Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

Multiplicidade de soluções para problemas com condições de fronteira de Dirichlet e Navier envolvendo o operador p-biharmônico com expoente crítico

Leandro Correa Paes Leme

Orientador: Prof. Hamilton Prado Bueno
Co-orientador: Prof. Helder Rodrigues

Belo Horizonte - 18 de maio de 2015

Para minha família.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela saúde e por tornar possível mais essa vitória.

Agradeço aos professores Hamilton Bueno e Helder Cândido Rodrigues pela orientação, pela paciência e pelo previlégio de trabalharmos juntos.

À minha namorada Larissa Tolentino Drumond pela compreensão e pelo carinho nessa jornada, sempre me apoiando nos momentos mais difíceis e turbulentos.

Agradeço a todos os meus familiares que sempre estiveram ao meu lado, tenho certeza que esta conquista também é de cada um deles, em especial às minhas tias Lola, Nilse, Dete, Cláudia, Tatá e Cida. Aos meus tios Vitor e Paulo. Ao meu irmão Rodrigo, que sempre me apoiou com atitudes e palavras corretas no momento correto. Aos meus maravilhosos padrinhos Carlos e Maria Ilídia. Aos meus pais Roberto e Wilma *(In memorian)*, as duas pessoas mais importantes da minha vida.

Aos Professores Grey Ercole, Liliane Maia, Nicolau Saldanha e Eugênio Massa pela participação como banca examinadora e pelas ricas observações e correções neste trabalho.

Aos professores do departamento de matemática pelo rico ensinamento, aos amigos da pós graduação que indiretamente contribuiram para a elaboração deste trabalho, nos quais não posso deixar de mencionar: Bin Laden, Marcio Chaves, Camila, Juliano, Gilberto, Farley, Celso, Chrystian, Eder M., Júlio E.S., Luiz G. Perona e as Elianes Andrea e Kelli.

"O cientista não é o homem que fornece as verdadeiras respostas;
é quem faz as verdadeiras perguntas."
Claude Lévi-Strauss.

Sumário

Introdução

Neste texto estudamos o operador p-biharmônico com não linearidade côncava-convexa e expoente crítico

$$\Delta_p^2 u := \Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u) = \lambda f(x)|u|^{q-2}u + |u|^{p^*-2}u \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{1}$$

com condições de fronteira de Dirichlet

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \tag{2}$$

e de Navier

$$u = \Delta u = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \tag{3}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave. Supomos que os expoentes p e q satisfaçam $1 < p < \infty$, $N > 2p$, $1 < q < p$ e que o parâmetro λ seja positivo. Denotamos por $p^* = \frac{Np}{N-2p}$ o expoente crítico de Sobolev para problemas de quarta ordem. (Note que a hipótese $N > 2p$ garante a finitude do expoente crítico de Sobolev.) Supomos que a função peso f satisfaça a propriedade

$(f+)$ $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f^+ = \max\{f, 0\} \not\equiv 0$.

Claramente, a hipótese $(f+)$ implica a existência de um aberto $\emptyset \neq \Xi \subset \Omega$ (e, portanto, de medida positiva) tal que f é positiva em Ξ.

Operadores p-biharmônicos

A equação biharmônica $\Delta^2 u = 0$ é uma equação diferencial parcial de quarta ordem que aparece na mecânica quântica e na teoria da elasticidade linear ao modelar o fluxo de Stokes.

Outro exemplo de uma equação que envolve o operador biharmônico é a equação de uma barra descrita a seguir. Sejam $u(x)$ o desvio da posição de equilíbrio de uma barra unidimensional e $\rho(x)$ a densidade de uma carga lateral em x. Supondo que a força elástica seja proporcional ao crescimento do comprimento, para uma barra fixada na altura 0 e nos pontos finais a e b, temos

$$u^{(iv)} - \kappa u'' = \rho,$$

em que $\kappa \geq 0$ representa a tensão inicial da barra, a qual está fixada horizontalmente nos pontos finais (de fronteira). Se permite-se a barra mover livremente nos pontos de fronteira (e no caso de tensão inicial nula), obtemos a equação de quarta ordem

$$u^{(iv)} = \rho.$$

Esta equação pode ser complementada com as seguintes condições de fronteira.

- Grampeada: $u(a) = u(b) = 0 = u'(a) = u'(b)$, também conhecida como condição de fronteira de Dirichlet homogênea.
- Articulada: $u(a) = u(b) = 0 = u''(a) = u''(b)$, também conhecida como condição de fronteira de Navier homogênea.

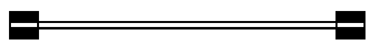

Figura 1: Condição de fronteira de Dirichlet.

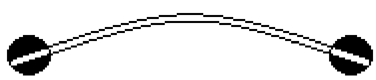

Figura 2: Condição de fronteira de Navier.

Estas condições de fronteira, generalizadas para dimensões maiores, são as condições consideradas nos problemas (1)-(2) e (1)-(3).

McKenna [32] apontou que o operador biharmônico Δ^2 fornece um modelo para o estudo de ondas que viajam em pontes suspensas. O famoso colapso da ponte de Tacoma Narrows (veja [2] e [6]), foi consequência de uma oscilação de torção. McKenna [32] explica este fato da seguinte maneira:

Um grande movimento vertical foi obtido, houve um pequeno empurrão na direção de torção para quebrar a simetria, a instabilidade ocorreu e pequenas forças periódicas *de torção aerodinâmicas foram suficientes para manter os grandes movimentos de torção periódicos.*

O operador biharmônico, multiplicado por uma constante positiva, também aparece com frequência nas equações de Navier-Stokes como um coeficiente de viscosidade. O operador inverso, denotado por $(\Delta^2)^{-1}$ é o célebre operador de Green, veja [28].

Soluções positivas de equações biharmônicas semilineares com condições de fronteira de Navier em domínios limitados do $\mathbb{R}^N$ são extensamente estudadas, veja [8], [9] e referências lá citada. Resultados sobre existência e multiplicidade de soluções de equações p-biharmônicas com condições de fronteira de Dirichlet em domínios limitados são mais escassos.

O operador p-biharmônico pode ser utilizado para estudar sistemas Hamiltonianos. Seguindo [1], consideremos o sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} -\Delta u := v^p \quad \text{em} \quad \Omega, \quad -\Delta v := u^q \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u, v > 0 \text{ em} \quad \Omega, \quad u = v = 0 \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

em que Ω é um domínio limitado suave e $p, q \geq 1$. Formalmente, da primeira equação, temos

$$v = (-\Delta u)^{\frac{1}{p}};$$

substituindo na segunda equação, obtemos

$$u^q = -\Delta(-\Delta u)^{\frac{1}{p}} = -\Delta\left(|-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)\right) \qquad \text{em } \Omega,$$

$$u = \Delta u = 0 \qquad \text{em } \partial\Omega.$$

Neste caso, procuramos por soluções no espaço de Sobolev $W^{2,\frac{1}{p}+1}(\Omega)$, veja [24, 35].

Os problemas considerados

O crescimento crítico em problemas quasilineares e semilineares têm sido extensamente estudados nos últimos anos, iniciando com o célebre artigo de Brézis e Nirenberg [8]. Veja [19] e [20] para uma lista de referências.

Existem muitos trabalhos sobre soluções não triviais de equações biharmônicas ou p-biharmônicas, veja [11], [41], [42], [43] e suas referências.

Os problemas (1)-(2) e (1)-(3), no caso $p = 2$ e expoente crítico p^*, possuem resultados sobre existência de solução. Veja [16], [33] e [5] para os casos $q = 2$, $2 < q < 2^*$ e $1 < q < 2$, respectivamente.

Apesar do operador p-biharmônico Δ_p^2 recentemente atrair a atenção de muitos pesquisadores (veja [3], [4], [15], [25], [26], [36] e suas referências), resultados de existência de soluções, no caso crítico, são restritas às condições de fronteira de Navier e Steklov, veja [26] and [36]. Isto justifica nossa contribuição: existência de soluções para os problemas (1)-(2) e (1)-(3) com condições de fronteira de Dirichlet e Navier, respectivamente.

Durante os últimos dez anos, vários autores utilizaram a variedade de Nehari e os mapeamentos de fibrados para resolver problemas que envolvem função peso que muda de sinal. Algumas referências são [10] e [37] para as equações elípticas semilineares, [9] e [38] para problemas elípticos com condições de fronteira não lineares, [39] para problemas no $\mathbb{R}^N$, [12] para problemas do tipo Kirchhoff e [9], [38] e [40] para sistemas elípticos.

A motivação principal para o presente trabalho vem do artigo de Bernis, García-Azorero e Peral [5]. Eles estudaram, em 1996, a equação

$$\Delta^2 u = \lambda |u|^{q-2}u + |u|^{2^*-2}u \qquad \text{em} \quad \Omega$$

com condições de fronteira de Dirichlet

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad \text{em} \quad \partial\Omega$$

e de Navier

$$u = \Delta u = 0 \qquad \text{em} \quad \partial\Omega,$$

no caso de um domínio suave e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, parâmetro positivo $\lambda > 0$ e $1 < q < 2$, com $2^* = \frac{2N}{N-4}$ denotando o expoente crítico para o operador biharmônico. Os autores provaram resultados de existência e multiplicidade ao aplicar tanto o método de sub- e supersolução como a teoria de Ljusternik-Schnirelmann. Em particular, provaram que os funcionais associados a esses problemas satisfazem a condição local de Palais-Smale. Assim, esta tese pode ser considerada como uma generalização desses resultados para o operador p-biharmônico, mesmo que o método empregado para a solução do problema seja outro.

Uma segunda motivação para nosso trabalho vem do recente artigo de Ji e Wang [25]. Lá, os autores estudaram o problema

$$\begin{cases} \Delta_p^2 u := \Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u) = \lambda f(x)|u|^{q-2}u + |u|^{r-2}u & \text{em} \quad \Omega, \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

em que $1 < q < p < r < p^* = \frac{Np}{N-2p}$ (caso subcrítico) e a função peso $f \in C(\overline{\Omega})$ que muda de sinal. Os autores utilizaram o método da variedade de Nehari para estabeler a existência de duas soluções não triviais distintas, para todo λ suficientemente pequeno.

Neste trabalho, apresentaremos duas abordagens dos problemas (1)-(2) e (1)-(3). Na primeira delas, supondo que f eventualmente possa mudar de sinal, aplicaremos o método da variedade de Nehari para provar a existência de ao menos duas soluções distintas para todo $\lambda > 0$ suficientemente pequeno. A segunda abordagem, motivada essencialmente pelo trabalho de Bernis, García-Azorero e Peral [5], utiliza a teoria de Ljusternik-Schnirelmann (mais especificamente, a noção de gênero de um subconjunto) para provar a existência de infinitas soluções para os problemas (1)-(2) e (1)-(3) no caso da função peso f ser positiva.

O método da variedade de Nehari

Em nossa primeira abordagem, exposta no Capítulo 1, utilizamos o método da variedade de Nehari, como Ji e Wang, para obter duas soluções não triviais distintas para os problemas (1)-(2) e (1)-(3). Enfraquecemos a hipótese sobre a função peso f utilizada por Ji e Wang e encontramos soluções para esses dois problemas de maneira simultânea.

Consideramos o funcional energia associado aos problemas (1)-(2) e (1)-(3)

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\Delta u|^p \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x.$$

Para o problema com condições de fronteira de Dirichlet, J_λ está definido em $W_0^{2,p}(\Omega)$; para o problema com condições de fronteira de Navier, J_λ está definido em $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. Denotaremos simplesmente por $\mathbf{E}$ qualquer um desses espaços, ambos considerados com a norma $\|u\| = (\int_\Omega |\Delta u|^p \mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}$. O funcional J_λ pertence a C^1 e os pontos críticos de J_λ são soluções fracas dos problemas estudados.

Consideramos o problema de minimização de Nehari: para $\lambda > 0$, seja

$$m_\lambda(\Omega) = \inf\{J_\lambda(u) \,:\, u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)\},$$

em que

$$\mathcal{N}_\lambda(\Omega) = \left\{u \in \mathbf{E}(\Omega) \setminus \{0\} \,:\, \langle J'_\lambda(u), u\rangle = 0\right\}.$$

Para motivar a utilização de $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$, suponhamos que $u \neq 0$ seja um ponto crítico de J_λ, isto é, $J'_\lambda(u) = 0$. Então u necessariamente está contido no conjunto $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$. (Este conjunto é chamado *variedade de Nehari*, mesmo que muitas vezes não seja uma variedade. No caso específico, a função $\psi_\lambda(u) = \langle J'_\lambda(u), u\rangle$ é de classe C^1, e $\mathcal{N}_\lambda(\Omega) = \psi_\lambda^{-1}(0)$. Para que $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ seja uma variedade, basta então garantir que $\psi'_\lambda(u) \neq 0$.

Também definimos

$$\psi_\lambda(u) = \langle J'_\lambda(u), u\rangle = \|u\|^p - \lambda\int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x - \int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x.$$

Então para $u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$, temos

$$\langle \psi'_\lambda(u), u\rangle = p\|u\|^p - q\lambda\int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x - p^*\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x.$$

Note que $\langle \psi'_\lambda(u), u\rangle$ descreve a derivada segunda de $J_\lambda(u)$ na direção de u.

Podemos então decompor $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ em três partes:

$$\mathcal{N}_\lambda^+(\Omega) = \{u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega) \,:\, \langle \psi'(u), u\rangle > 0\}\,,$$

$$\mathcal{N}_\lambda^0(\Omega) = \{u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega) \,:\, \langle \psi'(u), u\rangle = 0\}\,,$$

$$\mathcal{N}_\lambda^-(\Omega) = \{u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega) \,:\, \langle \psi'(u), u\rangle < 0\}\,.$$

(Note que, se tivermos $\mathcal{N}_\lambda^0(\Omega) = \emptyset$, então a condição $\psi'_\lambda(u) \neq 0$ está satisfeita e, portanto, $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ é uma variedade.)

Definimos

$$m_\lambda^+(\Omega) = \inf\{J_\lambda(u) \,:\, u \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)\} \quad \text{e} \quad m_\lambda^-(\Omega) = \inf\{J_\lambda(u) \,:\, u \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)\}.$$

Observação: na direção de u, $m_\lambda^+(\Omega)$ tem o comportamento de um ponto de mínimo, enquanto $m_\lambda^-(\Omega)$ tem o comportamento de um ponto de máximo. Nas direções complementares a u ("tangentes" à variedade), como tomamos o ínfimo na variedade de Nehari, sempre temos o comportamento de um ponto de mínimo.

O objetivo deste trabalho é encontrar as soluções dos problemas de minimização acima. Estas duas soluções são soluções não triviais para os problemas (1)-(2) e (1)-(3) para todo λ pequeno. Mais precisamente, o próximo teorema é o principal resultado deste trabalho.

Teorema 1: *Existe $\lambda_0 > 0$ tal que, para cada $\lambda \in (0, \lambda_0)$, os problemas* (1)-(2) *e* (1)-(3) *possuem duas soluções não triviais distintas. Além disso, se a função peso $f \in C(\overline{\Omega})$ satisfizer a hipótese $(f+)$ e for não negativa, as duas soluções do problema* (1)-(3) *são positivas.*

Neste resultado, salientamos que o valor de λ_0 será estimado no decorrer de nosso texto.

A perda de compacidade da imersão de Sobolev de $\mathbf{E}$ em $L^{p^*}(\Omega)$ ocasiona a principal dificuldade encontrada no tratamento dos problemas (1)-(2) e (1)-(3). O lema de Lions, principal ferramenta que utilizamos neste trabalho, é aplicado para mostrar que, se o nível de energia mínimo do funcional J_λ estiver abaixo da constante positiva $\frac{2}{N}S^{\frac{N}{2p}} - D\lambda^\beta$, temos convergência em norma da sequência minimizante. Em outras palavras, J satisfaz a condição local de Palais-Smale. (Estamos denotando por S a melhor constante de Sobolev da imersão de $\mathbf{E}$ em $L^{p^*}(\Omega)$, β e D constantes que serão determinadas posteriormente.)

Para isso, é necessário estimar $m_\lambda^+(\Omega)$ e $m_\lambda^-(\Omega)$ de maneira a garantir que ambos são menores que $\frac{2}{N}S^{\frac{N}{2p}} - D\lambda^\beta$.

Outra dificuldade é contornar a existência de solução do problema

$$\begin{cases} \Delta_p^2 u := \Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u) = |u|^{r-2}u \quad \text{em} \quad \Xi, \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Xi, \end{cases} \tag{6}$$

utilizada por Ji e Wang para resolver (5) (caso subcrítico), em que $\Xi \subset \Omega$ é o conjunto onde f é positiva. Mais precisamente, eles encontraram uma solução para o problema de minimização

$$m_0(\Xi) = \inf_{\mathcal{N}(\Xi)} J_0(u),$$

em que J_0 é o funcional "energia" associado ao problema e $\mathcal{N}_0(\Xi)$ é a variedade de Nehari. A solução deste problema foi importante para garantir que

$$m_\lambda^+(\Omega) < 0.$$

Observe que, quando $r = p^* = \frac{N}{N-2p}$, temos

$$J_0(u) \geq \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2p}} \quad \forall u \in \mathcal{N}(\Xi),$$

(veja os detalhes em A.2). Portanto, não é possível obter convergência utilizando o lema de Lions.

Notamos, entretanto, que o funcional K tem a geometria do passo da montanha e, apesar de não encontrarmos uma solução do problema acima para $r = p^* = \frac{N}{N-2p}$, conseguimos obter informações sobre o sinal de $m_0(\Xi)$. Isto foi suficiente para garantir que

$$m_\lambda^+(\Omega) < \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2p}} - D\lambda^\beta$$

e obter a condição de Palais-Smale para o funcional J_λ no nível $m_\lambda^+(\Omega)$.

Outra dificuldade é mostrar que

$$m_\lambda^-(\Omega) < \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2p}} - D\lambda^\beta.$$

Essa estimativa foi obtida utilizando truncamento e concentração da função extremal para o operador p-biharmônico (isto é, a função que atinge a melhor constante de Sobolev da imersão em $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, no caso em que $\Omega = \mathbb{R}^N$). A desigualdade acima será importante para obtermos a condição de Palais-Smale para o funcional J_λ no nível $m_\lambda^-(\Omega)$.

O método de Ljusternik-Schnirelmann

No Capítulo 2 vamos apresentar uma segunda abordagem dos problemas (1)-(2) e (1)-(3), baseada na teoria de Ljusternik-Schnirelmann. Mais especificamente, vamos provar a existência de infinitas soluções para os problemas (1)-(2) e (1)-(3) para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, caso a função peso $f \in C(\overline{\Omega})$ seja positiva. As hipóteses sobre esses problemas e a notação são as mesmas utilizadas no Capítulo 1, exceto pelo sinal da função peso f.

O principal resultado do Capítulo 2 é:

Teorema 2: *Existe uma constante* $\lambda_0 > 0$*, tal que para* $0 < \lambda < \lambda_0$*, os problemas* (1)-(2) *e* (1)-(3) *possuem infinitas soluções.*

Para provar esse resultado utilizamos uma ferramenta para medir o "tamanho" de um conjunto simétrico. (Por um conjunto simétrico, queremos dizer que é um conjunto invariante sob o grupo de simetria). Assim, utilizamos a teoria de categoria de Ljusternik-Schnirelmann [31] para este fim. Uma noção mais simples, a de gênero, é mais fácil de lidar e será utilizada aqui. A noção de gênero é devido a Krasnoselski [27], mas vamos utilizá-la na forma de uma definição equivalente, devida a Coffman [13] (veja também [14]).

Conclusão

Nos dois capítulos apresentamos, desse modo, uma generalização para o operador p-biharmônico do trabalho de Bernis, García-Azorero e Peral [5], que trata do operador biharmônico. Naquele trabalho, o método de sub- e supersolução é utilizado. Em nosso primeiro capítulo não utilizamos esse método e sim o método da variedade de Nehari, aplicando o lema de Lions. (Nessa generalização, incluímos uma função peso f que pode trocar de sinal (em [5] é como se a função peso f fosse igual a 1). No segundo capítulo, adaptamos ao operador p-biharmônico o método de Ljusternik-Schnirelmann utilizado no artigo de Bernis, García-Azorero e Peral.

CAPÍTULO 1

O método da variedade de Nehari

1.1 Introdução

Neste capítulo estudamos o operador p-biharmônico com não-linearidade côncava-convexa e expoente crítico

$$\Delta_p^2 u := \Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u) = \lambda f(x)|u|^{q-2}u + |u|^{p^*-2}u \quad \text{em} \quad \Omega \tag{1.1}$$

com condições de fronteira de Dirichlet

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \tag{1.2}$$

e de Navier

$$u = \Delta u = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \tag{1.3}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave. Supomos que os expoentes p e q satisfaçam $1 < p < \infty$, $N > 2p$, $1 < q < p$ e que o parâmetro λ seja positivo. Denotamos por $p^* = \frac{Np}{N-2p}$ o expoente crítico de Sobolev para problemas de quarta ordem e supomos que a função peso f satisfaça a propriedade

$(f+)$ $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f^+ = \max\{f, 0\} \not\equiv 0$.

Observação: *Note que f pode ou não mudar de sinal; além disso, f pode se anular em um conjunto com medida de Lebesgue positiva. De qualquer modo, a hipótese $(f+)$ assegura a existência de um aberto não vazio $\Xi \subset \Omega$ no qual f é positiva.*

O objetivo deste capítulo é mostrar a existência de duas soluções não triviais para os problemas formados pela equação (1.1) com condições de fronteira (1.2) e (1.3), para todo $\lambda > 0$ que seja suficientemente pequeno. Mais precisamente, o resultado principal deste capítulo é:

Teorema 1. *Existe* $\lambda_0 > 0$ *tal que, para cada* $\lambda \in (0, \lambda_0)$*, os problemas formados pela equação* (1.1) *e pelas condições de fronteira* (1.2) *ou* (1.3) *possuem duas soluções não triviais distintas. Além disso, se a função peso* $f \in C(\overline{\Omega})$ *satisfizer* $(f+)$ *e for não negativa, as duas soluções do problema* (1.3) *são positivas.*

Ressaltamos que o valor de λ_0 é estimado nos sucessivos resultados que apresentaremos.

O texto é organizado da seguinte maneira. Na Seção 1.2 apresentaremos algumas definições e resultados preliminares. Na Seção 1.3 vamos provar a existência de uma sequência Palais-Smale para o funcional J_λ – naturalmente associado aos problemas – ao aplicar o teorema da função implícita e o princípio variacional de Ekeland. (Veja o Teorema 3 no apêndice A.9 ou [17] para o princípio variacional de Ekeland.) Na Seção 1.4 vamos provar que o funcional J_λ satisfaz a condição de Palais-Smale local. A principal ferramenta utilizada nessa demonstração é o lema de Lions. (Veja [29] e [30] para o lema de Lions, cujo enunciado pode ser encontrado no Apêndice.) Para tratarmos simultaneamente a equação (1.1) com as condições de fronteira (1.2) e (1.3), aplicaremos um resultado devido a Gazzola, Grunau e Sweers [21], que estabelece que a melhor constante para a imersão de Sobolev $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ é igual à melhor constante para a imersão de Sobolev $W_0^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$. Na Seção 1.5 provaremos o Teorema 1 e o comportamento assintótico de $m_\lambda^+(\Omega)$ quando $\lambda \to 0$.

1.2 Preliminares

Consideremos o funcional energia

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\Delta u|^p \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x. \tag{1.4}$$

Para o problema (1.1)-(1.2), o funcional J_λ está definido em $W_0^{2,p}(\Omega)$; para o problema (1.1)-(1.3), o funcional J_λ está definido em $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. Sabemos que o funcional J_λ pertence a C^1 e que seus pontos críticos são soluções fracas desses problemas.

Ao longo do capítulo denotamos por $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega)$ o espaço $W_0^{2,p}(\Omega)$ ou $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, conforme o problema considerado. Qualquer que seja o espaço considerado, a norma nesse espaço será denotada simplesmente por $\|\cdot\|$, sendo definida por

$$\|u\| = \|\Delta u\|_p = \left(\int_\Omega |\Delta u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},$$

em que $\|\cdot\|_p$ é a norma usual do espaço $L^p(\Omega)$. Veja o apêndice (A.1) para a verificação de que $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathbf{E}$.

Denotamos por

$$S = \inf\{ \|u\|^p \,:\, u \in \mathbf{E},\ \|u\|_{p^*} = 1\} \tag{1.5}$$

a melhor constante para a imersão de Sobolev de $\mathbf{E} \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$. Decorre da definição de S a desigualdade de Sobolev

$$\|u\|_{p^*} \leq S^{-\frac{1}{p}} \|u\|, \tag{1.6}$$

válida para todo $u \in \mathbf{E} \setminus \{0\}$.

No caso em que $\Omega = \mathbb{R}^N$, a função extremal

$$U(x) = \frac{1}{\left(1 + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{N-2p}{p}}}$$

atinge a melhor constante S

$$\|U\|_{p^*} = S^{-\frac{1}{p}} \|U\|.$$

Consideremos o problema de minimização de Nehari: para $\lambda > 0$, seja

$$m_\lambda(\Omega) = \inf\{J_\lambda(u) \,:\, u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)\},$$

em que

$$\mathcal{N}_\lambda(\Omega) = \{u \in \mathbf{E} \setminus \{0\} \,:\, \langle J'_\lambda(u), u\rangle = 0\}.$$

Definimos

$$\psi_\lambda(u) = \langle J'_\lambda(u), u\rangle = \|u\|^p - \lambda \int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x - \int_\Omega |u|^{p^*} \mathrm{d}x.$$

Então, para $u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$, temos

$$\langle \psi'_\lambda(u), u\rangle = p\|u\|^p - q\lambda \int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x - p^* \int_\Omega |u|^{p^*} \mathrm{d}x.$$

Podemos decompor $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ em três partes:

$$\mathcal{N}_\lambda^+(\Omega) = \{u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega) \,:\, \langle \psi'_\lambda(u), u\rangle > 0\},$$

$$\mathcal{N}_\lambda^0(\Omega) = \{u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega) \,:\, \langle \psi'_\lambda(u), u\rangle = 0\},$$

$$\mathcal{N}_\lambda^-(\Omega) = \{u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega) \,:\, \langle \psi'_\lambda(u), u\rangle < 0\}.$$

Definimos

$$m_\lambda^+(\Omega) = \inf\{J_\lambda(u) \,:\, u \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)\} \quad \text{e} \quad m_\lambda^-(\Omega) = \inf\{J_\lambda(u) \,:\, u \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)\}.$$

Provaremos que, para todo λ suficientemente pequeno, temos $\mathcal{N}_\lambda^0(\Omega) = \emptyset$. Para estes valores de λ, mostraremos que os minimizadores locais são pontos críticos de J_λ.

Consequentemente, estes minimizadores são soluções fracas dos problemas (1.1)-(1.2) e (1.1)-(1.3).

Mostraremos também que $\int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x > 0$ sempre que $u \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$, para qualquer $\lambda > 0$.

Fixado $u \in \mathbf{E} \setminus \{0\}$, exibiremos algumas propriedades extremais de $J_\lambda(tu)$, para λ suficientemente pequeno.

Para obtermos informações sobre $m_\lambda^+(\Omega)$, restringiremos nosso estudo a um subconjunto de Ω em que f é positiva.

Como $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é contínua e satisfaz $(f+)$, temos que

$$\Xi = \{x \in \Omega \,:\, f(x) > 0\} \neq \emptyset$$

e Ξ é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$.

Consideramos então o funcional $J_0 : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ definido por

$$J_0(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\Delta u|^p \mathrm{d}x - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*} \mathrm{d}x.$$

(O funcional J_0 corresponde a tomar $\lambda = 0$ na definição de J_λ.)

Definimos

$$\mathcal{N}_0(\Xi) = \left\{u \in W_0^{2,p}(\Xi) \setminus \{0\} \,:\, \langle J_0'(u), u\rangle = 0\right\}.$$

Vamos mostrar que a variedade de Nehari $\mathcal{N}_0(\Xi)$ é homeomorfa à esfera unitária de $W_0^{2,p}(\Xi)$.

Para provar que o funcional J_λ satisfaz as condições de Palais-Smale nos níveis $m_\lambda^+(\Omega)$ e $m_\lambda^-(\Omega)$, respectivamente, obteremos estimativas para esses níveis.

Assim, utilizando a geometria do passo da montanha do funcional J_0, mostraremos que

$$m_\lambda^+(\Omega) < 0$$

para λ suficientemente pequeno.

O tratamento de $m_\lambda^-(\Omega)$ é mais delicado, pois mostraremos a existência de uma constante positiva C tal que

$$m_\lambda^-(\Omega) \geq C > 0$$

para λ pequeno. Por outro lado, também provaremos que, para todo $D > 0$ dado, existe $\bar{\lambda}$ tal que, para todo $\lambda \in (0, \bar{\lambda})$ vale

$$m_\lambda^-(\Omega) < \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2p}} - D\lambda^\beta, \tag{1.7}$$

em que, oportunamente, a constante $\beta > 0$ será definida e D escolhida. Para provar essa desigualdade, vamos utilizar a função extremal para o operador p-biharmônico, suas estimativas e uma localização desta função onde o peso f for positivo.

Com isso, conseguiremos mostrar que os mínimos ocorrem em níveis nos quais vale a condição de Palais-Smale.

1.2.1 A variedade de Nehari $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$

Começamos mostrando que, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, temos $\mathcal{N}_\lambda^0(\Omega) = \emptyset$. Como mencionamos na introdução, esse fato garante que $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ realmente é uma variedade.

Lema 1.1. *Seja*

$$\lambda_1 = K(p^*,q)^{\frac{p-q}{p}} \left(\frac{p^*-q}{p^*-p}\right) S^{\frac{p^*-q}{p^*-p}} \|f\|_\beta^{-\frac{q+p}{p}},$$

em que $K(p^*,q) = \left(\frac{p^*-p}{p^*-q}\right)\left(\frac{p-q}{p^*-q}\right)^{\frac{p}{p^*-p}}$ *e* $\beta = \frac{p^*}{p^*-q}$. *Então, para todo* $\lambda \in (0,\lambda_1)$, *temos*

$$\mathcal{N}_\lambda^0(\Omega) = \emptyset.$$

Demonstração. Se $u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$, vale

$$\|u\|^p - \int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x. \tag{1.8}$$

Suponhamos que $u \in \mathcal{N}_\lambda^0(\Omega)$. Então temos

$$\begin{aligned} 0 = \langle \psi'(u), u\rangle &= p\|u\|^p - q\lambda \int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x - p^* \int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x \\ &= (p-q)\|u\|^p - (p^*-q)\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

a última igualdade sendo consequência de (1.8). Concluímos que

$$\|u\|^p = \frac{p^*-q}{p-q}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x. \tag{1.9}$$

Substituindo essa igualdade em (1.8), obtemos

$$\lambda \int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x = \|u\|^p - \int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x = \frac{p^*-p}{p-q}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x. \tag{1.10}$$

As igualdades (1.10) e (1.9) implicam

$$\lambda \int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x = \frac{p^*-p}{p-q}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x = \frac{p^*-p}{p^*-q}\|u\|^p, \tag{1.11}$$

ou seja, para q e p fixos, o valor de $\lambda\int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x$ determina os valores de $\|u\|_{p^*}$ e $\|u\|$.

Aplicando as desigualdades de Hölder e Sobolev (1.6) à integral envolvendo f, obtemos

$$\lambda \int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x \leq \lambda \|f\|_\beta \|u\|_{p^*}^q \leq \lambda \|f\|_\beta S^{-\frac{q}{p}} \|u\|^q, \tag{1.12}$$

em que $\beta = \frac{p^*}{p^*-q}$. Substituindo essa desigualdade em (1.11), concluímos que

$$\|u\| \leq \left[\lambda \left(\frac{p^*-q}{p^*-p}\right) \|f\|_\beta S^{-\frac{q}{p}}\right]^{\frac{1}{p-q}}, \tag{1.13}$$

desigualdade válida para todo $u \in \mathcal{N}_\lambda^0(\Omega)$.

Definimos agora $I_\lambda(u) : \mathbf{E} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ por

$$I_\lambda(u) = K(p^*, q) \left(\frac{\|u\|^{p^*}}{\int_\Omega |u|^{p^*} \mathrm{d}x}\right)^{\frac{p}{p^*-p}} - \lambda \int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x,$$

em que $K(p^*, q) = \left(\frac{p^*-p}{p^*-q}\right)\left(\frac{p-q}{p^*-q}\right)^{\frac{p}{p^*-p}}$ e $\lambda \in [0, \infty)$.

Afirmamos que $I_\lambda(u) = 0$ para todo $u \in \mathcal{N}_\lambda^0(\Omega)$. De fato, se $u \in \mathcal{N}_\lambda^0(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u) &= K(p^*, q) \left[\frac{\left(\frac{p^*-q}{p-q}\right)^{\frac{p^*}{p}} \left(\int_\Omega |u|^{p^*} \mathrm{d}x\right)^{\frac{p^*}{p}}}{\int_\Omega |u|^{p^*} \mathrm{d}x}\right]^{\frac{p}{p^*-p}} - \lambda \int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x \\
&= K(p^*, q) \left[\frac{\left(\frac{p^*-q}{p-q}\right)^{\frac{p^*}{p}} \left(\int_\Omega |u|^{p^*} \mathrm{d}x\right)^{\frac{p^*}{p}}}{\int_\Omega |u|^{p^*} \mathrm{d}x}\right]^{\frac{p}{p^*-p}} - \left(\frac{p^*-p}{p-q}\right) \int_\Omega |u|^{p^*} \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

a primeira igualdade seguindo-se de (1.9) e a segunda igualdade decorrendo de (1.10). Provamos assim o afirmado, pois

$$I_\lambda(u) = \left[K(p^*, q) \left(\frac{p^*-q}{p-q}\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}} - \frac{p^*-p}{p-q}\right] \int_\Omega |u|^{p^*} \mathrm{d}x = 0, \tag{1.14}$$

já que o colchete em (1.14) é identicamente nulo.

Por outro lado, para todo $u \in \mathbf{E} \setminus \{0\}$, a desigualdade (1.12) implica

$$I_\lambda(u) \geq K(p^*, q) \left(\frac{\|u\|^{p^*}}{\int_\Omega |u|^{p^*} \mathrm{d}x}\right)^{\frac{p}{p^*-p}} - \lambda \|f\|_\beta \|u\|_{p^*}^q$$

e, assim

$$I_\lambda(u) \geq \|u\|_{p^*}^q \left[K(p^*, q) \left(\frac{\|u\|^{p^*}}{\|u\|_{p^*}^{\frac{q(p^*-p)+p^*p}{p}}}\right)^{\frac{p}{p^*-p}} - \lambda \|f\|_\beta\right].$$

Aplicando a desigualdade de Sobolev (1.6) a essa última desigualdade, concluímos que

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u) &\geq \|u\|_{p^*}^q \left[K(p^*, q) \left(\frac{\|u\|^{p^*}}{S^{-\frac{q(p^*-p)+p^*p}{p^2}} \|u\|^{\frac{q(p^*-p)+p^*p}{p}}}\right)^{\frac{p}{p^*-p}} - \lambda \|f\|_\beta\right] \\
&= \|u\|_{p^*}^q \left(K(p^*, q) \frac{1}{S^{-\frac{q(p^*-p)+p^*p}{p(p^*-p)}}} \|u\|^{-q} - \lambda \|f\|_\beta\right)
\end{aligned} \tag{1.15}$$

É consequência então de (1.13) que

$$I_\lambda(u) \geq \|u\|_{p^*}^q \left\{ K(p^*,q)\frac{1}{S^{-\frac{q(p^*-p)+p^*p}{p(p^*-p)}}}\lambda^{\frac{-q}{p-q}} \left[\left(\frac{p^*-q}{p^*-p}\right) \|f\|_\beta S^{-\frac{q}{p}} \right]^{\frac{-q}{p-q}} - \lambda\|f\|_\beta \right\}.$$

Consideremos então

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \frac{K(p^*,q)}{S^{-\frac{q(p^*-p)+p^*p}{p(p^*-p)}}}\lambda^{\frac{-q}{p-q}} \left[\left(\frac{p^*-q}{p^*-p}\right) \|f\|_\beta S^{-\frac{q}{p}} \right]^{\frac{-q}{p-q}} - \lambda\|f\|_\beta \\ &= \frac{A}{\lambda^{q/(p-q)}} - \lambda\|f\|_\beta, \end{aligned}$$

em que A é uma constante positiva. Observe que $g(\lambda)$ é decrescente para $\lambda > 0$, $g(\lambda) \to +\infty$ quando $\lambda \to 0^+$ e $g(\lambda) \to -\infty$ quando $\lambda \to +\infty$. A constante λ_1 definida no lema é a única constante positiva tal que $g(\lambda_1) = 0$. Portanto, se existisse $u \in \mathcal{N}_\lambda^0(\Omega)$ para $\lambda \in (0, \lambda_1)$, teríamos $g(\lambda) > 0$, contradizendo (1.14) e finalizando a demonstração. ∎

Lema 1.2. *Se $u \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$, então $\int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x > 0$.*

Demonstração. Para $u \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$, temos

$$\langle \psi_\lambda'(u), u\rangle = p\|u\|^p - q\lambda \int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x - p^* \int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x > 0.$$

Daí, como $u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$, temos, por (1.8)

$$\langle \psi_\lambda'(u), u\rangle = (p-q)\|u\|^p - (p^*-q)\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x > 0,$$

o que implica

$$\|u\|^p > \frac{p^*-q}{p-q}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x.$$

Tendo em vista (1.8), concluímos que

$$\lambda\int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x = \|u\|^p - \int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x > \frac{p^*-p}{p-q}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x > 0.$$

Isto completa a prova. ∎

O próximo resultado mostra que os pontos de mínimo em $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ são pontos críticos do funcional J_λ. Dessa forma, $\mathcal{N}_\lambda$ é uma variedade natural para o(s) problema(s) considerado(s). Denotamos por $\mathbf{E}^*$ o espaço dual de $\mathbf{E}$.

Lema 1.3. *Para $\lambda \in (0, \lambda_1)$, se u_0 for um ponto de mínimo local para J_λ em $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$, então $J_\lambda'(u_0) = 0$ em $\mathbf{E}^*$.*

Demonstração. Se u_0 for um ponto de mínimo local para J_λ sobre $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$, então u_0 é uma solução do problema de otimização

$$\text{minimizar } J_\lambda(u) \text{ sujeito à restrição } \psi_\lambda(u) = 0.$$

Como $\lambda \in (0, \lambda_1)$, pelo Lema 1.1 temos que $\mathcal{N}_\lambda^0(\Omega) = \emptyset$, isto é, $\langle \psi_\lambda'(u_0), u_0 \rangle \neq 0$. Portanto, podemos aplicar a teoria dos multiplicadores de Lagrange e concluir que existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$J_\lambda'(u_0) = \theta \psi_\lambda'(u_0).$$

Daí

$$\langle J_\lambda'(u_0), u_0 \rangle = \theta \langle \psi_\lambda'(u_0), u_0 \rangle. \tag{1.16}$$

Como $u_0 \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$, temos $\langle J_\lambda'(u_0), u_0 \rangle = 0$. Logo, como $\langle \psi_\lambda'(u_0), u_0 \rangle \neq 0$, segue-se que $\theta = 0$. ■

Na sequência, estudaremos o comportamento da função real

$$t \mapsto J_\lambda(tu) = \frac{1}{p} t^p \|u\|^p - \frac{\lambda}{q} t^q \int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x - \frac{1}{p^*} t^{p^*} \int_\Omega |u|^{p^*} \mathrm{d}x,$$

em que $t \geq 0$ e $u \in \mathbf{E} \setminus \{0\}$ é arbitrário. Mostraremos que sempre existe um único t_u^- (dependendo de u) tal que $t_u^- u \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$. No caso em que $\int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x > 0$, também existe um único t_u^+ (dependendo de u) satisfazendo $t_u^+ u \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$.

Temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J_\lambda(tu) &= t^{p-1}\|u\|^p - t^{q-1}\lambda \int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x - t^{p^*-1} \int_\Omega |u|^{p^*} \mathrm{d}x \\ &= t^{q-1} \left(t^{p-q}\|u\|^p - \lambda \int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x - t^{p^*-q} \int_\Omega |u|^{p^*} \mathrm{d}x \right), \end{aligned}$$

de modo que os pontos críticos de $J_\lambda(tu)$ ocorrem quando a função

$$s(t) = t^{p-q}\|u\|^p - t^{p^*-q} \int_\Omega |u|^{p^*} \mathrm{d}x$$

é igual a $\lambda \int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x$, que não depende de t.

Na sequência, mostraremos algumas propriedades da função s.

Claramente vale $s(0) = 0$ e $\lim_{t \to \infty} s(t) = -\infty$. Verificamos que $s(t)$ atinge seu máximo em $t_{\max}$ (que depende de u) dado por

$$t_{\max} = \left[\frac{(p-q)\|u\|^p}{(p^*-q) \int_\Omega |u|^{p^*} \mathrm{d}x} \right]^{\frac{1}{p^*-p}} \tag{1.17}$$

e que

$$s(t_{\max}) = \left(\frac{(p-q)\|u\|^p}{(p^*-q) \int_\Omega |u|^{p^*} \mathrm{d}x} \right)^{\frac{p-q}{p^*-p}} \|u\|^p - \left(\frac{(p-q)\|u\|^p}{(p^*-q) \int_\Omega |u|^{p^*} \mathrm{d}x} \right)^{\frac{p^*-q}{p^*-p}} \int_\Omega |u|^{p^*} \mathrm{d}x. \tag{1.18}$$

(Veja a Figura 1.1.)

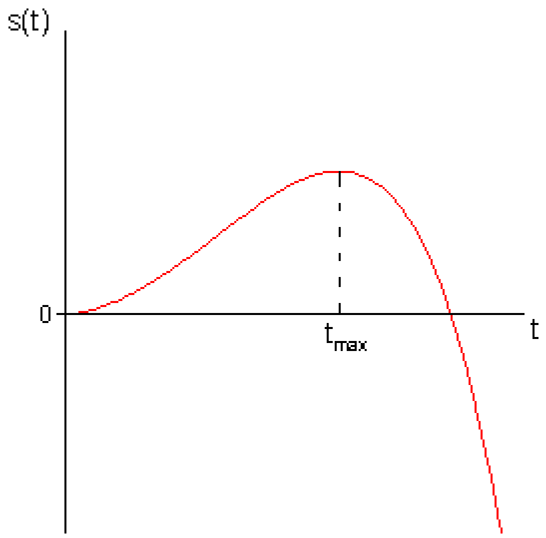

FIGURA 1.1: O gráfico de $s(t) = t^{p-q}\|u\|^p - t^{p^*-q}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x$ é exibido para $t \geq 0$ e $u \in \mathbf{E}\setminus\{0\}$ fixado.

Vamos obter uma cota inferior para $s(t_{\max})$. Temos

$$\begin{aligned}
s(t_{\max}) &= \|u\|^q\left[\left(\frac{(p-q)\|u\|^{p^*}}{(p^*-q)\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x}\right)^{\frac{p-q}{p^*-p}} - \left(\frac{(p-q)\|u\|^{\frac{p^*(p-q)}{p^*-q}}}{(p^*-q)\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x}\right)^{\frac{p^*-q}{p^*-p}}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x\right]\\
&= \|u\|^q\left[\left(\frac{(p-q)\|u\|^{p^*}}{(p^*-q)\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x}\right)^{\frac{p-q}{p^*-p}} - \left(\frac{(p-q)\|u\|^{\frac{p^*(p-q)}{p^*-q}}}{(p^*-q)\left(\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-q}{p^*-q}}}\right)^{\frac{p^*-q}{p^*-p}}\right]\\
&= \|u\|^q\left[\left(\frac{p-q}{p^*-q}\right)^{\frac{p-q}{p^*-p}} - \left(\frac{p-q}{p^*-q}\right)^{\frac{p^*-q}{p^*-p}}\right]\left(\frac{\|u\|^{p^*}}{\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x}\right)^{\frac{p-q}{p^*-p}}\\
&= \|u\|^q\left\{\left(\frac{p-q}{p^*-q}\right)^{\frac{p-q}{p^*-p}}\left[1-\left(\frac{p-q}{p^*-q}\right)^{\frac{p^*-q}{p^*-p}-\frac{p-q}{p^*-p}}\right]\right\}\left(\frac{\|u\|^{p^*}}{\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x}\right)^{\frac{p-q}{p^*-p}}\\
&= \|u\|^q\left(\frac{p-q}{p^*-q}\right)^{\frac{p-q}{p^*-p}}\left(\frac{p^*-p}{p^*-q}\right)\left(\frac{\|u\|^{p^*}}{\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x}\right)^{\frac{p-q}{p^*-p}}
\end{aligned}$$

e, aplicando a desigualdade de Sobolev (1.6), concluímos que

$$s(t_{\max}) \geq \|u\|^q\left(\frac{p-q}{p^*-q}\right)^{\frac{p-q}{p^*-p}}\left(\frac{p^*-p}{p^*-q}\right)\left(S^{\frac{p^*}{p}}\right)^{\frac{p-q}{p^*-p}} > 0. \tag{1.19}$$

Estas observações sobre o comportamento de s nos possibilitam a demonstração do seguinte resultado:

Lema 1.4. *Seja* $\beta = \frac{p^*}{p^*-q}$ *e* $\lambda_2 = \left(\frac{p-q}{p^*-q}\right)^{\frac{p-q}{p^*-p}} \left(\frac{p^*-p}{p^*-q}\right) S^{\frac{p^*-q}{p^*-p}} \|f\|_\beta^{-1}$*. Então para cada* $u \in \mathbf{E} \setminus \{0\}$ *fixado e* $\lambda \in (0, \lambda_2)$*, temos*

(*i*) *Existe um único* t_u^- *(dependendo de* u*) satisfazendo* $t_u^- u \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$*. Além disso,* $t_u^- > t_{\max}$ *e*

$$J_\lambda(t_u^- u) = \max_{t \geq t_{\max}} J_\lambda(tu);$$

(*ii*) *Se* $\int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x > 0$*, então existe um único* t_u^+ *(dependendo de* u*) satisfazendo* $t_u^+ u \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$*. Além disso,* $0 < t_u^+ < t_{\max}$ *e*

$$J_\lambda(t_u^+ u) = \min_{0 \leq t \leq t_u^-} J_\lambda(tu).$$

Veja as figuras 1.2 e 1.3 para uma noção geométrica da variedade de Nehari.

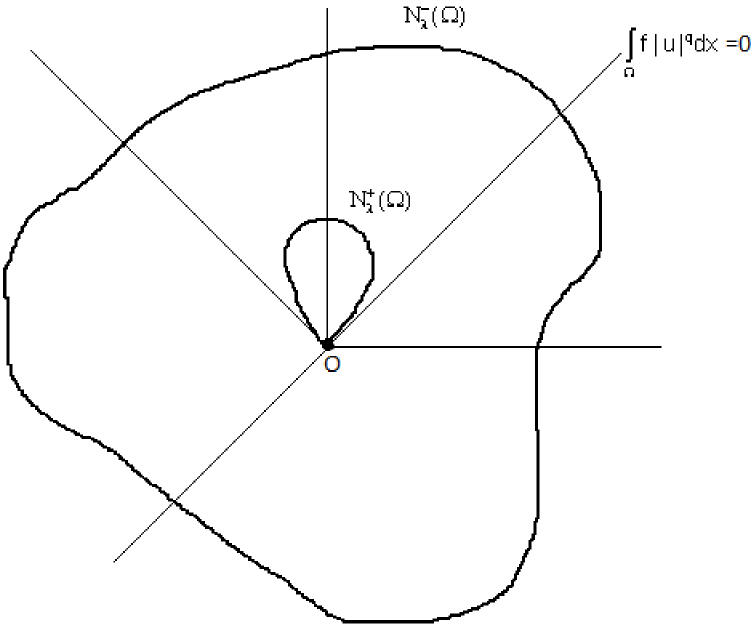

FIGURA 1.2: A variedade de Nehari $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ é exibida para uma função peso $f(x)$ que muda de sinal uma única vez.

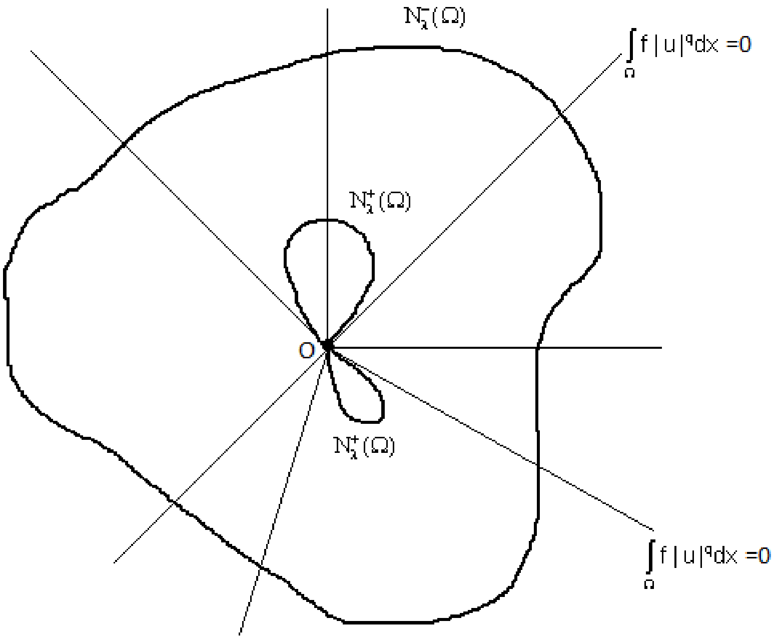

FIGURA 1.3: A variedade de Nehari $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ é exibida para uma função peso $f(x)$ que muda de sinal duas vezes.

Demonstração. Fixado $u \in \mathbf{E}\backslash\{0\}$, suponhamos inicialmente que $\int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x \leq 0$. Então existe um único $t_u^- > t_{\max}$ tal que $s(t_u^-) = \lambda \int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x$. Claramente, $s'(t_u^-) < 0$. Veja a Figura 1.4.

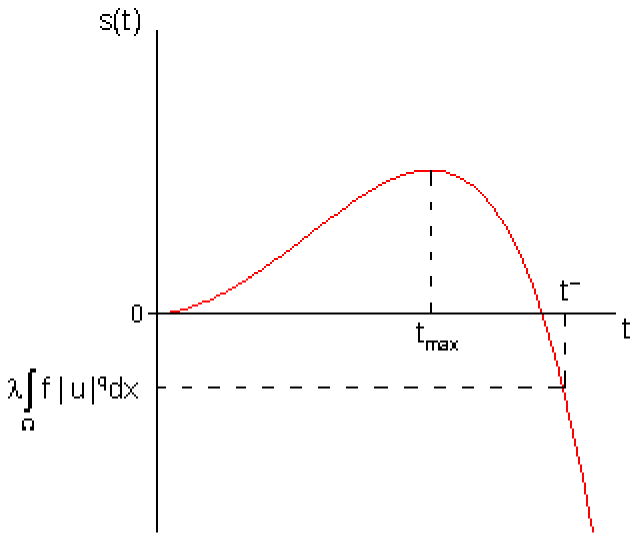

FIGURA 1.4: O gráfico de $s(t) = t^{p-q}\|u\|^p - t^{p^*-q}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x$ é exibido, ressaltando o único ponto $t^- = t_u^-$ tal que $s(t_u^-) = \lambda \int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x$.

Afirmamos que $t_u^- u \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\langle J'_\lambda(t_u^- u), t_u^- u\rangle &= (t_u^-)^p\|u\|^p - (t_u^-)^q\lambda\int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x - (t_u^-)^{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x \\
&= (t_u^-)^q\left((t_u^-)^{p-q}\|u\|^p - \lambda\int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x - (t_u^-)^{p^*-q}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x\right) \\
&= (t_u^-)^q\left(s(t_u^-) - \lambda\int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x\right) = 0, \qquad (1.20)
\end{aligned}$$

mostrando que $t_u^- u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\langle \psi'_\lambda(t_u^- u), t_u^- u\rangle &= p\|t_u^- u\|^p - q\lambda\int_\Omega f(x)|t_u^- u|^q\mathrm{d}x - p^*\int_\Omega |t_u^- u|^{p^*}\mathrm{d}x \\
&= (p-q)\|t_u^- u\|^p - (p^*-q)\int_\Omega |t_u^- u|^{p^*}\mathrm{d}x \\
&= (p-q)(t_u^-)^p\|u\|^p - (p^*-q)(t_u^-)^{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x \\
&= (t_u^-)^{q+1}\left((p-q)(t_u^-)^{p-q-1}\|u\|^p - (p^*-q)(t_u^-)^{p^*-q-1}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x\right) \\
&= (t_u^-)^{q+1}s'(t_u^-) < 0, \qquad (1.21)
\end{aligned}$$

a segunda igualdade sendo consequência de (1.8). Isso prova a nossa afirmação.

Agora, vamos mostrar que $J_\lambda(t_u^- u) = \max_{t\geq t_{\max}} J_\lambda(tu)$. (Veja a Figura 1.5.)

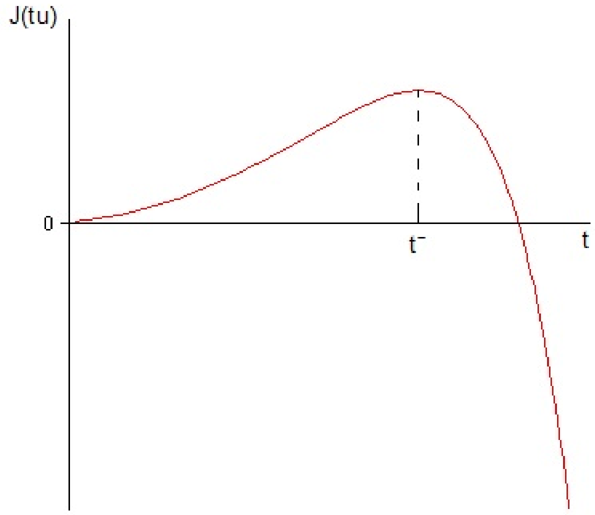

Figura 1.5: O gráfico de $J_\lambda(tu) = \frac{1}{p}t^p\|u\|^p - t^q\frac{\lambda}{q}\int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x - \frac{1}{p^*}t^{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x$ é exibido, para $u \in \mathbf{E}\setminus\{0\}$ fixado e $\int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x \leq 0$.

De fato,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J_\lambda(tu) &= t^{p-1}\|u\|^p - t^{q-1}\lambda\int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x - t^{p^*-1}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x\\
&= t^{q-1}\left(t^{p-q}\|u\|^p - \lambda\int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x - t^{p^*-q}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x\right)\\
&= t^{q-1}\left(s(t) - \lambda\int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x\right) \qquad (1.22)
\end{aligned}
$$

mostra que $\frac{d}{dt}J_\lambda(tu) = 0$ se, e somente se, $t = 0$ ou $t = t_u^-$. Como

$$\frac{d^2}{dt^2}J_\lambda(tu) = (q-1)t^{q-2}\left(s(t) - \lambda\int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x\right) + t^{q-1}s'(t), \qquad (1.23)$$

concluímos que $\frac{d^2}{dt^2}J_\lambda(tu)\Big|_{t=t_u^-} < 0$ e

$$J_\lambda(t_u^- u) = \max_{t\geq t_{\max}} J_\lambda(tu)$$

completando a prova de (i) no caso em que $\int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x \leq 0$.[1]

Suponhamos agora que $\int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x > 0$. Afirmamos que $\lambda\int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x < s(t_{\max})$, se $0 < \lambda < \lambda_2$. De fato, decorre das desigualdades de Hölder e Sobolev que

$$s(0) = 0 < \lambda\int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x \leq \lambda\|f\|_\beta\|u\|_{p^*}^q \leq \lambda\|f\|_\beta S^{-\frac{q}{p}}\|u\|^q$$

e a definição de λ_2 garante que

$$s(0) = 0 < \lambda\int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x < \|u\|^q\left(\frac{p-q}{p^*-q}\right)^{\frac{p-q}{p^*-p}}\left(\frac{p^*-p}{p^*-q}\right)\left(S^{\frac{p^*}{p}}\right)^{\frac{p-q}{p^*-p}} \leq s(t_{\max}),$$

de acordo com (1.19).

Assim, existem únicos t_u^+ e t_u^- tais que $s(t^+) = \lambda\int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x = s(t^-)$, com $0 < t_u^+ < t_{\max} < t_u^-$ e $s'(t_u^+) > 0 > s'(t_u^-)$. Veja a Figura 1.6.

De (1.20) e (1.21) decorre que $t^-u \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$. Argumento similar garante que $t^+u \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$. As equações (1.22) e (1.23) mostram que t_u^+ e t_u^- são pontos de mínimo e máximo locais, respectivamente, da função $t \mapsto J_\lambda(tu)$. Como a equação (1.22) mostra que $J_\lambda(tu)$ é decrescente para $0 < t < t_u^+$ e crescente para $t_u^+ < t < t_u^-$, concluímos que

$$J_\lambda(t^+u) = \min_{0\leq t\leq t_u^-} J_\lambda(tu). \qquad (1.24)$$

Como no caso em que $\int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x \leq 0$, concluímos que

$$J_\lambda(t^-u) = \max_{t\geq t_{\max}} J_\lambda(tu)$$

e o resultado está provado. ■

[1]Nesse caso, como 0 não é ponto de máximo, podemos concluir que $J_\lambda(t_u^-u) = \max_{t\geq 0} J_\lambda(tu)$.

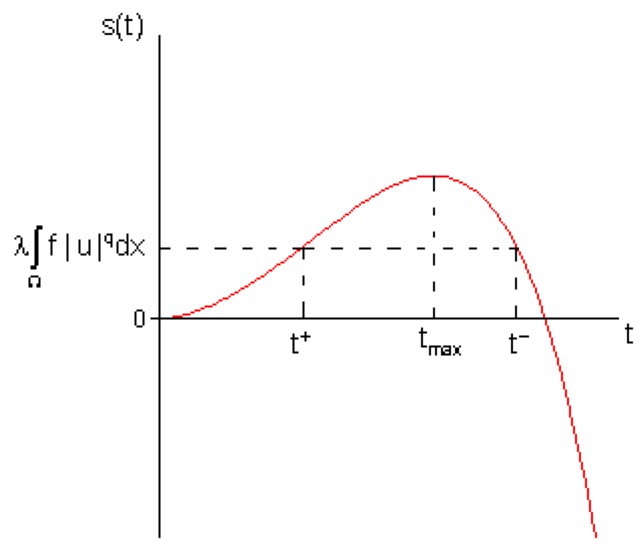

Figura 1.6: O gráfico de $s(t) = t^{p-q}\|u\|^p - t^{p^*-q}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x$ garante a existência de únicos $t^+ = t_u^+$ e $t^- = t_u^-$ tais que $s(t_u^+) = \lambda\int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x = s(t_u^-)$, com $s'(t_u^+) > 0 > s'(t_u^-)$.

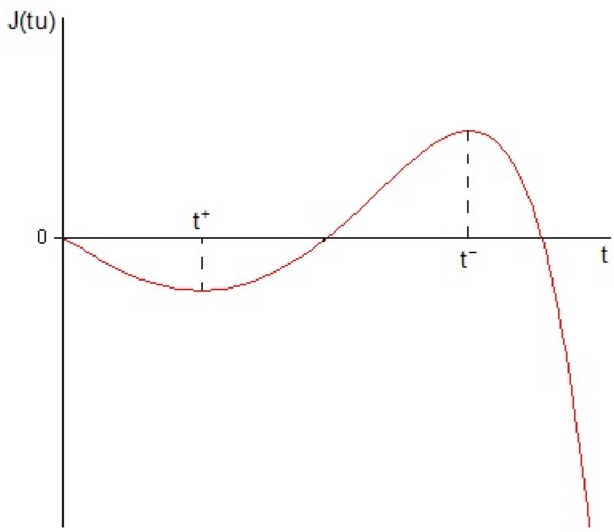

Figura 1.7: O gráfico de $J_\lambda(tu) = \frac{1}{p}t^p\|u\|^p - t^q\frac{\lambda}{q}\int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x - \frac{1}{p^*}t^{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x$ é exibido, para $u \in \mathbf{E}\setminus\{0\}$ fixado, $\int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x > 0$ e λ suficientemente pequeno.

Lema 1.5. *Sob as mesmas hipóteses do Lema 1.4, temos*

(i) $u \mapsto t_u^-$ *é uma função contínua para* u *não nulo;*

(ii) $\mathcal{N}_\lambda^-(\Omega) = \left\{u \in \mathbf{E} \setminus \{0\} \,:\, \frac{1}{\|u\|} t^-_{u/\|u\|} = 1\right\}$.

Demonstração. A função $u \mapsto t_u^-$ está bem definida, de acordo com o Lema 1.4 (i). Como a função $u \mapsto J_\lambda(tu)$ é contínua para $t > 0$, concluímos que t_u^- é contínua.

Para $u \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$, seja $v = \frac{u}{\|u\|}$. Pelo Lema 1.4, existe um único $t_v^- > 0$ tal que $t_v^- v \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$, isto é, $\left[\frac{1}{\|u\|} t^-_{u/\|u\|}\right] u \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$. Como $u \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$, temos $\frac{1}{\|u\|} t^-_{u/\|u\|} = 1$, o que implica

$$\mathcal{N}_\lambda^-(\Omega) \subset \left\{u \in \mathbf{E} \setminus \{0\} \,:\, \frac{1}{\|u\|} t^-_{u/\|u\|} = 1\right\}.$$

Reciprocamente, dado $u \in \mathbf{E} \setminus \{0\}$ tal que $\frac{1}{\|u\|} t^-(\frac{u}{\|u\|}) = 1$, defina $v = \frac{u}{\|u\|}$. Então $t_v^- v \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$. Como

$$u = \left(\frac{1}{\|u\|} t^-_{u/\|u\|}\right) u \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega),$$

concluímos nossa demonstração. ∎

Observe que, no Lema 1.4 (ii), precisamos que $\int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x$ seja positiva. Entretanto, a hipótese $(f+)$ não garante isto, pois a função peso f pode trocar de sinal de maneira que $\int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x$ não seja positiva. Com a finalidade de utilizar o Lema 1.4 (ii), vamos restringir nosso estudo a um subconjunto de Ω em que f é positiva. Esta restrição nos possibilitará obter uma cota superior para $m_\lambda^+(\Omega)$.

1.2.2 O problema restrito

Como $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é contínua e satisfaz $(f+)$ em Ω, temos que

$$\Xi = \{x \in \Omega \,:\, f(x) > 0\} \neq \emptyset$$

é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$ e, portanto, tem medida positiva.

Desse modo, podemos considerar o funcional $J_0 : W_0^{2,p}(\Xi) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J_0(u) = \frac{1}{p} \int_\Xi |\Delta u|^p \mathrm{d}x - \frac{1}{p^*} \int_\Xi |u|^{p^*} \mathrm{d}x$$

e o problema de minimização

$$m_0(\Xi) = \inf\{J_0(u) \,:\, u \in \mathcal{N}_0(\Xi)\},$$

em que, como antes,

$$\mathcal{N}_0(\Xi) = \left\{u \in W_0^{2,p}(\Xi) \setminus \{0\} \,:\, \langle J_0'(u), u\rangle = 0\right\}.$$

Veja a figura 1.9. Note que, se $u \in \mathcal{N}_0(\Xi)$ temos

$$\int_{\Xi} |\Delta u|^p \mathrm{d}x = \int_{\Xi} |u|^{p^*} \mathrm{d}x. \tag{1.25}$$

Na sequência provaremos algumas propriedade extremais de $J_0(tu)$ para $u \in W_0^{2,p}(\Xi) \setminus \{0\}$ fixado e, também, que a variedade de Nehari $\mathcal{N}_0(\Xi)$ é homeomorfa à esfera unitária de $W_0^{2,p}(\Xi)$. Este resultado nos permitirá concluir que $m_0(\Xi) > 0$.

Lema 1.6. *Valem as afirmações.*

(i) *Para qualquer $u \in W_0^{2,p}(\Xi) \setminus \{0\}$ existe um único $t_u > 0$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}_0(\Xi)$.*

(ii) *Para qualquer $u \in W_0^{2,p}(\Xi) \setminus \{0\}$ fixado, o máximo de $J_0(tu)$ para $t \geq 0$ é atingido em $t = t_u$.*

(iii) *A função $t : W_0^{2,p}(\Xi) \setminus \{0\} \to (0, +\infty)$ que associa $u \mapsto t_u$ é contínua. Além disso, a função $u \mapsto t_u u$ define um homeomorfismo da esfera unitária de $W_0^{2,p}(\Xi)$ em $\mathcal{N}_0(\Xi)$.*

Demonstração. Fixado $u \in W_0^{2,p}(\Xi) \setminus \{0\}$, defina a função $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por $g(t) := J_0(tu)$. (Veja a Figura 1.8.) Claramente, para $t > 0$, temos

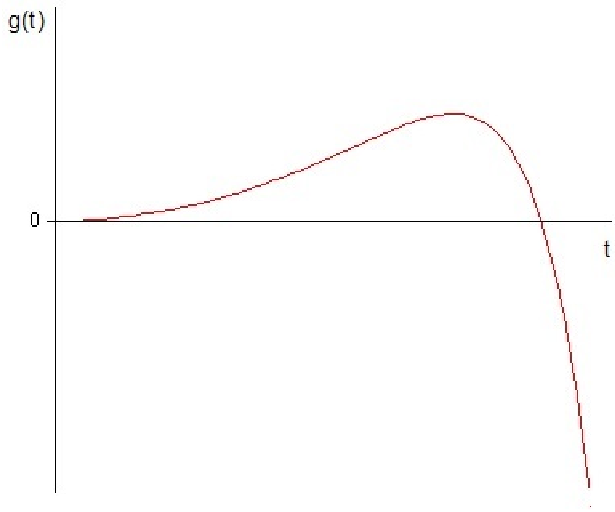

FIGURA 1.8: O gráfico de $g(t) = J_0(tu) = \frac{t^p}{p}\|u\|^p - \frac{t^{p^*}}{p^*}\int_{\Xi}|u|^{p^*}\mathrm{d}x$ é exibido para $t \geq 0$ e $u \in \mathbf{E} \setminus \{0\}$ fixado.

$$\begin{aligned} g'(t) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \langle J_0'(tu), u\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \langle J_0'(tu), tu\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad tu \in \mathcal{N}_0(\Xi) \\ &\Leftrightarrow \quad \|u\|^p = t^{p^*-p}\int_{\Xi}|u|^{p^*}\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Observemos a definição da função $g(t)$:

$$g(t) = \frac{t^p}{p}\|u\|^p - \frac{t^{p^*}}{p^*}\int_\Xi |u|^{p^*}\mathrm{d}x.$$

É claro que $g(0) = 0$. Note que, para t próximo de zero, o primeiro termo do lado direito da igualdade acima prevalece sobre o segundo termo. Daí, $g(t) > 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeno. Observe ainda que, quando t é grande, o segundo termo do lado direito da igualdade acima prevalece sobre o primeiro. Daí $g(t) < 0$ para $t > 0$ grande. Portanto, o $\max_{t\in[0,+\infty)} g(t)$ é atingido no único ponto $t = t_u$ tal que $g'(t_u) = 0$ e $t_u u \in \mathcal{N}_0(\Xi)$. Isto prova (i) e (ii).

Agora vamos provar (iii). De fato, pelo item (i), concluímos que a função

$$W_0^{2,p}(\Xi) \setminus \{0\} \to (0, +\infty)$$

$$u \mapsto t_u$$

está bem definida. Para provar a continuidade de t, suponha que $u_n \to u$ em $W_0^{2,p}(\Xi)\setminus\{0\}$. Decorre de (1.26) que

$$t_{u_n} = \left(\frac{\|u_n\|^p}{\int_\Xi |u_n|^{p^*}\mathrm{d}x}\right)^{\frac{1}{p^*-p}} \qquad \text{e} \qquad t_u = \left(\frac{\|u\|^p}{\int_\Xi |u|^{p^*}\mathrm{d}x}\right)^{\frac{1}{p^*-p}}.$$

Pela continuidade da imersão $W_0^{2,p}(\Xi) \hookrightarrow L^{p^*}(\Xi)$ temos $u_n \to u$ em $L^{p^*}(\Xi) \setminus \{0\}$. Daí

$$t_{u_n} = \left(\frac{\|u_n\|^p}{\int_\Xi |u_n|^{p^*}\mathrm{d}x}\right)^{\frac{1}{p^*-p}} \to \left(\frac{\|u\|^p}{\int_\Xi |u|^{p^*}\mathrm{d}x}\right)^{\frac{1}{p^*-p}} = t_u.$$

Afirmamos que a inversa do mapeamento contínuo $u \mapsto t_u u$ (da esfera unitária em $W_0^{2,p}(\Xi)$ na variedade $\mathcal{N}_0(\Xi)$) é a retração $u \mapsto \frac{u}{\|u\|}$. De fato,

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{W_0^{2,p}(\Xi)} &\to \mathcal{N}_0(\Xi) \to \mathbb{S}_{W_0^{2,p}(\Xi)} \\ u &\mapsto t_u u \mapsto \frac{t_u u}{\|t_u u\|} = \frac{u}{\|u\|} = u \end{aligned}$$

em que a última igualdade é consequência do fato de termos $u \in \mathbb{S}_{W_0^{2,p}(\Xi)}$. Temos também que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_0(\Xi) &\to \mathbb{S}_{W_0^{2,p}(\Xi)} \to \mathcal{N}_0(\Xi) \\ u &\mapsto \frac{u}{\|u\|} \mapsto t_{u/\|u\|}\frac{u}{\|u\|} = u, \end{aligned}$$

donde a identidade acima decorre do item (i) do Lema 1.6. Isto completa a prova de (iii).
■

Observação: Uma demonstração do item (iii) similar àquela utilizada na prova do Lema 1.5 também é possível. A demonstração apresentada é mais explícita.

A variedade $\mathcal{N}_0(\Xi)$ separa $W_0^{2,p}(\Xi) \setminus \{0\}$ em duas regiões:

$$C_a = \{u \in W_0^{2,p}(\Xi) \setminus \{0\} \, : \, \langle J_0'(u), u\rangle > 0\}$$

e

$$C_b = \{u \in W_0^{2,p}(\Xi) \setminus \{0\} \, : \, \langle J_0'(u), u\rangle < 0\}.$$

Veja a figura 1.9.

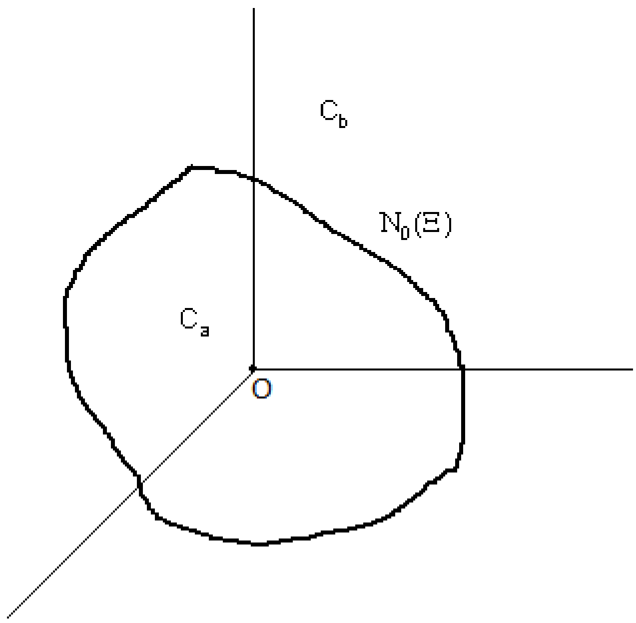

FIGURA 1.9: A variedade de Nehari $\mathcal{N}_0(\Xi)$ e as regiões C_a e C_b são exibidas para o problema restrito.

Se $u \in C_a$, então

$$\langle J_0'(u), u\rangle = \|u\|^p - \int_\Xi |u|^{p^*} \mathrm{d}x > 0,$$

o que implica que

$$\|u\|^p > \int_\Xi |u|^{p^*} \mathrm{d}x > \frac{p}{p^*} \int_\Xi |u|^{p^*} \mathrm{d}x.$$

Logo,

$$J_0(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{p^*}\int_\Xi |u|^{p^*} \mathrm{d}x > \frac{1}{p^*}\int_\Xi |u|^{p^*} \mathrm{d}x - \frac{1}{p^*}\int_\Xi |u|^{p^*} \mathrm{d}x = 0,$$

provando que $J_0(u) > 0$ para todo $u \in C_a$. A geometria do funcional J_0 implica que a região C_a é a vizinhança da origem.

Por outro lado, se
$$J_0(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{p^*}\int_\Xi |u|^{p^*}\mathrm{d}x < 0,$$
então temos
$$\|u\|^p < \frac{p}{p^*}\int_\Xi |u|^{p^*}\mathrm{d}x < \int_\Xi |u|^{p^*}\mathrm{d}x,$$
o que mostra que $\langle J_0'(u), u\rangle < 0$ e nos permite concluir que $u \in C_b$.

Vamos finalizar a demonstração de que $m_0(\Xi) > 0$ ao definir
$$c_1 := \inf_{u\in W_0^{2,p}(\Xi)\setminus\{0\}} \max_{t\geq 0} J_0(tu)$$
e
$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J_0(\gamma(t)),$$
em que $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], W_0^{2,p}(\Xi)) \,:\, \gamma(0) = 0, J_0(\gamma(1)) < 0\}$:

Lema 1.7. $m_0(\Xi) = c_1 = c > 0$.

Demonstração. Temos que $m_0(\Xi) = c_1$. De fato, seja $u \in W_0^{2,p}(\Xi) \setminus \{0\}$. Pelo item (ii) do Lema 1.6, temos
$$J_0(t_u u) = \max_{t\geq 0} J_0(tu) \tag{1.27}$$
e, tomando o ínfimo em $W_0^{2,p}(\Xi) \setminus \{0\}$, obtemos
$$\inf_{u\in W_0^{2,p}(\Xi)\setminus\{0\}} J_0(t_u u) = \inf_{u\in W_0^{2,p}(\Xi)\setminus\{0\}} \max_{t\geq 0} J_0(tu) = c_1.$$

Por outro lado, pelo item (iii) do Lema 1.6 decorre que
$$\inf_{u\in W_0^{2,p}(\Xi)\setminus\{0\}} J_0(t_u u) = \inf_{u\in \mathbb{S}_{W_0^{2,p}(\Xi)}} J_0(t_u u) = \inf_{v\in\mathcal{N}_0(\Xi)} J_0(v) = m_0(\Xi).$$

Agora mostraremos que $c_1 \geq c$. De fato, seja
$$X = \{u \in W_0^{2,p}(\Xi) \setminus \{0\} \,:\, J_0(u) < 0\}.$$
Tome $u \in X$ e considere o caminho $\gamma(t) = tu$. Note que $\gamma \in \Gamma$ e $0 < t_u < 1$. Daí
$$\max_{t\geq 0} J_0(tu) = J_0(\gamma(t_u)) = \max_{t\in[0,1]} J_0(\gamma(t)) \geq c.$$
Tomando o ínfimo sobre o conjunto X, obtemos
$$\inf_X \max_{t\geq 0} J_0(tu) \geq c.$$
Como o conjunto X contém todas as direções do espaço $W_0^{2,p}(\Xi) \setminus \{0\}$, concluímos que
$$c_1 = \inf_{W_0^{2,p}(\Xi)\setminus\{0\}} \max_{t\geq 0} J_0(tu) = \inf_X \max_{t\geq 0} J_0(tu) \geq c.$$

Agora mostraremos que $c \geq m_0(\Xi)$. Para isso, notamos que todo caminho $\gamma \in \Gamma$ cruza $\mathcal{N}_0(\Xi)$, de acordo com a geometria das regiões C_a e C_b. Seja $\gamma \in \Gamma$ um caminho qualquer. Temos

$$\max_{t\in[0,1]} J_0(\gamma(t)) \geq J_0(\gamma(t_0)) \geq \inf_{u\in\mathcal{N}_0(\Xi)} J_0(u) = m_0(\Xi)$$

em que $\gamma(t_0) \in \mathcal{N}_0(\Xi)$. Tomando o ínfimo em Γ, obtemos

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J_0(\gamma(t)) \geq m_0(\Xi).$$

Para completar a prova, vamos mostrar que $c > 0$. Tome R satisfazendo

$$0 < R < \left(\frac{p^*}{2p} S^{\frac{p^*}{p}}\right)^{\frac{1}{p^*-p}}.$$

Pela desigualdade de Sobolev, temos, para $u \in \partial B_R$

$$\begin{aligned} J_0(u) &= \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{p^*}\int_\Xi |u|^{p^*}dx \geq \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{p^*}S^{-\frac{p^*}{p}}\|u\|^{p^*} \\ &\geq \frac{1}{p}R^p - \frac{1}{p^*}S^{-\frac{p^*}{p}}R^{p^*} \geq \frac{1}{2p}R^p, \end{aligned}$$

o que nos permite concluir que

$$\inf_{u\in\partial B_R(0)} J_0(u) \geq \frac{1}{2p}R^p > 0.$$

Seja $\gamma \in \Gamma$ um caminho qualquer e considere $\gamma(t_1) \in \partial B_R(0)$. Daí

$$\max_{t\in[0,1]} J_0(\gamma(t)) \geq J_0(\gamma(t_1)) \geq \inf_{u\in\partial B_R(0)} J_0(u) > 0$$

e tomando o ínfimo sobre Γ, concluímos que

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J_0(\gamma(t)) \geq \inf_{u\in\partial B_R(0)} J_0(u) > 0.$$

■

Anteriormente, obtivemos algumas propriedades e resultados sobre a variedade de Nehari $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$. Provamos também, para $u \not\equiv 0$ fixado, propriedades extremais do funcional $J_\lambda(tu)$ em $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$. Ao restringirmos nosso estudo ao aberto Ξ, no qual a função peso f é positiva, consideramos o problema de minimização

$$m_0(\Xi) = \inf\{J_0(u) \,:\, u \in \mathcal{N}_0(\Xi)\},$$

em que $\mathcal{N}_0(\Xi)$ é a variedade de Nehari associada ao funcional J_0. O lema anterior prova que $m_0(\Xi) > 0$. Utilizaremos este fato para obter uma cota superior para $m_\lambda^+(\Omega)$. Esta cota será importante para provarmos a compacidade da sequência minimizante.

1.2.3 De volta ao problema original

Recordamos que

$$m_\lambda^+(\Omega) = \inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)} J_\lambda(u) \qquad \text{e} \qquad m_\lambda^-(\Omega) = \inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)} J_\lambda(u).$$

Observação: Dado $u \in W_0^{2,p}(\Xi) \setminus \{0\}$, a extensão natural de u definindo $u = 0$ em $\Omega \setminus \Xi$ pertence ao espaço $\mathbf{E} \setminus \{0\}$, pois $u \in W_0^{2,p}(\Omega) \subset \left(W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)\right)$.

Lema 1.8. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) Existe $\tilde{t} > 0$ tal que

$$m_\lambda(\Omega) \leq m_\lambda^+(\Omega) < \frac{q-p}{q}\left(\tilde{t}\right)^p m_0(\Xi) < 0$$

para todo $\lambda \in (0, \lambda_2)$;

(ii) J_λ é coercivo e limitado inferiormente em $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$, para todo $\lambda \in \left(0, \frac{p^*-p}{p^*-q}\right)$.

Demonstração. Para todo $u \in W_0^{2,p}(\Xi) \setminus \{0\} \subset \mathbf{E} \setminus \{0\}$, temos

$$\int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x = \int_\Xi f(x)|u|^q \mathrm{d}x > 0.$$

Considere t_u^+, como definido no Lema 1.4 (ii). Assim, $t_u^+ u \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$ e

$$J_\lambda(t_u^+ u) = \frac{(t_u^+)^p}{p}\int_\Omega |\Delta u|^p \mathrm{d}x - \lambda\frac{(t_u^+)^q}{q}\int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x - \frac{(t_u^+)^{p^*}}{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x.$$

A igualdade (1.8) para $t_u^+ u$ nos dá

$$J_\lambda(t_u^+ u) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)(t_u^+)^p \int_\Omega |\Delta u|^p \mathrm{d}x + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}\right)(t_u^+)^{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x$$

e, ao colocar $\left(\frac{q-p}{q}\right)$ em evidência, obtemos

$$J_\lambda(t_u^+ u) = \left(\frac{q-p}{q}\right)(t_u^+)^p \left[\frac{1}{p}\int_\Omega |\Delta u|^p \mathrm{d}x - \left(\frac{q-p^*}{q-p}\right)\frac{(t_u^+)^{p^*-p}}{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x\right].$$

Uma vez que o Lema 1.4 garante que $t_u^+ < t_{\max}$, concluímos que

$$J_\lambda(t_u^+ u) < \left(\frac{q-p}{q}\right)(t_u^+)^p \left[\frac{1}{p}\int_\Omega |\Delta u|^p \mathrm{d}x - \left(\frac{q-p^*}{q-p}\right)\frac{(t_{\max})^{p^*-p}}{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x\right].$$

Lembrando que $t_{\max} = \left[\frac{(p-q)\|u\|^p}{(p^*-q)\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x}\right]^{\frac{1}{p^*-p}}$ e tomando $u \in \mathcal{N}_0(\Xi)$, obtemos

$$\begin{aligned}
J_\lambda(t_u^+ u) &< \left(\frac{q-p}{q}\right)(t_u^+)^p\left[\frac{1}{p}\int_\Omega |\Delta u|^p \mathrm{d}x - \left(\frac{q-p^*}{q-p}\right)\frac{(t_{\max})^{p^*-p}}{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x\right]\\
&= \left(\frac{q-p}{q}\right)(t_u^+)^p\left[\frac{1}{p}\int_\Omega |\Delta u|^p \mathrm{d}x - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |\Delta u|^p\mathrm{d}x\right]\\
&= \left(\frac{q-p}{q}\right)(t_u^+)^p\left[\frac{1}{p}\int_\Omega |\Delta u|^p \mathrm{d}x - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x\right]\\
&= \frac{q-p}{q}(t_u^+)^p J_0(u)\\
&\leq \frac{q-p}{q}(t_u^+)^p m_0(\Xi) < 0.
\end{aligned}$$

Desse modo, obtemos (i) para $\tilde{t} = t_u^+$:

$$m_\lambda(\Omega) \leq m_\lambda^+(\Omega) < \frac{q-p}{q}(t_u^+)^p m_0(\Xi) < 0.$$

Para provarmos (ii), consideremos $u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$, o que garante que

$$\int_\Omega |\Delta u|^p \mathrm{d}x = \lambda\int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x + \int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x.$$

Assim, decorre das desigualdades de Hölder, Sobolev e Young que

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u) &= \frac{p^*-p}{pp^*}\int_\Omega |\Delta u|^p\mathrm{d}x - \lambda\frac{p^*-q}{qp^*}\int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x\\
&\geq \frac{p^*-p}{pp^*}\int_\Omega |\Delta u|^p\mathrm{d}x - \lambda\frac{p^*-q}{qp^*}\|f\|_\beta\|u\|_{p^*}^q\\
&\geq \frac{p^*-p}{pp^*}\int_\Omega |\Delta u|^p\mathrm{d}x - \lambda\frac{p^*-q}{qp^*}\|f\|_\beta S^{-\frac{q}{p}}\|u\|^q \qquad (1.28)\\
&\geq \frac{1}{pp^*}\Big[(p^*-p) - \lambda(p^*-q)\Big]\|u\|^p - \lambda\frac{(p^*-q)(p-q)}{pqp^*}\left(\|f\|_\beta S^{-\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{p-q}},
\end{aligned}$$

provando que J_λ é coercivo em $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$, para todo $\lambda \in (0, \frac{p^*-p}{p^*-q})$.

Além disso, para todo $\lambda \in (0, \frac{p^*-p}{p^*-q})$, temos

$$J_\lambda(u) \geq -\lambda\frac{(p^*-q)(p-q)}{pqp^*}\left(\|f\|_\beta S^{-\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{p-q}},$$

o que prova a limitação inferior de J_λ em $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$. ■

Agora obtemos uma cota inferior para $m_\lambda^-(\Omega)$ para $\lambda \in (0, \lambda_1)$, com λ_1 definido no Lema 1.1.

Lema 1.9. *Para $\lambda \in (0, \lambda_1)$, o conjunto $\mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$ é fechado.*

Demonstração. Para mostrar que o conjunto $\mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$ é fechado, vamos estabelecer uma cota inferior para $\|u\|$ sempre que u pertencer a $\mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$. Tome $u \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$. Como $u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$, temos

$$\lambda \int_\Omega f(x)|u|^q dx = \int_\Omega |\Delta u|^p dx - \int_\Omega |u|^{p^*} dx \tag{1.29}$$

e pelo fato de $u \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$, temos

$$p \int_\Omega |\Delta u|^p dx - q\lambda \int_\Omega f(x)|u|^q dx - p^* \int_\Omega |u|^{p^*} dx < 0.$$

Substituindo a equação (1.29) na desigualdade acima, obtemos

$$(p-q) \int_\Omega |\Delta u|^p dx - (p^* - q) \int_\Omega |u|^{p^*} dx < 0,$$

daí decorrendo que

$$\left(\frac{p-q}{p^*-q}\right) \int_\Omega |\Delta u|^p dx < \int_\Omega |u|^{p^*} dx$$

e aplicando a desigualdade de Sobolev obtemos

$$\left(\frac{p-q}{p^*-q}\right) \int_\Omega |\Delta u|^p dx < \int_\Omega |u|^{p^*} dx \leq S^{-\frac{p^*}{p}} \|u\|^{p^*},$$

o que implica que

$$\|u\|^{p^*-p} > \left(\frac{p-q}{p^*-q}\right) S^{\frac{p^*}{p}}$$

e, portanto,

$$\|u\| > \left(\frac{p-q}{p^*-q}\right)^{\frac{1}{p^*-p}} S^{\frac{p^*}{p(p^*-p)}} = \left(\frac{p-q}{p^*-q}\right)^{\frac{1}{p^*-p}} S^{\frac{N}{2p^2}}. \tag{1.30}$$

A desigualdade acima é válida para todo $u \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$.

Seja $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $\mathbf{E}$. Por (1.30), temos que $u \in \mathbf{E} \setminus \{0\}$. Daí, pela regularidade C^1 do funcional J_λ, temos que

$$\psi_\lambda(u) := \langle J'_\lambda(u), u \rangle = 0,$$

o que prova que $u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$. Como $\langle \psi'_\lambda(u), u \rangle$ é contínuo, temos $\langle \psi'_\lambda(u), u \rangle \leq 0$. Como $\mathcal{N}_\lambda^0(\Omega)$ é vazio se $\lambda \in (0, \lambda_1)$, concluímos que

$$\langle \psi'_\lambda(u), u \rangle < 0,$$

provando que $u \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$. Assim, $\mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$ é um conjunto fechado. ■

Lema 1.10. *Existe uma constante $C > 0$ tal que, para todo $\lambda \in (0, \tilde{\lambda})$ temos*

$$m_\lambda^-(\Omega) \geq C > 0,$$

em que

$$\tilde{\lambda} = \frac{q}{2p} \left(\frac{p^*-p}{p^*-q}\right) \left(\frac{p-q}{p^*-q}\right)^{\frac{p-q}{p^*-p}} \|f\|_\beta^{-1} S^{\frac{Np}{2p^2}}.$$

Demonstração. Relembremos a desigualdade (1.28), obtida na prova do Lema 1.8 (ii), válida para todo $u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$:

$$J_\lambda(u) \geq \frac{p^*-p}{pp^*}\int_\Omega |\Delta u|^p \mathrm{d}x - \lambda\frac{p^*-q}{qp^*}\|f\|_\beta S^{-\frac{q}{p}}\|u\|^q.$$

Para todo $\lambda \in (0, \tilde{\lambda})$ decorre de (1.30) que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \frac{p^*-p}{pp^*}\int_\Omega |\Delta u|^p \mathrm{d}x - \lambda\frac{p^*-q}{qp^*}\|f\|_\beta S^{-\frac{q}{p}}\|u\|^q \\ &= \|u\|^q\left[\frac{p^*-p}{pp^*}\|u\|^{p-q} - \lambda\frac{p^*-q}{qp^*}\|f\|_\beta S^{-\frac{q}{p}}\right] \\ &> \|u\|^q\left[\left(\frac{p^*-p}{pp^*}\right)\left(\frac{p-q}{p^*-q}\right)^{\frac{p-q}{p^*-p}} S^{\frac{N(p-q)}{2p^2}} - \lambda\frac{p^*-q}{qp^*}\|f\|_\beta S^{-\frac{q}{p}}\right] \end{aligned}$$

(Note que $\tilde{\lambda}$ foi escolhido de forma a garantir a positividade do termo no colchete.)

Assim, temos que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &> \|u\|^q\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{p^*-p}{pp^*}\right)\left(\frac{p-q}{p^*-q}\right)^{\frac{p-q}{p^*-p}} S^{\frac{N(p-q)}{2p^2}}\right] \\ &> \left(\frac{p-q}{p^*-q}\right)^{\frac{q}{p^*-p}} S^{\frac{Nq}{2p^2}}\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{p^*-p}{pp^*}\right)\left(\frac{p-q}{p^*-q}\right)^{\frac{p-q}{p^*-p}} S^{\frac{N(p-q)}{2p^2}}\right] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{p^*-p}{pp^*}\right)\left(\frac{p-q}{p^*-q}\right)^{\frac{p}{p^*-p}} S^{\frac{N}{2p}} =: C. \end{aligned}$$

Tomando o ínfimo de $J_\lambda(u)$ para $u \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$, obtemos

$$m_\lambda^-(\Omega) \geq C > 0.$$

■

Nosso próximo objetivo é a obtenção de uma cota superior para $m_\lambda^-(\Omega)$, que será utilizada para provar a condição de Palais-Smale neste nível. Para que a mesma prova seja válida tanto no espaço $\mathbf{E} = W_0^{2,p}(\Omega)$ como no espaço $\mathbf{E} = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, utilizaremos o seguinte resultado, devido à Gazzola, Grunau e Sweers (veja [21, Thm.1, p. 2]).

Proposição 1.1. *A melhor constante para a imersão de Sobolev $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ é igual à melhor constante para a imersão de Sobolev $W_0^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$.*

Lema 1.11. *Para todo $D > 0$ dado, existe $\bar{\lambda} > 0$ (dependendo de f, p, q, Ω e D) tal que, para $\lambda \in (0, \bar{\lambda})$, vale*

$$m_\lambda^-(\Omega) < \frac{2}{N}S^{\frac{N}{2p}} - D\lambda^\beta,$$

em que $\beta = \frac{p^*}{p^*-q}$.

Demonstração. Seja $x_0 \in \Omega$ tal que $f(x_0) > 0$. Tome então ρ_0, $0 < \rho_0 < 1$, tal que

$$f > 0 \quad \text{em} \quad B_{2\rho_0}(x_0) \subset \Omega.$$

Consideremos novamente o funcional $J_0 \colon \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ definido por

$$J_0(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x$$

e tomemos uma função corte $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \eta \equiv 1 \quad & \text{em} \quad B_{\rho_0}(x_0), \\ \eta \equiv 0 \quad & \text{fora de} \quad B_{2\rho_0}(x_0) \end{aligned}$$

e também

$$0 \leq \eta \leq 1 \quad \text{e} \quad |\nabla \eta| \leq C.$$

Para $\epsilon > 0$, seja

$$u_\epsilon(x) = \eta(x) U\left(\frac{x}{\epsilon}\right),$$

em que U é um minimizador radialmente simétrico de $\left\{\frac{\|u\|^p}{\|u\|_{p^*}^p}\right\}_{u \in \mathbf{E}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}}$. Daí, temos as seguintes estimativas

$$\left(\int_\Omega |u_\epsilon|^{p^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p^*}} = \epsilon^{-\frac{N-2p}{p}}\|U\|_{p^*}^p + O(\epsilon); \tag{1.31}$$

$$\int_\Omega |\Delta u_\epsilon|^p \mathrm{d}x = \epsilon^{-\frac{N-2p}{p}}\|U\|^p + O(1); \tag{1.32}$$

$$\frac{\int_\Omega |\Delta u_\epsilon|^p\mathrm{d}x}{(\int_\Omega |u_\epsilon|^{p^*}\mathrm{d}x)^{\frac{p}{p^*}}} = S + O(\epsilon^{\frac{N-2p}{p}}), \tag{1.33}$$

em que

$$\frac{\|U\|^p}{\|U\|_{p^*}^p} = S = \inf_{u \in \mathbf{E}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\|u\|^p}{\|u\|_{p^*}^p}.$$

Seja $u_0(x) = u_\epsilon(x - x_0)$. Para $A, B > 0$, aplicando a identidade

$$\sup_{t \geq 0}\left(\frac{t^p}{p}A - \frac{t^{p^*}}{p^*}B\right) = \frac{2}{N}\left(\frac{A}{B^{\frac{p}{p^*}}}\right)^{\frac{N}{2p}}$$

a $J_0(tu_0)$ e também a estimativa (1.33), obtemos

$$\begin{aligned} \sup_{t\geq 0} J_0(tu_0) &= \sup_{t \geq 0}\left(\frac{t^p}{p}\|u_0\|^p - \frac{t^{p^*}}{p^*}\int_\Omega |u_0|^{p^*}\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{2}{N}\left(\frac{\int_\Omega |\Delta u_\epsilon|^p \mathrm{d}x}{(\int_\Omega |u_0|^{p^*}\mathrm{d}x)^{\frac{p}{p^*}}}\right)^{\frac{N}{2p}} \\ &= \frac{2}{N}\left(S + O(\epsilon^{\frac{N-2p}{p}})\right)^{\frac{N}{2p}} \\ &= \frac{2}{N}S^{\frac{N}{2p}} + O(\epsilon^{\frac{N-2p}{p}}). \end{aligned} \tag{1.34}$$

Decorre então da definição de J_λ e u_0 que

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq t_{\max}} J_\lambda(tu_0) &= \sup_{t\geq t_{\max}}\left(J_0(tu_0) - t^q\frac{\lambda}{q}\int_\Omega f|u_0|^q\mathrm{d}x\right)\\ &= \sup_{t\geq t_{\max}} J_0(tu_0) - (t_{\max})^q\,\frac{\lambda}{q}\int_\Omega f|u_0|^q\mathrm{d}x\\ &\leq \frac{2}{N}S^{\frac{N}{2p}} + O(\epsilon^{\frac{N-2p}{p}}) - (t_{\max})^q\frac{\lambda}{q}\int_{B_{\rho_0}(0)} f|u_\epsilon|^q dx \qquad (1.35)\end{aligned}$$

Tomando $0<\epsilon<\rho_0^{\frac{p}{p-1}}$, obtemos uma cota para a integral na desigualdade anterior:

$$\begin{aligned}\int_{B_{\rho_0}(0)} f|u_\epsilon|^q dx &= \int_{B_{\rho_0}(0)} \frac{f}{(\epsilon+|x|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{N-2p}{p}q}}dx\\ &\geq \int_{B_{\rho_0}(0)} \frac{f}{(2\rho_0^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{N-2p}{p}q}}dx = C_1, \qquad (1.36)\end{aligned}$$

em que C_1 é uma constante positiva que não depende de ϵ.

Como $\beta>1$, podemos escolher $\delta>0$ tal que, para $\lambda\in(0,\delta)$

$$O(\lambda^\beta) + D\lambda^\beta - C_2\lambda < 0, \qquad (1.37)$$

em que D é a constante positiva dada e $C_2>0$ será escolhida na sequência.

Definimos $\overline{\lambda}^\beta = \min\{\rho_0^{\frac{N-2p}{p-1}}, \delta^\beta\}$ e $\epsilon = \left(\lambda^\beta\right)^{\frac{p}{N-2p}}$. Para $\lambda\in(0,\overline{\lambda})$ podemos substituir (1.36) e (1.37) em (1.35) de modo a obter

$$\sup_{t\geq t_{\max}} J_\lambda(tu_0) \leq \frac{2}{N}S^{\frac{N}{2p}} + O(\lambda^\beta) - C_2\lambda,$$

em que $C_2 = (t_{\max})^q\frac{C_1}{q}$. Como (1.37) implica que $O(\lambda^\beta)-C_2\lambda < -D\lambda^\beta$, concluímos que

$$\sup_{t\geq t_{\max}} J_\lambda(tu_0) < \frac{2}{N}S^{\frac{N}{2p}} - D\lambda^\beta. \qquad (1.38)$$

De acordo com o Lema 1.4, existe $t_{u_0}^- > t_{\max} > 0$, tal que $t_{u_0}^- u_0 \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$ e

$$J_\lambda(t_{u_0}^- u_0) = \max_{t\geq t_{\max}} J_\lambda(tu_0).$$

Portanto, decorre de (1.38) que

$$m_\lambda^-(\Omega) \leq J_\lambda(t_{u_0}^- u_0) = \max_{t\geq t_{\max}} J_\lambda(tu_0) < \frac{2}{N}S^{\frac{N}{2p}} - D\lambda^\beta$$

para todo $\lambda\in(0,\overline{\lambda})$. Isto finaliza a prova. ■

1.3 Sequências de Palais-Smale para J_λ

Vamos mostrar que existe uma sequência minimizante $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ satisfazendo

$$J_\lambda(u_n) = m(\Omega) + o(1);$$

$$J'_\lambda(u_n) = o(1) \text{ em } \mathbf{E}^*.$$

Para demonstrar este resultado, utilizaremos o próximo lema, cuja prova é baseada no teorema da função implícita. (Relembramos que $\lambda \in (0, \lambda_1)$ garante que $\mathcal{N}^0_\lambda(\Omega) = \emptyset$.)

Os próximos resultados dão uma prova alternativa da parte de existência mostrada no Lema 1.4:

Lema 1.12. *Suponha $\lambda \in (0, \lambda_1)$. Então, para $u \in \mathcal{N}^-_\lambda(\Omega)$, existem $\epsilon > 0$ e uma função diferenciável $\xi : B_\epsilon(0) \subset \mathbf{E} \to \mathbb{R}^+$ com $\xi(0) = 1$, satisfazendo $\xi(v)(u - v) \in \mathcal{N}^-_\lambda(\Omega)$ para todo $v \in B_\epsilon(0)$ e*

$$\langle \xi'(0), w\rangle = \frac{p\int_\Omega |\Delta u|^{p-2}\Delta u \Delta w \mathrm{d}x - q\lambda \int_\Omega f(x)|u|^{q-2}uw\mathrm{d}x - p^* \int_\Omega |u|^{p^*-2}uw\mathrm{d}x}{(p-q)\int_\Omega |\Delta u|^p\mathrm{d}x - (p^*-q)\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x}. \quad (1.39)$$

para todo $w \in \mathbf{E}$. Se $u \in \mathcal{N}^-_\lambda(\Omega)$, então $\xi(v)(u - v) \in \mathcal{N}^-_\lambda(\Omega)$.

Demonstração. Para $u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ fixo, defina a função $F_u : \mathbb{R} \times \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} F_{\lambda,u}(\xi, \omega) &= \langle J'_\lambda(\xi(u-\omega)), \xi(u-\omega)\rangle \\ &= \xi^p \int_\Omega |\Delta(u-\omega)|^p\mathrm{d}x - \lambda\xi^q \int_\Omega f(x)|u-\omega|^q\mathrm{d}x - \xi^{p^*}\int_\Omega |u-\omega|^{p^*}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Como $u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$, temos $F_{\lambda,u}(1, 0) = \langle J'_\lambda(u), u\rangle = 0$.

Calculando $\frac{\partial}{\partial\xi}F_{\lambda,u}(\xi, \omega)$, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial\xi}F_{\lambda,u}(\xi,\omega) = p\xi^{p-1}\int_\Omega |\Delta(u-\omega)|^p\mathrm{d}x - q\lambda\xi^{q-1}\int_\Omega f(x)|u-\omega|^q\mathrm{d}x - p^*\xi^{p^*-1}\int_\Omega |u-\omega|^{p^*}\mathrm{d}x$$

e avaliando em $(\xi, \omega) = (1, 0)$, chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\xi}F_{\lambda,u}(1,0) &= p\int_\Omega |\Delta u|^p\mathrm{d}x - q\lambda\int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x - p^*\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x \\ &= (p-q)\int_\Omega |\Delta u|^p\mathrm{d}x - (p^*-q)\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x \neq 0, \end{aligned} \quad (1.40)$$

pois $\mathcal{N}^0_\lambda(\Omega) = \emptyset$ para $\lambda \in (0, \lambda_1)$. Pelo teorema da função implícita, existem $\epsilon > 0$ e uma função diferenciável $\xi : B_\epsilon(0) \subset \mathbf{E} \to \mathbb{R}^+$ tal que $\xi(0) = 1$,

$$F_{\lambda,u}(\xi(v), v) = 0 \quad \text{para todo } v \in B_\epsilon(0) \quad (1.41)$$

e

$$\langle \xi'(0), w\rangle = -\left[\frac{\partial}{\partial \xi}F_{\lambda,u}(1,0)\right]^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial \omega}F_{\lambda,u}(1,0)\right]\cdot w \tag{1.42}$$

para todo $w \in \mathbf{E}$.

Uma vez que (1.41) é equivalente à identidade

$$\langle J'_\lambda(\xi(v)(u-v)), \xi(v)(u-v)\rangle = 0 \quad \text{para todo } v \in B_\epsilon(0),$$

concluímos que $\xi(v)(u-v) \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$.

Como

$$\frac{\partial}{\partial \omega}F_{\lambda,u}(\xi,\omega)\cdot w = -p\xi^p \int_\Omega |\Delta(u-\omega)|^{p-2}\Delta(u-\omega)\Delta w \mathrm{d}x + \\ + q\lambda\xi^q \int_\Omega f(x)|u-\omega|^{q-2}(u-\omega)w\mathrm{d}x + p^*\xi^{p^*}\int_\Omega |u-\omega|^{p^*-2}(u-\omega)w\mathrm{d}x,$$

avaliando em $(\xi,\omega) = (1,0)$ obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \omega}F_{\lambda,u}(1,0)\cdot w = -p\int_\Omega |\Delta u|^{p-2}\Delta u\Delta w\mathrm{d}x + q\lambda\int_\Omega f(x)|u|^{q-2}uw\mathrm{d}x + p^*\int_\Omega |u|^{p^*-2}uw\mathrm{d}x.$$

Substituindo esta última igualdade e (1.40) (1.42), obtemos

$$\langle \xi'(0), w\rangle = \frac{p\int_\Omega |\Delta u|^{p-2}\Delta u\Delta w\mathrm{d}x - q\lambda\int_\Omega f(x)|u|^{q-2}uw\mathrm{d}x - p^*\int_\Omega |u|^{p^*-2}uw\mathrm{d}x}{(p-q)\int_\Omega |\Delta u|^p\mathrm{d}x - (p^*-q)\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x}$$

para todo $w \in \mathbf{E}$, provando (1.39).

Para concluirmos a prova, basta mostrar que $\xi(v)(u-v) \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$. De fato, como $u \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$, temos

$$\langle \psi'_\lambda(u), u\rangle = (p-q)\|u\|^p - (p^*-q)\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x < 0.$$

Daí, por continuidade de ψ'_λ e ξ, temos

$$\langle \psi'_\lambda(\xi(v)(u-v)), \xi(v)(u-v)\rangle = (p-q)\|\xi(v)(u-v)\|^p - (p^*-q)\int_\Omega |\xi(v)(u-v)|^{p^*}\mathrm{d}x < 0$$

para ϵ suficientemente pequeno e portanto $\xi(v)(u-v) \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$. ∎

O próximo resultado é o análogo para $u \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$ e sua demonstração é feita de maneira semelhante.

Lema 1.13. *Suponha $\lambda \in (0,\lambda_1)$. Então, para $u \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$, existem $\epsilon > 0$ e uma função diferenciável $\xi : B_\epsilon(0) \subset \mathbf{E} \to \mathbb{R}^+$ tal que $\xi(0) = 1$, a função $\xi(v)(u-v) \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$ para todo $v \in B_\epsilon(0)$ e*

$$\langle (\xi)'(0), w\rangle = \frac{p\int_\Omega |\Delta u|^{p-2}\Delta u\Delta w\mathrm{d}x - q\lambda\int_\Omega f(x)|u|^{q-2}uw\mathrm{d}x - p^*\int_\Omega |u|^{p^*-2}uw\mathrm{d}x}{(p-q)\int_\Omega |\Delta u|^p\mathrm{d}x - (p^*-q)\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x} \tag{1.43}$$

para todo $w \in \mathbf{E}$.

Agora, utilizando os Lemas 1.12 e 1.13, vamos provar a existência de sequências de *Palais-Smale* para J_λ nos níveis $m_\lambda(\Omega)$ e $m_\lambda^-(\Omega)$. Mais precisamente, temos

Proposição 1.2. *Seja* $\lambda_3 = \inf\{\lambda_1, \lambda_2, \frac{p^*-p}{p^*-q}\}$. *Então, para* $\lambda \in (0, \lambda_3)$, *temos:*

(i) *existe uma sequência minimizante* $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ *satisfazendo*

$$J_\lambda(u_n) = m_\lambda(\Omega) + o(1) \qquad e \qquad J'_\lambda(u_n) = o(1) \ \text{em } \mathbf{E}^*;$$

(ii) *existe uma sequência minimizante* $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$ *satisfazendo*

$$J_\lambda(u_n) = m_\lambda^-(\Omega) + o(1) \qquad e \qquad J'_\lambda(u_n) = o(1) \ \text{em } \mathbf{E}^*.$$

Demonstração. Vamos provar (i). Pelo Lema 1.8 (ii) e pelo princípio variacional de Ekeland (veja o Teorema 3 no Apêndice A.9 ou [17]), existe uma sequência minimizante $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ tal que

$$J_\lambda(u_n) < m_\lambda(\Omega) + \frac{1}{n} \tag{1.44}$$

e

$$J_\lambda(u_n) < J_\lambda(\omega) + \frac{1}{n}\|\omega - u_n\| \tag{1.45}$$

para cada $\omega \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$.

Basta, portanto, mostrar que

$$\|J'_\lambda(u_n)\| \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Primeiramente, vamos obter cotas superior e inferior para $\|u_n\|$.

Como $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$, temos, por (1.8)

$$\begin{aligned} J_\lambda(u_n) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\Delta u_n|^p \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega f(x)|u_n|^q \mathrm{d}x - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |u_n|^{p^*}\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right)\|u_n\|^p - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}\right)\lambda\int_\Omega f(x)|u_n|^q \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Tomando n suficientemente grande, decorre do Lema 1.8 (i) que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u_n) &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right)\|u_n\|^p - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}\right)\lambda\int_\Omega f(x)|u_n|^q \mathrm{d}x \\ &< m_\lambda(\Omega) + \frac{1}{n} < \frac{q-p}{q}\left(\tilde{t}\right)^p m_0(\Xi) < 0. \end{aligned} \tag{1.46}$$

Daí, temos

$$-\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}\right)\lambda\int_\Omega f(x)|u_n|^q \mathrm{d}x \le J_\lambda(u_n) < \frac{q-p}{q}\left(\tilde{t}\right)^p m_0(\Xi).$$

Assim, como consequência das desigualdades de Hölder e Sobolev, concluímos

$$\|f\|_\beta S^{-\frac{q}{p}}\|u_n\|^q \geq \int_\Omega f(x)|u_n|^q \mathrm{d}x > \frac{p^*(p-q)}{\lambda(p^*-q)}\tilde{t}^p m_0(\Xi) \tag{1.47}$$

e, portanto, obtemos

$$\|u_n\| \geq \left[\frac{p^*(p-q)}{\lambda(p^*-q)}\frac{\tilde{t}^p}{\|f\|_\beta S^{-\frac{q}{p}}}m_0(\Xi)\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{1.48}$$

Por outro lado, decorre de (1.46) e (1.47) que

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)\|u_n\|^p &< \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p^*}\right)\lambda\int_\Omega f(x)|u_n|^q\mathrm{d}x \\ &\leq \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p^*}\right)\lambda\|f\|_\beta S^{-\frac{q}{p}}\|u_n\|^q,\end{aligned}$$

de modo que

$$\|u_n\| \leq \left[\frac{\lambda p(p^*-q)}{q(p^*-p)}\|f\|_\beta S^{-\frac{q}{p}}\right]^{\frac{1}{p-q}}, \tag{1.49}$$

como queríamos.

Agora, vamos obter uma cota superior para $\|J_\lambda'(u_n)\|$.

O Lema 1.12 aplicado à função u_n garante a existência de $\epsilon_n > 0$ e de uma função $\xi_n : B_{\epsilon_n}(0) \subset \mathbf{E} \to \mathbb{R}^+$ tal que $\xi_n(\omega)(u_n-\omega) \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$. Para $u \in \mathbf{E}\setminus\{0\}$ e $0<\rho<\epsilon_n$, definimos $\omega_\rho = \frac{\rho u}{\|u\|}$ e $\eta_\rho = \xi_n(\omega_\rho)(u_n-\omega_\rho)$. Como $\eta_\rho \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$, deduzimos de (1.45) que

$$J_\lambda(\eta_\rho) - J_\lambda(u_n) \geq -\frac{1}{n}\|\eta_\rho - u_n\|,$$

de modo que a definição da derivada de Fréchet nos dá

$$\langle J_\lambda'(u_n), \eta_\rho - u_n\rangle + o(\|\eta_\rho-u_n\|) \geq -\frac{1}{n}\|\eta_\rho - u_n\|.$$

Somando e subtraindo o termo $\langle J_\lambda'(u_n), \omega_\rho\rangle$ no lado esquerdo da desigualdade acima e aplicando a definição de η_ρ, obtemos

$$\langle J_\lambda'(u_n), -\omega_\rho\rangle + (\xi_n(\omega_\rho)-1)\langle J_\lambda'(u_n), (u_n-\omega_\rho)\rangle \geq -\frac{1}{n}\|\eta_\rho-u_n\| + o(\|\eta_\rho-u_n\|).$$

Uma vez que $\eta_\rho = \xi_n(\omega_\rho)(u_n-\omega_\rho) \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$, a desigualdade anterior nos dá

$$\begin{aligned}-\rho\left\langle J_\lambda'(u_n), \frac{u}{\|u\|}\right\rangle + (\xi_n(\omega_\rho)-1)\left\langle J_\lambda'(u_n) - J_\lambda'(\eta_\rho), (u_n-\omega_\rho)\right\rangle \\ \geq -\frac{1}{n}\|\eta_\rho-u_n\| + o(\|\eta_\rho-u_n\|),\end{aligned}$$

o que nos permite concluir que

$$\begin{aligned}\left\langle J_\lambda'(u_n), \frac{u}{\|u\|}\right\rangle &\leq \frac{(\xi_n(\omega_\rho)-1)}{\rho}\langle J_\lambda'(u_n) - J_\lambda'(\eta_\rho), (u_n-\omega_\rho)\rangle \\ &\quad + \frac{1}{n\rho}\|\eta_\rho-u_n\| + \frac{o(\|\eta_\rho-u_n\|)}{\rho}.\end{aligned} \tag{1.50}$$

Para completar a demonstração, passamos a estimar os termos do lado direito da desigualdade acima. A definição de η_ρ nos mostra que

$$\|\eta_\rho - u_n\| \leq |\xi_n(\omega_\rho) - 1|\,\|u_n\| + \rho|\xi_n(\omega_\rho)|, \tag{1.51}$$

enquanto a diferenciabilidade da função ξ garante que

$$\rho\|\xi_n'(0)\| \geq |\langle \xi_n'(0), \omega_\rho\rangle| = |\xi_n(\omega_\rho) - 1 + o(\|\omega_\rho\|)| \geq |\xi_n(\omega_\rho) - 1| + o(\rho)$$

e, portanto,

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{|\xi_n(\omega_\rho) - 1|}{\rho} \leq \|\xi_n'(0)\|. \tag{1.52}$$

Agora vamos utilizar as estimativas (1.51) e (1.52) para estimar (1.50). Uma vez que o funcional J_λ é de classe C^1, temos, para n fixo,

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{(\xi_n(\omega_\rho) - 1)}{\rho} \Big\langle J_\lambda'(u_n) - J_\lambda'(\eta_\rho), (u_n - \omega_\rho)\Big\rangle = 0.$$

Decorre de (1.49), (1.51) e (1.52) a existência de uma constante $C > 0$ (que não depende de ρ) tal que

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{1}{n\rho}\|\eta_\rho - u_n\| \leq \frac{1}{n}\left[C\|\xi_n'(0)\| + C\right]. \tag{1.53}$$

Finalmente, o último termo em (1.50) tende a zero quando ρ tende a zero. De fato,

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{o(\|\eta_\rho - u_n\|)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\|\eta_\rho - u_n\|}{\rho} o(1) = 0,$$

pois (1.53) garante que $\frac{\|\eta_\rho - u_n\|}{\rho}$ é limitado.

Assim, provamos a existência de uma constante $C > 0$ (independente de ρ) tal que

$$\left\langle J_\lambda'(u_n), \frac{u}{\|u\|}\right\rangle \leq \frac{C}{n}(1 + \|\xi_n'(0)\|).$$

Finalizaremos a demonstração de que $\|J_\lambda'(u_n)\| \to 0$ quando $n \to \infty$ ao mostrar que $\|\xi_n'(0)\|$ é uniformemente limitada em n.

Para isso, consideramos a igualdade (1.39) e estimamos seu numerador ao aplicar as desigualdades de Hölder, Sobolev e (1.49):

$$\langle \xi_n'(0), v\rangle \leq \frac{b\|v\|}{|(p-q)\int_\Omega |\Delta u_n|^p \mathrm{d}x - (p^* - q)\int_\Omega |u_n|^{p^*}\mathrm{d}x|},$$

em que $b > 0$ é uma constante. Para completar nosso intento, mostraremos que

$$\left|(p-q)\int_\Omega |\Delta u_n|^p dx - (p^* - q)\int_\Omega |u_n|^{p^*} dx\right| > c \tag{1.54}$$

para algum $c > 0$ e n suficientemente grande. Caso contrário, existiria uma subsequência $\{u_n\}$ tal que

$$(p-q)\int_\Omega |\Delta u_n|^p \mathrm{d}x - (p^*-q)\int_\Omega |u_n|^{p^*}\mathrm{d}x = o(1). \tag{1.55}$$

Note que, ao assumirmos (1.55), a sequência $\{u_n\}$ se aproxima do conjunto vazio $\mathcal{N}^0_\lambda(\Omega)$. Como não podemos concluir a convergência dessa sequência, argumentaremos como no Lema 1.1: introduziremos o funcional I_λ para mostrar que $I_\lambda(u_n)$ tende a zero; por outro lado, de maneira semelhante ao Lema 1.1, vamos mostrar que $I_\lambda(u_n)$ é limitado inferiormente por uma constante positiva, quando $\lambda \in (0, \lambda_3)$, obtendo a contradição desejada (como os cálculos são análogos aos efetuados anteriormente, eles serão apresentados sucintamente).

Aplicando a definição de I_λ a $u_n \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$, decorre de (1.55)

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) &:= K(p^*,q)\left(\frac{\|u_n\|^{p^*}}{\int_\Omega |u_n|^{p^*}\mathrm{d}x}\right)^{\frac{p}{p^*-q}} - \lambda\int_\Omega f(x)|u_n|^q\mathrm{d}x \\ &= \left[K(p^*,q)\left(\frac{p^*-q}{p-q}\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}} - \frac{p^*-p}{p-q}\right]\int_\Omega |u_n|^{p^*}\mathrm{d}x + o(1) = o(1) \end{aligned} \tag{1.56}$$

para todo $\lambda > 0$, pois o colchete em (1.56) é identicamente nulo, como vimos em (1.14).

Por outro lado, utilizando a cota inferior para I_λ obtida em (1.15), temos

$$I_\lambda(u_n) \geq \|u_n\|^q_{p^*}\left(K(p^*,q)\frac{1}{S^{-\frac{q(p^*-p)+pp^*}{p(p^*-p)}}}\|u_n\|^{-q} - \lambda\|f\|_\beta\right). \tag{1.57}$$

Uma vez que que $\|u_n\|$ é limitada inferiormente, podemos encontrar uma constante $d > 0$ tal que

$$\int_\Omega |u_n|^{p^*}\mathrm{d}x \geq d \tag{1.58}$$

para n suficientemente grande. Além disso, aplicando (1.8) e (1.13) a $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$, obtemos

$$\|u_n\| \leq \left[\frac{\lambda(p^*-q)}{(p^*-p)}\|f\|_\beta S^{-\frac{q}{p}}\right]^{\frac{1}{p-q}} + o(1). \tag{1.59}$$

Assim, substituindo (1.58) e (1.59) em (1.57), obtemos

$$I_\lambda(u_n) \geq d^{\frac{q}{p^*}}\left\{K(p^*,q)\frac{1}{S^{-\frac{q(p^*-p)+pp^*}{p(p^*-p)}}}\lambda^{\frac{-q}{p-q}}\left[\left(\frac{p^*-q}{p^*-p}\right)\|f\|_\beta S^{-\frac{q}{p}}\right]^{\frac{-q}{p-q}} - \lambda\|f\|_\beta\right\} + o(1),$$

o que contradiz (1.56), pois o termo entre chaves é positivo (veja o final da prova do Lema 1.1). Assim, concluímos que

$$\left\langle J'_\lambda(u_n), \frac{u}{\|u\|}\right\rangle \leq \frac{C}{n}$$

e a prova de (i) está completa.

A prova de (ii) é análoga. ∎

1.4 A condição de Palais-Smale local

O resultado enunciado a seguir é baseado no lema de representação de medidas (veja Lema A.2), dado por P.L. Lions na prova do princípio de concentração e compacidade (veja [29] e [30]). Este resultado descreve como ocorre a perda de compacidade na imersão de Sobolev $\mathbf{E} \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$.

Recordamos que a Proposição 1.1 estabelece a igualdade entre as melhores constantes de Sobolev das imersões, $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ e $W_0^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$. Isto significa que os resultados a seguir valem para ambos os espaços $\mathbf{E} = W_0^{2,p}(\Omega)$ ou $\mathbf{E} = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.

Lema 1.14. *Seja $\{u_n\}$ uma sequência fracamente convergente em $\mathbf{E}$ com limite fraco u, tal que*

(i) $|\Delta u_n|^p$ converge fraco no sentido de medidas para uma medida μ;*

(ii) $|u_n|^{p^*}$ converge fraco no sentido de medidas para uma medida ν.*

Então, para algum conjunto (finito ou vazio) de índices I, temos

$$\begin{cases} 1) \quad \nu = |u|^{p^*} + \sum_{k \in I} \nu_k \delta_{x_k}, \quad \nu_k > 0, \\ \\ 2) \quad \mu \geq |\Delta u|^p + \sum_{k \in I} \mu_k \delta_{x_k}, \quad \mu_k > 0, \quad x_k \in \overline{\Omega} \\ \\ 3) \quad \nu_k^{\frac{p}{p^*}} \leq \mu_k S^{-1}. \end{cases}$$

Este resultado é a principal ferramenta utilizada para demonstrar que sequências minimizantes do funcional J_λ convergem, desde que o nível c da sequência de Palais-Smale esteja abaixo de certa constante. Para o próximo resultado, recordamos que $\beta = \frac{p^*}{p^*-q}$.

Proposição 1.3. *Existe uma constante positiva D tal que toda sequência $\{u_n\} \subset \mathbf{E}$ de Palais-Smale para J_λ no nível c, com*

$$c < \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2p}} - D\lambda^\beta,$$

possui uma subsequência que converge fortemente em $\mathbf{E}$.

Demonstração. A sequência $\{u_n\}$ é limitada em $\mathbf{E}$. De fato, para $\delta > 0$, decorre das desigualdades de Hölder e Sobolev que

$$\begin{aligned}
c+\delta &\geq J(u_n) - \frac{1}{p^*}\langle J'(u_n), u_n\rangle + \frac{1}{p^*}\langle J'(u_n), u_n\rangle \\
&= \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)\int_\Omega |\Delta u_n|^p \mathrm{d}x - \lambda\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p^*}\right)\int_\Omega f(x)|u_n|^q \mathrm{d}x + \frac{1}{p^*}\langle J'(u_n), u_n\rangle \\
&\geq \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)\int_\Omega |\Delta u_n|^p \mathrm{d}x - \lambda\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p^*}\right)\|f\|_\beta S^{-\frac{q}{p}}\left(\int_\Omega |\Delta u_n|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p}} \\
&\quad -\frac{1}{p^*}\|J'(u_n)\|\left(\int_\Omega |\Delta u_n|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (1.60)
\end{aligned}$$

Agora observe que, se a sequência $\{u_n\}$ for ilimitada, obtemos uma contradição com a desigualdade (1.60), pois $1<q<p$. Então, a menos de subsequência, temos

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } \mathbf{E} \quad \text{(fracamente)}, \qquad (1.61)$$

e

$$\left.\begin{aligned} |\Delta u_n|^p &\rightharpoonup \mu \\ \\ |u_n|^{p*} &\rightharpoonup \nu \end{aligned}\right\} \text{fracamente-* no sentido de medidas}, \qquad (1.62)$$

para medidas limitadas μ e ν (veja [18] para detalhes). É consequência do Lema 1.14 que, também a menos de subsequência, valem

$$\begin{cases} u_n \to u \quad \text{em } L^r(\Omega) \text{ e q.t.p. em } \overline{\Omega}, \quad \text{para } 1<r<p^*, \\ |\Delta u_n|^p \rightharpoonup^* \mu \geq |\Delta u|^p + \sum_{k\in I}\mu_k\delta_{x_k}, \\ |u_n|^{p^*} \rightharpoonup^* \nu = |u|^{p^*} + \sum_{k\in I}\nu_k\delta_{x_k}, \end{cases} \qquad (1.63)$$

para algum conjunto finito de índices I.

Afirmamos que $I=\emptyset$. Suponha, por contradição, que exista $k\in I$ (e portanto $\mu_k,\nu_k>0$). Tome $\psi_\epsilon\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo

$$\begin{cases} \psi_\epsilon = 1 \text{ em } B_\epsilon(x_k), \quad \psi_\epsilon = 0 \text{ fora de } B_{2\epsilon}(x_k), \\ |\nabla\psi_\epsilon| \leq \dfrac{2}{\epsilon}, \quad |\Delta\psi_\epsilon| \leq \dfrac{2}{\epsilon^2} \end{cases} \qquad (1.64)$$

e considere a sequência $\{\phi_\epsilon u_n\}$, em que $\phi_\epsilon(x)=\psi_\epsilon(x)\chi_\Omega(x)$. A sequência $\{\phi_\epsilon u_n\}$ é uma sequência limitada em $\mathbf{E}$. Para verificar isto, basta expandir o laplaciano de $\phi_\epsilon u_n$, usar a desigualdade triangular na norma de $L^p(\Omega)$ e aplicar a desigualdade de Hölder como utilizaremos na sequência, veja as equações (1.69) e (1.68). Daí, a convergência fraca e a limitação de $\{u_n\}$ implicam a limitação de $\{\phi_\epsilon u_n\}$.

Por hipótese, a sequência $\{u_n\}\subset\mathbf{E}$ satisfaz a condição de *Palais-Smale* para J_λ no nível c. Daí,

$$\lim_{n\to\infty}\langle J_\lambda'(u_n), \phi_\epsilon u_n\rangle = 0,$$

ou, de maneira equivalente,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\Delta u_n|^{p-2}\Delta u_n\Delta(\phi_\epsilon u_n)\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega f(x)|u_n|^q\phi_\epsilon\mathrm{d}x-\int_\Omega |u_n|^{p^*}\phi_\epsilon\mathrm{d}x=0.$$

Por (1.62) e (1.61), obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\Delta u_n|^{p-2}\Delta u_n\Delta(\phi_\epsilon u_n)\mathrm{d}x=\lambda\int_\Omega f(x)|u|^q\phi_\epsilon\mathrm{d}x+\int_\Omega \phi_\epsilon\mathrm{d}\nu. \tag{1.65}$$

Por outro lado, expandindo o lado esquerdo da identidade anterior, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\Delta u_n|^{p-2}\Delta u_n\Delta(\phi_\epsilon u_n)\mathrm{d}x &= \int_\Omega |\Delta u_n|^{p-2}\Delta u_n(\phi_\epsilon\Delta u_n+2\langle\nabla\phi_\epsilon,\nabla u_n\rangle+\Delta\phi_\epsilon u_n)\mathrm{d}x\\ &= \int_\Omega |\Delta u_n|^p\phi_\epsilon\mathrm{d}x+\int_\Omega |\Delta u_n|^{p-2}\Delta u_n(2\langle\nabla\phi_\epsilon,\nabla u_n\rangle+\Delta\phi_\epsilon u_n)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Tomando o limite em n, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\Delta u_n|^{p-2}\Delta u_n\Delta(\phi_\epsilon u_n)\mathrm{d}x &= \int_\Omega \phi_\epsilon\mathrm{d}\mu\ +\\ &+\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\Delta u_n|^{p-2}\Delta u_n(2\langle\nabla\phi_\epsilon,\nabla u_n\rangle+\Delta\phi_\epsilon u_n)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{1.66}$$

(Note que o limite do lado direito da igualdade anterior existe, pois este termo é a diferença de dois termos cujos limites existem.)

Agora, mostraremos que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\Delta u_n|^{p-2}\Delta u_n(2\langle\nabla\phi_\epsilon,\nabla u_n\rangle+\Delta\phi_\epsilon u_n)\mathrm{d}x=0. \tag{1.67}$$

De fato, decorre de (1.63), (1.64)) e da desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}0 &\leq \lim_{n\to\infty}\left|\int_\Omega |\Delta u_n|^{p-2}\Delta u_n\langle\nabla\phi_\epsilon,\nabla u_n\rangle\mathrm{d}x\right|\leq\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\Delta u_n|^{p-1}|\nabla\phi_\epsilon||\nabla u_n|\mathrm{d}x\\ &\leq \lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega |\Delta u_n|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega |\nabla\phi_\epsilon|^p|\nabla u_n|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq C\left(\int_{B_{2\epsilon}(x_k)\cap\Omega}|\nabla\phi_\epsilon|^p|\nabla u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq C\left[\left(\int_{B_{2\epsilon}(x_k)\cap\Omega}|\nabla\phi_\epsilon|^N\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{N}}\left(\int_{B_{2\epsilon}(x_k)\cap\Omega}|\nabla u|^{\frac{Np}{N-p}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{N-p}{N}}\right]^{\frac{1}{p}}\\ &\leq C\left(\int_{B_{2\epsilon}(x_k)\cap\Omega}|\nabla u|^{\frac{Np}{N-p}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{N-p}{Np}}\longrightarrow 0\quad\text{quando } \epsilon\to 0.\end{aligned} \tag{1.68}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{n\to\infty}\left|\int_\Omega |\Delta u_n|^{p-2}\Delta u_n \Delta\phi_\epsilon u_n \mathrm{d}x\right| \leq \lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\Delta u_n|^{p-1}|\Delta\phi_\epsilon u_n|\mathrm{d}x\\
&\leq \lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega |\Delta u_n|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega |\Delta\phi_\epsilon|^p|u_n|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq C\left(\int_{B_{2\epsilon}(x_k)\cap\Omega}|\Delta\phi_\epsilon|^p|u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq C\left[\left(\int_{B_{2\epsilon}(x_k)\cap\Omega}|\Delta\phi_\epsilon|^{\frac{N}{2}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2p}{N}}\left(\int_{B_{2\epsilon}(x_k)\cap\Omega}|u|^{p^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p^*}}\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\leq C\left(\int_{B_{2\epsilon}(x_k)\cap\Omega}|u|^{p^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p^*}} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } \epsilon\to 0, \qquad (1.69)
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

Segue-se de (1.65) e (1.66) que

$$\lambda\int_\Omega f(x)|u|^q\phi_\epsilon\mathrm{d}x + \int_\Omega \phi_\epsilon d\nu = \int_\Omega \phi_\epsilon d\mu + \lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\Delta u_n|^{p-2}\Delta u_n(2\langle\nabla\phi_\epsilon,\nabla u_n\rangle + \Delta\phi_\epsilon u_n)\mathrm{d}x.$$

Fazendo ϵ convergir a zero, é consequência de (1.67) que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\lambda\int_\Omega f(x)|u|^q\phi_\epsilon\mathrm{d}x + \int_\Omega\phi_\epsilon d\nu\right\} = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega \phi_\epsilon d\mu$$

e, portanto,

$$\nu_k = \mu_k.$$

De acordo com o Lema 1.14, temos $\mu_k \geq S\nu_k^{\frac{p}{p^*}}$, isto é, $\nu_k \geq S\nu_k^{\frac{p}{p^*}}$. Como $\nu_k > 0$, temos $\nu_k \geq S^{\frac{N}{2p}}$.

Decorre de nossas hipóteses que

$$\begin{aligned}
c &= \lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n) = \lim_{n\to\infty}\left\{J_\lambda(u_n) - \frac{1}{p}\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle\right\}\\
&= \liminf_{n\to\infty}\left\{\lambda\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\int_\Omega f(x)|u_n|^q\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)\int_\Omega |u_n|^{p^*}\mathrm{d}x\right\}\\
&\geq \lambda\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x + \frac{2}{N}\left(\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x + \sum_{k\in I}\nu_k\right)\\
&\geq \lambda\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x + \frac{2}{N}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x + \frac{2}{N}S^{\frac{N}{2p}}. \qquad (1.70)
\end{aligned}$$

Como $1 < q < p$, aplicamos a desigualdade de Hölder em (1.70) e obtemos

$$c \geq \frac{2}{N}S^{\frac{N}{2p}} + \frac{2}{N}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x - \lambda\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\|f\|_\beta\left(\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p^*}}$$

em que $\beta = \frac{p^*}{p^*-q}$. Consideremos então $g(x) = \kappa_1 x^{p^*} - \lambda\kappa_2 x^q$, com

$$\kappa_1 = \frac{2}{N} \qquad \text{e} \qquad \kappa_2 = \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\|f\|_\beta.$$

Essa função atinge um mínimo absoluto (para $x > 0$) no ponto $x_0 = \left(\frac{\lambda\kappa_2 q}{p^*\kappa_1}\right)^{\frac{1}{p^*-q}}$. Logo

$$\begin{aligned} g(x) \geq g(x_0) &= \kappa_1 \left(\frac{\lambda\kappa_2 q}{p^*\kappa_1}\right)^{\frac{p^*}{p^*-q}} - \lambda\kappa_2 \left(\frac{\lambda\kappa_2 q}{p^*\kappa_1}\right)^{\frac{q}{p^*-q}} \\ &= \lambda^{\frac{p^*}{p^*-q}}\kappa_1 \left(\frac{\kappa_2 q}{p^*\kappa_1}\right)^{\frac{p^*}{p^*-q}} - \lambda^{1+\frac{q}{p^*-q}}\kappa_2 \left(\frac{\kappa_2 q}{p^*\kappa_1}\right)^{\frac{q}{p^*-q}} \\ &= -D\lambda^{\frac{p^*}{p^*-q}}, \end{aligned}$$

em que

$$D = \kappa_2 \left(\frac{\kappa_2 q}{p^*\kappa_1}\right)^{\frac{q}{p^*-q}} - \kappa_1 \left(\frac{\kappa_2 q}{p^*\kappa_1}\right)^{\frac{p^*}{p^*-q}}$$

(é fácil verificar que $D > 0$). Portanto, concluímos que

$$c \geq \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2p}} - D\lambda^{\frac{p^*}{p^*-q}},$$

o que contradiz a hipótese $c < \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2p}} - D\lambda^{\beta}$. Assim, necessariamente temos $I = \emptyset$, concluindo a demonstração de nossa afirmação.

Daí, de acordo com a última convergência em (1.63), temos

$$\int_\Omega |u_n|^{p^*} dx \to \int_\Omega |u|^{p^*} dx \quad \text{quando } n \to \infty.$$

De acordo com o Lema de Brézis-Lieb [7] (veja o Apêndice A.7),

$$\int_\Omega |u_n - u|^{p^*} dx = \int_\Omega |u_n|^{p^*} dx - \int_\Omega |u|^{p^*} dx + o(1) = o(1),$$

donde obtemos $u_n \to u$ em $L^{p^*}(\Omega)$.

Para obter a convergência forte no espaço $\mathbf{E}$ utilizaremos a mesma ideia de M. Gueda e L. Veron em [23]. Assim, definimos

$$F_n := J'_\lambda(u_n) + \lambda|u_n|^{q-2}u_n + |u_n|^{p^*-2}u_n \quad \text{em } \mathbf{E}^*.$$

Como $u_n \to u$ tanto em $L^q(\Omega)$ como em $L^{p^*}(\Omega)$, podemos mostrar (utilizando o teorema da convergência dominada e a desigualdade de Hölder), que, a menos de subsequência,

$$F_n \to F := \lambda|u|^{q-2}u + |u|^{p^*-2}u \quad \text{em } \mathbf{E}^*.$$

Em particular, deduzimos que $\{F_n\}$ é de Cauchy em $\mathbf{E}^*$. Daí, a definição de F_n nos dá

$$\Delta_p^2 u_n = F_n, \quad \forall\, n.$$

Como são válidas as desigualdades

$$\|u_n - u_m\| \leq m \begin{cases} \|F_n - F_m\|_{\mathbf{E}^*}^{\frac{1}{p-1}}, & \text{se } p \geq 2, \\ M^{2-p}\|F_n - F_m\|_{\mathbf{E}^*}, & \text{se } 1 < p < 2, \end{cases}$$

em que $m = m(p)$ e $M = \max\{\|u_n\|, \|u_m\|\}$ (veja essas desigualdades na prova do teorema de existência e continuidade do operador p-biharmônico inverso, no apêndice A.5), concluímos que, a menos de subsequência, $\{u_n\}$ é de Cauchy. Assim, como o espaço $\mathbf{E}$ é completo, concluímos que

$$u_n \to u \quad \text{em } \mathbf{E},$$

o que completa a prova. ■

1.5 Prova do Teorema 1

Nesta seção vamos provar o Teorema 1. Começaremos com um resultado que estabelece a existência de um minimizador para o funcional J_λ sobre $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$. Mostraremos que este minimizador para J_λ sobre $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ também é um minimizador para J_λ sobre $\mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$. Além disso, estudaremos o comportamento do valor crítico quando $\lambda \to 0$.

Proposição 1.4. *Existe $\lambda_5 > 0$ tal que, para $\lambda \in (0, \lambda_5)$, o funcional J_λ possui um minimizador $u_0^+ \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$ satisfazendo*

(i) $J_\lambda(u_0^+) = m_\lambda(\Omega) = m_\lambda^+(\Omega)$;

(ii) u_0^+ *é um ponto crítico para* J_λ.

(iii) $J_\lambda(u_0^+) \to 0$ *quando* $\lambda \to 0$.

Demonstração. Pelo Lema 1.8, temos $m_\lambda(\Omega) < 0$. Seja $\lambda_4 > 0$ tal que $\lambda \in (0, \lambda_4)$ implica

$$m_\lambda(\Omega) < 0 \leq \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2p}} - D\lambda^\beta,$$

em que D foi definido na Proposição 1.3.

Seja λ_3 como na Proposição 1.2 e defina $\lambda_5 = \inf\{\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$. Pela Proposição 1.2, existe uma sequência $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ satisfazendo

$$J_\lambda(u_n) = m_\lambda(\Omega) + o(1) \quad \text{e} \quad J_\lambda'(u_n) = o(1) \text{ em } \mathbf{E}^*.$$

De acordo com a Proposição 1.3, a menos de subsequência, temos

$$u_n \to u_0^+ \quad \text{em } \mathbf{E}.$$

Como $J_\lambda \in C^1$, obtemos

$$J_\lambda(u_0^+) = m_\lambda(\Omega) \quad \text{e} \quad J_\lambda'(u_0^+) = 0.$$

Para mostrarmos as afirmações (i) e (ii), basta verificar que $u_0^+ \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$. De fato, como $m_\lambda(\Omega) < 0$, temos que $u_0^+ \in \mathbf{E} \setminus \{0\}$. Daí, como a sequência $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ e converge fortemente para u_0^+ em $\mathbf{E}$, podemos passar ao limite na identidade

$$\langle J_\lambda'(u_n), u_n\rangle = \int_\Omega |\Delta u_n|^p \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega f(x)|u_n|^q \mathrm{d}x - \int_\Omega |u_n|^{p^*} \mathrm{d}x = 0 \tag{1.71}$$

e concluir que $u_0^+ \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$.

Afirmamos que

$$\int_\Omega f(x)|u_0^+|^q \mathrm{d}x > 0. \tag{1.72}$$

Caso contrário, por (1.71) teríamos

$$\begin{aligned} J_\lambda(u_n) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\Delta u_n|^p \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega f(x)|u_n|^q \mathrm{d}x - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |u_n|^{p^*}\mathrm{d}x \\ &= -\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\lambda\int_\Omega f(x)|u_n|^q\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)\int_\Omega |u_n|^{p^*}\mathrm{d}x \\ &\to -\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\lambda\int_\Omega f(x)|u_0^+|^q\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)\int_\Omega |u_0^+|^{p^*}\mathrm{d}x \\ &\geq \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)\int_\Omega |u_0^+|^{p^*}\mathrm{d}x > 0, \end{aligned}$$

o que contradiz $J_\lambda(u_n) \to m_\lambda(\Omega) < 0$.

Afirmamos que $u_0^+ \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$. Suponha, por contradição, que $u_0^+ \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$. Por (1.72) e pelo Lema 1.4, existem únicos t_0^+ e t_0^- tais que $t_0^+u_0^+ \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$, $t_0^-u_0^+ \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$ e $0 < t_0^+ < t_0^- = 1$.

Como

$$\frac{d}{dt}J_\lambda(t_0^+u_0^+) = 0 \quad e \quad \frac{d^2}{dt^2}J_\lambda(t_0^+u_0^+) > 0,$$

existe $\bar{t}$ satisfazendo $t_0^+ < \bar{t} \leq t_0^-$, tal que $J_\lambda(t_0^+u_0^+) < J_\lambda(\bar{t}u_0^+)$. Decorre daí que

$$J_\lambda(t_0^+u_0^+) < J_\lambda(\bar{t}u_0^+) \leq J_\lambda(t_0^-u_0^+) = J_\lambda(u_0^+) = m_\lambda(\Omega)$$

uma contradição. Isto prova as afirmações (i) e (ii).

Decorre do item (i) e do Lema 1.8 que $u_0^+ \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$ e

$$J_\lambda(u_0^+) = m_\lambda(\Omega) < 0. \tag{1.73}$$

No item (ii) do Lema 1.8 provamos a limitação inferior do funcional J_λ sobre o conjunto $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ utilizando a desigualdade

$$J_\lambda(u) \geq -\lambda\frac{(p^*-q)(p-q)}{pqp^*}\left(\|f\|_\beta S^{-\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{p-q}}. \tag{1.74}$$

Decorre então de (1.73) e (1.74) que

$$0 > J_\lambda(u_0^+) \geq -\lambda\frac{(p^*-q)(p-q)}{pqp^*}\left(\|f\|_\beta S^{-\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{p-q}}$$

e portanto $J_\lambda(u_0^+) \to 0$ quando $\lambda \to 0$. ■

De maneira análoga, provamos a existência um minimizador para o funcional J_λ sobre $\mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$.

Proposição 1.5. *Existe $\lambda_6 > 0$ tal que, para $\lambda \in (0, \lambda_6)$, o funcional J_λ possui um minimizador $u_0^- \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$ satisfazendo*

(i) $J_\lambda(u_0^-) = m_\lambda^-(\Omega)$;

(ii) u_0^- *é um ponto crítico para* J_λ.

Demonstração.

Sejam λ_3 como na Proposição 1.2, $\overline{\lambda}$ como no Lema 1.11, com D definido na Proposição 1.3. Defina $\lambda_6 = \min\{\lambda_3, \overline{\lambda}\}$. Para $\lambda \in (0, \lambda_6)$, temos que, de acordo com a Proposição 1.2 *(ii)*, existe uma sequência $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$ tal que

$$J_\lambda(u_n) = m_\lambda^-(\Omega) + o(1) \quad \text{e} \quad J_\lambda'(u_n) = o(1) \quad \text{em} \;\; \mathbf{E}^*. \tag{1.75}$$

Pelos Lemas 1.9 e 1.11 temos que

$$0 < m_\lambda^-(\Omega) < \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2p}} - D\lambda^\beta.$$

Daí, pela Proposição 1.3, temos, a menos de subsequência

$$u_n \to u_0^- \quad \text{em} \;\; \mathbf{E}.$$

Como o conjunto $\mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$ é fechado (de acordo com o Lema 1.9), temos que $u_0^- \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$. Como $J_\lambda \in C^1$, temos, por (1.75), que

$$J_\lambda(u_0^-) = m_\lambda^-(\Omega) \quad \text{e} \quad J_\lambda'(u_0^-) = 0.$$

■

Demonstração do Teorema 1: Como $\mathcal{N}_\lambda^+(\Omega) \cap \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega) = \emptyset$, temos que u_0^+ e u_0^- são dois pontos críticos não nulos distintos do funcional J_λ.

No caso em que $\mathbf{E} = W_0^{2,p}(\Omega)$, temos que $u_0^+ \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$ e $u_0^- \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$ são duas soluções não triviais distintas para o problema (1.1)-(1.2). As condições de fronteira de Dirichlet são imediatamente satisfeitas neste espaço.

Se $\mathbf{E} = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, o mesmo acontece: $u_0^+ \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$ e $u_0^- \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$ são duas soluções não triviais distintas para o problema (1.1)-(1.3). Neste caso, somente a primeira condição de fronteira de Navier é imediatamente satisfeita. Mas a segunda condição de fronteira também é satisfeita, $\Delta u_0^+|_{\partial\Omega} = \Delta u_0^-|_{\partial\Omega} = 0$, veja o Apêndice A.3.

Se $\mathbf{E} = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ e a função peso $f \in C(\overline{\Omega})$ for tal que $f^- = \min\{0, f\} \equiv 0$, então as soluções $u_0^+ \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$ e $u_0^- \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$ são duas soluções positivas distintas para o problema (1.1)-(1.3). Veja o Apêndice A.4. ■

CAPÍTULO 2

O método de Ljusternik-Schnirelmann

Neste capítulo vamos provar a existência de infinitas soluções para os problemas (1.1)-(1.2) e (1.1)-(1.3) para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno e uma função peso positiva $f \in C(\overline{\Omega})$. As hipóteses sobre os problemas acima serão as mesmas tratadas no Capítulo 1, exceto pelo sinal da função peso f. Ao longo deste capítulo, as notações também serão as mesmas.

O principal resultado deste capítulo é:

Teorema 2. *Existe uma constante $\lambda_0 > 0$ tal que, se $0 < \lambda < \lambda_0$, então os problemas* (1.1)-(1.2) *e* (1.1)-(1.3) *possuem infinitas soluções.*

2.1 Definição e propriedades do gênero

Sejam $\mathbf{E} = W_0^{2,p}(\Omega)$ ou $\mathbf{E} = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ e Σ a classe de subconjuntos de $\mathbf{E} \setminus \{0\}$ que são fechados e simétricos com respeito à origem. Para $A \in \Sigma$, definimos o gênero $\gamma(A)$ por

$$\gamma(A) = \min\{k \in \mathbb{N} \, : \, \exists \, \phi \in C(A, \mathbb{R}^k \setminus \{0\}), \ \phi(x) = -\phi(-x)\}$$

e, se tal mínimo não é atingido, então $\gamma(A) = +\infty$. As principais propriedades do gênero são as seguintes (veja [34] para os detalhes):

Proposição 2.1. *Sejam $A, B \in \Sigma$. Então:*

(i) $\gamma(A) \leq \gamma(B)$, *se existir uma função ímpar $f \in C(A, B)$;*

(ii) $\gamma(A) \leq \gamma(B)$, *se $A \subset B$;*

(iii) $\gamma(A) = \gamma(B)$, *se existir um homeomorfismo ímpar entre A e B;*

(iv) $\gamma(\mathbb{S}^{N-1}) = N$, *em que $\mathbb{S}^{N-1}$ é a esfera em $\mathbb{R}^N$;*

(v) $\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$.

(vi) $\gamma(\overline{A \setminus B}) \geq \gamma(A) - \gamma(B)$, *se* $\gamma(B) < +\infty$;

(vii) $\gamma(A) < +\infty$, *se* A *for compacto; nesse caso, existe* $\delta > 0$ *tal que* $\gamma(A) = \gamma(N_\delta(A))$, *em que* $N_\delta(A) = \{x \in \mathbf{E} : d(x, A) \leq \delta\}$;

(viii) *se* X *for um subespaço de* $\mathbf{E}$ *com codimensão* k *e* $\gamma(A) > k$, *então* $A \cap X \neq \emptyset$.

2.2 Resultados preliminares

Consideremos

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\Delta u|^p \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x$$

no caso em que $1 < q < p$. Das desigualdades de Hölder e Sobolev obtemos

$$J_\lambda(u) \geq \frac{1}{p}\int_\Omega |\Delta u|^p \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q}\|f\|_\beta S^{-\frac{q}{p}}\left(\int_\Omega |\Delta u|^p dx\right)^{\frac{q}{p}} - \frac{1}{p^* S^{\frac{p^*}{p}}}\left(\int_\Omega |\Delta u|^p dx\right)^{\frac{p^*}{p}} \tag{2.1}$$

e, consequentemente,

$$J_\lambda(u) \geq h(\|\Delta u\|_p),$$

em que

$$h(x) = \frac{1}{p}x^p - \frac{\lambda}{q}\|f\|_\beta S^{-\frac{q}{p}} x^q - \frac{1}{p^* S^{\frac{p^*}{p}}} x^{p^*}.$$

Existe $\lambda_1 > 0$ tal que, se $0 < \lambda < \lambda_1$, h atinge um mínimo local negativo e um máximo local. Sejam R_0, R_1 tais que $r < R_0 < R < R_1$, em que R é o ponto no qual h atinge seu máximo e r é o ponto no qual h atinge seu mínimo. Temos $h(R_1) > h(r)$. (Veja a Figura 2.1).

Truncaremos o funcional J_λ da seguinte maneira: tome uma função $\tau : \mathbb{R}^+ \to [0, 1]$, não crescente e C^∞, tais que

$$\begin{cases} \tau(x) = 1, & \text{se } x \leq R_0, \\ \tau(x) = 0, & \text{se } x \geq R_1. \end{cases}$$

Seja $\varphi(u) = \tau(\|\Delta u\|_p)$. Consideremos o funcional truncado

$$\tilde{J}_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\Delta u|^p \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*}\varphi(u)\mathrm{d}x. \tag{2.2}$$

Então temos, como em (2.1), $\tilde{J}(u) \geq \overline{h}(\|\Delta u\|_p)$, com

$$\overline{h}(x) = \frac{1}{p}x^p - \frac{\lambda}{q}\|f\|_\beta S^{-\frac{q}{p}} x^q - \frac{1}{p^* S^{\frac{p^*}{p}}} x^{p^*}\tau(x).$$

Observe que $\overline{h} = h$, para $x \leq R_0$, e $\overline{h}(x) = \frac{1}{p}x^p - \frac{\lambda}{q}\|f\|_\beta S^{-\frac{q}{p}} x^q$ para $x \geq R_1$. As principais propriedades de $\tilde{J}_\lambda$, definido por (2.2), são explicitadas no próximo resultado:

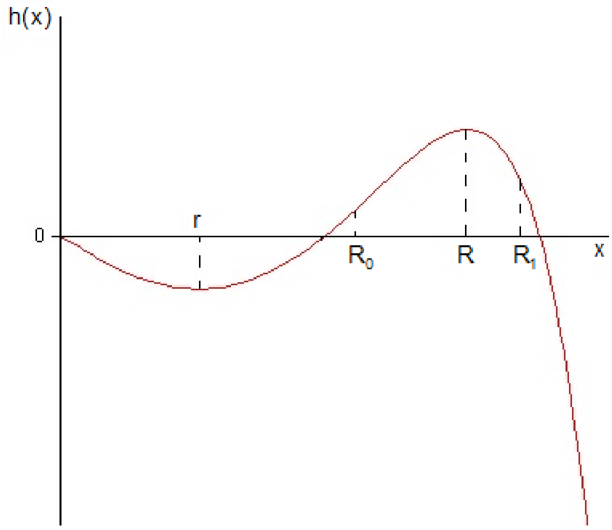

FIGURA 2.1: O gráfico de $h(x) = \frac{1}{p}x^p - \frac{\lambda}{q}\|f\|_\beta S^{-\frac{q}{p}}x^q - \frac{1}{p^*}S^{-\frac{p^*}{p}}x^{p^*}$.

Lema 2.1. *As seguintes propriedades são válidas:*

(i) $\tilde{J}_\lambda \in C^1(\boldsymbol{E}, \mathbb{R})$;

(ii) *Se* $\tilde{J}_\lambda(u) \le 0$, *então* $\|u\| < R_0$, *e* $J_\lambda(v) = \tilde{J}_\lambda(v)$ *para todo* $v \in B_{R_0}$, *em que* $B_{R_0} = \{u \in \boldsymbol{E}; \|u\| < R_0\}$;

(iii) *Existe* $\lambda_2 > 0$, *tal que* $\tilde{J}_\lambda$ *verifica a condição de Palais-Smale para qualquer nível* $c < 0$, *se* $0 < \lambda < \lambda_2$.

Demonstração. As afirmações (i) e (ii) são imediatas. Para provar (iii), seja $\{u_n\} \subset$ **E** uma sequência de Palais-Smale para $\tilde{J}_\lambda$, i.e.:

$$\tilde{J}_\lambda(u_n) \to c \qquad \text{e} \qquad \tilde{J}_\lambda{}'(u_n) \to 0.$$

Como $c < 0$, decorre de (ii) que, a menos de subsequência,

$$\tilde{J}_\lambda(u_n) \le 0 \quad \text{para } n \text{ suficientemente grande.}$$

Consequentemente, segue-se de (ii) que $\{u_n\} \subset B_{R_0}$. Seja $\lambda_2 > 0$ tal que, para $0 < \lambda < \lambda_2$ temos

$$\frac{2}{N}S^{\frac{N}{2p}} - D\lambda^\beta \ge 0.$$

Por definição,

$$J_\lambda = \tilde{J}_\lambda \qquad \text{em } B_{R_0},$$

daí a sequência $\{u_n\}$ satisfaz

$$J_\lambda(u_n) \to c < 0 \le \frac{2}{N}S^{\frac{N}{2p}} - D\lambda^\beta$$

e

$$J'_\lambda(u_n) \to 0.$$

Portanto, pela Proposição 1.3, a sequência $\{u_n\}$ possui uma subsequência fortemente convergente em $\mathbf{E}$. ■

Observação: *Note que, se encontrarmos algum valor crítico negativo para $\tilde{J}_\lambda$, teremos um valor crítico negativo para J_λ, de acordo com (ii).*

Agora construiremos uma sequência mini-max apropriada de valores críticos negativos para o funcional $\tilde{J}_\lambda$. A prova do próximo lema utiliza a mesma ideia de [19].

Lema 2.2. *Dado $n \in \mathbb{N}$, existe $\epsilon > 0$ (dependendo de n) tal que*

$$\gamma(\{u \in \boldsymbol{E}; \tilde{J}_\lambda(u) \leq -\epsilon\}) \geq n.$$

Demonstração. Fixe $n \in \mathbb{N}$ e seja E_n um subespaço n-dimensional de $\mathbf{E}$. Tome $u_n \in E_n$, com $\|u_n\| = 1$. Para $0 < \rho < R_0$, temos:

$$\tilde{J}_\lambda(\rho u_n) = J_\lambda(\rho u_n) = \frac{1}{p}\rho^p - \frac{\lambda}{q}\rho^q \int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x - \frac{1}{p^*}\rho^{p^*} \int_\Omega |u|^{p^*} \mathrm{d}x.$$

Como todas as normas são equivalentes em E_n, definimos

$$\alpha_n = \inf\{\int_\Omega |u|^{p^*} \mathrm{d}x \,:\, u \in E_n, \|u_n\| = 1\} > 0$$

e

$$\beta_n = \inf\{\int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x \,:\, u \in E_n, \|u_n\| = 1\} > 0.$$

Logo

$$\tilde{J}_\lambda(\rho u_n) \leq \frac{1}{p}\rho^p - \frac{\lambda\beta_n}{q}\rho^q - \frac{\alpha_n}{p^*}\rho^{p^*}$$

e podemos escolher $\epsilon > 0$ (o qual depende de n) e $0 < \eta < R_0$ tais que

$$\tilde{J}_\lambda(\eta u) \leq -\epsilon, \quad \text{se } \ u \in E_n \ \text{ e } \ \|u\| = 1.$$

Seja $\mathbb{S}_\eta = \{u \in \mathbf{E}; \|u\| = \eta\}$ tal que $\mathbb{S}_\eta \cap E_n \subset \{u \in \mathbf{E}; \tilde{J}_\lambda(u) \leq -\epsilon\}$. Portanto, pela Proposição 2.1, temos

$$\gamma(\{u \in \mathbf{E}; \tilde{J}_\lambda(u) \leq -\epsilon\}) \geq \gamma(\mathbb{S}_\eta \cap E_n) = n.$$

■

Sejam

$$\Sigma_k = \{C \subset \mathbf{E} \setminus \{0\}; C \text{ é fechado}, C = -C, \gamma(C) \geq k\},$$

$$c_k = \inf_{C \in \Sigma_k} \sup_{u \in C} \tilde{J}_\lambda(u)$$

e

$$K_c = \{u \in \mathbf{E}; \tilde{J}_\lambda{}'(u) = 0, \tilde{J}_\lambda(u) = c\}.$$

Lema 2.3. *Os valores de c_k são negativos.*

Demonstração. De fato, por simplicidade, escrevemos

$$\tilde{J}_\lambda{}^{-\epsilon} = \{u \in \mathbf{E}; \tilde{J}_\lambda(u) \leq -\epsilon\}.$$

Pelo Lema 2.2, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $\epsilon = \epsilon(k) > 0$ tal que $\gamma(\tilde{J}_\lambda{}^{-\epsilon}) \geq k$.

Como $\tilde{J}_\lambda$ é contínuo e par, $\tilde{J}_\lambda{}^{-\epsilon} \in \Sigma_k$; então $c_k \leq -\epsilon(k) < 0$ para todo k. Mas $\tilde{J}_\lambda$ é limitado inferiormente; logo $c_k > -\infty$, para todo k. ■

O Lema seguinte prova a existência de pontos críticos.

Lema 2.4. *Seja $\lambda_0 = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ e suponha que $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Se $c = c_k = c_{k+1} = \cdots = c_{k+r}$ então $\gamma(K_c) \geq r + 1$.*

Demonstração. Utilizaremos o lema clássico da deformação (veja [34]). Suponhamos que $c = c_k = c_{k+1} = \cdots = c_{k+r}$. Já vimos que $c < 0$. Portanto $\tilde{J}_\lambda$ verifica a condição de Palais-Smale em K_c. É fácil ver que K_c é compacto.

Suponha, por contradição que $\gamma(K_c) \leq r$. Logo, existe um conjunto simétrico e fechado U, com $K_c \subset U$ tal que $\gamma(U) = \gamma(K_c) \leq r$ (basta tomar $U = N_\sigma(K_c)$ para algum $\sigma > 0$).

Pelo Lema da deformação (veja o Apêndice A.8), obtemos um homeomorfismo ímpar $\eta : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$, tal que

$$\eta(\tilde{J}_\lambda{}^{c+\delta} \setminus U) \subset \tilde{J}_\lambda{}^{c-\delta}, \qquad \text{para algum } 0 < \delta < -c.$$

Por definição

$$c = c_{k+r} = \inf_{C \in \Sigma_{k+r}} \sup_{u \in C} \tilde{J}_\lambda(u).$$

Então, existe $A \in \Sigma_{k+r}$ tal que $\sup_{u \in A} \tilde{J}_\lambda(u) < c + \delta$; isto é, $A \subset \tilde{J}_\lambda{}^{c+\delta}$ e

$$\eta(A \setminus U) \subset \eta(\tilde{J}_\lambda{}^{c+\delta} \setminus U) \subset \tilde{J}_\lambda{}^{c-\delta}. \tag{2.3}$$

Mas

$$\gamma(\overline{A \setminus U}) \geq \gamma(A) - \gamma(U) \geq k$$

e

$$\gamma(\eta(\overline{A \setminus U})) = \gamma(\overline{A \setminus U}) \geq k.$$

Consequentemente, $\eta(\overline{A \setminus U}) \in \Sigma_k$. Isto contradiz (2.3), pois $\eta(\overline{A \setminus U}) \in \Sigma_k$ implica

$$\sup_{u \in \eta(\overline{A \setminus U})} \tilde{J}_\lambda(u) \geq c_k = c.$$

■

2.3 Prova de Teorema 2

Agora vamos provar o Teorema 2. A prova apenas coleciona resultados mostrados nos lemas preliminares.

Demonstração do Teorema 2: Seja $\lambda_0 = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$. De fato, por definição, temos

$$c_k \leq c_{k+1} \leq \cdots \leq c_{k+r} \leq \cdots < 0. \tag{2.4}$$

Caso I). Suponha que todas as desigualdades em (2.4) sejam estritas.

Como o Lema 2.4 assegura que $\gamma(K_{c_k}) \geq 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$, temos que cada conjunto K_{c_k}, possui ao menos um elemento. Daí, como os valores de c_k são todos distintos, obtemos uma sequência de pontos críticos distintos para $\tilde{J}_\lambda$. Mas, pelo Lema 2.3, os valores de c_k são negativos e portanto, pelo Lema 2.1 (ii), os pontos críticos de $\tilde{J}_\lambda$ são também pontos críticos de J_λ.

Note que se $\mathbf{E} = W_0^{2,p}(\Omega)$ então os infinitos pontos críticos para J_λ são soluções do problema (1.1)-(1.2). As condições de fronteira de Dirichlet são imediatamente satisfeitas neste espaço.

Se $\mathbf{E} = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ então os infinitos pontos críticos para J_λ são soluções do problema (1.1)-(1.3). Neste caso, somente a primeira condição de fronteira de Navier é imediatamente satisfeita. Mas a segunda condição de fronteira também é satisfeita, $\Delta u|_{\partial\Omega} = 0$, veja o Apêndice A.3.

Caso II). Existem $k, r \in \mathbb{N}$, tais que $c_k = c_{k+1} = \ldots = c_{k+r}$.

De fato, o Lema 2.4 assegura que $\gamma(K_{c_k}) \geq 2$. Isto significa que o conjunto K_{c_k} possui infinitos elementos distintos. Daí, obtemos uma sequência de pontos críticos distintos para $\tilde{J}_\lambda$. De maneira análoga ao Caso I), obtemos infinitas soluções para os problemas (1.1)-(1.2) e (1.1)-(1.3). ■

APÊNDICE A

Resultados auxiliares

A.1 $\|\Delta u\|_p$ define uma norma em E

Considere os espaços $\mathbf{E} = W_0^{2,p}(\Omega)$ ou $\mathbf{E} = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. Observe que $\| \cdot \|$ definida por

$$\|u\| := \|\Delta u\|_p$$

satisfaz trivialmente as propriedades

- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$;
- $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$.

para quaisquer $u, v \in \mathbf{E}$. Para mostrar que $\| \cdot \|$ define uma norma, basta verificar que

- $\|u\| = 0 \implies u = 0$.

É bem conhecido que, se $f \in L^p(\Omega)$, o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

possui uma única solução em $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.

Seja $u \in \mathbf{E}$ satisfazendo $\|u\| = 0$. Então $\Delta u = 0$ q.t.p. em Ω e u é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{A.1}$$

Observe que, qualquer que seja o espaço considerado $\mathbf{E}$, temos

$$\mathbf{E} \subset W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$$

para qualquer $1 < p < +\infty$. Portanto $u = 0$ é a única solução do problema (A.1) em $\mathbf{E}$, donde concluímos que $\| \cdot \|$ define uma norma neste espaço.

A.2 O nível mínimo de energia do funcional J_0

Por hipótese, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ satisfaz a propriedade $(f+)$, temos que

$$\Xi = \{x \in \Omega; f(x) > 0\}$$

é um conjunto aberto não vazio de $\mathbb{R}^N$. Consideremos o funcional $J_0 : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ definido por

$$J_0(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\Delta u|^p dx - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*} dx,$$

e o problema de minimização

$$\theta(\Xi) = \inf\{J_0(u); u \in \mathcal{N}_0(\Xi)\}, \tag{A.2}$$

em que

$$\mathcal{N}_0(\Xi) = \left\{u \in W_0^{2,p}(\Xi) \setminus \{0\}; \langle J_0'(u), u\rangle = 0\right\}.$$

Observação: *Note que as funções $u \in \mathcal{N}_0(\Xi)$, podem ser trivialmente estendidas ao conjunto $\mathbf{E}$ definindo $u := 0$ em $\Omega \setminus \Xi$.*

Vamos mostrar que

$$\theta(\Xi) \geq \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2p}},$$

em que S é a melhor constante para a imersão de Sobolev $\mathbf{E} \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$.

De fato, se $u \in \mathcal{N}_0(\Xi)$, temos que $u \in W_0^{2,p}(\Xi) \setminus \{0\}$ satisfaz

$$\int_\Omega |\Delta u|^p dx = \int_\Omega |u|^{p^*} dx. \tag{A.3}$$

Daí, por (A.3) e pela desigualdade de Sobolev (1.6), temos

$$\begin{aligned} J_0(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\Delta u|^p dx - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*} dx \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right)\int_\Omega |\Delta u|^p dx \\ &= \frac{2}{N}\int_\Omega |\Delta u|^p dx \\ &\geq \frac{2}{N} S^{\frac{p^*}{p^*-p}} \\ &= \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2p}}. \end{aligned}$$

Tomando o ínfimo sobre o conjunto $\mathcal{N}_0(\Xi)$, concluímos que

$$\theta(\Xi) \geq \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2p}}.$$

A.3 Segunda condição de fronteira de Navier

Para o problema (1.1)-(1.3), consideraremos um caminho diferente pelo fato da segunda condição de fronteira não estar imediatamente incluída no espaço $\mathbf{E}(\Omega) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. Seja $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ um ponto crítico para J_λ, isto é,

$$\int_\Omega |\Delta u|^{p-2} \Delta u \Delta \phi dx = \lambda \int_\Omega f(x)|u|^{q-2} u \phi dx + \int_\Omega |u|^{p^*-2} u \phi dx \quad \forall \phi \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega).$$

Vamos mostrar que $\Delta u = 0$ em $\partial\Omega$. De fato, defina

$$v = -|\Delta u|^{p-2} \Delta u \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$$

e

$$g(u) = \lambda f(x)|u|^{q-2} u + |u|^{p^*-2} u \in L^{\frac{p^*}{p^*-1}}(\Omega) = L^r(\Omega)$$

em que $r = \frac{p^*}{p^*-1} > 1$. Portanto v satisfaz

$$\int_\Omega v(-\Delta \phi) dx = \int_\Omega g(u) \phi dx \quad \forall \phi \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega). \tag{A.4}$$

Seja $w \in W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)$ a única solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta w = g(u) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ w = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{A.5}$$

Então w satisfaz

$$\int_\Omega \nabla w \nabla \phi dx = \int_\Omega w(-\Delta \phi) dx = \int_\Omega g(u) \phi dx \quad \forall \phi \in W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega). \tag{A.6}$$

Subtraindo as equações (A.4) e (A.6) obtemos

$$\int_\Omega (v - w) \Delta \phi dx = 0, \quad \forall\ \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

donde segue que $v = w$ q.t.p. em Ω. Daí $v = w \in W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)$ e concluímos que $v = 0$ em $\partial\Omega$. ■

A.4 Positividade das soluções

Suponha que a função peso $f \in C(\overline{\Omega})$ satisfaça $f^- = \min\{0, f\} \equiv 0$. Seja $u_0^+ \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega) \subset W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ a solução encontrada para o problema (1.1)-(1.3). A solução u_0^+ satisfaz

$$J_\lambda(u_0^+) = m^+(\Omega) \quad \text{e} \quad J'_\lambda(u_0^+) = 0.$$

Podemos supor que $u_0^+ \geq 0$, pois, caso contrário, $|u_0^+|$ satisfaz

$$J_\lambda(|u_0^+|) = m^+(\Omega),$$

e, pelo teorema dos multiplicadores de Lagrange 1.3, temos

$$J'_\lambda(|u_0^+|) = 0.$$

Então u_0^+ resolve o problema

$$\begin{cases} \Delta(|\Delta u_0^+|^{p-2}\Delta u_0^+) = \lambda f(x)(u_0^+)^{q-1} + (u_0^+)^{p^*-1} = g(u_0^+) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u_0^+ = \Delta u_0^+ = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{A.7}$$

De fato, defina $v = -|\Delta u_0^+|^{p-2}\Delta u_0^+$ e considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta w = g(u_0^+) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ w = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{A.8}$$

Note que $0 \leq g(u_0^+) \in L^{\frac{p^*}{p^*-1}}(\Omega) = L^r(\Omega)$, em que $r = \frac{p^*}{p^*-1}$. A função v é a única solução do problema acima em $W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)$.

Como o operador $-\Delta$ preserva a positividade (veja o Lema 2.1 vi) em [15]), temos

$$v > 0 \quad \text{em } \Omega,$$

e portanto

$$-\Delta u_0^+ > 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Agora, observe que u_0^+ é a única solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta w = -\Delta u_0^+ \quad \text{em} \quad \Omega, \\ w = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{A.9}$$

em $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. Novamente, a positividade é preservada e concluímos que

$$u_0^+ > 0 \quad \text{em } \Omega.$$

De maneira análoga, podemos mostrar que $u_0^- > 0$ em Ω.

A.5 Existência e continuidade do operador $\left(\Delta_p^2\right)^{-1}$

Para mostrar que o operador $\left(\Delta_p^2\right)^{-1}$ está bem definido e é contínuo, precisaremos do seguinte lema.

Lema A.1. *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^N$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto escalar euclidiano em $\mathbb{R}^N$. Então*

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y \rangle \geq \begin{cases} c_p|x-y|^p, & se\ p \geq 2 \\ c_p \frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}}, & se\ 1 < p < 2. \end{cases}$$

Demonstração. Por homogeneidade podemos assumir que $|x| = 1$ e $|y| \leq 1$. Além disso, escolhendo uma base adequada em $\mathbb{R}^N$ podemos assumir

$$x = (1, 0, \ldots, 0), \quad y = (y_1, y_2, 0, \ldots, 0), \text{ e } \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \leq 1.$$

i) Caso $1 < p < 2$. É claro que a desigualdade é equivalente à seguinte

$$\left\{ \left(1 - \frac{y_1}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{2-p}{2}}} \right)(1-y_1) + \frac{y_2^2}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{2-p}{2}}} \right\} \frac{\left(1 - \sqrt{y_1^2+y_2^2}\right)^{2-p}}{(1-y_1)^2 + y_2^2} \geq C.$$

Mas

$$1 - \frac{y_1}{\left(\sqrt{y_1^2+y_2^2}\right)^{2-p}} \geq \begin{cases} 1 - \frac{y_1}{|y_1|^{2-p}} \geq (p-1)(1-y_1), & \text{se } 0 \leq y_1 \leq 1 \\ 1 - y_1 \geq (p-1)(1-y_1), & \text{se } y_1 \leq 0. \end{cases}$$

então

$$(p-1)\{(1-y_1)^2 + y_2^2\} \frac{(1+y_1+y_2)^{\frac{2-p}{2}}}{(1-y_1)^2+y_2^2} \geq p-1.$$

ii) Caso $p \geq 2$. A desigualdade é equivalente à provar que

$$\frac{\left[1 - y_1(y_1^2+y_2^2)^{\frac{p-2}{2}} \right](1-y_1) + y_2^2(y_1^2+y_2^2)^{\frac{p-2}{2}}}{\left((1-y_1)^2+y_2^2\right)^{\frac{p}{2}}} \geq C.$$

Denote $t = \frac{|y|}{|x|}$ e $s = \frac{\langle x,y \rangle}{|x||y|}$ então, devemos mostrar que a função

$$f(t,s) = \frac{1 - (t^{p-1}+t)s + t^p}{(1-2ts+t^2)^{\frac{p}{2}}},$$

é limitada inferiormente. O cálculo direto mostra que fixado $t, \frac{\partial f}{\partial s} = 0$ se

$$1 - (t^p + t)s + t^p = \frac{t^{p-2}+1}{p}(1-2ts+t^2),$$

então para s crítico para f temos

$$f(t,s) = \frac{t^{p-2}+1}{p} \frac{1}{(1-2ts+t^2)^{\frac{p-2}{2}}} \geq$$

$$\frac{1}{p}\frac{t^{p-2}+1}{(t+1)^{p-2}} \geq \frac{1}{p} \min_{0 \leq t \leq 1} \frac{t^{p-2}+1}{(t+1)^{p-2}} \geq \frac{1}{2p}.$$

■

Proposição A.1. *O operador* $(\Delta_p^2)^{-1} : \mathbf{E}(\Omega)^* \to \mathbf{E}(\Omega)$ *está bem definido e é um operador contínuo.*

Demonstração. Para que o operador $(\Delta_p^2)^{-1}$ esteja bem definido, precisamos provar a unicidade do problema

$$\Delta_p^2 u \equiv \Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u) = f \quad \text{em} \quad \Omega,$$

em que $u \in \mathbf{E}(\Omega)$ e $f \in \mathbf{E}(\Omega)^*$.

Sejam $u_1, u_2 \in \mathbf{E}(\Omega)$ soluções para os problemas

$$\Delta_p^2 u_1 = f_1 \quad \text{em} \quad \Omega$$

e

$$\Delta_p^2 u_2 = f_2 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Então

$$\langle \Delta_p^2 u_1 - \Delta_p^2 u_2, u_1 - u_2 \rangle = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle$$

e pelo Lema anterior, para $N = 1$, temos

$$\langle \Delta_p^2 u_1 - \Delta_p^2 u_2, u_1 - u_2 \rangle = \int_\Omega (|\Delta u_1|^{p-2}\Delta u_1 - |\Delta u_2|^{p-2}\Delta u_2)(\Delta u_1 - \Delta u_2)dx$$

$$\geq \begin{cases} c_p \int_\Omega |\Delta u_1 - \Delta u_2|^p dx, & \text{se } p \geq 2 \\ c_p \int_\Omega \frac{|\Delta u_1 - \Delta u_2|^2}{(|\Delta u_1| + |\Delta u_2|)^{p-2}} dx, & \text{se } 1 < p < 2. \end{cases}$$

Então se $p \geq 2$, temos

$$\int_\Omega |\Delta u_1 - \Delta u_2|^p \leq c_p^{-1} \|f_1 - f_2\|_{\mathbf{E}^*} \|u_1 - u_2\|$$

daí,

$$\|u_1 - u_2\|^{p-1} \leq c_p^{-1} \|f_1 - f_2\|_{\mathbf{E}^*}$$

donde segue que

$$\|u_1 - u_2\| \leq c_p^{\frac{-1}{p-1}} \|f_1 - f_2\|_{\mathbf{E}^*}^{\frac{1}{p-1}}.$$

Em particular, se $f_1 \equiv f_2$ então $u_1 \equiv u_2$.

Se $1 < p < 2$, temos

$$\int_\Omega \frac{|\Delta(u_1 - u_2)|^2}{(|\Delta u_1| + |\Delta u_2|)^{2-p}} \leq c_p \|f_1 - f_2\|_{\mathbf{E}^*} \|u_1 - u_2\|$$

e então, pela desigualdade de Hölder, temos

$$\int_\Omega |\Delta(u_1 - u_2)|^p dx = \int_\Omega \frac{|\Delta(u_1 - u_2)|^p}{(|\Delta u_1| + |\Delta u_2|)^{\frac{p(2-p)}{2}}} (|\Delta u_1| + |\Delta u_2|)^{\frac{p(2-p)}{2}} dx$$

$$\leq \left(\int_\Omega \frac{|\Delta(u_1-u_2)|^2}{(|\Delta u_1|+|\Delta u_2|)^{2-p}}dx\right)^{\frac{p}{2}}\left(\int_\Omega (|\Delta u_1|+|\Delta u_2|)^p dx\right)^{\frac{2-p}{2}}$$

$$\leq c_p^{-\frac{p}{2}}\|f_1-f_2\|_{\mathbf{E}^*}^{\frac{p}{2}}\|u_1-u_2\|^{\frac{p}{2}}\left(\int_\Omega (|\Delta u_1|+|\Delta u_2|)^p dx\right)^{\frac{2-p}{2}}$$

$$\leq c_p^{-\frac{p}{2}}\|f_1-f_2\|_{\mathbf{E}^*}^{\frac{p}{2}}\|u_1-u_2\|^{\frac{p}{2}}2^{\frac{(p-1)(2-p)}{2}}\left(\|u_1\|^p+\|u_2\|^p\right)^{\frac{2-p}{2}}$$

daí

$$\frac{\|u_1-u_2\|^p\|u_1-u_2\|^{-\frac{p}{2}}}{\left(\|u_1\|^p+\|u_2\|^p\right)^{\frac{2-p}{2}}} \leq c_p^{-\frac{p}{2}}2^{\frac{(p-1)(2-p)}{2}}\|f_1-f_2\|_{\mathbf{E}^*}^{\frac{p}{2}}$$

$$\frac{\|u_1-u_2\|^{\frac{p}{2}}}{\left(\|u_1\|^p+\|u_2\|^p\right)^{\frac{2-p}{2}}} \leq c_p^{-\frac{p}{2}}2^{\frac{(p-1)(2-p)}{2}}\|f_1-f_2\|_{\mathbf{E}^*}^{\frac{p}{2}}$$

e portanto

$$\frac{\|u_1-u_2\|}{\left(\|u_1\|^p+\|u_2\|^p\right)^{\frac{2-p}{p}}} \leq c_p^{-1}2^{\frac{(p-1)(2-p)}{p}}\|f_1-f_2\|_{\mathbf{E}^*}.$$

Em particular, se $f_1 \equiv f_2$ então $u_1 \equiv u_2$. Donde obtemos simultaneamente a existência do operador inverso (unicidade) e sua continuidade. ■

A.6 Dois Lemas de P.L. Lions

Lema A.2. *Sejam μ, ν duas medidas limitadas e não negativas em $\overline{\Omega}$, tal que para $1 \leq p < r < \infty$ existe alguma constante $C > 0$ satisfazendo*

$$\left(\int_\Omega |\phi|^r d\nu\right)^{\frac{1}{r}} \leq C\left(\int_\Omega |\phi|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{A.10}$$

Então existem $\{x_k\}_{k\in I} \subset \overline{\Omega}$ e $\{\nu_k\}_{k\in I} \subset (0,\infty)$, em que I é finito, tal que

$$\nu = \sum_{k\in I}\nu_k\delta_{x_k} \quad e \quad \mu \geq C^{-p}\sum_{k\in I}\nu_k^{\frac{p}{r}}\delta_{x_k},$$

em que δ_{x_k} é a massa de Dirac suportada em x_k.

Demonstração. Pela desigualdade de Hölder reversa, (A.10), a medida ν é absolutamente contínua com respeito à medida μ. De fato, seja $E \subset \Omega$ um boreliano tal que $\mu(E) = 0$. Então, por (A.10), temos que

$$\int_E |\phi|^r d\nu = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

donde segue que $\nu(E) = 0$.

Pelo teorema de Radon-Nikodým, existe $f \in L^1_\mu(\Omega)$, $f \geq 0$, tal que $\nu = f\mu$. Também por (A.10), temos

$$\nu(A) \leq C^r \mu(A)^{\frac{r}{p}}$$

para qualquer conjunto boreliano $A \subset \Omega$.

Em particular, $f \in L^\infty_\mu(\Omega)$. De fato, se $\sup_\Omega \operatorname{ess} f = \infty$, existe $A \subset \Omega$ tal que $\mu(A) > 0$ e $f = \infty$ em A. Daí $\nu(A) = \int_A f d\mu = \infty$, uma contradição.

Por outro lado, o teorema da decomposição de Lebesgue de μ com respeito à ν, nos dá

$$\mu = g\nu + \sigma$$

em que $g \in L^1_\nu(\Omega)$, $g \geq 0$ e σ é uma medida positiva limitada, singular com respeito à ν.

Agora, considere (A.10) aplicada à função teste

$$\phi = g^{\frac{1}{r-p}} \chi_{\{g \leq n\}} \psi$$

onde $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Daí obtemos

$$\left(\int_\Omega |\phi|^r d\nu \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_\Omega g^{\frac{r}{r-p}} |\psi|^r \chi_{\{g \leq n\}} d\nu \right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\leq C \left(\int_\Omega g^{\frac{p}{r-p}} |\psi|^p \chi_{\{g \leq n\}} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = C \left(\int_\Omega g^{1+\frac{p}{r-p}} |\psi|^p \chi_{\{g \leq n\}} d\nu \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= C \left(\int_\Omega g^{\frac{r}{r-p}} |\psi|^p \chi_{\{g \leq n\}} d\nu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Defina $\nu_n = g^{\frac{r}{r-p}} \chi_{\{g \leq n\}} \nu$ então vale a seguinte desigualdade de Hölder reversa

$$\left(\int_\Omega |\psi|^r d\nu_n \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left(\int_\Omega |\psi|^p d\nu_n \right)^{\frac{1}{p}},$$

e em particular, para cada boreliano $A \subset \Omega$, temos

$$\nu_n(A)^{\frac{1}{r}} \leq C \nu_n(A)^{\frac{1}{p}}.$$

Como $p < r$, temos $\nu_n(A) = 0$ ou

$$\nu_n(A)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}} \leq C$$

$$\nu_n(A) \geq C^{\frac{rp}{p-r}} = \delta > 0.$$

Como consequência, dado um ponto $x \in \Omega$ então $\nu_n(\{x\}) = 0$ ou $\nu_n(\{x\}) \geq \delta > 0$. Isto significa que ν_n é uma combinação linear de massas de Dirac, que deve ser necessariamente finita, pois ν_n é limitada. Sejam $\{x_k\}_{k\in I}$ o conjunto de átomos da medida ν_n e $\nu_{n_k} = \nu_n(\{x_k\})$. Então

$$\nu_n = \sum_{k\in I} \nu_{n_k}\delta_{x_k}$$

$$g^{\frac{r}{r-p}}\chi_{\{g\leq n\}}\nu = \sum_{k\in I} g^{\frac{r}{r-p}}\chi_{\{g\leq n\}}\nu(\{x_k\})\delta_{x_k}$$

e tomando o limite quando $n \to \infty$, concluímos que

$$\nu = \sum_{k\in I} \nu_k\delta_{x_k}$$

onde $\nu_k = \nu(\{x_k\})$. Além disso, a desigualdade (A.10) aplicada em cada x_k nos dá

$$\nu_k^{\frac{1}{r}} \leq C\mu_k^{\frac{1}{p}} \quad \forall k \in I,$$

ou, de maneira equivalente,

$$C^{-p}\nu_k^{\frac{p}{r}} \leq \mu_k \quad \forall k \in I.$$

Donde concluímos que

$$C^{-p}\sum_{k\in I}\nu_k^{\frac{p}{r}}\delta_{x_k} \leq \mu.$$

■

O próximo resultado é, a grosso modo, a descrição de como ocorre a perda de compacidade para imersão de Sobolev $\mathbf{E}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$. Mais precisamente, temos o seguinte lema.

Lema A.3. *Seja $\{u_n\}$ uma sequência fracamente convergente em $\mathbf{E}(\Omega)$ com limite fraco u, tal que*

(i) $|\Delta u_n|^p$ converge fraco no sentido de medidas para uma medida μ.*

(ii) $|u_n|^{p^*}$ converge fraco no sentido de medidas para uma medida ν.*

Então, para algum conjunto finito de índices I, temos

$$\begin{cases} 1) \quad \nu = |u|^{p^*} + \sum_{k\in I}\nu_k\delta_{x_k}, \quad \nu_k > 0, \\ \\ 2) \quad \mu \geq |\Delta u|^p + \sum_{k\in I}\mu_k\delta_{x_k}, \quad \mu_k > 0, \quad x_k \in \overline{\Omega} \\ \\ 3) \quad \nu_k^{\frac{p}{p^*}} \leq \frac{\mu_k}{S}. \end{cases}$$

Demonstração. Dada qualquer $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, pela desigualdade de Sobolev, temos

$$\|\phi u_n\|_{p^*}^p S \leq \|\phi u_n\|_{\mathbf{E}}^p$$

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega |\phi u_n|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} S^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_\Omega |\Delta(\phi u_n)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega |\Delta\phi u_n + 2\langle\nabla\phi, \nabla u_n\rangle + \phi\Delta u_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \left(\int_\Omega |\Delta\phi u_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + 2\left(\int_\Omega |\langle\nabla\phi, \nabla u_n\rangle|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |\phi\Delta u_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad \text{(A.11)}\end{aligned}$$

Definimos $v_n = u_n - u$. Note que ϕu_n é limitada em $L^{p^*}(\Omega)$ e $\phi u_n \to \phi u$ q.t.p. em Ω. Daí, pelo lema de Brézis-Lieb [7], temos

$$\int_\Omega |\phi|^{p^*}|u_n|^{p^*} dx - \int_\Omega |\phi|^{p^*}|v_n|^{p^*} dx \to \int_\Omega |\phi|^{p^*}|u|^{p^*} dx$$

quando $n \to \infty$. Isto é,

$$|v_n|^{p^*} \rightharpoonup \nu - |u|^{p^*} \text{ fraco* no sentido de medidas.}$$

Além disso, $v_n \rightharpoonup 0$ em $\mathbf{E}(\Omega)$, quando $n \to \infty$. Então pela desigualdade de Sobolev para ϕv_n, temos

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega |\phi v_n|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} S^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_\Omega |\Delta(\phi v_n)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega |\Delta\phi v_n + 2\langle\nabla\phi, \nabla v_n\rangle + \phi\Delta v_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \left(\int_\Omega |\Delta\phi|^p|v_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + 2\left(\int_\Omega |\nabla\phi|^p|\nabla v_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |\phi|^p|\Delta v_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

tomando o limite quando $j \to \infty$, obtemos a desigualdade de Hölder reversa

$$\left(\int_\Omega |\phi|^{p^*}(d\nu - |u|^{p^*}dx)\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq S^{-\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |\phi|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}$$

onde $|\Delta v_n|^p \rightharpoonup \theta$ fraco* no sentido de medidas. Daí, pelo lema anterior

$$\nu - |u|^{p^*} = \sum_{k\in I} \nu_k \delta_{x_k}$$

o que prova o item 1). Agora, como $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$ e $\nabla u_n \to \nabla u$ em $L^p(\Omega)$, tomando o limite em (A.11), temos

$$\left(\int_\Omega |\phi|^{p^*} d\nu\right)^{\frac{1}{p^*}} S^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega |\Delta\phi|^p|u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + 2\left(\int_\Omega |\nabla\phi|^p|\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |\phi|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{(A.12)}$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Fixe $k \in I$ e considere $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\begin{cases} \psi \equiv 1 \text{ em } B(x_k, \epsilon), \quad \psi \equiv 0 \text{ em } B(x_k, 2\epsilon)^c, \\ \\ |\nabla\psi| \leq \dfrac{2}{\epsilon}, \quad |\Delta\psi| \leq \dfrac{2}{\epsilon^2}. \end{cases}$$

Considere $\phi = \psi\chi_\Omega$. Por (A.11), temos

$$\left(\int_{B(x_k,2\epsilon)\cap\Omega} |\phi|^{p^*} d\nu\right)^{\frac{1}{p^*}} S^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{B(x_k,2\epsilon)\cap\Omega} |\Delta\phi|^p |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + 2\left(\int_{B(x_k,2\epsilon)\cap\Omega} |\nabla\phi|^p |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{B(x_k,2\epsilon)\cap\Omega} |\phi|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{A.13}$$

Vamos mostrar agora que os termos

$$\left(\int_{B(x_k,2\epsilon)\cap\Omega} |\Delta\phi|^p |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{e} \quad \left(\int_{B(x_k,2\epsilon)\cap\Omega} |\nabla\phi|^p |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

tendem a zero quando $\epsilon \to 0$. De fato, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\left(\int_{B(x_k,2\epsilon)\cap\Omega} |\Delta\phi|^p |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_{B(x_k,2\epsilon)\cap\Omega} |\Delta\phi|^{\frac{N}{2}} dx\right)^{\frac{2}{N}} \left(\int_{B(x_k,2\epsilon)\cap\Omega} |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \left(\int_{B(x_k,2\epsilon)\cap\Omega} \frac{2^{\frac{N}{2}}}{\epsilon^N} dx\right)^{\frac{2}{N}} \left(\int_{B(x_k,2\epsilon)\cap\Omega} |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \left(\frac{2^{\frac{N}{2}}}{\epsilon^N}\omega_N 2^N \epsilon^N\right)^{\frac{2}{N}} \left(\int_{B(x_k,2\epsilon)\cap\Omega} |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &= C(N)\left(\int_{B(x_k,2\epsilon)\cap\Omega} |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \to 0\end{aligned} \tag{A.14}$$

quando $\epsilon \to 0$. E também pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}\left(\int_{B(x_k,2\epsilon)\cap\Omega} |\nabla\phi|^p |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_{B(x_k,2\epsilon)\cap\Omega} |\nabla\phi|^N dx\right)^{\frac{1}{N}} \left(\int_{B(x_k,2\epsilon)\cap\Omega} |\nabla u|^{\frac{Np}{N-p}} dx\right)^{\frac{N-p}{Np}} \\ &\leq \left(\int_{B(x_k,2\epsilon)\cap\Omega} \frac{2^N}{\epsilon^N} dx\right)^{\frac{1}{N}} \left(\int_{B(x_k,2\epsilon)\cap\Omega} |\nabla u|^{\frac{Np}{N-p}} dx\right)^{\frac{N-p}{Np}} \\ &\leq \left(\frac{2^N}{\epsilon^N}\omega_N 2^N \epsilon^N\right)^{\frac{1}{N}} \left(\int_{B(x_k,2\epsilon)\cap\Omega} |\nabla u|^{\frac{Np}{N-p}} dx\right)^{\frac{N-p}{Np}} \\ &= \overline{C}(N)\left(\int_{B(x_k,2\epsilon)\cap\Omega} |\nabla u|^{\frac{Np}{N-p}} dx\right)^{\frac{N-p}{Np}} \to 0\end{aligned} \tag{A.15}$$

quando $\epsilon \to 0$, como queríamos mostrar.

Tomando o limite quando $\epsilon \to 0$ em (A.13), temos

$$\nu_k^{\frac{1}{p^*}} S^{\frac{1}{p}} \leq \mu_k^{\frac{1}{p}}, \quad k \in I,$$

ou, de maneira equivalente,

$$\nu_k^{\frac{p}{p^*}} S \leq \mu_k, \quad k \in I. \tag{A.16}$$

Donde concluímos que

$$\mu \geq \mu_1 = \sum_{k \in I} \mu_k \delta_{x_k} \geq \sum_{k \in I} \nu_k^{\frac{p}{p^*}} S \delta_{x_k}, \tag{A.17}$$

o que prova o item 3). Finalmente, provaremos o item 2). Para isto, basta mostrar que

$$\mu \geq |\Delta u|^p,$$

e observar que as medidas μ_1 e $|\Delta u|^p$ são mutuamente singulares.

Seja $0 \leq \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ e tome a função teste $\psi = \phi \chi_A$ onde $A \subset \Omega$ é um boreliano. A função $f_\psi : \mathbf{E}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_\psi(u) = \left(\int_\Omega \psi |\Delta u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

é fracamente semicontínua inferiormente (pois é uma seminorma). Daí, como $u_n \rightharpoonup u$ em $\mathbf{E}(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} \left(\int_\Omega \psi |\Delta u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = f_\psi(u) &\leq \liminf f_\psi(u_n) \\ &\leq \liminf \left(\int_\Omega \psi |\Delta u_n|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_\Omega \psi d\mu \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\int_A \phi |\Delta u|^p dx \leq \int_A \phi d\mu,$$

tomando o supremo, no conjunto $\{\phi \in C_0^\infty(\Omega); \|\phi\|_\infty = 1\}$, temos

$$\sup_{\|\phi\|_\infty = 1} \int_A \phi |\Delta u|^p dx \leq \sup_{\|\phi\|_\infty = 1} \int_A \phi d\mu,$$

donde segue que

$$|\Delta u|^p(A) \leq \mu(A),$$

como queríamos mostrar.

Agora, note que μ_1 e $|\Delta u|^p$ são mutuamente singulares, donde obtemos

$$\mu \geq |\Delta u|^p + \mu_1,$$

e concluímos que

$$\mu \geq |\Delta u|^p + \sum_{k \in I} \mu_k \delta_{x_k}.$$

■

A.7 Lema de Brézis-Lieb

A seguir, enunciaremos o Lema de Brézis-Lieb, que estabelece uma relação entre a convergência pontual e a convergência na norma $L^p(\Omega)$.

Lema A.4. *Suponha que $f_n \to f$ q.t.p. e que $\|f_n\|_p \leq C < \infty$ para todo n e para algum p satisfazendo $0 < p < \infty$. Então temos*

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \|f_n\|_p^p - \|f_n - f\|_p^p \right\} = \|f\|_p^p.$$

A prova deste resultado pode ser encontrada no artigo [7]. Neste artigo, Brézis e Lieb provaram um resultado mais geral que o enunciado acima. Eles provaram também a relação entre a convergência pontual e a convergência de funcionais, mais gerais que a norma $L^p(\Omega)$.

A.8 Lema da deformação

A seguir, enunciaremos o lema da deformação, cuja demonstração pode ser encontrada em [34].

Seja E um espaço de Banach real e seja $J \in C^1(E;\mathbb{R})$. Definimos os conjuntos

$$J^s = \{u \in \mathbf{E}; J(u) \leq s\}$$

e

$$K_c = \{u \in \mathbf{E}; J'(u) = 0, J(u) = c\}.$$

Lema A.5. *Sejam E um espaço de Banach real e $J \in C^1(E;\mathbb{R})$ uma função satisfazendo a condição de Palais-Smale no nível c. Se $c \in \mathbb{R}$, $\overline{\epsilon} > 0$ e $\mathcal{O}$ é qualquer vizinhança de K_c, então existe $\epsilon \in (0, \overline{\epsilon})$ e $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ tal que*

(i) $\eta(0,u) = u$ *para todo* $u \in E$.

(ii) $\eta(t,u) = u$ *para todo* $t \in [0,1]$ *se* $J(u) \notin [c - \overline{\epsilon}, c + \overline{\epsilon}]$.

(iii) $\eta(t,u)$ *é um homeomorfismo de* E *em* E *para todo* $t \in [0,1]$.

(iv) $\|\eta(t,u) - u\| \leq 1$ *para todo* $t \in [0,1]$ *e* $u \in E$.

(v) $J(\eta(t,u)) \leq J(u)$ *para todo* $t \in [0,1]$ *e* $u \in E$.

(vi) $\eta(1, J^{c+\epsilon} \setminus \mathcal{O}) \subset J^{c-\epsilon}$.

(vii) *Se* $K_c = \emptyset$, $\eta(1, J^{c+\epsilon}) \subset J^{c-\epsilon}$.

(viii) *Se* J *é par, então* $\eta(t,u)$ *é ímpar em* u.

A.9 O princípio variacional de Ekeland

A seguir, enunciaremos o princípio variacional de Ekeland, cuja demonstração pode ser encontrada em [17].

Teorema 3. *Seja V um espaço métrico completo e $F : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função semicontínua inferiormente, $\not\equiv +\infty$, limitada inferiormente. Para todo $u \in V$ satisfazendo*

$$\inf F \leq F(u) \leq \inf F + \epsilon$$

e todo $\lambda > 0$, existe algum $v \in V$ tal que

$$F(v) \leq F(u)$$

$$d(u, v) \leq \lambda,$$

$$\forall w \neq v, \quad F(w) > F(v) - \frac{\epsilon}{\lambda} d(v, w).$$

Referências Bibliográficas

[1] M.J. Alves, R.B. Assunção, P.C. Carrião e O.H. Miyagaki, *Multiplicity of nontrivial solutions to a problem involving the weighted p-biharmonic operator*, Matemática Contemporânea, **36** (2009), 11-27.

[2] O.H. Ammann, Th. von Kármán e G.B. Woodruff, *The failure of the Tacoma Narrows Bridge*, Federal Works Agency (1941).

[3] J. Benedikt e P. Drábek, *Asymptotics for the principal eigenvalue of the p-biharmonic operator on the ball as p approaches 1*, Nonlinear Analysis **95** (2014), 735-742.

[4] J. Benedikt e P. Drábek, *Estimates of the principal eigenvalue of the p-biharmonic operator*, Nonlinear Analysis **75** (2012), 5374-5379.

[5] F. Bernis, J. Garcia Azorero e I. Peral Alonso, *Existence and multiplicity of nontrivial solutions in semilinear critical problems of fourth order*, Adv. Differential Equations **1**, no. 2 (1996), 219-240.

[6] F. Bleich, C.B. McCullough, R. Rosecrans e G.S. Vincent, *The Mathematical Theory of Suspension Bridges*, U.S. Dept. of Commerse, Bureau of Public Roads, Washington, D.C. (1950).

[7] H. Brézis e E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc. **88**(3) (1983), 486-490.

[8] H. Brézis e L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 437-477.

[9] K.J. Brown e T.F. Wu, *A semilinear elliptic system involving nonlinear boundary condition and sign-changing weight function*, J. Math. Anal. Appl. **337** (2008), 1326-1336.

[10] K.J. Brown e Y.P. Zhang, *The Nehari manifold for a semilinear elliptic equation with a sign-changing weight function*, J. Differential Equations **193** (2003), 481-499.

[11] J. Chabrowski e J.M. do Ó, *On some fourth-order semilinear elliptic problems in* $\mathbb{R}^N$, Nonlinear Analysis **49** (2002), 861-884.

[12] C.Y. Chen, Y.C. Kuo e T.F. Wu, *The Nehari manifold for a Kirchhoff type problem involving sign-changing weight functions*, J. Differential Equations **250** (2011), 1876-1908.

[13] C. V. Coffman, *A minimum-maximum principle for a class of nonlinear integral equations*, J. Analyse Math. **22** (1969), 391-419.

[14] P. E. Conner and E. E. Floyd, *Fixed point free involutions and equivariant maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1966), 416-441.

[15] P. Drábek e M. Ôtani, *Global bifurcation result for the p-biharmonic operator*, Eletron. J. Differential Equations, **48** (2001), pp. 1-19.

[16] D.E. Edmunds, D. Fortunato e E. Janelli, *Critical exponents, critical dimension and the biharmonic operator*, Arch. Rational Mech. Anal. **112** (1990), 269-289.

[17] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. **17** (1974), 324-353.

[18] L. C. Evans, *Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics **74**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1990).

[19] J. Garcia Azorero e I. Peral Alonso, *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a non-symmetric term*, Trans. Amer. Math. Soc. **323** (1991), 877-895.

[20] J. Garcia Azorero e I. Peral Alonso, *Some results about the existence of a second positive solutions in a quasilinear critical problem*, Indiana Univ. Math. J. **43** (1994), 941-957.

[21] F. Gazzola, H.-Ch. Grunau e G. Sweers, *Optimal Sobolev and Hardy-Rellich constants under Navier boundary conditions*, Ann. Mat. Pura Appl. **189** (2010), 475-486.

[22] F. Gazzola, H.-Ch. Grunau e G. Sweers, *Polyharmonic Boundary Value Problems: Positivity Preserving and Nonlinear Higher Order Elliptic Equations in Bounded Domains*, Lecture Notes in Mathematics, Springer 2010.

[23] M. Gueda e L. Veron, *Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Nonlinear Anal., **13** (1989), pp. 879-902.

[24] H. He e J. Yang, *Asymptotic behavior of solutions for Henon systems with nearly critical exponent*, J. Math. Anal. Appl. **347** (2008), 459-471.

[25] C. Ji e W. Wang, *On the p-biharmonic equation involving concave-convex nonlinearities and sign-changing weight function*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **2** (2012), 17 pp.

[26] A. el Khalil, M. D. Morchid Alaoui e A. Touzani, *On the p-biharmonic operator with critical Sobolev exponent and nonlinear Steklov boundary condition*, Int. J. Anal. (2014), 8 pp.

[27] M. A. Krasnoselski, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, Macmillan, New York, 1964.

[28] J.L. Lions, *Quelques Méthodes De Résolution Des problémes Aux limites Non Lineáires*, Dunod, Paris, France (1969).

[29] P.L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 1*,Rev. Mat. Iberoamericana **1 n 1** (1985), 145-201.

[30] P.L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 2*,Rev. Mat. Iberoamericana **1 n 2** (1985), 45-121.

[31] L. Ljusternik and L. Schnirelmann, *Methodes topologique dans les problémes variationnels*, Hermann, Paris, 1934.

[32] P.J. McKenna, *Large-amplitude periodic oscillations in simple and complex mechanical systems: outgrowths from nonlinear analysis*, Milan J. Math **74** (2006), 79-115.

[33] E.S. Noussair, C.A. Swanson, Y. Jianfu, *Critical semilinear biharmonic equations in* $\boldsymbol{R}^N$, Proc. Royal Soc. Edinburgh **121A** (1992), 139-148.

[34] P. H. Rabinowitz, Minimax methods in critical points theory with applications to differential equations, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. no 65 A.M.S., Rhode Island, 1986.

[35] E.M. dos Santos, *Multiplicity of solutions for a fourth-order quasilinear nonhomogeneous equations*, J. Math. Anal. Appl. **342** (2008), 277-297.

[36] Y. Shen e J. Zhang, *Multiplicity of positive solutions for a Navier boundary-value problem involving the p-biharmonic with critical exponent*, J. Differential Equations **47** (2011), 14 pp.

[37] T.F. Wu, *On semilinear elliptic equations involving concave-convex nonlinearities and sign-changing weight function*, J. Math. Anal. Appl. **318** (2006), 253-270.

[38] T.F. Wu, *Multiple positive solutions for semilinear elliptic systems with nonlinear boundary condition*, Appl. Math. Comput. **189** (2007), 1712-1722.

[39] T.F. Wu, *Multiple positive solutions for a class of concave-convex elliptic problems in R^N involving sign-changing weight*, J. Funct. Anal. **258** (2010), 99-131.

[40] T.F. Wu, *The Nehari manifold for a semilinear elliptic system involving sign-changing weight functions*, Nonlinear Anal. **68** (2008), 1733-1745.

[41] W. Wang, A. Zhang e P. Zhao, *Multiplicity of solutions for a class of fourth elliptic equations*, Nonlinear Anal. **70** (2009), 4377-4385.

[42] W. Wang e P.Zhao, *Nonuniformly nonlinear elliptic equations of p-biharmonic type*, J. Math. Anal. Appl. **348** (2008), 730-738.

[43] X. Zheng e Y. Deng, *Existence of multiple solutions for a semilinear biharmonic equation with critical exponent*, Acta Math. Sci. **20** (2000), 547-554.