

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS



MESTRADO EM MATEMÁTICA

Estabilidade de Hipersuperfícies com Curvatura Média
Constante

Daniel Oliveira Silva

Belo Horizonte - MG

2015

Daniel Oliveira Silva

Estabilidade de Hipersuperfícies com Curvatura Média Constante

Dissertação submetida à banca examinadora,
designada pelo Programa de Pós-Graduação em
Matemática da UFMG, como requisito parcial
para a obtenção do título de mestre em Ma-
temática.

Orientador: Ezequiel Rodrigues Barbosa

Universidade Federal de Minas Gerais

19 de junho de 2015

Resumo

Neste trabalho estudaremos o resultado obtido por João Lucas Barbosa e Manfredo Perdigão do Carmo que afirma que a única hipersuperfície estável compacta de curvatura média constante é a n -esfera redonda. Mais precisamente, estudaremos a prova proposta por Henry Wente do seguinte Teorema de Barbosa e do Carmo:

Seja M uma n -variedade compacta orientada e $x : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante não nula H . Então x é estável se e somente se $x(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma esfera redonda S^n em \mathbb{R}^{n+1} .

Abstract

In this work we will study the results obtained by João Lucas Barbosa and Manfredo Perdigão do Carmo which states that the only stable compact hypersurface of constant mean curvature is the round n -sphere. More precisely, we will study the proof proposed by Henry Wente of the following theorem Barbosa and do Carmo:

Let M be a compact oriented n -manifold and let $x : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ be an immersion with non-zero constant mean curvature H . Then x is stable if and only if $x(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ is a (round) sphere S^n em \mathbb{R}^{n+1} .

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me dar forças em todos os momentos difíceis nesses quase dois anos de mestrado. Tenho convicção de que sem sua ajuda não teria conseguido concluir essa etapa.

À minha mãe, principal intercessora, por rezar em todas as provas pelo meu sucesso e viver comigo a vida de pós-graduando, ainda que somente a parte emocional. Te amo! Ao meu pai Félix, Eu sei o quanto está feliz por essa conquista. Também sei que foi intercessor direto junto a Deus, desde o 3^o mês de mestrado. Saudades!

À minha esposa Grazi e meu filho Pedro Félix. Esta, por todo companheirismo, amor, compreensão e mais uma quantidade não enumerável de adjetivos. Você foi essencial nos momentos difíceis. Pedro, por despertar o melhor sentimento que já pude sentir. Aos meus irmãos, pelo carinho e por serem referência. Fernando por tornar minha trajetória acadêmica um pouco menos difícil. Lívia pelo apoio emocional e espiritual. Aos meus avós. A Rosivaldo, por tudo. Pelo incentivo acadêmico e por estar presente nos momentos mais difíceis.

À Dona Meirinha e Seu Tiô por me tratarem como filho. À família Oliveira de Monte Azul - MG. Aos amigos de Montes Claros - MG, em especial Luciana e Lucas. Aos colegas da UFMG. Em especial Renato, Leandro Gonzaga e Leandro da Luz, por fazerem parte desta conquista. Renato por não

medir esforços para me manter em pé durante o luto.

Aos professores da pós, em especial, Ezequiel, Hamilton e Csaba. O primeiro pelo respeito e paciência que sempre teve comigo. O segundo e o terceiro por me incentivarem a prosseguir.

À banca examinadora. Ezequiel, Maurício e Rosivaldo. Às Elianes da secretaria. Por onde andei não vi profissionais que conciliam tão bem competência e bom humor. Aos professores da Unimontes, não poderia deixar de citar Narciso e Tiãozinho.

À CAPES pelo apoio financeiro. Em fim, a todos que contribuíram, muito OBRIGADO!

A meu pai Félix (em memória) e a meu filho Pedro
Félix.

*“Não se preocupe com as dificuldades em Matemática. Eu posso garantir
que as minhas são muito maiores”.*

Albert Einstein

Sumário

Resumo	ii
Abstract	iii
Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Resultados Preliminares	5
1.2 Definições e Resultados de Geometria Riemanniana	8
2 Variações da Área e Volume e Conceito de Estabilidade	26
2.1 Fórmula para Primeira Variação da Área e Volume	26
2.2 Estabilidade	34
3 Desigualdade Isoperimétrica	37
3.1 O Caso Clássico: Curvas no Plano	37
3.2 Domínios em \mathbb{R}^n	42
4 Teorema de Estabilidade de Barbosa e do Carmo	52
4.1 Prova alternativa do Teorema de Barbosa e do Carmo Pro- posta por Wentz	52
4.2 Consequências do Teorema de Barbosa e do Carmo	59
Referências Bibliográficas	61

Introdução

Um conhecido resultado anterior a 1900 diz que se S é uma superfície em \mathbb{R}^3 , com menor area entre todas superficies que limitam o mesmo volume, então a curvatura média de S deve ser constante. Nessa época já se conhecia o seguinte fato: A esfera é a superfície, dentre todas que limitam o mesmo volume, a de menor area, e que sua curvatura media é constante diferente de zero (H.A Schwarz, 1890). Surge, então a seguinte questão: É uma superfície em \mathbb{R}^3 de curvatura média constante, diferente de zero, necessariamente uma esfera? Uma contrapartida física, munida das propriedades da película de sabão, que diz que uma bolha de sabão deve ter uma curvatura média constante (equação de Laplace-Young), diria: Pode uma bolha de sabão ter outra forma se não a esfera redonda?

Respostas foram surgindo. Em 1900: Se uma superfície, estritamente convexa, compacta em \mathbb{R}^3 tem curvatura média constante, então ela deve ser uma esfera redonda (Liebmann). Em 1951: Uma superfície compacta simplesmente conexa com curvatura media constante imersa em \mathbb{R}^3 é uma esfera redonda mergulhada (Heinz Hopf). Em 1958: As únicas hipersuperfícies fechadas de curvatura média constante e mergulhadas nos espaços euclidianos são as esferas redondas (Aleksandrov).

Desde Hopf pensava-se ser verdade o teorema de Aleksandrov para superficies imersas, ao invés de mergulhada. Isso ficou conhecido por conjectura de Hopf. O Teorema de Aleksandrov acentuou, ainda mais, a idéia de que essa conjectura fosse válida. Somente 35 anos após o teorema de Hopf essa

conjectura foi solucionada, e dada como falsa, pelo matemático americano Henry Wente (autor da demonstração alternativa que apresentaremos para o teorema de Manfredo P. do Carmo e João L. Barbosa).

Seguindo a cronologia, em 1979, do Carmo e Peng provaram que o plano é a única superfície completa mínima e estável em \mathbb{R}^3 . Intrigado em saber o que aconteceria, ao tentar estender à superfícies de curvatura média constante, resultados envolvendo superfícies mínimas, do Carmo, em 1981, propôs a J. L. Barbosa estudar o problema (Revista Matemática Universitária. N^o 16, julho de 1994. 1-18). João Lucas Barbosa se interessou pelo assunto e então em 1984 eles provaram o seguinte teorema, foco dessa dissertação:

Seja M uma n -variedade compacta orientada e $x : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante não nula H . Então x é estável se e somente se $x(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma esfera redonda \mathbb{S}^n em \mathbb{R}^{n+1} .

O conceito de estabilidade está relacionado ao funcional area, isto é, uma imersão é dita estável quando ela é ponto crítico do funcional area e possui segunda variação da area maior do que ou igual a zero para variações que preservam bordo e volume (veremos mais detalhes na seção 2.2). Levou algum tempo para J. Lucas e Manfredo estabelecerem definições apropriadas de estabilidade. Não havia na literatura uma definição adequada. Com a definição adotada por eles, conforme veremos no capítulo 3, a esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é estável. Para tanto faremos uso da desigualdade isoperimétrica para domínios em \mathbb{R}^n .

O problema isoperimétrico em \mathbb{R}^n quer responder qual superfície, dentre todas contendo determinado volume, tem a mesma area, ou, encontrar dentre todos os domínios, cuja superfície fronteira tem area fixada, aquela que maximiza o volume. A solução em ambos os casos é o domínio limitado pela esfera (capítulo 3).

Para a outra direção do teorema de Barbosa e do Carmo, Henry Wente considera uma adequada família de imersões, que preservam volume. Para tal família, calcula a primeira e segunda variação da area e, usando o fato da

hipersuperfície ser estável, obtém que ela deve ser umbílica, da compacidade conclui que esta deve ser a esfera redonda em \mathbb{R}^{n+1} .

Para $n = 2$ o teorema acima está relacionado a questão levantada por Hopf, se a esfera é a única superfície fechada imersa em \mathbb{R}^{n+1} que tem curvatura média constante. Com o resultado acima sabemos que uma superfície imersa, compacta, não esférica de \mathbb{R}^3 , com curvatura média constante não é estável.

Em 1983, Hsiang, Teng e Yu, veja [13], apresentaram exemplos de hipersuperfícies não esféricas $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $n > 2$, que tem curvatura média constante. Pelo resultado principal, estas imersões são exemplos de hipersuperfícies não-estáveis. Os exemplos de Hsiang também mostram que a questão de Hopf é essencialmente um problema 2-dimensional.

Em 1988, João Lucas Barbosa, Manfredo do Carmo e Jost Eschenburg, veja [8], generalizaram o Teorema de Barbosa e do Carmo, a saber conseguiram o seguinte resultado:

Sejam $\overline{M}^{n+1}(c)$ uma variedade Riemanniana simplesmente conexa com curvatura seccional c e $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ uma imersão de uma variedade diferenciável M^n com curvatura média constante. Então x é estável se, e somente se, $x(M^n) \subset \overline{M}^{n+1}(c)$ é a esfera geodésica.

Ainda em 1988, Ernst Heintze, veja [14], usando estimativas do primeiro autovalor do Laplaciano, demonstrou o Teorema de Barbosa-do Carmo no caso em que $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{H}^{n+1}$.

No ano de 1991, Henry Wente, no artigo [2], deu uma prova, a que iremos apresentar, alternativa do Teorema de Barbosa e do Carmo.

Cabe ressaltar que, o problema de saber quais são as imersões $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ estáveis, completas, com curvatura média constante não nula, se encontra em aberto.

O trabalho está dividido em quatro capítulos. No primeiro abordamos conceitos básicos de Geometria Riemanniana e resultados gerais que serão utilizados ao longo da dissertação. No capítulo 2 trabalhamos os conceitos

de variação de uma imersão, área e volume de um certo domínio e demonstramos as fórmulas da primeira variação (área) e da primeira variação do volume. Ainda neste capítulo dedicamos uma seção para falar sobre o conceito de estabilidade adotado e defendermos essa escolha. No terceiro capítulo discorreremos sobre a desigualdade isoperimétrica e como consequência, mostraremos que a esfera é estável. Ao capítulo 4 deixamos a demonstração do teorema de Barbosa e do Carmo. Ademais, a este capítulo é resguardada uma seção sobre as consequências deste resultado.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, a título de completude, apresentaremos algumas definições e resultados já conhecidos, que utilizaremos ao longo desta dissertação. A maior parte do conteúdo deste capítulo se encontra em [5], [4] e [6].

1.1 Resultados Preliminares

Esta seção dedica-se a apresentar resultados diversos. O objetivo é utilizá-los como futuras referências à medida que surgir a necessidade de citá-los ao longo da dissertação. A maior parte do conteúdo deste capítulo se encontra no livro do John Lee, Introduction to Smooth Manifolds, veja [6], e no livro de Análise Real, volume 2, do Elon (referência [7]).

Definição 1.1 (Casco Convexo). *O casco convexo de um dado conjunto X é a interseção de todos os conjuntos convexos que contém X .*

Definição 1.2 (Estritamente Convexo). *Dizemos que uma hipersuperfície mergulhada $x : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície convexa quando ela é a fronteira de um domínio convexo $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Uma hipersuperfície é estritamente convexa se ela for convexa e para todo $p \in M$, $dx_p(T_pM) \cap x(M) = \{x(p)\}$.*

1.1 Resultados Preliminares

Teorema 1.3 (Teorema Binomial). *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$, com $|z| < 1$. Vale:*

$$(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$$

onde
$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(k-1))}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}.$$

Definição 1.4. *Diz-se que o conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}^n$ é J -mensurável (mensurável segundo Jordan) quando, tomando-se um bloco $A \subset \mathbb{R}^n$ que contenha X , a função característica $\chi_X : A \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável. Quando X é J -mensurável, seu volume ($\text{vol } X$) é, por definição, a integral de sua função característica:*

$$\text{vol } X = \int_A \chi_X(x) dx.$$

Uma importante caracterização dos conjuntos j -mensuráveis é dada por:

Teorema 1.5. *Um conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}^n$ é J -mensurável se, e somente se, sua fronteira ∂X tem medida nula.*

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [7], p. 364.

Teorema 1.6 (Fórmula de Mudança de variáveis). *Sejam $h : U \rightarrow V$ um difeomorfismo de classe C^1 entre abertos $U, V \subset \mathbb{R}^m$, $X \subset U$ um compacto J -mensurável e $f : h(X) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Então $f \circ h : X \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável e*

$$\int_{h(X)} f(y) dy = \int_X f(h(x)) \cdot |\det h'(x)| dx$$

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [7], p. 386.

Teorema 1.7 (Teorema de Stokes). *Seja M uma variedade diferenciável n -dimensional orientada, com fronteira ∂M , e seja w uma $(n-1)$ -forma suave sobre M com suporte compacto. Então:*

$$\int_M dw = \int_{\partial M} w.$$

1.1 Resultados Preliminares

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [6], p. 359.

Os dois Teoremas abaixo são casos particulares do Teorema de Stokes. Para mais detalhes veja o livro do John Lee intitulado de Introduction to Smooth Manifolds ([6]).

Seja $x : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta. Ω será a região limitada cuja fronteira é M . Denotaremos o volume de Ω por V e o volume de M por S . O elemento de volume de \mathbb{R}^{n+1} será denotado por dV e o elemento de volume de M será denotado por dS .

Teorema 1.8 (Teorema da Divergência). *Seja X um campo de vetores diferenciável no domínio compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+1}$ e considere $M = \partial\Omega$ a hipersuperfície compacta formada pela fronteira de Ω . Então*

$$\int_M \langle X, N \rangle dS = \int_\Omega \operatorname{div} X dV.$$

Onde N é o campo normal exterior de M .

Teorema 1.9. *Sejam $x : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta orientada e X campo diferenciável sobre M . Então*

$$\int_M \operatorname{div} X dA = 0$$

Em particular, $\int_M \Delta f dS = 0$, para toda função $f \in C^\infty(M)$

Teorema 1.10 (Teorema de Green). *Sejam $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^1 sobre a superfície com bordo M compacta de classe C^1 e dimensão 2 em \mathbb{R}^2 (isto é, um domínio compacto $M \subset \mathbb{R}^2$ com fronteira regular de classe C^1). Então*

$$\int_M \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial M} f dx + g dy.$$

Teorema 1.11 (Teorema da integração Repetida (Fubini)). *Seja $f : A_1 \times A_2 \rightarrow \mathbb{R}$ integrável no produto dos blocos $A_1 \subset \mathbb{R}^m$ e $A_2 \subset \mathbb{R}^n$. Para todo $x \in A_1$, seja $f_x : A_2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_x(y) = f(x, y)$ e ponhamos*

$$\phi(x) = \int_{\underline{A_2}} f_x(y) dy, \psi(x) = \int_{\overline{A_2}} f_x(y) dy.$$

1.2 Definições e Resultados de Geometria Riemanniana

As funções $\phi, \psi : A_1 \rightarrow \mathbb{R}$, assim definidas, são integráveis, com

$$\int_{A_1} \phi(x)dx = \int_{A_1} \psi(x)dx = \int_{A_1 \times A_2} f(x, y)dxdy,$$

isto é:

$$\int_{A_1 \times A_2} f(x, y)dxdy = \int_{A_1} dx \left(\int_{A_2} f(x, y)dy \right) \quad (1.1)$$

$$= \int_{A_1} dx \left(\overline{\int_{A_2} f(x, y)dy} \right). \quad (1.2)$$

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [7], p. 378.

Teorema 1.12 (Identidade de Parseval). *Considere uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, onde f , $|f|$ e $|f|^2$ são integráveis, considere ainda seus coeficientes de Fourier a_n e b_n . Assim:*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)^2 dx$$

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [33].

Definição 1.13. $L^p(\mathbb{R})$ Para um real $p \geq 0$, nós denotamos por $L^p(\mathbb{R})$ o espaço de todas as funções f de valores complexos localmente integrável tal que $|f|^p \in L^1(\mathbb{R})$, onde $\|f\|_p = (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Teorema 1.14 (Desigualdade de Holder). *Seja $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(\mathbb{R})$ e $g \in L^q(\mathbb{R})$. Então $fg \in L^1(\mathbb{R})$ e*

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

1.2 Definições e Resultados de Geometria Riemanniana

Variedades Diferenciáveis

1.2 Definições e Resultados de Geometria Riemanniana

Seja M um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável. Um *atlas* de dimensão n para M é uma família

$$\Phi = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow M\}_{\alpha \in L}$$

de aplicações contínuas tais que $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha)$ é um homeomorfismo de um aberto $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ sobre um aberto $\phi_\alpha(U_\alpha)$ de M para cada $\alpha \in L$, satisfazendo as seguintes condições:

(i) Os abertos $\phi_\alpha(U_\alpha)$ cobrem M , isto é,

$$\bigcup_{\alpha \in L} \phi_\alpha(U_\alpha) = M$$

(ii) Para todos índices $\alpha, \beta \in L$; tais que $V_{\alpha\beta} = \phi_\alpha(U_\alpha) \cap \phi_\beta(U_\beta)$ as aplicações

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha\beta} &= \phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\beta : \phi_\beta^{-1}(V_{\alpha\beta}) \rightarrow \phi_\alpha^{-1}(V_{\alpha\beta}), \\ \phi_{\beta\alpha} &= \phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha : \phi_\alpha^{-1}(V_{\alpha\beta}) \rightarrow \phi_\beta^{-1}(V_{\alpha\beta}), \end{aligned}$$

são diferenciáveis de classe C^∞ .

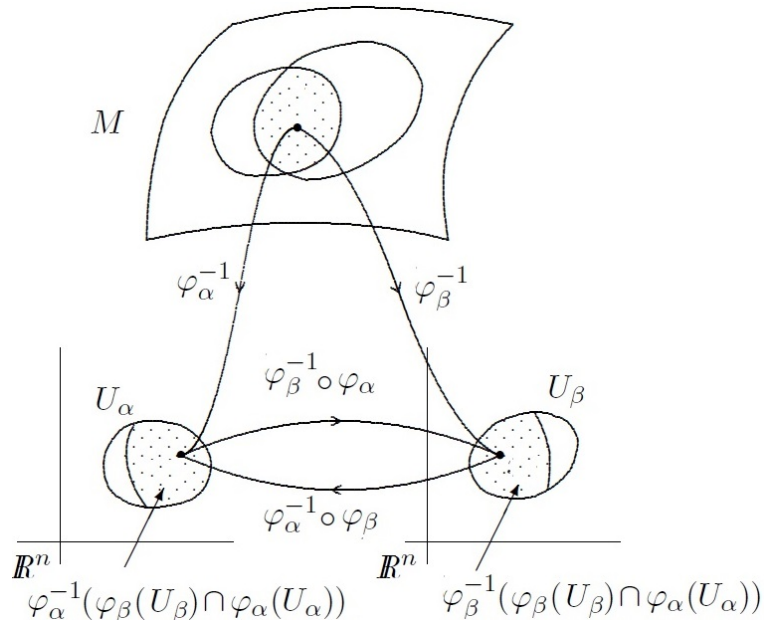


Figura 1.1: Mudança de Coordenadas

1.2 Definições e Resultados de Geometria Riemanniana

Cada aplicação ϕ_α é chamada uma *parametrização* ou *carta local* de uma vizinhança de M e $\phi_\alpha(U_\alpha)$ é chamada uma *vizinhança coordenada*.

Se $p = \phi_\alpha(x_1, \dots, x_n)$, então x_1, \dots, x_n são chamadas as coordenadas de p na parametrização ϕ_α .

Por este motivo, a aplicação ϕ_α também é chamada um *sistema de coordenadas locais* e o atlas Φ é também chamado um *sistema de coordenadas* para M .

Uma *estrutura diferenciável* para M é um atlas maximal.

Definição 1.15. *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável munido de uma estrutura diferenciável.*

Dados dois sistemas de coordenadas locais $x : U \rightarrow M$ e $y : V \rightarrow M$ no espaço topológico M , tais que $W = x(U) \cap x(V) \neq \emptyset$, cada $p \in x(U) \cap x(V)$ tem coordenadas $x^i = x^i(p)$ no sistema x e coordenadas $y^i = y^i(p)$ no sistema y . A correspondência $(x^1(p), \dots, x^m(p)) \rightarrow (y^1(p), \dots, y^m(p))$ estabelece um homeomorfismo $\phi_{xy} = y^{-1} \circ x : x^{-1}(W) \rightarrow y^{-1}(W)$ chamado *mudança de coordenadas*.

Um atlas \mathfrak{A} sobre um espaço topológico M diz-se diferenciável, de classe C^k , ($k \geq 1$), se todas as mudanças de coordenadas ϕ_{xy} , $x, y \in \mathfrak{A}$ são aplicações de classe C^k . Escreve-se então $\mathfrak{A} \in C^k$. Como $\phi_{yx} = (\phi_{xy})^{-1}$, segue-se que as aplicações ϕ_{xy} são, de fato, difeomorfismos de classe C^k . Em particular, se escrevemos $\phi_{xy} : (x^1, \dots, x^m) \rightarrow (y^1, \dots, y^m)$, então o determinante jacobiano $\det(\frac{\partial y^i}{\partial x^j})$ é não-nulo em todo ponto de $x(U \cap V)$.

Dado um atlas $\mathfrak{A} \in C^k$ de dimensão m em um espaço topológico M , dizemos que um sistema de coordenadas $z : W \rightarrow M$ é *admissível* relativamente ao atlas \mathfrak{A} se $\mathfrak{A} \cup \{z\}$ é ainda um atlas de classe C^k em M . Um atlas \mathfrak{A} de dimensão m e classe C^k sobre M se diz *maximal* quando contém todos os sistemas de coordenadas locais que são admissíveis em relação a \mathfrak{A} . Todo atlas de classe C^k sobre M pode ser ampliado, de modo único, até se tornar um

1.2 Definições e Resultados de Geometria Riemanniana

atlas máxima de classe C^k , para isso basta acrescentar-lhe todos os sistemas de coordenadas admissíveis.

Exemplo 1. O espaço \mathbb{R}^n é uma variedade diferenciável de classe C^∞ e dimensão n .

Exemplo 2. A esfera $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2} = 1\}$ é uma variedade diferenciável de classe C^∞ e dimensão n .

Exemplo 3. O espaço projetivo real $P^n(\mathbb{R})$, isto é, o espaço quociente de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ pela relação de equivalência:

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \sim (\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}) \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0$$

é uma variedade diferenciável de classe C^∞ e dimensão n .

Definição 1.16. Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Dizemos que uma aplicação $F : M \rightarrow N$ é uma aplicação diferenciável em $p \in M$ se existem parametrizações $\phi : U \rightarrow M$ de uma vizinhança de p e $\psi : V \rightarrow N$ de uma vizinhança de $F(p)$ tais que $(F \circ \phi)(U) \subset \psi(V)$ e

$$\psi^{-1} \circ F \circ \phi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

é uma aplicação diferenciável de classe C^∞ . Se f for diferenciável em todo ponto $p \in M$, diremos simplesmente que F é uma aplicação diferenciável. Dizemos que uma aplicação diferenciável $F : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo se F é bijetiva e F^{-1} também é diferenciável.

Espaço Tangente

Definição 1.17. Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável com $\gamma(t_0) = p$. Seja

$$D_p(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é diferenciável em } p\}$$

o espaço vetorial das funções reais em M diferenciáveis em p . O vetor tangente à curva γ em p é a função $\gamma'(t_0) : D_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\gamma'(t_0)f = (f \circ \gamma)'(t_0)$.

1.2 Definições e Resultados de Geometria Riemanniana

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será indicado por T_pM .

Observação 1.18. Considere M uma variedade diferenciável de dimensão n . T_pM é um espaço vetorial n -dimensional.

Uma base para T_pM pode ser dada escolhendo uma carta local $x : U \rightarrow x(U)$ em p e considerando as aplicações $\frac{\partial}{\partial x_i}(p) : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p)f = \frac{\partial}{\partial x_i}f \circ x(x^{-1}(p))$$

Assim, as aplicações $\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ de acordo com a definição, são vetores tangentes a M em p e o conjunto $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(p) \right\}$ forma uma base para T_pM .

Proposição 1.19. Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis e seja $\phi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M$ e cada $v \in T_pM$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \phi \circ \alpha$. A aplicação $d\phi_p : T_pM \rightarrow T_{\phi(p)}N$ definida por $d\phi_p(v) = \beta'(0)$ não depende da escolha de α .

Definição 1.20. A aplicação linear $d\phi_p$ dada pela proposição anterior é chamada diferencial de ϕ em p .

Podemos ver os vetores tangentes a M em p de outro modo:

Definição 1.21. Seja M uma variedade suave e $p \in M$. A aplicação linear $X_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$, definida no conjunto de todas as funções infinitamente diferenciáveis em uma vizinhança de p é chamada de derivação em p se satisfaz a regra do produto,

$$X_p(fg) = f(p)X_p(g) + g(p)X_p(f)$$

1.2 Definições e Resultados de Geometria Riemanniana

para toda $f, g \in C^\infty(M)$.

X_p é chamado um vetor tangente a M em p .

O conjunto de todas as derivações de $C^\infty(M)$ em p possui estrutura de espaço vetorial, chamado *espaço tangente* a M em p , denotado por T_pM . Um elemento de T_pM é chamado de *vetor tangente* a M em p .

O *fibrado tangente* TM é definido por $TM := \bigcup_{p \in M} T_pM$. É possível mostrar que TM possui estrutura de variedade diferenciável de dimensão $2n$.

Definição 1.22. *Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$. O Campo X é diferenciável se a aplicação $X : M \rightarrow TM$ é diferenciável.*

O conjunto de todos os campos diferenciáveis sobre M será denotado por $\mathcal{T}(M)$.

Definição 1.23. *Dadas duas variedades diferenciáveis M e N , um ponto $p \in M$, e uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$, a derivada de f em p , denotada por df_p , é a aplicação linear de T_pM em $T_{f(p)}N$ definida por:*

$$(df_p \cdot X_p)(g) = X_p(g \circ f),$$

para $X_p \in T_pM$ e g diferenciável em uma vizinhança de $f(p)$,

Definição 1.24. *Um ponto $p \in M$ diz-se um ponto regular de $f : M \rightarrow N$ quando a derivada $f'(p) : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ é injetiva. Caso contrário, p diz-se um ponto singular ou crítico de f .*

Definição 1.25. *Uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ diz-se uma imersão se todo ponto $p \in M$ é um ponto regular para f , isto é, a derivada $f'(p) : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ é injetiva para cada $p \in M$.*

1.2 Definições e Resultados de Geometria Riemanniana

Definição 1.26. *Dados dois campos $X, Y \in \mathcal{T}(M)$, campo vetorial $[X, Y]$ definido por,*

$$[X, Y]_p f = (XY - YX)f = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f))$$

é chamado colchete.

Variedades Riemannianas

Definição 1.27. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente $T_p M$. As vezes usamos a notação $g(\cdot, \cdot) = g_p(\cdot, \cdot)$ para a métrica Riemanniana.*

A definição acima exige que a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ varie diferenciavelmente no seguinte sentido: se $x : U \rightarrow x(U)$ é um sistema de coordenadas locais em $p \in x(U)$, para $q \in x(U)$ com $q = x(x_1, \dots, x_m)$ devemos ter que a função de U em $\mathbb{R} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q : x(U) \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função diferenciável para todo $i, j = \{1, \dots, m\}$.

Definição 1.28. *As funções $g_{ij}(x_1, \dots, x_m) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q$ são chamadas expressão da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas x . Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se variedade Riemanniana .*

Proposição 1.29. *Uma variedade diferenciável M (de Hausdorff e com base enumerável) possui uma métrica Riemanniana.*

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [5], p. 47.

Conexões Afins

Definição 1.30. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M)$$

que se indica por $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

1.2 Definições e Resultados de Geometria Riemanniana

$$(i) \nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ,$$

$$(ii) \nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ,$$

$$(iii) \nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(f)Y,$$

em que $X, Y, Z \in \mathcal{T}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$. O símbolo ∇_XY lê-se: derivada covariante de Y na direção de X . Quando a conexão afim satisfaz as seguintes propriedades:

$$(i) X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_XY, Z \rangle + \langle Y, \nabla_XZ \rangle, \text{ (compatibilidade com a métrica)}$$

$$(ii) \nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y], \text{ (simetria)}$$

é denominada *conexão de Levi-Civita* (ou *Riemanniana*).

Proposição 1.31. *Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão de Levi-Civita em M .*

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [5] p. 61.

Observação 1. *Considere um sistema de coordenadas, o fato de ∇ ser simétrica implica que para todo $i, j = 1, \dots, n$ temos,*

$$\nabla_{X_i}X_j - \nabla_{X_j}X_i = [X_i, X_j] = 0, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Curvatura

Definição 1.32. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{T}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M)$ dada por,*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X\nabla_YZ - \nabla_Y\nabla_XZ - \nabla_{[X, Y]}Z, \quad Z \in \mathcal{T}(M)$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

1.2 Definições e Resultados de Geometria Riemanniana

Observação 2. Se $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X, Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$. De fato, consideremos $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica do \mathbb{R}^n , dados $X, Y, Z \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$, podemos escrever

$$X = \sum_{i=1}^n X_i e_i, Y = \sum_{i=1}^n Y_i e_i, Z = \sum_{i=1}^n Z_i e_i,$$

então

$$\nabla_Y Z = \nabla_Y \left(\sum_{i=1}^n Z_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n Z_i \nabla_Y e_i + \sum_{i=1}^n [Y(Z_i)] e_i = \sum_{i=1}^n [Y(Z_i)] e_i$$

pois sendo e_i um campo constante, a sua derivada covariante, na direção de qualquer campo, é nula. Segue-se que,

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z &= \nabla_X \left\{ \sum_{i=1}^n [Y(Z_i)] e_i \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n Y(Z_i) \nabla_X e_i + \sum_{i=1}^n X[Y(Z_i)] e_i \\ &= \sum_{i=1}^n X[Y(Z_i)] e_i. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\nabla_Y \nabla_X Z = \sum_{i=1}^n Y[X(Z_i)] e_i.$$

Portanto,

1.2 Definições e Resultados de Geometria Riemanniana

$$\begin{aligned}
 \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z &= \sum_{i=1}^n X[Y(Z_i)]e_i - \sum_{i=1}^n Y[X(Z_i)]e_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \{X[Y(Z_i)] - Y[X(Z_i)]\}e_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \{[X, Y](Z_i)\}e_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \{[X, Y](Z_i)\}e_i + \sum_{i=1}^n Z_i \nabla_{[X, Y]} e_i \\
 &= \nabla_{[X, Y]} Z.
 \end{aligned}$$

Segue que,

$$0 = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z = R(X, Y)Z$$

Esta observação ilustra o seguinte fato, que intuitivamente a curvatura R mede o quanto uma variedade Riemanniana M deixa de ser euclidiana.

Proposição 1.33. *A curvatura R em M tem as seguintes propriedades;*

(a) *R é bilinear em $\mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M)$, isto é,*

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1)$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2)$$

com $f, g \in C^\infty(M)$, e $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{T}(M)$

(b) *Para todo par $X, Y \in \mathcal{T}(M)$, o operador curvatura $R(X, Y) : \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M)$ é linear, isto é,*

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z$$

com $f \in C^\infty(M)$, $Z, W \in \mathcal{T}(M)$

1.2 Definições e Resultados de Geometria Riemanniana

(c) (Primeira identidade de Bianchi)

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [5] pág. 100 e 101.

Proposição 1.34. *Dada uma variedade Riemanniana (M, g) com uma curvatura R , usando a notação $R(X, Y, Z, T) = g(R(X, Y)Z, T)$ para quaisquer campos $X, Y, Z, T \in \mathcal{T}(M)$ temos as seguintes propriedades:*

(a) $R(X, Y, Z, T) + R(Y, Z, X, T) + R(Z, X, Y, T) = 0$

(b) $R(X, Y, Z, T) = -R(Y, X, Z, T)$

(c) $R(X, Y, Z, T) = -R(X, Y, T, Z)$

(d) $R(X, Y, Z, T) = R(Z, T, X, Y)$

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [4] pág. 115.

Proposição 1.35. *Seja $\sigma \subset T_p M$ um subespaço bi-dimensional do espaço $T_p M$ e sejam $X, Y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(X, Y) = \frac{(X, Y, Y, X)}{|X \wedge Y|^2}$$

onde $|X \wedge Y|^2 = \sqrt{|X|^2|Y|^2 - g(X, Y)^2}$, independe da escolha dos vetores $X, Y \in \sigma$.

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [4] pág. 126.

Definição 1.36. *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_p M$ o número real $K(X, Y) = K(\sigma)$, onde $\{X, Y\}$ é uma base qualquer de σ é chamado curvatura seccional de σ em p*

1.2 Definições e Resultados de Geometria Riemanniana

Definição 1.37. *Seja M uma variedade riemanniana. O tensor curvatura de Ricci de M (ou simplesmente tensor de Ricci) denotado Ric , é o campo tensorial covariante de ordem 2 definido como o traço do tensor endomorfismo curvatura em relação ao seu primeiro índice covariante e seu único índice contravariante ou, equivalentemente, como o traço em relação à métrica do tensor curvatura no seu primeiro e último índices. Portanto, os componentes da curvatura de Ricci são dados por*

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^n = \sum_{k,m=1}^n g^{km} R_{kijm}$$

Pelas simetrias do tensor endomorfismo curvatura, usar traços diferentes não faria diferença ou apenas implicaria em uma troca de sinal.

Definição 1.38. *Seja M uma variedade riemanniana. A curvatura escalar de M , denotada S , é a função real $S : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida como o traço em relação à métrica do tensor de Ricci:*

$$S = \text{tr}_g Ric = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} R_{ij}.$$

Definição 1.39. *Sejam M^n e \overline{M}^{n+k} ($k \geq 1$) variedades Riemannianas. Uma imersão $\phi : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k}$ é dita isométrica se $\langle d\phi_p(v), d\phi_p(w) \rangle_{\overline{M}} = \langle v, w \rangle_M, \forall v, w \in T_p M$.*

Dada uma imersão isométrica $\phi : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k}$, podemos estabelecer relações entre objetos definidos em ambas as variedades. Recordemo-nos que se $\phi : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k}$ é uma imersão, então ϕ é localmente um mergulho. Nestas condições, podemos identificar um aberto U de M com $\phi(U)$, e dizer que ϕ é localmente a aplicação de inclusão. Mais ainda, podemos considerar U como uma subvariedade de M . Em particular, estamos identificando $p \in U$ com $\phi(p) \in \phi(U)$.

Conseqüentemente, para cada $p \in M$, o espaço tangente $T_p M$ é considerado um subespaço vetorial de $T_p \overline{M}$ de dimensão n (já considerando a identificação acima).

1.2 Definições e Resultados de Geometria Riemanniana

Assim, se considerarmos o espaço k -dimensional $T_p M^\perp = \{v \in T_p \bar{M} : \langle u, v \rangle = 0, \forall u \in T_p M\}$, podemos escrever

$$T_p \bar{M} = T_p M \oplus T_p M^\perp.$$

O espaço $T_p M^\perp$ é chamado de espaço normal à M em p . Temos deste modo, o fibrado normal

$$TM^\perp = \{(p, N_p) \mid p \in M, N_p \in T_p M^\perp\} = \bigcup_{p \in M} T_p M^\perp.$$

Um campo de vetores normal N é uma correspondência que a cada $p \in M$ associa um vetor em $T_p M^\perp$. Dizemos que $N \in TM^\perp$ é diferenciável se ele for localmente a restrição à TM^\perp de algum campo de vetores diferenciável em \bar{M} . Indicaremos por $\mathcal{T}(M)^\perp$ os campos de vetores diferenciáveis normais à M .

Tomemos agora, campos locais de vetores X e Y tangentes a M . Como $\phi|_U$ é um mergulho, existem extensões locais \bar{X} e \bar{Y} de X e Y , respectivamente, numa vizinhança de U em \bar{M} . Assim, se $\bar{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de \bar{M} , faz sentido calcularmos $\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}$, ou até mesmo $\bar{\nabla}_X \bar{Y}$.

Pode-se mostrar que $\bar{\nabla}_X \bar{Y}$ não depende da extensão \bar{Y} de Y que tomamos, e portanto, por simplicidade de notação, denotaremos $\bar{\nabla}_X \bar{Y}$ por $\bar{\nabla}_X Y$, lembrando que isso significa tomar uma extensão de Y para calcular a derivada covariante.

Temos então:

$$\bar{\nabla}_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^\top + (\bar{\nabla}_X Y)^\perp.$$

No entanto, é possível verificar que $(\bar{\nabla} \cdot)^\top$ é a própria conexão de Levi-Civita de M (que denotaremos por ∇), isto é, $(\bar{\nabla}_X Y)^\top = \nabla_X Y$.

Denotemos por $\mathcal{T}(M^n)^\perp$ o espaço dos campos de vetores diferenciáveis normais à M^n . A *segunda forma fundamental* da imersão x é a aplicação $II : \mathcal{T}(M^n) \times \mathcal{T}(M^n) \rightarrow \mathcal{T}(M^n)^\perp$, definida por

$$II(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, \quad \forall X, Y \in \mathcal{T}(M^n).$$

1.2 Definições e Resultados de Geometria Riemanniana

Uma vez que, para todo $p \in M^n$, \mathbb{I} é uma aplicação bilinear simétrica, para cada vetor unitário N normal à M^n em p , podemos associá-la a uma aplicação linear auto-adjunta $S_N : T_p M^n \rightarrow T_p M^n$, dada por

$$\langle S_N(X), Y \rangle = \langle \mathbb{I}(X, Y), N \rangle, \forall X, Y \in T_p M^n.$$

Daí, vamos definir a *curvatura média* H da imersão $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ por

$$H = \frac{1}{n} \text{tr}(S_N).$$

Aqui $\text{tr}(S_N)$ significa o traço da matriz da aplicação S_N .

Sejam $N \in \mathcal{T}(M^n)^\perp$ e $X, Y \in \mathcal{T}(M^n)$. Então $\langle N, Y \rangle = 0$. Isto implica que

$$\langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle = \langle -\bar{\nabla}_X N, Y \rangle.$$

Daí

$$\langle S_N(X), Y \rangle = \langle \mathbb{I}(X, Y), N \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle = \langle -\bar{\nabla}_X N, Y \rangle, \quad (1.3)$$

pois $\langle \mathbb{I}(X, Y), N \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y - (\nabla_X Y)^T, N \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle$.

Agora, sabendo que $nH = \text{tr}(S_N)$ e que cada entrada da matriz S_N é dada por

$$\langle S_N(e_i), e_j \rangle = \langle \mathbb{I}(e_i, e_j), N \rangle = \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle,$$

podemos escrever nH da seguinte forma:

$$nH = \sum_{i=1}^n \langle S_N(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle. \quad (1.4)$$

Apresentaremos agora um resultado que será utilizado na demonstração do Teorema principal desta dissertação. Este resultado é conhecido por Primeira formula de Minkowski. Antes, porém, fixemos algumas notações.

Proposição 1.40. *Seja M uma variedade diferenciável dotada de uma conexão ∇ . Então existe uma única conexão*

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}_l^k(M) \rightarrow \mathcal{T}_l^k(M)$$

em cada $\mathcal{T}_l^k(M)$ tal que:

1.2 Definições e Resultados de Geometria Riemanniana

1. Em $\mathcal{T}_1(M) = \mathcal{T}(M)$, ∇ coincide com a conexão dada.

2. Em $\mathcal{T}_0(M) = C^\infty(M)$,

$$\nabla_X f = X(f).$$

3. ∇ satisfaz a regra do produto com relação a produtos tensoriais:

$$\nabla_X(F \otimes G) = (\nabla_X F) \otimes G + F \otimes (\nabla_X G).$$

4. ∇ comuta com todos os traços: se tr denota o traço com relação a qualquer par de índices, então

$$\nabla_X(tr F) = tr(\nabla_X F).$$

Além disso, esta conexão satisfaz também as propriedades adicionais:

(a) Para todos $Y \in \mathcal{T}(M)$ e $w \in \mathcal{T}^1(M)$ vale

$$\nabla_X[w(Y)] = (\nabla_X w)(Y) + w(\nabla_X Y).$$

(b) Para todos $T \in \mathcal{T}_l^k(M)$, $X_i \in \mathcal{T}(M)$ e $w^j \in \mathcal{T}^1(M)$ vale

$$\begin{aligned} (\nabla_X T)(X_1, \dots, X_k, w^1, \dots, w^l) &= X(T(X_1, \dots, X_k, w^1, \dots, w^l)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^k T((X_1, \dots, X_k, w^1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, w^l)) \\ &\quad - \sum_{j=1}^l T((X_1, \dots, X_k, w^1, \dots, \nabla_X w^j, \dots, w^l)) \end{aligned}$$

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [4], p. 141.

Definição 1.41. *Seja M uma variedade diferenciável dotada de uma conexão ∇ . Dado um campo (k, l) -tensorial $T \in \mathcal{T}_l^k(M)$, a derivada covariante total de T é o campo $(k+1, l)$ -tensorial*

$$\nabla T : \mathcal{T}_1(M) \times \dots \times \mathcal{T}_1(M) \times \mathcal{T}^1(M) \times \dots \times \mathcal{T}^1(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

definido por

$$\nabla T(Y_1, \dots, Y_k, X, w^1, \dots, w^l) = \nabla_X T(Y_1, \dots, Y_k, w^1, \dots, w^l).$$

1.2 Definições e Resultados de Geometria Riemanniana

Definição 1.42. *Seja $f \in C^\infty(M)$. O campo tensorial (ou tensor) covariante de ordem 2, $\nabla(\nabla f) = \nabla^2 f$ em M , dado por $\nabla(\nabla f)(X, Y) = Y((\nabla f)(Y)) - \nabla f(\nabla_Y X)$, $\forall X, Y \in \mathcal{T}(M)$ é chamado de Hessiana de f .*

Definição 1.43. *Seja $f \in C^\infty(M)$. O laplaciano de f é a função real definida por:*

$$\Delta f = \text{tr}_g \nabla^2 f$$

Proposição 1.44. *Seja M uma variedade riemanniana e ∇ a sua conexão de Levi-Civita (riemanniana). Então*

$$\nabla^2 f(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle \quad (1.5)$$

onde ∇f do lado direito da equação é o campo vetorial identificado com a 1-forma ∇f .

Dada uma hipersuperfície $x : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ vamos denotar por ∇ e $\bar{\nabla}$ a conexão riemanniana de M e \mathbb{R}^{n+1} , respectivamente. Do mesmo modo, denotaremos a diferencial covariante de uma função (ou gradiente) definida em M por ∇ e para uma função definida em \mathbb{R}^{n+1} por $\bar{\nabla}$. Nestas condições, também será denotado por ∇^2 e $\bar{\nabla}^2$ o hessiano e por Δ e $\bar{\Delta}$ o laplaciano de uma função. O gradiente ∇ de uma função diferenciável f denotará tanto a 1-forma como o campo de vetores identificado a ∇f , e o significado de ∇f ficará claro no contexto.

Seja F uma função diferenciável definida sobre um aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $M \subset U$ uma hipersuperfície de \mathbb{R}^{n+1} . Associe a $p \in M$, uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n, N\}$ de \mathbb{R}^{n+1} , de modo que N seja normal a M em p . Se considerarmos $f = F|_M$, $f \in C^\infty(M)$ e assim ∇f coincide com a componente tangencial do campo $\bar{\nabla} f$, ou seja, para cada ponto $p \in M$ temos

$$\nabla f(p) = \bar{\nabla} F(p) - \langle \bar{\nabla} F(p), N(p) \rangle N(p), \quad (1.6)$$

então pela equação (1.5) para quaisquer $X, Y \in T_p M$, obtemos

1.2 Definições e Resultados de Geometria Riemanniana

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f(X, Y) &= \langle \bar{\nabla}_X \nabla f, Y \rangle \\
&= \langle \bar{\nabla}_X \bar{\nabla} F, Y \rangle - \langle \bar{\nabla}_X \langle \bar{\nabla} F, N \rangle N, Y \rangle \\
&= \bar{\nabla}^2 F(X, Y) - \langle X(\langle \bar{\nabla} F, N \rangle) N + \langle \bar{\nabla} F, N \rangle \bar{\nabla}_X N, Y \rangle \\
&= \bar{\nabla}^2 F(X, Y) + \langle \bar{\nabla} F, N \rangle \langle S_N(X), Y \rangle. \tag{1.7}
\end{aligned}$$

Na penúltima igualdade usamos que X, Y é normal a N e que $\langle S_N(X), Y \rangle = \langle \Pi(X, Y), N \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N \rangle = -\langle \bar{\nabla}_X N, Y \rangle$

Exemplo 1.45. Considere $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(y) = \frac{1}{2} \|y - c\|^2$, para um certo ponto fixo c em \mathbb{R}^{n+1} . Agora use a definição (1.41) e note que $\bar{\nabla} F(y) = y - c$ e $\bar{\nabla}^2 F(w, v) = v(\bar{\nabla} F(w)) - \bar{\nabla}(\bar{\nabla}_v w) = \langle w, v \rangle, \forall y \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $v, w \in \mathbb{R}^{n+1}$. Suponha uma hipersuperfície $x : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ e considere $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(p) = F|_M(x) = \frac{1}{2} \|x - c\|^2$. Aqui estamos identificando M com $x(M)$ e x com $x(p) \in \mathbb{R}^{n+1}$, isto é, $f(p) = F(x(p))$. Veja que por (1.6) e (1.7) obtemos as seguintes expressões avaliadas em $p \in M$:

$$\nabla f = (x - c) - \langle x - c, N \rangle N = (x - c)^\top$$

e

$$\nabla^2 f(X, Y) = \langle X, Y \rangle + \langle x - c, N \rangle \langle S_N(X), Y \rangle, \forall X, Y \in T_p M.$$

Teorema 1.46. Primeira Formula de Minkowski Seja $x : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície mergulhada, compacta e orientada. Então

$$\int_M (1 + H \langle x, N \rangle) dS = 0$$

Onde H é a curvatura média de x .

Demonstração. Considere $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(p) = \frac{1}{2} \|x(p)\|^2$ e uma base de direções principais $\{e_1, \dots, e_n\}_p$ em $T_p M$. Então, pelo Exemplo 1.45 temos, em p , que

$$\nabla^2 f(e_i, e_i) = \langle e_i, e_i \rangle - \langle dN_p(e_i), e_i \rangle \langle x, N \rangle = 1 + k_i \langle x, N \rangle,$$

1.2 Definições e Resultados de Geometria Riemanniana

onde k_i são as curvaturas principais de M em p . Assim, pela observação feita no Teorema 1.9, bastaria mostrar que $\Delta f = 1 + H\langle x, N \rangle$. Com o mesmo efeito, mostraremos que $\Delta f = n(1 + H\langle x, N \rangle)$. De fato,

$$\begin{aligned}\Delta f &= \sum_{i=1}^n (1 + k_i\langle x, N \rangle) \\ &= n + \sum_{i=1}^n k_i\langle x, N \rangle \\ &= n + nH\langle x, N \rangle \\ &= n(1 + H\langle x, N \rangle)\end{aligned}$$

□

Definição 1.47. *Seja M uma hipersuperfície do \mathbb{R}^{n+1} e $p \in M$, dizemos que p é um ponto umbílico de S , se em p , as curvaturas principais se coincidem.*

Definição 1.48. *Seja M uma hipersuperfície do \mathbb{R}^{n+1} , dizemos que M é uma hipersuperfície umbílica, se todo ponto $p \in M$ for um ponto umbílico.*

Teorema 1.49. *Seja $x : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica umbílica de uma variedade Riemanniana conexa M^n em \mathbb{R}^{n+1} . Então, $x(M)$ é um subconjunto aberto de um hiperplano afim ou de uma esfera. No caso, da hipersuperfície ser compacta, temos que a hipersuperfície é a esfera.*

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [3] p. 31.

Capítulo 2

Variações da Área e Volume e Conceito de Estabilidade

Neste capítulo trataremos das fórmulas para a primeira variação da área e do volume e definiremos o conceito de Estabilidade para imersões, ferramentas estas que serão utilizadas para provar o teorema principal desta dissertação.

2.1 Fórmula para Primeira Variação da Área e Volume

Esta seção aborda a definição de variação para uma imersão x e as fórmulas para a primeira variação da área e do volume.

Definição 2.1. *Sejam D um domínio (aberto conexo) relativamente compacto (isto é, \bar{D} é compacto) com bordo suave e \bar{D} o fecho deste domínio. Uma variação da imersão $x : \bar{D} \subset M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é uma aplicação $X : (-\epsilon, \epsilon) \times \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $\epsilon > 0$, suave, tal que:*

(i) *Para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ a aplicação $x_t : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, definida por $x_t(p) =$*

2.1 Fórmula para Primeira Variação da Área e Volume

$X(t, p)$, é uma imersão;

(ii) $x_0 = x$.

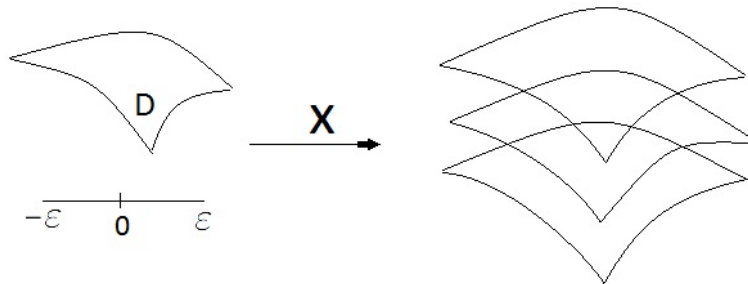


Figura 2.1: Variação da imersão X

O campo variacional relacionado a X em p é dado por:

$$\xi(p) = \left. \frac{\partial x_t}{\partial t}(p) \right|_{t=0}.$$

Quando para todo $p \in \partial D$, $x_t(p) = x_0(p)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, dizemos que X é uma variação que fixa o bordo ∂D .

Uma *variação é dita normal* quando o campo variacional é da forma $\xi(p) = f(p)N(p)$, para alguma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ suave. $N(p)$ é o vetor normal a $x_0(D)$ em $x_0(p)$.

O funcional área associado a variação X é a aplicação

$$A_D(t) = \int_D dS_t, \quad (2.1)$$

onde dS_t é o elemento de n -área de M^n na métrica induzida por x_t (veja mais sobre a forma elemento de área em [7]).

A partir daqui abandonaremos a notação de Einstein, ao invés de usar g^{ij} usaremos g_{ij} para os componentes da métrica. Denotaremos por g^t a métrica em M^n induzida por x_t . Isto é $g^t(Y, Z) = \langle dx_t Y, dx_t Z \rangle$, onde $Y, Z \in \tau(D)$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica usual de \mathbb{R}^{n+1} .

Considere $\{\frac{\partial}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_n}\}$ uma base numa vizinhança de $p \in M$ e $\{du_1, \dots, du_n\}$ sua respectiva base dual. Assim a expressão local do elemento de n -área de

2.1 F3rmula para Primeira Varia33o da 3rea e Volume

M^n na m3trica g^t 3 dada por:

$$dS_t = \sqrt{\det(g_{ij}^t)} du_1 \wedge \dots \wedge du_n. \quad (2.2)$$

Logo, se quisermos saber a primeira varia33o da area, temos que responder os seguintes lemas.

Lema 2.2. *Sejam $X : (-\epsilon, \epsilon) \times M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma varia33o da imers3o $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $\{e_1^{t_0}, \dots, e_n^{t_0}\}$ uma base de $T_p M$ na m3trica g^{t_0} e $\bar{E} = \frac{\partial}{\partial t}$ numa vizinhan3a coordenada de $(-\epsilon, \epsilon) \times M$. Ent3o $[e_i^{t_0}, \bar{E}] = 0, \forall i = 1, \dots, n$.*

Demonstra33o. Considere $f : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow \mathbb{R}$ suave, queremos calcular $[e_i^{t_0}, \bar{E}](f)$. Tome $q \in M$ e considere $y : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, uma parametriza33o de M em q . Considere ainda

$$\tilde{y} : (-\epsilon, \epsilon) \times W \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times M^n$$

a parametriza33o de $(-\epsilon, \epsilon) \times M^n$ em (t, q) , dada por $\tilde{y}(t, p) = (t, y(p))$. Aqui identificamos $T_{(t,q)}t \times M$ com $T_q M$. Assim,

$$e^{t_0}(t, q) = \sum_{i=1}^n a_i(q) \frac{\partial}{\partial y_i} \text{ e } \bar{E} = \frac{\partial}{\partial t}$$

Portanto, se $f : (-\epsilon, \epsilon) \times M^n \rightarrow \mathbb{R}$ 3 diferenci3vel, ent3o

$$\begin{aligned} [e_i^{t_0}, \bar{E}](f) &= e_i^{t_0}(\bar{E}(f)) - \bar{E}(e_i^{t_0}(f)) \\ &= e_i^{t_0} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) - \bar{E} \left(\sum_{i=1}^n a_i(q) \frac{\partial f}{\partial y_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i(q) \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^n a_i(q) \frac{\partial f}{\partial y_i} \right) = 0. \end{aligned}$$

□

Observa33es:

- A escolha da notaa3o $e_i^{t_0}$ como campo em $\tau(M)$ 3 feita unicamente para concordar com a notaa3o do lema a seguir.

2.1 Fórmula para Primeira Variação da Área e Volume

- Note que, se $E = dX \cdot \bar{E} = \frac{\partial x}{\partial t}$ e $e_i = dx_t e_i^{t_0}$ então $[e_i, E] = 0$, pois $[e_i, E] = dX[e_{t_0}^i, \bar{E}]$.

Lema 2.3. *A derivada do elemento de n -área, com respeito a t é dada por*

$$\frac{d}{dt} dS_t|_{t=t_0} = -n H_{t_0} f_{t_0}(p) dS_{t_0} + \sum_{i=1}^n e_i \langle T_{t_0}, e_i \rangle_{(t_0, p)} dS_{t_0},$$

onde $t_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$, $p \in M^n$ e T_{t_0} é um vetor tangente à M^n em (t_0, p) .

Demonstração. Considere um sistema de coordenadas normais em $p \in M^n$, definido numa vizinhança $V \subset M^n$ de p , com respeito a métrica g^{t_0} . Derivando a expressão (2.2), temos

$$\frac{d}{dt} dS_t|_{t=t_0} = \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\det(g_{ij}^t)|_{t=t_0}} du_1 \wedge \dots \wedge du_n.$$

Precisamos então calcular $\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\det(g_{ij}^t)|_{t=t_0}}$. Ficamos com,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\det(g_{ij}^t)|_{t=t_0}} &= \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\det(g_{ij}^t)|_{t=t_0}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \det(g_{ij}^t)|_{t=t_0} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \det(g_{ij}^{t_0}(p)) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\det(g_{ij}^t)|_{t=t_0}) \\ &= \frac{1}{2} (\det)'(g_{ij}^{t_0})(p) \cdot \left(\frac{\partial(g_{ij}^t)(p)}{\partial t} \right) |_{t=t_0} \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \left(\frac{\partial(g_{ij}^t)(p)}{\partial t} \right) |_{t=t_0}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

pois $g_{ij}^{t_0}(p) = Id$ e a derivada da função determinante aplicado a matriz identidade resulta no funcional linear traço. Para calcular os elementos da matriz $\left(\frac{\partial}{\partial t} |_{t=t_0} g_{ij}(t) \right)$, considere $e_i^{t_0} = \frac{\partial}{\partial u_i}$, os vetores coordenados da vizinhança normal em p . Assim, $\{e_1^{t_0}, \dots, e_n^{t_0}\}$ é uma base ortonormal de $T_p M$ na métrica g^{t_0} , e além disso, $\nabla_{e_i^{t_0}} e_j^{t_0}(p) = 0$. Ainda para enxugar a notação, denotemos $e_i = dx_t \cdot e_i^{t_0}$ e $E = dx \cdot \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t}$. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial t} |_{t=t_0} g_{ij}^t = \frac{\partial}{\partial t} |_{t=t_0} \langle dx_t e_i^{t_0}, dx_t e_j^{t_0} \rangle \quad (2.4)$$

2.1 Fórmula para Primeira Variação da Área e Volume

Usando a compatibilidade da conexão com a métrica, temos:

$$\langle dx_t e_i^{t_0}, dx_t e_j^{t_0} \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=t_0} \langle e_i, e_j \rangle = \langle \bar{\nabla}_E e_i, e_j \rangle + \langle e_i, \bar{\nabla}_E e_j \rangle. \quad (2.5)$$

Onde $\bar{\nabla}$ é a conexão Riemanniana em \mathbb{R}^{n+1} associada a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Usando que $(-\epsilon, \epsilon) \times M^n$ tem estrutura diferencial de produto, pelo lema anterior, temos que

$$[e_i, E] = \bar{\nabla}_{e_i} E - \bar{\nabla}_E e_i = 0. \quad (2.6)$$

$\forall i = 1, \dots, n$. Aplicando a equação acima em (2.5), ficamos com,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=t_0} g_{ij}(t) &= \langle \bar{\nabla}_E e_i, e_j \rangle + \langle e_i, \bar{\nabla}_E e_j \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{e_i} E, e_j \rangle + \langle e_i, \bar{\nabla}_{e_j} E \rangle \\ &= \left\langle \bar{\nabla}_{e_i} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right), e_j \right\rangle + \left\langle e_i, \bar{\nabla}_{e_j} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\det(g_{ij}^t)} \Big|_{t=t_0} &= \frac{1}{2} \text{tr} \left(\frac{\partial(g_{ij}^t)}{\partial t} (p) \right) \Big|_{t=t_0} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=t_0} g_{ii}(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \left\langle \bar{\nabla}_{e_i} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right), e_i \right\rangle_{(t_0, p)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Como

$$\frac{\partial x}{\partial t}(p) = f_t(p)N_t(p) + T_t(p),$$

com $T_t(p)$ um vetor tangente à M^n em (t, p) e N_t um vetor normal à M^n com relação à métrica g^{t_0} , segue que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\det(g_{ij}^t)} \Big|_{t=t_0} &= \sum_{i=1}^n \left\langle \bar{\nabla}_{e_i} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right), e_i \right\rangle_{(t_0, p)} \\ &= \sum_{i=1}^n e_i(f) \langle N, e_i \rangle_{(t_0, p)} + \sum_{i=1}^n f_{t_0}(p) \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_i \rangle_{(t_0, p)} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} T, e_i \rangle_{(t_0, p)} \\ &= \sum_{i=1}^n f_{t_0} \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_i \rangle_{(t_0, p)} + \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} T, e_i \rangle_{(t_0, p)}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.1 F3rmula para Primeira Varia33o da 3rea e Volume

Desenvolvendo o primeiro som3torio, $\sum_{i=1}^n f_{t_0}(p) \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_i \rangle_{(t_0,p)}$, e usando que

$$\begin{aligned} nH_{t_0} &= \text{tr}(S_{N_{t_0}}) = \sum_{i=1}^n \langle S_{N_{t_0}}(e_i)N, e_i \rangle_{(t_0,p)} \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} N_{t_0}, e_i \rangle_{(t_0,p)}, \end{aligned}$$

temos

$$f_{t_0}(p) \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} N_{t_0}, e_i \rangle_{(t_0,p)} = -nH_{t_0}f_{t_0}(p). \quad (2.9)$$

Com o segundo somatorio, $\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} T, e_i \rangle_{(t_0,p)}$, ficamos com

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_{e_i} T_{t_0}, e_i \rangle &= e_i \langle T_{t_0}, e_i \rangle_{(t_0,p)} - \langle T_{t_0}, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle_{(t_0,p)} \\ &= e_i \langle T_{t_0}, e_i \rangle_{(t_0,p)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Visto que $\bar{\nabla}_{e_i} e_i(p) = (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N(p)$. Assim, usando (2.9) e (3.4) a equa33o (2.8), se iguala a

$$\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{g(t)}|_{t=t_0} = -nH_{t_0}f_{t_0} + \sum_{i=1}^n e_i \langle T_{t_0}, e_i \rangle_{(t_0,p)}.$$

Portanto

$$\frac{d}{dt} dS_t|_{t=t_0} = \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{g(t)}|_{t=t_0} dS_{t_0} = -nH_{t_0}f_{t_0} dS_{t_0} + \sum_{i=1}^n e_i \langle T_{t_0}, e_i \rangle_{(t_0,p)} dS_{t_0}.$$

□

Enfim, a *f3rmula da primeira varia33o da 3rea*.

Teorema 2.4. *Se $X : (-\epsilon, \epsilon) \times \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 3 uma varia33o da imers3o x , que preserva o bordo, ent3o a primeira varia33o da 3rea 3 dada por*

$$A'_D(t)|_{t=0} = -n \int_D f H dS, \quad (2.11)$$

onde $f = \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(0, p), N \right\rangle$.

2.1 F3rmula para Primeira Varia33o da 3rea e Volume

Demonstra33o. Considere $t_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$ fixo. Sabemos que

$$A'_D(t_0) = \frac{d}{dt} \int_D dS_t|_{t=t_0} = \int_D \frac{d}{dt} dS_t|_{t=t_0}$$

Pelo Lema 2.3, vale que

$$\begin{aligned} A'_D(t_0) &= \int_D \frac{d}{dt} dS_t|_{t=t_0} \\ &= - \int_D nH_{t_0} f_{t_0} dS_{t_0} + \int_D \sum_{i=1}^n e_i (\langle T_{t_0}, e_i \rangle_{(t_0,p)}) dS_{t_0} \\ &= - \int_D nH_{t_0} f_{t_0} dS_{t_0} + \int_D d \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \langle T_{t_0}, e_i \rangle_{(t_0,p)} du_1 \wedge \dots \wedge \widehat{du}_i \wedge \dots \wedge du_n \right). \end{aligned}$$

Aqui \widehat{du}_i significa a omiss3o do termo du_i . Segue ent3o, do Teorema de Stokes 1.7 que,

$$\begin{aligned} A'_D(t_0) &= - \int_D nH_{t_0} f_{t_0} dS_{t_0} + \sum_{i=1}^n \int_{\partial D} (-1)^{i+1} \langle T_{t_0}, e_i \rangle_{(t_0,p)} du_1 \wedge \dots \wedge \widehat{du}_i \wedge \dots \wedge du_n \\ &= - \int_D nH_{t_0} f_{t_0} dS_{t_0}. \end{aligned}$$

A ultima igualdade decorre do fato que $T_{t_0} \equiv 0$ em ∂D , devido X ser uma varia33o que fixa o bordo. Em particular, para $t_0 = 0$,

$$A'_D(0) = - \int_D nH f dS.$$

□

Portanto D 3 um ponto cr3tico para o funcional 3rea se, e somente se, a curvatura m3dia H 3 identicamente nula. O que motiva a defini33o de superf3cie minima, a qual exige que a hipersuperf3cie possua curvatura m3dia nula.

Agora definemos a fun33o volume. Seja $X : (-\epsilon, \epsilon) \times M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$, $\epsilon > 0$, uma varia33o da imers3o $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$, onde $\overline{M}^{n+1}(c)$ 3 uma variedade Riemanniana com curvatura seccional c (confira Defini33o 1.36).

O *volume* de $V_{M^n}(t)$ da varia33o X 3 definido por

$$V_{M^n}(t) = \int_{[0,t] \times M^n} X^* d\overline{M}. \quad (2.12)$$

2.1 F3rmula para Primeira Varia33o da 3rea e Volume

Aqui $d\bar{M}$ 3 o elemento de volume na variedade $\bar{M}^{n+1}(c)$ e $X^*d\bar{M}$ 3 o pull-back da forma volume de \bar{M} para $(-\epsilon, \epsilon) \times \bar{M}$, quando $\bar{M}^{n+1}(c) = \mathbb{R}^{n+1}$, temos que a fun33o volume $V : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ do dom3nio relativamente compacto $D \subset M^n$ 3 dada por

$$\begin{aligned} V_D(t) &= \int_{[0,t] \times D} dx_1 \dots dx_{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \int_{[0,t] \times D} \operatorname{div}(x_1 e_1 + \dots + x_{n+1} e_{n+1}) dx_1 \dots dx_{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \int_{\partial D} \langle x_t, N_t \rangle dS_t, \end{aligned} \quad (2.13)$$

a 3ltima igualdade foi obtida atrav3s do Teorema da Diverg3ncia 1.8.

Dizemos que uma varia33o preserva volume, se $V_D(t) = V_D(0)$, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Vejam3s agora a primeira varia33o do volume.

Lema 2.5. *Para toda varia33o $X : (-\epsilon, \epsilon) \times \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ que fixa o bordo, temos*

$$V'_D(t)|_{t=0} = \int_D f dS, \quad (2.14)$$

onde $f = \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(0, p), N \right\rangle$.

Demonstra33o. Fixe $p \in M^n$ e considere $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal numa vizinhan3a V de $x(p)$. Como $X^*d\bar{M}$ 3 uma forma volume, existe uma fun33o $b : (-\epsilon, \epsilon) \times \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo

$$X^*d\bar{M} = b(t, p) dt \wedge dS.$$

Assim,

$$\begin{aligned} b(t, p) &= X^*d\bar{M} \left(\frac{\partial}{\partial t}, e_1, \dots, e_n \right) \\ &= d\bar{M} \left(\frac{\partial X}{\partial t}, dx_t e_1, \dots, dx_t e_n \right) \\ &= \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(t, p), N(t, p) \right\rangle \end{aligned}$$

2.2 Estabilidade

Usando o Teorema de Fubini 1.11, segue que,

$$\int_{[0,t] \times D} b(t,p) dt \wedge dS = \int_{[0,t]} \left(\int_D b(t,p) dS \right) dt.$$

Derivando a formula do volume, (2.12), em $t = 0$, temos,

$$\begin{aligned} V'_D(0) &= \frac{d}{dt} \int_{[0,t] \times D} X^* d\bar{M}|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \int_{[0,t]} \left(\int_D b(t,p) dS \right) dt|_{t=0} \\ &= \int_D b(t,p) dS|_{t=0} \\ &= \int_D \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(t,p), N \right\rangle dS|_{t=0} \\ &= \int_D f dS. \end{aligned}$$

□

2.2 Estabilidade

Antes de apresentarmos a definição de Estabilidade proposta por Do Carmo e J. L. Barbosa enunciamos o seguinte resultado.

Teorema 2.6. *Uma condição necessária e suficiente para que o funcional área $A(x_t)$ tenha valor crítico em $t = 0$ para toda a variação x_t que preserva volume e deixa o bordo fixo é que a superfície imersa x_0 tenha curvatura média H constante.*

Observamos que a condição suficiente pode ser obtida combinando o Teorema 2.4 e o Lema 2.5. Já a condição necessária segue da idéia de demonstração do Lema 3.3 que veremos no próximo capítulo.

Problemas variacionais do tipo acima são chamados problemas isoperimétricos. Um procedimento padrão para determinar os pontos críticos destes problemas é, em analogia com os multiplicadores de Lagrange, procurar

2.2 Estabilidade

os pontos críticos da função J , dada por

$$J(t) = A(t) + \lambda V(t)$$

onde λ é constante e as variações x_t de x possuem suporte compacto.

No entanto, quando calcularmos a segunda variação, os dois problemas não estão distantes de uma certa equivalência. Tal fato tinha sido indicado no texto clássico *Calculus of Variations*, veja [11]. Quando $\lambda = nH$, os pontos críticos para ambos os problemas são os mesmos. Assim é possível encontrar uma relação entre eles da seguinte forma: $A''(0) \geq 0$ para variações de suporte compacto se, e somente se, $J''(0) \geq 0$ para variações de suporte compacto e que satisfazem a hipótese adicional de ter média zero, isto é,

$$\int_{M^n} f dM = 0$$

onde f é a componente normal do vetor variacional. Veja Proposição 2.7 de [1].

A definição de estabilidade, que será usada neste trabalho, está associada ao fato da segunda variação $A''(0)$ ser não negativa para variações de suporte compacto, qual seja:

Definição 2.7. *Sejam $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante e $D \subset M^n$ um domínio relativamente compacto com bordo suave ∂D . O domínio D será dito **estável**, se $A''_D(0) \geq 0$ para toda variação que preserva volume e fixa o bordo. Dizemos que x é uma **imersão estável**, se qualquer $D \subset M^n$ é estável.*

Pelas considerações acima, temos que, para uma imersão x com curvatura média constante não-nula ser estável, basta que $J''(0) \geq 0$ para variações de suporte compacto que satisfazem a condição de média zero. Com a nossa definição a esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é estável, como demonstraremos no Capítulo 3. Além disso, com esta definição, o “limite” de estabilidade de um cilindro circular concorda com resultados obtidos experimentalmente com películas

2.2 Estabilidade

de sabão sobre uma diferença de pressão constante, veja exemplo (2.17) de [1] e D'Arcy Thompson [10], p. 379).

Poderíamos definir estabilidade somente pela condição $J''(0) \geq 0$ para variações com suporte compacto, no entanto esferas não seriam estáveis, confira observação (2.15) de [1] e o limite de estabilidade do cilindro circular seria metade do esperado.

Neste trabalho a hipótese de média zero é fundamental porém, em Mori [9], podemos encontrar uma definição de estabilidade sem usar a condição de média zero.

Observamos que, em [13], Hsiang, Teng e Yu apresentaram exemplos de hipersuperfícies não esféricas $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $n > 2$, que tem curvatura média constante. Então, pelo resultado principal, estas imersões são exemplos de hipersuperfícies não-estáveis.

Capítulo 3

Desigualdade Isoperimétrica

Neste capítulo discutiremos sobre um problema clássico do Cálculo Variacional, a Desigualdade Isoperimétrica. Esse problema, no caso clássico, de curvas no plano, afirma que, dentre todas as curvas planas fechadas e simples com o mesmo comprimento, aquela que limita a maior área é a circunferência. Veremos aqui a desigualdade para este caso e o caso em \mathbb{R}^n . A partir deste último caso provaremos que a esfera é estável. Restando ao capítulo 4 provar apenas uma direção do Teorema de Estabilidade de Barbosa e do Carmo.

3.1 O Caso Clássico: Curvas no Plano

Inicialmente vejamos como provar a desigualdade isoperimétrica clássica. Se C é uma curva suave fechada simples dada parametricamente por $(x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ então, o seu comprimento de arco L pode ser expresso como

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt. \quad (3.1)$$

A área A englobada por C pode também ser expressa, através do Teorema de Green 1.10, por uma integral de linha

$$A = - \int_C y dx = - \int_a^b y \frac{dx}{dt} \quad (3.2)$$

3.1 O Caso Clássico: Curvas no Plano

em que a orientação determinada por C pode ser assumida positiva no que diz respeito ao seu interior. Um pouco de experimentação revela que habituais desigualdades integrais vão pelo caminho errado, dando um limite superior para L^2 , então somos levados ao simples artifício de introduzir um parâmetro especial, a fim de eliminar a raiz quadrada na integral (3.1). Qualquer múltiplo do parâmetro s do comprimento de arco serve. O mais adequado é $t = \frac{2\pi}{L}s$, conforme veremos no lema 3.1. Assim

$$x(s(t)) = x\left(\frac{L}{2\pi}t\right) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \left(\frac{L}{2\pi} \cdot \frac{dx}{ds}\right),$$

o mesmo vale para $y(s(t))$, logo, $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi} \left(\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right) = \frac{L^2}{4\pi}$. Então

$$\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right] dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 dt = \frac{L^2}{2\pi}$$

e

$$\begin{aligned} L^2 - 4\pi A &= 2\pi \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right] dt + 4\pi \int_0^{2\pi} \left(y \frac{dx}{dt}\right) dt \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 2y \frac{dx}{dt} \right] dt \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{dx}{dt} + y\right)^2 dt + 2\pi \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - y^2 \right] dt \quad (3.3) \end{aligned}$$

O primeiro termo sobre a direita de (3.3) é não negativo. Resta-nos provar que

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 dt \geq \int_0^{2\pi} y^2 dt \quad (3.4)$$

A desigualdade (3.4), chamada *Desigualdade de Wirtinger*, não pode ocorrer para uma função arbitrária $y(t)$, pois falha quando $y(t)$ é uma constante diferente de zero. No entanto, tem-se o seguinte resultado clássico. (Para uma história deste resultado, e uma discussão da sua atribuição habitual, “A

3.1 O Caso Clássico: Curvas no Plano

desigualdade de Wirtinger,” veja [34]). Antes, porém, de enunciar o resultado citado acima, note que a escolha de $t = \frac{2\pi}{L}s$ garante que y tenha período 2π e isso nos permite aplicar o lema abaixo.

Lema 3.1. *Se $y(t)$ é uma função suave com período 2π , e se $\int_0^{2\pi} y(t)dt = 0$, então(3.4) ocorre, com igualdade se e somente se $y = a \cos t + b \sin t$.*

Demonstração. Seja

$$y(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt),$$

a expansão de y em série de Fourier. Como y é uma função de suave, então y' é uma função contínua. Daí,

$$y'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nt - na_n \operatorname{sen} nt).$$

Agora calcularemos o valor da integral $\int_0^{2\pi} y(t)dt$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} y(t)dt &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt) \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} dt + \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt) \right) dt. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Como, $\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt) \right) dt = 0$, , $\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} dt = \pi a_0$, e por hipótese, $\int_0^{2\pi} y(t)dt = 0$. Segue que $a_0 = 0$. Assim a função y se reduz a:

$$y(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt)$$

Usando agora a formula de Parseval (1.12), temos:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t)^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2), \quad (3.6)$$

3.1 O Caso Clássico: Curvas no Plano

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y'(t)^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2). \quad (3.7)$$

Logo, por (3.6) e (3.7), vale

$$\int_0^{2\pi} y'(t)^2 dt - \int_0^{2\pi} y(t)^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \pi n^2 (n^2 - 1) (a_n^2 + b_n^2) \geq 0.$$

E a igualdade só ocorre se $a_n = b_n = 0$ para qualquer $n > 1$. Então, a função y se reduz simplesmente a $y(t) = a \cos t + b \sin t$.

□

Para uma referência para essa discussão veja o livro de Hardy, Littlewood, e Pólya [32].

Para aplicar o lema de Wirtinger 3.1 ao nosso caso, nos precisamos somente observar que a hipótese $\int_0^{2\pi} y(t) dt = 0$ pode sempre ser satisfeita. Como não estamos interessados na localização da curva no espaço, mas sim, no seu comprimento e área que a mesma engloba, podemos fazer escolha de coordenadas adequadas, especificamente, escolher o eixo x para passar sobre o centro de gravidade da curva C , por exemplo, fazendo $\bar{y}(s) = y(s) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(s) ds$ teremos $\int_0^{2\pi} \bar{y}(s) ds = 0$. Então, pelo lema 3.1, ambos os termos da direita de (3.3) são não negativos, dando

$$L^2 \geq 4\pi A \quad (3.8)$$

A igualdade ocorre em (3.8) somente se ambos termos do lado direito em (3.3) zeram, e usando o lema 3.1 se vê que $y(t) = a \cos t + b \sin t$ e, por $\frac{dx}{dt} + y = 0$, $x(t) = a \sin t - b \cos t$. Logo C deve ser um círculo.

É interessante notar que esta prova não usa em parte alguma a hipótese que C é simples. A desigualdade (3.8) vale para uma curva suave fechada arbitrária, onde L e A estão definidos por (3.1) e (3.2). De fato, se tem:

Lema 3.2. *A desigualdade de Wirtinger (Lema 3.1) é equivalente a afirmação de que a desigualdade isoperimétrica (3.8) ocorre para toda curva fechada*

3.1 O Caso Clássico: Curvas no Plano

suave, com igualdade somente para um círculo, onde L e A em (3.8) estão definidos por (3.1) e (3.2).

Demonstração. Já vimos que com a desigualdade de Wirtinger (3.2) temos válido a desigualdade isoperimétrica (3.8), provemos agora a outra direção. Considere $y(t)$ uma função suave com período 2π , satisfazendo $\int_0^{2\pi} y(t)dt = 0$ (isto é, considere y satisfazendo as hipóteses do Lema 3.1). Defina $x(t) = -\int_0^t y(\tau)d\tau$. Então $x(t+2\pi) - x(t) = -\int_t^{t+2\pi} y(\tau)d\tau = 0$. Segue que x também tem período 2π e o par $(x(t), y(t))$ define uma curva fechada suave. Seu comprimento L , fazendo $g(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ e $f \equiv 1$ na desigualdade de Schwarz (Desigualdade de Holder 1.14 $p = 2$), satisfaz

$$\begin{aligned} L^2 &= \left[\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \right]^2 \\ &\leq 2\pi \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right] dt. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Assim, usando (3.2) e (3.8) dá

$$\begin{aligned} 0 &\leq L^2 - 4\pi A = 2\pi \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right] dt + 4\pi \int_0^{2\pi} \left(y \frac{dx}{dt} \right) dt \\ &\leq 2\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{dx}{dt} + y \right)^2 dt + 2\pi \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - y^2 \right) dt. \end{aligned} \quad (3.10)$$

O primeiro termo da direita zera pela definição de $x(t)$, e assim (3.10) reduz a desigualdade de Wirtinger (3.4), aqui finaliza uma parte da demonstração. Resta ver que a igualdade ocorre se, e somente se, $y = a \cos t + b \sin t$.

Para a igualdade ocorrer em (3.10) basta que ocorra em (3.9), o que somente acontece se

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \equiv C^2.$$

3.2 Domínios em \mathbb{R}^n

Por (3.1) segue que $L = 2\pi C$ e logo $\frac{ds}{dt} = \frac{L}{2\pi}$.

Como a curva deve ser um círculo, segue, usando $\int_0^{2\pi} y(t)dt = 0$, que $y(t)$ é da forma $y = a \cos t + b \sin t$. Isto prova o lema. \square

A pergunta óbvia é se a quantidade A em (3.2) tem algum significado geométrico, no caso de uma curva C com autointerseções. O *complemento* de C consiste de um número de componentes D_k , e com respeito a cada domínio D_k , C tem número de enrolamento n_k (com sinal) bem definido. Então a expressão (3.2) tem, a interpretação $A = \sum n_k A_k$, onde A_k é área (no sentido usual) do domínio D_k (veja Radó [28], ou [30]). Assim, a prova dada acima para (3.8) mostra que para uma curva fechada arbitrária se tem

$$L^2 \geq 4\pi \sum_k n_k A_k, \quad (3.11)$$

e o Lema 3.2 diz que esta desigualdade para todas as curvas é equivalente a desigualdade de Wirtinger. Atualmente um resultado mais forte é válido, a saber

$$L^2 \geq 4\pi \sum_k |n_k| A_k. \quad (3.12)$$

Note que para curvas com laços simétricos (∞ por exemplo), o lado direito de (3.11) é nulo, enquanto (3.12) dá a soma de áreas em cada loop.

A desigualdade (3.12) foi provada por Radó [29] (seção 4.6). Ela também aparece como um caso especial de desigualdade isoperimétrica dada por Federer e Fleming [16] em seu fundamental artigo sobre corrente integrais e normais (Corolário 6.5 e Observação 6.6, p. 487).

3.2 Domínios em \mathbb{R}^n

O problema isoperimétrico em \mathbb{R}^n é minimizar a área superficial entre todos domínios contendo dado volume, ou equivalentemente, maximizar o volume entre todos domínios cuja superfície fronteira tem área $(n - 1)$ -dimensional fixada. A solução em ambos os casos é o domínio limitado

3.2 Domínios em \mathbb{R}^n

pela esfera. No entanto para $n > 2$ não existem provas que aproximam da simplicidade da que se deu para domínios planos.

Talvez a abordagem mais direta assumindo-se trabalhar com fronteiras suaves, é tentar utilizar os métodos do cálculo variacional. Considere, por exemplo, um domínio D em \mathbb{R}^3 limitado por uma superfície suave S . Seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de valores reais suave sobre S , e seja S_t a superfície obtida por deslocar cada ponto de S pelo vetor tfN , onde N é o campo normal exterior unitário a S . Se $A(t)$ é a área de S_t e $V(t)$ é o volume englobado por S_t então as fórmulas para primeira variação, como visto no Capítulo 2, são:

$$A'(0) = -3 \int_S f H dA \quad (3.13)$$

$$V'(0) = \int_S f dA \quad (3.14)$$

Onde H é a curvatura média de S com respeito ao normal N . Agora se existir uma função f tal que $V'(0) = 0$ e $A'(0) \neq 0$, então uma homotetia com fator $\left(\frac{V}{V(t)}\right)^{\frac{1}{3}}$ transforma a superfície S_t numa superfície \hat{S}_t limitando um volume V constante (veja (4.5)) e tendo área superficial $\hat{A}(t)$ que para todo pequeno valor de t será ou estritamente maior que ou estritamente menor que A , dependendo do sinal de t (veja (4.4)). Assim, para a superfície original S ter área mínima entre todas superfícies limitando mesmo volume V , deve ser verdade sempre que $\int_S f dA = 0$, e também $\int_S f H dA = 0$. Segue então que H deve ser constante sobre S . A saber, se H tiver valores diferentes em dois pontos então se pode escolher f para ser zero exceto sobre pequenas vizinhanças de cada ponto, e ter sinais opostos sobre essa vizinhança de tal maneira que $\int_S f dA = 0$, mas $\int_S f H dA > 0$. A correspondente variação teria o efeito geométrico de arredondar a superfície S , no sentido que ela iria puxar a superfície no ponto em que a curvatura média fosse maior, e empurrar para fora de uma quantidade praticamente igual no ponto onde ela foi menor. Isso deve preservar o volume, mas diminuir a área superficial.

A conclusão deste argumento é portanto.

3.2 Domínios em \mathbb{R}^n

Lema 3.3. *Se uma superfície S tem área mínima entre todas superfícies que limitam o mesmo volume, então a curvatura média de S deve ser constante.*

Utilizando ainda o argumento acima, podemos concluir que se $A'(0) = 0$ para toda variação que fixa o bordo e volume então $H(x_0)$ é constante em (2.6).

O Lema (3.3) despertou a seguinte pergunta, “É uma superfície de curvatura média constante necessariamente uma esfera?” Esta questão tem uma longa e interessante historia. Tem uma contrapartida física na questão “pode uma bolha de sabão ter outra forma se não a esfera?” As propriedades físicas da película de sabão tem como consequência que a curvatura média da película em cada ponto é proporcional a diferença de pressão do ar nos dois lados. Assim, uma bolha de sabão deve ter uma curvatura média constante determinada pela diferença de pressão sobre interior e exterior. A justificativa física para isso é a *equação de Laplace-Young*, em homenagem ao matemático francês Pierre Simon Laplace (1749-1827) e o físico Inglês Thomas Young (1773-1829), que afirma que a diferença de pressão entre os dois os lados de uma película ou de uma bolha é dado pelo produto da tensão superficial e a curvatura média da superfície formada.

O primeiro resultado para essa pergunta obtido foi devido a Liebmann [27] em 1900. Ele mostrou que se uma superfície, estritamente convexa (1.2), compacta em \mathbb{R}^3 tem curvatura média constante, então ela deve ser a esfera.

Vale a pena observar aqui que a diferença entre problemas isoperimétricos em duas dimensões e em dimensões mais altas é que em duas dimensões o resultado para domínios convexos implica imediatamente o resultado geral. Isto é, dado um domínio não convexo no plano, seu casco convexo (1.1) tem maior área do que o domínio original e menor comprimento de fronteira. Por outra lado, para certos domínios não convexos em \mathbb{R}^3 , tais como aqueles com um pico acentuado exterior, o casco convexo tem ambos maior volume e área.

Retornando ao problema das superfícies de curvatura média constante,

3.2 Domínios em \mathbb{R}^n

Heinz Hopf [26] em 1951 provou uma versão mais forte do Teorema de Liebmann em que não era necessário a hipótese de convexidade, e de fato a superfície poderia até possuir auto interseções. O único requisito é que a superfície deveria ser definida por um mapa regular de uma 2-esfera em \mathbb{R}^3 . A. D. Aleksandrov [25] em 1958 generalizou o Teorema de Liebmann em uma direção diferente. Usando um argumento geométrico engenhoso ele mostrou que qualquer superfície de curvatura média constante sem hipóteses sobre seu tipo topológico, deve ser uma esfera. Por outro lado, não foi permitido ter a superfície auto-interseção. Num artigo mais tarde [24], Aleksandrov generalizou seu trabalho de varias maneiras, incluindo a admissão de determinadas superfícies com auto interseções.

Apenas em 1977 uma prova puramente analítica do teorema de Aleksandrov foi obtida por Reilly [23], [?]. Ao contrário do método de prova de Hopf, que usa argumentos de variáveis complexas e é válida somente para superfícies dois-dimensionais, ambas provas de Reilly e Aleksandrov valem para hipersuperfícies de curvatura média constante em \mathbb{R}^n para $n \geq 3$. Como os argumentos variacionais dado acima estendem imediatamente a dimensões arbitrárias, e uma vez que as superfícies consideradas são fronteiras de domínios e, portanto, livre de auto-interseções, chega-se ao seguinte resultado: *Suponha que uma hipersuperfície S em \mathbb{R}^n tem área $(n - 1)$ - dimensional mínima entre todas as superfícies que englobam o mesmo volume. Então, ela deve ter curvatura média constante e, portanto, ser uma esfera.*

À primeira vista isso pode parecer resolver o problema isoperimétrico em dimensões altas. No entanto, ele acaba por ser, essencialmente, um forte teorema de unicidade. Nenhuma outra *superfície* se não uma esfera pode ter área mínima entre todas aquelas que envolvem o mesmo volume. O que está faltando é um teorema de existência afirmando que existe realmente alguma superfície de área mínima. Exatamente a mesma objeção se aplica a muitos argumentos geométricos engenhosos de Steiner para mostrar a propriedade isoperimétrica do círculo e da esfera. (Para uma discussão sobre esta questão,

3.2 Domínios em \mathbb{R}^n

ver Capítulo X do livro de Pólya [22]). A falta de um teorema de existência era explicitamente indicado por H. A. Schwarz [20], que passou a dar a primeira prova completa da desigualdade isoperimétrica em \mathbb{R}^3 . Não iremos no entanto, seguir esta linha mais longa, faremos uma abordagem inteiramente diferente para o problema.

Em primeiro lugar, uma observação geral. Se começarmos com uma fronteira relativamente suave, adicionando “perturbações” isso terá muito pouco efeito sobre o volume englobado, mas vai aumentar grandemente a área da superfície. Assim, tem-se uma situação um pouco irônica que quanto mais irregular a fronteira, mais forte será a desigualdade isoperimétrica, mas isto é difícil provar. O fato é que a desigualdade isoperimétrica ocorre com maior generalidade que se possa imaginar, mas é preciso definições adequadas para mencioná-las.

No caso de duas dimensões, não há nenhum problema. Se a curva fronteira é não retificável, então podemos definir $L = \infty$, e a desigualdade ocorre de modo trivial. Se, por outro lado, é retificável, então, pela própria definição de retificabilidade, seu comprimento é o limite dos comprimentos de aproximação de polígonos, e pode-se obter a desigualdade isoperimétrica no caso mais geral do caso especial de polígonos.

Em dimensões altas, complicações de ordem completamente diferente podem surgir. Existem muitas definições diferentes de área de superfície, adequadas para vários propósitos, e, embora todas elas concordem para superfícies suficientemente suaves, elas podem muito bem dar valores diferentes em circunstâncias menos comuns. Este problema é particularmente crítico no cálculo das variações, uma vez que, a fim de se obter uma solução, normalmente se quer assumir a menor regularidade possível para começar, e então, mostrar que é a suavidade uma consequência de alguma propriedade extremal. É somente através da análise das consequências de uma determinada definição de área de superfície que se pode decidir sua adequação ou “correção”. A validade da desigualdade isoperimétrica é, de fato, um critério

3.2 Domínios em \mathbb{R}^n

que tem sido utilizado. Veja, em particular, o artigo de Besicovitch [18], [19] e Radó [29]; também Radó [30](p. 560) que discorrem sobre o assunto.

A noção que é mais adequado para os nossos objetivos é a do conteúdo de Minkowski. A fim de defini-la, devemos assumir que temos uma noção bem definida do volume de conjuntos abertos em \mathbb{R}^n , sendo a mais óbvia a Medida de Lebesgue n -dimensional (veja o livro do Bartle [35] (p. 144)).

Vamos usar a seguinte notação:

$V(A)$ = volume do conjunto A

$B_r^n(a) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| < r\}$

$B_r^n = B_r^n(0)$

$w_n = V(B_1^n(0))$

$S_r^{n-1}(a) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| = r\}$

$S_r^{n-1} = S_r^{n-1}(0)$

Além disso, dado um conjunto arbitrário E , defina

$$E_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists y \in E, |x - y| < r\}.$$

Assim E_r é um conjunto aberto consistindo de todos os pontos que distam menos que r de E : um espaçamento ou domínio tubo sobre E .

Para qualquer inteiro k , $1 \leq k \leq n - 1$, defina

$$M_k(E) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{V(E_r)}{w_{n-k} r^{n-k}}. \quad (3.15)$$

$M_k(E)$ é chamado o conteúdo Minkowski k -dimensional de E . Mais precisamente, ele deve ser chamado de “menor conteúdo de Minkowski k -dimensional exterior,” mas nós vamos optar pela informalidade. Para uma discussão completa de suas propriedades, e uma prova de que, em circunstâncias favoráveis seu valor coincide com o obtido de toda uma série de outras definições, referimo-nos ao livro de Federer [15] [3.2.37, 3.2.39, e 3.2.26].

Das propriedades elementares de volume, segue-se de $V(B_1^n) = w_n$ que

$$V(B_r^n) = w_n r^n. \quad (3.16)$$

3.2 Domínios em \mathbb{R}^n

Assim, o denominador na definição de $M_k(E)$ é o volume de uma esfera de raio r em \mathbb{R}^{n-k} . Se pensarmos E como sendo uma variedade k -dimensional, então, pode-se pensar nesta bola situada no espaço afim $(n-k)$ -dimensional perpendicular ao plano tangente k -dimensional a E em cada ponto, e a definição de $M_k(E)$ baseia-se na idéia de que, para r pequeno, o volume do domínio tubo E_r é aproximadamente igual à medida de E vezes a “área transversal” perpendicular à E . Vamos testar a definição para calcular a área da superfície da esfera S_r^{n-1} . Se $E = S_r^{n-1}$, então, para $0 < \rho < r$, $E_\rho = B_{r+\rho}^n - B_{r-\rho}^n$, e

$$\begin{aligned} V(E_\rho) &= w_n(r+\rho)^n - w_n(r-\rho)^n \\ &= w_n\left(r^n + \binom{n}{1}r^{n-1}\rho + \binom{n}{2}r^{n-2}\rho^2 + \dots + \binom{n}{n-1}r^1\rho^{n-1} + \rho^n\right) \\ &\quad - \left(r^n - \binom{n}{1}r^{n-1}\rho + \binom{n}{2}r^{n-2}\rho^2 - \dots\right) \\ &= w_n\left(2nr^{n-1}\rho + 2\binom{n}{3}r^{n-3}\rho^3 + \dots\right). \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} M_{n-1}(S_r^{n-1}) &= \liminf_{\rho \rightarrow 0} \frac{V(E_\rho)}{w_1\rho} = \liminf_{\rho \rightarrow 0} \frac{2\rho w_n(nr^{n-1} + \binom{n}{3}r^{n-3}\rho^2 + \dots)}{w_1\rho} \\ &= nw_n r^{n-1}, \end{aligned} \tag{3.17}$$

pois $w_1 = 2$.

Disto nos concluímos que se D é a bola B_r^n , então por (3.16) e (3.17), seu volume V e sua área A são dadas por

$$V = w_n r^n, \quad A = nw_n r^{n-1}$$

segue que

$$A^n = n^n w_n V^{n-1}. \tag{3.18}$$

Sabendo que a esfera tem área mínima entre as superfícies que englobam o mesmo volume, temos que a desigualdade isoperimétrica para domínios em

3.2 Domínios em \mathbb{R}^n

\mathbb{R}^n afirma, que se D é um domínio arbitrário em \mathbb{R}^n , o seu volume V e a área da superfície A estão relacionados por:

$$A^n \geq n^n w_n V^{n-1}, \quad (3.19)$$

com igualdade se e somente se $D = B_r^n(a)$ para algum r e a .

De acordo com a nossa discussão acima, a quantidade A em (3.19) é entendida ser $M_{n-1}(S)$, em que S é a fronteira de D . Note que nenhuma hipótese de regularidade é feita sobre S .

Uma prova mais curta da desigualdade isoperimétrica pode ser obtida usando a desigualdade de Brunn-Minkowski:

$$[V(A+B)]^{\frac{1}{n}} \geq [V(A)]^{\frac{1}{n}} + [V(B)]^{\frac{1}{n}}, \quad (3.20)$$

para dois conjuntos A, B , em \mathbb{R}^n , onde a soma de dois conjuntos é definida por

$$A+B = \{x+y : x \in A, y \in B\}.$$

Por exemplo, o conjunto E_r dado na definição de conteúdo Minkowski pode ser escrito como

$$E_r = E + B_r^n.$$

Considere agora um domínio D arbitrário em \mathbb{R}^n . Seja E sua fronteira e seja $D_r = D + B_r^n$. Então, por (3.20), (3.16) e binômio de Newton, definindo $V(D) = V$,

$$V(D_r) \geq (V(D)^{\frac{1}{n}} + V(B_r^n)^{\frac{1}{n}})^n = (V^{\frac{1}{n}} + (w_n r^n)^{\frac{1}{n}})^n \geq V + nV^{\frac{n-1}{n}} w_n^{\frac{1}{n}} r$$

e

$$\frac{(V(D_r) - V(D))}{r} \geq n w_n^{\frac{1}{n}} V^{\frac{(n-1)}{n}}$$

que é a desigualdade isoperimétrica (3.19).

Para obter detalhes completos deste argumento, bem como uma prova da desigualdade de Brunn-Minkowski, indicamos o livro de Federer [15] [3.2.41, 3.2.43].

3.2 Domínios em \mathbb{R}^n

Concluimos com várias observações. Primeiro, notemos que a forma generalizada da desigualdade isoperimétrica para curvas com auto-interseção, também se estendem às superfícies com auto-interseções. Se S for um tal superfície em \mathbb{R}^n , o seu complemento será um número de domínios D_k com respeito ao qual S tem um índice n_k bem definido. Se V_k é o volume de D_k e A a área de S , então, (3.12) generaliza para

$$A^n \geq n^n w_n \left[\sum |n_k| V_k \right]^{n-1} \quad (3.21)$$

Para $n = 3$, (3.21) é provada por [29](seção 4.7) enquanto que para n arbitrário ela segue de Federer e Fleming [16] [p. 487].

Em seguida notemos a importância de uma desigualdade adicional:

$$M = \int_S H \quad (3.22)$$

que surge como primeira variação da área para uma família de superfícies paralelas a S , como se ver para $h \equiv -1$ em (3.13). Note que para a esfera S_r^2 , $H = \frac{1}{r}$ e $M = 4\pi r$. A relevância desta quantidade para a desigualdade isoperimétrica foi apontada por Minkowski, que obteve duas desigualdades para domínios convexos em \mathbb{R}^3

$$A^2 \geq 3MV \quad (3.23)$$

e

$$M^2 \geq 4\pi A. \quad (3.24)$$

Combinando estas duas obtemos:

$$A^3 \geq 36\pi V^2, \quad (3.25)$$

que é precisamente o caso $n = 3$ da desigualdade isoperimétrica (3.19), pois $w_3 = \frac{4\pi}{3}$.

Observamos ainda que Pólya [21], em 1917, deu uma interpretação interessante da desigualdade de Minkowski (3.24), utilizando as noções de probabilidade geométrica introduzida por Crofton.

3.2 Domínios em \mathbb{R}^n

Finalmente, como objetivo principal do capítulo, observamos a partir da desigualdade isoperimétrica (3.19) que a esfera é estável, pois, bem entendido, a mesma tem área mínima dentre todas superfícies que englobam o mesmo volume. Sendo mais rigoroso, tomando qualquer variação que fixa bordo e preserva volume para a imersão $x : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, onde S é uma esfera qualquer em \mathbb{R}^n , teremos $A_D''(0) \geq 0$ para qualquer $D \subset S$ domínio relativamente compacto com bordo suave.

Capítulo 4

Teorema de Estabilidade de Barbosa e do Carmo

Neste capítulo apresentaremos uma prova para o Teorema de Barbosa e do Carmo elaborada pelo Matemático Americano, Henry Christian Wente, publicado pelo Pacific Journal of Mathematics, em 1991. A prova consiste em se utilizar de uma família dois-parâmetros de imersões que preserva volume e permite o cálculo fácil da área, através da estabilidade provaremos que a imersão isométrica x do Teorema de Barbosa e do Carmo é uma imersão isométrica umbílica (veja (1.48)), o que conclui a demonstração devido ao resultado visto no Capítulo 1, (1.49). Por fim dedicaremos uma seção para apresentar algumas consequências do Teorema.

4.1 Prova alternativa do Teorema de Barbosa e do Carmo Proposta por Wente

Pelo que foi visto no Capítulo 3 resta provarmos aqui somente uma direção do Teorema de Barbosa e do Carmo, a saber, nas condições do Teorema, que x estável implica que $x(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma esfera redonda S^n em \mathbb{R}^{n+1} .

4.1 Prova alternativa do Teorema de Barbosa e do Carmo Proposta por Wente

Antes porém faremos uma breve introdução com intuito de fixar notação. Vale ainda observar que a imersão que consideraremos aqui é compacta, por isso iremos considerar variações que fixam volume somente, uma vez que a superfície compacta não possui bordo.

Considere M uma n -variedade compacta orientada e $x : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Para uma tal imersão nos calculamos a n -área $A(x)$,

$$A(x) = \int_M dS,$$

onde dS é o elemento de n -área de M induzido pela imersão x . Também calculamos o volume “orientado”, $V(x)$, envolvido pela superfície imersa $x(M)$. Isto é dado pela formula

$$V(x) = \frac{1}{n+1} \int_M \langle x, N \rangle dS,$$

onde N é o campo vetorial normal unitário determinado pela orientação de M e a imersão x .

Recordemos o enunciado do Teorema:

Teorema. *Seja M uma n -variedade compacta orientada e $x : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante não nula H . Então x é estável se e somente se $x(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma esfera redonda S^n em \mathbb{R}^{n+1} .*

Demonstração. Seja $x : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão compacta, onde supomos que $x(M)$ tem curvatura média constante H . Seja $x_t = x + tN$ uma família a um parâmetro de superfícies paralelas a x . Note que x_t tem o mesmo campo vetorial normal unitário que x , pois

$$\frac{\partial x_t}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} + t \frac{\partial N}{\partial u},$$

e então,

$$\left\langle N, \frac{\partial x_t}{\partial u} \right\rangle = \left\langle N, \frac{\partial x}{\partial u} \right\rangle + t \left\langle N, \frac{\partial N}{\partial u} \right\rangle = 0.$$

4.1 Prova alternativa do Teorema de Barbosa e do Carmo Proposta por Wente

Além disso, a área $A(x_t)$ é dada por:

$$A(x_t) = \int_M \prod_{i=1}^n (1 - k_i t) dS, \quad (4.1)$$

onde k_i são as curvaturas principais de $x = x_0$.

Demonstração. De fato, introduza coordenadas locais (u_1, \dots, u_n) com correspondentes mapa $x(u_1, \dots, u_n)$ e vetor normal $N(u_1, \dots, u_n)$. Denote por $x_i = \frac{\partial x}{\partial u_i}$ e $N_i = \frac{\partial N}{\partial u_i}$. A métrica sobre M induzida pelo mapa x é dado pela matriz $g = (g_{ij})$ onde $g_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$ e o elemento de área para imersão é $dS = \sqrt{|g|} du_1 du_2 \cdots du_n$ onde $|g| = \det(g)$. Para a imersão $x + tN$ o tensor métrico correspondente é

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{ij} &= \langle (x + tN)_i, (x + tN)_j \rangle \\ &= \langle x_i + tN_i, x_j + tN_j \rangle \\ &= \langle x_i, x_j \rangle + \langle x_i, tN_j \rangle + \langle tN_i, x_j \rangle + \langle tN_i, tN_j \rangle \\ &= g_{ij} + 2t \langle x_i, N_j \rangle + t^2 \langle N_i, N_j \rangle \\ &= g_{ij} - 2th_{ij} + t^2 \gamma_{ij}, \end{aligned}$$

aqui usamos que $\langle x_i, N_j \rangle = \langle x_j, N_i \rangle$. $h_{ij} = -\langle x_i, N_j \rangle$ são componentes da segunda forma fundamental e $\gamma_{ij} = \langle N_i, N_j \rangle$ determinam a terceira forma fundamental. Definimos $g = (g_{ij})$, $h = (h_{ij})$, $\gamma = (\gamma_{ij})$ e calculamos

$$\det(\tilde{g}) = \det(g) \det[I - g^{-1}(2th - t^2\gamma)]$$

Mas os autovalores de $g^{-1}(2th - t^2\gamma)$ são justamente $2tk_i - t^2k_i^2$ onde k_i são as curvaturas principais de x . Assim, usando que $1 - (2tk_i - t^2k_i^2) = (1 - k_it)^2$, temos,

$$\det(\tilde{g}) = \det(g) \cdot \prod_{i=1}^n (1 - k_it)^2$$

4.1 Prova alternativa do Teorema de Barbosa e do Carmo Proposta por Wentz

dando nos

$$\begin{aligned}
 dS_t &= \sqrt{|\tilde{g}|} du_1 du_2 \cdots du_n = \sqrt{|g| \cdot \prod_{i=1}^n (1 - k_i t)^2} du_1 du_2 \cdots du_n \\
 &= \prod_{i=1}^n (1 - k_i t) \sqrt{|g|} du_1 du_2 \cdots du_n \\
 &= \prod_{i=1}^n (1 - k_i t) dS.
 \end{aligned}$$

□

O lado direito da equação (4.1) é um polinômio de grau n em t e pode ser expandido da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 A(x_t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \\
 a_0 &= \int dS = A(x_0) \\
 a_1 &= - \int (k_1 + \cdots + k_n) dS = -n H a_0 \\
 a_2 &= \int H_2 dS, \quad H_2 = \sum_{i < j} k_i k_j \\
 &\vdots \\
 a_k &= (-1)^k \int H_k dS, \quad H_k = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} k_{i_1} k_{i_2} \cdots k_{i_k}
 \end{aligned}$$

Essa é uma fórmula conhecida. Vejamos o caso $n = 3$,

$$\begin{aligned}
 \prod_{i=1}^3 (1 - k_i t) &= (1 - k_1 t - k_2 t + k_1 k_2 t^2)(1 - k_3 t) \\
 &= 1 + (-k_1 - k_2 - k_3)t + (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)t^2 + (-k_1 k_2 k_3)t^3.
 \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
 H_1 &= - \sum_{i=1}^3 k_i. \\
 H_2 &= \sum_{i < j} k_i k_j. \\
 H_3 &= - \sum_{i < j < l} k_i k_j k_l.
 \end{aligned}$$

O resultado para n qualquer pode ser obtido por indução sobre n .

4.1 Prova alternativa do Teorema de Barbosa e do Carmo Proposta por Wente

A outra formula chave é também bem conhecida, veja Stoker [17](p.352), a saber

$$\frac{dV(x_t)}{dt} = A(x_t) \quad (4.2)$$

De fato, é suficiente provar (4.2) quando $t = 0$,

$$V(x_t) = \frac{1}{n+1} \int_M \langle x_t, N_t \rangle dS_t = \frac{1}{n+1} \int_M \langle (x + tN), N \rangle \prod_{i=1}^n (1 - k_i t) dS.$$

Aqui usamos que x_t tem o mesmo campo vetorial unitário que x , observado no início da seção.

Portanto

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV(x_t)}{dt} \right|_{t=0} &= \frac{1}{n+1} \int_M \left. \frac{d}{dt} \left[\langle x + tN, N \rangle \right] \right|_{t=0} \cdot \left. \prod_{i=1}^n (1 - k_i t) \right|_{t=0} \\ &+ \frac{d}{dt} \left[\prod_{i=1}^n (1 - k_i t) \right] \Big|_{t=0} \cdot \left. \langle x + tN, N \rangle \right|_{t=0} dS \\ &= \frac{1}{n+1} \int_M [1 - nH \langle x, N \rangle] dS \\ &= \frac{1}{n+1} \int_M dS - \frac{n}{n+1} \int_M H \langle x, N \rangle dS. \end{aligned}$$

Assim é suficiente mostrar que

$$\frac{1}{n+1} A(x_0) - \frac{n}{n+1} \int_M H \langle x, N \rangle dS = A(x_0),$$

isto é,

$$A(x_0) = - \int_M H \langle x, N \rangle dS.$$

Visto de outra maneira, é suficiente mostrar que

$$\int_M (1 + H \langle x, N \rangle) dS = 0.$$

Mas esta igualdade é a primeira formula de Minkowski 1.46 e segue a afirmação.

□

4.1 Prova alternativa do Teorema de Barbosa e do Carmo Proposta por Wentz

Assim, vale:

$$V(x_t) = v_0 + v_1 t + v_2 t^2 + \cdots + v_{n+1} t^{n+1}, \quad (4.3)$$

onde $v_1 = a_0, 2v_2 = a_1 = -nHa_0$, etc. A família x_t não preserva volume. Para obter uma família que preserva volume aplicaremos uma homotetia apropriada. A saber, considere $y = sx_t = s(x+tN)$ uma família 2-parâmetros de imersões. Assim, procedendo de modo análogo ao que fizemos para encontrar dS_t encontramos a forma de volume para sx_t e obtemos:

$$A(sx_t) = s^n A(x_t) = s^n (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n). \quad (4.4)$$

$$V(sx_t) = s^{n+1} V(x_t) = s^{n+1} (v_0 + v_1 t + v_2 t^2 + \cdots + v_{n+1} t^{n+1}). \quad (4.5)$$

Determinemos agora $s = s(t)$ tal que $V(sx_t) = v_0$. Por uso da formula (4.5),

$$\begin{aligned} s^{n+1} (v_0 + v_1 t + v_2 t^2 + \cdots + v_{n+1} t^{n+1}) &= v_0 &\Rightarrow \\ s^n(t) &= \left(\frac{v_0}{v_0 + v_1 t + v_2 t^2 + \cdots + v_{n+1} t^{n+1}} \right)^{\frac{n}{n+1}} &\Rightarrow \\ s^n(t) &= \left(1 + \frac{v_1}{v_0} t + \frac{v_2}{v_0} t^2 + \cdots + \frac{v_{n+1}}{v_0} t^{n+1} \right)^{-\frac{n}{n+1}} \end{aligned}$$

Agora usando Teorema binomial (1.3) obtemos a série para s^n (precisando termos somente sobre t^2),

$$\begin{aligned} s^n(t) &= 1 + \left(-\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{v_1}{v_0} t + \frac{v_2}{v_0} t^2 + \cdots + \frac{v_{n+1}}{v_0} t^{n+1} \right) + \\ &+ \frac{n(2n+1)}{2(n+1)^2} \left(\frac{v_1}{v_0} t + \frac{v_2}{v_0} t^2 + \cdots + \frac{v_{n+1}}{v_0} t^{n+1} \right)^2 + \cdots \end{aligned}$$

Substituímos s^n em (4.4), e chamando $A(t) \equiv A[s(t)x_t]$ encontramos

$$\begin{aligned} A(t) &= a_0 + \left[-\left(\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{v_1}{v_0} \right) a_0 + a_1 \right] t \\ &+ \left\{ \left[\frac{n(2n+1)}{2(n+1)^2} \left(\frac{v_1}{v_0} \right)^2 - \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{v_2}{v_0} \right) \right] a_0 \right. \\ &\left. + \left(\frac{-n}{n+1} \right) \left(\frac{v_1}{v_0} \right) a_1 + a_2 \right\} t^2 + \cdots \end{aligned} \quad (4.6)$$

4.1 Prova alternativa do Teorema de Barbosa e do Carmo Proposta por Wente

O fato que $A'(0) = 0$ (pois H é constante) em (4.6) leva a

$$a_0 + (n+1)Hv_0 = 0 \Rightarrow v_0 = \frac{-a_0}{(n+1)H}. \quad (4.7)$$

Substituindo as identidades (4.3) e (4.7) no coeficiente de t^2 em (4.6) leva a

$$\begin{aligned} \frac{A''(0)}{2} &= \left[\frac{n(2n+1)}{2(n+1)^2} \left(\frac{a_0}{v_0} \right)^2 - \binom{n}{n+1} \left(\frac{-nHa_0}{2v_0} \right) \right] a_0 \\ &+ \left(\frac{-n}{n+1} \right) \left(\frac{a_0}{v_0} \right) (-nHa_0) + \int_M H_2 dS \\ &= \left[\frac{n(2n+1)}{2(n+1)^2} (n+1)^2 H^2 - \binom{n}{n+1} \frac{n(n+1)}{2} H^2 \right] a_0 \\ &+ \left(\frac{-n}{n+1} \right) (-(n+1)H)(-nHa_0) + \int_M H_2 dS \\ &= \left[\left(n^2 + \frac{n}{2} \right) H^2 - \left(\frac{n^2}{2} H^2 \right) \right] a_0 - n^2 H^2 a_0 + \int_M H_2 dS \\ &= \left[\frac{-n^2 H^2}{2} + \frac{n}{2} H^2 \right] a_0 + \int_M H_2 dS = - \int_M \left[\frac{n^2 H^2}{2} - H_2 \right] dS \\ &= - \int_M \left[\left(\frac{n^2 - n}{2} \right) H^2 - H_2 \right] dS = \int_M \left[\left(\frac{n^2 - n}{2} \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{n} \right)^2 - \sum_{i<j} k_i k_j \right] dS \\ &= - \frac{1}{2n} \int_M \left(\sum_{i<j} (k_i - k_j)^2 \right) dS. \end{aligned} \quad (4.8)$$

A ultima igualdade em (4.8) é vista como segue:

$$\begin{aligned} (n-1)n^2 H^2 - 2nH_2 &= (n-1)n^2 \left(\sum_i k_i \right)^2 \frac{1}{n^2} - 2n \left(\sum_{i<j} k_i k_j \right) \\ &= (n-1) \left(\sum_{i=1}^n k_i^2 \right) + 2(n-1) \sum_{i<j} k_i k_j - 2n \sum_{i<j} k_i k_j \\ &= (n-1) \left(\sum_i k_i^2 \right) - 2 \sum_{i<j} k_i k_j \\ &= \sum_{i<j} (k_i - k_j)^2. \end{aligned}$$

Aqui usamos que, por indução, vale:

$$\left(\sum_{i=1}^n k_i \right)^2 = \sum k_i^2 + 2 \sum_{i<j} k_i k_j.$$

4.2 Consequências do Teorema de Barbosa e do Carmo

$$\text{Logo } -\frac{1}{2n} \sum_{i < j} (k_i - k_j)^2 = \left(\frac{-n^2 + n}{2} \right) H^2 + H_2.$$

De (4.8) nos vemos que se x não é totalmente umbílica então $A''(0)$ é negativa e a imersão é instável.

Com isto provamos que $x(M)$ é a esfera (redonda) em \mathbb{R}^{n+1} (veja 1.49).

Finalmente, para encontrar o campo vetorial variacional para a família $s(t)x_t = s(t)[x + tN]$ diferenciamos para obter:

$$z = \left. \frac{d(sx_t)}{dt} \right|_{t=0} = s'(0)x + s(0)N.$$

Mas $s(0) = 1$ e aplicando a regra do produto em (4.5) juntamente com a equação para H fornecida por (4.7), temos, $s'(0) = H$.

segue que $z = Hx + N$ e a componente normal é $\langle z, N \rangle = \langle Hx, N \rangle + 1$ que é a variação usada por Barbosa e do Carmo.

□

4.2 Consequências do Teorema de Barbosa e do Carmo

Depois da adequada definição de hipersuperfícies estáveis, dada por Barbosa e do Carmo, ocorreu um grande avanço na linha de estabilidade. Dentre os vários trabalhos que usam o artigo [1], vejamos alguns resultados.

Para o caso $n = 2$ o teorema de Barbosa e do Carmo está relacionado a pergunta levantada por Hopf se a esfera é a única superfície em \mathbb{R}^3 que possui curvatura média constante. O teorema principal dessa dissertação diz que uma superfície imersa em \mathbb{R}^3 compacta não esférica com curvatura média constante não é estável, logo não pode ser produzida experimentalmente.

Como vimos no capítulo 2, [13], Hsiang, Teng e Yu apresentaram exemplos de hipersuperfícies não esféricas $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $n > 2$, que tem

4.2 Consequências do Teorema de Barbosa e do Carmo

curvatura média constante. Então, pelo resultado principal, estas imersões são exemplos de hipersuperfícies não-estáveis.

Em 1987, veja [12], Alexandre Silveira considerou uma variedade M completa não compacta de dimensão 2 e mostrou que, se $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão com curvatura média constante estável, então $x(M) \subset \mathbb{R}^3$ é um plano.

Em [8], João Lucas Barbosa, Manfredo do Carmo e Jost Eschenburg generalizaram o Teorema de Barbosa-do Carmo, a saber, conseguiram o seguinte resultado:

Sejam $\overline{M}^{n+1}(c)$ uma variedade Riemanniana simplesmente conexa com curvatura seccional c e $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ uma imersão de uma variedade diferenciável M^n com curvatura média constante. Então x é estável se, e somente se, $x(M^n) \subset \overline{M}^{n+1}(c)$ é a esfera geodésica.

Ernst Heintze, veja [14], usando estimativas do primeiro autovalor do Laplaciano, demonstrou o Teorema de Barbosa-do Carmo no caso em que $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{H}^{n+1}$.

No ano de 1991, Henry Wente, no artigo [2], deu uma prova, a que apresentamos, alternativa do teorema de Barbosa e do Carmo.

Referências Bibliográficas

- [1] J. L. Barbosa and M. do Carmo - *Stability of hypersurfaces of constant mean curvature*, Math. Zeitschrift, **185** (1984), 339-353.
- [2] H. WENTE - *A note on the stability theorem of J.L. Barbosa and M. do Carmo for closed surfaces of constant mean curvature*, Pacific Journal of Mathematics **147**, Nº 2, (1991), 375-379.
- [3] M. Dajczer. et al. - *Submanifolds and Isometric Immersions*, Mathematics Lecture Series, 13 , Publish or Perish Inc., Houston, 1990.
- [4] R. J. BIEZUNER - *Geometria Riemanniana*. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/~rodney/notas_de_aula/geometria_riemanniana.pdf>. Acesso em 10 Jun. 2015.
- [5] M. do Carmo - *Geometria Riemanniana*. 5 ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2011.
- [6] John M. LEE - *Introduction to Smooth Manifolds*, 2 ed. Graduate Texts in Mathematics 218. New York, Springer, 2012.
- [7] E. L Lima, - *Curso de Análise*, Volume 2. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2012.
- [8] J. L. Barbosa, M. do Carmo and J. Eschenburg - *Stability of hypersurface of constant mean curvature in Riemannian manifolds*, Mathematische Zeitschrift **197**, (1988), 123-138.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [9] H. Mori - *Stable complete constant mean curvature surfaces in \mathbb{R}^3 and H^3* , Transactions of the American Mathematical Society **278**, N^o 2, (1983), 671-687.
- [10] D'Arcy Thompson - *On growth and form*, New York: Cambridge at the University Press and The MacMillan Co 1945.
- [11] O. Bolza - *Vorlesungen über Variationsrechnung*, Berlin-Leipzig: Teubner, 1909.
- [12] A. Silveira - *Stability of complete noncompact surfaces with constante mean curvature*. Mathematische Annalen **277**, (1987), 629-638.
- [13] W. Hsiang, Z. Teng, and W. Yu - *New examples of constant mean curvature immersions of $(2k - 1)$ -spheres into euclidean $2k$ -space*, Annals of Mathematics. **117**, (1983), 609-625.
- [14] E. Heintze - *Extrinsic upper bounds for λ_1* , Mathematische Annalen **280**, (1988), 389-402.
- [15] H. Fédérer - *Geometric measure theory*, Springer-Verlag, New York, 1969.
- [16] H. Fédérer and W. H. Fleming - *Normal and integral currents*, Ann. of Math. **72** (1960), 458-520.
- [17] J. L. Stoker - *Differential Geometry*, Wiley-Interscience, (1969).
- [18] A. S. Besicovitch - *On the definition and value of the area of a surface*, Quart. J. Math., Oxford Ser. **16** (1945), 86-102.
- [19] A. S. Besicovitch - *Parametric surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **56** (1950), 288-296.
- [20] H. A. Schwarz - *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Springer-Verlag, Berlin, 1890.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [21] G. Pólya - *Über geometrische Wahrscheinlichkeiten*, Sitzungsber. Kaiserl. Akad. Wiss. Wien Math.- Natur. Kl., Abt. IIA **126** (1917), 1-10.
- [22] G. Pólya - *Induction and analogy in mathematics, Mathematics and Plausible Reasoning*, vol. I., Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1954.
- [23] R. C. Reilly - *Applications of the integral of an invariant of the Hessian*, Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), 579-580.
- [24] A. D. Aleksandrov (A. D. Alexandrow) - *A characteristic property of spheres*, Annali Mat Pura Appl. **58** (1962), 303-315.
- [25] A. D. Aleksandrov (A. D. Alexandrow) - *Uniqueness theorems for surfaces in the large*, V, Vestnik Leningrad Univ. **13** (1958), 5-8; English transi, Amer. Math. Soc. Transi. (2) **21** (1962), pp. 412-416
- [26] H. Hopf - *Über Flächen mit einer Relation zwischen den Hauptkrümmungen*, Math. Nachr. **4** (1950-51), 232-249.
- [27] H. Liebmann - *Ueber die Verbiegung der geschlossenen Flächen positiver Krümmung*, Math. Ann. **53** (1900), 81-112.
- [28] T. Radó - *A lemma on the topological index*, Fund. Math. **27**(1936), 212-225.
- [29] T. Radó - *The isoperimetric inequality and the Lebesgue definition of surface area*, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1947), 530-555.
- [30] T. Radó - *Length and area*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ, vol. 30, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1948.
- [31] H. Lewy - *Aspects of the Calculus of Variations*, Univ. of Calif. Press, Berkeley, Calif., 1939.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [32] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya - *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1952.
- [33] D. G. de Figueiredo - *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. 4 ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2009.
- [34] D. S. Mitrinovic - *Analytic inequalities*, Springer, Berlin, 1970.
- [35] Robert G. Bartle, - *The Elements of Integration*, New York, J. Wiley, 1966.