$

porque classes de Segre de índices negativos ou maiores do que a dimensão de B'_r são nulas. Resta calcular $s_k\left(N_{B'|X'}\right)_{B'_r}$. Para isso, concluímos da afirmação 2.2.3 que

$$s_k\left(N_{B'|X'}\right)_{|B'_r} = \sum_{i=0}^{k} s_i\left(\mathcal{O}_{B'_r}(-(r+1))\right) s_{k-i}\left(T\mathbb{P}(S_{2r+1})\right)$$

para $0 \leq k \leq N-1$. Ainda seguindo os argumentos na demonstração do teorema 1.2.12, obtemos que

$$s_i\left(\mathcal{O}_{B'_r}(-(r+1))\right) = (r+1)^i s_{i-(N_2-N_1-1)}\left(N_{V|\mathbb{P}(S_2)}\right)$$

e assim, ficamos com a equação

$$s_k\left(N_{B'|X'}\right)_{|B'_r} = \sum_{i=N_2-N_1-1}^{k} (r+1)^i s_{i-(N_2-N_1-1)}\left(N_{V|\mathbb{P}(S_2)}\right) s_{k-i}\left(T\mathbb{P}(S_{2r+1})\right)$$

para $0 \leq k \leq N-1$.

A partir daqui, basta substituirmos o '3' por '$2r+1$' em (1.43) para chegarmos à relação

$$s_k\left(N_{B'|X'}\right)_{|B'_r} =$$
$$\sum_{i=\theta}^{k} (r+1)^i (2r+1)^{k-i} \left(\sum_{t=0}^{i-\theta} \binom{N_1+1}{i-\theta-t} \binom{-(N_2+1)}{t} 2^t\right) \binom{-(N_{2r+1}+1)}{k-i} h^{k-\theta}$$

para $0 \leq k \leq N_2-1$ e $\theta = N_2 - N_1 - 1$.

Para finalizar, voltamos com essa expressão na última integral (2.7) para obtermos

$$\int_{X''} \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \left(-[E'']\right)^k (h_1 + h_2)^{N-k} =$$

$$-(r+1) \int_{B'_r} \sum_{k=\theta}^{N_2-1} \binom{N}{N_{2r+1}+k+1} \left(\sum_{i=\theta}^{k} (r+1)^i (2r+1)^{k-i} \left(\sum_{t=0}^{i-\theta} \binom{N_1+1}{i-\theta-t} \binom{-(N_2+1)}{t} 2^t \right) \binom{-(N_{2r+1}+1)}{k-i} h^{k-\theta} \right) (2r+3)^{N_2-(k+1)} h^{N_2-(k+1)} =$$

$$-(r+1) \sum_{k=\theta}^{N_2-1} \binom{N}{N_{2r+1}+k+1} \left(\sum_{i=\theta}^{k} (r+1)^i (2r+1)^{k-i} \left(\sum_{t=0}^{i-\theta} \binom{N_1+1}{i-\theta-t} \binom{-(N_2+1)}{t} 2^t \right) \binom{-(N_{2r+1}+1)}{k-i} \right) (2r+3)^{N_2-(k+1)}$$

A soma desta segunda integral com a primeira (2.6), nos fornece a fórmula que queríamos. □

2.2.1 Alguns exemplos numéricos

Seja $a(n, r)$ a fórmula do teorema anterior. Então, temos duas sequências a considerar. Uma é aquela que fixa a dimensão e varia as componentes

$$r \mapsto a_n(r)$$

Ela determina o grau de todas as componentes na mesma dimensão n. A outra é aquela que fixa a componente e varia a dimensão

$$n \mapsto a_r(n).$$

Esta, por sua vez, determina o grau da mesma componente em qualquer dimensão.

Em cada tabela abaixo, usamos a primeira sequência com $3 \leq r \leq 7$. Os valores para $r = 2$ e $r = 3$ foram calculados no capítulo anterior. Para a segunda sequência, que é a sequência das tabelas, usamos $2 \leq n \leq 5$. Os números foram obtidos usando o Sistema de Computação Algébrica Maple. Um procedimento pode ser encontrado no apêndice (A).

Grau da componente $\mathcal{R}(2, 2r+1)$ em dimensão $n = 2$

r	Grau da componente $\mathcal{R}(2, 2r+1)$
3	528600
4	4398761
5	25119720
6	110465964
7	400758680

Grau da componente $\mathcal{R}(2, 2r+1)$ em dimensão $n = 3$

r	Grau da componente $\mathcal{R}(2, 2r+1)$
3	19054211679360
4	3910090433878100
5	341010343377134120
6	15911357417132528372
7	461893755644080667024

Grau da componente $\mathcal{R}(2, 2r+1)$ em dimensão $n = 4$

r	Grau da componente $\mathcal{R}(2, 2r+1)$
3	2734930347184142269264030
4	11879699138595607784384337490 0
5	955667356931603707846671060203400
6	2229682965320523559202701378116167220
7	2028377910163668180007196736403300709592

Grau da componente $\mathcal{R}(2, 2r+1)$ em dimensão $n = 5$

r	Grau da componente $\mathcal{R}(2, 2r+1)$
3	49172367717176256441462676880568370568 76
4	483326304613043321167572188067087793943363386896
5	274404318893799440467926078009159597047918410607 1293496
6	1910240088538187181531197677067249910598528513800419228261274
7	267960379151135043895276899726241270775882352458616255450622643736

Apêndice A

Algoritmo para o Cálculo do grau da componente $\mathcal{R}(2, 2r + 1)$

Usamos o sistema de computação algébrica Maple para escrever o algoritmo.

```
 grau2impar := proc (n::integer,d::odd)
  local i, r, t,  N1, N2, Nd, N:
  r:= iquo(d-1, 2):
  N1 := n:
  N2 := binomial(N1+2, N1)-1:
  Nd := binomial(N1+d, N1)-1:
  N := N2+Nd:
 -(r+1)* add(binomial(N2+Nd, Nd+j+1)*(d+2)^(N2-j-1)*
 add((r+1)^i*d^(j-i)*add(binomial(N1+1,i-N2+N1+1-t)*
 binomial(-N2-1,t)*2^t, t = 0..i-N2+N1+1)*
 binomial(-Nd-1,j-i),i =N2-N1-1..j),j=N2-N1-1..N2-1)
 +binomial(N2+Nd, N2);
end  proc:
```

Referências Bibliográficas

[1] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, London (1969).

[2] X-Gomez-Mont, A. Lins Neto, Structural stability of foliations with a meromorphic first integral, Topology 30 (1991), 315-334.

[3] D. Cerveau, A. Lins Neto, *Irreducible components of the space of holomorphic foliations of degree two in* $CP(n)$, $n \geq 3$. Annals of Mathematics (2) 143, 1996, 577-612.

[4] D. Cerveau, A. Lins Neto, S.J. Edixhoven, *Pull-back components of the space of holomorphic foliations on* $CP(n)$, $n \geq 3$. J. Algebraic Geometry, 10, $n°4$, 695-711, 2011.

[5] F. Cukierman, J. V. Pereira and I. Vainsencher, *Stability of Foliations Induced by Rational Maps*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Mathématiques, 18.4 (2009): 685-715. (disponível em `http://w3.impa.br/~jvp/rational.pdf`)

[6] W. Fulton, *Intersection Theory*, 2th edition, Springer-Verlag, New York (1997).

[7] J. Harris, *Algebraic Geometry: A first course*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, 133 (1992).

[8] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York (1977).

[9] E. Kunz, Introduction to Commutative Algebra and AIgebraic Geometry, Birkhäuser, 1985.

[10] J.P. Jouanolou, *Equations de Pfaff algèbriques.* Lecture notes in mathematics, Springer-Verlag, 708, 1979.

[11] P. Le Barz, Y. Hervier, *Enumerative Geometry and Classical Algebraic Geometry.* Progress in Mathematics vol. 24, Birkhauser Boston, 1982.

[12] J. E. Humphreys, *Linear Algebra Groups*, Springer-Verlag, New York (1995).

[13] W. Costa e Silva, *Ramified pull-back components of the space of codimension one foliations*, Tese de doutorado, IMPA: 2013. (disponível em `http://www.impa.br/opencms/pt/ensino/downloads/teses_de_doutorado/teses_2013/Wanderson_Costa_e_Silva.pdf`)