

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICEX  
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA



K-ELIPSE

*Jhon Ever Quispe Vargas*

Belo Horizonte - MG  
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICEX  
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

Jhon Ever Quispe Vargas

Orientador:  
Prof. Israel Vainsencher

K-ELIPSE

Dissertação submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMG, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Belo Horizonte - MG  
2015

# Agradecimentos

Agradeço a Deus por guiar-me até aqui e permitir a conclusão desta fase.

A meu orientador *Israel Vainsencher*, pela amizade, pela atenção, por me apresentar este tema e me auxiliar em seu estudo, sempre com paciência e boa vontade.

Á todos os professores que partilharam seus conhecimentos nas disciplinas que cursei durante o mestrado.

A minha família pela confiança e apoio que me deram para realizar este estudo.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro.

# Resumo

A *k-ellipse* é a curva plana algébrica que consiste em todos os pontos cuja soma das distâncias a  $k$  pontos dados é um número fixo. A equação polinomial que define a *k-ellipse* tem grau  $2^k$  se  $k$  é ímpar e grau  $2^k - \binom{k}{k/2}$ , se  $k$  é par. Expressamos esta equação polinomial como o determinante de uma matriz simétrica de polinômios lineares. Tal representação estende-se a *k-ellipses ponderados* e *k-elipsóides* em dimensões arbitrárias.

# Abstract

The *k-ellipse* is the plane algebraic curve consisting of all points whose sum of distances from  $k$  given points is a fixed number. The polynomial equation defining the *k-ellipse* has degree  $2^k$  if  $k$  is odd and degree  $2^k - \binom{k}{k/2}$  if  $k$  is even. We express this polynomial equation as the determinant of a symmetric matrix of linear polynomials. Such representation extends to *weighted k-ellipses* and *k-ellipsoids* in arbitrary dimensions.

# Contents

<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>9</b>
1.1 Produto tensorial de espaços vetoriais . . . . .	9
1.1.1 Produto tensorial de subespaços vetoriais . . . . .	12
1.1.2 Produto tensorial de transformações lineares . . . . .	12
1.2 Soma tensorial de matrizes . . . . .	17
<b>2 k-Elipse</b>	<b>19</b>
2.1 Representação matricial . . . . .	19
2.2 Grau da k-Elipse . . . . .	23
<b>3 Gênero da k-elipse</b>	<b>30</b>
3.1 Pontos singulares . . . . .	30
3.2 3-elipse . . . . .	31
<b>4 Generalizações</b>	<b>36</b>
4.1 k-Elipses ponderadas . . . . .	36
4.2 k-Elipsóides . . . . .	40
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>45</b>

# Introdução

Como motivação consideraremos as seguintes curvas: o círculo e a elipse.

O *círculo* é uma curva plana consistindo em todos os pontos  $(x, y)$  cuja distância a um ponto dado  $(u_1, v_1)$  é um número fixo  $d$ , isto é,

$$\sqrt{(x - u_1)^2 + (y - v_1)^2} = d. \quad (1)$$

Eliminando radicais em (1) se pode observar que os pontos do círculo são os zeros do polinômio quadrático

$$p_1(x, y) = \det \begin{bmatrix} d + x - u_1 & y - v_1 \\ y - v_1 & d - x + u_1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

A *elipse* é uma curva plana que consiste em todos os pontos  $(x, y)$  cuja soma das distâncias a dois pontos do plano  $(u_1, v_1)$  e  $(u_2, v_2)$ , é um número fixo  $d$ , isto é:

$$\sqrt{(x - u_1)^2 + (y - v_1)^2} + \sqrt{(x - u_2)^2 + (y - v_2)^2} = d. \quad (3)$$

Depois de uma eliminação de radicais, observamos que a elipse são os zeros do polinômio

$$p_2(x, y) = \det \begin{bmatrix} d + 2x - u_1 - u_2 & y - v_1 & y - v_2 & 0 \\ y - v_1 & d + u_1 - u_2 & 0 & y - v_2 \\ y - v_2 & 0 & d - u_1 + u_2 & y - v_1 \\ 0 & y - v_2 & y - v_1 & d - 2x + u_1 + u_2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Neste trabalho generalizaremos estas fórmulas determinadas para o círculo e a elipse. Fixados um número real positivo  $d$  e  $k$  pontos distintos  $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_k, v_k)$  em  $\mathbb{R}^2$ , define-se a *k-elipse* com focos  $(u_i, v_i)_{i=1}^k$  e raio  $d$  por:

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sum_{i=1}^k \sqrt{(x - u_i)^2 + (y - v_i)^2} = d \right\}. \quad (5)$$

A *k-elipse* é a fronteira do conjunto convexo  $\mathcal{E}_k$  no plano definido substituindo “=” por  $\leq$ , ou seja, o conjunto dos pontos cuja soma das distâncias aos  $k$  pontos dados é no máximo  $d$ . Estamos

interessados no estudo do polinômio irreduzível  $p_k(x, y)$  que se anula sobre a  $k$ -*ellipse*. Este é o único polinômio (salvo sinal) com coeficientes inteiros coprimos nas variáveis  $x$  e  $y$ , com parâmetros  $d, u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_k, v_k$ . Pelo grau da  $k$ -*ellipse* nós entenderemos o grau do polinômio  $p_k(x, y)$  em  $x$  e  $y$ .

O resultado principal deste trabalho é o seguinte: A  $k$ -*ellipse* tem grau  $2^k$  se  $k$  é ímpar e grau  $2^k - \binom{k}{k/2}$  se  $k$  é par. Além disso, este polinômio tem uma representação por um determinante da seguinte forma:

$$p_k(x, y) = \det(x \cdot A_k + y \cdot B_k + C_k) \tag{6}$$

onde  $A_k, B_k$  e  $C_k$  são matrizes simétricas de ordem  $2^k \times 2^k$  descritas mais adiante.

Em resumo, o trabalho está organizado como segue: No capítulo 1 faremos uma pequena lembrança do que é o produto tensorial e produto tensorial de espaços vetoriais com suas respectivas propriedades, as quais servirão como ferramentas para o desenvolvimento do capítulo 2; neste capítulo usaremos a teoria de Galois e inteiros algébricos para mostrar que o polinômio que define a  $k$ -*ellipse* é irreduzível de grau no máximo  $2^k$ . Este polinômio pode ser expresso pelo determinante(6) de uma matriz simétrica de ordem  $2^k \times 2^k$  cujas entradas são formas lineares. O grau deste polinômio depende de  $k$  ser par ou ímpar. Enquanto a própria  $k$ -*ellipse* seja uma curva convexa, seu fecho Zariski  $\{p_k(x, y) = 0\}$  tem muitos ramos extras fora do conjunto convexo  $\mathcal{E}_k$ , como veremos no capítulo 3. Neste capítulo consideraremos o caso particular  $k = 3$  da  $k$ -*ellipse*, calcularemos os pontos singulares e o gênero da mesma. No capítulo 4 generalizaremos a  $k$ -*ellipse*. Primeiramente, consideraremos a inclusão de pesos positivos  $\omega_1, \dots, \omega_k \in \mathbb{R}$  para as distâncias para logo obtermos  $k$ -*ellipses ponderadas*. Por último, generalizamos a  $k$ -*ellipse* a dimensões maiores e, nestas dimensões as  $k$ -*ellipses* serão chamadas  $k$ -*elipsóides*. Os graus dos polinômios que definem as  $k$ -*ellipses ponderadas* e as  $k$ -*elipsóides* possuem o mesmo grau do polinômio da  $k$ -*ellipse*.

Este trabalho está baseado no artigo *Semidefinite representation of the  $k$ -ellipse* feito por Jiawang Nie, Pablo A. Parrilo, e Bernd Sturmfels(ver[2]).



# Chapter 1

## Preliminares

Neste capítulo lembraremos alguns tópicos do álgebra multilinear ([5],[6],[1]), que serão utilizadas no decorrer da dissertação.

### 1.1 Produto tensorial de espaços vetoriais

Seja  $\mathbb{k}$  um corpo e sejam  $E, F$  e  $G$   $\mathbb{k}$ -espaços vetoriais. Consideremos  $\otimes$  uma aplicação bilinear de  $E \times F$  a  $T$ .

**Definição 1.1** O par  $(T, \otimes)$  é chamado produto tensorial de  $E$  e  $F$  se  $\otimes$  possui a propriedade universal, isto é, se  $\otimes$  satisfaz as seguintes condições:

$\otimes_1$  : Os vetores  $\otimes(x, y)$ ,  $(x \in E, y \in F)$  geram  $G$ , ou equivalentemente  $im\otimes = \langle \otimes(E \times F) \rangle = G$ .

$\otimes_2$  : Se  $\phi$  é uma aplicação bilinear de  $E \times F$  sobre qualquer espaço vetorial  $H$ , então existe uma aplicação linear  $f : T \rightarrow H$  tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{\phi} & H \\ \otimes \downarrow & \nearrow f & \\ G & & \end{array}$$

comuta(propriedade de fatoração).

$(im\otimes = \langle \otimes(E \times F) \rangle)$  denota o espaço gerado pelos elementos da forma  $\otimes(x, y)$ ,  $x \in E, y \in F$ .

As condições acima são equivalentes à seguinte condição

(\*) : Para cada aplicação bilinear  $\phi : E \times F \rightarrow H$  existe uma única aplicação linear  $f : G \rightarrow H$  tal que o diagrama acima comuta.

**Notação 1.1** Se o par  $(G, \otimes)$  é o produto tensorial de  $E$  e  $F$ , escrevemos  $T$  como  $E \otimes F$  e  $\otimes(x, y) = x \otimes y$ . Logo, a bilinearidade se expressa na seguinte forma:

$$\begin{aligned}(\lambda x_1 + x_2) \otimes y &= \lambda x_1 \otimes y + x_2 \otimes y \quad x_1, x_2 \in E, y \in F \\ x \otimes (\lambda y_1 + y_2) &= \lambda x \otimes y_1 + x \otimes y_2 \quad x \in E, y_1, y_2 \in F, \lambda \in \mathbb{k}\end{aligned}$$

**Exemplo 1.2** Considere a aplicação bilinear  $\otimes : \mathbb{k} \times F \rightarrow F$  dado por  $\lambda \otimes y = \lambda y$ . Como  $1 \otimes y = y$ , esta aplicação satisfaz  $\otimes_1$ . Para verificar  $\otimes_2$ , seja  $\phi : \mathbb{k} \times F \rightarrow H$  qualquer aplicação bilinear, e defina a aplicação linear  $f : F \rightarrow H$  por  $f(y) = \phi(1, y)$ . Então para  $\lambda \in \mathbb{k}$  e  $y \in F$  temos:

$$\phi(\lambda, y) = \lambda \phi(1, y) = \lambda f(y) = f(\lambda y) = f(\lambda \otimes y),$$

assim  $\otimes_2$  está provado. Concluimos que o par  $(F, \otimes)$  é o produto tensorial de  $\mathbb{k}$  e  $F$ . Isto é:  $\mathbb{k} \otimes F = F$ . Em particular  $\mathbb{k} \otimes \mathbb{k} = \mathbb{k}$  com  $\lambda \otimes y = y$ .

**Exemplo 1.3** Seja  $\beta : \mathbb{k}^m \times \mathbb{k}^n \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{k})$  definida por

$$\beta((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_n)) = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & \cdots & x_1 y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m y_1 & \cdots & x_m y_n \end{bmatrix}_{m \times n}.$$

Mostraremos que  $(M_{m \times n}(\mathbb{k}), \beta)$  é o produto tensorial de  $\mathbb{k}^m$  e  $\mathbb{k}^n$ , (logo,  $\mathbb{k}^m \otimes \mathbb{k}^n = M_{m \times n}(\mathbb{k})$ ). Com efeito, vejamos  $\otimes_1 : \langle \beta(\mathbb{k}^m \times \mathbb{k}^n) \rangle = M_{m \times n}(\mathbb{k})$ . Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{k})$  tal que

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

Então

$$\begin{aligned}\beta((\alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{m1}), (1, 0, 0, \dots)) &+ \beta((\alpha_{12}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{m2}), (0, 1, 0, \dots)) \\ &+ \dots + \beta((\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \dots, \alpha_{mn}), (0, 0, \dots, 1))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \alpha_{m2} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{mn} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Ou seja; dado  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{k})$ , existem  $x_i \in \mathbb{k}^m, y_i \in \mathbb{k}^n$  tais que

$$A = \sum \beta(x_i, y_i).$$

Portanto  $A \in \langle \beta(\mathbb{k}^m \times \mathbb{k}^n) \rangle$ . Não é difícil a verificação de  $\otimes_2$ . Logo  $(M_{m \times n}(\mathbb{k}), \beta)$  é o produto tensorial de  $\mathbb{k}^m$  e  $\mathbb{k}^n$ .

**Lema 1.4** *O produto tensorial é comutativo no sentido  $M \otimes N \cong N \otimes M$ .*

**Demonstração.** Consideremos as aplicações bilineares

$$\psi : M \times N \longrightarrow N \otimes M \quad \text{e} \quad \phi : M \times N \longrightarrow M \otimes N$$

dados por

$$\psi(x, y) = y \otimes x \quad , \quad \phi(x, y) = x \otimes y.$$

Desde  $\otimes_2$  temos que  $\psi$  e  $\phi$  induz aplicações lineares  $f : M \otimes N \longrightarrow N \otimes M$  e  $g : N \otimes M \longrightarrow M \otimes N$  tais que

$$y \otimes x = f(x \otimes y) \quad \text{e} \quad x \otimes y = g(y \otimes x),$$

para todo  $x \in M$  e  $y \in N$ . Então:

$$g \circ f \circ \phi = g \circ \psi = \phi \quad \text{e} \quad f \circ g \circ \psi = f \circ \phi = \psi.$$

Pela propriedade  $\otimes_2$  temos que  $im\phi = M \otimes N$  e  $im\psi = N \otimes M$ , o que implicam que  $g \circ f = id$  e  $f \circ g = id$ . Portanto  $M \otimes N \cong N \otimes M$ . ■

**Proposição 1.5** *(Redução de transformações bilineares a lineares)[5,p 11] Sejam  $M$  e  $N$  espaços vetoriais e  $M \otimes N$  o produto tensorial. Então,*

$$L(M \otimes N; P) \longrightarrow B(M, N; P)$$

para cada espaço vetorial  $P$ . Aqui  $L(M \otimes N; P)$  e  $B(M, N; P)$  denotam o espaço vetorial de transformações lineares e bilineares respectivamente.

**Demonstração.** Basta definir  $\varphi : L(M \otimes N; P) \longrightarrow B(M, N; P)$  como:

$$\varphi(f) := f \circ \otimes \quad \forall f \in L(M \otimes N; P)$$

isto é,  $\varphi(f) : M \times N \longrightarrow P$  tal que  $\varphi(f)(x, y) = f(x \otimes y)$ . É claro que  $\varphi$  é linear. Não é difícil mostrar que  $\varphi$  é injetiva e sobrejetiva. ■

### 1.1.1 Produto tensorial de subespaços vetoriais

Suponha que temos uma aplicação bilinear  $f : M \times N \rightarrow P$  com a propriedade universal, e consideremos dois subespaços  $M_1 \subset M$  e  $N_1 \subset N$ . Denotemos por  $\otimes'$  a restrição de  $\otimes$  para  $M_1 \times N_1$  e  $T_1 = \text{Im } \otimes'$ .

Afirmção:  $(T_1, \otimes')$  é o produto tensorial de  $M_1$  e  $N_1$ .

De fato,  $\otimes_1$  é imediato da definição. Para verificar  $\otimes_2$ , seja  $\varphi_1 : M_1 \times N_1 \rightarrow H$  uma aplicação bilinear. Estendemos  $\varphi_1$  para  $\varphi : M \times N \rightarrow H$  aplicação bilinear. Desde que  $\otimes$  possui a propriedade universal, existe uma aplicação linear

$$f : T \rightarrow H$$

tal que

$$f(x \otimes y) = \varphi(x, y) \quad x \in M, y \in N.$$

A relação acima implica que

$$f(x_1 \otimes' y_1) = \varphi(x_1, y_1) = \varphi_1(x_1, y_1) \quad x_1 \in M_1, y_1 \in N_1,$$

e assim  $\varphi_1$  se fatora por  $\otimes$ .

### 1.1.2 Produto tensorial de transformações lineares

Sejam  $U, U', V$  e  $V'$  espaços vetoriais de dimensões  $m, n, p$  e  $q$ . Consideremos as transformações lineares

$$T : U \rightarrow U' \quad ; \quad F : V \rightarrow V'.$$

Desejamos definir uma transformação linear

$$\begin{aligned} T \otimes F : U \otimes V &\rightarrow U' \otimes V' \\ u \otimes v &\mapsto T(u) \otimes F(v) \end{aligned} ,$$

Para isto, lembremos o desenho do diagrama da comutatividade do produto tensorial

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \xrightarrow{\phi} & H \\ \otimes \downarrow & \nearrow f & \\ U \otimes V & & \end{array}$$

Dados  $U$  e  $V$ , existe o produto tensorial  $U \otimes V$ . Por definição, sabemos que dada qualquer aplicação bilinear  $\phi : U \times V \rightarrow H$ , onde  $H$  qualquer espaço vetorial, existe uma única  $f : U \otimes V \rightarrow H$  tal que  $f \circ \otimes = \phi$  (propriedade de fatoração única). Definamos

$$\phi : U \times V \rightarrow U' \otimes V'$$

por  $\phi(x, y) = T(x) \otimes F(y)$ . Claramente  $\phi$  é bilinear. Logo, existe uma única aplicação linear  $\chi : U \otimes V \rightarrow U' \otimes V'$  tal que  $\chi(x \otimes y) = \phi(x \otimes y)$ .

Denotemos  $\chi = T \otimes F$ . Por definição segue que:

$$(T \otimes F)(x \otimes y) = T(x) \otimes F(y)$$

e chama-se o produto tensorial das transformações lineares  $T$  e  $F$ . A correspondência  $(T, F) \rightarrow \chi$  define uma aplicação bilinear

$$\beta : L(U; U') \times L(V; V') \rightarrow L(U \otimes V; U' \otimes V').$$

Então o par  $(L(U \otimes V; U' \otimes V'), \beta)$  é o produto tensorial de  $L(U; U')$  e  $L(V; V')$  (ver [6], p 35)

A transformação  $\chi = T \otimes F$  é chamado de produto tensorial de  $T$  e  $F$ .

Temos a seguinte propriedade:

Considere  $A = (a_{ij})_{i,j}$  a matriz de  $T$  nas bases  $\{e_1, \dots, e_m\}$  de  $U$  e  $\{f_1, \dots, f_n\}$  de  $U'$ , e seja  $B = (b_{kl})_{k,l}$  a matriz da transformação linear  $F$  nas bases  $\{g_1, \dots, g_p\}$  de  $V$  e  $\{h_1, \dots, h_q\}$  de  $V'$ . Então a transformação  $T \otimes F$  tem matriz  $(a_{ij}b_{kl})_{i,j,k,l}$  com respeito as bases  $\{e_1 \otimes g_1, e_1 \otimes g_2, \dots, e_m \otimes g_p\}$  de  $U \otimes V$  e  $\{f_1 \otimes h_1, f_1 \otimes h_2, \dots, f_n \otimes h_q\}$  de  $U' \otimes V'$ . Mais precisamente, se

$$T(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j \quad , \quad F(g_k) = \sum_{l=1}^q b_{kl} h_l$$

então

$$T \otimes F(e_i \otimes g_k) = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^q a_{ij} b_{kl} \cdot f_j \otimes h_l.$$

Assim temos

$$A \otimes B = M_{U \otimes V, U' \otimes V'} = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

Notemos que  $A \otimes B$  é de ordem  $pq \times nm$ .

**Exemplo 1.6** Sejam  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  as transformações lineares definidas por

$$T(x, y, z) = (2x + 3y, 3x + 4z)$$

$$F(x, y) = (x, x + y, y, y - x).$$

Então

$$T \otimes F : \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^4.$$

Calculemos a matriz  $T \otimes F$  nas bases canônicas. Para isto, basta calcular as matrizes  $A$  e  $B$  das transformações  $T$  e  $F$  nas bases canônicas:

$$A = M(T) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = M(F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M(T \otimes F) = A \otimes B = \begin{bmatrix} 2B & 3B & 0B \\ 3B & 0B & 4B \end{bmatrix}$$

$$M(T \otimes F) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

Agora mencionaremos algumas propriedades do produto tensorial de transformações e matrizes. Doravante consideraremos os espaços vetoriais de dimensão finita.

- (i) Sejam  $T : U \rightarrow U'$  e  $F : V \rightarrow V'$  transformações lineares sobrejetivas. Então  $T \otimes F$  é sobrejetiva.

Com efeito, se  $u' \otimes v' \in U' \otimes V'$ , então existe  $u \in U$  e  $v \in V$  tais que  $T(u) = u'$  e  $F(v) = v'$ . Portanto,  $(T \otimes F)(u \otimes v) = T(u) \otimes F(v) = u' \otimes v'$ .

- (ii) Sejam  $T : U \rightarrow U'$  e  $F : V \rightarrow V'$  transformações lineares, então,

$$\ker(T \otimes F) = \ker(T) \otimes V + U \otimes \ker(F).$$

Em particular  $T \otimes F$  é injetivo se, somente se,  $T$  e  $F$  são injetivas. Vejamos a demonstração: denotemos por  $W := \ker(T) \otimes V + U \otimes \ker(F)$ , este é um subespaço de  $U \otimes V$ . É claro que  $W \subseteq \ker(T \otimes F)$ , mostremos então a outra inclusão. Consideremos o espaço quociente  $(U \otimes V)/W$  e a transformação linear canônica

$$J : U \otimes V \longleftrightarrow (U \otimes V)/W$$

$$z \longmapsto \bar{z}$$

Para o produto tensorial  $U' \otimes V'$  consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} U' \times V' & \xrightarrow{t} & U' \otimes V' \\ h \downarrow & \nearrow H & \\ (U \otimes V)/W & & \end{array}$$

onde  $h(T(u), F(v)) := J(u \otimes v)$ . Vejamos que  $h$  está bem definida. Sejam  $T(u_1) = T(u)$  e  $F(v_1) = F(v)$ , então  $u_1 - u := u_2 \in \ker(T)$  e  $v_1 - v := v_2 \in \ker(F)$ , logo

$$\begin{aligned} u_1 \otimes v_1 &= (u + u_2) \otimes (v + v_2) \\ &= u \otimes v + u \otimes v_2 + u_2 \otimes v + u_2 \otimes v_2 \\ &= u \otimes v + (u \otimes v_2 + u_2 \otimes v + u_2 \otimes v_2), \end{aligned}$$

onde  $u \otimes v_2 + u_2 \otimes v + u_2 \otimes v_2 \in U \otimes \ker(F) + \ker(T) \otimes V = W$ , isto mostra que

$$u_1 \otimes v_1 - u \otimes v \in W,$$

logo  $J(u \otimes v) = J(u_1 \otimes v_1)$ . Notemos que  $h$  é bilinear, portanto induz a transformação linear  $H$  dada por

$$H(T(u) \otimes F(v)) := h(T(u), F(v)) = J(u \otimes v),$$

donde  $H(T \otimes F) = J$ . Seja  $z \in \ker(T \otimes F)$ , então  $H(T \otimes F)(z) = H(0) = \bar{0} = J(z) = \bar{z}$ , o qual indica que  $z \in W$ .

(iii) Sejam  $T_1 : U_1 \rightarrow U_2, T_2 : U_2 \rightarrow U_3$  e  $F_1 : V_1 \rightarrow V_2, F_2 : V_2 \rightarrow V_3$  transformações lineares, então,

$$(T_2 \circ T_1) \otimes (F_2 \circ F_1) = (T_2 \otimes F_2) \circ (T_1 \otimes F_1).$$

Em forma matricial,

$$(A_2 \cdot A_1) \otimes (B_2 \cdot B_1) = (A_2 \otimes B_2) \cdot (A_1 \otimes B_1).$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} (T_2 \otimes F_2) \circ (T_1 \otimes F_1)(u \otimes v) &= (T_2 \otimes F_2)((T_1 \otimes F_1)(u \otimes v)) \\ &= (T_2 \otimes F_2)(T_1(u) \otimes F_1(v)) \\ &= (T_2(T_1(u)) \otimes (F_2(F_1(v)))) \\ &= ((T_2 \circ T_1)u) \otimes ((F_2 \circ F_1)v) \\ &= ((T_2 \circ T_1) \otimes (F_2 \circ F_1))(u \otimes v). \end{aligned}$$

(iv) Sejam  $T : U \rightarrow U'$  e  $F : V \rightarrow V'$  transformações lineares bijetivas, então,

$$(T \otimes F)^{-1} = T^{-1} \otimes F^{-1}.$$

Matricialmente,

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

(v) Sejam  $T$  e  $F_1, F_2$  transformações lineares compatíveis para as operações indicadas, então,

$$T \otimes (F_1 + F_2) = T \otimes F_1 + T \otimes F_2.$$

Em forma matricial,

$$A \otimes (B_1 + B_2) = A \otimes B_1 + A \otimes B_2.$$

De forma, similar se tem distributividade pelo lado esquerdo.

(vi)  $T : U \rightarrow U'$  e  $F : V \rightarrow V'$  transformações lineares e seja  $\lambda \in \mathbb{k}$ , então,

$$(\lambda T) \otimes F = T \otimes (\lambda F) = \lambda(T \otimes F).$$

(vii) Sejam  $A \in M_n(\mathbb{k})$  e  $B \in M_m(\mathbb{k})$ , então,

$$\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(A)\text{tr}(B),$$

$$\det(A \otimes B) = \det(A)^m \det(B)^n.$$

Lembremos que duas matrizes  $A, C \in M_n(\mathbb{k})$  são *semelhantes* se existir uma matriz  $P \in M_n(\mathbb{k})$  tal que

$$P^{-1}AP = C.$$

E dizemos que matrizes  $A, C \in M_n(\mathbb{k})$  são ortogonalmente semelhantes se existir uma matriz ortogonal (ie.  $P^t = P^{-1}$ ,  $P^t$  denota a transposta de  $P$ )  $P \in M_n(K)$  tal que

$$P^tAP = C.$$

(viii) Sejam  $A, C \in M_n(\mathbb{k})$  e  $B, D \in M_m(\mathbb{k})$ , tais que  $A$  é similar a  $C$  e  $B$  é similar a  $D$ , então,

$$A \otimes B \text{ é similar a } C \otimes D.$$

(ix) Sejam  $A \in M_n(\mathbb{k})$  e  $B \in M_m(\mathbb{k})$ ,  $\alpha$  um autovalor de  $A$  com autovetor  $u$  e  $\beta$  um autovalor de  $B$  com autovetor  $v$ . Então,  $u \otimes v$  é um autovetor de  $A \otimes B$  com autovalor  $\alpha\beta$ .



**Exemplo 1.7** Consideremos  $A$  e  $B$  da observação (1.8) e sejam  $\alpha = 1$  e  $\beta = 2$  autovalores de  $A$  e  $B$ , com  $u = (1, 0)$  e  $v = (1, -1)$  seus respectivos autovetores. Então  $\alpha \cdot \beta = 2$  é um autovalor de  $A \otimes B$  com autovetor  $u \otimes v = (1, -1, 0, 0)$

(x) Sejam  $A \in M_n(\mathbb{k})$  e  $B \in M_m(\mathbb{k})$ , então,

$$(A \otimes B)^t = A^t \otimes B^t.$$

(xi) Sejam  $A \in M_n(\mathbb{k})$  e  $B \in M_m(\mathbb{k})$  matrizes diagonalizáveis, então  $A \otimes B$  é diagonalizável.

**Observação 1.8** Em geral o produto tensorial de transformações lineares não é comutativo, por exemplo: sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Fazendo o produto tensorial de  $A \otimes B$  e  $B \otimes A$  obtemos

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 1B & 1B \\ 0B & 2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

e

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} 2A & 0A \\ 1A & 3A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

onde podemos observamos que  $A \otimes B \neq B \otimes A$ .

## 1.2 Soma tensorial de matrizes

Nesta seção definiremos o que é a soma tensorial de matrizes, pois ela é uma das ferramentas principais para a expressão da matriz cujo determinante é o polinômio que define a  $k$ -*ellipse*.

**Definição 1.9** Sejam  $A \in M_n(\mathbb{k})$  e  $B \in M_m(\mathbb{k})$ . A soma tensorial de  $A$  e  $B$  é a matriz de ordem  $nm \times nm$  definida por

$$A \dot{\oplus} B := A \otimes I_m + I_n \otimes B.$$

A soma tensorial de matrizes quadradas é uma operação associativa mas não é comutativo dado que o produto tensorial não é comutativo. Vejamos a soma tensorial para tres matrizes  $A, B, C \in M(p, \mathbb{k})$

$$A \dot{\oplus} B \dot{\oplus} C = A \otimes I_p \otimes I_p + I_p \otimes B \otimes I_p + I_p \otimes I_p \otimes C.$$

Produto tensorial e soma tensorial são conhecidos como *produto e soma de Kronecker*.

Um resultado de muita importância para o desenvolvimento de nosso trabalho é que a soma tensorial de matrizes simétricas pode ser diagonalizado tratando os somandos separadamente, como afirma o seguinte lema:

**Lema 1.10** *Sejam  $M_1, \dots, M_k$  matrizes simétricas e  $U_1, \dots, U_k$  matrizes ortogonais tais que  $M_i = U_i \cdot \Lambda_i \cdot U_i^t$ , onde  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$  são matrizes diagonais. Então*

$$(U_1 \otimes \dots \otimes U_k)^t \cdot (M_1 \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} M_k) \cdot (U_1 \otimes \dots \otimes U_k) = \Lambda_1 \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \Lambda_k. \quad (1.1)$$

*Em particular, os autovalores da soma tensorial  $M_1 \dot{\oplus} M_2 \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} M_k$  são somas  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$  onde  $\lambda_1$  é qualquer autovalor de  $M_1$ ,  $\lambda_2$  é qualquer autovalor de  $M_2$ , etc.*

**Demonstração.** Mostremos a igualdade (1.1) pela definição de soma tensorial e as propriedades de produto tensorial.

$$\begin{aligned} & (U_1 \otimes \dots \otimes U_n)^t \cdot (M_1 \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} M_n) \cdot (U_1 \otimes \dots \otimes U_n) \\ &= (U_1 \otimes \dots \otimes U_n)^t \cdot (M_1 \otimes I_{2^{n-1}} + \dots + I_{2^{n-1}} \otimes M_n) \cdot (U_1 \otimes \dots \otimes U_n) \\ &= (U_1 \otimes U_2 \otimes \dots \otimes U_n)^t \cdot (M_1 \otimes I_{2^{n-1}}) \cdot (U_1 \otimes U_2 \otimes \dots \otimes U_n) + \dots \\ & \quad + (U_1 \otimes \dots \otimes U_{n-1} \otimes U_n)^t \cdot (I_{2^{n-1}} \otimes M_n) \cdot (U_1 \otimes \dots \otimes U_n) \quad \text{propr. (v)} \\ &= [U_1^t \otimes (U_2 \otimes \dots \otimes U_n)^t] \cdot (M_1 \otimes I_{2^{n-1}}) \cdot [U_1 \otimes (U_2 \otimes \dots \otimes U_n)] + \dots \\ & \quad + [(U_1 \otimes \dots \otimes U_{n-1}) \otimes U_n^t] \cdot (I_{2^{n-1}} \otimes M_n) \cdot [(U_1 \otimes \dots \otimes U_{n-1}) \otimes U_n] \quad \text{propr. (x)} \\ &= [(U_1^t \cdot M_1) \otimes (U_2 \otimes \dots \otimes U_n)^t] \cdot [U_1 \otimes (U_2 \otimes \dots \otimes U_n)] + \dots \\ & \quad + [(U_1 \otimes \dots \otimes U_{n-1})^t \otimes (U_n^t \cdot M_n)] \cdot [(U_1 \otimes \dots \otimes U_{n-1}) \otimes U_n] \quad \text{propr. (iii)} \\ &= (U_1^t \cdot M_1 \cdot U_1) \otimes [(U_2 \otimes \dots \otimes U_n)^t] \cdot (U_2 \otimes \dots \otimes U_n) + \dots \\ & \quad + [(U_1 \otimes \dots \otimes U_{n-1})^t \cdot (U_1 \otimes (U_2 \otimes \dots \otimes U_{n-1})) \otimes (U_n^t \cdot M_n \cdot U_n)] \\ &= (U_1^t \cdot M_1 \cdot U_1) \otimes I_{2^{n-1}} + \dots + I_{2^{n-1}} \otimes (U_n^t \cdot M_n \cdot U_n) \\ &= \Lambda_1 \otimes I_{2^{n-1}} + \dots + I_{2^{n-1}} \otimes \Lambda_n \quad \text{por hip. } U_1^t \cdot M_i \cdot U_1 = \Lambda_i \\ &= \Lambda_1 \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \Lambda_n. \end{aligned}$$

■

**Observação 1.11** Observe que se  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ , as matrizes ortogonais  $U_i$  sempre existem, porém, o lema é válido para outros corpos, como veremos mais adiante.

# Chapter 2

## k-Elipse

### 2.1 Representação matricial

Nesta seção, representaremos nossa equação da *k-elipse* como o determinante de uma matriz simétrica.

Iniciamos com uma discussão com respeito ao grau da *k-elipse* fazendo uso da Teoria de Galois e extensões inteiras([4],[3]).

Consideremos  $R = \mathbb{Q}[x, y, u_1, v_1, \dots, u_k, v_k]$  o anel de polinômios e  $K = \mathbb{Q}(x, y, u_1, v_1, \dots, u_k, v_k)$  seu corpo de frações de funções racionais. Sejam

$$q_i(t) = t^2 - (x - u_i)^2 - (y - v_i)^2 \quad i = 1, \dots, k$$

polinômios em  $K[t]$ . Pela teoria de Galois existe uma cadeia de extensões quadráticas(neste caso extensões normais)

$$L_0 = K \hookrightarrow L_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow L_{k-1} \hookrightarrow L_k = L$$

onde  $L_1 = K(\lambda_1), L_2 = L_1(\lambda_2), \dots, L_{k-1} = L_{k-2}(\lambda_{k-1})$  e  $L_k = L_{k-1}(\lambda_k)$  com

$$\lambda_i = \sqrt{(x - u_i)^2 + (y - v_i)^2} \quad (2.1)$$

e  $\lambda_i \notin L_{i-1}(i = 1, \dots, k)$ . O grau da extensão de  $L$  sobre  $K$  é  $2^k$ , com base

$$B = \{\beta_A = \prod_{\lambda_i \in I} \lambda_i, I \subseteq A\},$$

onde  $A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ . Se  $I = \emptyset$  então  $\beta_A = 1$ .

Como  $L$  é uma extensão algébrica normal e separável de  $K$ , temos que  $|L : K| = |Gal(L, K)| = 2^k$ .

Agora vejamos quem é o grupo de Galois  $Gal(L/K)$ .

Note que para os elementos  $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$  temos os seguintes corpos intermediários entre  $K$  e  $L$ ,

$$L_0 = K \hookrightarrow L_{k-1} \xrightarrow[\underbrace{\quad}_2]{\hookrightarrow} L_k = L$$

existe um  $L_{k-1}$ -automorfismo de  $L$  o qual troca as duas raízes  $\pm\lambda_k$  de  $t^2 - (x - u_k)^2 - (y - v_k)^2$ , chamamos este automorfismo de  $\alpha_k$ .

Desde que este é a identidade sobre  $L_{k-1}$ , o é também sobre  $K$ , assim, este é um  $K$ -automorfismo também.

Similarmente, para os elementos  $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_k$  temos o corpo intermediário  $L_{k-1}^i = K(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_k)$ , logo existe um  $L_{k-1}^i$ -automorfismo  $\alpha_i$  de  $L$  que permuta as raízes  $\pm\lambda_i$  para cada  $i = 1, \dots, k-1$ , e  $\alpha_i$  é também um  $K$ -automorfismo.

Os automorfismos achados agem sobre as raízes  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  como segue:

$$\begin{aligned} \alpha_i : \lambda_i &\longmapsto -\lambda_i \\ \lambda_j &\longmapsto \lambda_j \quad i \neq j \end{aligned}$$

Compondo estes automorfismos temos por exemplo que  $\prod_{i=1}^k \alpha_i$  troca o sinal das raízes  $\lambda_i$  e os automorfismos  $\alpha_i^2, \prod_{i=1}^k \alpha_i \prod_{j=1}^k \alpha_j$  deixam fixos os  $\lambda_i$ , assim estes automorfismos são iguais a identidade  $id$ . Portanto o grupo de Galois  $Gal(L/K)$  é

$$Gal(L/K) = \{\gamma_{A'} = \prod_{\alpha_i \in I'} \alpha_i, I' \subseteq A'\},$$

onde  $A' = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ , com  $|Gal(L, K)| = 2^k$ .

**Observação 2.1** Por abuso de notação consideraremos por agora os  $u_i, v_i, d$  variáveis, já depois os consideraremos como números.

Agora considere a seguinte expressão

$$p_k(x, y) = \prod_{\sigma_i \in \{-1, 1\}^k} \left( d - \sum_{i=1}^k \sigma_i \cdot \sqrt{(x - u_i)^2 + (y - v_i)^2} \right), \quad (2.2)$$

como uma equação  $p_k(x, y) = g(d) \in L[d]$ .

**Observação 2.2** Note que o lado direito de (2.2) se anula sobre a  $k$ -*ellipse*, o que significa que a  $k$ -*ellipse* está contida no conjunto de zeros de  $p_k(x, y)$ .

O seguinte lema nos diz que a expressão (2.2) é de fato um polinômio irreduzível de grau  $2^k$  em  $d$ . Antes de entrar ao nosso lema, precisamos enunciar o seguinte resultado da teoria de Galois.

**Proposição 2.3** ([4], prop 4.4 pág. 553) *Seja  $G$  um grupo finito de automorfismos de um corpo  $H$ , e seja  $F$  seu corpo fixo. Seja  $\{\beta_1, \dots, \beta_r\}$  a órbita de um elemento  $\beta = \beta_1 \in H$  sobre a ação de  $G$ . Então  $\beta$  é algébrico sobre  $F$ , seu grau sobre  $F$  é  $r$ , e seu polinômio irredutível sobre  $F$  é  $g(z) = (z - \beta_1) \dots (z - \beta_r)$ .*

**Lema 2.4** *A expressão descrita em (2.2) é um polinômio mônico irredutível de grau  $2^k$  na variável  $d$ .*

**Demonstração.** Pelo exposto anteriormente, podemos aplicar a proposição 2.3 a  $H = L$ ,  $F = K$ ,  $G = Gal(L/K)$  e tomar o elemento  $\beta = \sum_{i=1}^k \lambda_i$  ( $\lambda_i$  como em (2.1)) em  $L$ . A órbita de  $\beta$  pela ação do grupo de Galois  $G$  é

$$Orb(\beta) = \left\{ \sum_{i=1}^k \sigma_i \cdot \lambda_i \right\}, \quad \sigma_i \in \{-1, 1\}^k,$$

neste caso  $r = 2^k$ . Portanto, temos que  $\beta$  é algébrico sobre  $K$ , com polinômio irredutível

$$g(d) = \prod_{\beta_i \in Orb(\beta)} (d - \beta_i) = \prod_{\sigma \in \{-1, 1\}^k} \left( d - \sum_{i=1}^k \sigma_i \cdot \lambda_i \right)$$

de grau  $2^k$ . Observe que este é um polinômio mônico na variável  $d$ , cujos coeficientes são funções simétricas elementares dos  $\beta_i \in Orb(\beta)$ ,

$$\begin{aligned} s_1 &= \sum_{i=1}^{2^k} \beta_i \\ s_2 &= \beta_1 \beta_2 + \beta_1 \beta_3 + \dots + \beta_{2^k-1} \beta_{2^k} = \sum_{i < j} \beta_i \beta_j \\ s_3 &= \sum_{i < j < k} \beta_i \beta_j \beta_k \\ &\vdots \\ s_{2^k} &= \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{2^k}. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que  $R$  é um DFU com corpo de frações  $K$ , então os elementos de  $K$  inteiros sobre  $R$  são precisamente os elementos de  $R$ . Segue que os coeficientes  $s_i$  de  $g(d)$  são inteiros sobre  $R$  (pois os  $\lambda_i$  são inteiros sobre  $R$ , logo a soma e o produto deles é inteiro sobre  $R$ ) e além disso pertencem a  $R$ . Assim, temos que  $g(d)$  pertence a  $R[d]$ .

Portanto, concluímos que  $g(d)$  é um polinômio mônico irredutível na variável  $d$  em  $R[d]$ , de grau  $2^k$ . ■

**Observação 2.5** Note que o grau do polinômio  $p_k(x, y)$  é no máximo  $2^k$  nas variáveis  $x, y$ , de fato, podemos tomar o limite a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p_k(x, y)}{x^{2^k+1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2^k+1}} \prod_{\sigma \in \{-1, 1\}^k} \left( d - \sum_{i=1}^k \sigma_i \cdot \sqrt{(x - u_i)^2 + (y - v_i)^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \prod_{\sigma \in \{-1, 1\}^k} \left( \frac{d}{x} - \sum_{i=1}^k \sigma_i \cdot \sqrt{\frac{(x - u_i)^2}{x^2} + \frac{(y - v_i)^2}{x^2}} \right) \\ &= \left( \frac{d}{x^2} - \sum_{i=1}^k \sigma_i \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{x} - \frac{u_i}{x^2}\right)^2 + \left(\frac{y - v_i}{x^2}\right)^2} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Mais adiante explicitaremos os graus efetivos deste polinômio, e veremos que ela vai depender de  $k$  ser par ou ímpar.

O seguinte teorema mostra que nosso polinômio  $p_k(x, y)$  pode ser representado pelo determinante de uma matriz simétrica.

**Teorema 2.6** *Sejam  $(u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k) \in \mathbb{R}^2$ , definimos a seguinte matriz  $2^k \times 2^k$*

$$L_k(x, y) := d \cdot I_{2^k} + \begin{bmatrix} x - u_1 & y - v_1 \\ y - v_1 & -x + u_1 \end{bmatrix} \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \begin{bmatrix} x - u_k & y - v_k \\ y - v_k & -x + u_k \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Então a  $k$ -elipse tem a seguinte representação como determinante

$$p_k(x, y) = \det L_k(x, y). \quad (2.4)$$

**Demonstração.** Seja  $L$  o corpo como na demonstração do lema 2.4, e consideremos a matriz  $2 \times 2$  que aparece na soma tensorial de (2.3)

$$M_i = \begin{bmatrix} x - u_i & y - v_i \\ y - v_i & -x + u_i \end{bmatrix}.$$

Podemos observar que os autovalores de  $M_i$  são  $\pm \sqrt{(x - u_i)^2 + (y - v_i)^2}$  e que a matriz  $M_i$  é ortogonalmente similar a uma matriz da forma

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} \sqrt{(x - u_i)^2 + (y - v_i)^2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{(x - u_i)^2 + (y - v_i)^2} \end{bmatrix}$$

com matriz ortogonal

$$U_i = \frac{1}{\sqrt{((x - u_i) + c_i)^2 + (y - v_i)^2}} \begin{bmatrix} (x - u_i) + c_i & y - v_i \\ y - v_i & -((x - u_i) + c_i) \end{bmatrix},$$

onde  $c_i = \sqrt{(x - u_i)^2 + (y - v_i)^2}$ . Como o lema 1.10 é válido para qualquer corpo, em particular para  $L$ , o que implica que a matriz  $L_k(x, y)$  seja ortogonalmente similar a uma matriz diagonal de ordem  $2^k \times 2^k$  com entradas na diagonal da forma

$$d + \sum_{i=1}^k \sigma_i \cdot \sqrt{(x - u_i)^2 + (y - v_i)^2}, \quad \sigma_i \in \{-1, 1\} \quad (2.5)$$

Com efeito, temos que  $U_i$  é matriz ortogonal tal que  $M_i = U_i \cdot \Lambda_i \cdot U_i^T$  para  $i = 1, \dots, k$ , logo pelo lema 1.10

$$(U_1 \otimes \dots \otimes U_k)^T \cdot (M_1 \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} M_k) \cdot (U_1 \otimes \dots \otimes U_k) = \Lambda_1 \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \Lambda_k$$

além disso, se denotamos por  $V = U_1 \otimes \dots \otimes U_k$ ,  $N = M_1 \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} M_k$  e  $Z = \Lambda_1 \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \Lambda_k$ , temos que

$$V^T \cdot (d \cdot I_{2^k} + N) \cdot V = V^T \cdot (d \cdot I_{2^k}) \cdot V + V^T \cdot N \cdot V = d \cdot I_{2^k} + Z = D_k$$

onde  $D_k$  é uma matriz diagonal com entradas na diagonal da forma (2.5). Logo o polinômio que representa a  $k$ -elipse é dado por

$$\begin{aligned} \det L_k(x, y) &= \det(V^T \cdot (d \cdot I_{2^k} + N) \cdot V) \\ &= \det(d \cdot I_{2^k} + Z) \\ &= \prod_{\sigma \in \{-1, 1\}^k} \left( d - \sum_{i=1}^k \sigma_i \cdot \sqrt{(x - u_i)^2 + (y - v_i)^2} \right) \\ &= p_k(x, y). \end{aligned}$$

■

## 2.2 Grau da k-Elipse

Agora com nossos resultados anteriores, podemos demonstrar nosso teorema principal:

**Teorema 2.7** *A  $k$ -elipse tem grau  $2^k$  se  $k$  é ímpar e grau  $2^k - \binom{k}{k/2}$  se  $k$  é par. Este polinômio tem a seguinte representação*

$$p_k(x, y) = \det(x \cdot A_k + y \cdot B_k + C_k) \quad (2.6)$$

onde  $A_k, B_k$  e  $C_k$  são matrizes simétricas de ordem  $2^k \times 2^k$ . As entradas de  $A_k$  e  $B_k$  são números inteiros, e as entradas de  $C_k$  são formas lineares nas variáveis  $d, u_1, v_1, \dots, u_k, v_k$ .

**Demonstração.**

Para mostrar a afirmação que concerne ao grau de  $p_k(x, y)$  como polinômio em  $(x, y)$ , vamos considerar o seguinte polinômio

$$g(t) := p_k(t \cos \theta, t \sin \theta)$$

em  $\mathbb{Q}(\cos \theta, \sin \theta)$ .

Devemos mostrar que

$$\deg_t(g(t)) = \begin{cases} 2^k & \text{se } k \text{ é ímpar,} \\ 2^k - \binom{k}{k/2} & \text{se } k \text{ é par.} \end{cases}$$

Primeiramente mostremos o seguinte: seja  $f(x, y)$  um polinômio de grau  $r$ , então  $g(t) = f(t \cos \theta, t \sin \theta)$  tem grau  $r$  na variável  $t$ .

Como todo polinômio pode ser expresso como a soma de polinômios homogêneos, podemos supor que  $f(x, y)$  é homogêneo:

$$f(x, y) = a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} y + \dots + a_1 x y^{r-1} + a_0 y^r.$$

Substituindo  $(x, y) = (t \cos \theta, t \sin \theta)$  em  $f(x, y)$  temos

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t \cos \theta, t \sin \theta) \\ &= t^r (a_r \cos^r \theta + a_{r-1} \cos^{r-1} \theta \sin \theta) + \dots + a_1 \cos \theta \sin^{r-1} \theta + a_0 \sin^r \theta \\ &= t^r \cos^r \theta \underbrace{(a_r + a_{r-1} \tan \theta + \dots + a_1 \tan^{r-1} \theta + a_0 \tan^r \theta)}_{(*)} \end{aligned}$$

como  $\tan \theta$  é transcendente sobre  $\mathbb{Q}$ , temos que a expressão em  $(*)$  não é nula. Portanto, o grau do polinômio  $g(t)$  é  $r$ .

Do teorema 2.6 temos que

$$p_k(x, y) = \det L_k(x, y),$$

com

$$L_k(x, y) = d \cdot I_{2^k} + \begin{bmatrix} x - u_1 & y - v_1 \\ y - v_1 & -x + u_1 \end{bmatrix} \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \begin{bmatrix} x - u_k & y - v_k \\ y - v_k & -x + u_k \end{bmatrix}.$$

Desenvolvendo a soma tensorial acima, podemos escrever  $L_k(x, y)$  como

$$\begin{aligned} L_k(x, y) &= \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix} \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix} + C_k \\ &= xA_k + yB_k + C_k, \end{aligned}$$



onde

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$C_k = \begin{bmatrix} -u_1 & -v_1 \\ -v_1 & u_1 \end{bmatrix} \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \begin{bmatrix} -u_k & -v_k \\ -v_k & u_k \end{bmatrix} + d \cdot I_{2k}.$$

Substituindo  $(x, y)$  por  $(t \cos \theta, t \sin \theta)$  obtemos

$$L_k(t \cos \theta, t \sin \theta) = t \cdot \left( \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \right) + C_k \quad (2.7)$$

e  $C_k$  não depende de  $t$ . Denotemos por

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}.$$

É fácil ver que a matriz  $A$  é ortogonalmente similar a

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

com matriz ortogonal

$$B = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & -\cos(\theta/2) \end{bmatrix},$$

e

$$B^T \cdot A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Seja

$$U = \underbrace{B \otimes \dots \otimes B}_{k \text{ vezes}}$$

e multipliquemos antes e depois em (2.7) por  $U^T$  e  $U$ . Daqui obtemos

$$U^T \cdot L_k(t \cos \theta, t \sin \theta) \cdot U = t \cdot E_k + U^T \cdot C_k \cdot U,$$

onde

$$E_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Observe que a matriz  $E_k$  é uma matriz diagonal cujas entradas são somas de  $k$  cópias de  $-1$  ou  $1$  em todas as  $2^k$  possibilidades.

Agora, vejamos que

$$\begin{aligned} U^T \cdot C_k \cdot U &= U^T \cdot (d \cdot I_{2^k}) \cdot U + U^T \cdot \left( \begin{bmatrix} -u_1 & -v_1 \\ -v_1 & u_1 \end{bmatrix} \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \begin{bmatrix} -u_k & -v_k \\ -v_k & u_k \end{bmatrix} \right) \cdot U \\ &= d \cdot I_{2^k} + \left( B^T \cdot \begin{bmatrix} -u_1 & -v_1 \\ -v_1 & u_1 \end{bmatrix} \cdot B \right) \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \left( B^T \cdot \begin{bmatrix} -u_k & -v_k \\ -v_k & u_k \end{bmatrix} \cdot B \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

além disso, note que

$$B^T \cdot \begin{bmatrix} -u_i & -v_i \\ -v_i & u_i \end{bmatrix} \cdot B = \begin{bmatrix} -a_i & b_i \\ b_i & a_i \end{bmatrix}$$

onde  $a_i = u_i \cos \theta + v_i \sin \theta$  e  $b_i = u_i \sin \theta - v_i \cos \theta$ . A matriz  $U^T \cdot C_k \cdot U$  é uma matriz cujas entradas na diagonal são da forma

$$d + \sum_{i=1}^k \sigma_i \cdot a_i, \quad \sigma_i \in \{-1, 1\}. \quad (2.10)$$

Como  $d, u_i, v_i (i = 1, \dots, k)$  são algebricamente independentes sobre  $\mathbb{Q}(\cos \theta, \sin \theta)$ , a expressão (2.10) é diferente de zero. Então

$$U^T \cdot L_k(t \cos \theta, t \sin \theta) \cdot U = M(b_1, \dots, b_k, d + \sum_{i=1}^k \sigma_i \cdot (t + a_i)), \quad \sigma_i \in \{-1, 1\}$$

onde  $M = M(b_1, \dots, b_k, d + \sum_{i=1}^k \sigma_i \cdot (t + a_i))$  denota uma matriz com entradas na diagonal da forma  $d + \sum_{i=1}^k \sigma_i \cdot (t + a_i)$ ,  $\sigma_i \in \{-1, 1\}$ .

Lembremos que a matriz  $E_k$  em (2.8) é uma matriz diagonal cujas entradas que são somas de  $k$  cópias de  $-1$  ou  $1$  em todos os  $2^k$  possibilidades. Em consequência temos que nenhuma destas somas é zero se  $k$  é ímpar, e exatamente  $\binom{k}{k/2}$  destas somas são zeros quando  $k$  é par, o que mostra que o posto de  $E_k$  é  $2^k$  quando  $k$  é ímpar e  $2^k - \binom{k}{k/2}$  quando  $k$  é par. Isto quer dizer que a matriz  $M$  possui a variável  $t$   $2^k$ -vezes em sua diagonal, quando  $k$  é ímpar, e  $2^k - \binom{k}{k/2}$  vezes quando  $k$  é par.

Portanto

$$\deg(g(t)) = \deg(\det(M(b_1, \dots, b_k, d + \sum_{i=1}^k \sigma_i \cdot (t + a_i))) = \begin{cases} 2^k & \text{se } k \text{ é ímpar,} \\ 2^k - \binom{k}{k/2} & \text{se } k \text{ é par.} \end{cases}$$

■

**Exemplo 2.8** Vejamos quem são as matrizes  $A_k, B_k$  e  $C_k$  do teorema 2.7 para os casos  $k = 2, 3$ .

Para o caso  $k = 2$  as matrizes  $A_2, B_2$  e  $C_2$  são dadas por:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \dot{\oplus} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = E_2,$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{\oplus} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$C_2 = \begin{bmatrix} -u_1 & -v_1 \\ -v_1 & u_1 \end{bmatrix} \dot{\oplus} \begin{bmatrix} -u_2 & -v_2 \\ -v_2 & u_2 \end{bmatrix} + d \cdot I_{2^2} = \begin{bmatrix} d - u_1 - u_2 & -v_1 & -v_2 & 0 \\ -v_1 & d + u_1 - u_2 & 0 & -v_2 \\ -v_2 & 0 & d - u_1 + u_2 & -v_1 \\ 0 & -v_2 & -v_1 & d + u_1 + u_2 \end{bmatrix}.$$

Assim a matriz  $L_2(x, y)$  é dado por

$$L_k(x, y) = x \cdot A_2 + y \cdot B_2 + C_2 = \begin{bmatrix} d + 2x - u_1 - u_2 & y - v_1 & y - v_2 & 0 \\ y - v_1 & d + u_1 - u_2 & 0 & -v_2 \\ y - v_2 & 0 & d - u_1 + u_2 & y - v_1 \\ 0 & y - v_2 & y - v_1 & d - 2x + u_1 + u_2 \end{bmatrix}.$$

Podemos ver que a matriz  $E_2$  tem posto 2, logo, o grau do polinômio

$$p_2(x, y) = \det L_2(x, y)$$

é 2.

Para o caso  $k = 3$  temos

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \dot{\oplus} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \dot{\oplus} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = E_3,$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{\oplus} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{\oplus} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$C_3 = \begin{bmatrix} -u_1 & -v_1 \\ -v_1 & u_1 \end{bmatrix} \dot{\oplus} \begin{bmatrix} -u_2 & -v_2 \\ -v_2 & u_2 \end{bmatrix} \dot{\oplus} \begin{bmatrix} -u_3 & -v_3 \\ -v_3 & u_3 \end{bmatrix} + d \cdot I_{2^3}$$

$$= \begin{bmatrix} d - u_1 - u_2 - u_3 & y - v_1 & y - v_2 & 0 \\ -v_1 & d + u_1 - u_2 - u_3 & 0 & -v_2 \\ -v_2 & 0 & d - u_1 + u_2 - u_3 & -v_1 \\ 0 & -v_2 & -v_1 & d + u_1 + u_2 - u_3 \\ -v_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -v_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -v_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -v_3 \\ -v_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -v_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -v_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -v_3 \\ d - u_1 - u_2 + u_3 & -v_1 & -v_2 & 0 \\ -v_1 & d + u_1 - u_2 + u_3 & 0 & -v_2 \\ -v_2 & 0 & d - u_1 + u_2 + u_3 & -v_1 \\ 0 & -v_2 & -v_1 & d + u_1 + u_2 + u_3 \end{bmatrix}$$

Assim a matriz  $L_3(x, y)$  é dado por

$$\left[ \begin{array}{cccc} d + 3x - u_1 - u_2 - u_3 & y - v_1 & y - v_2 & 0 \\ y - v_1 & d + x + u_1 - u_2 - u_3 & 0 & y - v_2 \\ y - v_2 & 0 & d + x - u_1 + u_2 - u_3 & y - v_1 \\ 0 & y - v_2 & y - v_1 & d - x + u_1 + u_2 - u_3 \\ y - v_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y - v_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y - v_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y - v_3 \\ \\ y - v_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y - v_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y - v_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y - v_3 \\ d + x - u_1 - u_2 + u_3 & y - v_1 & y - v_2 & 0 \\ y - v_1 & d - x + u_1 - u_2 + u_3 & 0 & y - v_2 \\ y - v_2 & 0 & d - x - u_1 + u_2 + u_3 & y - v_1 \\ 0 & y - v_2 & y - v_1 & d - 3x + u_1 + u_2 + u_3 \end{array} \right].$$

Repare que a matriz  $E_3$  acima tem posto 8, portanto o polinômio  $p_3(x, y)$  tem grau 8.

# Chapter 3

## Gênero da $k$ -elipse

Neste capítulo, consideramos o caso particular  $k = 3$  da  $k$ -elipse com focos  $\{(u_i, v_i)\}_{i=1}^3$  específicos. Explicitaremos o polinômio  $p_3(x, y)$  e estudaremos as singulares e seu gênero. Para estudar as singularidades de um polinômio, primeiro relembremos um pouco do que é um ponto singular, sua multiplicidade, a reta tangente que passa por ele e o tipo de ponto que ele é (ver [7], p 32,53).

### 3.1 Pontos singulares

Seja  $C \subset \mathbb{k}^2$  uma curva definida pelo conjunto de zeros do polinômio  $F(x, y) \in K[x, y]$  de grau  $n$ , e seja  $P = (a, b) \in C$ .

O ponto  $P$  é chamado ponto *simples* de  $F$  se a derivada

$$F_x(P) \neq 0 \quad \text{ou} \quad F_y(P) \neq 0.$$

Neste caso a reta

$$F_x(P)(x - a) + F_y(P)(y - b) = 0$$

é chamado a reta tangente à curva  $C$  em  $P$ .

Um ponto que não é simples, é chamado ponto *singular*.

**Definição 3.1** Suponha que  $P = (0, 0)$  e escreva

$$F = F_m + F_{m+1} + \dots + F_n,$$

com  $F_i$  polinômio homogêneo de grau  $i$  para  $m \leq i \leq n$  e  $F_m \neq 0$ . Definimos  $m$  como a multiplicidade de  $F$  em  $P$ , e escrevemos  $m = m_P(F)$ .

Se  $p \notin C$ ,  $m_P(F) = 0$

Agora suponha que  $P = (a, b) \neq 0$ , escrevemos

$$F(x + a, y + b) = F_m(x, y) + (\text{termos de grau } > m).$$

O polinômio homogêneo  $F_m(x, y)$  pode ser decomposto como:

$$F_m = \prod (\alpha_i x + \beta_i y)^{r_i},$$

onde os fatores lineares  $\alpha_i x + \beta_i y$  são retas distintas. As retas

$$l_i = \alpha_i(x - a) + \beta_i(y - b)$$

são as *retas tangentes* de  $F$  em  $P$ . O expoente  $r_i$  é a *multiplicidade* da tangente  $l_i$

Usando regras de derivação se pode verificar que  $P$  é um ponto simples se, e somente se,  $m = m_P(F) = 1$  e neste caso  $F_1$  é exatamente a reta tangente de  $C$  em  $P$ . Se  $m_P(F) = 2, 3, \dots, m$ ,  $P$  é dito um ponto *duplo, triplo, \dots, m-uplo*. Um ponto  $m$ -uplo  $P \in C$  é ordinário se  $F$  admitir  $m$  tangentes distintas no ponto  $P$ . Um ponto duplo ordinário é chamado um *nó*. Uma *cúspide* é um ponto duplo com tangentes coincidentes.

## 3.2 3-ellipse

**Definição 3.2** A *k-ellipse algébrica* é definida como o fecho Zariski da *k-ellipse*, ou, equivalentemente, o conjunto de zeros do polinômio  $p_k(x, y)$ .

Agora consideremos a equação que da *3-ellipse*

$$p_3(x, y) = \det L_3(x, y)$$

onde  $L_3(x, y)$  é dado no exemplo 2.8. Pelo teorema 2.7 temos que o grau deste polinômio é 8.

Podemos ver que o conjunto de pontos reais na *3-ellipse algébrica* consiste em 4 ovais, correspondentes para as equações

$$\pm \sqrt{(x - u_1)^2 + (y - v_1)^2} \pm \sqrt{(x - u_2)^2 + (y - v_2)^2} \pm \sqrt{(x - u_3)^2 + (y - v_3)^2} = d.$$

Se consideramos o raio  $d$  como uma variável, em adição as variáveis  $x$  e  $y$ , então pelo teorema 2.7 temos uma superfície irreduzível  $\{p_k(x, y, d) = 0\}$  de grau  $2^k$ .

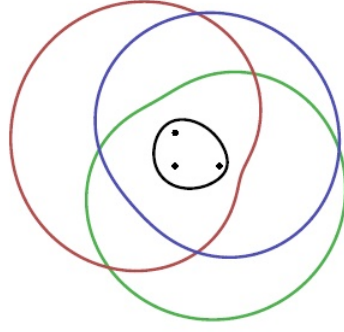


Figure 3.1: O fecho Zariski da 3-elipse é uma curva algébrica de grau 8(ver [2] pág. 8 )

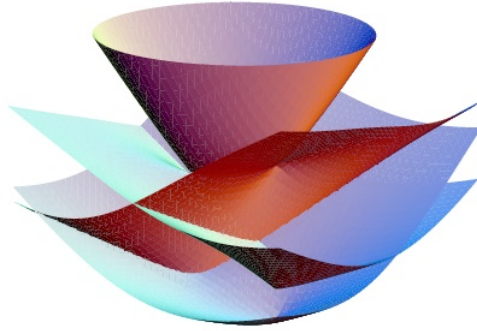


Figure 3.2: superfície irreduzível  $\{p_3(x, y, d) = 0\}$ (ver [2] pág. 9 )

Substituindo os pontos  $(u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3)$  por  $(-1, 0), (1, 0), (0, 1)$  e tomando  $d = 1$  em  $p_3(x, y)$ , obtemos o seguinte polinômio:

$$\begin{aligned} p_3(x, y) = & 9x^8 + 36x^6y^2 + 54x^4y^4 + 36x^2y^6 + 9y^8 - 24x^6y - 72x^4y^3 - 72x^2y^5 - 24y^7 \\ & - 88x^6 - 176x^4y^2 - 88x^2y^4 + 112x^4y + 128x^2y^3 + 16y^5 + 128x^4 - 32x^2y^2 \\ & - 16y^4 - 256x^2y + 64y^3 \end{aligned}$$

Agora analisemos o tipo de singularidade que  $p_3(x, y)$  possui, para isso calculemos o gradiente de  $p_3(x, y)$

$$\begin{aligned} p_3(x, y)_x = & 72x^7 + 216x^5y^2 + 216x^3y^4 + 72xy^6 - 144x^5y - 288x^3y^3 - 144xy^5 - 528x^5 \\ & - 704x^3y^2 - 176xy^4 + 448x^3y + 256xy^3 + 512x^3 - 64xy^2 - 512xy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3(x, y)_y = & 72x^6y + 216x^4y^3 + 216x^2y^5 + 72y^7 - 24x^6 - 216x^4y^2 - 360x^2y^4 - 168y^6 \\ & - 352x^4y - 352x^2y^3 + 112x^4 + 384x^2y^2 + 80y^4 - 64x^2y - 64y^3 - 256x^2 \\ & + 192y^2. \end{aligned}$$



Os pontos singulares são calculados fazendo

$$p_3(x, y) = p_3(x, y)_x = p_3(x, y)_y = 0.$$

Resolvendo as equações acima podemos obter os seguintes pontos de interseção  $(1, -1)$ ,  $(-1, -1)$ ,  $(0, 0)$  e  $(0, 2)$ , cujas multiplicidades em  $p_3(x, y)$  são 2, 2, 3 e 2 respectivamente. Existem outros pontos chamados pontos no infinito ([7] p 44), tais pontos são calculados homogeneizando o polinômio  $p_3(x, y)$ , isto é,

$$\begin{aligned} p_3(x, y, z) = & 9x^8 + 36x^6y^2 + 54x^4y^4 + 36x^2y^6 + 9y^8 - 24x^6yz - 72x^4y^3z - 72x^2y^5z \\ & - 24y^7z - 88x^6z^2 - 176x^4y^2z^2 - 88x^2y^4z^2 + 112x^4yz^3 + 128x^2y^3z^3 \\ & + 16y^5z^3 + 128x^4z^4 - 32x^2y^2z^4 - 16y^4z^4 - 256x^2yz^5 + 64y^3z^5, \end{aligned}$$

logo calcular os zeros do polinômio

$$p_3(x, y, 0).$$

Note que

$$p_3(x, y, 0) = 9(x^2 + y^2)^4,$$

logo os pontos no infinito são  $(1, i)$  e  $(1, -i)$  de multiplicidades 4.

Repare que o ponto  $(0, 0)$  é um ponto triplo ordinário pois nesse ponto o polinômio  $p_3(x, y)$  tem 3 tangentes distintas, isto é:

$$\begin{aligned} f_3(x, y) &= -256x^2yz^5 + 64y^3z^5 \\ &= 64y(-16x^2 + y^2) \\ &= 64y(y - 4x)(y + 4x). \end{aligned}$$

Agora vejamos que tipo de ponto é  $(0, 2)$ . Para isto vamos substituir  $(x, y)$  por  $(x, y+2)$  em  $p_3(x, y)$  para logo obter

$$\begin{aligned} f(x, y+2) &= 9x^8 + 36x^6y^2 + 54x^4y^4 + 36x^2y^6 + 9y^8 + 120x^6y + 360x^4y^3 + 360x^2y^5 + 120y^7 \\ &= +8x^6 + 688x^4y^2 + 1352x^2y^4 + 672y^6 + 272x^4y + 2304x^2y^3 + 2032y^5 - 64x^4 + 1504x^2y^2 \\ &= +3504y^4 - 512x^2y + 3264y^3 - 1024x^2 + 1280y^2, \end{aligned}$$

daqui temos que

$$\begin{aligned} f_3(x, y) &= -1024x^2 + 1280y^2 \\ &= -256(2x - \sqrt{5}y)(2x + \sqrt{5}y), \end{aligned}$$

assim vemos que as retas tangentes distintas de  $p_3(x, y)$  em  $(0, 2)$  são

$$l_1 = 2x - \sqrt{5}(y - 2) \text{ e}$$

$$l_2 = 2x + \sqrt{5}(y - 2),$$

logo o ponto  $(0, 2)$  é ponto duplo ordinário. De maneira similar se pode verificar que os pontos  $(1, -1)$  e  $(-1, -1)$  são pontos duplos ordinários.

Agora vamos a calcular o gênero([7] pág. 102]) de nossa curva. Lembremos que o gênero é dado pela seguinte equação:

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum \frac{n_P(n_P-1)}{2}, \quad (3.1)$$

onde  $n$  é o grau do polinômio e  $n_P$  é a multiplicidade de  $P$ . Substituindo as multiplicidades dos pontos singulares em (3.1), obtemos

$$g = \frac{(8-1)(8-2)}{2} - \left\{ 3 \frac{2(2-1)}{2} + \frac{3(3-1)}{2} + 2 \frac{4(4-1)}{2} \right\} = 3.$$

Portanto a *3-ellipse* é uma curva com gênero 3. Do jeito similar pode-se ver que o círculo e a elipse

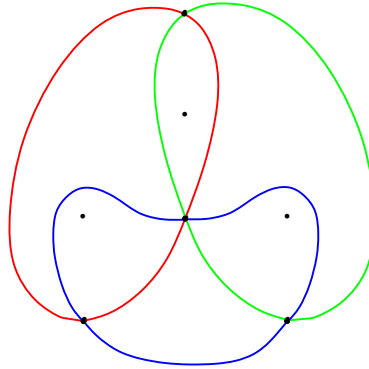


Figure 3.3: Fecho Zariski da *3 ellipse* com raio  $d = 1$

são curvas de gênero zero. Existe um programa chamado SINGULAR que facilita o cálculo do gênero da *k-ellipse* para os casos  $k = 1, \dots, 4$ . Por exemplo, para o cálculo do gênero da *3-ellipse*, prosseguimos da seguinte maneira:

```
ring r=0,(x,y),dp;
LIB "normal.lib";
matrix M[2][2]=x+1,y,y,-x-1; //matriz M_1=M no ponto (-1,0)
matrix N[2][2]=x-1,y,y,-x+1; //matriz M_2=N no ponto (1,0)
matrix O[2][2]=x,y-1,y-1,-x; //matriz M_3=O no ponto (0,1)
matrix I[2][2]=1,0,0,1; // matriz identidade
matrix I3[8][8]=tensor(I,tensor(I,I)); matriz identidade I_8
matrix M3[8][8]=tensor(M,tensor(I,I)); matriz M\otimes I\otimes I
matrix N3[8][8]=tensor(N,tensor(N,I)); matriz I\otimes N\otimes I
```

```

matrix O3[8][8]=tensor(I,tensor(I,0)); matriz I\otimes I\otimes 0
matrix D3=I3+M3+N3+O3; //matriz da 3-ellipse com raio d=1
det(D3); // polinômio p_3(x,y)
ideal j=det(D3);
genus(j); // gênero da 3-ellipse
//g=3
ideal J=j,jacob(j);
minAssGTZ(J); //pontos singulares
LIB "surfex.lib"; // desenho da 3-ellipse
ring r1+0,(x,y,z),dp;
poly f=det(D3);
plotRot(f);

```

para  $k = 1, \dots, 4$ , são 0, 0, 3, 6 respectivamente.

No caso  $d = 8$  temos o seguinte polinômio

$$\begin{aligned}
q_3(x, y) = & 9x^8 + 36x^6y^2 + 54x^4y^4 + 36x^2y^6 + 9y^8 - 24x^6y - 72x^4y^3 - 72x^2y^5 \\
& - 24y^7 - 1852x^6 - 5468x^4y^2 - 5380x^2y^4 - 1764y^6 + 3640x^4y + 7184x^2y^3 \\
& + 3544y^5 + 121718x^4 + 238108x^2y^2 + 116534y^4 - 181192x^2y - 154664y^3 \\
& - 2770236x^2 - 2808036y^2 + 1936872y + 13752585
\end{aligned}$$

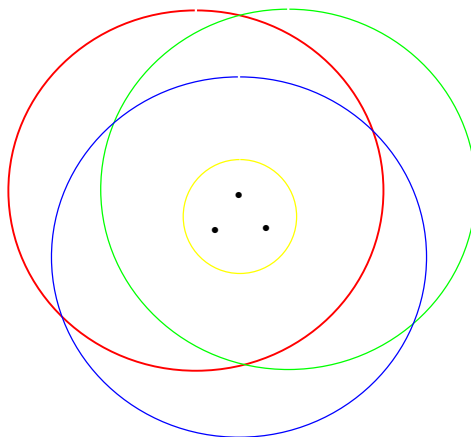


Figure 3.4: Fecho Zariski da 3 ellipse com raio  $d = 8$

# Chapter 4

## Generalizações

A representação semidefinida da  $k$ -*ellipse* do teorema 2.7 pode ser generalizado em muitas direções. Nossa primeira generalização corresponde à inclusão de pesos positivos arbitrários para as distâncias, enquanto a segunda generalização é estender nossos resultados de curvas planas a dimensões maiores.

### 4.1 $k$ -Elipses ponderadas

Consideremos  $k$  pontos  $(u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k)$  no plano real  $\mathbb{R}^2$ , um raio positivo  $d$ , e pesos  $\omega_1, \dots, \omega_k$ . Definimos a  $k$ -*ellipse ponderada* como a seguinte curva plana:

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sum_{i=1}^k \omega_i \cdot \sqrt{(x - u_i)^2 + (y - v_i)^2} = d \right\},$$

onde  $\omega_i$  indica o peso relativo da distância desde  $(x, y)$  ao  $i$ -ésimo foco  $(u_i, v_i)$ . O interior da  $k$ -*ellipse ponderada* é a região convexa

$$\mathcal{E}_k(\omega) := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sum_{i=1}^k \omega_i \cdot \sqrt{(x - u_i)^2 + (y - v_i)^2} \leq d \right\}.$$

O fecho Zariski da  $k$ -*ellipse ponderada* é a  $k$ -*ellipse ponderada algébrica*, dada pelos zeros da seguinte expressão:

$$p_k^\omega(x, y) = \prod_{\sigma \in \{-1, 1\}^k} \left( d - \sum_{i=1}^k \sigma_i \omega_i \cdot \sqrt{(x - u_i)^2 + (y - v_i)^2} \right). \quad (4.1)$$

**Observação 4.1** Assim como no capítulo 2,  $d, u_i, v_i (i = 1, \dots, k)$  foram consideradas variáveis, neste capítulo também os consideraremos variáveis, além disso, adicionaremos outras novas variáveis  $\omega_1, \dots, \omega_k$ .

Podemos considerar  $p_k^\omega(x, y) \in L'[d]$ , onde  $L'$  é a extensão  $k$ -quadrática de  $K'$  (com grau de extensão  $2^k$ ), isto é

$$L' = K'(\mu_1, \dots, \mu_k),$$

onde  $\mu_i = \omega_i \sqrt{(x - u_i)^2 + (y - v_i)^2}$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Cada  $\mu_i$  satisfaz um seguinte polinômio da forma

$$q_i(t) = t^2 - \omega_i^2((x - u_i)^2 + (y - v_i)^2) \quad i = 1, \dots, k$$

$q_i(t) \in K'[t]$ , com  $K' = \mathbb{Q}(x, y, u_1, v_1, \omega_1, \dots, u_k, v_k, \omega_k)$  o corpo de frações de funções de  $R' = \mathbb{Q}[x, y, u_1, v_1, \omega_1, \dots, u_k, v_k, \omega_k]$ .

O grupo de Galois  $Gal(L'/K')$  é dado por:

$$Gal(L'/K') = \langle (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_k) \rangle,$$

onde os  $\alpha'_i$  são automorfismos de  $L'$  fixando  $K'$ , com

$$\alpha'_i : \mu_i \mapsto -\mu_i.$$

A ordem de  $Gal(L'/K')$  é  $2^k$ .

**Lema 4.2** *A expressão (4.1) é um polinômio mônico irredutível de grau  $2^k$  na variável  $d$ .*

**Demonstração.** A demonstração deste lema é similar ao lema 2.4. ■

Este polinômio (4.1) pode ser construído da mesma forma como em (2.4), ou seja, como o determinante de uma matriz simétrica de ordem  $2^k \times 2^k$ .

A construção desta matriz é similar ao do teorema 2.6, neste caso a matriz generalizada é dada como segue:

$$L_k^\omega(x, y) := d \cdot I_{2^k} + \omega_1 \begin{bmatrix} x - u_1 & y - v_1 \\ y - v_1 & -x + u_1 \end{bmatrix} \oplus \dots \oplus \omega_k \begin{bmatrix} x - u_k & y - v_k \\ y - v_k & -x + u_k \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

O seguinte teorema é uma generalização do teorema 2.6.

**Teorema 4.3** *O polinômio que define a  $k$ -elipse ponderada tem uma representação como o determinante de uma matriz simétrica  $L_k^\omega(x, y)$ , isto é:*

$$p_k^\omega(x, y) = \det L_k^\omega(x, y). \quad (4.3)$$

O grau deste polinômio é:

$$\deg(p_k^\omega(x, y)) = 2^k - |\mathcal{P}(\omega)|,$$

onde  $\mathcal{P}(\omega) = \{\sigma \in \{-1, 1\}^k : \sum_{i=1}^k \sigma_i \omega_i = 0\}$ .

**Demonstração.** Seja  $L = K(\omega_1\sqrt{(x-u_1)^2+(y-v_1)^2}, \dots, \omega_k\sqrt{(x-u_k)^2+(y-v_k)^2})$ , e considere a matriz

$$M_i = \omega_i \cdot \begin{bmatrix} x-u_i & y-v_i \\ y-v_i & -x+u_i \end{bmatrix}.$$

Tal matriz é ortogonalmente similar a uma matriz da forma

$$\Lambda_i = \omega_i \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{(x-u_i)^2+(y-v_i)^2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{(x-u_i)^2+(y-v_i)^2} \end{bmatrix},$$

com matriz ortogonal

$$U_i = \frac{1}{\sqrt{((x-u_i)+c_i)^2+(y-v_i)^2}} \begin{bmatrix} (x-u_i)+c_i & y-v_i \\ y-v_i & -((x-u_i)+c_i) \end{bmatrix},$$

onde  $c_i = \sqrt{(x-u_i)^2+(y-v_i)^2}$ . Logo pelo lema 1.10 temos que

$$(U_1 \otimes \dots \otimes U_k)^T \cdot (M_1 \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} M_k) \cdot (U_1 \otimes \dots \otimes U_k) = \Lambda_1 \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \Lambda_k.$$

onde  $\Lambda_1 \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \Lambda_k$  é uma matriz diagonal com entradas da forma

$$\sum_{i=1}^k \sigma_i \cdot \omega_i \cdot \sqrt{(x-u_i)^2+(y-v_i)^2}, \quad \sigma_i \in \{-1, 1\} \quad (4.4)$$

Denotando por  $V = U_1 \otimes \dots \otimes U_k$ ,  $N = M_1 \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} M_k$ ,  $Z = \Lambda_1 \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \Lambda_k$ , e multiplicando antes e depois em  $L_k^\omega(x, y) = d \cdot I_{2k} + N$  temos

$$V^T \cdot (d \cdot I_{2k} + N) \cdot V = V^T \cdot (d \cdot I_{2k}) \cdot V + V^T \cdot N \cdot V = d \cdot I_{2k} + Z = D_k$$

onde  $D_k$  é uma matriz diagonal com entradas da forma

$$d + \sum_{i=1}^k \sigma_i \cdot \omega_i \cdot \sqrt{(x-u_i)^2+(y-v_i)^2}, \quad \sigma_i \in \{-1, 1\} \quad (4.5)$$

Assim, o polinômio da  $k$ -elipse ponderada é dada por:

$$\begin{aligned} \det L_k^\omega(x, y) &= \det(V^T \cdot (d \cdot I_{2k} + N) \cdot V) \\ &= \det(d \cdot I_{2k} + Z) \\ &= \prod_{\sigma \in \{-1, 1\}^k} \left( d - \sum_{i=1}^k \sigma_i \cdot \omega_i \cdot \sqrt{(x-u_i)^2+(y-v_i)^2} \right) \\ &= p_k^\omega(x, y). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Agora para ver o grau do polinômio  $p_k^\omega(x, y)$ , consideremos o seguinte polinômio

$$g(t) := p_k^\omega(t \cos \theta, t \sin \theta).$$

Devemos mostrar que

$$\deg_t(g(t)) = 2^k - |\mathcal{P}(\omega)|,$$

assim, substituindo  $(t \cos \theta, t \sin \theta)$  em  $L_k^\omega(x, y)$  obtemos

$$L_k^\omega(t \cos \theta, t \sin \theta) = t \cdot \left( \omega_1 \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \omega_k \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \right) + C_k(\omega), \quad (4.7)$$

onde

$$C_k(\omega) = \omega_1 \cdot \begin{bmatrix} -u_1 & -v_1 \\ -v_1 & u_1 \end{bmatrix} \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \omega_k \cdot \begin{bmatrix} -u_k & -v_k \\ -v_k & u_k \end{bmatrix} + d \cdot I_{2^k},$$

o qual não depende de  $t$ . Como

$$B^T \cdot A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

onde  $A$  e  $B$  são como na demonstração do teorema 2.7.

Seja

$$U = \underbrace{B \otimes \dots \otimes B}_{k \text{ vezes}}.$$

Multipliquemos antes e depois por  $U^T$  e  $U$  a equação (4.7)

$$\begin{aligned} & U^T \cdot L_k^\omega(t \cos \theta, t \sin \theta) \cdot U \\ &= U^T [t \cdot (\omega_1 \cdot A \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \omega_k \cdot A) + C_k(\omega)] U \\ &= t[\omega_1 \cdot (U^T \cdot A \otimes I_{2^{k-1}} \cdot U) + \dots + \omega_k \cdot (U^T \cdot I_{2^{k-1}} \otimes A \cdot U)] + U^T \cdot C_k(\omega) \cdot U \\ &= t[\omega_1 \cdot ((B^T \cdot A \cdot B) \otimes I_{2^{k-1}}) + \dots + \omega_k \cdot (I_{2^{k-1}} \otimes (B^T \cdot A \cdot B))] + U^T \cdot C_k(\omega) \cdot U \\ &= t[\omega_1 \cdot (B^T \cdot A \cdot B) \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \omega_k \cdot (B^T \cdot A \cdot B)] + U^T \cdot C_k(\omega) \cdot U \\ &= t \cdot E_k(\omega) + U^T \cdot C_k(\omega) \cdot U \end{aligned}$$

onde

$$E_k(\omega) = \omega_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \omega_k \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Observe que a matriz  $E_k(\omega)$  é uma matriz diagonal cujas entradas são somas de  $k$  cópias de  $-\omega_i$  ou  $\omega_i$  em todos os  $2^k$  possibilidades, isto é

$$\sum_{i=1}^k \sigma_i \omega_i, \quad \sigma_i \in \{-1, 1\}.$$

Veja que

$$\begin{aligned} U^T \cdot C_k(\omega) \cdot U &= U^T \cdot (d \cdot I_{2^k}) \cdot U + U^T \cdot \left( \omega_1 \cdot \begin{bmatrix} -u_1 & -v_1 \\ -v_1 & u_1 \end{bmatrix} \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \omega_k \cdot \begin{bmatrix} -u_k & -v_k \\ -v_k & u_k \end{bmatrix} \right) \cdot U \\ &= d \cdot I_{2^k} + \omega_1 \cdot \left( B^T \cdot \begin{bmatrix} -u_1 & -v_1 \\ -v_1 & u_1 \end{bmatrix} \cdot B \right) \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \omega_k \cdot \left( B^T \cdot \begin{bmatrix} -u_k & -v_k \\ -v_k & u_k \end{bmatrix} \cdot B \right) \end{aligned}$$

além disso,

$$B^T \cdot \begin{bmatrix} -u_i & -v_i \\ -v_i & u_i \end{bmatrix} \cdot B = \begin{bmatrix} -a_i & b_i \\ b_i & a_i \end{bmatrix},$$

onde  $a_i = u_i \cos \theta + v_i \sin \theta$  e  $b_i = u_i \sin \theta - v_i \cos \theta$ .

Note que a matriz  $U^T \cdot C_k(\omega) \cdot U$  acima é uma matriz cujas entradas na diagonal são da forma

$$d + \sum_{i=1}^k \sigma_i \cdot \omega_i \cdot a_i, \quad \sigma_i \in \{-1, 1\}. \quad (4.9)$$

Como  $d, \omega_i, u_i, v_i (i = 1, \dots, k)$  são algébricamente independentes sobre  $\mathbb{Q}(\cos \theta, \sin \theta)$ , a expressão (4.9) é diferente de zero.

Logo,

$$U^T \cdot L_k^\omega(t \cos \theta, t \sin \theta) \cdot U = M(b_1, \dots, b_k, d + \sum_{i=1}^k \sigma_i \cdot \omega_i \cdot (t + a_i)), \quad \sigma_i \in \{-1, 1\},$$

onde  $M(b_1, \dots, b_k, d + \sum_{i=1}^k \sigma_i \cdot (t + a_i))$  denota uma matriz com entradas na diagonal da forma  $d + \sum_{i=1}^k \sigma_i \cdot \omega_i \cdot (t + a_i)$ ,  $\sigma_i \in \{-1, 1\}$ . Daqui, segue que

$$\deg(g(t)) = \deg(\det(M(b_1, \dots, b_k, d + \sum_{i=1}^k \sigma_i \cdot \omega_i \cdot (t + a_i))) = 2^k - |\mathcal{P}(\omega)|,$$

onde  $\mathcal{P}(\omega) = \{\sigma \in \{-1, 1\}^k : \sum_{i=1}^k \sigma_i \omega_i = 0\}$ .

■

## 4.2 k-Elipsóides

Tendo já estudado a  $k$ -*ellipse* no plano é natural estendê-la a dimensões maiores para assim obter  $k$ -*elipsóide*. Para isso consideremos  $k$  pontos fixos  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  em  $\mathbb{R}^n$ , com  $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, \dots, u_{in})$ . O



$k$ -elipsóide em  $\mathbb{R}^n$  com estes focos é a hipersuperfície definida por:

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^k \|\mathbf{u}_i - \mathbf{x}\| = d \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^k \sqrt{\sum_{j=1}^n (u_{ij} - x_j)^2} = d \right\}. \quad (4.10)$$

Essa hipersuperfície delimita a região convexa

$$\mathcal{E}_k^n = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^k \|\mathbf{u}_i - \mathbf{x}\| \leq d \right\} \quad (4.11)$$

do  $k$ -elipsóide. O fecho do  $k$ -elipsóide é o  $k$ -elipsóide algébrico definida pela seguinte expressão

$$p_k^n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{\sigma \in \{-1, 1\}^k} \left( d - \sum_{i=1}^k \sigma_i \sqrt{\sum_{j=1}^n (u_{ij} - x_j)^2} \right), \sigma_i \in \{-1, 1\}.$$

Assim como no lema 2.4, se pode mostrar que  $p_k^n(\mathbf{x})$  é um polinômio irreduzível de grau  $2^k$  nas variáveis  $x_1, \dots, x_n$ , e é mônico de grau  $2^k$  na variável  $d$ .

Por um raciocínio similar do capítulo 3 podemos demonstrar o seguinte teorema:

**Teorema 4.4** *O polinômio irreduzível  $p_k^n(\mathbf{x})$  que define o  $k$ -elipsóide algébrico é mônico de grau  $2^k$  no parâmetro  $d$ , e tem grau  $2^k$  em  $\mathbf{x}$  se  $k$  é ímpar, e grau  $2^k - \binom{k}{k/2}$  se  $k$  é par.*

A ideia da demonstração é apresentar o polinômio como um fator do determinante de uma matriz simétrica de formas lineares. A construção de uma tal matriz semidefinida positiva do  $k$ -elipsóide é proceder da seguinte maneira. Fixemos um inteiro  $m \geq 2$  y seja  $\mathbf{M}_i(\mathbf{x})$  qualquer matriz simétrica de ordem  $m \times m$  de posto 2 cujas entradas são formas lineares em  $\mathbf{x}$ , e cujos dois autovalores não nulos são da forma  $\pm \|\mathbf{x} - \mathbf{u}_i\|$ . Com isso em mãos, formamos a soma tensorial destas matrizes como na demonstração do teorema 2.6, para logo observar que  $p_k^n(\mathbf{x})$  é um fator de

$$\det \mathbf{L}_k^{n,m} = \det(d \cdot \mathbf{I}_{m^k} + \mathbf{M}_1(\mathbf{x}) \dot{\oplus} \mathbf{M}_2(\mathbf{x}) \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \mathbf{M}_k(\mathbf{x})) = p_k^{n,m}(\mathbf{x}), \quad (4.12)$$

onde os  $\mathbf{M}_i(\mathbf{x})$ 's podem ter uma forma estandar de tamanho  $m \times m$ , com  $m = n + 1$

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & x_1 - u_{i1} & x_2 - u_{i2} & \dots & x_n - u_{in} \\ x_1 - u_{i1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 - u_{i2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - u_{in} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

tal matriz tem posto 2 com autovalores não nulos

$$\pm \|\mathbf{u}_i - \mathbf{x}\|$$

Por exemplo, para  $n = 2$  temos a seguinte matriz

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & x - u_j & y - v_j \\ x - u_j & 0 & 0 \\ y - v_j & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Estas matrizes  $\mathbf{M}_i$ 's possuem autovalores zero e

$$\pm \sqrt{(x - u_i)^2 + (y - v_i)^2}$$

de multiplicidade 1 cada. Neste caso temos que  $p_k(x, y)$  divide  $p_k^{2,3}(x, y)$ , de fato, cada  $\mathbf{M}_i$  é ortogonalmente similar a uma matriz da forma

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} \sqrt{(x - u_i)^2 + (y - v_i)^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{(x - u_i)^2 + (y - v_i)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

com matriz ortogonal

$$\mathbf{U}_i = \frac{1}{\sqrt{2}c^2} \begin{bmatrix} c^2 & c^2 & 0 \\ -(x - u_i)c & (x - u_i)c & \sqrt{2}(y - v_i) \\ -(y - v_i)c & (y - v_i)c & -\sqrt{2}(x - u_i) \end{bmatrix},$$

onde  $c = \sqrt{(x - u_i)^2 + (y - v_i)^2}$ . Pelo lema 1.10 temos

$$(\mathbf{U}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{U}_k)^T \cdot (\mathbf{M}_1 \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \mathbf{M}_k) \cdot (\mathbf{U}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{U}_k) = \Lambda_1 \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \Lambda_k,$$

onde  $\Lambda_1 \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \Lambda_k$  é uma matriz diagonal de ordem  $3^k \times 3^k$  com entradas na diagonal da forma

$$\sum_{i=1}^k \sigma_i \lambda_i \quad \sigma_i \in \{-1, 1\} \tag{4.13}$$

onde  $\lambda_i$  toma valores  $\pm \sqrt{(x - u_i)^2 + (y - v_i)^2}$  ou 0. Logo

$$\mathbf{V}^T \mathbf{L}_k^{2,3} \mathbf{V} = \Lambda_1 \otimes \Lambda_2 \otimes \dots \otimes \Lambda_k + dI_{3^k} = \mathbf{D}_k$$

onde  $\mathbf{V} = \mathbf{U}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{U}_k$  e  $\mathbf{D}_k$  é uma matriz  $3^k \times 3^k$  com entradas da forma

$$d + \sum_{i=1}^k \sigma_i \lambda_i.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
p_k^{2,3}(x, y) &= \det \mathbf{L}_k^{2,3}(x, y) \\
&= \prod \left( d + \sum_{i=1}^k \sigma_i \lambda_i \right) \\
&= \prod_{\sigma \in \{-1, 1\}^k, \lambda_i \neq 0} \left( d - \sum_{i=1}^k \sigma_i \cdot \lambda_i \right) \prod_{\lambda_i = 0} \left( d + \sum_{i=1}^k \sigma_i \lambda_i \right),
\end{aligned}$$

daqui, temos que  $p_k(x, y)$  é um fator  $p_k^{2,3}(x, y)$ .

**Ideia da demonstração do teorema 4.4.**

Afirmção:  $p_k(x, y)$  é um fator  $p_k^{n,m}(x, y)$ .

Com efeito: Observe que a  $\mathbf{M}_i$  possui autovalores  $\pm \|\mathbf{x} - \mathbf{u}_i\|$  e 0, com multiplicidade 1 e  $m - 2$  respectivamente, de fato, basta mostrar que a seguinte matriz é singular

$$\mathbf{M}_i - \|\mathbf{z}\|I = \begin{bmatrix} \|\mathbf{z}\| & z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ z_1 & \|\mathbf{z}\| & 0 & \dots & 0 \\ z_2 & 0 & \|\mathbf{z}\| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_n & 0 & 0 & \dots & \|\mathbf{z}\| \end{bmatrix},$$

onde  $\|\mathbf{z}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{u}_i\|$  e  $z_j = x_j - u_{ij}$ , ( $j = 1, \dots, k$ ).

Fazendo operações fila, podemos multiplicar a primeira fila por  $\|\mathbf{z}\|$ , e multiplicar por  $z_j$  a  $j$ -ésima fila, ou seja:

$$\begin{bmatrix} \|\mathbf{z}\|^2 & z_1 \|\mathbf{z}\| & z_2 \|\mathbf{z}\| & \dots & z_n \|\mathbf{z}\| \\ z_1^2 & z_1 \|\mathbf{z}\| & 0 & \dots & 0 \\ z_2^2 & 0 & z_2 \|\mathbf{z}\| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_n^2 & 0 & 0 & \dots & z_n \|\mathbf{z}\| \end{bmatrix}.$$

Note que a primeira fila é a soma das outras filas, logo a matriz  $\mathbf{M}_i - \|\mathbf{z}\|I$  é singular. Da mesma maneira se pode verificar para  $-\|\mathbf{x} - \mathbf{u}_i\|$ . Assim  $\mathbf{M}_i$  tem autovalores  $\pm \|\mathbf{x} - \mathbf{u}_i\|$ .

As matrizes  $\mathbf{M}_i$  são ortogonalmente similares a uma matriz diagonal da forma

$$\Lambda_i(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \|\mathbf{x} - \mathbf{u}_i\| & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\|\mathbf{x} - \mathbf{u}_i\| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

então existem matrizes ortogonais  $\mathbf{U}_i$  tais que

$$\mathbf{U}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{U}_i = \Lambda_i.$$

Pelo lema 1.10 obtemos

$$(\mathbf{U}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{U}_k)^T \cdot (\mathbf{M}_1 \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \mathbf{M}_k) \cdot (\mathbf{U}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{U}_k) = \Lambda_1 \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \Lambda_k.$$

Logo, denotando por  $\mathbf{V} = \mathbf{U}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{U}_k$ , temos

$$\mathbf{V}^T \mathbf{L}_k^n \mathbf{V} = \Lambda_1 \otimes \Lambda_2 \otimes \dots \otimes \Lambda_k + d \mathbf{V}^T I_{m^k} \mathbf{V} = \mathbf{D}_k$$

onde  $\mathbf{D}_k$  é uma matriz  $m^k \times m^k$  com entradas da forma

$$d + \sum_{i=1}^k \sigma_i \lambda_i \quad \sigma_i \in \{-1, 1\}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \det \mathbf{L}_k^{n,m} &= \det \mathbf{U}^T \mathbf{L}_k^{n,m} \mathbf{U} \\ &= \prod_{\sigma \in \{-1,1\}^k} \left( d + \sum_{i=1}^k \sigma_i \lambda_i \right) \\ &= \prod_{\sigma \in \{-1,1\}^k, \lambda_i \neq 0} \left( d - \sum_{i=1}^k \sigma_i \cdot \lambda_i \right) \prod_{\lambda_i=0} \left( d + \sum_{i=1}^k \sigma_i \lambda_i \right). \end{aligned}$$

O fator  $\prod_{\sigma \in \{-1,1\}^k, \lambda_i \neq 0} \left( d - \sum_{i=1}^k \sigma_i \cdot \lambda_i \right)$  tem grau  $2^k$  em  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se  $k$  é ímpar, e grau  $2^k - \binom{k}{k/2}$  se  $k$  é par. ■

# Bibliography

- [1] Hamiton Prado Bueno, *ÁLGEBRA LINEAR*, IMPA, 2014.
- [2] Jiawang Nie, Pablo A. Parrilo, and Bernd Sturmfels. *Semidefinite representation of the  $k$ -ellipse*, Algorithms in algebraic geometry, 117-132, IMA Vol. Math. Appl., 146, Springer, New York, 2008.
- [3] Martin Isaacs, *ALGEBRA: A Graduate Course*, Pacific Grove California, 1994.
- [4] Michael Artin, *ALGEBRA*, Prentice-Hall, 1991.
- [5] R.A. Horn and C.R.Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1994.
- [6] Werner Greub, *Multilinear Algebra*, Springer Verlag, 1978.
- [7] William Fulton, *ALGEBRAIC CURVES*, Prentice-Hall, 2008.