UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Curso de Especialização em Matemática para Professores

A importância do ensino da matemática financeira no ensino médio.

Aluno: Roberto Fernandes Silvestre

Orientador: Luiz Gustavo Farah Dias

Belo Horizonte

2015

Roberto Fernandes Silvestre

A importância do ensino da matemática financeira no Ensino médio.

Monografia apresentada ao programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de matemática da UFMG como parte dos requisitos para a obtenção do título de Especialista em Matemática para Professores do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Luiz Gustavo Farah Dias

Belo Horizonte

2015

Dedico este trabalho a Deus porque Ele permitiu que mais um sonho se tornasse realidade.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por mais esta conquista, também a minha esposa Daniela e aos meus filhos Vinicius e Leonardo pelo apoio, paciência e compreensão; aos meus pais Antônio, Ilza e Luís por entenderem todos os meus momentos de ausência.

Sinceros agradecimentos ao meu orientador Luiz Gustavo pela disponibilidade e presteza. E, ainda, aos professores de matemática Iná e William Stofela.

Aos alunos da E. E. Governador Israel Pinheiro, meu muito obrigado pela gentileza e prontidão a mim dedicadas.

RESUMO

Este trabalho propõe uma reflexão sobre a maneira como a matemática financeira é ensinada nas escolas, com intuito de o aluno fazer uma reflexão financeira para se tornar um consumidor consciente. Essa reflexão se faz necessária visto que tal conteúdo, na maioria das vezes, o assunto é pautado em abordagens que se limitam a conceitos seguidos de exercícios, sem aplicabilidade prática. Além disso, é ministrado, quase sempre, no final do ano letivo de forma rápida e superficial. Isso tem garantido a reprodução de uma relação de ensino/aprendizagem na qual os professores e alunos se encontram desprovidos de habilidades para lidar com a realidade do universo financeiro em suas vidas diárias. Para sustentar a reflexão transcrita, essa pesquisa se efetiva na apresentação de aulas expositivas para uma turma do 3º ano do nível médio da Escola Estadual Governador Israel Pinheiro, visando à apresentação do conteúdo focado na importância da matemática financeira para o cotidiano da sociedade, utilizando exemplos da vida real mostrados em gráficos, tabelas e fórmulas explicativas. As aulas ocorrerão por meio da simulação de juros simples e compostos, das tabelas Price e SAC e fluxo de caixa, trabalhando com conceitos essenciais para a compreensão e aplicação do conteúdo.

Palavras-chaves: Reflexão, matemática financeira, escola, cidadania.

ABSTRACT

This work proposes a reflection on how the financial mathematics is taught in schools, in order to make the students reflection and become conscious consumers. This reflection is necessary since such content, in most cases, is grounded in approaches which bound the concepts followed by exercises without practical applicabilities. Furthermore, it is taught, almost at the end of the studies dead line, quickly and superficially. It has grounded the educational relationship / learning where teachers and students are lacking skills to deal with the reality of the financial market in their daily lives. In order to sustain this the transcribed reflection, this effective research in presenting lectures to a group 3RD year (last grade of high school) of " Escola Estadual Governador Israel Pinheiro", aimed at presentation of the content focused at the importance of the financial mathematics to the everyday society. Exposing examples from a real life shown in graphics, tables and explanatory formulas. The classes are going through simple and compound simulation, from the Prices tables, SAC and cash flow working with the concepts, understanding and application of the content.

Keywords: Reflection, financial mathematics, school, citizenship.

SUMÁRIO

1- INTRODUÇÃO

O principal objetivo da Matemática Financeira é estudar o comportamento do dinheiro ao longo do tempo e a operação principal é a aplicação de um capital ou empréstimo, por ser uma ferramenta essencial para tomada de decisões financeiras de uma empresa e das pessoas. Para essa reflexão, torna-se relevante entender porcentagem, juros simples, juros compostos, tabela Price e tabela SAC, diagramas de fluxo de caixa, entre outros, respeitando a regra básica da Matemática Financeira - o fato de que nunca devemos comparar valores em datas diferentes.

Para reforçar este trabalho serão usadas considerações importantes do professor Morgado[1] sobre como a Matemática Financeira é ensinada nas escolas, no curso de aperfeiçoamento de professores pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) em 2002. Esta realidade é constatada por meio de conteúdos que, na maioria das vezes, são pautados em teorias que se limitam a conceitos seguidos de exercícios e, além disso, são ministradas por professores, quase sempre no final do ano letivo, portanto superficialmente. O que reforça a reprodução de uma relação de ensino/aprendizagem na qual os professores e alunos se encontram desprovidos de habilidades para lidar com a realidade do mundo financeiro em sua vida diária.

O grande objetivo da matemática financeira é fazer com que o cidadão tome decisões entre alternativas de investimentos e não só de cálculos bancários. Enriquecendo a reflexão do professor Morgado, Martins (2004, p.56) diz que

> "A omissão da escola em relação a noções de comércio, de economia, de impostos e de finanças tem uma consequência perversa: a maioria das pessoas, quando adulta, tendem a ignorar esse assunto e segue sem instrução financeira e sem habilidade para manejar dinheiro. As consequências se tornam mais graves se levarmos em conta que ninguém, qualquer que seja a sua profissão, está livre dos problemas ligados ao mundo do dinheiro e dos impostos."

Esta missão tem garantido aos brasileiros um lugar de destaque no que tange estatísticas relacionadas à inadimplência. Não há como possibilitar mudança neste cenário caótico de recorrente endividamento se não conhecer, ainda que de forma sucinta, a matemática financeira e sua aplicabilidade.

---

[1] Disponível em: < http://vimeo.com/37468935>. Acesso em: 11 nov. 2012.

2- A EDUCAÇÃO FINANCEIRA EM ALGUMAS ESCOLAS PÚBLICAS.

Em consonância ao que foi dito anteriormente, é de suma importância introduzir educação financeira nas escolas públicas, já que os alunos serão os novos consumidores. De acordo com Rogério Bastos, diretor da Consultoria de Planejamento Financeiro (FinPlan, Gestão de Patrimônio – Consultoria e Gestão de Investimentos): "Os jovens precisam aprender cedo os conceitos de finanças para se tornarem consumidores mais conscientes no futuro, sendo melhor aprender numa situação de conforto, como na infância, do que com problemas depois na fase adulta." [2]

Percebe-se, através dos discursos de especialistas, que está acontecendo um movimento de implantação, tanto de iniciativa pública quanto privada, da educação financeira. Com essa implantação, a conscientização nas escolas caminha para um processo, em longo prazo, de mudança de comportamento de toda uma sociedade. Dessa forma, o objetivo do ensino da matemática financeira nas escolas é formar acima de tudo cidadãos conscientes e críticos, os quais saibam decidir a melhor maneira de aplicar o seu capital ou tomar um empréstimo.

No entanto, Nascimento (2004) enfatiza que no ensino médio a preocupação deve ser oferecer conteúdos que serão utilizados no cotidiano do aluno. Porém, constata-se uma cisão entre o que se pretende e o que faz, uma vez que o ensino médio continua a oferecer conteúdos voltados para vestibulares e Enem. E conteúdos que muitas vezes não favorecem ao jovem o espaço devido para o desenvolvimento do exercício pleno de sua cidadania, tratando de conhecimentos não aplicáveis ao seu cotidiano.

Nesta mesma perspectiva, Nascimento (2004, p.123) comprova algumas hipóteses da pequena importância dada a Matemática Financeira:

> "[...] constatamos um descompasso entre a opinião dos professores de Matemática, que consideram a Matemática Financeira como um tema importante para a formação dos alunos e o fato de que não a selecionam como um conteúdo a ser trabalhado, com razoável destaque, nas turmas de Ensino Médio. Uma hipótese para compreender essa decisão dos professores pode estar localizada nos programas e prova dos vestibulares, que não priorizam esse tema, mas que, infelizmente acabam orientando o que se ensina nessa etapa dos vestibulares. Há ainda a questão referente à formação dos professores de Matemática que, de modo geral, não têm em sua formação inicial, nos cursos de Licenciatura, estudos sobre o tema nem sobre sua

[2] Disponível em: <http://oglobo.globo.com/economia/educacao-financeira-chega-as-escolas-publicas-num-momento-em-que-jovens-estao-ficando-mais-2971616>. Acesso em: 04 nov. 2011. Atualizado em 15/01/2015.

> possível abordagem.”

Em razão do exposto, dar sentido ao aprendizado é mostrar aos alunos e também professores o quanto o conhecimento aplicado à realidade de cada um pode ser proveitosa e decisiva.

3 – AULAS EXPOSITIVAS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

Como objetivo de introduzir conceitos de matemática financeira foi realizado um trabalho em uma escola da rede estadual utilizando aulas expositivas. A escola definida foi a Escola Estadual Governador Israel Pinheiro, situada na região de Contagem. As aulas foram elaboradas para uma turma do 3º ano do ensino médio, com o auxílio da professora Iná, a qual cedeu três aulas para a ministração do conteúdo sobre matemática financeira.

As aulas expositivas aconteceram em função do posicionamento do professor Morgado (2012). Segundo ele, inexplicavelmente, a matemática financeira não é ensinada no Ensino Médio, tanto é assim que o aluno estuda 11 anos de conteúdos sobre matemática e, ao entrar no ensino superior, não é capaz de decidir racionalmente entre a compra à vista ou a prazo. Ele afirma também que a matemática financeira pode e deve ser ensinada no 1º ou 2º ano do ensino médio, associada à progressão geométrica. De acordo com ele,

> “os juros simples representam um conto de fadas e os juros compostos, a vida real. Além disso, lamentavelmente, o ensino fundamental ensina apenas juros simples, o que não serve como base do ensino da matemática financeira, criando uma ilusão de que o aluno aprendeu cálculos financeiros. A consequência disso é um sujeito que se torna vítima fácil. [3]”

Entretanto, os juros simples é praticado nos sistemas bancários nos acréscimos de contratações de cheque especial inferior ao período de trinta dias. O aprofundamento desse exemplo estará explicitado mais adiante.

Para complementar a análise do Professor Morgado, o professor Marcelo Rigonatto, especialista em estatística e modelagem matemática, conclui que:

> A matemática financeira pode e deve ser introduzida no Ensino Fundamental com os conceitos de porcentagens e desconto, desde que o aluno já tenha conhecimento de frações e números racionais na forma decimal. Nas etapas finais do Ensino Fundamental, as ideias de capitalização simples e compostas já podem ser introduzidas, induzindo os alunos a fazerem comparações com promoções anunciadas pela mídia, verificando se as compras a prazo é mais vantajosa do que à vista.[4]

Neste viés, os capítulos seguintes mostrarão o que foi trabalhado em sala de aula, com objetivo de perceber se os alunos têm conhecimento do mundo financeiro. É relevante dizer que o trabalho de campo aqui exposto, teve como meta apenas mostrar o quanto a matemática

[3] Disponível em: < http://vimeo.com/37468935>. Acesso em: 11 nov. 2012.
[4] Disponível em: < http://educador.brasilescola.com/estrategias-ensino/o-ensino-matematica-financeira-para-formacao-um-cidadao-.htm>. Acesso em: 05 fev. 2014.

financeira é importante para a sociedade e não transformar o aluno em um *expert*[5] em finanças.

No capítulo que se segue foi feita uma pergunta, não muito comum, para os alunos, visando descobrir se tinham conhecimento sobre o que é dinheiro, e para que ele serve. Essa abordagem intencionava esclarecer o conceito de dinheiro, o seu valor no cotidiano da sociedade, assim como o valor dele para o presente e o futuro. Através dessa pergunta, iniciou-se o estudo de campo, o qual aprofundou-se abordando os conceitos e fórmulas que são aplicados no ensino da Matemática Financeira.

3.1 - O que é dinheiro?

De acordo com a economista Rita Mundim[6], comentarista da Rádio Itatiaia e da BandNews, o dinheiro é uma mercadoria muito especial, pois representa o preço das coisas, e a relação de troca entre qualquer outra mercadoria e o serviço produzido numa economia. No Brasil é o real, nos E.U.A é o dólar, em vários países da Europa é o euro, Japão é o yene, dentre outros.

O preço do dinheiro e à taxa de juros (i). Quanto maior a taxa de juros menor a quantidade de dinheiro circulando e quanto menor a taxa de juros maior a quantidade de dinheiro circulando. Logo, a taxa de juros (i) determina o volume de dinheiro que circula na economia.

Para aprimorar o conceito de dinheiro na matemática financeira precisamos entender a evolução do dinheiro e compreender que ele tem um valor diferente no decorrer do tempo. Se os consumidores pudessem ao menos fazer uma comparação entre o valor total a prazo com o preço à vista, teriam pelo menos uma noção de estarem pagando uma quantia maior a prazo, mesmo não possuindo um conhecimento profundo de matemática financeira. O que se percebe em geral é que a maioria dos consumidores não questiona se há taxa de juros embutido nas parcelas, e apenas leva em consideração, se o valor da prestação cabe no seu orçamento mensal.

[5] Palavra inglesa que significa especialista. Adequada ao contexto, especialista em finanças.
[6] Disponível em: http://ritamundim.com.br/gallery/artigo23.pdf >. Acesso em: 23 fev. 2013.

3.2 - Porcentagem

A percentagem ou porcentagem (do latim *per centum*, significado “por cento”, a cada centena) é uma medida de razão com base 100 (cem). É um modo de expressar uma proporção ou uma relação entre 2 (dois) valores (um é a parte e o outro é o inteiro) a partir de uma fração cujo denominador é 100 (cem), ou seja, é dividir um inteiro por 100 (cem). São reconhecidas por razões centesimais e podem ser representadas pelo símbolo “%”, que significa centésimos. Aqui o símbolo “%” é lido como “por cento”, exemplo: 5% lê-se 5 por cento, 34% lê-se 34 por cento. E na forma de razão, 5% = $\frac{5}{100}$ ou 100 . 5% = 5 e na forma decimal 0,05.

Este conceito é muito utilizado no mercado financeiro sendo aplicado em um desconto ou acréscimo, calcular o lucro na venda de alguma mercadoria e medir a taxa de juros. Vejamos três exemplos de aplicação da porcentagem no cotidiano do aluno:

1- Leonardo perdeu 30% das 150 figurinhas da copa do mundo que ele tinha. Quantas figurinhas Leonardo perdeu? E quantas restaram?

$$\frac{150\ x\ 30}{100} = \frac{4500}{100} = 45.$$

Logo, Leonardo perdeu 45 figurinhas e terá, ao final, 105 figurinhas.

2- Daniela comprou um jogo de jantar por R$ 550,00 e a depois de 4 meses, o revendeu por R$ 630, 00. Qual foi a porcentagem de lucro da Daniela?

$$\frac{630 - 550}{550} = \frac{80}{550} = 0{,}1454.$$

0,1454 x 100 = 14,54%

Logo, o lucro que Daniela teve é de 14,54%.

3- Vinícius comprou um computador pelo preço de R$ 1.350,00 reais e passados três anos, ele vendeu o computador por R$ 750,00. De quanto foi à desvalorização do computador?

$$\frac{750 - 1350}{1350} = \frac{-600}{1350} = -0{,}4444$$

0,4444 x 100 = 44,44%

O computador do Vinícius desvalorizou - se 44,44%.

3.3- Juros simples e juros compostos

Define-se como juros (J) o rendimento que se obtém quando se empresta o dinheiro por um período determinado de tempo. Os juros são para o credor (aquele que tem algo para receber) uma compensação pelo tempo que ficará sem utilizar o dinheiro. Uma taxa (i) está baseada em: o risco agregado no investimento (quanto mais arriscado o investimento deve-se exigir taxas de juros proporcionalmente maiores); as expectativas inflacionárias; compensação pela não aplicação do dinheiro em outros investimentos e os custos administrativos envolvidos na operação. Vale ressaltar que a taxa de juros (i) é um dos meios de regulação do desenvolvimento econômico de um país, da estabilidade ou da instabilidade deste crescimento, da inflação, da deflação é uma das causas do desemprego. No Brasil é a Taxa Selic responsável taxa básica de juros da economia brasileira A taxa básica é utilizada como referência para o cálculo das demais taxas de juros cobradas pelo mercado e para definição da política monetária praticada pelo Governo Federal do Brasil.

Se aplicarmos um determinado capital inicial (C) por um certo período de tempo (n), ao final do prazo o capital (C) se transformará em um valor chamado montante (M), que será igual ao valor aplicado, acrescido da remuneração que foi obtida durante o período de aplicação. Agora, teremos a diferença entre o montante final (M) e o capital inicial (C) que é chamada de juro (J). Assim, o juro será $J = M – C$ ou equivalentemente.

$$M = C + J$$

O mercado financeiro trabalha com taxa mensal e anual, mas esta taxa pode ser contada em outras unidades de tempo como dias, bimestres, trimestres, quadrimestres, anos, etc. veja a tabela a seguir:

Tabela 1 – Apresentação da taxa de juro (i), em forma percentual, forma unitária e referência temporal.

Taxa de Juro (i)	**Forma percentual %**	**Forma unitária p/100**	**Referência temporal (n)**
5 por cento ao dia	5,00%	0,05	a.d
35 por cento ao mês	35%	0,35	a.m
42,5 por cento ao bimestre	42,5%	0,425	a.b
70,05 por cento ao semestre	70,05%	0,7005	a.s
20 por cento ao ano	20%	0,2	a.a

Fonte: Word 2007

3.3.1- Regime de juros simples

O regime de juros simples (J_s) ocorre quando o percentual de juros incide apenas sobre o capital inicial (C), isto é, o valor inicial emprestado ou aplicado, antes de somarmos os juros. A aplicação dos juros simples (J_s) é bastante restrita. Alguns exemplos são o pagamento de um cheque especial inferior a trinta dias (estudaremos esse exemplo com mais cuidado posteriormente) e a conta de luz.

Numa aplicação financeira os juros simples (J_s) é a taxa de juros (i) multiplicado pelo capital inicial (C) e multiplicado pelo período de tempo (n):

$$J_s = C.i.n$$

Agora igualando -se as duas fórmulas para obtermos o cálculo dos juros, teremos a seguinte relação para o montante após (n) períodos, que chamaremos de M_n:

$$M_n = C + J_s$$

$$M_n = C + C.i.n$$

$$M_n = C\ (1 + i.n)$$

Assim chegamos a seguinte fórmula: $M_n = C\ (1 + i.n)$. Vejamos um exemplo da aplicação dos juros simples:

Exemplo 1: Jairo aplicou uma quantia de R$ 500,00 pelo prazo de 5 meses à taxa de juros simples de 2% ao mês. Qual o montante final da aplicação?

Solução: Primeiro período de capitalização: 500,00 (1 + 0,02. 1) = 510,00.

Segundo período de capitalização: 500,00 (1 + 0,02. 2) = 520,00.

Terceiro período de capitalização: 500,00 (1+ 0,02. 3) = 530,00.

Quarto período de capitalização: 500,00 (1 + 0,02. 4) = 540,00.

Quinto período de capitalização: 500,00 (1 + 0,02. 5) = 550,00.

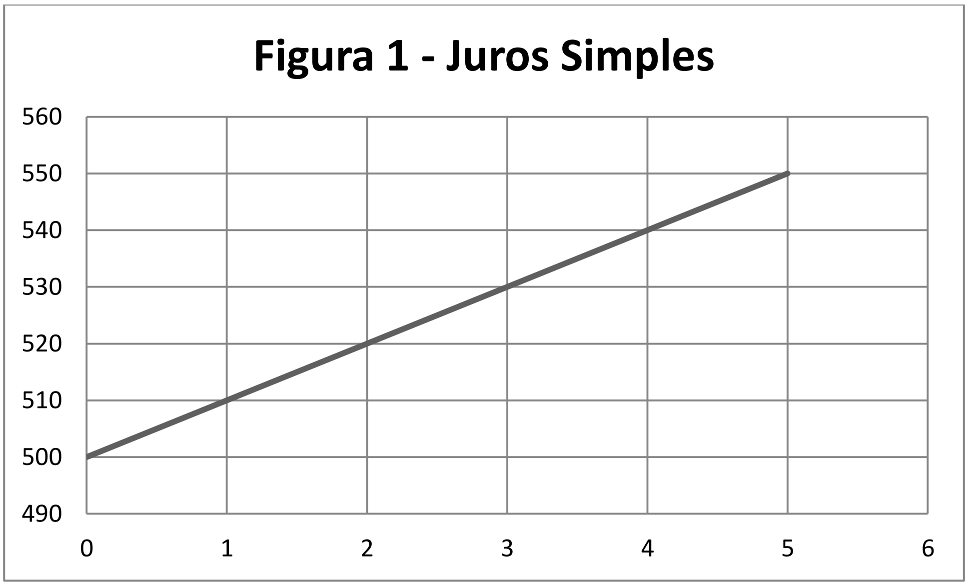
Não é necessário fazer essas operações período por período, basta utilizarmos a relação obtida anteriormente para determinarmos o montante ao final do quinto período de aplicação.

$$M = C\,(1+i.n)$$

$$= 500{,}00\,(1 + 0{,}02.\,5)$$

$$= 550{,}00.$$

Vamos mostrar esses valores encontrados acima no gráfico:



Fonte: Excel 2010.

Como vimos anteriormente que M_n = C (1+i.n), temos que o montante (M_n) é uma função linear do período de aplicação (n).

Segundo o professor Carlos Patrício Samanez (2002, p.3), algumas vezes o período de investimento é somente uma fração do período expresso na taxa de juros (i). Nesses casos, em que as unidades de tempo da taxa de juros (i) e do período de investimento são diferentes, é necessário homogeneizá-las por meio de um ajuste na taxa, isso é o que chamamos de taxas equivalentes. O regime de juros simples o cálculo destas taxas é mais fácil e o comportamento do gráfico é uma função linear.

Vejamos alguns exemplos em que denotamos por i_d a taxa de juros diários, i_m a taxa de juros mensais, e i_a a taxa de juros anual:

a) Se a taxa de juros for mensal e o prazo (n) da aplicação em dias.

$$i_d = \frac{i_m}{30}$$

b) Se a taxa de juros for anual e o prazo (n) da aplicação em meses.

$$i_m = \frac{i_a}{12}$$

c) Se a taxa de juros for anual e o prazo (n) da aplicação for por dia.

$$i_d = \frac{i_a}{360}$$

Vejamos um exemplo de como aplicar estas ideias no regime de juros simples:

Exemplo 1: (AFTN/91) Um capital no valor de 50, aplicado a juros simples a uma taxa de 3,6% ao mês, atinge em 20 dias um montante de:

Neste caso, $i_d = \frac{i_m}{30} = \frac{0{,}036}{30}$, utilizará o M = C (1 + i.n), em que: (M) é o montante procurado, o (C) é o capital aplicado, e (i) que é a taxa, e o (n) é o tempo de aplicação. Assim teremos:

$$M = 50(1 + i_d.20)$$

$$= 50(1 + \frac{0{,}036}{30} . 20)$$

$$= 51{,}20.$$

Outra maneira de realizar o mesmo cálculo seria estabelecer a relação entre o tempo contado em dias e mês. De fato, 20 dias é equivalente a $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ do mês.

$$M = 50\,(1 + 0{,}036.\,\tfrac{2}{3})$$

$$= 51{,}20.$$

M = 51,20, logo o valor do montante (M) pedido no exercício será de R$ 51,20.

No próximo tópico, veremos outro tipo de juro muito utilizado no mercado financeiro que é o juro composto (J_c). Diferentemente do que ocorre no regime de juro simples (J_s), os juros, neste caso, os juros gerados a cada período são incorporados no capital inicial para o calculo dos juros do período anterior. O regime de juros compostos é também conhecido como juros sobre juros.

3.3.2- Juros compostos

3.3.2.1 Juros de capitalização composta.

Em oposição aos juros simples, os juros compostos (J_c) são usados quando a taxa de juros (i) é incidida sobre o capital inicial e sempre acrescida dos juros acumulados do período anterior. É neste sistema ou regime de capitalização o capital varia exponencialmente em função do tempo. Vale ressaltar que o regime de juros compostos (J_c) é o mais utilizado no dia a dia e em operações no mercado financeiro.

Utilizando as seguintes notações já conhecidas: (C) é o capital inicial, (n) representa o número de períodos de capitalização (ano, trimestre, mês, dia, etc.), (i) é a taxa unitária - sempre referente ao período de capitalização, (M_n) representa o montante ao final de (n) períodos.

Montante (M_n) após período (n):

Primeiro período de capitalização: $M_1 = C.(1+i)^1$

Segundo período de capitalização: $M_2 = M_1.(1+i)$

$$= C.(1+i)(1+i)$$

$= C.(1+i)^2$.

Terceiro período de capitalização: $M_3 = M_2. (1+i)$

$= C.(1+i)^2.(1+i)$

$= C.(1+i)^3$.

Enésimo período de capitalização: $M_n = M_{n-1}. (1+i)$

$= C.(1+i)^{n-1}. (1+i)$

$= C.(1+i)^n$.

Portanto, para (n) períodos de capitalização conclui-se o valor do montante em:

$$M_n = C.(1+i)^n$$

Vamos considerar o mesmo exemplo dado anteriormente nos juros simples (J_s), sobre a aplicação do Jairo (exemplo 1, da página 13), agora no regime de juros compostos (J_c). Vejamos:

Jairo vai aplicar a quantia de R$ 500,00 pelo prazo de 5 meses a uma taxa de 2% ao mês a juros compostos.

Solução: Primeiro período de capitalização: $M_1 = C.(1+i)$

$= 500,00. (1+0,02)^1$

$= 510,00.$

Segundo período de capitalização: $M_2 = M_1. (1+i)$

$= 510,00. (1+0,02)$

$= 520,20.$

Terceiro período de capitalização; $M_3 = M_2. (1+i)$

$= 520,20 (1+0,02)$

$= 530,60.$

Quarto período de capitalização: $M_4 = M_3. (1+i)$

$= 530,60\ (1+0,02)$

$= 541,22.$

Quinto período de capitalização: $M_5 = M_4\ .(1 + i)$

$= 541,22.\ (1 + 0,02)$

$= 552,04.$

Ou poderíamos utilizar a fórmula mais rápido na resolução deste problema, veja:

$M = C.(1+i)^n$

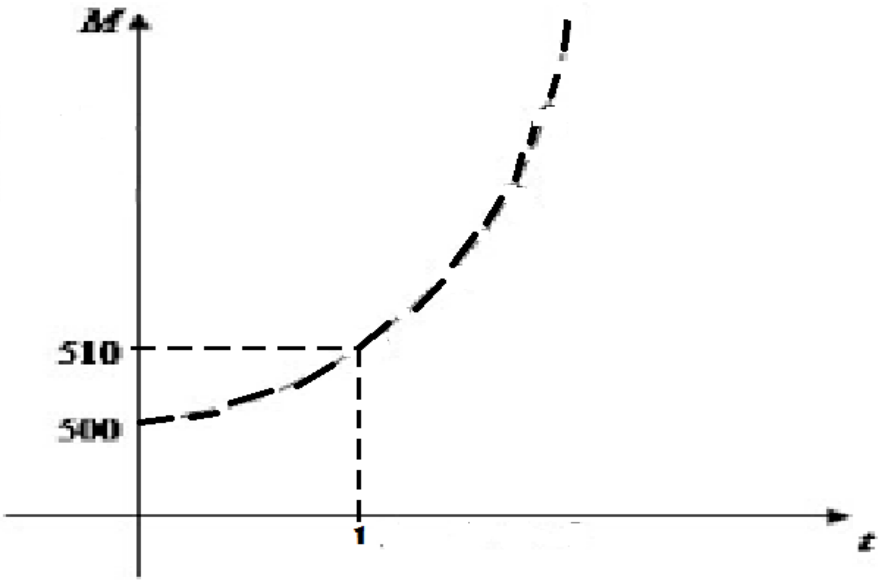
$= 500.(1+0,02)^5$

$= 552,04.$

O exemplo acima deixa bem claro que no sistema de capitalização composta, os juros são sempre calculados com base no saldo do início do período anterior.

Para reforçar, o gráfico abaixo é construído com os valores obtidos no exemplo acima, no qual a reta vermelha representa os juros compostos (J_c).

Figura 2 – Representação de juros compostos.



Fonte: WordPad

O aspecto do gráfico em regime de juros compostos (J_c) terá comportamento de uma função exponencial.

Com efeito, a intenção destas explicações é valorizar o raciocínio do aluno em cada situação. De modo que o conhecimento será, de fato, assimilado e não apenas decorado.

3.3.2.2. Taxas equivalentes

Compreendida a diferença entre juros simples e compostos, as taxas equivalentes estão relacionadas à aplicação ao mesmo capital (C), num mesmo período de tempo (n) produzindo o mesmo montante (M). Logo, duas taxas são equivalentes se quando aplicadas ao mesmo capital produzem o mesmo juros, durante o mesmo período.

Dado um capital (C) aplicado por um ano a uma taxa anual (i_a), o montante (M) no final de um ano é igual a $M_1 = C.(1+i_a)$. Sabemos que o mesmo capital (C) aplicado durante 12 meses a uma taxa mensal (i_m), produzirá um montante $M_{12} = C(1 + i_m)^{12}$. As taxas (i_a) e (i_m) serão equivalentes se no final dos doze meses (1 ano) produzirem o mesmo montante, isto é, $M_1 = M_{12}$. Assim teremos $C(1 +i_a) = C(1 + i_m)^{12}$.

$$C. (1 + i_a) = C.(1 + i_m)^{12}$$

$$(1+ ia) = (1 + i_m)^{12}$$

$$(1+ i_a) = (1 + i_m)^{12}$$

Logo, as taxas serão equivalentes se:

$$i_a = (1 + i_m)^{12} – 1. \text{ Ou equivalente } i_m = (1+ i_a)^{1/12} – 1.$$

Deduziremos agora uma relação geral, onde (q) e (t) são dois prazos diferentes. Neste caso, pela mesma ideia usada anteriormente, as taxas i_q e i_t serão equivalentes se:

$$(1 + i_q)^q = (1 + i_t)^t, \text{ isto é, } i_t = (1 + i_q)^{q/t} – 1.$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Qual a taxa de juros anual equivalente a 2% ao mês?

Sabemos que 2% = 2/100 = 0,02, agora:

$$1 + i_a = (1 + 0,02)^{12}$$

$$1 + i_a = 1{,}2682$$

Portanto, $i_a = 1{,}2682 – 1 = 0{,}2682 = 26{,}82\%$ ao ano.

Exemplo 2: Qual a taxa de juros mensal equivalente a 24% ao ano?

$$(1+ i_a) = (1 + i_m)^{12}$$

$$(1 + 0{,}24) = (1 + i_m)^{12}$$

$$1{,}24 = (1 + i_m)^{12}$$

$$i_m = \sqrt[12]{(1{,}24)} - 1$$

$$i_m = 1{,}01808 – 1$$

$i_m = 0{,}01808$, portanto, $i_m = 1{,}80\%$ ao mês.

Assim no regime de juros compostos (J_c), a taxa de juros (i) de 2% ao mês equivale à taxa anual de 26,82% ao ano e não 24%, como parecem ser para pessoas que não tem o conhecimento mínimo. Da mesma forma, uma taxa de 24% ao ano equivale a uma taxa mensal de 1,80% e não de 2%.

Vejamos mais alguns exemplos, denota-se por (i_a) a taxa de juros anual, (i_s) a taxa de juros semestral, (i_m) a taxa de juros mensais e (i_d) a taxa de juro diário. Dessa forma, as conversões das taxas equivalentes de acordo com o que foi demonstrado:

1 mês = 30 dias, $1 + i_m = (1+ i_d)^{30}$;

1 ano = 12 meses, $1 + i_a = (1 + i_m)^{12}$;

1 ano = 2 semestres, $1 + i_a = (1+ i_s)^2$;

1 semestre = 6 meses, $1 + i_s = (1+i_m)^6$.

Os cálculos para taxas equivalentes também podem ser feitas para períodos arbitrários de tempo, vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Determinar a taxa para 150 dias, equivalente a 65% ao ano.

Primeiramente devemos determinar quantos períodos de 150 dias existem dentro de um ano. Considerando que um ano tem 360 dias, temos então $\frac{360}{150}$ períodos. Assim devemos resolver a equação:

$$(1 + i_{150})^{360/150} = (1 + 0{,}65)$$

$$(1 + i_{150})^{2{,}4} = 1{,}65$$

$$1 + i_{150} = \sqrt[2{,}4]{1{,}65}$$

$$i_{150} = 1{,}232021566 – 1$$

$$i_{150} = 0{,}232021566.$$

i_{150} = 23,20 % para um período de 150 dias.

Ou podemos determinar quantos períodos de 360 dias existem dentro de 150 dias.

$$i_t = (1 + i_q)^{q/t} – 1$$

$$i_{150} = (1+0{,}65)^{150/360} – 1$$

$$i_{150} = (1{,}65)^{150/360} – 1$$

i_{150} = 23,20% para um período de 150 dias.

Exemplo 2: Determinar a taxa para 490 dias, equivalente a 5% ao mês:

Novamente o primeiro passo é determinar quantos meses existem em 490 dias. Temos $\frac{490}{30}$ e consideramos cada mês com 30 dias. Portanto, a equação associada a esse exemplo é:

$$i_{490} = (1+0{,}05)^{490/30} - 1$$

i_{490} = 121,83% para um período de 490 dias.

3.3.2.3 Um exemplo interessante: O Cheque Especial

Conforme mencionado anteriormente, veremos nos juros simples e juros compostos, o cheque especial com prazo inferior a 30 dias é um exemplo de aplicação de juros simples. De acordo com Emannuel Dymas de Andrade Campos, gerente de banco e consultor Financeiro,

> “o popular cheque especial é um produto fornecido pelos bancos, mediante contrato prévio e limite estabelecido entre as partes, onde fica disponível na sua conta um valor que pode ser utilizado a qualquer momento quando a conta de depósitos (em geral conta corrente) não possui saldo suficiente.[7]”

No entanto, podemos nos perguntar por que não são utilizados juros compostos. A resposta é simples: a opção dos juros simples é mais vantajosa para o banco. Para compreender esta afirmação, vamos considerar o seguinte exemplo:. Supondo que o banco tenha juros de 9,0% ao mês no cheque especial e um cliente tenha um limite de R$ 2.000,00 nessa categoria. No dia 07 de março, o cliente utilizou o valor disponível e o pagou no dia 22 de março. Qual valor dos juros cobrados pelo período de 15 dias?

Para saber a taxa diária num regime de juros simples é preciso dividir por 30 dias.

$$\frac{9}{30} = 0{,}3\%\ \text{a.d (ao dia)}.$$

$$J = c.i.n$$

$$J = 2.000 \times 0{,}003 \times 15 = 90$$

$$J = 90{,}00.$$

Vejamos como ficaria essa mesma dívida usando juros compostos:

Primeiramente a taxa equivalente será dada por:

$$(1 + i_{15})^{30/15} = (1 + i_m)$$

$$(1 + i_{15})^{30/15} = (1 + 0{,}09)$$

$$i_{15} = (1+0{,}09)^{15/30} - 1$$

$$i_{15} = 0{,}04403065$$

$$M = C.(1 + i_{15})$$

$$M = 2.000.(1{,}04403065)$$

$$M = 2.088{,}06.$$

$$J = M - C$$

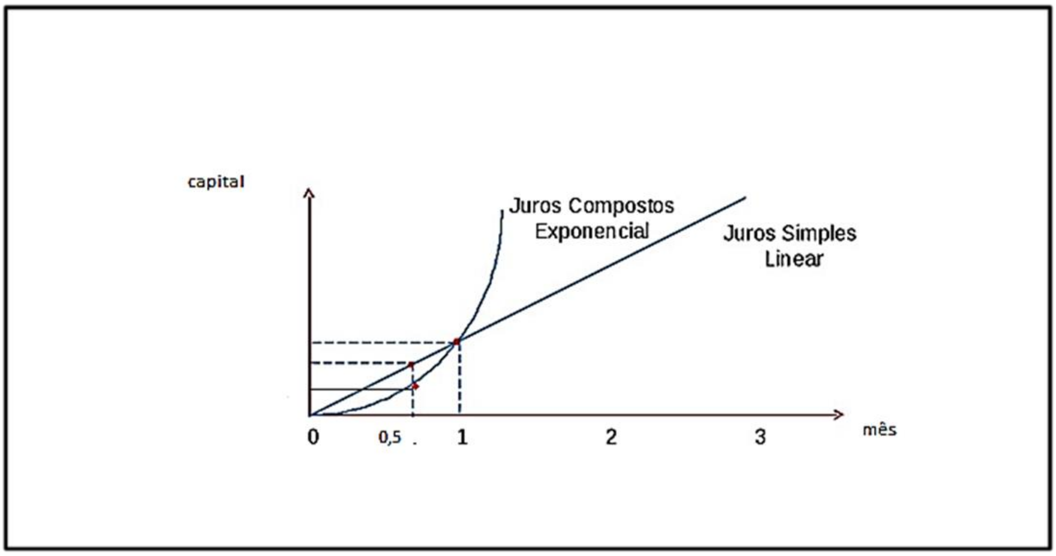
$$J = 2.088{,}06 - 2.000{,}00$$

[7] Disponível em: <http://www.parlamentopb.com.br/artigo.php?id=802>. Acesso em:15/01/2015.

J = 88,06.

De acordo com os cálculos acima, os juros simples são superiores aos juros compostos no período inferior a trinta dias. Esta assertiva denota a importância de se avaliar cada caso, e não apenas definir que os juros compostos são os mais onerosos. Através de um gráfico é possível ratificar a leitura dessa realidade.

Figura 3 – Gráfico comparativo do cheque especial com juros simples e compostos



Fonte: WordPad

Percebe-se novamente que no período inferior a trinta dias, o valor dos juros simples é maior do que nos juros compostos.

O fato é que os juros do cheque especial são muitos elevados. Na tentativa de persuadir o cliente, há bancos que oferecem dez dias sem juros todos os meses. Se este prazo ocorreu algum imprevisto é bom contar com esta concessão, mas se não cobrir o valor dentro dos dez dias, custará caro ao cliente cobrir o saldo devedor. De acordo com Márcia Dessen, a desvantagem está no fato do cliente pagar juros retroativos sobre todo o período e não apenas sobre o único dia ou dias que ultrapassou o prazo. E aconselha: “controle seu fluxo de caixa cuidadosamente. Mantenha entradas e saídas de recursos anotadas como um verdadeiro quebra-cabeças num jogo estratégico que pode representar boa economia de dinheiro todos os meses."[8]

Diante de tudo que foi dito é importante conhecer o seu banco e como ele calcula o cheque especial. Este conhecimento servirá para evitar perdas desnecessárias com o pagamento de juros e melhorar o acompanhamento do orçamento, além de mais segurança nas escolhas financeiras.

[8] Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br/fsp/mercado/60499-o-onus-e-o-bonus-do-cheque-especial-que-da-dez-dias-sem-juros.shtm>. Acesso 11 ago. 2014. Atualizado 15/01/2015.

4- FLUXO DE CAIXA

O fluxo de caixa é uma ferramenta usada para informar a uma pessoa física ou jurídica sobre a situação da movimentação da vida financeira pertinentes aos pagamentos, recebimentos e ao saldo. Tais premissas são suficientes para formar cidadãos conscientes capazes de decidir a melhor forma de pagamento entre duas ou mais opções apresentadas.

Uma representação gráfica de um fluxo de caixa vai depender muito do ponto de vista de quem empresta ou de quem vai aplicar. Considere, por exemplo, as seguintes tabelas de pagamentos e recebimentos.

Tabela 2 – Recebimentos previstos

Dia	Valor (R$)
02	350,00
10	2000,00
15	125,00
25	562,00

Fonte: Word 2007

Tabela 3 – Pagamentos previstos

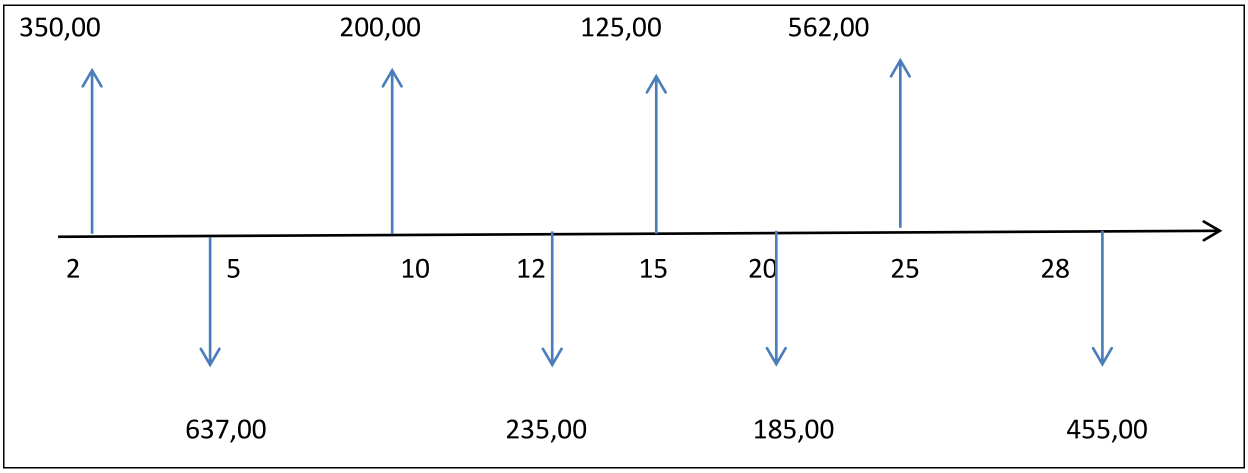
Dia	Valor (R$)
05	637,00
12	235,00
20	185,00
28	455,00

Fonte: Word 2007

Como outra alternativa para ilustrar esses dados, foi formulado um gráfico utilizando setas, objetivando mostrar a movimentação de entrada e saída. No livro Matemática Financeira, José Dutra Sobrinho (1997, p.65) explica o sentido das setas. Veja:

> "No eixo horizontal é representado o tempo, subdividido em períodos unitários (dia, mês, trimestre, ano, etc.), orientados da esquerda para a direita, de tal forma que todos os pontos são considerados como momentos futuro em relação ao ponto "zero". Os recebimentos (entradas de caixa) são representados no eixo horizontal, indicados por setas orientadas para cima; os pagamentos (saídas de caixa) são representados na parte inferior do eixo, indicados por setas orientadas para baixo"

Figura 4 - Representação gráfica dessa tabela.



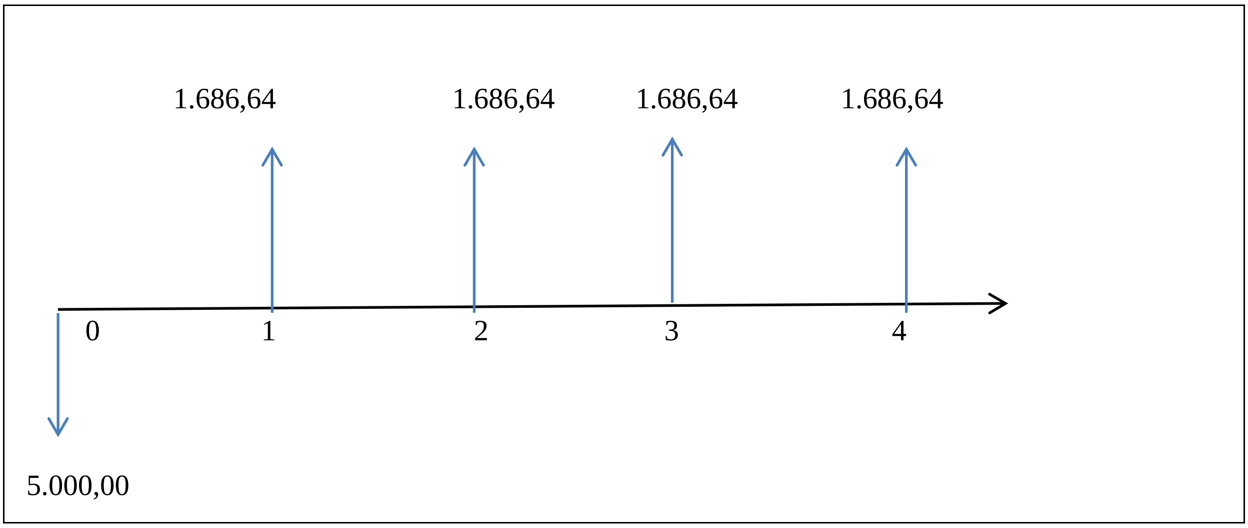
Fonte: Word 2007.

Analisando um problema envolvendo uma aplicação financeira usando o fluxo de caixa graficamente:

Exemplo 1: Vinícius fez um empréstimo de R$ 5.000,00 e vai pagar ao banco em 4 prestações iguais de R$ 1.686,64.

Como Vinícius tomou emprestado junto ao banco, pode-se fazer duas representações; uma em relação ao ponto de vista do banco e o outro em relação ao ponto de vista do Vinícius. O gráfico abaixo é do ponto de vista do banco, saiu do caixa um valor de R$ 5.000,00 e vai entrar mensalmente 4 pagamentos iguais de R$ 1.686,64.

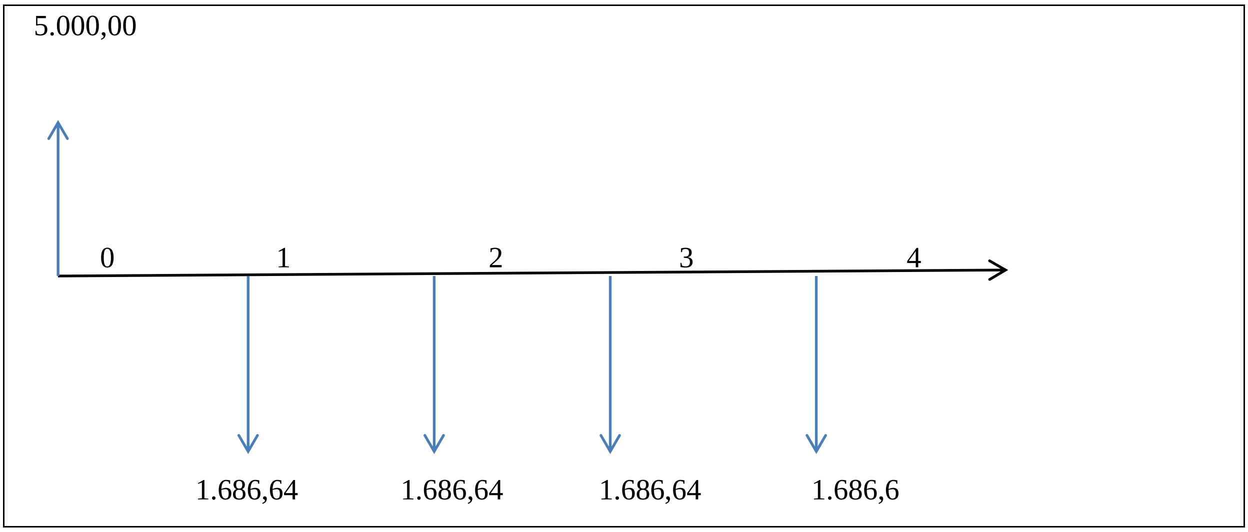
Figura 5 – Entradas e saídas



Fonte: Word 2007.

Já na visão do Vinícius, a orientação das setas é feita ao contrário, indicando uma entrada de R$ 5.000,00 e 4 saídas iguais de R$ 1.686,64.

Figura 6 – Saída e entrada



Fonte: Word 2007

4.1 – Equivalência de Capitais

O conceito de equivalência permite transformar um formar de pagamentos em outras equivalente e, consequentemente, efetuarmos comparações entre datas diferentes. Se vários capitais são equivalentes numa dada época, continuarão sendo qualquer outra data à mesma taxa de desconto. Em outras palavras, consiste em trazer todos os capitais futuros para uma mesma data de referência, porque não devemos somar parcelas em período diferentes de tempo.

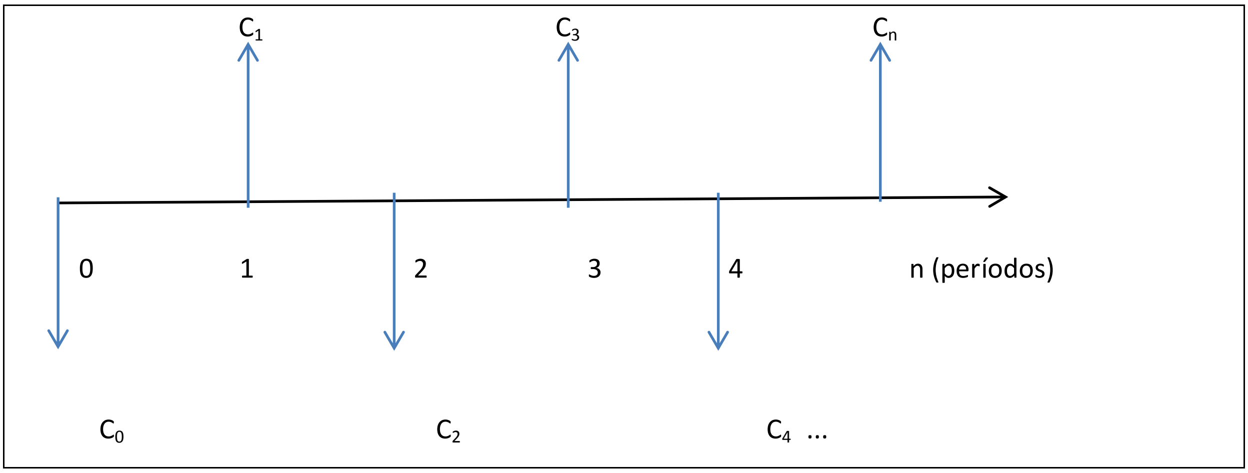
Consideremos dois capitais M e V, separados por n períodos de tempo, o primeiro na data 0 e o segundo na data n:

$$M\,(1+i)^n = V \text{ ou } M = \frac{V}{(1+i)^n}$$

Isto é, M equivale a V se, ao aplicarmos M até a data (n), o montante obtido for igual a V.

Consideremos os capitais, C_0, C_1, C_2, ..., C_n. Chamaremos o valor presente de todo esse conjunto, a uma taxa (i), a soma dos valores equivalentes destes capitais na data inicial.

Figura 7 – Entradas e saídas de caixa



Fonte: Word 2007

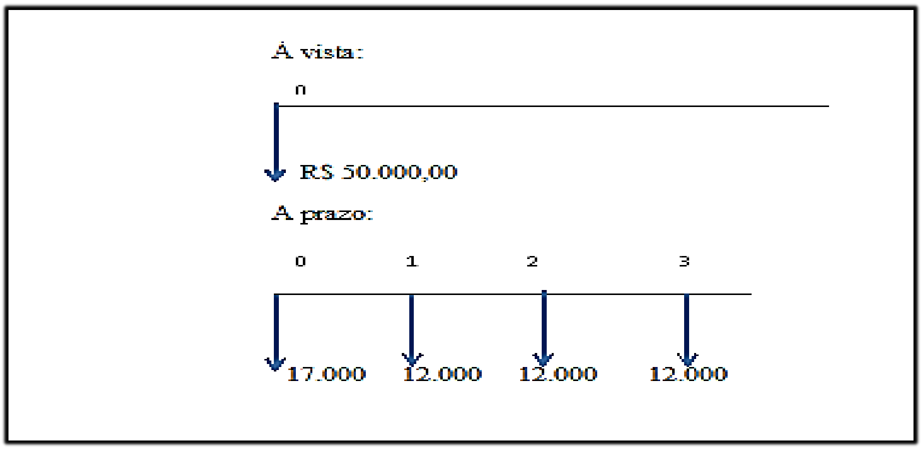
Logo, o valor presente do fluxo de caixa acima será dado por:

$$M = C_0 + \frac{C_1}{(1+i)^1} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \frac{C_3}{(1+i)^3} + \frac{C_4}{(1+i)^4} + \cdots \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

Por meio de exemplos, será mostrada a utilização do fluxo de caixa para a decisão do comprador em comprar à vista ou a prazo.

Exemplo 1: Certo equipamento é vendido à vista por \$ 50.000,00 ou a prazo, com entrada de \$ 17.000,00 mais três prestações mensais iguais a \$ 12.000,00 cada uma, vencendo a primeira um mês após a entrada. Qual a melhor alternativa para o comprador, se a taxa de juros é de 5% ao mês?

Figura 8 – Fluxo de caixa



Fonte: Word 2007.

Trazendo a série de pagamentos até a data focal zero temos:

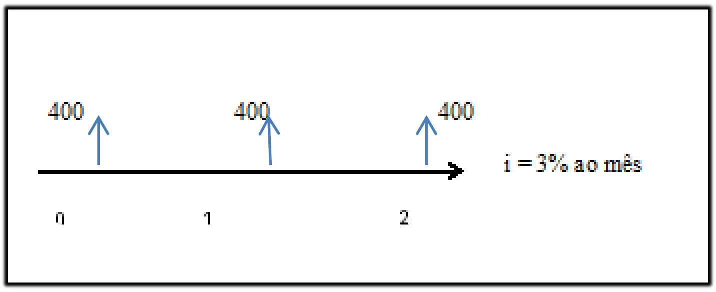
$$M = 17.000 + \frac{12.000}{1{,}05^1} + \frac{12.000}{1{,}05^2} + \frac{12.000}{1{,}05^3}$$

$$M = 49.678{,}97.$$

Percebe-se que o valor total do pagamento a prazo é menor do que à vista, então a melhor alternativa para o cliente é comprar a prazo.

Exemplo 2: Uma loja vende determinado tipo de televisor nas seguintes condições R$ 400,00 de entrada, mais duas parcelas mensais de R$ 400,00, no final de 30 e 60 dias, respectivamente. Supondo uma taxa de juros mensal de 3%. Qual deveria ser o menor preço oferecido pelo vendedor, onde é mais vantajoso comprar à vista?

Figura 9 – Saídas de capital



Fonte: Word 2007.

$$M = 400 + \frac{400}{1{,}03^1} + \frac{400}{1{,}03^2}$$

$$M = 400 + 388{,}35 + 377{,}03$$

$$M = 1.165{,}38.$$

Percebendo que o valor a prazo é R$ 1165,38, há uma referência para saber se essa opção é a melhor escolha. Caso o vendedor ofereça preço à vista menor do que este valor, torna-se vantajoso comprar à vista. Mediante a falta de negociação ou não recebimento de desconto à vista, a opção a prazo é a mais pertinente.

Para algumas pessoas é uma ótima opção parcelar, com intuito de ganhar prazo e trabalhar com esse dinheiro, desde que haja um mínimo de organização de planejamento financeiro. Porém, se não houver a devida programação de investimento com o valor que deixou de ser pago à vista, é importante não fazer parcelamentos longos, a fim de evitar comprometer.

A fim de aprofundar os conhecimentos, no próximo capítulo iremos tratar dos sistemas de amortizações - processo em que o credor quita seu empréstimo em pagamentos periódicos (prestações) de modo a liquidar o saldo devedor, compreendendo a devolução do capital emprestado.

Considera-se muito importante mostrar aos alunos como funcionam esses dois tipos de pagamentos usuais no cenário nacional, propiciando conhecer o funcionamento dos cálculos de juros, amortização, pagamentos e saldo devedor.

5- SISTEMAS DE FINANCIAMENTOS: TABELA PRICE E TABELA SAC

O objetivo do capítulo é comparar dois financiamentos diferentes, utilizando a tabela Price e a tabela SAC. A fim de compreender a sistemática dos dois sistemas de amortização, é de grande relevância ampliar os conhecimentos acerca de conceitos muito úteis, como saldo devedor inicial e atual, juros, prestação e amortização.

Um conceito essencial é o de juros, que é a remuneração pelo empréstimo do capital.. Em uma situação de compra efetiva a taxa será fixa, logo não há variação do percentual. A definição desta taxa interferirá no próximo conceito, o de saldo devedor.

O saldo devedor (SD) é o valor da dívida em determinado momento. No ato da contratação, há o saldo devedor inicial (SD_0) o qual representa o valor do empréstimo. De acordo com o prazo contratado, é possível saber o saldo devedor atual (SD_n) que corresponde ao valor em alguma etapa do prazo contratado. À medida que vai sendo feito o pagamento, diminui-se o saldo devedor com a amortização até quitar a dívida. A dívida será liquidada por meio de pagamentos, os quais chamamos de prestações.

A prestação é o valor de cada uma das parcelas mensais, pagas periodicamente. Sua composição é feita de duas partes, o valor da amortização (A) somados aos encargos financeiros, que são os juros (J). A amortização refere-se exclusivamente ao pagamento do capital (C) emprestado. Sendo assim, ao pagar uma das prestações, a dívida não diminui no mesmo valor pago, pois parte da parcela abate o valor contratado e a outra parte abate o juro contratado. Em síntese, a amortização é o valor que o saldo devedor diminui depois de cada prestação ser paga.

Em consonância ao que foi dito, observemos as relações: a primeira relação é a taxa de juros que incide sobre o saldo devedor, a segunda relação é que as prestações são compostas por juros mais amortização e a terceira relação é que a cada mês o valor da amortização é descontadoto saldo devedor. A partir desse entendimento, fica acessível iniciar o estudo sobre as tabelas Price e SAC.

5.1 - Price

O nome da tabela Price – Sistema de amortização francês homenageia o economista inglês Richard Price, que incorporou a teoria dos juros compostos às amortizações de empréstimos. De acordo com Carlos Patrício Samanez (2002, p.208),

> “[...] A denominação sistema de amortização francês vem do fato de ser utilizado primeiramente na França no século XIX. Esse sistema se caracteriza por pagamentos do principal em prestações periódicas iguais. É o mais utilizado pelas instituições financeiras e pelo comércio em geral. Como os juros incidem sobre o saldo devedor que, por sua vez, decrescesse à medida que as prestações são pagas, eles são decrescentes e, consequentemente, as amortizações do principal são crescentes.”

Na matemática financeira, esta tabela é base para diversos financiamentos, passando despercebida nas compras do cotidiano porque muitas vezes, nem o vendedor e nem o consumidor conhecem o sistema. Ele é aplicado nas operações de CDC (Crédito direto ao consumidor), nas operações de *leasing*[9] e nos crediários das grandes lojas, por ser financiamento pessoal concedido para aquisição de bens e serviços, geralmente eletrodomésticos e veículos.

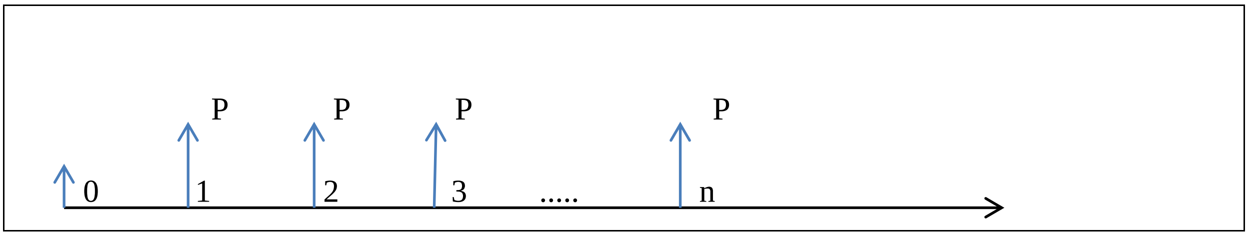
Sabendo que as prestações são fixas, a dívida diminui à medida que as prestações vão sendo pagas. Cada prestação é constante e contém duas parcelas: juros (J) calculados sobre o último saldo devedor (SD) e amortização (A) calculada pela subtração da parcela e os juros.

Diante do exposto, segue a demonstração de como calcular a prestação (P) usando esse tipo de tabela. Onde:

SD = saldo devedor; i = taxa de juros; P = prestação e n = prazo.

[9] O *leasing* é um contrato denominado na legislação brasileira como “arrendamento mercantil”. As partes desse contrato são denominadas “arrendador” e “arrendatário”, conforme sejam, de um lado, um banco ou sociedade de arrendamento mercantil e, de outro, o cliente. O objeto do contrato é a aquisição, por parte do arrendador, de bem escolhido pelo arrendatário para sua utilização. O arrendador é, portanto, o proprietário do bem, sendo que a posse e o usufruto, durante a vigência do contrato, são do arrendatário. O contrato de arrendamento mercantil pode prever ou não a opção de compra, pelo arrendatário, do bem de propriedade do arrendador. Disponível em: <http://www.bcb.gov.br/?LEASINGFAQ>. Acesso em: 06 Jan. 2015.

Figura 10 - Prestação



Fonte: Word 2007

$$SD = \frac{P}{(1+i)^1} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+i\,)^n}$$

Agora colocamos o P em evidência , e temos:

$$SD = P.\left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{SD}}{\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} (1+\mathrm{i})^{-\mathrm{j}}} \quad \text{(I)}$$

Para isso precisamos calcular a seguinte soma

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^j} = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}$$

Seja, (1 + i) = u, dessa forma:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^i} = \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^3} + \ldots + \frac{1}{u^n},$$

Nota que se trata de uma P.G de razão $\frac{1}{u}$. Calcular essa forma é muito simples, denote:

$$S = \frac{1}{u} + \frac{1}{(u)^2} + \frac{1}{(u)^3} + \cdots + \frac{1}{(u)^{n-1}} + \frac{1}{(u)^n}$$

Multiplicando por u a expressão acima temos:

$$\mathrm{u}.S = 1 + \frac{1}{(u)} + \cdots + \frac{1}{(u)^{n-2}} + \frac{1}{(u)^{n-1}}$$

Subtraindo as duas igualdades obtemos,

$$\mathrm{u}.S - S = 1 - \frac{1}{(u)^n}$$

Finalmente,

$$(u-1)S = 1 - \frac{1}{(u)^n}$$

$$S = \frac{u^n - 1}{u^n(\,u-1)}$$

Substituindo na relação (I) concluímos:

$$P = SD\ \frac{u^n(\,u-1)}{u^n - 1}$$

$$\mathrm{P} = \mathrm{SD}\frac{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}}.1}{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}} - 1}$$

Então, a prestação da tabela Price será calculada através de:

$$\mathrm{P} = \ \mathrm{SD}.\frac{(\,1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}}.\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}}\ -\ 1}$$

Na sequência segue um exemplo mais detalhado mostrando uma tabela com o valor das prestações (P), a amortização (A) e o saldo devedor (SD) de cada período (n).

Exemplo: Um financiamento no valor de R$ 24.000,00 foi contratado a uma taxa de juros de 1% ao mês, vencendo a primeira no prazo de 30 dias, com uma duração de quinze meses. Calcule o valor da prestação e construa uma planilha.

Vamos substituir os valores na fórmula deduzida, onde o saldo devedor (SD) é R$ 24.000,00, a taxa (i) é 1% ao mês e o prazo de (n) é 15 meses.

$$\mathrm{P} = \ \mathrm{SD}.\frac{(\,1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}}.\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}}\ -\ 1}$$

$$\mathrm{P} = \ 24.000.\frac{(\,1+0{,}01)^{15}.\,0{,}01}{(1+0{,}01)^{15} -\ 1}$$

P = 1.730,97.

Depois de calculado o valor da prestação, vamos calcular os juros da tabela Price, onde os juros são dados pelo produto da taxa com o saldo devedor, onde (n) é o período. Vejamos o saldo devedor (SD)

$$J_n = i.\ SD_{(0)}$$

Para calcular a amortização é necessário ter calculado a prestação e os juros. O cálculo da amortização será a diferença entre a prestação com o juro.

$$A = P - J$$

Por fim o saldo devedor (SD) é o que falta do capital para ser pago. Logo, o saldo devedor será o saldo anterior (SD), menos a amortização (A).

$$SD_1 = SD_0 - A$$

Vamos fazer o cálculo do valor do saldo devedor da primeira prestação:

O valor dos juros no primeiro mês será o saldo devedor (SD_0), que é de R$ 24.000,00, vezes a taxa de juros (i), que é de 1% ao mês, teremos o valor dos juros na 1ª parcela. Assim:

$$J_1 = i.SD_0$$

$$J_1 = 0{,}01.(24.000)$$

$$J_1 = 240{,}00$$

Para calcular o valor da amortização na primeira prestação, utilizaremos uma expressão geral, que é: Prestação = Amortização + Juros. Como intencionamos saber o valor da amortização, será:

$$A_1 = P - J$$

$$A_1 = 1.730{,}97 – 240$$

$$A_1 = 1.490{,}97.$$

E o cálculo do saldo devedor depois da 1ª prestação será dado pela diferença entre o saldo devedor inicial (SD_0) e o valor da amortização na 1ª prestação. Como o saldo devedor no início era de R$ 24.000,00, a amortização na 1ª prestação foi de R$ 1.490,97, o novo saldo devedor SD_1 será dado por:

$$SD_1 = SD_0 – A_1$$

$$SD_1 = 24.000,00 – 1.490,97$$

$$SD_1 = 22.509,03.$$

Veja a seguinte tabela em relação aos cálculos acima:

Tabela 4 – Saldo devedor no 1º período.

Mês	Amortização	Saldo devedor	Juros	Valor da prestação
0		24.000,00		
1	1.490,97	22.509,03	240,00	1.730,97

Fonte: Word 2007

Para encontrar o saldo devedor do 2º período, calculamos o valor dos juros que está embutido na 2ª prestação, aplicando a taxa de juros (i) fornecida sobre o saldo devedor do empréstimo no início do período que se está pagando hoje. Os juros do 2º período serão calculados sobre o saldo devedor anterior no início do período 1. O saldo devedor no início do 1º período (R$ 22.509,03), a taxa de juros de 1% ao mês, e teremos o valor do juro do 2º período:

$$J_2 = i.SD_1$$

$$J_2 = 0,01.(22.509,03)$$

$$J_2 = 225,09.$$

Logo, a expressão geral é: Prestação = Amortização + Juros:

$$A_2 = P – J_2$$

$$A_2 = 1.730,97 – 225,09$$

$$A_2 = 1.505,88.$$

Feito isso, obteremos o novo saldo devedor (SD_2) depois do 2º período, que será dado pela diferença entre o saldo devedor anterior (SD_1) e o valor da amortização dessa etapa.

$$SD_2 = SD_1 – A_2$$

$$SD_2 = 22.509,03 – 1504,88$$

$$SD_2 = 21.003,15.$$

Segue novamente a tabela, com o saldo devedor de acordo com cada período:

Tabela 5 – Saldo devedor do 2º período.

Mês	Amortização	Saldo devedor	Juros	Valor da prestação
0		24.000,00		
1	1.490,97	22.509,03	240,00	1.730,97
2	1.505,08	21.003,15	225,09	1.730,97

Fonte: Word 2007.

Utilizando a mesma sistemática para preencher a tabela, teremos:

$$J_3 = iSD_2 = 0,01.(21.003,15) = 210,03$$

$$A_3 = P – J_3 = 1.730,97 – 210,03 = 1.505,88$$

$$SD_3 = SD_2 – A_2 = 21.003,15 – 1.505,88 = 19.482,21$$

$$J_4 = iSD_3 = 0,01.(19.482,21) = 194,82$$

$$A_4 = P – J_4 = 1.730,97 – 194,82 = 1.520,94$$

$$SD_4 = SD_3 – A_4 = 19.482,21 - 1.520,94 = 17.946,06$$

$$J_5 = iSD_4 = 0,01. (17.946,06) = 179,46$$

$$A_5 = P – J_5 = 1.730,97 – 179,46 = 1.551,51$$

$$SD_5 = SD_4 – A_5 = 17.946,06 – 1.551,51 = 16.394,55.$$

Podemos seguir esse método sistematizado até chegarmos ao 15º período. Vejamos os resultados obtidos acima numa planilha de amortização:

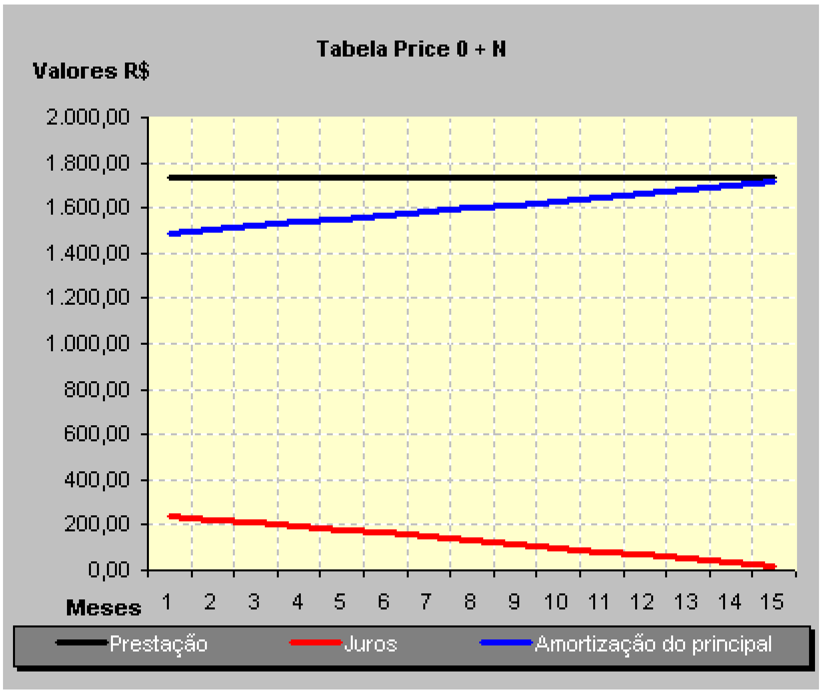
Tabela 6 – Price.

Mês	Amortização	Saldo devedor	Juros	Valor da prestação
0		24.000,00		
1	1.490,97	22.509,03	240,00	1.730,97
2	1.505,88	21.003,15	225,09	1.730,97
3	1.520,94	19.482,21	210,03	1.730,97
4	1.536,15	17.946,06	194,82	1.730,97
5	1.551,51	16.394,55	179,46	1.730,97
6	1.567,03	14.827,53	163,95	1.730,97
7	1.582,70	13.244,83	148,28	1.730,97
8	1.598,52	11.646,31	132,45	1.730,97
9	1.614,51	10.031,80	116,46	1.730,97
10	1.630,65	8.401,15	100,32	1.730,97
11	1.646,96	6.754,19	84,01	1.730,97
12	1.663,43	5.090,76	67,54	1.730,97
13	1.680,06	3.410,70	50,91	1.730,97
14	1.696,86	1.713,83	34,11	1.730,97
15	1.713,83	0,00	17,14	1.730,97
Total	**24.000,00**		**1.964,57**	**25.964,55**

Fonte: Word 2007

Segue o gráfico e a análise do resultado da planilha.

Figura 11 – Tabela Price.



Fonte: Tabela Price – Clube dos Poupadores[10]

Nota-se que o valor dos juros (J) cai mensalmente, representado pelo traço vermelho. Esta queda ocorre porque o saldo devedor (SD) diminui com a amortização (A) toda vez que a prestação (P) é paga. Os juros (J) serão cobrados sempre sobre o saldo devedor (SD) - o valor da dívida que ainda tem que ser paga. Observe que as amortizações vão crescendo com o passar do tempo, representadas pelo traço azul, sendo assim paga-se mais juros no início do financiamento. Já as prestações (P) serão sempre constantes, representadas pela linha preta.

5.2- SAC (Sistema de Amortização Constante)

O sistema de Amortização Constante, como o próprio nome indica, tem como característica principal as amortizações do saldo devedor (SD) serem constante em todo o período (n) do pagamento. O valor da amortização é facilmente obtido mediante a divisão do saldo devedor (SD) pelo número de prestações (P). O juro é incidido em cima do saldo devedor (SD), cujo montante decresce após o pagamento de cada amortização (A). A

[10] Disponível em: <http://www.clubedospoupadores.com/financiamentos/tabela-price-sistema-de-amortizacao-frances-saf.html>. Acesso em: 05/01/2015

consequência do comportamento da amortização e dos juros, as prestações periódicas e sucessivas deste sistema são decrescentes em progressão aritméticas. Onde teremos:

$$A = \frac{SD}{n}\,,\ \ Amortização = \frac{saldo\ devedor}{número\ de\ prestações}$$

O sistema de amortização constante é utilizado principalmente em repasses do governo, notadamente Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social (BNDES), e em financiamentos imobiliários (Sistema Financeiro de Habitação).

Compreendendo estes conceitos, cria-se a planilha com os seguintes dados:

Cálculo do valor da prestação (P) será sempre composta por dois valores, juros (J) e amortização (A), ou seja, é a soma das parcelas de amortização com os juros.

$$P = A + J$$

A parcela dos juros (J) no final de cada período (n) é igual ao produto da taxa (i) pela dívida no início do período (SD_0), isto é, no final do período anterior.

$$J = i.SD_{(0)}$$

O novo saldo devedor (SD_1) será o saldo (SD_0) anterior subtraindo a amortização.

$$SD_1 = SD_0 - A$$

Exemplo 1: um financiamento no valor de R$ 24.000,00 foi contratado a uma taxa de juros de 1% ao mês, vencendo a primeira num prazo de 30 dias, com uma duração de 15 meses, utilizando a tabela SAC. Calcule o valor da amortização e construa uma planilha.

Primeiramente devemos calcular o valor da amortização (A), que será constante durante todo o período.

$$A = \frac{24.000}{15} = 1.600{,}00.$$

Ao término do 1ª mês deve-se pagar primeira prestação, em duas partes: R$ 1.600,00 de amortização adicionados os juros na primeira prestação que será:

$$J_1 = iSD_0 = 0{,}01.24.000 = 240{,}00.$$

Para o cálculo da 1ª prestação P_1, teremos:

$$P_1 = A + J_1 = 1.600,00 + 240,00 = 1.840,00.$$

Logo o novo saldo devedor no final do 1º pagamento será:

$$SD_1 = SD_0 - A = 24.000,00 – 1.600,00 = 22.400,00$$

Vamos encontrar o valor da 2ª prestação a ser paga:

$$P_2 = A + J_2 = 1.600,00 + (0,01).(22.400,00) =1.824,00$$

O novo saldo devedor (SD_2) será:

$$SD_2 = SD_1 – A = 22.480,00 – 1.600,00 = 20.800,00$$

Vejamos a tabela depois do primeiro e o segundo pagamento:

Tabela 7 – Saldo devedor 1º e 2º período.

Mês	**Amortização**	**Saldo devedor**	**Juros**	**Valor da prestação**
0		24.000,00		
1	1.600,00	22.400,00	240,00	1.840,00
2	1.600,00	20.800,00	224,00	1.824,00

Fonte: Word 2007.

Calculamos agora as terceiras e quartas prestações, seguindo a mesma sistemática apresentada acima:

Encontraremos o valor da 3ª prestação a ser paga:

$$J_3 = iSD_2 = 0,01.(20.800,00) = 208,00.$$

$$P_3 = A + J_3 = 1.600,00 + 208,00 = 1.808,00$$

O novo saldo devedor (SD_3) será:

$$SD_3 = SD_2 – A = 20.800,00 – 1.600,00 = 19.200,00$$

Calculamos agora a 4ª prestação:

$$J_4 = iSD_3 =0,01.(19.200,00) = 192,00.$$

$$P_4 = A + J_4 = 1.600,00 + 192,00 = 1.792,00.$$

O novo saldo devedor (SD_4) será:

$$SD_4 = SD_3 - A = 19.200,00 - 1.600,00 = 17.600,00.$$

Com esse roteiro sistematizado será fácil completar a planilha de amortização. Segue tabela SAC de acordo com que foi mostrado anteriormente:

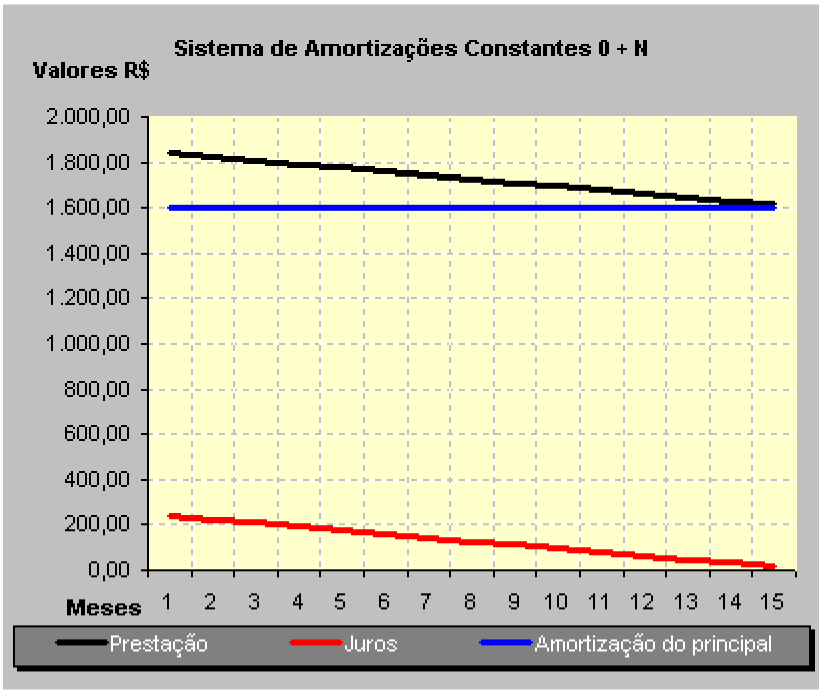
Tabela 8 - SAC

Mês	**Amortização**	**Saldo Devedor**	**Juros**	**Valor da prestação**
0		24.000,00		
1	1.600,00	22.400,00	240,00	1.840,00
2	1.600,00	20.800,00	224,00	1.824,00
3	1.600,00	19.200,00	208,00	1.808,00
4	1.600,00	17.600,00	192,00	1.792,00
5	1.600,00	16.000,00	176,00	1.776,00
6	1.600,00	14.400,00	160,00	1.760,00
7	1.600,00	12.800,00	144,00	1.744,00
8	1.600,00	11.200,00	128,00	1.728,00
9	1.600,00	9.600,00	112,00	1.712,00
10	1.600,00	8.000,00	96,00	1.696,00
11	1.600,00	6.400,00	80,00	1.680,00
12	1.600,00	4.800,00	64,00	1.664,00
13	1.600,00	3.200,00	48,00	1.648,00
14	1.600,00	1.600,00	32,00	1.632,00
15	1.600,00	0,00	16,00	1.616,00
Total	**24.000,00**		**1.920,00**	**25.920,00**

Fonte: Word 2007

Feito a tabela e o gráfico iremos analisar os tópicos principais da tabela SAC, que é a prestação (P), os juros (J) e a amortização (A). Vejamos:

Figura 12 – Gráfico SAC



Fonte: Tabela SAC - Clube dos poupadores[11].

Podemos analisar que o valor dos juros (J) cai mensalmente, representado pelo traço vermelho. Os juros (J) serão cobrados sempre sobre o saldo devedor (SD). Notadamente, as amortizações serão sempre constantes ao passar do tempo, representadas pelo traço azul, assim, paga-se mais juros no início do financiamento. O valor da prestação (P) será sempre os juros (J) somados ao valor da amortização (A), P = J + A, que será decrescente nesse caso.

A tabela SAC é mais indicada para quem consegue arcar com as primeiras prestações altas, o que para muitos é uma das desvantagens dessa tabela. Por causa disso, no decorrer do financiamento os valores das parcelas vão diminuindo, gerando satisfação em saber que a dívida vai retrocedendo todo mês.

5.3 - Comparação entre os sistemas Price X SAC

[11] Disponível em: <http://www.clubedospoupadores.com/financiamentos/tabela-sac-sistema-de-amortizacao-constante.html>. Acesso em 05 Jan. 2015.

No Brasil, há basicamente duas formas de financiamento - tabela SAC e a tabela Price, onde nos dois casos existem juros pré-fixados. Desta forma, optar por uma dessas opções requer conhecimento da situação financeira em curto e longo prazo, pois o despreparo para essa decisão apresentará valores no montante final que podem assustar o mutuário se não houver um planejamento prévio.

Segundo o perito judicial Marcos Heringer, professor de finanças da Fundação Getúlio Vargas (FGV),

> "Ambos os sistemas representam um plano para liquidar a dívida, a diferença é que enquanto na tabela Price as prestações pagas pelos mutuários são sempre iguais, no SAC, embora o valor das parcelas mensais sejam diferentes, a quitação do valor principal do empréstimo é sempre a mesma. O que varia é a quantidade de juros a ser paga.[12]"

Conforme o mesmo autor, a tabela SAC é indicada para quem puder arcar com as prestações iniciais mais elevadas - o que é um bom negócio para o financiador, já que a chance de inadimplência é reduzida devido à diminuição das parcelas com o passar do tempo.

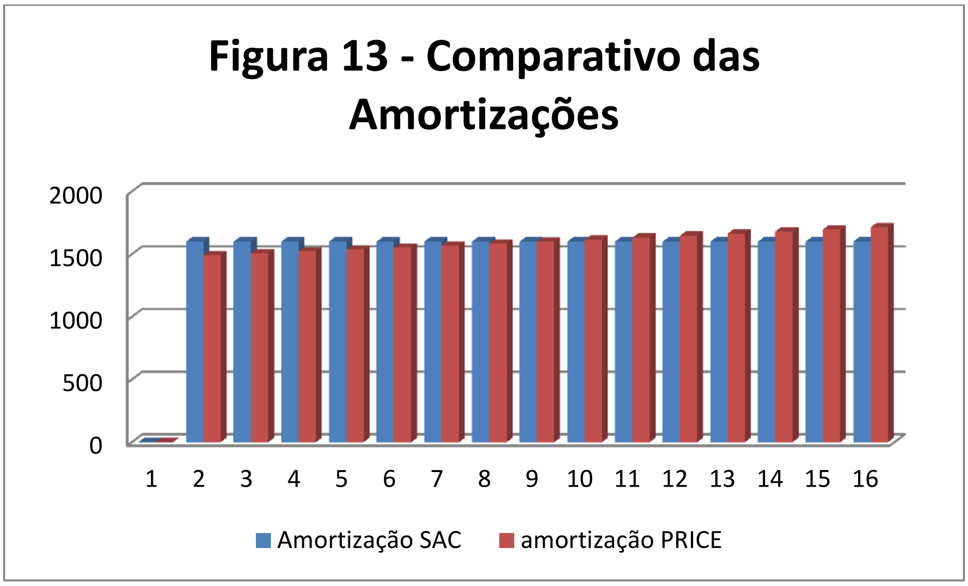
Devido às particularidades de cada tabela, normalmente a tabela Price é a forma mais utilizada no cálculo de empréstimos e financiamentos de carros, e a sua principal característica é o valor fixo das prestações (P). Enquanto que a tabela SAC é mais utilizada em financiamento de imóveis, onde os valores das prestações são decrescentes. Repare:

Tabela 9 – Comparação

	Tabela SAC	**Tabela PRICE**
Prestações	Decrescentes	Constantes
Amortizações	Constantes	Crescentes
Juros	Decrescentes	Decrescentes

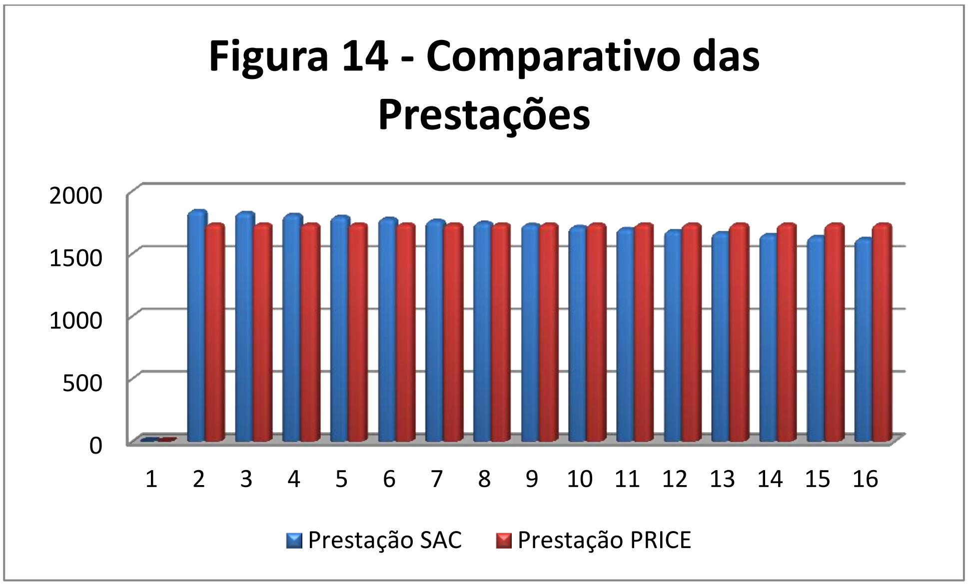
Fonte: Word 2007.

[12] Disponível em: <http://oglobo.globo.com/economia/imoveis/especialista-aponta-as-diferencas-entre-sistema-de-financiamento-pelo-sac-pela-tabela-price-2999162> Acesso em: 04/11/2011 atualizado.



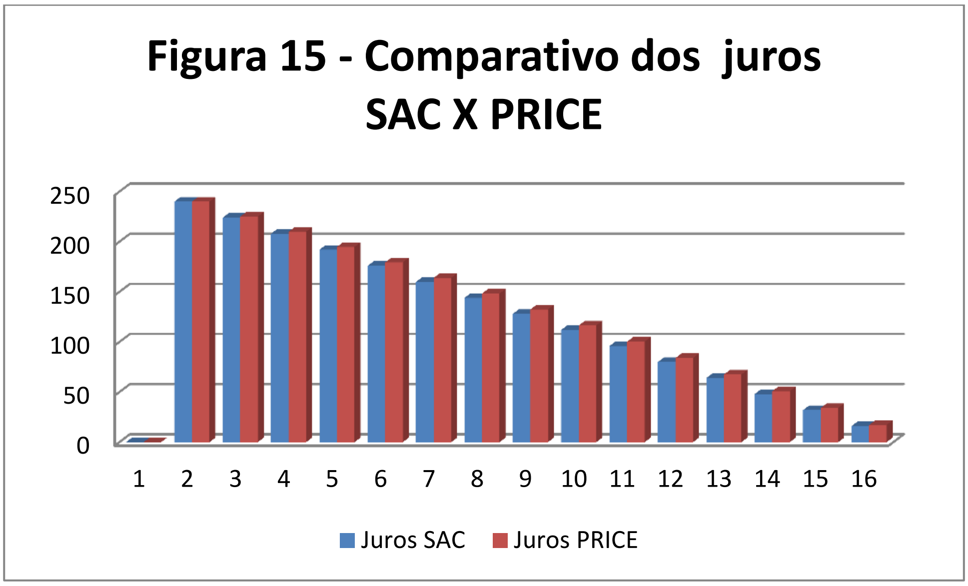
Fonte: Excel 2007.

De acordo com o gráfico acima, percebe-se que no sistema SAC a amortização (A) é constante e no sistema Price a amortização (A) é crescente.



Fonte: Excel 2007

É interessante salientar que as prestações começam altas na tabela SAC, e enquanto na Price começam baixas. De acordo com o gráfico, na nona prestação os valores serão quase idênticos, na tabela SAC é R$ 1.728,00 e na tabela Price é R$ 1.730,97 E a partir da nona prestação os valores da SAC irão decrescer, o que para o mutuário será mais vantajoso.



Fonte: Excel 2007

Este gráfico acima é uma comparação importante sobre os juros (J) dos dois sistemas. Percebe-se que o juro da tabela SAC é menor em todos os períodos e na tabela Price é maior, pois na primeira opção paga-se mais, amortizando mais no início. Como consequência, a dívida é reduzida mais neste primeiro momento. Em contrapartida, na segunda opção paga-se menos, por isso o juro é maior. Um ponto comum é que os juros nos dois sistemas são decrescentes.

Diante do que foi apresentado, como escolher o melhor sistema de financiamento? A escolha do plano deve levar em consideração o tipo de cliente, o conhecimento dos dois sistemas, os custos envolvidos, o prazo, a situação financeira inicial e previsão futura etc. Para relembrar, nunca devemos somar as prestações de um financiamento, a fim de evitar ter uma visão errônea dos valores representados por juros em períodos diferentes. Esse procedimento, tendenciosamente mostrará valores distorcidos de que a tabela SAC é melhor que a Price, entretanto não significa que a tabela SAC é a melhor, onde os juros será menor devido às prestações iniciais serem maiores.

A vantagem na tabela SAC é permitir quitação inicial mais rápida, pois como a prestação é mais alta no primeiro momento, amortiza-se mais. A desvantagem está diretamente ligada a uma vantagem futura, já que para adotar esse sistema o mutuário precisará adequar o orçamento financeiro para arcar com este valor maior, se comparado a prestação na tabela Price.

Entretanto, o fator juros é o mais importante, pois se nos dois casos os juros contratado é o mesmo, a escolha se baseia em pagar mais no início ou não, mas entender o quanto cada uma impacta na programação de cada orçamento. Cada mutuário possui seus compromissos e planejamentos. O que importa é conhecer os sistemas, fazer uma análise da própria situação e simular da maneira correta, conhecendo as previsões e apreciando as vantagens de se preparar conscientemente para uma decisão importante como esta.

6-CONCLUSÃO

É preciso mudar o comportamento dos professores e da sociedade, no sentido de formar cidadãos críticos a fim de que exerçam a cidadania em favor do bem comum. Esta critica se estende ao saber se posicionar não somente em situações diversas, mas aprender a se organizar financeiramente, fazendo as melhores escolhas para usar o dinheiro. A falta de contato com a matemática financeira e seus princípios denota despreparo para situações corriqueiras de curto ou longo prazo, comprometendo um capital familiar ou empresarial.

Estas afirmações se justificam pelo fato de apenas uma aluna do 3º ano do ensino médio da Escola Estadual Governador Israel Pinheiro ter dado conta de trabalhar os conceitos de juros, empréstimos, capital, taxa, tempo, porcentagem, etc. Seu sucesso se deve à familiaridade com o contexto financeiro, visto que ela trabalha com seus pais que são empresários.

Outro aspecto relevante é a necessidade de adaptar a realidade dos alunos dos conteúdos da matemática financeira, proporcionando a eles experiências reais a partir de situações comuns e decisivas no contexto social. Essa vivência e aplicabilidade da matéria favorece a troca de experiência e momentos para compartilhar os conhecimentos adquiridos com os pares e também com a família.

Seria interessante os professores do ensino médio mostrarem para os alunos como escolher a mais vantajosa, ressaltando sempre que as duas formas são meios de pagar uma dívida, mas para definir a melhor depende da taxa de juros usada no mercado; ressaltando que não devemos somar as parcelas de um financiamento, pois os valores são diferentes ao longo do período.

Neste sentido, aprender pressupõe identificar erros, admitir limitações, permitir possibilidades de mudanças contínuas e a reflexão acompanha, necessariamente, a cada etapa desse processo e provoca deslocamentos inevitáveis. Pelo fato de que os alunos serão os futuros consumidores e, caso possam ter um aprendizado ainda que incipiente sobre as noções mencionadas neste estudo, certamente saberão escolher e se tornarão consumidores conscientes e mais seguros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÁVILA, Leandro. **Tabela Price – Sistema de Amortização Francês**. Clube dos Poupadores – Educação Financeira gratuita pela internet. Disponível em: <http://www.clubedospoupadores.com/financiamentos/tabela-price-sistema-de-amortizacao-frances-saf.html>. Acesso em: 05/01/2015.

ÁVILA, Leandro. **Tabela SAC – Sistema de Amortização Constante**. Clube dos Poupadores – Educação Financeira gratuita pela internet. Disponível em: <http://www.clubedospoupadores.com/financiamentos/tabela-sac-sistema-de-amortizacao-constante.html>. Acesso em: 05/01/2015

BRASIL. Banco Central do Brasil. **FAQ – Arrendamento Mercantil (*Leasing*)**. Disponível em: http://www.bcb.gov.br/?LEASINGFAQ. Acesso em: 06 Jan. 2015.

<http://br.advfn.com/indicadores/taxa-selic. Acesso em 29 abri de 2015.

CAMPOS, Emannuel Dymas de Andrade. **Cheque especial: Herói ou Vilão?.** Disponível em: <http://www.parlamentopb.com.br/artigo.php?id=802> Acesso em: 20 fevereiro 2013.
.

DESSEN, Márcia. **O ônus e o bônus do cheque especial que dá dez dias sem juros.** Folha. Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br/fsp/mercado/60499-o-onus-e-o-bonus-do-cheque-especial-que-da-dez-dias-sem-juros.shtm>.13/08/2102. Acesso em: 22/01/2015
.

HERINGER, Marcos. **Especialista aponta as diferenças entre o sistema de financiamento pelo SAC e pela Tabela Price.** (O GLOBO, 2013) Disponível em: < http://oglobo.globo.com/economia/imoveis/especialista-aponta-as-diferencas-entre-sistema-de-financiamento-pelo-sac-pela-tabela-price-2999162>. Acesso em: 02 maio 2013.

MARTINS, José Pio. **Educação Financeira ao Alcance de Todos**. São Paulo: Fundamento Educacional, 2004.

MORGADO, Augusto C. de Oliveira. **Cursos do Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio**. Vídeo, 26 fev. 2012. Disponível em: < http://vimeo.com/37468935>. Acesso em: 11 nov. 2012.

MORGADO, A. C; WAGNER, E. e ZANI, S. **Progressões e Matemática Financeira**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

MUNDIM, Rita. **A Batalha entre a Renda Fixa e a Renda Variável.** Disponível em: <http://ritamundim.com.br/gallery/artigo23.pdf>. Acesso em: 23 fev. 2013.

NASCIMENTO, P.L. do. **A formação do aluno e a visão do professor do ensino médio em relação à Matemática Financeira.** 2004, f. 187. Dissertação (Mestrado acadêmico em Educação Matemática)- PUC/SP, 2004

RIGONATTO, Marcelo. **O ensino de matemática financeira para a formação de um cidadão consciente.** Disponível em: <http://educador.brasilescola.com/estrategias-ensino/o-ensino-matematica-financeira-para-formacao-um-cidadao-.htm>. Acesso em: 05 fev. 2014.

SAMANEZ, Carlos Patrício. **Matemática Financeira: Aplicações à Análise de Investimentos.** São Paulo: Prentice Hall, 2002.

SOBRINHO**,** José Dutra Vieira. **Matemática Financeira.** São Paulo: Atlas, 1989.

SOBRINHO, José Dutra Vieira. **Matemática Financeira**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 1997.