UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Classificação das Superfícies Mínimas de Índice de Morse pequeno Imersas nos Espaços $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$

Carlos Alberto Cjanahuiri Aroquipa

Belo Horizonte - MG

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Carlos Alberto Cjanahuiri Aroquipa

Orientador: Ezequiel Rodrigues Barbosa

Classificação das Superfícies Mínimas de Índice de Morse pequeno Imersas nos Espaços $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas (ICEX) da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção de título de Mestre em Matemática.

Belo Horizonte - MG
2015

"Não se glorie o sábio, na sua sabedoria, nem o forte na sua força.
Nem o rico, nas suas riquezas; mas o que se gloriar, glorie-se nisto:
em me Conhecer, e saber que Eu sou o Senhor e faço misericórdia, juízo e
justiça na terra, porque destas coisas me agrado." Diz o Senhor.
Jeremias 9.23

Agradecimentos

Gostaria primeiro agradecer a Deus que me ilumina em todos os momentos de minha vida.

Um agradecimento especial a minha mãe Nelly e meu irmão Nelson, que em todos os momentos me motivaram, com seu amor, paciência, apoio e força, obrigado sempre.

E como não posso esquecer todos os meus professores da Universidade Nacional de San Agustín em especial aos professores Walter Torres, Richard Mamani Troncoso, Vladimir Rosas, Ricardo Hancco.

Também agradeço a este belo país e a Universidade Federal de Minas Gerais, em particular ao Instituto de Ciencias Exatas- ICEx que me acolheram e contribuíram para minha formação, especialmente aos professores Marcio Soares, Hamilton Prado Bueno, Raphael Drumond, Viktor Bekkert, Maurício Correa.

Agradeço aos membros da banca examinadora, professores Emerson Alves e Rodney Biezuner por seus conselhos e correções que enriqueceram meu trabalho.

E como esquecer do professor Ezequiel Rodrigues Barbosa orientador e amigo, pela confiança, disponibilidade que sempre me proporcionou durante a realização deste trabalho e contribiu para meu crescimento pessoal e científico.

A meus amigos que fiz aqui em Brasil, Elard, Jimmy, Roy, Julio, Mario, Tauan, Victor, Allan, Felipe, Manuel, Joel, Paula, Karina, Karol, Débora.

A Lourdes, pelo apoio e força incondicional.

A CNPq pelo incentivo e apoio financiero.

Resumo

O objetivo deste trabalho é discutir uma conjectura de classificação relativa ao índice de hipersuperficies mínimas não totalmente geodésicas da esfera de n-dimensional de raio um S^n. Discuta-se resumidamente a teoria básica de subvariedades mínimas antes de focar nossa atenção para as subvariedades mínimas e hipersuperfices em S^n. Apresenta-se alguns resultados de Simons, os quais mostram que qualquer subvariedade mínima de S^n é inestável, e como as totalmente geodésicas $S^k \subset S^n$ são caracterizadas por seu índice. Em seguida, mostra-se a conjectura que afirma que as hipersuperficies de Clifford são também caracterizadas por seu índice de forma semelhante, os mais recentes desenvolvimentos relacionados à conjectura, e a prova de Urbano da conjectura para o caso especial quando n=3. Por último, apresenta-se o estudo da classificação das superfícies mínimas de índice de Morse pequeno na variedade produto $S^2 \times S^1(r)$.

Abstract

The purpose of this thesis is to discuss a conjecture classification concerning the index of non-totally geodesic minimal hypersurfaces of the n-dimensional standard sphere of radius one S^n. Briefly discuss the basic theory of minimal submanifolds before focusing our attention to the minimal submanifolds and hypersurfaces of S^n. We present some results of Simons which show that any minimal submanifolds of S^n is unstable, and how the totally geodesic $S^k \subset S^n$ are characterized by their index. We then present a related conjecture which claims that the Clifford hypersurfaces are also characterized by their index in a similar way, discuss the most recent developments related to the conjecture, and give Urbano's proof of the conjecture for the special case when n=3. Finally, we have the ultimate goal of studying the classification of minimal surfaces of Morse small index in product varieties $S^2 \times S^1(r)$.

Sumário

Introdução

Este trabalho se concentra no estudo de subvariedades mínimas, um tema central na análise geométrica. As subvariedades mínimas são pontos críticos de funcional volume. O estudo das superfícies mínimas, subvariedades mínimas 2-dimensional, envolve matemáticos prolíficos como Lagrange e Euler, bem como o físico Plateau. Foi Plateau quem questionou a existência de uma superfície de área mínima cuja fronteira seja composta pela união de curvas fechadas $\Gamma \in \mathbb{R}^n$ previamente determinada. Este problema foi assim nomeado devido aos inúmeros trabalhos experimentais feitos pelo fisico durante o século 19 e tais superfícies de área mínima são chamadas de *Superfícies Mínimas.*

Os experimentos de Plateau eram obtidos a partir da imersão de um arame modelado a fronteira de uma suposta superfície em uma mistura de água e sabão. Plateau, por meio destes experimentos, percebeu que ao retirar o arame da mistura, uma película da água e sabão se forma de modo a minimizar a sua energia em decorrência da tensão superficial. Consequentemente, Plateau observou que tal película de água e sabão definia uma supefície que possui a menor área dentre todas as superfícies com aquela mesma fronteira (arame).

O conceito de Superfície Mínima no trablho seminal de Lagrange sobre cálculo das variações na década de 1760 e durante muitos anos somente soluções particulares deste problem foram obtidas mesmo sendo pesquisado por brilhantes matemáticos, tais como Riemann e Schwarz.

Outros grandes matemáticos tentaram, sem sucesso, demonstrar a existência deste tipo de superfície minimizando o funcional da Área

$$A(f) = \int_\Omega Jacobiano(f)$$

usando as fórmulas de representaçao de Weierstrass sobre a classe de funções paramétricas $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tais que $f(\partial\Omega) = \Gamma$. Porém, a existência da solução para o Problema de Plateau só foi demonstrada no início da década de 1930 por Rado e Douglas e reformulada por Courant em 1950 como um problema de minimização da integral da Energia de Dirichlet

$$E_D(f) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla f|^2$$

no lugar do funcional da área, também sobre a mesma classe de aplicações paramétricas $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ com $f(\partial\Omega) = \Gamma$.

Além das definições acima, pode-se determinar que uma Superfície Mínima é aquela que possui curvatura média nula, ou que uma Superfície Mínima é aquela que é parametrizada por uma aplicação harmônica. Do ponto de vista numérico, existem vários métodos para calcular superfícies mínimas, incluindo métodos que determinam superfícies mnimizando outras formas de Energia.

Alguns outros exemplos notáveis de superfícies mínimas são helicoides (a forma geométrica de DNA e escadas em espiral duplo) e catenoides (superfícies mínimas obtidas por catenárias girando sobre suas directrices). O estudo das superfícies mínimas, além de ser importantes em seu própio direito, tem aplicações físicas em problemas de interface de fluido e problemas de navegação, conexões profundas às perguntas fundamentais na relatividade geral e, de fato, desempenhou um papel crucial na prova da conjectura de Poincaré.

O caso clássico de subvariedades mínimas em $\mathbb{R}^n$ é um assunto que também foi estudado por séculos. Outro cenário natural para o estudo de superfícies mínimas está em variedades de Riemann, e um caso interessante é a esfera n-dimensional S^n. Aqui, há uma diferença fundamental a partir do caso de $\mathbb{R}^n$: cada subvariedade mínima em $\mathbb{R}^n$ é necessariamente não compacta, mas em S^n existem subvariedades mínimas fechadas. Em particular, as superfícies mínimas em S^3 são abundantes: em 1979, Lawson provou que uma superfície fechada orientável de qualquer género pode ser entendido com uma superfice mínima mergulhada em S^3.

Neste trabalho, lida-se com hipersuperficies mínimas de S^n, ou seja, subvariedades mínimas de S^n, de dimensão $n - 1$. Mais especificamente, pretende-se estudar problemas relacionados com subvariedades mínimas e hipersuperficies de S^n e seu índice. Subvariedades mínimas são pontos críticos do funcional volume que , em geral, não necessariamente minimizam localmente o volume. O índice de uma subvariedade mínima corresponde ao índice do hessiano do funcional volume, e, intuitivamente falando, é o número de direcções independentes em que se pode deformar a subvariedade mínima para diminuir o seu volume. Assim, uma subvariedade mínima é localmente um minimizador do funcional volume se, e somente se, seu índice é 0. Mostra-se que existe uma caracterização das subvariedades mínimas de S^n que minimizem o índice, e apresenta-se uma conjectura relacionada que afirma que há também uma caracterização das hipersuperficies mínimas não totalmente geodésicas de S^n que minimizem o índice.

Descrevendo de maneira bem sucinta cada capítulo, a dissertação esta dividida da seguinte forma:

No **Capítulo 1** pretende-se dar uma breve introdução aos tópicos relacionados à teoria de subvariedades mínimas, trabalhando com operadores diferenciáveis definidos em subvariedades Riemannianas, finalmente serão apresentados as superfícies 1-sided e 2-sided, nas quais trabalhamos com formas harmônicas.

Mostra-se no **Capítulo 2** a classificação das hipersuperficies mínimas de índice de Morse pequeno e imersas na esfera Euclideana S^3. Mais precisamente, seja Σ uma superfície mínima compacta imersa na esfera unitária 3-dimensional S^3. O operador de Jacobi da segunda variação de Σ é dado por $L_\Sigma = \Delta_\Sigma + |\sigma|^2 + 2$, onde $|\sigma|^2$ é o quadrado da norma da segunda forma fundamental de Σ e Δ_Σ é o Laplaciano da métrica induzida sobre Σ. Dito isto, apresenta-se a conjectura que afirma que entre as hipersurperficies mínimas não totalmente geodésicas, as hipersuperficies de Clifford são as que minimizam o índice, finalmente, exibe-se a prova feita por Urbano para o caso n=3.

O **Capítulo 3** tem como objetivo estudar a classificação das superfícies mínimas de índice de Morse pequeno imersas nas variedades produto $S^2 \times S^1(r)$. Em particular, estuda-se os seguintes resultados provados por F. Torralbo e F. Urbano: Os slices $S^2 \times \{p\}$, $p \in S^1(r)$, são as únicas superfícies mínimas compactas estáveis em $S^2 \times S^1(r)$ e por último, quando $r > 1$, não há superfície mínima compacta de índice de Morse igual a um em $S^2 \times S^1(r)$.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Alguns Preliminares

A finalidade deste capítulo é desenvolver de forma sucinta o estudo das subvariedades mínimas e definir a geometria envolvida. Vamos começar com definições, notações e convenções da teoria básica de subvariedades Riemannianas. Conclui-se com a primeira e segunda fórmula de variação de volume e a definição de uma subvariedade mínima.

1.1.1 Notações e convenções

Seja (M, g), (M', g') variedades Riemannianas com conexões de Levi-Civita ∇, ∇' respectivamente. Entende-se por $C^\infty(M, M')$ o conjunto de funções diferenciáveis $f : M \to M'$, e $C^k(M, M')$, o conjunto de funções $f : M \to M'$ as quais são k vezes continuamente diferenciáveis. No caso especial que $M = \mathbb{R}$, o dito anteriormente será $C^\infty(M)$ ou $C^k(M)$. Seja $E \overset{\pi}{\to} M$ o fibrado vetorial em M. Denota-se o conjunto de seções diferenciáveis de E por $\Gamma(E)$, isto é,

$$\Gamma(E) = \{X \in C^\infty(M, E) | \pi \circ X = id_M\}.$$

Considere-se a definição da convenção do endomorfismo da curvatura Riemanniana em M, $R_M : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ por

$$R_M(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

e o tensor curvatura Riemanniana, $R_M : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \mathbb{R}$ será definido por

$$R_M(X, Y, Z, W) = g(R_M(X, Y)Z, W).$$

Salvo indicação em contrário, S^n denotará a esfera n-dimensional de raio um com a métrica induzida de $\mathbb{R}^{n+1}$.

1.1.2 Subvariedades Riemannianas

Se $M^k \subset \overline{M}^n$ é uma subvariedade imersa, então para qualquer $p \in M$, temos as projeções tangencial e normal $(\cdot)^T : T_p\overline{M} \to T_pM$, $(\cdot)^N : T_p\overline{M} \to N_pM$ que naturalmente decompõe o espaço tangente de $\overline{M}$:

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus N_pM \quad \text{para } p \in M.$$

Uma variedade imersa $\Phi : M \to \overline{M}$ em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$ naturalmente herda uma estrutura de variedade Riemanniana do espaço ambiente: se $\overline{M}$ tem uma métrica Riemanniana $\overline{g}$ e uma conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$, então $g = \Phi^*\overline{g}$ é a métrica Riemanniana com conexão de Levi-Civita dada por

$$\nabla_X Y = d\Phi^{-1}\left(\left(\overline{\nabla}_{d\Phi(X)} d\Phi(Y)\right)^T\right).$$

Se $M \subset \overline{M}$, simplesmente pode-se escrever $g = \overline{g}|_M$ e $\nabla = (\overline{\nabla})^T$. Então

$$\overline{\nabla} = (\overline{\nabla})^T + (\overline{\nabla})^N = \nabla + \nabla^N,$$

com $\nabla^N := (\overline{\nabla})^N$.

Definição 1.1.2.1. A segunda forma fundamental de M induzida por $\overline{\nabla}$ é a forma bilinear A definida por

$$A(X,Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^N \qquad X, Y \in T_pM,$$

É fácil ver que A é simétrica, isto é, $A(X,Y) = A(Y,X)$, ja que

$$\begin{aligned} A(X,Y) &= (\overline{\nabla}_X Y)^N = (\overline{\nabla}_Y X + [X,Y])^N \\ &= A(Y,X) + 0 \qquad ([X,Y] \in T_pM). \end{aligned}$$

Seja $p \in M$ e seja também $\{E_i\}_{i=1}^k$ uma base ortonormal para T_pM.

Definição 1.1.2.2. O vetor de curvatura média H em $p \in M$ é dado por

$$H = \sum_{i=1}^k A(E_i, E_i).$$

Definição 1.1.2.3. A norma quadrada da segunda forma fundamental em $p \in M$ é

$$\|A\|^2 = \sum_{i,j}^{k} \|A(E_i, E_j)\|^2 .$$

Definição 1.1.2.4. Uma subvariedade Riemanniana $M \subset \overline{M}$ diz-se ser totalmente geodésica se tem uma das seguintes condições equivalentes:

i Qualquer g-geodésica em M é também uma $\overline{g}-$geodésica em $\overline{M}$.

ii A segunda forma fundamental de M desaparece de forma idêntica, isto é, $A \equiv 0$.

As seguintes duas proposições relacionam a segunda forma fundamental de M para as curvaturas de M e $\overline{M}$. A primeira refere-se a como diferença da curvatura de uma subvariedade e a curvatura de uma variedade ambiente mostra informação da segunda forma fundamental. A segunda faz referência da derivada covariante da segunda forma fundamental, a qual fornece informações sobre o endomorfismo curvatura de M.

Proposição 1.1.2.1 (Equação de Gauss)**.** *Para qualquer* $X, Y, Z, W \in T_pM$

$$\begin{aligned} R_{\overline{M}}(X,Y,Z,W) &= R_M(X,Y,Z,W) \\ &\quad - \langle A(X,W), A(Y,Z)\rangle + \langle A(X,Z), A(Y,W)\rangle , \end{aligned}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *denota a métrica em* $\overline{M}$.

Proposição 1.1.2.2 (Equação de Codazzi)**.** *Para qualquer* $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$,

$$(R_M(X,Y)Z)^N = (\nabla_X A)(Y,Z) - (\nabla_Y A)(X,Z),$$

onde $(\nabla_X A)(Y,Z) = \nabla^N_X A(Y,Z) - A(\nabla_X Y, Z) - A(Y, \nabla_X Z)$.

1.1.3 Subvariedades Mínimas

Seja $\overline{M}$ uma n-variedade Riemanniana e $\Phi : M \to \overline{M}$ uma imersão, onde M é uma k-variedade compacta e orientável com bordo (possivelmente vazio) ∂M. Seja $F : I \times M \to M$, $I = (-1, 1)$, uma variação diferenciável de Φ, isto é, F é uma aplicação diferenciável tal que

i Para cada $t \in I$, a aplicação $\Phi_t := F(t, \cdot) : M \to \overline{M}$ é uma imersão.

ii $\Phi_0 := F(0, \cdot) = \Phi$.

iii Para cada $t \in I$, $\Phi_t|_{\partial M} = \Phi|_{\partial M}$.

Seja t a coordenada em I e seja E a seção de $T(M) \oplus N(M)$ dada por $E = dF(\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0})$. Exclui-se a dependência do tempo e seja dV o elemento de volume da métrica induzida por Φ_t assim que o volume de M no tempo t, $\acute{A}rea(t)$, é dado por

$$\acute{A}rea(t) = \int_M dV.$$

Então temos

Teorema 1.1.3.1 (A primeira fórmula de variação)**.**

$$\frac{d\acute{A}rea}{dt}|_{t=0} = \int_M div_M E \ dV = -\int_M \langle H, E\rangle \ dV. \tag{1.1}$$

Teorema 1.1.3.2 (A segunda fórmula de variação)**.**

$$\begin{aligned} \frac{d^2\acute{A}rea}{dt^2}|_{t=0} &= -\int_M |\langle A(\cdot,\cdot), E\rangle|^2 \, dV \\ &+ \int_M \left|\nabla_M^N E\right|^2 dV - \int_M Tr_M \langle R_M(\cdot, E)\cdot, E\rangle \, dV. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Definição 1.1.3.1. Seja $\Phi : M \to \overline{M}$ uma imersão. Tem-se que uma variedade M é uma subvariedade mínima de $\overline{M}$ se $\frac{d\acute{A}rea}{dt}|_{t=0} = 0$ para qualquer variação diferenciável de Φ.

Definição 1.1.3.2 (funçaõ bump)**.** Uma função bump é uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ no espaço euclideano $\mathbb{R}^n$ a qual é simultaneamente diferenciável (no sentido de ter derivadas continuas de todas as ordens) e de ter suporte compacto.

Lema 1.1.3.3. *M é uma subvariedade mínima de $\overline{M}$ se, e somente se, o vetor de curvatura média desaparece.*

Demonstração. Isto é claro a partir da primeira fórmula de variação (1.1) uma vez que $H \equiv 0$, então M é uma subvariedade mínima de $\overline{M}$.

Agora, suponha que M é uma subvariedade mínima de $\overline{M}$ e que $H(p) \neq 0$ para algum $p \in M$. Então, pela continuidade, $\|H\| > \frac{1}{2}\|H(p)\|$ em alguma vizinhança $U \subset M$ de p. Seja $\phi : M \to \mathbb{R}$ uma função de colisão diferenciável tal que $\phi|_U \equiv 1$, e seja F uma variação diferenciável de Φ com o campo de variação ϕH $(F(t, q) = \exp_q(t\phi(q)H(q)))$. Então temos que

$$0 = \frac{d\acute{A}rea}{dt}|_{t=0} = -\int_M \langle H, \phi H\rangle \, dV_0 \leq -\frac{1}{2}\|H(p)\|^2 \int_U dV_0.$$

Desde que $\int_U dV_0 > 0$, isto dá-nos de que $\|H(p)\| \leq 0$, o qual é uma contradição. $\square$

1.2 Operadores em variedades Riemannianas

Neste capítulo vai se exibir alguns operadores específicos em variedades Riemannianas. Inicia-se com as definições de alguns operadores diferenciais ordinárias e de alguns resultados que vamos fazer uso mais tarde no capítulo 2.1.

Defina-se um operador elíptico específico sobre subvariedades mínimas que vem da segunda fórmula de variação: o operador de Jacobi. Mostra-se os resultados do índice e estabilidade das subvariedades mínimas e delina-se a teoria espectral global dos operadores elípticas sobre variedades Riemannianas compactas.

1.2.1 Operadores diferenciais básicos em variedades Riemannianas

Definição 1.2.1.1. Seja $f \in C^\infty(M)$. Vamos definir:

(i) O gradiente de f, grad $f \in \Gamma(TM)$ é o campo de vetores caracterizado pel equação

$$df(X) = \langle \text{grad } f, X \rangle .$$

(ii) O Hessiano de f,$Hess\ f$, é o tensor (0,2) simétrico tal que, para $X, Y \in \Gamma(TM)$

$$Hess\ f(X,Y) = \langle \nabla_X \text{grad } f, Y \rangle = XY\ f - (\nabla_X Y)f.$$

(iii) O Laplaciano de f, $\Delta f \in C^\infty(M)$ é a função dada por

$$\Delta f = \text{Tr}(Hess\ f) = \sum_{i=1}^{k} \nabla_{E_i}(\nabla_{E_i} f) - (\nabla_{E_i} E_i)f,$$

onde $\{E_i\}_{i=1}^k$ é uma base ortonormal para TM.

Um simples cálculo mostra que o Laplaciano satisfaz um tipo de regra de product:

$$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle . \tag{1.3}$$

Lema 1.2.1.1 ([3],pag.6). *Seja $f \in C^2(M)$, $g \in C^1(M)$ são funções tal que $h(grad\ f)$ tem suporte compacto. Então*

$$\int_M (h\Delta f + \langle grad\ h, grad\ f \rangle)\, dV = 0.$$

Note que (1.3) e junto ao lema 1.2.1.1 mostram que, se o grad f tem suportes compacto, então

$$0 = \int_M 1 \cdot \Delta f + \langle \text{grad } f, \text{grad } 1 \rangle \ dV = \int_M \Delta f \ dV. \tag{1.4}$$

Em particular, se M é compacta, então (1.4) verifica-se para qualquer $f \in C^2(M)$.

1.2.2 O operador de Jacobi e o Índice de Morse

Pode-se escrever que a segunda fórmula de variação (1.2) da seguinte forma

$$\frac{d^2 \acute{A}rea}{dt^2}|_{t=0} = -\int_M \langle E, LE \rangle \, dV. \tag{1.5}$$

onde L é o operador autoadjunto de Jacobi da segunda variação, a qual age em campos de vetores normais X em M, assim

$$LX = \Delta_M^N X - \Re(X) + \widetilde{A}(X). \tag{1.6}$$

Aqui, se $\{E_i\}_{i=1}^k$ é uma base ortonormal para TM, $\widetilde{A}$ é o operador de Simons definido por

$$\widetilde{A}(X) = \sum_{i,j=1}^{k} g(A(E_i,E_j), X) A(E_i,E_j), \tag{1.7}$$

Δ_M^N é o Laplaciano no fibrado normal

$$\Delta_M^N X = \sum_{i=1}^{k} \nabla_{E_i}^N \nabla_{E_i}^N X - \sum_{i=1}^{k} \nabla_{(\nabla_{E_i} E_i)^T}^N X, \tag{1.8}$$

e

$$\Re(X) := \text{Tr}[R_{\overline{M}}(\cdot, X)\cdot] = \sum_{i=1}^{k} R_{\overline{M}}(E_i, X) E_i.$$

Se M é uma hipersuperficie orientável de $\overline{M}$, então M tem um fibrado normal (o fibrado normal tem uma base ortonormal global) e o operador de Jacobi se simplifica como um operador em funções: pode-se então escrever qualquer campo vetorial normal, como um produto de uma função e um campo vetorial normal unitário, então pode-se identificar os campos de vetores normais com funções, isto é, se $X = fN$, então identifica-se X com f, assim

$$Lf = \Delta_M f + \|A\|^2 f + \text{Ric}_{\overline{M}}(N, N) f. \tag{1.9}$$

Dizemos que λ é um autovalor(Dirichlet) para L em $\Omega \subset M$ se existe um campo de vetores normal não trivial $X \in \Gamma(NM)$ tal que $X|_{\partial\Omega} = 0$ e

$$LX + \lambda X = 0. \tag{1.10}$$

Definição 1.2.2.1. O índice de Morse (ou somente índice) de uma subvariedade mínima compacta M, denotada por $ind(M)$, é o número negativo de autovalores do operador de Jacobi L agindo no espaço das seções diferenciáveis no fibrado normal o qual desaparece no bordo (contando com multiplicidades).

Existe uma forma quadrática, Q, associado ao operador de Jacobi que é dado por

$$Q(X,X) = -\int_M \langle X, LX\rangle \; dV = -\int_M \left\langle X, \Delta_M^N X - \Re(X) + \widetilde{A}(X)\right\rangle \; dV, \tag{1.11}$$

e o $ind(M)$ é o índice de Q. No caso que M é um hipersuperficie, isso pode ser simplificado

$$Q(f,f) = \int_M |\nabla f|^2 - (\|A\|^2 + \mathrm{Ric}(N,N))f^2 \; dV. \tag{1.12}$$

Às vezes é útil para trabalhar com esta forma quadrática em vez do operador Jacobi.

Segue-se a partir da segunda fórmula variação (1.2) que alternativamente pode-se haver definido o índice de morse de M, índice de M, como um ponto crítico para o funcional volume, e por isso que o índice de Morse, em algum sentido, descreve como é *estável* uma subvariedade mínima, isso fornece o número de direções independentes em que a subvariedade mínima pode ser deformada para tornar a sua diminuição do volume. Assim, uma subvariedade mínima *estável*, que realmente minimiza (localmente) o funcional volume, tem índice zero. Se o índice é positivo, então M é dito não estável. Vê-se logo que não há subvariedades mínimas estáveis na esfera S^n.

1.2.3 Teoria Espectral de Operadores fortemente elípticos

Apresenta-se alguns resultados sobre a teoria geral dos operadores fortemente elípticos. Lembre-se que um operador diferencial elíptico de ordem m em uma variedade m-dimensional M é um operador P que em coordenadas locais tem a forma

$$P(x,D)u = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u,$$

cujo símbolo principal

$$P_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

é inversível para $\xi \in \mathbb{R}^n$ diferente de zero. Aqui $D = (D_1, ..., D_n)$, $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x^j}$ e $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ é um muli-índece assim que $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}...D_1^{\alpha_n}$. Um operador fortemente elíptico é um operador diferencial elíptico com

$$\frac{1}{2}(P_m(x,\xi) + P_m(x,\xi)^*) \geq C\|\xi\|^m,$$

onde $P_m(x,\xi)^* = \overline{P_m(x,\xi)^T}$.

O operador de Jacobi é conhecido por ser fortemente elíptico (veja Simons [17] pag.65) e por isso vai-se aplicar posteriormente alguns desses resultados para o operador de Jacobi quando seja feita a prova do caso especial da conjectura principal.

Se L é um operador fortemente elíptico e M é compacto, então o espectro de L é composto inteiramente de autovalores $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$. Organiza-se os autovalores de acordo ao tamanho

$$\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_k < ...$$

então $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ é um conjunto discreto e $\lambda_k \to \infty$. Além disso, a multiplicidade de cada autovalor é finito. De fato, o primeiro autovalor tem multiplicidade um e existe uma autofunção associada ao primeiro autovalor que é estritamente positivo.

Os autoespaços E_i correspondentes a λ_i são mutuamente ortogonais com respeito ao produto interno em $L^2(M)$, e $\oplus_{i=1}^{\infty} E_i$ é denso em $L^2(M)$ e a completação de $C^{\infty}(M)$ em $L^2(M)$.

Se f_i é uma autofunção correspondente a λ_i, então para qualquer função $u \in W^{1,2}(M,\mathbb{R})$ com $\|u\|_{L^2} = 1$ e $\langle u, f_i\rangle_{L^2} = 0$ para $i = 1, 2, 3, ..., j-1$, temos que

$$Q(u,u) \geq \lambda_j, \tag{1.13}$$

tendo a igualdade se, e somente se, $Lu + \lambda_j u = 0$.

Às vezes a delimitação sobre o índice de uma subvariedade mínima pode ser obtido diretamente a partir de obtenção de limites para o número de valores próprios negativos de L, embora isto seja mais factível em certas situações do que em outros. Se a curvatura de Ricci e o quadrado da segunda forma fundamental são constantes, então em seguida, encontrar os valores próprios do operador de Jacobi se transforma no problema de encontrar os valores próprios do Laplaciano em M, um operador mais estudado. Em alguns casos especiais, como quando temos $(M,g) = (S^k, g_0)$ com g_0 a métrica induzida por $\mathbb{R}^{k+1}$, os valores próprios do Laplaciano e suas multiplicidades são conhecidos e o índice pode ser calculado.

Teorema 1.2.3.1 ([16],pag.272)**.** *Os autovalores do Laplaciano em (S^k, g_0) são dados por*

$$\lambda_j := (j-1)(k+j-2),$$

com multiplicidade

$$dim\ P_{j-1} - dim\ P_{j-3} = \binom{k+j-1}{j-1} - \binom{k+j-3}{j-3},$$

onde P_j é o espaço dos polinômios homogêneos de grau j em $\mathbb{R}^{k+1}$.

O seguinte teorema mostra que o espectro do Laplaciano sobre uma variedade produto (dotado com a métrica produto) é completamente determinado por o espectro do Laplaciano em cada um das variedades componentes.

$Spec(M, g)$ denota o espectro do Laplaciano em uma variedade Riemanniana (M, g).

Teorema 1.2.3.2 ([2],pag.143). *Seja (M, g) e (N, h) duas variedades Riemannianas. Na variedade produto tem-se*

$$Spec(M \times N, g \times h) = \{\lambda + \mu | \lambda \in Spec(M, g),\ \mu \in Spec(N, h)\}.$$

1.3 Superfícies Mínimas 1-sided e 2-sided

Seja Σ uma superfície conexa imersa em uma 3-variedade Riemanniana M. Se o campo vetorial normal unitário N é definido globalmente em Σ ; diz-se que a imersão é $2-$*sided*. Caso contrario a imersão é dita de $1-$ *sided*.

Quando a variedade ambiente M é orientável, dizer que é $2-$ *sided* é equivalente à orientabilidade de Σ.

Se Σ é uma superfície mínima $2-$*sided*, então qualquer função com suporte compacto $u \in C^1(\Sigma)$ determina uma deformação normal da superfície com variação infinitesimal uN.

A segunda fórmula de variação de área para esta deformação é dada por

$$Q(u, u) = \int_\Sigma |\nabla u|^2 - (\mathrm{Ric}(N) + |\sigma|^2)u^2,$$

onde σ é a segunda forma fundamental da imersão, $\mathrm{Ric}(v)$ é a curvatura de Ricci de M na direçaõ do vetor v e N é o vetor normal unitário ao longo de Σ.

O operador linear associado $\Delta + Ric(N) + |\sigma|^2$, onde Δ bem a ser o laplaciano de Σ, é chamado o operador de Jacobi que satisfaz

$$-\int_\Sigma u(\Delta v + (Ric(N) + |\sigma|^2)v) = Q(u, v).$$

Usando a equação de Gauss, obtêm-se:

$$Ric(N) + |\sigma|^2 = Ric(e_1) + Ric(e_2) - 2K,$$

onde e_1, e_2 é uma base ortonormal no plano tangente da superfície e K é a curvatura de Gauss. Diz-se que a superfície Σ é estável se

$$0 \leq Q(u, u), \text{ para todo } u \in C^1(\Sigma) \text{ com suporte compacto.}$$

Se Σ é estável, compacta e Ric≥ 0, então a imersão é totalmente geodésica. Isto segue de Fischer-Colbrie e Schoen [6] que as superfícies mínimas completas $2-$ *sided* estáveis em 3-variedades planas são planos.

Se as superfícies mínima Σ é estável, então o fibrado normal é não trivial e a condição de estabilidade é expressada em forma diferencial. É habitual trabalhar em um cobrimento $2-$ *sided* $2-$ *sheeted* $\widetilde{\Sigma} \to \Sigma$. Se τ denota a mudança de folhas involução e N é o vetor normal unitário em $\widetilde{\Sigma}$, então $N \circ \tau = -N$ e a deformação normal infinitesimal de Σ correspondem às funções u em $\widetilde{\Sigma}$ satisfazendo $u \circ \tau = -u$. Portanto, se Q é a segunda fórmula de variação de área em $\widetilde{\Sigma}$, então a imersão de Σ é estável se e só se

$$0 \leq Q(u, u), \ \forall \ u \in C^1(\Sigma) \text{ com suporte compacto e } u \circ \tau = -u.$$

1.3.1 Formas Harmônicas

Seja Σ uma superfície Riemanniana orientável e $H^1(\Sigma, \mathbb{R})$ é o espaço das 1-formas harmônicas. Relembrando que uma 1-forma ω em Σ é harmônica se e só se é fechada, isto é

$$(\nabla\omega)(x, y) = (\nabla\omega)(y, x) \ \forall x, y \text{ vetores tangentes.}$$

e cofechada

$$(\nabla\omega)(e_1, e_1) + (\nabla\omega)(e_2, e_2) = 0$$

onde e_1, e_2 é uma base ortonormal no plano tangente de Σ. Denota-se por K e Δ a curvatura de Gauss e o Laplaciano respectivamente. Em particular, Δ atua nas 1-formas como

$$\Delta\omega(x) = \nabla^2\omega(e^1, e^1, x) + \nabla^2\omega(e^2, e^2, x).$$

Sabe-se que se ω é harmônico, então

$$\Delta\omega - K\omega = 0. \tag{1.14}$$

Portanto, dado ω, $\omega' \in H^1(\Sigma, \mathbb{R})$ obtêm-se:

$$\Delta \langle\omega, \omega'\rangle - 2K \langle\omega, \omega'\rangle = 2 \langle\omega, \omega'\rangle .$$

Lembrando ainda que, no caso que Σ fosse compacto, então ω é harmônico se e só se satisfaz a equação (1.15). Além disso, se Σ tem género g, então o espaço das 1-formas será 2g-dimensional.

Capítulo 2

Resultado da classificação para subvariedades mínimas de S^n

Este capítulo aborda especificamente as subvariedades mínimas de S^n. No começo vai-se derivar uma condição para que uma imersão isométrica $\Phi : M \to S^n$ seja uma imersão mínima. Segundo a exposição original de Simons[17] prova-se que de todas as subvariedades mínimas k-dimensional de S^n, mergulhadas de forma estândar, $S^k \subset S^n$, são as únicas que minimizam o índice.

Discuta-se uma conjectura que afirma que entres as hipersuperficies mínimas não totalmente geodésicas, as hipersuperficies de Clifford são as que minimizam o índice. Finalmente, apresenta-se a prova de Urbano desta conjectura no caso especial n=3.

2.1 Subvariedades mínimas de S^n

Mostra-se algumas propriedades das subvariedades de S^n.

2.1.1 Imersões isométricas e mínimas em S^n.

Lema 2.1.1.1. *Se $\psi : M^m \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma imersão isométrica, então*

$$\Delta_M \psi = \overline{H} = H - m\psi,$$

onde H,$\overline{H}$ são os vetores de curvatura média de M em $S^n, \mathbb{R}^{n+1}$ respectivamente. Portanto, ψ é uma imersão mínima se, e somente se,

$$\Delta_M \psi = -m\psi.$$

Demonstração. Seja D,$\overline{\nabla}$ e ∇ denotam os operadores de diferenciação covariante sobre $\mathbb{R}^{n+1}$, S^n e M respectivamente, e seja $\{E_i\}_{i=1}^m$ uma base ortonormal tangente a M. Então, se $\{y^1, ..., y^m\}$ e $\{x^1, ..., x^{n+1}\}$ são coordenadas locais de M e $\mathbb{R}^{n+1}$ respectivamente, então nota-se que, para $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$,

$$d\psi(E_k)(f) = E_k(f \circ \psi) = E_k^i \frac{\partial}{\partial y^i}(f \circ \psi) = E_k^i \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial \psi_j}{\partial y^i}$$

onde $E_k = E_k^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, e assim têm-se que $d\psi(E_k) = E_k(\psi_j)\frac{\partial}{\partial x^j}$. A partir disto, pode-se ver que

$$E_k(\psi_i) = d\psi_i(E_k)\frac{\partial}{\partial x^i} = d\psi(E_k) = E_k$$

assim $E_k(\psi_i) = E_k^i$. Portanto

$$E_k E_k(\psi_i)\frac{\partial}{\partial x^i} = E_k(E_k^i)\frac{\partial}{\partial x^i} = dE_k^i(E_k)\frac{\partial}{\partial x^i} = dE_k(E_k) = D_{E_k}E_k.$$

Também

$$(\nabla_{E_k}E_k)(\psi_i)\frac{\partial}{\partial x^i} = d\psi_i(\nabla_{E_k}E_k)\frac{\partial}{\partial x^i} = d\psi(\nabla_{E_k}E_k) = \nabla_{E_k}E_k.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Delta_M \psi &= \sum_{k=1}^m E_k E_k(\psi) - (\nabla_{E_k}E_k)\psi = \sum_{k=1}^m D_{E_k}E_k - \nabla_{E_k}E_k \\ &= \sum_{k=1}^m (D_{E_k}E_k)^\perp = \overline{H} \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $(\cdot)^\perp$ denota a projeção sobre o espaço normal a T_pM em $T_p\mathbb{R}^{n+1}$.

Por conseguinte

$$H = \sum_{k=1}^m (\overline{\nabla}_{E_k}E_k)^N = \sum_{k=1}^m ((D_{E_k}E_k)^T)^N = \sum_{k=1}^m ((D_{E_k}E_k)^N)^T = (\overline{H})^T$$

onde $(\cdot)^N$ denota a projeção sobre o espaço normal a T_pM em T_pS^n, e $(\cdot)^T$ denota a projeção tangencial sobre T_pM. A partir disto e (2.1) obtêm-se que

$$\Delta_M \psi = \overline{H} = (\overline{H})^T + (\overline{H})^\perp = H + \lambda\psi$$

para alguma função λ. A partir de $\|\psi\| \equiv 1$ e (1.3) têm-se que

$$0 = \frac{1}{2}\Delta_M \|\psi\|^2 = \langle \psi, \Delta_M \psi \rangle + \|\text{grad}_M \psi\|^2 = \lambda + \|\text{grad}_M \psi\|^2.$$

Assim $\lambda = -\|\text{grad}_M \psi\|^2$. Agora

$$\begin{aligned} \|\text{grad}_M \psi\|^2 &= \sum_{i=1}^{n+1} \|\text{grad}_M \psi_i\|^2 = \sum_{\substack{i=1,\dots,n+1 \\ j=1,\dots,m}} \langle \text{grad}_M \psi_i, E_j \rangle^2 \\ &= \sum_{\substack{i=1,\dots,n+1 \\ j=1,\dots,m}} (d\psi_i(E_j))^2. \end{aligned}$$

Escolhe-se coordenadas locais$\{x^i\}$ tal que os vetores $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\mid_p\right\}$ são ortonormais, então (em p) têm-se que

$$\begin{aligned}\|\mathrm{grad}_M\psi\|^2 &= \sum_{\substack{i=1,\dots,n+1\\ j=1,\dots,m}} (d\psi_i(E_j))^2 = \sum_{\substack{i=1,\dots,n+1\\ j=1,\dots,m}} \left\langle d\psi_i(E_j)\frac{\partial}{\partial x^i}, d\psi_i(E_j)\frac{\partial}{\partial x^i}\right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m} \|d\psi(E_j)\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} 1 = m,\end{aligned}$$

e assim Obtêm-se que $\Delta_M\psi = \overline{H} = H - m\psi$. □

2.1.2 Resultado de classificação de Simons

O exemplo mais simples de uma subvariedade mínima fechada de S^n é o mergulho totalmente geodésica $S^k \subset S^n$, mas estes são os únicos: em 1970, Lawson [9] mostrou que cada superfície compacta, orientável pode ser mergulhada minimamente em S^3. Porém, é bem conhecido que o mergulho, totalmente geodésico S^k são os únicos subvariedades mínimas imersas totalmente geodésicas de S^n. Em 1968, Simons[17] provou que qualquer subvariedade mínima imerso M^k de S^n é inestável (ind $(M) \geq 1$), e que ind $(M) = 1$, se, e somente se, M é difeomorfo a S^{n-1} mergulhado na forma canônica como uma subvariedade totalmente geodésica. Ou seja, ele provou que, se M^k é uma subvariedade mínima k-dimensional de Sn, então ind $(M) \geq n - k$ com igualdade se, e somente se, M é difeomorfo a S^k (mergulhada em S^n na forma canônica, totalmente geodésica), classificando as esferas totalmente geodésicas como aqueles que minimizam o índice. Uma vez que têm-se por objecto a caracterização das subvariedades mínimas M de S^n que minimizam o índice, note-se que, de agora em diante, suponha-se que M é conexo. Se M não é conexo, então a cada um dos seus componentes conexas é em si uma subvariedade mínima de S^n e o índice de M é a soma dos índices dos cada um de seus componentes conexas. Uma vez que, como se verá, cada subvariedade mínima conexa de Sn é instável, segue-se que o índice de M é estritamente maior do que o índice de qualquer dos seus componentes conexas, e assim caracterizar as subvariedades mínimas de S^nque minimizem o índice será o mesmo que caracterizam as subvariedades mínimas conexas de S^n que minimizem o índice.

Lema 2.1.2.1. *Seja M^k uma subvariedade imersa fechada totalmente geodésica de S^n. Então M é isométrica a S^k.*

Demonstração. Seja $p \in M$ e $v \in T_pM$. Como M é totalmente geodésica, para t suficientemente pequeno, $\exp_p^M(tv)$ é uma geodésica em S^n e, portanto, uma parte de um grande circulo. Desde que M for fechada, ele é compacto e, portanto, completa e $\partial M = \phi$. Daqui $\exp_p^M(vt)$ é definida para todo t e deve varrer toda a grande círculo. Assim, deixando v variando ao longo de T_pM e $t \in \mathbb{R}$, $\exp_p^M(vt)$ varre a esfera $k-$dimensional. Desde que M é conexo, por obtêm-se que $M \cong S^k$. $\square$

Apresenta-se a prova do principal resultado da classificação.

Teorema 2.1.2.2 (Simons,1968)**.** *Seja M uma subvariedade mínima, compacta, fechada $k-$dimensional imersa em S^n. Então ind$(M) \geq n-k$, com a igualdade se, e somente se, M é difeomorfo a S^k mergulhada em S^n na forma estândar como uma subvariedade totalmente geodésica.*

Demonstração. Suponha S^k como subvariedade mínima totalmente geodésica mergulhada $S^k \hookrightarrow S^n$.

Mostra-se primeiro que $\mathrm{ind}(S^k) = n-k$. Lembre-se que para qualquer subvariedade mínima $k-$dimensional têm-se que para qualquer $V \in \Gamma(NS^k)$,

$$\Re(V) := \mathrm{Tr}\left[R_{S^n}(\cdot, V)\cdot\right] = -kV. \tag{2.2}$$

Para mostrar isso, lembre-se que S^n tem curvatura seccional constante $K \equiv 1$, então

$$R_{S^n}(X,Y,Y,X) = 1 \cdot (\langle X,X\rangle \langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2)$$

para todo $X, Y \in \Gamma(T\overline{M})$. Além disso,

$$\langle X,W\rangle \langle Y,Z\rangle - \langle X,Y\rangle \langle W,Z\rangle$$

é um 4-tensor covariante em T_pS^n com as mesmas simetrias como o tensor curvatura. Por um resultado em geometria Riemanniana isto será igual ao tensor curvatura, isto é

$$R_{S^n}(X,Y,Z,W) = \langle X,W\rangle \langle Y,Z\rangle - \langle X,Y\rangle \langle W,Z\rangle$$

para todo $X, Y, Z, W \in \Gamma(TS^n)$. Portanto

$$R_{S^n}(X,Y)Z = \langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y$$

para todo $X, Y, Z \in \Gamma(TS^n)$. Logo, se $\{E_i\}_{i=1}^k$ é um referencial ortonormal para TS^k, então

$$\Re(V) = \sum_{i=1}^k (R_{S^n}(E_i, V)E_i)^N = \sum_{i=1}^k (\langle V, E_i\rangle E_i - \langle E_i, E_i\rangle V)^N = -kV.$$

Desde que $A \equiv 0$ no caso de S^k (S^k é totalmente geodesica),isto significa que (1.6) se torna

$$L = \Delta_{S^k} + k,$$

e por isso é evidente que o autoespaços de Δ_{S^k} com autovalor λ corresponde aos autoespaços de L com autovalor $\lambda - k$. Note que o fibrado normal de S^k é trivial: pode-se rodar, se fosse necessário, de modo que

$$S^k = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} | x_{k+2} = ... = x_{n+1} = 0\}.$$

Então os vetores $\{\frac{\partial}{\partial x^{k+2}}, ..., \frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\}$ formam um marco global para o fibrado normal de S^k em S^n. Portanto, pode-se escolher um marco paralelo global $\{V_1, ..., V_{n-k}\}$ para NS^k. Então, para qualquer $V \in \Gamma(NS^k)$, pode-se escrever $V = v^i V_i$ para alguma função $v^i \in C^\infty(S^k)$, e, desde $\{V_i\}$ é um marco paralelo,

$$\Delta_{S_k} V = \Delta_{S_k}(v^i V_i) = \Delta_{S_k}(v^i) V_i.$$

Portanto, $\Delta_{S^k}(V) + \lambda V = 0$ se, e somente se,

$$(\Delta_{S^k}(v^1), ..., \Delta_{S^k}(v^{n-k})) + \lambda(v^1, ..., v^{n-k}) = \overrightarrow{0}. \tag{2.3}$$

Segue-se do teorema 1.2.3.1 que Δ_{S^k} tem um espaço nulo $1-$dimensional e um autoespaço $(k+1)-$dimensional correspondente ao autovalor k. Além disso, do teorema 1.2.3.1 é evidente que todos os outros valores próprios são estritamente maior que k. Assim, $\text{ind}(S^k) = n - k$.

Prova-se a segunda parte do teorema mediante uma sequencia de lemas que em conjunto fornecem a forma do índice Q assume uma forma especial quando é restrito a um sub espaço específico de $\Gamma(NM)$. Em particular, mostra-se que para qualquer u neste subespaço especifico de $\Gamma(NM)$, vai-se obter que

$$Q(u, u) = -k \int_M \|u\|^2 \, dV.$$

Portanto a forma do índice é definida negativa neste subespaço particular, e assim o resultado vai se obter em seguida, uma vez que mostram que a dimensão deste subespaço é maior ou igual a $n - k$, tendo a igualdade se, e somente se, $A \equiv 0$.

Como acima, denota-se $D, \overline{\nabla}, \nabla$ como as conexões de Levi-Civita para $\mathbb{R}^{n+1}, S^n$ e M respectivamente, e $\nabla^N, \overline{\nabla}^N$denota as conexões no fibrado normal de M em S^n e de S^n em

$\mathbb{R}^{n+1}$ respectivamente. Dado um campo vetorial paralelo em $\mathbb{R}^{n+1}$, toma-se a projeção tangencial sobre S^n para obter um campo vetorial sobre S^n. A coleção de todos esses campos de vetores, ξ, forma um subespaço $(n+1)-$dimensional de $\Gamma(TS^n)$.

Lema 2.1.2.3. *Seja $Z \in \xi$, $p \in S^n$. Então existe $\lambda \in C^\infty(S^n)$ tal que, para qualquer $X \in T_pS^n$*

$$\overline{\nabla}_X Z = \lambda X$$

Demonstração. Seja $Z = W^T$, onde W é um campo vetorial paralelo em $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que

$$\overline{\nabla}_X Z = (D_X Z)^T = (D_X W^T)^T = (D_X(W - W^N))^T = -(D_X W^N)^T, \tag{2.4}$$

onde W^N é o componente normal de W para S^n. Se N fosse um campo normal unitário a S^n, então $W^N = -\lambda N$ para alguma função λ, portanto,usando (2.4) obtêm-se

$$\overline{\nabla}_X Z = (D_X \lambda N)^T = (X(\lambda)N + \lambda D_X N)^T = \lambda X,$$

onde, como consequência dos campos de vetores coordenados em $\mathbb{R}^{n+1}$, $\left\{\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}\right\}_{i=1}^{n+1}$, são paralelos, assim temos que

$$D_X N = X^i D_{\partial_i}(x^j \partial_j) = X^i \partial_i = X.$$

□

Desde que $Z \in \xi$ é um campo vetorial em S^n, restringindo a M e tomando projeções normal e tangencial obtêm-se campos de vetores $Z^N \in \Gamma(NM)$ e $Z^T \in \Gamma(TM)$ respectivamente.

Lema 2.1.2.4. *Para $Z \in \xi$, os campos de vetores $Z^N \in \Gamma(NM)$ e $Z^T \in \Gamma(TM)$ satisfazem*

$$\begin{aligned} \nabla^N_X Z^N &= -A(X, Z^T), \\ \nabla_X Z^T &= -(\overline{\nabla}_X Z^N)^T + \lambda X, \end{aligned}$$

onde $X \in T_pM$ e λ é independente de X.

Demonstração. Tendo em conta o lema 2.1.2.3 têm-se

$$\begin{aligned} \nabla^N_X Z^N &= (\overline{\nabla}_X Z^N)^N = (\overline{\nabla}_X (Z - Z^T))^N = (\lambda X - \overline{\nabla}_X Z^T)^N \\ &= -A(X, Z^T). \end{aligned}$$

Novamente, usando o lema 2.1.2.3 obtêm-se

$$\nabla_X Z^T = (\overline{\nabla}_X Z^T)^T = (\overline{\nabla}_X (Z - Z^N))^T = \lambda X - (\overline{\nabla}_X Z^N)^T$$

□

Seja $\{E_i\}_{i=1}^k$ um marco referencial para TM para os quais $\nabla_{E_i} E_i \mid_p = 0$ para $i, j = 1, ..., k$. Embora não vai-se escrever explicitamente, note-se que para os seguintes cálculos todos serão em p.

Lema 2.1.2.5. *Seja $Z \in \xi$ e considere-se $Z^N \in \Gamma(NM)$. Então*

$$\left\| \nabla^N Z^N \right\|^2 = \sum_{i=1}^k \left\langle Z^N, A(E_i, \nabla_{E_i} Z^T) \right\rangle + E_i \left\langle Z^N, \nabla^N_{E_i} Z^N \right\rangle .$$

Demonstração. Usando o lema 2.1.2.4 têm-se

$$\left\| \nabla^N Z^N \right\|^2 = \sum_{i=1}^k \left\langle \nabla^N_{E_i} Z^N, \nabla^N_{E_i} Z^N \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^k E_i \left\langle Z^N, \nabla^N_{E_i} Z^N \right\rangle - \left\langle Z^N, \overline{\nabla}_{E_i} \nabla^N_{E_i} Z^N \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^k E_i \left\langle Z^N, \nabla^N_{E_i} Z^N \right\rangle + \left\langle Z^N, \overline{\nabla}^N_{E_i} (A(E_i, Z^T)) \right\rangle$$

Logo

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}^N_{E_i}(A(E_i, Z^T)) &= (\overline{\nabla}_{E_i} A)(E_i, Z^T) + A(\nabla_{E_i} E_i, Z^T) + A(E_i, \nabla_{E_i} Z^T) \\ &= (\overline{\nabla}_{E_i} A)(E_i, Z^T) + A(E_i, \nabla_{E_i} Z^T). \end{aligned} \tag{2.5}$$

A partir da equação de Codazzi(proposição 1.1.2.2) obtêm-se

$$(\overline{\nabla}_{E_i} A)(Z^T, E_i) = (\overline{\nabla}_{Z^T} A)(E_i, E_i) + (R_{S^n}(E_i, Z^T)E_i)^N,$$

e, usando novamente que S^n tem curvatura constante,

$$(R_{S^n}(E_i, Z^T)E_i)^N = (\left\langle Z^T, E_i \right\rangle E_i - \langle E_i, E_i \rangle Z^T)^N = 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} (\overline{\nabla}_{Z^T} A)(E_i, E_i) &= \nabla^N_{Z^T}(A(E_i, E_i)) - A(E_i, \nabla_{Z^T} E_i) - A(\nabla_{Z^T} E_i, E_i) \\ &= \nabla^N_{Z^T}(A(E_i, E_i)), \end{aligned}$$

desde que $\nabla_{Z^T}E_i = \sum_{j=1}^{k}\left\langle Z^T, E_j\right\rangle \cdot \nabla_{E_i}E_i = 0$. Por conseguinte

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}(\overline{\nabla}_{Z^T}A)(E_i,E_i) &= \sum_{i=1}^{k}\nabla_{Z^T}^{N}(A(E_i,E_i))\\ &= \nabla_{Z^T}^{N}\sum_{i=1}^{k}A(E_i,E_i) = \nabla_{Z^T}^{N}H = 0,\end{aligned}$$

e então têm-se $(\overline{\nabla}_{E_i}A)(Z^T,E_i) = 0$. Portanto (2.5) torna-se

$$\overline{\nabla}_{E_i}^{N}(A(E_i,Z^T)) = A(E_i,\nabla_{E_i}Z^T).$$

Daqui,

$$\begin{aligned}\left\|\nabla^N Z^N\right\|^2 &= \sum_{i=1}^{k}E_i\left\langle Z^N,\nabla_{E_i}^{N}Z^N\right\rangle + \left\langle Z^N,\overline{\nabla}_{E_i}^{N}(A(E_i,Z^T))\right\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{k}\left\langle Z^N, A(E_i,\nabla_{E_i}Z^T)\right\rangle + E_i\left\langle Z^N,\nabla_{E_i}^{N}Z^N\right\rangle\end{aligned}$$

$\square$

Lema 2.1.2.6. *Seja $Z \in \xi$ e $Z^N \in \Gamma(NM)$. Então*

$$\left\langle \Delta_M^N Z^N, Z^N\right\rangle = -\left\langle \widetilde{A}(Z^N), Z^N\right\rangle.$$

Demonstração. Primeiro, têm-se

$$\begin{aligned}\left\|\nabla^N Z^N\right\|^2 &= \sum_{i=1}^{k}\left\langle(\overline{\nabla}_{E_i}Z^N)^N,(\overline{\nabla}E_iZ^N)^N\right\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{k}E_i\left\langle\overline{\nabla}_{E_i}Z^N\right\rangle^N - \left\langle Z^N,\overline{\nabla}_{E_i}\nabla_{E_i}^{N}Z^N\right\rangle\\ &= -\left\langle Z^N,\Delta_M^N Z^N\right\rangle + \sum_{i=1}^{k}E_i\left\langle\overline{\nabla}_{E_i}Z^N,Z^N\right\rangle.\end{aligned}$$

Portanto, do lema 2.1.2.5 obtêm-se

$$\left\langle \Delta_M^N Z^N, Z^N\right\rangle = \sum_{i=1}^{k} - \left\langle Z^N, A(E_i,\nabla_{E_i}Z^T)\right\rangle. \tag{2.6}$$

Usando o lema 2.1.2.4 consegue-se

$$\begin{aligned}\nabla_{E_i}Z^T = \sum_{i=1}^{k}\left\langle E_j,\nabla_{E_i}Z^T\right\rangle E_j &= \sum_{i=1}^{k} - \left\langle E_j,(\overline{\nabla}_{E_i}Z^N)^T\right\rangle E_i + \lambda\delta_{i,j}E_j\\ &= \sum_{i=1}^{k}\left\langle\overline{\nabla}_{E_i}E_{j,}Z^N\right\rangle E_{j+}\lambda\delta_{i,j}E_j\\ &= \sum_{i=1}^{k}\left\langle A(E_{i,}E_j),Z^N\right\rangle E_j + \lambda\delta_{i,j}E_j.\end{aligned}$$

Assim, desde que A é bilinear,

$$A(E_i, \nabla_{E_i} Z^T) = \sum_{i=1}^{k} \left\langle A(E_i, E_j), Z^N \right\rangle A(E_i, E_j) + \lambda \delta_{i,j} A(E_i, E_j),$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} \left\langle Z^N, A(E_i, \nabla_{E_i} Z^T) \right\rangle &= \sum_{i=1}^{k} \left\langle A(E_i, E_j), Z^N \right\rangle^2 + \lambda \delta_{i,j} \left\langle A(E_i, E_j), Z^N \right\rangle \\
&= \left\langle \widetilde{A}(Z^N), Z^N \right\rangle + \sum_{i=1}^{k} \lambda \left\langle A(E_i, E_i), Z^N \right\rangle \\
&= \left\langle \widetilde{A}(Z^N), Z^N \right\rangle + \lambda \left\langle H, Z^N \right\rangle \\
&= \left\langle \widetilde{A}(Z^N), Z^N \right\rangle .
\end{aligned}$$

Por isso,(2.6) torna-se

$$\left\langle \Delta_M^N Z^N, Z^N \right\rangle = - \left\langle \widetilde{A}(Z^N), Z^N \right\rangle .$$

□

Lema 2.1.2.7. *Para $Z \in \xi$ e $Z^N \in \Gamma(NM)$ têm-se*

$$Q(Z^N, Z^N) = -k \int_M \left\| Z^N \right\|^2 dV.$$

Demonstração. Uma vez que (2.2) é valido para qualquer subvariedade minima k-dimensional de S^n, (1.6) torna-se

$$LZ^N = \Delta_M(Z^N) + kZ^N + \widetilde{A}(Z^N).$$

Portanto, o resultado desejado segue-se da aplicação do lema X □

Lema 2.1.2.8. *Têm-se que dim $\xi^N \geq n - k$ com a igualdade se, e somente se, M é isométrico a S^k(mergulhada na forma estândar como uma subvariedade totalmente geodésica).*

Demonstração. Mostra-se primeiro que dim$\xi^N \geq n - k$, istoé evidente para cada $p \in M$, $\xi(p) := \{X(p) \mid X \in \xi\}$ gera T_pS^n,portanto para cada $p \in M$, ξ^N gera $N_pM \subset T_pS^n$. Logo, dim$\xi^N \geq$dim$N_pM = n - k$.

Suponha-se que dim$\xi^N = n-k$, e seja η o núcleo do homeomorfismo $\xi \to \xi^N$ de modo a que se $X \in \eta$, então $X^T = X$ em cada $p \in M$, portanto defina-se $\eta(p) := \{X(p) \mid X \in \eta\}$. Seja η_p o núcleo do homeomorfismo $\xi \to N_pM$ definido por $Z \to Z^N(p)$ $(p \in M)$, então é claro que $\eta(p) \subseteq \eta_p$. Desde que dim $\eta_p = (n+1)-(n-k)$, e a nossa suposição dim$\xi^N = n-k$

implica que $\dim \eta = (n+1)-(n-k)$, obtêm-se que $\eta = \eta_p$. Isto significa que a aplicação $Z \to Z^T(p)$, que claramente aplica η_p sobre T_pM, deve aplicar η sobre T_pM. Portanto, para qualquer $Z \in T_pM$, existe $\widetilde{Z} \in \xi$ tal que $\widetilde{Z}(p) = Z$, e $\widetilde{Z}$ es tangente em toda parte a M. A partir disto e do lema 2.1.2.4, segue-se que, para qualquer $X, Z \in T_pM$,

$$A(X,Z) = -\nabla_X^N \widetilde{Z}^N = 0,$$

logo, conclui-se que $A \equiv 0$. Assim M é totalmente geodésica e, por conseguinte isométrica a S^k pelo lema 2.1.2.1 □

□

2.2 Hipersuperficies mínimas não totalmente geodésicas de S^n

Delimita-se a nossa atenção para hipersuperficies mínimas não totalmente geodésicas de S^n, em seguida, conjectura-se que o índice caracteriza as hipersuperficies de Clifford de uma forma semelhante ao resultado da classificação de Simons para hipersuperficies mínimas de índice um: as hipersuperficies de Clifford são consideradas para minimizar o índice entre hipersuperficies mínimas não totalmente geodésicas. De fato, prova-se que este é o caso quando $n = 3$.

2.2.1 Uma classificação da conjectura

Aquí apresentamos as hipersuperficies de Clifford de S^n e algumas de suas propriedades, para logo mostrar a conjectura da classificação.

Definição 2.2.1.1. Defina-se uma hipersuperficie de Clifford de S^n como o produto $S^k(\sqrt{\frac{k}{n-1}}) \times S^l(\sqrt{\frac{l}{n-1}})$; onde $k + l = n - 1$.

Para mostrar que as hipersuperficies de Clifford são mínimas, segue-se a exposição de Lawson [9]

Lema 2.2.1.1 ([9],pag.23)**.** *As hipersuperfices de Clifford são subvariedades mínimas de S^n.*

O próximo teorema dá uma caracterização das hipersuperficies de Clifford em termos da norma ao quadrado da sua segunda forma fundamental. A partir deste resultado obtêm-se uma ferramenta para o cálculo do índice, e para a prova da conjectura no caso n=3 (teorema 2.2.25).

Teorema 2.2.1.2 (Chern, Do Carmo, Kobayashi (1970),Lawson (1969)([4],pag.60))**.** *As hipersuperficies de Clifford são as únicas hipersuperficies mínimas de S^n com $\|A\|^2 \equiv n-1$.*

Como acima mencionado, pensa-se que as hipersuperficies Clifford também são caracterizados pelo seu índice.

Conjectura 1. *Seja M uma hipersuperficie mínima fechada, orientável, não totalmente geodésica de S^n. Então ind$(M) \geq n+2$ com igualdade se, e somente se, M é uma hipersuperficies de Clifford.*

Mostra-se que um sentido da conjectura é verdade: A hipersuperficie de Clifford tem índice $n+2$.

Lema 2.2.1.3. *Se $M = S^k(\sqrt{\frac{k}{n-1}}) \times S^l(\sqrt{\frac{l}{n-1}})$ é uma hipersuperficie de Clifford, onde $k+l = n-1$, então ind $(M) = n+2$.*

Demonstração. Segue-se do teorema 2.2.1.2 que $L = \Delta_M + 2(n-1)$, e assim os autovalores de L são um a um correspondentes com os autovalores de Δ_M : $\Delta_M f + \mu f = 0$ se, e somente se, $Lf + \lambda f = 0$ onde $\lambda = \mu - 2(n-1)$. Agora, desde que M é um produto de variedades (com a métrica produto), utiliza-se o teorema 1.2.3.2 para calcular os autovalores do Laplaciano em M se conhecemos os autovalores do laplaciano em $S^k(\sqrt{\frac{k}{n-1}})$ e $S^l(\sqrt{\frac{l}{n-1}})$.

Do teorema 1.2.3.1 , têm-se que os autovalores do Laplaciano em $S^k(1)$ são

$$\begin{aligned} \sigma_j &= (j-1)(k+j-2), \ j = 1, 2, 3, ... \\ &= 0, \ k, \ 2(k+1), ... \end{aligned} \tag{2.7}$$

com multiplicidade

$$\begin{aligned} \dim\wp_{j-1} - \dim\wp_{j-3} &= \binom{k+j-1}{j-1} - \binom{k+j-3}{j-3} \\ &= 1, \ k+1, \ \binom{k+2}{2} - 1, ... \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde $\wp_j$ é o espaço dos polinômios homogêneos de grau j em $\mathbb{R}^{k+1}$.

Seja $f:(S^k(1),h)\to(S^k(r),g)$ definida por $x\mapsto rx$, onde g é a métrica induzida de $\mathbb{R}^{k+1}$ e h é a métrica pullback $h=f^*g$. Claramente $h=r^2g$ é um dimensionamento da métrica em $S^k(1)$ induzida de $\mathbb{R}^{k+1}$, portanto,encontra-se os autovalores do Laplaciano em $S^k(r)$ como os autovalores do Laplaciano em $S^k(1)$ quando dimensionamos a métrica. Usando a forma local do Laplaciano com a métrica respectiva h, Δ_h, obtêm-se

$$\begin{aligned}\Delta_h f &= \frac{1}{\sqrt{H}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(h^{ij}\sqrt{H}\frac{\partial}{\partial x^j}f\right)=\frac{1}{r^k\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(r^{-2}g^{ij}r^k\sqrt{G}\frac{\partial}{\partial x^j}f\right)\\ &= \frac{1}{r^2}\Delta_g f,\end{aligned}$$

onde $\sqrt{H}=\sqrt{|\det(h_{ij})|}$. Isto mostra que

$$\Delta_{\mathrm{g}}f+\lambda f=0\Longleftrightarrow\Delta_h f+\frac{\lambda}{r^2}f=0,$$

e assim dimensionando a métrica pelo fator r^2 têm-se o efeito de dimensionar os autovalores pelo fator $\frac{1}{r^2}$. Portanto, de (2.7) e (2.8) os primeiros três autovalores do Laplaciano em $S^k(\sqrt{\frac{k}{n-1}})$ e $S^l(\sqrt{\frac{l}{n-1}})$ são $\eta_{k,1}=0$ (com multiplicidade 1),$\eta_{k,2}=\frac{k(n-1)}{k}=n-1$ (com multiplicidade $k+1$), $\eta_{k,3}=\frac{2(k+1)(n-1)}{k}$ $\big($com multiplicidade$\binom{k+2}{2}-1\big)$ e $\eta_{l,1}=0$ (com multiplicidade 1), $\eta_{l,2}=\frac{l(n-1)}{l}=n-1$ (com multiplicidade $l+1$), $\eta_{l,3}=\frac{2(l+1)(n-1)}{l}$ $\big($com multiplicidade $\binom{l+2}{2}-1\big)$ respectivamente. Portanto, o lema 1.2.3.2 implica que os três primeiros autovalores do Laplaciano em M são $\mu_1=0$ (com multiplicidade 1), $\mu_2=n-1$ (com multiplicidade $(k+1)+(l+1)=n+1$) e $\mu_3=$min$\Big\{2(n-1),\frac{2(k+1)(n-1)}{k},\frac{2(l+1)(n-1)}{l}\Big\}=2(n-1)$. A partir disto segue-se que os primeiros dois autovalores de L em M são $\lambda_1=-2(n-1)$ (com multiplicidade 1) e $\lambda_2=-(n-1)$ (como multiplicidade $n+1$), e assim os outros autovalores são não negativos. Portanto ind $(M)=n+2$. □

O outro sentido da conjectura é muito menos clara. Embora ele é conhecido por ser verdadeiro no caso $n=3$(seção 2.2.2), tem várias coisas usadas na prova deste caso especial, que não estão mais disponíveis quando se move para dimensões maiores, impedindo a prova de generalizar. Perdomo[13] mostrou que a conjectura é verdadeira sob uma suposição de simetria adicional que todas as hipersuperficies mínimas conhecidas das esferas satisfazem. Ou seja, ele provou o seguinte teorema:

Teorema 2.2.1.4 (Perdomo, 2001 ([13])). *Seja M uma hipersuperficie mínima compacta, orientavel, não totalmente geodesica de S^n, e seja $O_M(n+1)$ o subgrupo do grupo ortogonal $O(n+1)$ consistente das transformações ortogonais qe fixam M, isto é*

$$O_M(n+1)=\{\gamma\in O(n+1)\mid\gamma(M)=M\}.$$

Se $O_M(n+1)$ fixa unicamente o origem de $\mathbb{R}^{n+1}$, então ind $(M) \geq n+2$ com a igualdade se, e somente se, M é uma hipersuperficie de Clifford.

2.2.2 Resultado de Urbano: Prova da conjectura quando $n = 3$

Em 1990, Urbano provou que a conjectura é verdadeira no caso especial de $n = 3$. Vamos mencionar os resultados que serão utilizados na prova de que ainda não tenham sido apresentados.

Lema 2.2.2.1 (Almgrem,1996 [[1],pag.279])**.** *Seja $f : S^2 \to S^3 \subset \mathbb{R}^4$ uma imersão mínima analítica real. Então f mergulha S^2 em S^3, e $f(S^2) = S^3 \cap \{x \in S^3 \mid x \cdot v = 0\}$ para algum $v \in S^3$.*

Lema 2.2.2.2 (Obata,1962 [[12],pag.334])**.** *Uma variedade Riemanniana completa M^n com $n \geq 2$ admite uma função não constante ϕ tal que Hess $\phi(\cdot,\cdot) = -c^2\phi\langle\cdot,\cdot\rangle$ se, e somente se, M é isométrico com a esfera $S^n(\frac{1}{c})$ em $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Teorema 2.2.2.3 (Gauss-Bonnet)**.** *Suponha M uma variedade compacta $2-$dimensional. Então*

$$\int_M K dA = 2\pi \cdot \chi(M),$$

onde $\chi(M)$ é a característica de Euler de M.

Lema 2.2.2.4. *Seja M uma variedade Riemannniana 2-dimensional com parâmetro conformal local $z = x + iy$ e seja $f : M \to \overline{M}$ uma aplicação conformal, então*

$$\acute{A}rea(f(M)) = \frac{1}{2}E(f),$$

onde $\acute{A}rea(f(M))$ é a área de $f(M) \subset \overline{M}$ e $E(f)$ é a energia de f,

$$E(f) = \int_M \langle df, df\rangle .$$

Demonstração. Seja g a métrica em $\overline{M}$ que pode-se escrever como $\langle\cdot,\cdot\rangle$, portanto f^*g é a métrica em M. Seja uma base ortonormal local para TM, e seja $\{\omega^1, \omega^2\}$ um coframe para T^*M dual a $\{E_1, E_2\}$. Então, desde que f é conformal, portanto, preserva ângulos, logo a energia de f é simplesmente

$$E(f) = \int_M (\langle df(E_1), df(E_1)\rangle + \langle df(E_2), df(E_2)\rangle)\, d\omega^1 \wedge d\omega^2. \tag{2.9}$$

Alem disso, desde que E_1 e E_2 cada um tem comprimento unitário e f é conformal,

$$\langle df(E_1), df(E_1)\rangle = \langle df(E_2), df(E_2)\rangle =: \Lambda.$$

Por isso, (2.9) simplifica-se a

$$E(f) = 2\int_M \Lambda \; d\omega^1 \wedge d\omega^2. \tag{2.10}$$

Por outro lado, a área é dada por

$$\acute{A}rea(f(M)) = \int_M dV = \int_M \sqrt{\det(f^*g)} d\omega^1 \wedge d\omega^2,$$

$(f^*g)_{ij} = \langle df(E_i), df(E_j)\rangle$. Então desde que $\det(f^*g) = \Lambda^2$, usando (2.10) é fácil ver que

$$\acute{A}rea(f(M)) = \int_M \Lambda \; d\omega^1 \wedge d\omega^2 = \frac{1}{2}E(f).$$

□

Entre as várias ferramentas que usou Urbano, alguns só estão disponíveis no caso específico quando M é uma superfície; a fórmula de Gauss-Bonnet e o resultado de Almgrem estão disponíveis apenas em dimensão dois e não permitem que a prova seja diretamente generalizada para dimensões mais elevadas.

Teorema 2.2.2.5 (Urbano,1990)**.** *Seja M uma superfície mínima compacta, orientável e não totalmente geodésica em S^3. Então ind $(M) \geq 5$, têm-se a igualdade se, e somente se, M é o Toro de Clifford.*

A prova vai ser divida em três partes. Primeiro, argumentamos que o ind(M) ≥ 5 por mostrar que -2 é um autovalor de L e construir um autoespaço correspondente ao autovalor -2. Usando o fato que M é assumido como não totalmente geodésico, mostra-se que este autoespaço tem dimensão 4. Desde que o primeiro autovalor de L é simples, isso nos dá o resultado desejado. Logo, assuma-se que ind $(M) = 5$. Os cálculos anteriores ainda se mantem, portanto o segundo autovalor é -2 e todos os demais são não negativos. Usamos o Hersch trick, para construir a transformação conformal F_g de M para os quais as funções dos componentes de $F_g \circ \Phi$ são ortogonais para a primeira autofunção, onde $\Phi : M \to S^3$ é uma imersão mínima. Mostra-se o fato que a igualdade se tem em (1.13), e usando o lema 2.1.1.1 obtêm-se que $\|A\|^2 \equiv 2$. Segue-se então a partir do teorema 2.2.1.2

que M deve ser o toro de Clifford. O passo final nesta prova é mostrar que o toro de Clifford tem índice 5, mas isso segue do lema 2.2.1.3.

Tal como acontece com o resultado da classificação de Simons, os detalhes da prova será estabelecida através de uma seqüência de lemas.

Demonstração. Seja $\Phi : M \to S^3$ uma imersão mínima, N denota o campo de vetores normal a M, e seja $\nabla, \overline{\nabla}$ e D denota os operadores de diferenciação covariante em M, S^3 e $\mathbb{R}^4$ respectivamente $\big(\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y\big)^{T_M}),\ \overline{\nabla}_X Y = (D_X Y)^{T_{S^3}})$.

Lema 2.2.2.6. *Para qualquer vetor $a \in \mathbb{R}^4$, a função $f_a = \langle a, N\rangle$ é uma autofunção de L com autovalor -2.*

Demonstração. Seja $p \in M$ e $\{E_1, E_2\}$ uma base ortonormal em TM (definido em uma vizinhança de p) tal que $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$ para $i, j = 1, 2$. Então $\{E_1, E_{2,} N, \Phi\}$ é uma base ortonormal para $\mathbb{R}^4$, e

$$\Delta_M f_a = \sum_{i=1}^{2} E_i E_i(f_a) - \nabla_{E_i} E_i f_a = \sum_{i=1}^{2} E_i E_i \langle a, N\rangle$$

note que este cálculo é avaliada em p, o qual vai ser suprimido por conveniência. Desde que $a \in \mathbb{R}^4$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a métrica em $\mathbb{R}^4$, assim por compatibilidade da métrica de $\mathbb{R}^4$ com D têm-se

$$\Delta_M f_a = \sum_{i=1}^{2} E_i \langle (D_{E_i} N, a) + \langle N, D_{E_i} a\rangle\rangle = \sum_{i=1}^{2} E_i \langle D_{E_i} N, a\rangle ,$$

e

$$D_{E_i} N = \langle D_{E_i} N, E_1\rangle E_1 + \langle D_{E_i} N, E_2\rangle E_2 + \langle D_{E_i} N, N\rangle N + \langle D_{E_i} N, \Phi\rangle \Phi.$$

Desde que N é um vetor unitário, $\langle D_{E_i} N, N\rangle = \frac{1}{2} E_i \langle N, N\rangle = 0$. Também, se X e Y são campos de vetores ortogonais em $\mathbb{R}^4$, então pela compatibilidade da conexão com o produto interno obtêm-se que para qualquer campo de vetores Z em $\mathbb{R}^4$.

$$\langle D_Z X, Y\rangle = Z \langle X, Y\rangle - \langle X, D_Z Y\rangle = - \langle X, D_Z Y\rangle . \tag{2.11}$$

Portanto $\langle D_{E_i} N, \Phi\rangle = - \langle N, D_{E_i} \Phi\rangle = - \langle N, E_i\rangle = 0$, assim

$$\begin{aligned} D_{E_i} N &= \sum_{j=1}^{2} \langle D_{E_i} N, E_j\rangle E_j = -\sum_{j=1}^{2} \langle D_{E_i} N, E_j\rangle E_j \\ &= -\sum_{j=1}^{2} h_{ij} E_j, \end{aligned} \tag{2.12}$$

onde $h_{ij} = \left\langle N, \overline{\nabla}_{E_i} E_j \right\rangle = \langle N, D_{E_i} E_j \rangle$ é a segunda forma fundamental de M em S^3. Então,

$$\begin{aligned} \Delta_M f_a &= -\sum_{i,j=1}^{2} E_i \left(h_{ij} \langle E_j, a \rangle \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{2} E_i(h_{ij}) \langle E_j, a \rangle + h_{ij} \langle D_{E_i} E_j, a \rangle + 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Logo, da equação de Codazzi (proposição 1.1.2.2), têm se $R_{\mathbb{R}^4} = 0$,

$$0 = \langle R_{\mathbb{R}^4}(E_i, E_j)E_k, N \rangle = \left\langle (D_{E_j}\overline{A})(E_i, E_k), N \right\rangle - \left\langle (D_{E_i}\overline{A})(E_j, E_k), N \right\rangle, \tag{2.14}$$

onde $\overline{A}$ é a segunda forma fundamental em M como uma subvariedade de $\mathbb{R}^4$ e

$$\begin{aligned} \left\langle (D_{E_i}\overline{A})(E_j, E_k), N \right\rangle &= E_i \left\langle \overline{A}(E_j, E_k), N \right\rangle - \left\langle \overline{A}(\nabla_{E_i} E_j, E_k), N \right\rangle \\ &\quad - \left\langle \overline{A}(E_j, \nabla_{E_i} E_k, N \right\rangle - \left\langle \overline{A}(E_j, E_k), \overline{A}(E_i, N) \right\rangle. \end{aligned}$$

De (2.12) mostra-se que $D_{E_i} N$ é tangente a M, assim

$$\left\langle \overline{A}(E_j, E_k), \overline{A}(E_i, N) \right\rangle = \left\langle (D_{E_j} E_k)^{\perp}, (D_{E_i} N)^{\perp} \right\rangle = \left\langle (D_{E_j} E_k)^{\perp}, 0 \right\rangle = 0.$$

Além disso, $\nabla_{E_i} E_j = 0$ (em p) para todo i, j, e

$$E_i(h_{jk}) = E_i \left\langle D_{E_j} E_k, N \right\rangle = E_i \left\langle \left(D_{E_j} E_k \right)^{\perp}, N \right\rangle = \left\langle (D_{E_i}\overline{A})(E_j, E_k), N \right\rangle,$$

logo (2.14) torna-se

$$E_i(h_{jk}) = \left\langle \left(D_{E_i}\overline{A} \right)(E_j, E_k), N \right\rangle = \left\langle \left(D_{E_j}\overline{A} \right)(E_i, E_k), N \right\rangle = E_j(h_{ik}).$$

A equação de Codazzi e a propriedade simétrica da segunda forma fundamental implica que

$$E_i(h_{ij}) = E_i(h_{ji}) = E_j(h_{ii}). \tag{2.15}$$

Portanto,

$$\sum_{i,j=1}^{2} E_i(h_{ij}) \langle E_j, a \rangle = \sum_{i,j=1}^{2} E_j(h_{ji}) \langle E_j, a \rangle = \sum_{j=1}^{2} E_j(h_{11} + h_{22}) \langle E_j, a \rangle = 0,$$

desde que M é mínima e portanto tem curvatura media zero pelo lema 1.1.3.3. Assim, de (2.13) obtêm-se

$$\Delta_M f_a = -\sum_{i,j}^{2} h_{ij} \langle D_{E_i} E_j, a \rangle. \tag{2.16}$$

Então,

$$\begin{aligned} D_{E_i}E_j &= \langle D_{E_i}E_j, E_1\rangle E_1 + \langle D_{E_i}E_j, E_2\rangle E_2 + \langle D_{E_i}E_j, N\rangle N + \langle D_{E_i}E_j, \Phi\rangle \Phi \\ &= \langle D_{E_i}E_j, N\rangle N + \langle D_{E_i}E_j, \Phi\rangle \Phi, \end{aligned} \tag{2.17}$$

desde que $\langle D_{E_i}E_j, E_k\rangle = \langle \nabla_{E_i}E_j, E_k\rangle = 0$. Usando (2.11) mostra-se que

$$\langle D_{E_i}E_j, \Phi\rangle = -\langle E_j, D_{E_i}\Phi\rangle = -\langle E_j, E_i\rangle = -\delta_{ji}, \tag{2.18}$$

e assim (2.16) torna-se

$$\begin{aligned} \Delta_M f_a &= -\sum_{ij}^{2} h_{ij}(h_{ij}\langle N, a\rangle - \delta_{ji}\Phi) \\ &= -\|A\|^2 f_a + \left(\sum_{i=1}^{2} h_{ii}\right)\langle \Phi, a\rangle \\ &= -\|A\|^2 f_a, \end{aligned}$$

novamente utilizando a minimalidade de M e o lema 1.1.3.3. Consequentemente,

$$Lf_a - 2f_a = (\Delta_M f_a + \|A\|^2 f_a + 2f_a) - 2f_a = (-\|A\|^2 + \|A\| + 2 - 2)f_a = 0.$$

□

O lema 2.2.2.6 e a bilinearidade da métrica implica que $V = \{f_a \mid a \in \mathbb{R}^4\}$ forma um subespaço do autoespaço de L associado ao autovalor -2, e claramente $\dim V \leq 4$.

Se $\dim V \leq 3$, então o núcleo da transformação linear $\mathbb{R}^4 \longrightarrow V$, definida $a \to f_a$ é não vazio, e assim existe $a \in \mathbb{R}^4$ não nulo para o qual $f_a \equiv 0$.

Lema 2.2.2.7. *Se $a \in \mathbb{R}^4$, $a \neq \overrightarrow{0}$, tal que $f_a \equiv 0$, então $g = \langle \Phi, a\rangle$ satisfaz $Hess_M g(\cdot,\cdot) = -g\langle \cdot,\cdot\rangle$.*

Demonstração. Seja $\{E_1, E_2\}$ uma base ortonormal em TM. Então

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}_M g(E_i, E_j) &= E_iE_j(g) - (\nabla_{E_i}E_j)(g) \\ &= E_iE_j\langle \Phi, a\rangle \\ &= E_i(\langle D_{E_i}\Phi, a\rangle + 0) \\ &= E_i\langle E_i, a\rangle \\ &= \left\langle D_{E_j}E_i, a\right\rangle. \end{aligned}$$

De (2.17) e (2.18) lembre-se que

$$D_{E_i}E_j = h_{ij}N - \delta_{ij}\Phi,$$

e assim

$$\mathrm{Hess}_M g(E_i, E_j) = h_{ij}\langle N, a\rangle - \delta_{ij}\langle \Phi, a\rangle = -\delta_{ij}g$$

desde que $f_a = \langle N, a\rangle = 0$ pela escolha de a. O resultado desejado segue da bilinearidade do Hess_M e do produto interno. □

A partir do lema 2.2.2.2, têm-se que o M é isométrica a uma esfera unitária o g=0. Desde que Almgrem mostrou que todas as esferas mínimas em S^3 são totalmente geodésicas (lema 2.2.2.1), ou seja g=0. Fazendo uma rotação em M (no caso que seja necessário) através de uma isometria $r : S^3 \to S^3$ de modo que a coincide com a base vetorial $e_4 \in \mathbb{R}^4$, assim

$$0 = g = \left\langle \widetilde{\Phi}, a \right\rangle = \left\langle \widetilde{\Phi}, e_4 \right\rangle = \widetilde{\Phi}_4,$$

onde $\widetilde{\Phi} = r \circ \Phi$ e $\widetilde{\Phi} = (r \circ \Phi)_4$ é a quarta componente da função Φ. Portanto,

$$1 = \widetilde{\Phi}_1^2 + \widetilde{\Phi}_2^2 + \widetilde{\Phi}_3^2 + \widetilde{\Phi}_4^2 = \widetilde{\Phi}_1^2 + \widetilde{\Phi}_2^2 + \widetilde{\Phi}_3^2,$$

logo $\Phi(M)$ esta no equador de S^3, então é totalmente geodésica. Daqui, dim $V \not\leq 3$ e portanto dim $V = 4$.

Desde que o primeiro autovalor de L é simples, conclui-se que não pode ser -2 e que ind $(M) \geq 5$.

Agora, se ind $(M) = 5$, então o segundo autovalor de L é -2. Seja $\rho > 0$ será uma autofunção para el primeiro autovalor λ_1.

Lema 2.2.2.8. *Existe uma transformação F_g de S^3 tal que*

$$\int_M \rho \cdot (F_g \circ \Phi)_i dA = 0, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

Demonstração. A prova é feita a partir da exposição de Montiel e Ross encontrada em [11](pag.154). Considera-se as transformações conformes de S^3 da forma

$$F_g(p) = \frac{p + (\mu\langle p, g\rangle + \lambda)g}{\lambda(1 + \langle p, g\rangle)}, \tag{2.19}$$

onde $\lambda = (1 - \|g\|^2)^{\frac{1}{2}}$, $\mu = (\lambda - 1)\|g\|^{-2}$ e $g \in B^4$ é fixo.

A coleção desses transformações conformes podem ser estendidas para $\overline{B}^4 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\| \leq 1\}$ deixando $g \in \overline{B}^4$. Note que se p é tal que $\langle p, g\rangle \neq -1$, então

$$\begin{aligned} F_g(p) &= \frac{p + \lambda(\|g\|^{-2}\langle p, g\rangle + 1)g - \langle p, g\rangle \|g\|^{-2} g}{\lambda(1 + \langle p, g\rangle)} \\ &= g + \sqrt{1 - \|g\|^2}\left(\frac{p - \langle p, g\rangle g}{1 + \langle p, g\rangle}\right) \\ &= g. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Considere a aplicação $H : \overline{B^4} \to \overline{B^4}$ cujas funções componente são dadas por

$$H_i(g) = \frac{1}{\int_M \rho \, dA} \int_M \rho \cdot (F_g \circ \Phi)_i \, dA,$$

para $i = 1, 2, 3, 4$. A partir de

$$\begin{aligned} \|H(g)\| &= \frac{1}{|\int_M \rho \, dA|} \left\| \int_M \rho \cdot (F_g \circ \Phi) \, dA \right\| \\ &\leq \frac{1}{\int_M \rho \, dA} \int_M |\rho| \cdot \|F_g \circ \Phi\| \, dA \\ &= \frac{1}{\int_M \rho \, dA} \int_M \rho \, dA = 1 \quad (\text{ja que } \rho \geq 0, \|F_g \circ \Phi\| = 1, \end{aligned}$$

e se $g \in S^3$, (2.20) mostra que $F_g = g$ exceto em um conjunto de medida zero, assim

$$H(g) = \frac{1}{\int_M \rho \, dA} \int_M \rho \cdot g \, dA = g.$$

Assim H aplica $\overline{B^4}$ em se mesmo e é a aplicação identidade no bordo $\partial \overline{B^4} = S^3$, então por um argumento topológico H será sobrejetiva. Portanto existe $g \in B^4$ tal que $H(g) = 0$ e assim

$$\int_M \rho \cdot (F_g \circ \Phi) \, dA = 0.$$

Junto o lema 2.2.2.8 e (1.13) implicam que

$$Q((F_g \circ \Phi)_i, (F_g \circ \Phi)_i) \geq 2 \cdot \int_M (F_g \circ \Phi)_i^2 \, dA \tag{2.21}$$

para $i = 1, 2, 3, 4$, com a igualdade se, e somente se, $(F_g \circ \Phi)_i$ seja um autovalor de L associado ao autovalor -2.

Note que $(F_g \circ \Phi)_i \neq 0$; se para algum i temos $(F_g \circ \Phi)_i \equiv 0$, então como argumentamos antes $F_g \circ \Phi(M)$ pertence a um equador de S^3. Portanto, existe um vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^4$ tal que $F_g \circ \Phi(M)$ encontra-se na hipersuperficie ortogonal a v, e assim M encontra-se na hipersuperficie ortogonal a $F_g^{-1}(v)$ (desde que F_g preserva ângulos) e portanto pertence no equador de S^3 e é totalmente geodésica. Isto significa que, se a igualdade (2.21)se consegue, então pode-se dividir ambos lados da igualdade por $\|(F_g \circ \Phi)_i\|^2_{L^2} \neq 0$ e aplicando (1.13) para ter as funções componentes L^2-normalizados, e portanto a desnormalização de funções componentes, são autofunções com autovalor -2.

Portanto,

$$\int_M \|\nabla(F_g \circ \Phi)_i\|^2 - (\|A\|^2 + 2)(F_g \circ \Phi)_i^2 \; dA \geq -2 \int_M (F_g \circ \Phi)_i^2 \; dA$$

e assim

$$\int_M \|\nabla(F_g \circ \Phi)_i\|^2 \; dA \geq \int_M \|A\|^2 \,(F_g \circ \Phi)_i^2 \; dA,$$

que dá

$$\begin{aligned} \int_M \|\nabla(F_g \circ \Phi)_i\|^2 \; dA &= \sum_{i=1}^{4} \int_M \|\nabla(F_g \circ \Phi)_i\|^2 \; dA \\ &\geq \sum_{i=1}^{4} \int_M \|A\|^2 \,(F_g \circ \Phi)_i^2 \; dA = \int_M \|A\|^2 \; dA, \end{aligned}$$

desde que $\sum\limits_{i=1}^{4} (F_g \circ \Phi)_i^2 \equiv 1$. □

Lema 2.2.2.9.

$$2A(f(M)) = \int_M \|\nabla(F_g \circ \Phi)\|^2 \; dA + 2 \int_M \left(\frac{\langle N, g\rangle}{1 + \langle \Phi, g\rangle} \right)^2 \; dA,$$

onde $A(f(M))$ é a área de M.

Demonstração. Para $g \in \overline{B^4}$, seja F_g uma transformação conforme de S^3 como em (2.19). Então, refere-se a F_g como uma aplicação $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, portanto obtêm-se que a jth componente de $dF_g(\frac{\partial}{\partial x^i})$ é

$$\begin{aligned} \left(dF_g \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right)_j &= \frac{1}{\lambda} \frac{[(\delta_{ij} + \mu g_i g_j)(\langle p, g\rangle + 1) - (p_j + (\mu \langle p, g\rangle + \lambda) g_j) g_i]}{(\langle p, g\rangle + 1)^2} \\ &= (\langle p, g\rangle + 1)^{-2} \lambda^{-1} [\delta_{ij} \langle p, g\rangle + \delta_{ij} + g_i g_j (\mu - \lambda) - p_j g_i] \\ &= (\langle p, g\rangle + 1)^{-2} \lambda^{-2} [\lambda \delta_{ij} \langle p, g\rangle + \lambda \delta_{ij} + g_i g_j (1 - \lambda) \|g\|^{-2} - \lambda p_j g_i], \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} dF_g(v) &= v_i dF_g \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{4} v_i (\langle p, g\rangle + 1)^{-2} \lambda^{-2} [\lambda \delta_{ij} \langle p, g\rangle + \lambda \delta_{ij} + g_i g_j (1 - \lambda) |g|^{-2} - \lambda p_j g_i] \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= (\langle p, g\rangle + 1)^{-2} \lambda^{-2} [\lambda v \langle p, g\rangle + \lambda v + \langle v, g\rangle g (1 - \lambda) \|g\|^{-2} - \lambda p \langle v, g\rangle]. \end{aligned}$$

A partir disto, obtêm-se para $v, w \in T_pS^3$,

$$\begin{aligned}
\langle dF_g(v), dF_g(w)\rangle &= (\langle p,g\rangle+1)^{-4}\lambda^{-4}[\lambda(\langle p.g\rangle+1)\lambda(\langle \lambda p.g\rangle+1)\langle v,w\rangle \\
&+\langle w,g\rangle(1-\lambda)\|g\|^{-2}\langle v,g\rangle-\lambda\langle w,g\rangle\langle p,v\rangle\} \\
&+\langle v,g\rangle(1-\lambda)\|g\|^{-2}\{\lambda(\langle p,g\rangle+1)\langle g,w\rangle \\
&+\langle w,g\rangle(1-\lambda)\|g\|^{-2}\langle g,g\rangle\lambda\langle w,g\rangle\langle p,g\rangle\} \\
&-\lambda\langle v,g\rangle\{\lambda(\langle p,g\rangle+1)\langle p,w\rangle \\
&+\langle w,g\rangle(1-\lambda)\|g\|^{-2}\langle p,g\rangle-\lambda\langle w,g\rangle\langle p,p\rangle\}] \\
&= (\langle p,g\rangle+1)^{-4}\lambda^{-4}[\langle v,w\rangle\lambda^2(\langle p,g\rangle+1)^2 \\
&+\langle v,g\rangle\langle w,g\rangle\{\lambda(\langle p,g\rangle+1)(1-\lambda)\|g\|^{-2} \\
&+(1-\lambda)\|g\|^{-2}-\lambda(1-\lambda)\|g\|^{-2}\langle p,g\rangle+\lambda^2\|p\|^2\}] \\
&= \frac{1-\|g\|^2}{(\langle p,g\rangle+1)^2}\langle v,w\rangle.
\end{aligned}$$

Assim, para uma imersão isométrica $\psi : M \to S^3$, a área de $F_g \circ \psi$, $\acute{A}rea(g)$, é dada por

$$\acute{A}rea(g) = \int_M \frac{1-\|g\|^2}{(\langle \psi,g\rangle+1)^2}\, dA. \tag{2.22}$$

Para $g \in \overline{B^4}$ fixo, defina-se $f : M \to \mathbb{R}$ por $f = \langle \psi, g\rangle + 1$. Então, se $\{E_1, E_2\}$ é uma base ortonormal para TM tal que $\nabla_{E_i}E_j|_p = 0$, em p têm-se

$$\begin{aligned}
\Delta_M \log f &= \sum_{i=1}^{2} E_iE_i(\log f) = \sum_{i=1}^{2} E_i\left[\frac{1}{f}E_i(f)\right] \\
&= -\frac{1}{f^2}[E_1(f)^2+E_2(f)^2]+\frac{1}{f}\Delta_M(f) \\
&= \frac{1}{f^2}[-E_1(f)^2-E_2(f)^2+f\Delta_M(f)].
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Contudo,

$$E_i(f) = E_i(\langle \psi,g\rangle+1) = \langle D_{E_i}\psi, g\rangle + 0 + 0 = \langle E_i, g\rangle. \tag{2.24}$$

Agora $g = g^N + g^T$, onde g^N é a componente normal de g para M (e tangente a S^3) e g^T é a componente tangente a M, e $g^T = \langle g, E_1\rangle E_1 + \langle g, E_2\rangle E_2$. Portanto

$$\|g^T\|^2 = \langle g, E_1\rangle^2 + \langle g, E_2\rangle^2. \tag{2.25}$$

Portanto,

$$\Delta_M f = \sum_{i=1}^{2} E_iE_i\langle \psi, g\rangle = \sum_{i=1}^{2}\langle D_{E_i}D_{E_i}\psi, g\rangle = \langle \Delta_M\psi, g\rangle. \tag{2.26}$$

Tendo em conta isto e usando o lema 2.1.1.1 obtêm-se

$$\begin{aligned} f\Delta_M(f) &= (\langle\psi, g\rangle + 1)\langle\Delta_M\psi, g\rangle \\ &= (\langle\psi, g\rangle + 1)\langle -2\psi + H, g\rangle \\ &= -2\langle\psi, g\rangle^2 - 2\langle\psi, g\rangle + f\langle H, g\rangle, \end{aligned} \tag{2.27}$$

onde H é o vetor de curvatura media de M em S^3. Logo, a partir de (2.23),(2.24), (2.25) e (2.27)conclui-se

$$\Delta_M \log f = f^{-2}[-2\langle\psi, g\rangle^2 - 2\langle\psi, g\rangle + f\langle H, g\rangle - \left\|g^T\right\|^2]. \tag{2.28}$$

Desde que $\left\|g^T\right\|^2 = \|g\|^2 - \left\|g^N\right\|^2 - \langle g, \psi\rangle^2$ simplifica-se (2.28)

$$\begin{aligned} \Delta_M \log f &= f^{-2}[-\langle\psi, g\rangle^2 - 2\langle\psi, g\rangle + f\langle H, g\rangle - \|g\|^2 - \left\|g^N\right\|^2] \\ &= f^{-2}[-(1 + \langle\psi, g\rangle)^2 + f\langle H, g\rangle + \left\|g^N\right\|^2 + (1 - \|g\|^2)] \\ &= -1 + \frac{1 - \|g\|^2}{f^2} + \frac{f\langle H, g\rangle + \left\|g^N\right\|^2}{f^2} \end{aligned} \tag{2.29}$$

Portanto, usando (1.14) e (2.22) obtêm-se

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M \Delta_M \log f \, dA = \int_M -1 + \frac{1 - \|g\|^2}{f^2} + \frac{f\langle H, g\rangle + \left\|g^N\right\|^2}{f^2} \, dA \\ &= -\acute{A}rea(f(M)) + \acute{A}rea(g) + \int_M \frac{f\langle H, g\rangle + \left\|g^N\right\|^2}{f^2} \, dA. \end{aligned}$$

Se ψ é também uma imersão mínima, então $H \equiv 0$ e a equação se simplifica a

$$\acute{A}rea(f(M)) = \acute{A}rea(g) + \int_M \frac{\left\|g^N\right\|^2}{f^2} \, dA. \tag{2.30}$$

Assim, para nossa imersão mínima $\Phi : M \to S^3$, mantem-se (2.30). Logo, desde que F_g é conformal, do lema 2.2.2.4. têm-se que a área, $\acute{A}rea(g)$, é igual a metade da energia de $F_g \circ \Phi$ e assim

$$2\acute{A}rea(f(M)) = \int_M \|\nabla(F_g \circ \Phi)\|^2 \, dA + 2\int_M \frac{\left\|g^N\right\|^2}{f^2} \, dA.$$

□

A partir do lema 2.2.2.9 é fácil ver que

$$2\acute{A}rea(f(M)) \geq \int_M \|\nabla(F_g \circ \Phi)\|^2 \, dA \geq \int_M \|A\|^2 \, dA, \tag{2.31}$$

tendo a igualdade se, e somente se, $\langle N, g\rangle \equiv 0$ e consegue-se a igualdade em (2.21)

Lema 2.2.2.10. *Se K é o vetor curvatura de Gauss de M, então*

$$\|A\|^2 = 2 - 2K.$$

Demonstração. Seja $\{E_1, E_2\}$ como acima, então

$$\begin{aligned}
\|A\|^2 &= \sum_{i,j=1}^{2} \langle A(E_i, E_j), A(E_i, E_j)\rangle = \sum_{i,j=1}^{2} \left\langle \left(\overline{\nabla}_{E_i} E_j\right)^N, N\right\rangle^2 \\
&= h_{11}^2 + h_{12}^2 + h_{21}^2 + h_{22}^2,
\end{aligned}$$

onde $h_{ij} = \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} E_j, N\right\rangle$. Ja que M é mínima e A é simétrica simplifica-se a

$$\|A\|^2 = 2(h_{12}^2 - h_{11}h_{22}). \tag{2.32}$$

Além disso, usando a equação do lema de Gauss, obtêm-se

$$\begin{aligned}
h_{11}h_{22} &= \langle A(E_1, E_1), N\rangle \langle A(E_2, E_2), N\rangle \\
&= \langle A(E_1, E_1), \langle A(E_2, E_2), N\rangle N\rangle \\
&= \langle A(E_1, E_1), A(E_2, E_2)\rangle \\
&= \left\langle \overline{R}(E_1, E_2)E_1, E_2\right\rangle - \langle R(E_1, E_2)E_1, E_2\rangle + \langle A(E_1, E_2), A(E_1, E_2)\rangle \\
&= \left\langle \overline{R}(E_1, E_2)E_1, E_2\right\rangle - \langle R(E_1, E_2)E_1, E_2\rangle + h_{12}^2.
\end{aligned}$$

Portanto, usando isto junto a (2.32) conclui-se

$$\begin{aligned}
2(h_{12}^2 - h_{11}h_{22}) &= 2\left(\frac{\left\langle \overline{R}(E_1, E_2)E_2, E_2\right\rangle}{\|E_1\|^2 \|E_2\|^2 - \langle E_1, E_2\rangle^2} - \frac{\langle R(E_1, E_2)E_2, E_2\rangle}{\|E_1\|^2 \|E_2\|^2 - \langle E_1, E_2\rangle^2}\right) \\
&= 2 - 2K.
\end{aligned}$$

□

A partir da formula de Gauss-Bonnet (Lema 2.2.2.3) têm-se

$$\int_M K \, dA = 2\pi \cdot \chi(M) = 2\pi(2 - 2\gamma),$$

onde γ é o género de M. Portanto, a partir de (2.31) e do lema 2.2.2.10 obtêm-se

$$\begin{aligned}
2\acute{A}rea(f(M)) &\geq \int_M \|A\|^2 \, dA = \int_M 2 - 2K \, dA \\
&= 2\acute{A}rea(f(M)) - 2\int_M K \, dA \\
&= 2\acute{A}rea(f(M)) - 4\pi(2 - 2\gamma),
\end{aligned}$$

e portanto $\gamma \leq 1$. Novamente, pelo resultado de Almgren (Lema 2.2.2.1) mostra-se que se $\gamma = 0$, então M é totalmente geodésica, por isto se deve ter $\gamma = 1$ e a igualdade nas desigualdades de acima. Isto é, $\langle N, g\rangle \equiv 0$ e mantendo a igualdade em (2.21).

Se $f = \langle \Phi, g\rangle$, então segue-se do lema 2.2.2.7 que Hess$f(\cdot,\cdot) = -f\langle \cdot,\cdot\rangle$. Usando o mesmo argumento, conclui-se que $g = 0$ e assim $F_g \circ \Phi = \Phi$. Portanto, tendo a igualdade em (2.21) implica que as funções componentes Φ_i, $i = 1, 2, 3, 4$, são autofunções de L com autovalor -2. Daqui

$$L\Phi_i - 2\Phi_i = 0 \text{ para } i = 1, 2, 3, 4,$$

assim

$$\Delta_M \Phi_i = -\|A\|^2 \Phi_i \text{ para } i = 1, 2, 3, 4.$$

No entanto, a partir do Lema 2.1.1.1 conhecemos que $\Phi : M^2 \to S^3$ é uma imersão mínima se, e somente se, $\Delta_M \Phi = -2\Phi(\Delta_M \Phi_i = -2\Phi_i$ para $i = 1, 2, 3, 4)$.

Portanto

$$\Phi_i(\|A\|^2 - 2) = 0 \text{ para algum } i = 1, 2, 3, 4,$$

e desde que para qualquer $p \in M$ existe então um i tal que $\Phi_i(p) \neq 0$, temos de ter que $\|A\|^2 \equiv 2$. Pelo teorema 2.2.1.2. isto significa que M seré o toro de Clifford.

Segue-se a partir do lema 2.2.1.3. que o índice do toro de Clifford é 5. $\square$

Capítulo 3

Hipersuperficies mínimas em $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$

Neste capítuo, estuda-se a estabilidade e o índice de superfícies mínimas completas de S^3 e seu quociente $S^2 \times S^1$. Os principais resultados deste capítulo podem ser resumidos nos seguintes:

O índice para qualquer superfície mínima completa e não compacta de S^3e $S^2 \times S^1$ é infinito.

O mergulho totalmente geodésico $S^1 \times S^1 \subset S^2 \times S^1$ é a única superfície mínima compacta orientável de $S^2 \times S^1$ com índice um.

3.1 Campos de vetores harmônicos em superfícies

Seja Σ uma superfície Riemanniana orientável, um campo de vetores X em Σ é harmônico se a 1-forma associada ω_X é harmônica. Isto significa que div $(X) = 0$ e ∇X é um tensor simétrico.

Se Δ^Σ é o laplaciano em Σ agindo em campos de vetores e X é um campo de vetores harmônico, verifica-se

$$\Delta^\Sigma X = KX,$$

onde K é a curvatura de Gauss de Σ. Também, se J é uma estrutura complexa na superfície de Riemann Σ, então X é harmônica se, e somente se, JX é harmônica. Seja $H(\Sigma)$ o espaço dos campos de vetores harmônicos quadrado integráveis sobre Σ. Então, se Σ é compacto de gênero g, temos que dim $H(\Sigma) = 2g$. Se Σ é não compacto, então dim $H(\Sigma) \geq 2$ $gen\hat{e}ro(\Sigma)$, incluindo o caso onde o gênero de Σ é infinito.

Se Σ é uma superfícies Riemanniana não orientável e $(\widetilde{\Sigma}, \tau)$ é a sua cobertura orientada

2-fold, onde τ é a mudança de folha, então qualquer campo de vetores harmônico X em $\widetilde{\Sigma}$ decompõe-se como $X = X^+ + X^-$,onde X^+ e X^- são campos de vetores harmônicos que satisfazendo $\tau_* X^+ = X^+$, $\tau_* X^- = -X^-$ e $JX^- = X^+$. Neste caso, $H(\widetilde{\Sigma}) = H^+(\widetilde{\Sigma})$ $\oplus H^-(\widetilde{\Sigma})$, onde $H^{\pm}(\widetilde{\Sigma}) = \{X \in H(\widetilde{\Sigma}) | \tau_* X = \pm X\}$ e $J : H^+(\widetilde{\Sigma}) \to H^-(\widetilde{\Sigma})$ é um isomorfismo.

3.2 O operador de Jacobi

Como mencionado no capítulo 1, a imersão Φ é chamada 2-sided se $T^{\perp}\Sigma$ é trivial, isto é, existe um campo vetorial normal unitário global N, caso contrario, quando $T^{\perp}\Sigma$ é não trivial, a imersão é chamada 1-sided. Quando a variedade ambiente M é orientável, Φ é 2-sided se, e somente se, Σ é orientável. Esta propriedade não é verdade quando M é não orientável.

Se Φ é 2-sided, as seções do fibrado normal pode ser identificados com funções na superfície na seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(T^{\perp}\Sigma\right) &\equiv C^{\infty}(\Sigma) \\ \eta &\equiv f, \qquad \text{se } \eta = fN, \end{aligned}$$

onde N é uma seção normal unitária global para Φ. Neste caso, 'e claro que $\Delta^{\perp}\eta = (\Delta f)N$, portanto, o operador de Jacobi torna-se um operador Schrodinger agindo em funções $L : C^{\infty}(\Sigma) \to C^{\infty}(\Sigma)$, dado por

$$L = \Delta + |\sigma|^2 + Ric(N) = \Delta - K + (|\sigma|^2 + \rho)/2,$$

onde K é a curvatura de Gauss de Σ, ρ é a curvatura escalar de M e utiliza-se a equação de Gauss de Φ para obter a segunda expressão de L.

Onde M é uma esfera 3-dimensional S^3, o operador de Jacobi é dado por

$$L = \Delta^{\perp} + |\sigma|^2 + 2,$$

enquanto se M é o quociente $S^2 \times S^1(r)$, operador de Jacobi é

$$L = \Delta^{\perp} + |\sigma|^2 + |\xi^{\top}|^2,$$

onde $S^1(r)$ é o círculo de raio r, ξ é um campo de vetores unitário paralelo na variedade ambiente e $\top$ representa a componente tangencial.

Mostra-se algumas informações sobre superfícies mínimas, as quais serão utilizados depois. Seja $\Phi = (\phi, \psi) : \Sigma \to S^2 \times S^1(r)$ é uma imersão mínima de uma superfície Σ e denota-se $\langle\ ,\rangle$ a métrica induzida. Se $\overline{R}$ denota o operador curvatura de uma 3-variedade, obtêm-se $\overline{R}(e_1, e_2, e_2, e_1) = 1 - |\xi^{\intercal}|^2$, onde $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonormal em Σ. Assim, a equação de Gauss de Φ pode ser escrita como

$$K = 1 - |\xi^{\intercal}|^2 - \frac{|\sigma|^2}{2}.$$

Se $\phi : \Sigma \to S^2$ é uma isometria local. Neste caso, Σ é um *slices*. A equação de Gauss diz que os *slices* são superfícies totalmente geodésicas.

Lema 3.2.1. *Seja $\Phi : \Sigma \to (M^3, \langle\ ,\rangle)$ é uma imersão mínima de uma superfície orientável Σ e X é um campo de vetores harmônico em Σ. Se $M = S^2 \times S^1(r)$, então*

$$\langle LX, X\rangle = \left(2 - (1 + \frac{1}{r^2})\, |\xi^{\intercal}|^2\right) \langle X, \xi\rangle^2,$$

onde L é o operador de Jacobi da imersão mínima 2-sided Φ e X será considerado como uma função em $\mathbb{R}^5$.

Demonstração. Considera-se $S^2 \times S^1(r) \subset \mathbb{R}^5$ e $\overline{\sigma}$ a segunda forma fundamental de M em $\mathbb{R}^5$, então

$$\nabla^0_v X = \nabla_v X + \sigma(v, X) + \overline{\sigma}(v, X),$$

e assim, usando (2.1)

$$\Delta^0 X = (K - |\sigma|^2/2)X + \langle \sigma, \nabla X\rangle N + \sum_{i=1}^{2}\{-\overline{A}_{\overline{\sigma}(e_i,X)}e_i + 2\overline{\sigma}(e_i, \nabla_{e_i}X + \sigma(e_i, X))\}_{i=1}$$

onde $\{e_1, e_2\}$ é um referencial ortonormal em Σ e $\overline{A}$ é o endomorfismo Weingarten de M em $\mathbb{R}^5$. Portanto,

$$LX = (\rho/2)X + 2\langle \sigma, \nabla X\rangle N + \sum_{i=1}^{2}\{-\overline{A}_{\overline{\sigma}(e_i,X)}e_i + 2\overline{\sigma}(e_i, \nabla_{e_i}X + \sigma(e_i, X))\}.$$

Utiliza-se as expressões da segunda forma fundamental de $M = S^2 \times S^1(r)$, para provar o lema. □

3.3 Resultados principais

Nesta seção apresenta-se alguns resultados que aparecem explicitamente no [6],[7]e [10] ou seguir a partir deles. Para completar, vamos próximo a descrevê-los.

Proposição 3.3.1 ([7]). *Seja* Σ *uma superfície Riemanniana orientável completa e* τ *uma isometria de* Σ *sem pontos fixos e com* $\tau^2 = Id$. *Seja* $L = \Delta + q$ *o operador de Schrödinger em* Σ *com* $q \circ \tau = q$ *e consideremos o operador*

$$L^- = L_{|C^\infty_-(\Sigma)} : C^\infty_-(\Sigma) \to C^\infty_-(\Sigma),$$

onde $C^\infty_-(\Sigma) = \{f \in C^\infty(\Sigma) | f \circ \tau = -f\}$. *Então* L^- *tem índice finito* k *se, e somente se, existe um subespaço* k*-dimensional* W *de* $L^2_-(\Sigma)$ *tendo uma base ortonormal* $\{v_1, ..., v_k\}$ *com* $Lv_i + \lambda_i v_i = 0$, $\lambda_i < 0$ *e* $Q(f) \geq 0$ *para qualquer função* $f \in C^\infty_0(\Sigma) \cap W^\perp$ *com* $f \circ \tau = -f$.

Teorema 3.3.2 ([6],[7],[10]). *Seja* Σ *uma superfície Riemanniana completa,* $L = \Delta - K + q$ *um operador de Schrödinger em* Σ*, onde* K *é a curvatura de Gauss de* Σ *e* $q \geq 0$.

1. *Se* Σ *é orientável e Índice*$(L) = 0$*, então: ou* Σ *é conformalmente equivalente à esfera* S^2 *ou ao plano complexo* $\mathbb{C}$*, ou* $q = 0$ *e* Σ *é um toro plano ou um cilindro plano.*

2. *Se* $q \geq c > 0$ *para alguma constante* c*, e existe um conjunto compacto* $C \subset \Sigma$ *tal que Índice*$(L) = 0$ *em* $\Sigma - C$*, então* Σ *é compacto.*

A partir daqui, que obtemos:

Corolário 3.3.3 ([7],[10]). *Se* $\Phi : \Sigma \to M^3$ *é uma imersão mínima 2-sided de uma superfíce não compacta e completa em uma variedade Riemanniana* M *com curvatura escalar* $p \geq c > 0$*, então Índice*$(\Phi) = \infty$.

Demonstração. Como Φ é 2-sided, o operador de Jacobi é o operador de Schrödinger $L = \Delta - K + (\rho + |\sigma|^2)/2$. Se o $ind(\Phi) < \infty$, a partir da proposição 1 em [7], existe um conjunto compacto $C \subset \Sigma$ tal que $\Sigma - C$ é estável. Logo, o resultado segue-se do teorema 3.3.2(2). $\square$

Corolário 3.3.4. *Seja* $\Phi : \Sigma \to M^3$ *uma imersão mínima 1-sided de uma superfície completa e não compacta* Σ *em uma variedade Riemanniana orientável* M *com curvatura escalar* $\rho \geq c > 0$. *Se o gênero da cobertura orientada 2-fold de* Σ *é finito, então o* $ind(\Phi) = \infty$.

Demonstração. Seja $(\widetilde{\Sigma}, \tau)$ uma cobertura orientável 2-fold de Σ com τ a mudança de folha em $\widetilde{\Sigma}$. Como o gênero de $\widetilde{\Sigma}$ é finito, o lema 9 em [14] implica que existe um subconjunto compacto $C \subset \Sigma$, tal que $\Sigma - C$ é orientável. Portanto, como M é orientável, $\Phi : \Sigma - C \to M$ é uma imersão 2-sided mínima, portanto operador de Jacobi em $\Sigma - C$ é $L = \Delta - K + (\rho + |\sigma|^2)/2$.

Se o ind(Σ) é finito, então o ind$(\Sigma - C)$ é finito também. Logo, a partir da proposição 1 em [7], existe um subconjunto compacto $K \subset \Sigma - C$, tal que $\Sigma - (C \cup K)$ é estável. Portanto, Σ é uma superfície completa e o operador de Schrodinger $L = \Delta - K + (\rho + |\sigma|^2)/2$ em Σ satisfaz que o ind$(L) = 0$ em $\Sigma - (C \cup K)$. O teorema 3.3.2,(2) diz que Σ deverá ser compacto. Isto prova o corolário. □

Portanto, para variedades 3-dimensionais com curvatura escalar $\rho \geq c > 0$, o caso restante para o estudo é quando a cobertura orientável 2-fold de uma superfície mínima 1-sided completa e não compacta tem gênero finito.

Teorema 3.3.5 ([20],teorema 2)**.** *Seja $\Phi : \Sigma \to M$ uma imersão mínima de uma superfície completa Σ em uma variedade Riemanniana M 3-dimensional. Se $M = S^2 \times S^1(r)$, $r \geq 1$ e Σ é não compacta, então $Ind(\Phi) = \infty$.*

Observação. Subvariedades diferenciáveis são modelados localmente no mergulho canônico R^k em R^n, identificando R^k com o subespaço

$$\{(x^1, ..., x^k, x^{k+1}, ..., x^n) : x^{k+1} = ... = x^n = 0\}$$

de $\mathbb{R}^n$. Em geral, se U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, um $k - slice$ de U é qualquer subconjunto da forma

$$S = \{(x^1, ..., x^k, x^{k+1}, ..., x^n) \in U : x^{k+1} = c^{k+1}, ..., x^n = c^n\}$$

para algumas constantes $c^{k+1}, ..., c^n$. Claramente um $k - slice$ é homeomorfico a um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^k$. (Às vezes, é conveniente considerar *slices* definido algum outro subconjunto das coordenadas iguais a constantes em vez de os últimos. O significado deve ser claro a partir do contexto.)

Seja M uma n-variedade diferenciável, e seja (U, φ) uma carta em M. Um subconjunto $S \subset U$ é um $k - slice$ de U se $\varphi(S)$ é um $k - slice$ de $\varphi(U)$. Um subconjunto $N \subset M$ é chamado uma subvariedade mergulhada de dimensão k (ou uma k-subvariedade mergulhada o uma subvariedade regular) de M se para cada ponto $p \in N$ existe uma carta (U, φ) para M tal que $p \in U$ e $U \cap N$ é um $k-$*slice* de U. Nesta situação, podemos chamar a carta (U, φ) uma carta *slice* para N em M, e as coordenadas correspondentes $(x^1, ..., x^n)$ são chamadas coordenadas *slice*.

Em Torralbo e Urbano classificaram as subvariedades mínimas compactas, estáveis do produto de duas esferas. No caso particular desta classificação, os autores obtenham que *os slices* $S^2 \times \{p\}$, $p \in S^1(r)$ são as únicas superfícies mínimas compactas, estáveis em $S^2 \times S^1(r)$. No seguinte resultado estuda-se o índice de uma superfície compacta de $S^2 \times S^1(r)$. Veamos

Teorema 3.3.6. *Seja M qualquer variedade Riemanniana e $\Phi = (\phi, \psi) : \Sigma \to S^m(r) \times M$ uma imersão mínima de uma n-variedade compacta Σ, com $n \geq 2$, satisfazendo ou $m \geq 3$ ou $m = 2$ e Φ é um hipersuperficie. Então, Φ é estável se, e somente se,*

1. *$\Sigma = S^m(r)$ e $\Phi(\Sigma)$ é um slice $S^m(r) \times \{q\}$ com q um ponto de M.*

2. *Σ é uma cobertura de M e $\Phi(\Sigma)$ é um slice $\{p\} \times M$ com p um ponto de $S^m(r)$.*

3. *$\psi : \Sigma \to M$ é uma subvariedade mínima estável e $\Phi(\Sigma)$ é $\{p\} \times \psi(M)$ com p um ponto de $S^m(r)$.*

4. *$\Sigma = S^m(r) \times \widehat{\Sigma}$, $\Phi = Id \times \psi$, e $\psi : \widehat{\Sigma} \to M$ é uma subvariedade mínima estável.*

Observação. Se $T = S^1(1) \times S^1(1)$ e $\Phi : T \to S^1(r) \times T$ um mergulho totalmente geodésico dado por $\Phi(x, y) = (rxy, x, y)$, onde xy denota o produto de números complexos unitários x e y, então Φ é estável e $\Phi(T)$ não é o produto de subvariedades mínimas estáveis. Logo, se $\Phi : S^2(r) \to S^2(r) \times S^2(r)$ é a aplicação diagonal $\Phi(x) = (x, x)$, então é um mergulho totalmente geodésico estável (ver[] para mais detalhes) e $\Phi(S^2(r))$ não é o produto de subvariedades estáveis mínimas.

Teorema 3.3.7. *Seja $\Phi : \Sigma \to S^2 \times S^1$, $r \geq 1$, uma imersão mínima de uma superfície compacta Σ.*

1. *Se Σ é orientável de gênero g, então o $ind(\Phi) \geq \frac{2g-1}{5}$. Além disso $Ind(\Phi) = 1$ se, e somente se, $r = 1$ e Φ é um mergulho totalmente geodésico $S^1 \times S^1 \subset S^2 \times S^1$.*

2. *Se Σ é não orientável, então $ind(\Phi) \geq \frac{g-1}{5}$, onde g é o gênero do cobrimento orientado 2-fold de Σ.*

Observação. Note que quando $r > 1$, não existem superfícies mínimas, compactas e orientáveis de índice um em $S^2 \times S^1(r)$. Além disso, a ideia utilizada na prova não funciona para $r < 1$. Neste caso, quando $r < 1$, os mergulhos totalmente geodésicos $S^1 \times S^1 \subset S^2 \times S^1(r)$ tem índice um, e qualquer cobrimento de m-folhas $S^1 \times S^1(mr) \to S^1 \times S^1(r)$ com $m \leq 1/r$.

Demonstração. Prova-se inicialmente que $Ind(\Phi) \geq \frac{2g-1}{5}$. Quando $g = 0$ a desigualdade acima é irrelevante e quando $g = 1$ é já conhecida, porque a única superfície mínima, compacta e estável de $S^2 \times S^1(r)$ tem gênero zero. Suponha-se que $g \geq 2$. Seja $m = Ind(\Phi)$. Como neste caso a immersão é 2-sided, o operador de Jacobi L atua em funções. Seja $\{\varphi_1, ..., \varphi_m\}$ as autofunções de L correspondentes aos autovalores negativos $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Consideremos $S^2 \times S^1(r) \subset \mathbb{R}^5$ e $\{a_1, ..., a_5\}$ é um marco ortonormal em $\mathbb{R}^5$, defina-se o funcional linear $F : H(\Sigma) \to \mathbb{R}^{5m}$ dado por

$$F(X) = \left(\int_\Sigma \varphi_1 X, ..., \int_\Sigma \varphi_m X \right),$$

onde X é considerada como uma função em $\mathbb{R}^5$.

Suponha que $X \in \ker F$. Então X é L_2-ortogonal para cada φ_i, $1 \leq i \leq m$ e portanto $Q(X) \geq 0$. Do lema 1, obtêm-se

$$0 \leq Q(X) = -\int_\Sigma \langle X, \xi \rangle^2 \left[2 - (1 + \frac{1}{r^2}) \left| \xi^\intercal \right|^2 \right] \leq 0,$$

onde a última desigualdade segue da suposição que $r^2 \geq 1$. Isto implica que ou $r = 1$ e $\left| \xi^\intercal \right|^2 = 1$ ou $\langle X, \xi \rangle = 0$. No primeiro caso, Σ é um cobrimento finito do toro totalmente geodésico $S^1 \times S^1$, e por isso tem gênero um, que não é o caso. Portanto, segue-se $\langle X, \xi \rangle = 0$, e do lema 2, $X = \lambda J \xi^\intercal$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, isto é, dim ker $F \leq 1$. Como $2g =$dim $H(\Sigma) =$ dim ker $F+$ dim $Im\ F \leq 1 + 5m$, portanto conclui-se o resultado.

Se Σ é compacto e não orientável, seja $\widetilde{\Sigma}$ um cobrimento 2-folha orientado de Σ e τ é a mudança de folha em $\widetilde{\Sigma}$. Logo, têm-se que o índice de Φ é o índice do operador de Schrödinger $\widetilde{L} = \widetilde{\Delta} - \widetilde{K} + 1 + \left| \widetilde{\sigma} \right|^2 /2$ agindo em $C^\infty_-(\Sigma) = \{f \in C^\infty(\Sigma) | f \circ \tau = -f\}$. Da proposição 1, seja $\{\varphi_1, ..., \varphi_m\}$ as autofunções de $\widetilde{L}$, com $\varphi_i \circ \tau = -\varphi_i$, correspondente aos autovalores negativos $\lambda_1, ..., \lambda_m$, onde m é o índice de Φ. Neste caso, defina-se a aplicação linear $F : H^-(\widetilde{\Sigma}) \to \mathbb{R}^{5m}$ dado por

$$F(X) = \left(\int_{\widetilde{\Sigma}} \varphi_1 X, ..., \int_{\widetilde{\Sigma}} \varphi_m X \right),$$

onde X esta sendo considerada como uma função em $\mathbb{R}^5$. Seguindo a mesma ideia como acima e tendo em conta que dim $H^-(\widetilde{\Sigma}) = g$, prova-se (2).

Finalmente, é fácil verificar que o mergulho totalmente geodésico $S^1 \times S^1(r) \subset S^2 \times S^1(r)$, $r \geq 1$, tem índice um se, e somente se, $r = 1$.

Reciprocamente, seja $\Phi : \Sigma \to S^2 \times S^1(r)$, $r \geq 1$, uma imersão mínima de uma superfícia orientável e compacta Σ com índice um. Se $\Phi = (\phi, \psi)$, para cada $a \in \mathbb{R}^2$ a função $\langle \psi, a\rangle : \Sigma \to \mathbb{R}$ satisfaz

$$v(\langle \psi, a\rangle) = \langle \psi_*(v), a\rangle = \langle v, \xi\rangle \langle \xi, a\rangle .$$

Logo

$$\nabla \langle \psi, a\rangle = \langle \xi, a\rangle \xi^{\intercal}.$$

Por isso, o Laplaciano de $\langle \psi, a\rangle$ é dado por

$$\Delta \langle \psi, a\rangle = \langle \overline{\sigma}(\xi^{\intercal}, \xi), a\rangle + \langle \xi, a\rangle \,\mathrm{div}\xi^{\intercal} = -\frac{1}{r^2} \langle \xi^{\intercal}, \xi\rangle \langle \psi, a\rangle = -\frac{|\xi^{\intercal}|^2}{r^2} \langle \psi, a\rangle .$$

Portanto, o operador de Jacobi de uma superfície Σ agindo em $\langle \psi, a\rangle$ é dado por

$$L \langle \psi, a\rangle = ((1 - 1/r^2)\, |\xi^{\intercal}|^2 + |\sigma|^2) \langle \psi, a\rangle ,$$

e

$$Q(\langle \psi, a\rangle) = -\int_\Sigma ((1 - 1/r^2)\, |\xi^{\intercal}|^2 + |\sigma|^2) \langle \psi, a\rangle^2 \, dA \leq 0.$$

Se $V = \{\langle \psi, a\rangle, a \in \mathbb{R}^2\}$ e dim $V \leq 1$, então existe um vetor não nulo a em $\mathbb{R}^2$ tal que $\langle \psi, a\rangle = 0$ e ψ é constante. Portanto, $\Phi(\Sigma)$ é um *slices* de $S^2 \times S^1(r)$, o qual é estável. Por conseguinte dim $V = 2$. Logo, como o índice de Σ é um e $\xi^{\intercal}$ tem unicamente zeros isolados, se obtem que $\sigma = 0$ e $r = 1$. Então, $\Phi(\Sigma)$ é um cobrimento finito da superfície totalmente geodésica $S^1 \times S^1$. Como o índice é um, a superfície deve ser $S^1 \times S^1$ e assim completa-se a prova de (1). $\square$

Referências Bibliográficas

[1] F. J. Almgren Jr, *Some Interior Regularity Theorems for Minimal Surfaces and an Extension of Berstein's Theorem* , Annals of Mathematics, Second Series, 84, no. 2 (1966), 277-292.

[2] M. Berger, P.Gauduchon, E. Mazet, *Le Sppectre d'una Varieté Riemanniane*, Lecture Notes in Mathematics vol.194, Springer-Verlag, Berlin (1971),144

[3] Isaac Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press Inc. Orlando, Fl(1984),1-10

[4] S. S. Chern, M. Do Carmo, and S. Kobayashi,*Minimal Submanifolds of a Sphere with Second Fundamental Form of Constant Length*, Functional Analysis and Related Fields, Proc. Conf. M. Stone, Springer, 1970, 59-75.

[5] Tobias Holck Colding and William P. Minicozzi II, *A Course in Minimal Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics vol. 121, American Mathematical Society, Providence, RI (2011), 1-42.

[6] D. Fischer-Colbrie,*On complete minimal surfaces with finite Morse index in three-manifolds*, Invent. Math. 82 (1985)121-132

[7] D. Fischer-Colbrie and R. Schoen, *The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature*, Comm. Pure Appl. Math. 33 (1980) 199-211, MR 0562550, Zbl 0439.53060

[8] H. Blaine Lawson Jr, *Complete Minimal Surfaces in* S^3 . The Annals of Mathematics, Second Series, 92, no. 3 (1970), 335-374.

[9] H. Blaine Lawson Jr, *Lectures on Minimal Submanifolds*, Volume 1.Publish or Perish, Inc. Berkeley, CA. (1980), 1-25.

[10] F.J.López and A.Ros,*Complete minimal surfaces with index one and stable constant mean curvature surfaces*, Comment.Math, Helvet. 64 (1989)34-43.

[11] Sebastian Montiel and Antonio Ros, *Minimal Immersions of Surfaces by the First Eigenfunctions and Conformal Area* , Invent. Math. 83 (1986),153-166.

[12] Morio Obata, *Certain Conditions for a Riemannian Manifold to be Isometric with a Sphere* , J. Math. Soc. Japan, 14, no. 3 (1962), 333-340.

[13] Oscar Perdomo, *Low Index Minimal Hypersurfaces of Spheres*, Asian J. Math. 5 no. 4 (2001), 741-750.

[14] A.Ros,*One-sided complete stable minimal surfaces*, J. Differential Geometry 74 (2006) 69-92.

[15] M. Ross,*Complete nonorientable minimal surfaces in* $\mathbb{R}^3$. Comment. Math. Helvet. 67 (1992) 64-76.

[16] Takashi Sakai, *Riemannian Geometry*. Translations of Mathematical Monographs vol.149, American Mathematical Society, Providence, RI (1996), 262-272

[17] James Simons, *Minimal Varieties in Riemannian Manifolds*, Annals of Math. Second Series, 88 no. 1 (1968), 62-105.

[18] F. Torralbo, F. Urbano, *On stable compact minimal submanifolds*, Proceedings of the America Mathematical Society, 142 (2014) 651-658.

[19] F. Urbano, *Minimal surfaces with low index in the three-dimensional sphere*, Proceedings of the America Mathematical Society (4) 108 (1990) 989-992.

[20] F. Urbano,*Second variation of one sided complete minimal surfaces* , Revista Matematica Iberoamericana (2) 29 (2013) 479-494.