



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG  
CURSO DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA

TEOREMA DA MASSA POSITIVA E DESIGUALDADE DE  
PENROSE PARA GRÁFICOS COM BORDO NÃO COMPACTO E  
TEOREMA DE RIGIDEZ PARA HIPERFÍCIES SEMI-EINSTEIN  
MINIMIZANTES DE VOLUME

*Adson Martins Meira*

Belo Horizonte - MG  
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG  
CURSO DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA

Adson Martins Meira

Orientador:

Prof. Ezequiel Rodrigues Barbosa

TEOREMA DA MASSA POSITIVA E DESIGUALDADE DE  
PENROSE PARA GRÁFICOS COM BORDO NÃO COMPACTO E  
TEOREMA DE RIGIDEZ PARA HIPERFÍCIES SEMI-EINSTEIN  
MINIMIZANTES DE VOLUME

Tese submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMG, como requisito parcial para a obtenção do título de doutor em Matemática.

Belo Horizonte - MG  
Junho - 2015

# Agradecimentos

Ao professor Ezequiel Barbosa por ter sido um excelente orientador, por ter me ajudado até em assuntos não relacionados com a vida acadêmica, por sempre ser uma pessoa agradável e empática.

A toda a minha família, em especial à minha esposa, Daiana, por sua dedicação e companheirismo; aos meus pais, Antônio e Neuma, pela ajuda e apoio que sempre me concederam.

Ao professor Marcos Montenegro pela sua empatia, amizade e por ter contribuído para que eu iniciasse o curso de doutorado no segundo semestre de 2011, neste ano não estava prevista a admissão de alunos no segundo semestre.

Aos professores que compartilharam o seu conhecimento, alguns mais do que duas vezes, nos cursos em que participei: Ezequiel Barbosa, Marcos Montenegro, Matthew Perlmutter, Rodney Biezuner e Victor Guerassimov.

Ao professor Alberto Sarmiento por, sem me conhecer, ter me ajudado em um assunto não relacionado com a vida acadêmica, mas que foi extremamente importante para mim.

Aos membros da banca examinadora, os professores Emerson Abreu, Levi de Lima, Maurício Corrêa Júnior, Rodney Biezuner e Sérgio Almaraz, por aceitarem compor a banca examinadora e contribuírem para o enriquecimento desta tese.

Ao professor Benedito Acióly por sua amizade, por ter compartilhado o seu conhecimento comigo em diversos cursos durante a minha graduação e por ter me ajudado a continuar estudando numa pós-graduação.

Aos funcionários do Departamento de Matemática, em especial a Andréa, Kelli e Tulio, por sempre serem gentis.

À CAPES, pela bolsa de estudos; sem esta, possivelmente esta tese não existiria.

*A grandeza de um ser humano não está no quanto ele sabe, mas no quanto ele tem  
consciência de que não sabe.*

*Augusto Cury*

# Resumo

Provaremos o Teorema da Massa Positiva, não negatividade e rigidez, para hiperfícies gráficas, do Espaço Euclidiano, com bordo não compacto. Supondo que o gráfico seja esfericamente simétrico, verificaremos que a massa continuará não negativa mesmo sem supor que a curvatura escalar seja não negativa, e verificaremos que a rigidez da massa nula é estável. Sob condições adicionais, obteremos a Desigualdade de Penrose para tais hiperfícies gráficas com bordo não compacto. Por fim, obteremos um teorema de rigidez para hiperfícies semi-Einstein minimizantes de volume, o qual é uma generalização dos teoremas de Bray-Brendle-Neves, [8], e Barros et al., [5].

# Abstract

We'll proof the Positive Mass Theorem, non negativity and rigidity, for graphical hypersurfaces, of the Euclidean Space, with non compact boundary. Supposing spherically symmetric graphical, we'll verify that the mass will keep non negative even without assuming scalar curvature non negative, and we'll verify that the rigidity of the null mass is stable. Under additional hypothesis, we'll obtain the Penrose's Inequality for such graphical hypersurfaces with non compact boundary. Finally, we'll obtain a theorem of rigidity for volume-minimizing semi-Einstein hypersurfaces, wich is a generalization of the Bray-Brendle-Neves' Theorem, [8], and Barros et al., [5].

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Teorema da Massa Positiva</b>	<b>7</b>
1.1 Preliminares . . . . .	8
1.2 Resultados Auxiliares . . . . .	14
1.3 Massa Não Negativa . . . . .	21
1.4 Rigidez da Massa Nula . . . . .	27
<b>2 Gráficos Esfericamente Simétricos</b>	<b>31</b>
2.1 Resultados Auxiliares . . . . .	31
2.2 Distância Plana Intrínseca . . . . .	39
2.3 Massa Não Negativa . . . . .	41
2.4 Estabilidade da Rigidez . . . . .	42
<b>3 Desigualdade de Penrose</b>	<b>44</b>
3.1 Resultados Auxiliares . . . . .	44
3.2 Desigualdade de Penrose . . . . .	52
<b>4 Rigidez para Hipergícies semi-Einstein Minimzantes de Volume</b>	<b>55</b>
4.1 Resultados Auxiliares . . . . .	55
4.2 Resultado Principal . . . . .	59
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>71</b>
<b>Índice Remissivo</b>	<b>75</b>

# Introdução

Por volta de 1950, houve muita pesquisa - no campo da Relatividade Geral - com o objetivo de entender a relação entre a densidade de energia local e a massa do espaço. Em 1960, os físicos Arnowit, Deser e Misner fizeram um estudo detalhado de sistemas gravitacionais isolados, adotando o ponto de vista Hamiltoniano, e descobriram um importante invariante geométrico, a massa ADM, a qual coincidia com a massa total do espaço de Schwarzschild, a menos de uma constante. Arnowit, Deser e Misner conjecturaram que a massa, medida ao longo de uma hipersuperfície tipo espaço - no espaço-tempo físico - era não negativa, e nula somente quando o espaço-tempo era vazio. Houveram diversas conjecturas, muitas delas equivalentes; talvez a mais famosa destas conjecturas seja a Conjectura da Massa Positiva:

*Seja  $(N, g)$  uma 3-variedade Riemanniana, assintoticamente plana e com curvatura escalar não negativa. Então, a massa ADM, de  $(N, g)$ , será não negativa; além disso, tal massa será nula se, e somente se,  $(N, g)$  for isométrica ao espaço Euclidiano  $(\mathbb{R}^3, \delta)$ .*

Embora estas conjecturas tenham surgido na relatividade geral, elas tratam de fatos puramente geométricos sobre variedades Riemannianas assintoticamente planas. Estas conjecturas foram parcialmente provadas por diversos físicos e matemáticos por um período de vinte anos, veja [48] para referências. De 1979 a 1981, Richard Schoen e Shing-Tung Yau, provaram, de modo rigoroso e completo, todas as conjecturas em uma série de artigos, [40, 41, 42, 43], nos quais eles usaram técnicas envolvendo Geometria Diferencial e Equações Diferenciais Parciais. Schoen e Yau provaram a conjectura para variedades de dimensão  $n$ ,  $3 \leq n \leq 7$ . Logo depois, em 1981, Edward Witten demonstrou, [48], a conjectura de modo mais simples, supondo que a variedade fosse spin e tivesse dimensão  $n \geq 3$ . Em 2010, Mau-Kwong Lam deu uma prova simples, [28], para hipersuperfícies gráficas



mergulhadas num espaço Euclidiano de dimensão  $n \geq 3$ . Em 2014, Sérgio Almaraz, Ezequiel Barbosa e Levi de Lima generalizaram o Teorema provando-o, [3], para variedades com bordo não compacto, supondo que ou a dimensão da variedade fosse  $n$ ,  $3 \leq n \leq 7$ ; ou que a variedade fosse spin e a dimensão fosse  $n \geq 3$ . Um de nossos objetivos, expostos nesta tese, é demonstrar o Teorema da Massa Positiva para hipercírculos gráficas, com bordo não compacto, mergulhadas num espaço Euclidiano de dimensão  $n \geq 3$ . De modo específico, provaremos o seguinte:

*Seja  $f : \mathbb{R}_-^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  até o bordo, assintoticamente plana, sobre  $\mathbb{R}_-^n \setminus \Omega$ , com ordem  $p > \frac{n-2}{2}$ . Seja  $(\mathbb{R}_-^n, \delta + df \otimes df)$  o gráfico de  $f$ . Suponha que  $f_n = 0$  sobre  $\partial\mathbb{R}_-^n$ , que  $S \in L^1(\mathbb{R}_-^n)$  e  $S \geq 0$ . Suponha também que a curvatura média,  $\bar{H}$ , do bordo de  $(\mathbb{R}_-^n, \delta + df \otimes df)$ , visto como subvariedade de  $(\mathbb{R}_-^n, \delta + df \otimes df)$  seja tal que  $\bar{H} \geq 0$  e  $\bar{H} \in L^1(\partial\mathbb{R}_-^n)$ . Então, a massa de  $G(f)$  será não negativa; além disso, ela será nula se, e somente se,  $G(f)$  for um semiplano.*

Como todo gráfico em um espaço Euclidiano é spin, o resultado acima é um caso particular do resultado apresentado em [3]; no entanto, o leitor perceberá que a demonstração apresentada não usa a propriedade de ser spin. Assim, apresentamos uma demonstração sem invocar a estrutura spin da variedade; isso fornece um rumo para se chegar à prova da conjectura da Massa Positiva, a qual ainda não foi provada para dimensão  $n \geq 3$  qualquer.

Um caso particular surge quando supomos que o gráfico é esfericamente simétrico, isto é, seus conjuntos de níveis são semi-esferas. Em 2010, Lam verificou, [28], que toda hipercírculo gráfica, assintoticamente plana, esfericamente simétrica e com bordo compacto, possui massa ADM não negativa, mesmo quando não se supõe que a curvatura escalar seja não negativa. Aqui, verificaremos que isto também permanece válido para hipercírculos gráficas com bordo não compacto:

*Seja  $f : \mathbb{R}_-^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função assintoticamente plana sobre  $\mathbb{R}_-^n \setminus \Omega$ , esfericamente simétrica e de classe  $C^2$ , com ordem  $p > \frac{n-2}{2}$ . Então, a massa do gráfico de  $f$  é não negativa.*

Suponha que tenhamos um resultado de rigidez, ou seja, temos um resultado que caracteriza, sob certas condições, um objeto particular como sendo o único que possui uma propriedade específica. Uma questão que geralmente surge após a obtenção de um tal resultado, é procurar saber se tal rigidez é estável, isto é, se você tem uma sequência

de objetos cujas propriedades estão convergindo para aquela propriedade caracterizante, será que os objetos estão convergindo para aquele objeto particularmente caracterizado? Antes de tudo, para tratar esta questão, precisaremos definir de qual maneira mediremos a convergência dos objetos. Medir a convergência de variedades não é uma tarefa simples, para isso, definiremos a Distância Plana Intrínseca, a qual fornece uma noção de distância entre duas variedades Riemannianas. Esta noção mede a distância entre dois espaços de corrente integral que possuem a mesma dimensão. Estes espaços e esta distância foram primeiramente anunciados por Cristina Sormani e Stefan Wenger, no Festival de Geometria em 2009. O desenvolvimento, detalhado, destas noções foi publicado em 2011, veja [46]. Não entraremos em detalhes sobre estas noções, já que isso é da alçada da Teoria Geométrica da Medida. Em 2011, Dan Lee e Cristina Sormani provaram, supondo bordo compacto e outras condições, que a rigidez da massa ADM nula é estável, veja [29]. Utilizando o teorema deles, verificaremos que a rigidez da massa nula também é estável para hipersuperfícies gráficas esfericamente simétricas, com bordo não compacto:

*Sejam  $f_j : \mathbb{R}_-^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , esfericamente simétricas e de classe  $C^2$ . Fixe uma área  $A_0$  e escolha  $p_j \in \Sigma_j$ , em que  $\Sigma_j \subset G(f_j)$  é uma semi-esfera simétrica com área  $\text{vol}_{n-1}(\Sigma_j) = A_0/2$ . Se a massa dos gráficos das funções  $f_j$  convergem para 0, então  $(G(f_j), p_j)$  converge pontualmente para o semi-espaço Euclidiano  $(\mathbb{R}_-^n, 0)$  no sentido plano intrínseco.*

A Desigualdade de Penrose, em Relatividade Geral, estima a massa de um espaço-tempo em termos da área total de seu buraco negro. Esta afirmação foi conjecturada por Roger Penrose, em 1973, por meio de argumentos heurísticos, veja [36]. Um caso particularmente importante da conjectura, é a Desigualdade de Penrose Riemanniana:

*Seja  $(M, g)$  uma 3-variedade Riemanniana assintoticamente plana, cuja curvatura escalar é não negativa. Denote por  $A$ , a área da superfície mínima extrema<sup>1</sup>, a qual pode ser desconexa. Então,*

$$m_{ADM} \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{4\pi}}.$$

Note que, caso não haja qualquer buraco negro, esta conjectura afirmará que a massa ADM é não negativa; portanto, pode ser pensada como uma generalização do Teorema da Massa Positiva. Esta conjectura foi provada, em 1997, por Gerhard Huisken e Tom Ilmanen -

---

<sup>1</sup>O termo usado em inglês é *outermost*, veja [24, 25]. Uma subvariedade mínima é dita ser **extrema**, se ela não pode ser separada do infinito por qualquer outra superfície mínima compacta.

[24, 25] - em dimensão 3, supondo que o bordo fosse mínimo e conexo; a prova apresentada por eles foi baseada no Fluxo da Curvatura Média Inversa. Mais tarde, em 1999, Hubert Bray usou o fluxo conforme de métricas e provou a conjectura em dimensão 3, supondo que o bordo fosse mínimo e com qualquer número de componentes conexas, [7]. Vários outros resultados foram obtidos, [10, 11, 27, 28, 32, 44]. Dentre estes destacamos [28], no qual Mau-Kwong Lam provou a desigualdade em todas as dimensões para hiperfícies gráficas com bordo compacto; e [32], onde Levi de Lima e Frederico Girão, em 2011, forneceram fórmulas integrais para a massa ADM de hiperfícies assintoticamente planas em variedades Riemannianas com um certo tipo de estrutura de produto torcido, em uma vizinhança do infinito; deste modo, eles estenderam o resultado obtido por Lam, para um contexto mais amplo. Nesta tese, apresentaremos uma prova para hiperfícies gráficas com bordo não compacto, mergulhadas num espaço Euclidiano de dimensão  $n \geq 3$ ; provaremos o seguinte:

*Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}_-^n$ ,  $n \geq 3$ , um conjunto aberto, limitado e cujo bordo seja suave, médio-convexo e tal que  $\partial\Omega \cap \partial\mathbb{R}_-^n = \emptyset$ . Suponha que  $\partial\Omega$  seja êxtero-minimizante ou que cada componente conexa de  $\Omega$  seja estrelada. Seja  $f : \mathbb{R}_-^n \setminus \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  até o bordo, assintoticamente plana, constante ao longo de cada componente conexa de  $\partial\Omega$  e tal que  $|Df| \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow \partial\Omega$ . Suponha também que  $f_n \geq 0$  sobre  $\partial\mathbb{R}_-^n$ , que a curvatura escalar do gráfico seja não negativa, que a curvatura média dos bordos compactos seja não negativa, que as curvaturas médias do bordo não compacto, visto como subvariedade do gráfico e de  $\partial\mathbb{R}_-^n$ , são não negativas. Então,*

$$m(g) \geq \frac{1}{2} \left( \frac{|\partial\Omega|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}},$$

em que  $|\partial\Omega|$  é o  $(n-1)$ -volume de  $\partial\Omega$ .

Em 1959, Victor Topogonov provou que toda geodésica simples e fechada,  $\gamma$ , sobre uma superfície bidimensional,  $(\Sigma, g)$ , satisfaz

$$|\gamma|^2 \inf_{\Sigma} K \leq 4\pi^2,$$

em que  $K$  é a curvatura Gaussiana de  $\Sigma$  e  $|\gamma|$  é o comprimento de  $\gamma$ ; e a igualdade valerá se, e somente se,  $(\Sigma, g)$  for isométrica à esfera canônica,  $(\mathbb{S}^2, g_{can})$ , a menos de uma constante, veja [19, 47]. Motivados por este - clássico da Geometria - e outros resultados, [12, 9, 39]; Hubert Bray, Simon Brendle e André Neves, em 2010, provaram, [8], o seguinte:

Seja  $(M, g)$  uma 3-variedade Riemanniana compacta e tal que  $\pi_2(M) \neq 0$ . Então, existe uma imersão  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow M$  tal que  $(\mathbb{S}^2, f^*g)$  é minimizante de área e

$$\text{área}(\mathbb{S}^2, f^*g) \min_M R_M \leq 8\pi,$$

em que  $R_M$  é a curvatura escalar de  $(M, g)$ . Além disso, se a igualdade ocorrer, então o recobrimento universal de  $(M, g)$  será isométrico ao cilindro canônico,  $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, g_{can})$ , a menos de uma constante.

Em 2015, motivados por este resultado, Abdênago Barros, Cícero Cruz, Rondinelle Batista e Paulo Sousa provaram, [5], o seguinte resultado:

Seja  $(M, g)$  uma 5-variedade Riemanniana completa, com curvatura escalar positiva e curvatura de Ricci não negativa. Seja  $\Sigma \subset M$  uma hiperfície Einstein, compacta, com fibrado normal trivial e mergulhada de modo que  $\Sigma$  seja minimizante de volume na sua classe de homotopia. Então,

$$\text{vol}(\Sigma)^{\frac{1}{2}} \min_M R_M \leq 8\sqrt{6}\pi.$$

Além disso, se a igualdade ocorrer, então  $(\Sigma, g_\Sigma)$  será isométrica a  $(\mathbb{S}^4, g_{can})$  e numa vizinhança de  $\Sigma$ ,  $(M, g)$  será isométrica a  $((-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{S}^4, dt^2 + g_{can})$  e o recobrimento universal de  $(M^5, g)$  será isométrico a  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^4$ , a menos de uma constante.

Nesta tese, apresentaremos uma prova para o seguinte resultado:

Suponha  $n \geq 3$  e seja  $(M, g)$  uma  $(n + 1)$ -variedade Riemanniana completa, com curvatura escalar positiva e curvatura de Ricci não negativa. Suponha que  $\Sigma \subset M$  seja uma  $n$ -subvariedade compacta, com fibrado normal trivial e mergulhada de modo que  $(\Sigma, g_\Sigma)$ ,  $g_\Sigma$  sendo induzida por  $g$ , seja minimizante de volume na sua classe de homotopia e tal que  $\text{Ric}_\Sigma \geq \frac{R_\Sigma}{n} g_\Sigma$ . Então,

$$\text{vol}_n(\Sigma)^{\frac{2}{n}} \min_M R_M \leq n(n - 1)(\omega_n)^{\frac{2}{n}},$$

em que  $\omega_n$  é o  $n$ -volume da  $n$ -esfera cuja curvatura seccional é igual a 1 e  $\text{vol}_n$  é o  $n$ -volume. Além disso, se a igualdade ocorrer, então  $(\Sigma, g_\Sigma)$  será isométrica a  $(\mathbb{S}^n, g_{can})$ , a menos de uma constante, e existirá uma vizinhança de  $\Sigma$ , em  $(M, g)$ , que será isométrica a  $((-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{S}^n, dt^2 + g_{can})$  e o recobrimento universal de  $(M, g)$  será isométrico ao cilindro  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$ , a menos de uma constante.

Note que isto fornece uma completa generalização para qualquer  $n \geq 3$ , e quando  $n = 4$ , nossa desigualdade se torna

$$\text{vol}_4(\Sigma)^{\frac{1}{2}} \min_M R_M \leq 8\sqrt{6}\pi.$$

Além disso, Barros et al. supuseram que a hipersuperfície fosse Einstein e embora toda variedade bidimensional seja Einstein, este é o caso do Teorema de Bray-Brendle-Neves, aqui estamos supondo apenas que a hipersuperfície Riemanniana seja semi-Einstein, ou seja,  $\text{Ric}_\Sigma \geq \frac{R_\Sigma}{n} g_\Sigma$ .

# Capítulo 1

## Teorema da Massa Positiva

Neste capítulo provaremos o Teorema da Massa Positiva para hipersuperfícies gráficas com bordo não compacto, mergulhadas em um Espaço Euclidiano de qualquer dimensão. Na primeira seção, trataremos de conceitos básicos tais como Variedades Assintoticamente Planas e Massa ADM. Na segunda, discutiremos, brevemente, sobre superfícies mínimas e concluímos a seção afirmando que não existe  $k$ -subvariedade mínima,  $k \geq 1$ , compacta e sem bordo em um Espaço Euclidiano. Este resultado será fundamental para a prova do Teorema da Massa Positiva. Na terceira seção, mostraremos, sob certas condições, que a massa é não negativa. Esta é a primeira parte do Teorema da Massa Positiva. Na quarta seção provaremos a segunda parte do Teorema, a saber: que a massa é nula se, e somente se, a métrica da variedade Riemanniana em evidência for a métrica Euclidiana. Nos dois parágrafos seguintes, faremos um pequeno resumo sobre como se iniciou o estudo das variedades assintoticamente planas e da massa ADM.

Variedades assintoticamente planas foram inicialmente estudadas pelos físicos, no estudo da relatividade geral. A relatividade geral modela o mundo usando uma variedade de dimensão 4, chamada de espaço-tempo, munida com uma métrica de Lorentz, a qual representa o campo gravitacional e além de determinar a dinâmica, ela deve satisfazer a equação de campo de Einstein. Acontece que a solução mais famosa desta equação é a métrica de Schwarzschild, esta métrica representa o campo gravitacional de uma partícula pontual e estática, um “buraco negro”. Sucede-se que esta última é uma métrica de Lorentz (singular) sobre  $\mathbb{R}^4$  que, quando restrita a qualquer 3-plano de tempo constante, torna-se uma métrica assintoticamente plana de ordem 1. Como as soluções mais realistas da equação de Einstein modelam sistemas gravitacionais isolados e, fisicamente,

espera-se que quando um tal sistema é observado de uma longa distância, o seu campo gravitacional deve se assemelhar ao de uma massa pontual, concluiu-se que o espaço-tempo, modelando o sistema, deveria ser assintoticamente Schwarzschild e portanto deveria admitir hipersuperfícies do tipo espaço, as quais são variedades Riemannianas, tridimensionais e assintoticamente planas. Este foi o contexto onde se começou a estudar as soluções para a equação de Einstein, sobre variedades assintoticamente planas.

Um modo de se obter soluções para uma equação, é tentar aplicar um método variacional, o que significa definir um certo funcional, achar pontos críticos para esse funcional e mostrar que esses pontos críticos satisfazem a equação desejada. A equação de Einstein não é alheia a este método, sendo assim, um dos modos de se obter soluções para esta equação é usar um funcional chamado *Ação Integral de Hilbert*, o qual envolve a integração da curvatura escalar, de uma dada métrica, sobre a variedade. Considerando este funcional sobre variedades assintoticamente planas, e procurando-se por métricas que são pontos críticos para este funcional, sob todas as variações - da métrica inicial - que preservam a estrutura assintoticamente plana da variedade, encontra-se um invariante geométrico, dado por uma integral, chamado de *massa*. Este nome foi adotado após os físicos Arnowitt, Deser e Misner terem feito um estudo detalhado de sistemas gravitacionais isolados e descobrirem uma quantidade que era igual a este invariante geométrico e que coincidia, a menos de uma constante, com a massa do espaço de Schwarzschild.

## 1.1 Preliminares

Neste capítulo, nossa ferramenta mais básica será uma variedade Riemanniana com bordo não compacto e assintoticamente plana. De modo rudimentar, podemos dizer que uma variedade (Riemanniana com ou sem bordo) assintoticamente plana, é uma variedade munida com uma métrica Riemanniana que se torna “plana” no “infinito”, isto é, se denotamos a métrica por  $g$ , temos que  $g_{ij}(x) \rightarrow \delta_{ij}$  quando  $x \rightarrow \infty$  com uma certa “velocidade”, chamada de *ordem de assintoticidade*. Considere  $\mathbb{R}_-^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \leq 0\}$  e  $B_r^- = \{x \in \mathbb{R}_-^n \mid \|x\| \leq r\}$ .

**Definição 1.1.1.** *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana orientada e com bordo não compacto. Diz-se que  $(M^n, g)$  é assintoticamente plana, com ordem  $p > 0$ , se existe um subconjunto compacto  $K \subset M$  e um difeomorfismo  $\psi : M \setminus K \rightarrow \mathbb{R}_-^n \setminus B_1^-$ , tal que neste*

sistema de coordenadas tem-se

$$|g_{ij}(x) - \delta_{ij}| = O(|x|^{-p}), \quad \left| \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(x) \right| = O(|x|^{-p-1}), \quad \left| \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_i \partial x_k}(x) \right| = O(|x|^{-p-2}).$$

O conjunto  $M_\infty := M \setminus K$  é chamado de **fim assintótico** ou apenas **fim** de  $M$ .

**Proposição 1.1.2.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto. Suponha que  $F : \mathbb{R}^n \setminus \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f(x) = (f^1(x), \dots, f^m(x))$ , seja de classe  $C^1$  até o bordo. Seja  $g$  a métrica induzida de  $\mathbb{R}^{n+m}$  sobre  $G(F)$ . Então,  $(G(F), g)$  é isométrica a  $(\mathbb{R}^n \setminus \Omega, \delta + \sum_{\alpha=1}^m df^\alpha \otimes df^\alpha)$ .*

*Demonstração.* Temos que  $G(F) = \{(x, F(x)) \mid x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega\}$ . Considere  $\psi : (\mathbb{R}^n \setminus \Omega, \delta + \sum_{\alpha=1}^m df^\alpha \otimes df^\alpha) \rightarrow (G(F), g)$ ,  $\psi(x) = (x, F(x))$ . É claro que  $\psi$  é um difeomorfismo de classe  $C^1$ , cujo inverso é a projeção  $\pi : (G(F), g) \rightarrow (\mathbb{R}^n \setminus \Omega, \delta + \sum_{\alpha=1}^m df^\alpha \otimes df^\alpha)$ ,  $\pi(x, F(x)) = x$ . Resta verificar que  $\psi^*g = \delta + \sum_{\alpha=1}^m df^\alpha \otimes df^\alpha$ . Temos

$$\psi_* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ f_1^1 & f_2^1 & \cdots & f_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^m & f_2^m & \cdots & f_n^m \end{bmatrix}.$$

Assim,  $\partial_i = \psi_* e_i = \sum_{\alpha=1}^m (e_i, f_i^\alpha e_\alpha) = (e_i, 0) + \sum_{\alpha=1}^m (0, f_i^\alpha e_\alpha)$  é um campo coordenado sobre  $G(F)$  e

$$\begin{aligned} \psi^*g(\partial_i, \partial_j) &= g(\psi_* e_i, \psi_* e_j) \\ &= g((e_i, 0), (e_j, 0)) + g\left(\sum_{\alpha=1}^m (0, f_i^\alpha e_\alpha), \sum_{\beta=1}^m (0, f_j^\beta e_\beta)\right) \\ &= \delta_{ij} + \sum_{\alpha, \beta=1}^m f_i^\alpha f_j^\beta \delta_{\alpha\beta} \\ &= \delta_{ij} + \sum_{\alpha=1}^m f_i^\alpha f_j^\alpha, \end{aligned}$$

pois  $g = \iota^* \delta$ , isto é,  $g$  é a restrição da métrica Euclidiana de  $\mathbb{R}^{n+m}$  sobre  $G(F)$ . Portanto, os coeficientes da métrica são dados por  $g_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{\alpha=1}^m f_i^\alpha f_j^\alpha$ .  $\square$

Devido à Proposição 1.1.2, a partir de agora trataremos a variedade  $(G(F), g)$  como sendo  $(\mathbb{R}^n \setminus \Omega, \delta + \sum_{\alpha=1}^m df^\alpha \otimes df^\alpha)$ . Isto nos permitirá expressar integrais de funções que, a priori, estão definidas sobre o gráfico, em termos de integrais cujos domínios de integração são subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ .



**Definição 1.1.3.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto limitado. Seja  $F : \mathbb{R}^n \setminus \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $F(x) = (f^1(x), \dots, f^m(x))$  uma aplicação  $C^2$ . Denote por  $G(F)$  o gráfico de  $F$ . Diz-se que  $F$  é assintoticamente plana, com ordem  $p > 0$ , se a curvatura escalar,  $S$ , do gráfico de  $F$  munida com a métrica de  $\mathbb{R}^{n+m}$ , for uma função integrável sobre  $G(F)$ , se existe um subconjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $\Omega \subset K$  e, sobre  $\mathbb{R}^n \setminus K$ , as derivadas parciais  $f_i^\alpha = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_i}$ ,  $f_{ij}^\alpha = \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x_i \partial x_j}$  satisfizerem*

$$|f_i^\alpha(x)| = O(|x|^{-\frac{p}{2}}), |f_{ij}^\alpha(x)| = O(|x|^{-\frac{p}{2}-1}), |f_{ijk}^\alpha(x)| = O(|x|^{-\frac{p}{2}-2})$$

para todo  $\alpha = 1, \dots, m$  e  $i, j, k = 1, \dots, n$ .

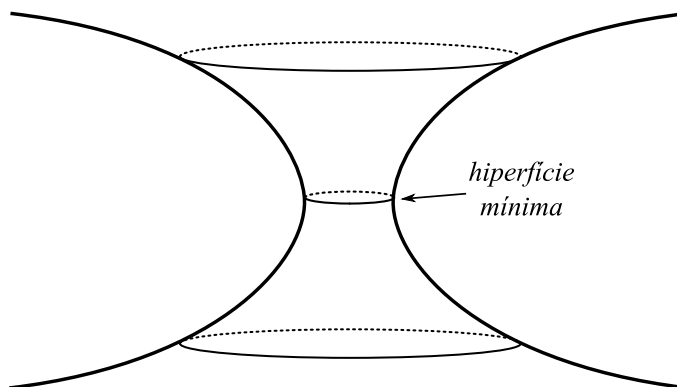


Note que esta definição concorda com a definição para uma variedade geral, isto é, sabendo que  $g_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{\alpha=1}^m f_i^\alpha f_j^\alpha$ , tem-se que  $|g_{ij}(x) - \delta_{ij}| = |\sum_{\alpha=1}^m f_i^\alpha(x) f_j^\alpha(x)| = O(|x|^{-p})$ ,  $|\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(x)| = |\sum_{\alpha=1}^m f_{ik}^\alpha f_j^\alpha + f_i^\alpha f_{jk}^\alpha| = O(|x|^{-p-1})$  e  $|\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_i \partial x_k}(x)| = O(|x|^{-p-2})$ .

O exemplo mais simples de uma tal variedade, é um semiplano munido da métrica canônica. A  $n$ -variedade de Schwarzschild é a seguinte variedade Riemanniana completa e conformemente plana

$$\left( \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \left( 1 + \frac{m}{2|x|^{n-2}} \right)^{\frac{4}{n-2}} \delta \right),$$

em que  $m$  é uma constante que em seguida iremos definir, chamada de massa ADM. Se  $m \geq 0$ , a  $n$ -variedade de Schwarzschild pode ser mergulhada isometricamente em  $\mathbb{R}^{n+1}$  como uma hipersuperfície suave.



**Proposição 1.1.4.** *Denote por  $B_r$ , a bola aberta em  $\mathbb{R}^n$ , de raio  $r$  e centrada na origem. Considere a solução de Schwarzschild de massa  $m > 0$ , então cada uma das*

regiões exteriores à  $(n - 1)$ -hiperfície mínima pode ser representada como o gráfico de  $h : \mathbb{R}^n \setminus B_{(2m)^{\frac{1}{2n-1}}} \rightarrow \mathbb{R}$ , em que

$$\begin{aligned} h(x) &= C_0 + \sqrt{8m(|x| - 2m)} && \text{se } n = 3, \\ h(x) &= C_0 + \sqrt{2m} \ln(|x| + \sqrt{|x|^2 - 2m}) && \text{se } n = 4, \\ h(x) &= C_0 + O(|x|^{2-\frac{n}{2}}) \text{ para } |x| \gg 1 && \text{se } n \geq 5. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Veja [22], Proposição 2.6. □

Podemos considerar o gráfico de  $h|_{\mathbb{R}_-^n}$ , e assim obteremos uma variedade assintoticamente plana e com bordo não compacto.

Neste texto, usaremos a convenção somatória de Einstein, embora em alguns momentos usaremos o símbolo de somatório apenas para enfatizar os limites da soma. Também usaremos uma vírgula para denotar a derivada das componentes de uma métrica, por exemplo  $g_{ij,k} = \partial_k g_{ij}$ .

A definição de assintoticidade plana para uma variedade sem bordo é análoga à Definição 1.1.1, neste caso, ao invés de considerar  $\mathbb{R}_-^n$  e  $B_r^-$  consideramos  $\mathbb{R}^n$  e  $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$ , respectivamente.

**Definição 1.1.5.** *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana sem bordo, assintoticamente plana com ordem  $p > (n - 2)/2$  e cuja curvatura escalar seja integrável,  $S_g \in L^1(M)$ , define-se a massa ADM de  $(M, g)$  por*

$$m_{ADM} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{S_r} \sum_{i,j=1}^n (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \nu^j d\sigma_r,$$

em que  $\omega_{n-1}$  é o  $(n - 1)$ -volume de uma esfera unitária,  $S_r$  é a esfera coordenada de raio  $r$ ,  $\nu$  é o campo normal, unitário e exterior a  $S_r$  e  $d\sigma_r$  é o elemento de volume de  $S_r$  na carta coordenada.

Nesta definição, poderíamos ter considerado variedades com bordo compacto, mas por questão de simplicidade, consideramos variedades sem bordo. Através de um rigoroso estudo, utilizando espaços de Sobolev com peso, Bartnik generalizou o conceito de massa e provou que ela é um invariante da métrica.

**Teorema 1.1.6.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana sem bordo. Sejam  $(\Phi, x)$  e  $(\Psi, y)$  dois difeomorfismos que tornam  $(M, g)$  assintoticamente plana com ordens  $\tau_1 \geq \frac{n-2}{2}$  e  $\tau_2 \geq \frac{n-2}{2}$ , respectivamente. Suponha que  $S_g \in L^1(M)$ . Defina  $\tau = \min\{\tau_1, \tau_2\}$ . Então, as massas fornecidas por  $(M, g, \Phi)$  e  $(M, g, \Psi)$  são bem definidas e iguais.*

*Demonstração.* Veja [6], Teorema 4.2. □

Dada uma hiperfície que é o gráfico de uma função  $f$ , sabemos que  $g_{ij} = \delta_{ij} + f_i f_j$ , assim  $g_{ij,i} = (\delta_{ij} + f_i f_j)_i = f_{ii} f_j + f_i f_{ij}$  e  $g_{ii,j} = (1 + f_i f_i)_j = 2f_{ij} f_i$ . Portanto,  $g_{ij,i} - g_{ii,j} = f_{ii} f_j - f_{ij} f_i$ . Com base nisso, temos a seguinte proposição.

**Proposição 1.1.7.** *Seja  $M$  uma hiperfície assintoticamente plana, de ordem  $p > (n - 2)/2$ . Seja  $N$  um fim de  $M$ , o qual é o gráfico de  $f$  sobre o exterior de uma região limitada no plano  $\Pi$ . A massa ADM de  $N$  é dada por*

$$m_{ADM} = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} \frac{1}{1 + |Df|^2} \sum_{i,j=1}^n (f_{ii} f_j - f_{ij} f_i) \frac{x_j}{|x|} d\sigma_r, \quad (1.1)$$

em que  $S_r = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Pi \mid |x| = r\}$ ,  $d\sigma_r$  é o elemento de volume esférico padrão e  $\omega_{n-1}$  é o volume da  $(n-1)$ -esfera unitária no espaço Euclidiano.

Note que o fator  $\frac{1}{1+|Df|^2}$  tem pouca influência no limite acima, pois como  $|f_i| = O(|x|^{-\frac{p}{2}})$  temos que  $|Df(x)| \rightarrow 0$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ , assim, quando  $|x| \rightarrow \infty$  temos que  $\frac{1}{1+|Df|^2}$  é quase igual a 1 sobre  $S_r$ .

**Definição 1.1.8.** *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana com bordo não compacto, assintoticamente plana com ordem  $p > (n - 2)/2$ . Suponha que a curvatura escalar seja integrável,  $S_g \in L^1(M)$ , e que a curvatura média do bordo de  $M$  também seja integrável,  $H_g \in L^1(\partial M)$ . A massa de  $(M, g)$  é definida por*

$$c(n)m(g) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^-} \sum_{i,j=1}^n (g_{ij,j} - g_{jj,i})(\eta_r)^i d\sigma_r + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^{n-2}} \sum_{i=1}^{n-1} g_{ni}(\nu_r)^i d\sigma_r. \quad (1.2)$$

Aqui,  $c(n) = 2(n-1)\omega_{n-1}$  é uma constante que depende de  $n$ ,  $S_r^- = \{x \in \mathbb{R}_-^n \mid \|x\| = r\}$ ,  $\mathbb{R}_-^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \leq 0\}$ ,  $S_r^{n-2} = \{x \in \partial\mathbb{R}_-^n \mid \|x\| = r\}$ ,  $\eta_r$  e  $\nu_r$  são campos vetoriais unitários, normais e exteriores a  $S_r^-$  e  $S_r^{n-2}$ , respectivamente.

Também utilizando espaços de Sobolev com peso; Almaraz, Barbosa e de Lima demonstraram que a definição de massa para variedades com bordo não compacto é uma definição bem posta, e é um invariante da métrica.

**Teorema 1.1.9.** *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana com bordo não compacto, assintoticamente plana com ordem  $\tau > (n - 2)/2$  e cujas curvaturas escalar e média são integráveis. Então, a massa de  $(M, g)$  é bem definida e só depende da métrica  $g$ .*

*Demonstração.* Veja [3], Proposição 3.6. □

**Exemplo 1.1.10.** Calcularemos a massa ADM da variedade de Schwarzschild,

$$\left( \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \left( 1 + \frac{m}{2|x|^{n-2}} \right)^{\frac{4}{n-2}} \delta \right).$$

Temos,

$$\begin{aligned} g_{ij,i} &= \frac{4}{n-2} \left( 1 + \frac{m}{2|x|^{n-2}} \right)^{\frac{6-n}{n-2}} \left( 1 + \frac{m}{2|x|^{n-2}} \right)_i \delta_{ij} \\ &= \frac{4}{n-2} \left( 1 + \frac{m}{2|x|^{n-2}} \right)^{\frac{6-n}{n-2}} \left( -\frac{m(n-2)}{2} \frac{x_i}{|x|^n} \right) \delta_{ij}, \end{aligned}$$

e

$$g_{ii,j} = \frac{4}{n-2} \left( 1 + \frac{m}{2|x|^{n-2}} \right)^{\frac{6-n}{n-2}} \left( -\frac{m(n-2)}{2} \frac{x_j}{|x|^n} \right) \delta_{ii}.$$

Assim

$$\begin{aligned} (g_{ij,i} - g_{ii,j})\nu^j &= \frac{4}{n-2} \left( 1 + \frac{m}{2|x|^{n-2}} \right)^{\frac{6-n}{n-2}} \frac{m(n-2)}{2} \sum_{i,j=1}^n \left( \left( -\frac{x_i}{|x|^n} \right) \delta_{ij} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{x_j}{|x|^n} \right) \delta_{ii} \right) \frac{x_j}{|x|} \\ &= \frac{4}{n-2} \left( 1 + \frac{m}{2|x|^{n-2}} \right)^{\frac{6-n}{n-2}} \frac{m(n-2)}{2|x|^{n+1}} \sum_{i,j=1}^n (-x_i \delta_{ij} + x_j \delta_{ii}) x_j \\ &= \frac{4}{n-2} \left( 1 + \frac{m}{2|x|^{n-2}} \right)^{\frac{6-n}{n-2}} \frac{m(n-2)}{2|x|^{n+1}} (n-1)|x|^2 \\ &= \frac{2m(n-1)}{|x|^{n-1}} \left( 1 + \frac{m}{2|x|^{n-2}} \right)^{\frac{6-n}{n-2}}. \end{aligned}$$

Deste modo temos

$$\begin{aligned} m_{ADM} &= \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} (g_{ij,i} - g_{ii,j})\nu^j d\sigma_r \\ &= \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} \frac{2m(n-1)}{|x|^{n-1}} \left( 1 + \frac{m}{2|x|^{n-2}} \right)^{\frac{6-n}{n-2}} d\sigma_r \\ &= \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2m(n-1)}{r^{n-1}} \left( 1 + \frac{m}{2r^{n-2}} \right)^{\frac{6-n}{n-2}} \int_{S_r} d\sigma_r. \end{aligned}$$

Como  $\int_{S_r} d\sigma_r = r^{n-1}\omega_{n-1}$ , obtemos

$$\begin{aligned} m_{ADM} &= \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2m(n-1)}{r^{n-1}} \left( 1 + \frac{m}{2r^{n-2}} \right)^{\frac{6-n}{n-2}} r^{n-1}\omega_{n-1} \\ &= m \lim_{r \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{m}{2r^{n-2}} \right)^{\frac{6-n}{n-2}} \\ &= m. \end{aligned}$$

**Exemplo 1.1.11.** Agora considere

$$\left( \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \left( 1 + \frac{m}{2|x|^{n-2}} \right)^{\frac{4}{n-2}} \delta \right).$$

Considerando que

$$\sum_{i=1}^{n-1} g_{ni}(\eta^r)^i = \sum_{i=1}^{n-1} \left( 1 + \frac{m}{2|x|^{n-2}} \right)^{\frac{4}{n-2}} \delta_{ni} \left( \frac{x_i}{|x|} \right) = 0,$$

e que a variedade é esfericamente simétrica, encontramos que a massa desta variedade é  $m/2$ .

## 1.2 Resultados Auxiliares

Sejam  $\Sigma^k$  e  $M^n$  variedades Riemannianas tais que  $\Sigma$  está imersa em  $M$ ,  $\Sigma \subset M$ . Denote por  $A$  a **segunda forma fundamental** de  $\Sigma \subset M$ , ou seja, se  $X, Y \in T_x \Sigma$ , então

$$A(X, Y) = (\nabla_X Y)^N. \quad (1.3)$$

Aqui,  $X^T$  e  $X^N$  denotam a parte tangente e a parte normal de um vetor  $X$ , respectivamente. Tomando  $\{N_l\}_{l=1}^{n-k}$  como sendo um referencial ortonormal, no fibrado normal de  $\Sigma$ , numa vizinhança de  $x$ , tem-se

$$\begin{aligned} A(X, Y) &= \sum_{l=1}^{n-k} g(A(X, Y), N_l) N_l = \sum_{l=1}^{n-k} g((\nabla_X Y)^N, N_l) N_l \\ &= \sum_{l=1}^{n-k} g(\nabla_X Y, N_l) N_l = \sum_{l=1}^{n-k} [Xg(Y, N_l) - g(Y, \nabla_X N_l)] N_l \\ &= - \sum_{l=1}^{n-k} g(Y, \nabla_X N_l) N_l. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Seja  $\{E_i\}_{i=1}^k$  uma base ortonormal para  $T_x \Sigma$ , o **vetor curvatura média** de  $\Sigma \subset M$  em  $x$  é definido por

$$H(x) = \sum_{i=1}^k A(E_i, E_i). \quad (1.5)$$

Se  $X$  for um campo vetorial definido numa vizinhança de  $M$ , contendo  $\Sigma$ , então o **divergente** de  $X$ , sobre  $\Sigma$ , em  $x \in \Sigma$  é definido por

$$\operatorname{div}_{\Sigma} X = \sum_{i=1}^k g(\nabla_{E_i} X, E_i), \quad (1.6)$$

## 1.2. Resultados Auxiliares

em que  $\{E_i\}$  é base ortonormal de  $T_x\Sigma$ . Deste modo, pode-se escrever  $X = X^T + X^N$  e verifica-se que

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}_\Sigma X^N &= \sum_{i=1}^k g(\nabla_{E_i} X^N, E_i) \\
 &= \sum_{i=1}^k -g(X^N, \nabla_{E_i} E_i) \\
 &= \sum_{i=1}^k -g(X^N, (\nabla_{E_i} E_i)^N) \\
 &= -g(X^N, \sum_{i=1}^k A(E_i, E_i)) \\
 &= -g(X^N, H) \\
 &= -g(X, H),
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

pois  $g(X^T, H) = 0$ .

Uma **variação** de  $\Sigma \subset M$  é uma família, a um parâmetro, de imersões  $F : \Sigma \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  tal que  $F(x, 0) = x$ . Se  $\partial\Sigma \neq \emptyset$ , diz-se que a variação é **própria** (ou com bordo fixo) se  $F(x, \cdot) = x$  para todo  $x \in \partial\Sigma$ . O campo  $X \in \Gamma(T\Sigma)$  dado por  $X(x) = dF_{(x,0)} \frac{d}{dt}$  é chamado de **campo variacional** da variação  $F$ . Se  $F(x, \cdot) = x$  para todo  $x$  fora de um compacto  $K \subset\subset \Sigma$  (ou se o suporte de  $X$  é igual a  $K$ ), diz-se que a variação tem **suporte compacto**.

**Lema 1.2.1.** *Seja  $A : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M(n \times n, \mathbb{R})$  uma curva suave, com  $A(0) = \operatorname{Id}$ . Então,*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det A(t) = \operatorname{tr} \dot{A}(0).$$

*Demonstração.* Usando o desenvolvimento de Laplace sobre a coluna 1, tem-se

$$\det A(t) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1}(t) \det A_{i1}(t),$$

em que  $A_{ij}(t)$  denota a submatriz obtida de  $A(t)$  retirando-se a linha  $i$  e a coluna  $j$ . Daí,

$$\frac{d}{dt} \det A(t) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \left\{ a'_{i1}(t) \det A_{i1}(t) + a_{i1}(t) \frac{d}{dt} \det A_{i1}(t) \right\}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det A(t) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \left\{ a'_{i1}(0) \det A_{i1}(0) + a_{i1}(0) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det A_{i1}(t) \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \left\{ a'_{i1}(0) \delta_{i1} + \delta_{i1} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det A_{i1}(t) \right\} \\
 &= a'_{11}(0) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det A_{11}(t).
 \end{aligned}$$

Repetindo o processo para a submatriz  $A_{11}(t)$ , encontra-se

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \det A_{11}(t) = a'_{22}(0) + \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \det A_{11,22}(t),$$

em que  $A_{11,22}(t)$  denota a submatriz obtida de  $A(t)$  retirando-se as linhas 1 e 2, e as colunas 1 e 2. Repetindo o processo mais  $n - 2$  vezes, tem-se

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \det A(t) = \sum_{i=1}^n a'_{ii}(0) = \text{tr } \dot{A}(0).$$

□

Agora apresentaremos a primeira variação do volume, e mais tarde apresentaremos a segunda variação; as demonstrações que apresentaremos podem ser encontradas em [14].

**Teorema 1.2.2** (Primeira Variação do Volume). *Seja  $F : \Sigma \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  uma variação de  $\Sigma \subset M$  cujo campo variacional será denotado por  $X$ . Suponha  $\Sigma$  orientável e que ou  $\Sigma$  seja compacta, ou  $X$  tenha suporte compacto. Então*

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{vol}(F(\Sigma, t)) = - \int_{\Sigma} g(X, H) d\Omega_0 + \int_{\partial\Sigma} g(X, \nu) d\sigma,$$

em que  $\nu$  é o campo normal exterior ao bordo de  $\Sigma$  e tangente a  $\Sigma$ , caso  $\partial\Sigma \neq \emptyset$ ;  $d\Omega_0$  é a forma volume de  $\Sigma$  e  $d\sigma$  é a forma volume de  $\partial\Sigma$ .

*Demonstração.* Seja  $(x_i)$  uma carta local sobre  $\Sigma$  e nesta carta defina  $g_{ij}(t) = g(F_{x_i}, F_{x_j})$ ,  $F_{x_i} := dF_{(x,t)} \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Denote a forma volume de  $F(\Sigma, t)$  por  $d\Omega_t := \sqrt{\det(g_{ij}(t))} dx$ ,  $dx = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ . Faça  $\nu_t := \sqrt{\det(g_{ij}(t))} \sqrt{\det(g^{ij}(0))}$ . Note que  $\nu_t$  é uma função bem definida independentemente da escolha de cartas; se  $\xi : (x_i) \rightarrow (\hat{x}_i)$  é o difeomorfismo da mudança de coordenadas, então  $\det(g_{ij}(t)) \mapsto \det(\hat{g}_{ij}(t)) \det(J(\xi))^2$  e  $\det(g^{ij}(0)) \mapsto \det(\hat{g}^{ij}(0)) \frac{1}{\det(J(\xi))^2}$ , daí

$$\det(g_{ij}(t)) \det(g^{ij}(0)) = \det(\hat{g}_{ij}(t)) \det(\hat{g}^{ij}(0)).$$

Este cálculo está feito na Observação 1.2.4. Tem-se,

$$\begin{aligned} \text{vol}(F(\Sigma, t)) &= \int_{\Sigma} d\Omega_t = \int_{\Sigma} \sqrt{\det(g_{ij}(t))} \sqrt{\det(g^{ij}(0)) \det(g_{ij}(0))} dx \\ &= \int_{\Sigma} \nu_t \sqrt{\det(g_{ij}(0))} dx = \int_{\Sigma} \nu_t d\Omega_0. \end{aligned}$$

Assim, para calcular  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{vol}(F(\Sigma, t))$ , basta calcular  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \nu_t$ , pois

$$\frac{d}{dt} \text{vol}(F(\Sigma, t)) = \int_{\Sigma} \frac{d}{dt} \nu_t \sqrt{\det(g_{ij}(0))} dx.$$

## 1.2. Resultados Auxiliares

Agora, para avaliar  $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \nu_t$  em algum ponto  $x \in \Sigma$ , escolhe-se uma carta normal em  $\Sigma$  de modo que, em  $x$ , tenha-se  $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$  e portanto  $\sqrt{\det(g_{ij}(0))} = \sqrt{\det(g^{ij}(0))} = 1$ ; como que  $F_t$  é  $F$ -relacionado a  $\frac{\partial}{\partial t}$  e  $F_{x_i}$  é  $F$ -relacionado a  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  tem-se  $\nabla_{F_t} F_{x_i} - \nabla_{F_{x_i}} F_t = [F_t, F_{x_i}] = 0$ . Com isso obtém-se, em  $x$ , que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \nu_t &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \sqrt{\det(g_{ij}(t))} \sqrt{\det(g^{ij}(0))} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij}(0))}} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det(g_{ij}(t)) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det(g_{ij}(t)) \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\dot{g}_{ij}(0)) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g(F_{x_i}, F_{x_i}) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k 2g(\nabla_{F_t} F_{x_i}, F_{x_i}) \\
 &= \sum_{i=1}^k g(\nabla_{F_{x_i}} F_t, F_{x_i}).
 \end{aligned}$$

Em  $t = 0$ ,  $F_t = X$ , assim

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \nu_t &= \sum_{i=1}^k g(\nabla_{F_{x_i}} X, F_{x_i}) \\
 &= \sum_{i=1}^k g(\nabla_{F_{x_i}} X^T, F_{x_i}) + \sum_{i=1}^k g(\nabla_{F_{x_i}} X^N, F_{x_i}) \\
 &= \operatorname{div}_{\Sigma} X^T + \operatorname{div}_{\Sigma} X^N \\
 &= \operatorname{div}_{\Sigma} X^T - g(X, H).
 \end{aligned}$$

Usando o Teorema de Stokes, tem-se

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \operatorname{vol}(F(\Sigma, t)) &= \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma} X^T - g(X, H) d\Omega_0 \\
 &= \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma} X^T d\Omega_0 - \int_{\Sigma} g(X, H) d\Omega_0 \\
 &= \int_{\partial\Sigma} g(\nu, X^T) d\sigma - \int_{\Sigma} g(X, H) d\Omega_0 \\
 &= \int_{\partial\Sigma} g(\nu, X) d\sigma - \int_{\Sigma} g(X, H) d\Omega_0.
 \end{aligned}$$

Pois,  $\nu$  é um campo tangente a  $\Sigma$  e portanto  $g(\nu, X^N) = 0$ . □



**Corolário 1.2.3.** *Se  $\Sigma$  é compacta (se ela tiver bordo, suponha que a variação seja própria) ou se a variação tem suporte compacto, então*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{vol}(F(\Sigma, t)) = - \int_{\Sigma} g(X, H) d\Omega_0.$$

**Observação 1.2.4.** *Sejam  $(\varphi = (x^i), U)$  e  $(\psi = (\hat{x}^i), V)$  cartas locais sobre  $\Sigma$ , com  $U \cap V \neq \emptyset$ . Escreva  $\psi \circ \varphi^{-1}(x) = (\hat{x}^1(x), \dots, \hat{x}^k(x))$ . Da regra da cadeia, tem-se*

$$(\psi \circ \varphi^{-1})_* e_j = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} e_i.$$

Disso,

$$\begin{aligned} g_{jl} &= g(F_* \partial_j, F_* \partial_l) \\ &= g(F_*(\varphi^{-1})_* e_j, F_*(\varphi^{-1})_* e_l) \\ &= g(F_*(\psi^{-1})_*(\psi \circ \varphi^{-1})_* e_j, F_*(\psi^{-1})_*(\psi \circ \varphi^{-1})_* e_l) \\ &= g\left(F_*(\psi^{-1})_* \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} e_i, F_*(\psi^{-1})_* \frac{\partial \hat{x}^k}{\partial x^l} e_k\right) \\ &= \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} g(F_*(\psi^{-1})_* e_i, F_*(\psi^{-1})_* e_k) \frac{\partial \hat{x}^k}{\partial x^l} \\ &= \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} g(F_* \hat{\partial}_i, F_* \hat{\partial}_k) \frac{\partial \hat{x}^k}{\partial x^l} \\ &= \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} \hat{g}_{ik} \frac{\partial \hat{x}^k}{\partial x^l}. \end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \det(g_{jl}) &= \det\left(\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} \hat{g}_{ik} \frac{\partial \hat{x}^k}{\partial x^l}\right) \\ &= \det(J\xi)^t \det(\hat{g}_{ik}) \det J\xi \\ &= (\det J\xi)^2 \det(\hat{g}_{ik}). \end{aligned}$$

Usando que  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$ , conclui-se a outra parte.

Uma subvariedade imersa,  $\Sigma^k \subset M^n$ , é dita ser **mínima**, se seu campo de curvatura média é indenticamente nulo. De outro modo,  $\Sigma$  é mínima se, e somente se, ela for um ponto crítico do funcional volume, para qualquer variação de suporte compacto.

**Exemplo 1.2.5.** Qualquer hiperplano,  $\Pi^k \subset \mathbb{R}^n$ , de dimensão  $k$  é uma subvariedade mínima. De fato, todo hiperplano é uma subvariedade totalmente geodésica, logo a segunda forma fundamental é identicamente nula, donde seu campo de curvatura média é identicamente nulo.

**Exemplo 1.2.6.** Qualquer subvariedade do tipo  $S^k := \Pi^k \cap \mathbb{S}^n$ , em que  $\Pi^k \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é um hiperplano tal que  $0 \in \Pi^k$ , é uma subvariedade mínima de  $\mathbb{S}^n$ . De fato,  $S^k$  é totalmente geodésica.

**Exemplo 1.2.7.** Em  $\mathbb{R}^3$ , o helicóide,  $z = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$ , que é dado na forma paramétrica por  $(x, y, z) = (t \cos s, t \sin s, s)$ , em que  $s, t \in \mathbb{R}$ , é uma superfície mínima.

**Exemplo 1.2.8.** Em  $\mathbb{R}^3$ , o catenóide,  $z = \cosh^{-1} \sqrt{x^2 + y^2}$ , isto é, a superfície obtida girando-se a curva  $x = \cosh z$  ao redor do eixo  $z$ , é uma superfície mínima.

As próximas observações podem ser usadas para definir, de modo equivalente, uma subvariedade mínima.

**Observação 1.2.9.** *Suponha que  $\Sigma^k \subset M^n$  esteja imersa e orientada, então  $\int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma} X = 0$  para todo campo de vetorial,  $X$ , ao longo de  $\Sigma$ , com suporte compacto ou tal que  $X|_{\partial\Sigma} = 0$  (caso  $\partial\Sigma \neq \emptyset$ ) se, e somente se,  $\Sigma$  é subvariedade mínima.*

*Demonstração.* Tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma} X \, d\Omega_{\Sigma} &= \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma} X^T \, d\Omega_{\Sigma} + \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma} X^N \, d\Omega_{\Sigma} \\ &= \int_{\partial\Sigma} g(X^T, \nu) \, d\Omega_{\Sigma} - \int_{\Sigma} g(X, H) \, d\Omega_{\Sigma} \\ &= - \int_{\Sigma} g(X, H) \, d\Omega_{\Sigma}. \end{aligned}$$

Portanto,  $\int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma} X \, d\Omega_{\Sigma} = 0$  para todo  $X$  como nas hipóteses se, e somente se,  $H = 0$ .  $\square$

**Observação 1.2.10.** *Suponha que  $\Sigma^k \subset M^n$  esteja imersa e seja  $X$  um campo vetorial sobre  $M$ , então*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\Sigma} X &= \operatorname{div}_{\Sigma} X^T + \operatorname{div}_{\Sigma} X^N \\ &= \operatorname{div}_{\Sigma} X^T - g(X, H). \end{aligned}$$

*Portanto,  $\operatorname{div}_{\Sigma} X = \operatorname{div}_{\Sigma} X^T$  para todos os campos vetoriais sobre  $M$  se, e somente se,  $\Sigma$  é mínima.*

O próximo resultado também caracteriza as subvariedades mínimas imersas em um espaço Euclidiano. Ele é de grande utilidade, uma vez que ele deixa ao nosso dispor a poderosa teoria das funções harmônicas.

**Corolário 1.2.11** (Harmonicidade das funções coordenadas).  $\Sigma^k \subset \mathbb{R}^n$  será mínima se, e somente se, as restrições das funções coordenadas de  $\mathbb{R}^n$  sobre  $\Sigma$  forem funções harmônicas.

*Demonstração.* Seja  $\eta \in C_0^\infty(\Sigma)$ , então  $\eta e_i$  é um campo sobre  $\Sigma$  com suporte compacto. Pela Observação 1.2.9, tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma}(\eta e_i) = \int_{\Sigma} (\langle \nabla_{\Sigma} \eta, e_i \rangle + \eta \operatorname{div}_{\Sigma} e_i) \\ &= \int_{\Sigma} \langle \nabla_{\Sigma} \eta, e_i \rangle = \int_{\Sigma} \langle \nabla_{\Sigma} \eta, \nabla_{\mathbb{R}^n} x_i \rangle \\ &= \int_{\Sigma} \langle \nabla_{\Sigma} \eta, (\nabla_{\mathbb{R}^n} x_i)^T + (\nabla_{\mathbb{R}^n} x_i)^N \rangle \\ &= \int_{\Sigma} \langle \nabla_{\Sigma} \eta, (\nabla_{\mathbb{R}^n} x_i)^T \rangle \\ &= \int_{\Sigma} \langle \nabla_{\Sigma} \eta, \nabla_{\Sigma} x_i \rangle. \end{aligned}$$

Pela Primeira Fórmula de Green,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial \Sigma} \eta \langle \nabla_{\Sigma} x_i, \nu \rangle - \int_{\Sigma} \eta \Delta_{\Sigma} x_i \\ &= - \int_{\Sigma} \eta \Delta_{\Sigma} x_i. \end{aligned}$$

Como  $\eta$  é qualquer,  $\Delta_{\Sigma} x_i = 0$ . □

Aqui,  $\Delta_{\Sigma} f = \operatorname{div}_{\Sigma} \nabla_{\Sigma} f$ . A seguir, um resultado que exemplifica o poder da teoria das funções harmônicas, a qual é um caso particular da Teoria Clássica das EDP's Elípticas. Usando o Princípio de Máximo de Hopf juntamente com o Corolário anterior obtemos:

**Corolário 1.2.12.** *Seja  $k \geq 1$  um número inteiro. Não existe  $k$ -subvariedade mínima, compacta e sem bordo no Espaço Euclidiano.*

*Demonstração.* De fato, suponha que  $\Sigma^k \subset \mathbb{R}^n$  seja mínima e fechada. Pelo Corolário anterior  $\sigma_i := x_i|_{\Sigma} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  é harmônica, para todo  $i = 1, \dots, n$ . Como  $\Sigma$  é compacta,  $\sigma_i$  atinge um máximo no interior de  $\Sigma$ . Pelo Princípio de Máximo de Hopf,  $\sigma_i$  é constante, para todo  $i = 1, \dots, n$ . Portanto  $\Sigma$  se reduz a uma 0-variedade, uma contradição. □

Este resultado será crucial na prova do Teorema da Massa Positiva, mais especificamente, na prova da rigidez da massa nula.

### 1.3 Massa Não Negativa

As proposições abaixo são bastante conhecidas e suas provas podem ser encontradas em [21], [28], [33] ou [37]. Como suas demonstrações são simples, incluímo-las aqui.

**Proposição 1.3.1.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$ . Seja  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  o campo vetorial dado por*

$$X = \bar{U}(f_i f_{kk} - f_k f_{ik})e_i, \quad (1.8)$$

em que  $\bar{U} = \frac{1}{U}$ ,  $U = 1 + \langle Df, Df \rangle$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é a métrica Euclidiana. Considere a função  $s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$s = \bar{U}(f_{ii} f_{kk} - f_{ik} f_{ik}) - \bar{U}^2 2f_l f_{li}(f_i f_{kk} - f_k f_{ik}).$$

Então,  $s = \operatorname{div} X$ .

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \bar{U}_i(f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) + \bar{U}(f_i f_{kk} - f_k f_{ik})_i \\ &= \frac{-2f_l f_{li}}{U^2}(f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) + \bar{U}(f_{ii} f_{kk} + f_i f_{kki} - f_{ki} f_{ik} - f_k f_{iki}) \\ &= -\bar{U}^2 2f_l f_{li}(f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) + \bar{U}(f_{ii} f_{kk} - f_{ki} f_{ik}). \end{aligned}$$

□

A próxima proposição nos permitirá, juntamente com o Teorema da Divergência, dar uma demonstração simples - sem o uso de teorias mais avançadas - de que a massa de hiperfícies gráficas com bordo não compacto é não negativa.

**Proposição 1.3.2.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$ . Então, a curvatura escalar de  $(G(f), g)$  é  $S = -\bar{U}^2 2f_l f_{li}(f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) + \bar{U}(f_{ii} f_{kk} - f_{ki} f_{ik})$ .*

*Demonstração.* Sabemos que  $\{\partial_i = (e_i, f_i)\}_{i=1}^n$  são campos de vetores tangentes e  $\eta = (-Df, 1)$  é um campo normal a  $G(f)$ , assim

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_j &= (0, \dots, 0, \partial_i f_j) = (0, \dots, 0, \langle Df_j, \partial_i \rangle) \\ &= (0, \dots, 0, \langle (f_{j1}, \dots, f_{jn}, 0), (e_i, f_i) \rangle) \\ &= (0, \dots, 0, f_{ji}). \end{aligned}$$

Portanto,  $II(\partial_i, \partial_j) = (\bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_j)^\perp = \langle \bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_j, \frac{\eta}{|\eta|} \rangle \frac{\eta}{|\eta|} = \frac{f_{ij}}{1+|Df|^2} \eta$ . Pela equação de Gauss,

$$\begin{aligned} R_{iklj} &= \langle II(\partial_i, \partial_j), II(\partial_l, \partial_k) \rangle - \langle II(\partial_i, \partial_l), II(\partial_k, \partial_j) \rangle \\ &= \frac{1}{1+|Df|^2} (f_{ij} f_{lk} - f_{il} f_{kj}). \end{aligned}$$

Usando que  $g_{ij} = \delta_{ij} + f_i f_j$  e  $g^{ij} = \delta_{ij} - \frac{f_i f_j}{1+|Df|^2}$ , obtemos

$$\begin{aligned} S &= g^{ij} g^{kl} R_{iklj} = (\delta_{ij} - \bar{U} f_i f_j) (\delta_{kl} - \bar{U} f_k f_l) \bar{U} (f_{ij} f_{kl} - f_{il} f_{jk}) \\ &= \bar{U} (\delta_{ij} - \bar{U} f_i f_j) [\delta_{kl} f_{ij} f_{kl} - \delta_{kl} f_{il} f_{jk} - \bar{U} f_k f_l f_{ij} f_{kl} + \bar{U} f_k f_l f_{il} f_{jk}] \\ &= \bar{U} [\delta_{ij} \delta_{kl} f_{ij} f_{kl} - \delta_{ij} \delta_{kl} f_{il} f_{jk} - \delta_{ij} \bar{U} f_k f_l f_{ij} f_{kl} + \delta_{ij} \bar{U} f_k f_l f_{il} f_{jk} \\ &\quad - \bar{U} f_i f_j \delta_{kl} f_{ij} f_{kl} + \bar{U} f_i f_j \delta_{kl} f_{il} f_{jk} + \bar{U} f_i f_j \bar{U} f_k f_l f_{ij} f_{kl} - \bar{U} f_i f_j \bar{U} f_k f_l f_{il} f_{jk}] \end{aligned}$$

Como as duas últimas parcelas se cancelam, obtemos

$$\begin{aligned} S &= \bar{U} (f_{ii} f_{kk} - f_{ik} f_{ik}) + \bar{U}^2 (-f_k f_l f_{ii} f_{kl} + f_k f_l f_{ik} f_{il} - f_i f_j f_{ij} f_{kk} + f_i f_j f_{ik} f_{jk}) \\ &= \bar{U} (f_{ii} f_{kk} - f_{ik} f_{ik}) - \bar{U}^2 (f_k f_l f_{ii} f_{kl} - f_k f_l f_{ik} f_{il} + f_i f_j f_{ij} f_{kk} - f_i f_j f_{ik} f_{jk}) \\ &= \bar{U} (f_{ii} f_{kk} - f_{ik} f_{ik}) - 2 f_l f_i \bar{U}^2 (f_i f_{kk} - f_k f_{ik}). \end{aligned}$$

□

**Observação 1.3.3.** Embora a curvatura escalar seja, por definição, uma função definida sobre  $G(f)$ , pelo fato dela ser expressada em termos de  $f$  e esta ser uma função definida sobre  $\mathbb{R}_-^n$ , também podemos considerar a curvatura escalar como uma função definida sobre  $\mathbb{R}_-^n$ .

Dizer que  $S \in L^1(\mathbb{R}_-^n, \delta)$  é equivalente a dizer que  $S \in L^1(G(f), g)$ . Com efeito, como  $(G(f), g)$  é isométrica a  $(\mathbb{R}_-^n, \delta + df \otimes df)$ , temos que  $g_{ij} = \delta_{ij} + f_i f_j$  e  $dx_g = \sqrt{\det(g_{ij})} dx_\delta$ , com isso temos que  $dx_g = \sqrt{1+|Df|^2} dx_\delta$ . Como  $\sqrt{1+|Df|^2}$  se aproxima de 1 quando  $x \rightarrow \infty$  e  $\int_{G(f)} S dx_g = \int_{\mathbb{R}_-^n} S dx_{\delta+df \otimes df} = \int_{\mathbb{R}_-^n} S \sqrt{1+|Df|^2} dx_\delta$  e  $\int_{\mathbb{R}_-^n} S dx_\delta = \int_{\mathbb{R}_-^n} \frac{S}{\sqrt{1+|Df|^2}} dx_{\delta+df \otimes df} = \int_{G(f)} \frac{S}{\sqrt{1+|Df|^2}} dx_g$ , temos que  $\int_{\mathbb{R}_-^n} S dx_\delta \in \mathbb{R}$  se, e somente se,  $\int_{G(f)} S dx_g \in \mathbb{R}$ . Uma observação semelhante também é válida para a curvatura média do bordo do gráfico de  $f$ .

A seguir, apresentaremos uma expressão para a massa de superfícies gráficas mergulhadas em um espaço Euclidiano.

**Teorema 1.3.4.** Seja  $f : \mathbb{R}_-^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função assintoticamente plana, sobre  $\mathbb{R}_-^n \setminus \Omega$ , e de classe  $C^2$  até o bordo, com ordem  $p > \frac{n-2}{2}$ . Seja  $(\mathbb{R}_-^n, \delta + df \otimes df)$  o gráfico de  $f$ . Suponha

que  $f_n \geq 0$  sobre  $\partial\mathbb{R}_-^n$ , que  $S \in L^1(\mathbb{R}_-^n)$  e  $S \geq 0$ . Suponha também que a curvatura média,  $\bar{H}$ , do bordo de  $(\mathbb{R}_-^n, \delta + df \otimes df)$ , visto como subvariedade de  $(\mathbb{R}_-^n, \delta + df \otimes df)$  seja tal que  $\bar{H} \geq 0$  (com respeito ao campo normal, unitário e que aponta para dentro do gráfico) e  $\bar{H} \in L^1(\partial\mathbb{R}_-^n)$  e a curvatura média,  $\tilde{H}$ , do bordo de  $(\mathbb{R}_-^n, \delta + df \otimes df)$ , visto como subvariedade de  $(\mathbb{R}^n, \delta) = (\partial\mathbb{R}_-^n \times \mathbb{R}, \delta)$  seja tal que  $\tilde{H} \geq 0$  (com respeito ao campo normal, unitário e que aponta para cima) e  $\tilde{H} \in L^1(\partial\mathbb{R}_-^n)$ . Então,

$$\begin{aligned} c(n)m(g) &= \int_{\mathbb{R}_-^n} S dx_\delta + \int_{\partial\mathbb{R}_-^n} \bar{H} \sqrt{1 + (f_n)^2} \left\{ 2 - \frac{|Df|^2}{1 + |Df|^2} \right\} dx_\delta \\ &\quad + \int_{\partial\mathbb{R}_-^n} f_n \tilde{H} |Df|^2 \frac{\sqrt{1 + |\bar{D}f|^2}}{1 + |Df|^2} dx_\delta, \end{aligned} \quad (1.9)$$

em que  $\bar{D}f = (f_1, \dots, f_{n-1})$  e  $c(n) = 2(n-1)\omega_{n-1}$ . Em particular, a massa será não negativa.

*Demonstração.* Note que  $\partial B_r^- = S_r^- \cup D_r$ , em que  $S_r^- = \{x \in \mathbb{R}_-^n \mid \|x\| = r\}$ ,  $D_r = \{x \in \partial\mathbb{R}_-^n \mid \|x\| \leq r\}$  e  $S_r^{n-2} = \partial D_r$ . Lembrando que  $S = \operatorname{div} X$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_-^n} S dx_\delta &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_r^-} S dx_\delta \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_r^-} \operatorname{div} X dx_\delta \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial B_r^-} \langle X, N \rangle dA_r \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^-} \left\langle X, \frac{x}{|x|} \right\rangle d\sigma_r + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r} \langle X, e_n \rangle dx_\delta. \end{aligned}$$

Por hipótese  $f_i = O(|x|^{-\frac{p}{2}})$  e  $f_{ik} = O(|x|^{-\frac{p}{2}-1})$  para todos  $i, k = 1, \dots, n$ . Já que  $U - 1 = \langle Df, Df \rangle = O(|x|^{-p})$ , temos que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} U = 1$ , portanto  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \bar{U} = 1$ , em que  $\bar{U} = \frac{1}{\bar{U}}$ . Portanto,  $\bar{U} - 1 = -\bar{U} \langle Df, Df \rangle = O(|x|^{-p})$ . Com isso concluí-se que

$$(\bar{U} - 1)(f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) = O(|x|^{-2p-1}).$$

Como  $p > (n-2)/2$ , temos que  $2p+1 > n-1 = \dim S_r^-$ . Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^-} \left| (\bar{U} - 1)(f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) \frac{x^i}{|x|} \right| d\sigma_r &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^-} C \cdot |x|^{-2p-1} d\sigma_r \\ &\leq C \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-2p-1} |S_r^-| = 0. \end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^-} (\bar{U} - 1)(f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) \frac{x^i}{|x|} d\sigma_r = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^-} \bar{U}(f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) \frac{x^i}{|x|} d\sigma_r = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^-} (f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) \frac{x^i}{|x|} d\sigma_r. \quad (1.10)$$

Com isso,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^-} \langle X, \frac{x}{|x|} \rangle d\sigma_r = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^-} (f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) \frac{x^i}{|x|} d\sigma_r.$$

Agora note que  $\langle X, e_n \rangle = \bar{U}(f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) = \bar{U} \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk})$ , pois quando  $k = n$  os termos se cancelam. Por outro lado, como  $\bar{U} = 1 - \frac{|Df|^2}{1+|Df|^2}$ :

$$\langle X, e_n \rangle = \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) - \frac{|Df|^2}{1+|Df|^2} \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}).$$

Isso implica que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_-^n} S dx_\delta &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^-} (f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) \frac{x^i}{|x|} d\sigma_r + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r} \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) dx_\delta \\ &\quad - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r} \frac{|Df|^2}{1+|Df|^2} \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) dx_\delta \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^-} (g_{ki,k} - g_{kk,i})(\nu_r)^i d\sigma_r \\ &\quad + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r} (\operatorname{div}_{\mathbb{R}^{n-1}}(f_n \bar{D}f) - 2\langle \bar{D}f, \bar{D}f_n \rangle) dx_\delta \\ &\quad - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r} \frac{|Df|^2}{1+|Df|^2} \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) dx_\delta. \end{aligned}$$

Aqui,  $\bar{D}f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} \right)$ ,  $\nu_r$  é o campo normal a  $S_r^-$  e  $\eta_r$  é o campo normal a  $S_r^{n-2}$ .

Usando que

$$\int_{D_r} \operatorname{div}_{\mathbb{R}^{n-1}}(f_n \bar{D}f) dx_\delta = \int_{S_r^{n-2}} f_n \langle \bar{D}f, \eta_r \rangle d\sigma_r,$$

encontramos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_-^n} S dx_\delta &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^-} (g_{ki,k} - g_{kk,i})(\nu_r)^i d\sigma_r + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^{n-2}} f_n f_k (\eta_r)^k d\sigma_r \\ &\quad - 2 \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r} \langle \bar{D}f, \bar{D}f_n \rangle dx_\delta - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) \frac{|Df|^2}{1+|Df|^2} dx_\delta \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^-} (g_{ki,k} - g_{kk,i})(\nu_r)^i d\sigma_r + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^{n-2}} g_{nk} (\eta_r)^k d\sigma_r \\ &\quad - 2 \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r} \langle \bar{D}f, \bar{D}f_n \rangle dx_\delta - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) \frac{|Df|^2}{1+|Df|^2} dx_\delta \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} c(n)m(g) &= \int_{\mathbb{R}_-^n} S dx_\delta + 2 \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r} \sum_{i=1}^{n-1} f_{ni} f_i dx_\delta \\ &\quad + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) \frac{|Df|^2}{1 + |Df|^2} dx_\delta \end{aligned}$$

Agora calcularemos a segunda forma fundamental do bordo visto como uma subvariedade do gráfico de  $f$ . Note que  $N = -\partial_n = -(e_n, f_n)$  é um campo normal ao bordo, e além disso, interior e tangente ao gráfico. Temos que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_n &= (0, \dots, 0, \partial_i f_n) \\ &= (0, \dots, 0, \langle Df_n, \partial_i \rangle) \\ &= (0, \dots, 0, \langle (f_{n1}, \dots, f_{nn}, 0), (e_i, f_i) \rangle) \\ &= (0, \dots, 0, f_{ni}). \end{aligned}$$

Como  $\partial_j = (e_j, f_j)$ , temos que  $\langle \bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_n, \partial_j \rangle = f_{ni} f_j$ . Assim,

$$\langle \bar{\nabla}_{\partial_i} N, \partial_j \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_n, \partial_j \rangle = -f_{ni} f_j,$$

como  $\langle \bar{\nabla}_{\partial_i} N, \partial_j \rangle = -\langle N, ii(\partial_i, \partial_j) \rangle$  em que  $ii$  é a segunda forma fundamental do bordo visto como subvariedade do gráfico, encontramos que  $\langle ii(\partial_i, \partial_j), N \rangle = f_{ni} f_j$ . Portanto denotando a segunda forma fundamental escalar do bordo visto como subvariedade do gráfico por  $\bar{h}$  encontramos

$$\bar{h}(\partial_i, \partial_j) = \langle ii(\partial_i, \partial_j), N/|N| \rangle = \frac{f_{ni} f_j}{\sqrt{1 + (f_n)^2}}.$$

Com isso, vemos que a curvatura média de  $\partial G(f)$  visto como subvariedade de  $G(f)$  é

$$\bar{H} = \sum_{i=1}^{n-1} \bar{h}(\partial_i, \partial_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f_{ni} f_i}{\sqrt{1 + (f_n)^2}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} c(n)m(g) &= \int_{\mathbb{R}_-^n} S dx_\delta + 2 \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r} \bar{H} \sqrt{1 + (f_n)^2} dx_\delta \\ &\quad + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) \frac{|Df|^2}{1 + |Df|^2} dx_\delta \\ &= \int_{\mathbb{R}_-^n} S dx_\delta + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r} \bar{H} \sqrt{1 + (f_n)^2} \left\{ 2 - \frac{|Df|^2}{1 + |Df|^2} \right\} dx_\delta \\ &\quad + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r} f_n f_{kk} \frac{|Df|^2}{1 + |Df|^2} dx_\delta. \end{aligned}$$



Por hipótese  $f_n \geq 0$  sobre  $\partial\mathbb{R}_-^n$ . Além disso,  $\tilde{H} := \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f_{kk}}{\sqrt{1+|Df|^2}}$  é a curvatura média de  $\partial G(f)$  vista como subvariedade de  $\mathbb{R}^n = \partial\mathbb{R}_-^n \times \mathbb{R}$ . Deste modo,

$$\begin{aligned} c^{(n)}m(g) &= \int_{\mathbb{R}_-^n} S dx_\delta + \int_{\partial\mathbb{R}_-^n} \bar{H} \sqrt{1 + (f_n)^2} \left\{ 2 - \frac{|Df|^2}{1 + |Df|^2} \right\} dx_\delta \\ &\quad + \int_{\partial\mathbb{R}_-^n} f_n \tilde{H} |Df|^2 \frac{\sqrt{1 + |\bar{D}f|^2}}{1 + |Df|^2} dx_\delta \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Para concluir, calcularemos a curvatura média do bordo de  $G(f)$ ,  $\partial G(f)$ , visto como subvariedade de  $\partial\mathbb{R}_-^n \times \mathbb{R}$ . Visto como subvariedade de  $\partial\mathbb{R}_-^n \times \mathbb{R}$ , o bordo é o gráfico de  $\bar{f} = f|_{\partial\mathbb{R}_-^n}$ . Assim,  $\bar{\partial}_i = (\bar{e}_i, f_i)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , são campos tangentes. Aqui  $\bar{e}_i \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Além disso,  $\bar{\eta} = (-D\bar{f}, 1)$  é um campo normal. Temos que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_i} \bar{\eta} &= (-\bar{\partial}_i \bar{f}_1, \dots, -\bar{\partial}_i \bar{f}_{n-1}, 0) \\ &= (-\langle D\bar{f}_1, \bar{\partial}_i \rangle, \dots, -\langle D\bar{f}_{n-1}, \bar{\partial}_i \rangle, 0). \end{aligned}$$

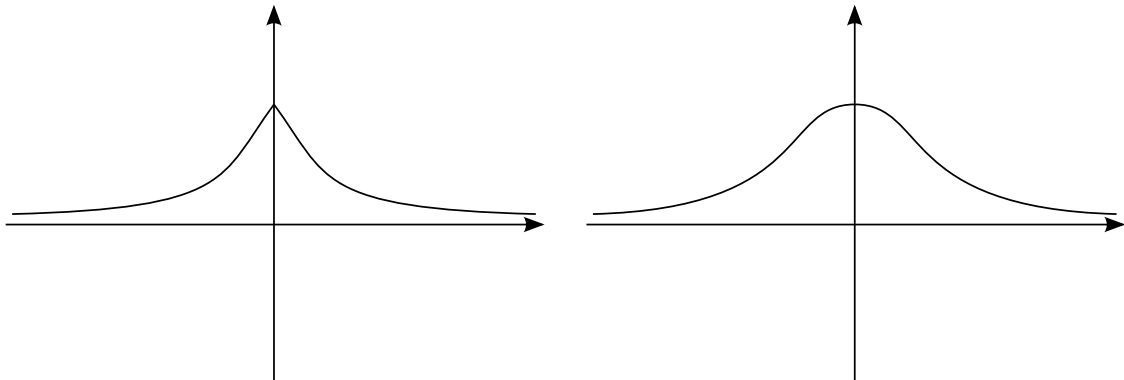
Como  $D\bar{f}_j = (\bar{f}_{j1}, \dots, \bar{f}_{j(n-1)}) = (\bar{f}_{j1}, \dots, \bar{f}_{j(n-1)}, 0)$  e  $\bar{\partial}_i = (\bar{e}_i, f_i)$ , temos que  $-\langle D\bar{f}_j, \bar{\partial}_i \rangle = \bar{f}_{ji}$ , assim  $\bar{\nabla}_{\bar{\partial}_i} \bar{\eta} = (-\bar{f}_{1i}, \dots, -\bar{f}_{(n-1)i}, 0) = (-D\bar{f}_i, 0)$ . Com isso,  $\langle \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_i} \bar{\eta}, \bar{\partial}_j \rangle = -\bar{f}_{ji}$ . Usando a equação de Weingarten, encontramos que  $\langle \tilde{i}(\bar{\partial}_i, \bar{\partial}_j), \bar{\eta} \rangle = \bar{f}_{ji} = f_{ji}$ . Portanto,

$$\tilde{H} = \sum_{k=1}^{n-1} \langle \tilde{i}(\bar{\partial}_k, \bar{\partial}_k), \frac{\bar{\eta}}{|\bar{\eta}|} \rangle = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f_{kk}}{\sqrt{1 + |Df|^2}}.$$

□

**Observação 1.3.5.** *Note que supor  $f_n \geq 0$  sobre  $\partial\mathbb{R}_-^n$  não é muito restritivo; por exemplo, isso não força que o bordo seja plano. Além disso, nem mesmo  $f_n = 0$  sobre  $\partial\mathbb{R}_-^n$  implica que o bordo seja plano. Por outro lado, num gráfico bidimensional, se supormos que  $f_2 = f_y = 0$  sobre todo o gráfico, teremos que o gráfico será formado por pontos nos quais pelo menos uma das curvaturas principais será nula, logo a curvatura gaussiana será nula e portanto o gráfico será um pedaço de um cilindro ou de um plano (veja [15], Seção 5.8), como o gráfico deve ser assintoticamente plano, concluímos que o gráfico é plano. Em dimensão maior do que dois, precisamos de mais hipóteses para garantir que o gráfico seja plano. Iremos supor que  $f_n = 0$  sobre  $\partial\mathbb{R}_-^n$  quando formos provar a rigidez da massa nula. De fato, precisamos supor que  $f_n = 0$  sobre os pontos de  $\partial\mathbb{R}_-^n$ , porque em nossa prova espelhamos o gráfico através de  $x_n = 0$  considerando uma nova função definida por  $\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$ , se  $x_n \leq 0$  e  $\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, -x_n)$  se  $x_n > 0$ , com*

$f_n = 0$  sobre  $\partial\mathbb{R}_-^n$  conseguimos garantir que o gráfico espelhado não tenha uma aresta sobre  $x_n = 0$ .



## 1.4 Rigidez da Massa Nula

O próximo teorema fornece uma relação entre a curvatura média de uma hiperfície Euclidiana e a curvatura média de um conjunto de nível regular. Ele será utilizado juntamente com o Corolário 1.2.12, para garantir a rigidez. Para provar a rigidez para gráficos com bordo não compacto, seguiremos algumas ideias apresentadas por Huang-Wu em [21].

**Teorema 1.4.1.** *Seja  $M$  uma hiperfície de classe  $C^2$  e seja  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x_1, \dots, x_n) = x_n$ , a função altura. Suponha que  $a$  seja um valor regular de  $h$  e  $\Sigma = h^{-1}(a)$  com  $|\nabla^M h| > 0$  sobre  $\Sigma$ . Denote por  $\nu$  e  $\eta$  os campos normais e unitários sobre  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  e  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ , respectivamente; e por  $H$  e  $H_\Sigma$  as curvaturas médias de  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  e  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  definidas por  $\nu$  e  $\eta$ , respectivamente. Seja  $R$  a curvatura escalar de  $M$ . Então,*

$$\langle \nu, \eta \rangle H H_\Sigma \geq \frac{R}{2} + \frac{n}{2(n-1)} \langle \nu, \eta \rangle^2 H_\Sigma^2, \text{ sobre } \Sigma, \quad (1.11)$$

com igualdade em um ponto  $p$  de  $\Sigma$  se, e somente se,  $(M, \Sigma)$  satisfazem as seguintes condições em  $p$ :

- (i)  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  é umbílica, com curvatura principal  $\kappa$ ;
- (ii)  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  tem no máximo duas curvaturas principais distintas e uma delas é igual a  $\langle \nu, \eta \rangle \kappa$ , com multiplicidade pelo menos  $n - 1$ .

*Demonstração.* Veja [21], Teorema 2.2. □

O próximo resultado é interessante por si só. Ele é um resultado do tipo Princípio de Máximo e será útil na prova da rigidez da massa nula, para garantir que o gráfico está contido em um semi-espaco determinado pelo plano ao qual ele é assintótico.

**Lema 1.4.2.** *Denote por  $B_r$  a bola aberta em  $\mathbb{R}^n$  centrada na origem e de raio  $r$ . Seja  $f \in C^n(B_{r_2} \setminus \overline{B_{r_1}}) \cap C^1(\overline{B_{r_2} \setminus B_{r_1}})$  para algum  $r_2 > r_1 > 0$ . Suponha que  $f$  satisfaz  $H(f) \geq 0$  e a curvatura escalar do gráfico de  $f$  seja não negativa. Então,*

$$\max_{\overline{B_{r_2} \setminus B_{r_1}}} f = \max_{\partial B_{r_2}} f.$$

*Além disso, se  $f(x) = \max_{\partial B_{r_2}} f$  para algum ponto interior  $x \in B_{r_2} \setminus \overline{B_{r_1}}$ , então  $f \equiv \max_{\partial B_{r_2}} f$  em  $\overline{B_{r_2} \setminus B_{r_1}}$ .*

*Demonstração.* Veja [21], Lema 3.10. □

Contrastando com o caso de hiperfícies fechadas, a curvatura média de hiperfícies não fechadas e com curvatura escalar não negativa pode mudar de sinal, [21]; isto não ocorre quando a hiperfície é assintoticamente plana.

**Teorema 1.4.3.** *Seja  $n \geq 2$  e  $M^n$  uma hiperfície assintoticamente plana, mergulhada, completa e com fins enumeráveis em  $\mathbb{R}^{n+1}$  com curvatura escalar  $S \geq 0$ . Então, ou  $H \geq 0$  ou  $H \leq 0$  em  $M$ .*

*Demonstração.* Veja [21], Teorema 4. □

O próximo resultado segue diretamente do Teorema da Divergência e de que as curvaturas média e escalar de um gráfico podem ser expressadas como o divergente de um campo.

**Lema 1.4.4.** *Seja  $M$  uma hiperfície assintoticamente plana, de classe  $C^2$ . Seja  $N$  um fim de  $M$ , o qual é um gráfico de uma função  $f$  sobre o exterior de uma região limitada num plano  $\Pi$ . Se existe uma região limitada  $\Omega_r \subset \Pi$  tal que  $\partial\Omega_r$  é a união disjunta de  $S_r = \{x \in \Pi \mid \|x\| = r\}$  e  $\Sigma = \{x \in \Pi \mid f(x) = c\}$ , para algum  $c \in \mathbb{R}$ , tal que  $|Df|$  não se anule sobre  $\Sigma$ , então*

$$m_{ADM} = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \left( \int_{\Sigma} \frac{|Df|^2}{1+|Df|^2} H_{\Sigma} d\sigma + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega_r} S dx \right), \quad (1.12)$$

*em que  $S$  é a curvatura escalar do gráfico de  $f$ ,  $\eta$  é o campo normal e unitário sobre  $\Sigma$  apontando para fora de  $\Omega_r$  e  $H_{\Sigma}$  é a curvatura média de  $\Sigma$  com respeito a  $\eta$ .*

*Demonstração.* Veja [21], Lema 5.6 ou de modo mais geral, [33], Teorema 1.2.  $\square$

Como consequência destes resultados, da fórmula (1.9) e do Corolário 1.2.12, agora obteremos o resultado de rigidez.

**Teorema 1.4.5.** *Seja  $f : \mathbb{R}_-^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  até o bordo, assintoticamente plana, sobre  $\mathbb{R}_-^n \setminus \Omega$ , com ordem  $p > \frac{n-2}{2}$ . Seja  $(\mathbb{R}_-^n, \delta + df \otimes df)$  o gráfico de  $f$ . Suponha que  $f_n = 0$  sobre  $\partial\mathbb{R}_-^n$ , que  $S \in L^1(\mathbb{R}_-^n)$  e  $S \geq 0$ . Suponha também que a curvatura média,  $\bar{H}$ , do bordo de  $(\mathbb{R}_-^n, \delta + df \otimes df)$ , visto como subvariedade de  $(\mathbb{R}_-^n, \delta + df \otimes df)$  seja tal que  $\bar{H} \geq 0$  e  $\bar{H} \in L^1(\partial\mathbb{R}_-^n)$ . Se a massa de  $G(f)$  é nula, então  $G(f)$  é um semiplano.*

*Demonstração.* Assumiremos que  $f$  é assintótica ao semiplano  $\{x_{n+1} = 0, x_n \leq 0\}$  e que  $f \neq 0$ , senão o resultado valeria trivialmente. Considere  $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$ , se  $x_n \leq 0$  e  $\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, -x_n)$ , se  $x_n > 0$ . Como  $f_n = 0$  sobre  $\partial\mathbb{R}_-^n$ , temos que  $\tilde{f}$  é de classe  $C^2$ , é assintoticamente plana, tem gráfico com curvatura escalar não negativa e integrável. Pelo Teorema 1.4.3, podemos supor que  $H(\tilde{f}) \geq 0$ , com respeito a  $\nu$ , em que  $\nu$  é o campo dado por  $(-D\tilde{f}, 1)/\sqrt{1 + |D\tilde{f}|^2}$  (pois podemos refletir  $M$  sobre  $\{x_{n+1} = 0\}$ ). Pelo Lema 1.4.2,

$$\max_{\bar{B}_{r_2} \setminus B_{r_1}} \tilde{f} = \max_{\partial B_{r_2}} \tilde{f} \quad \forall r_2 > r_1 > 0.$$

Porque  $\max_{\partial B_{r_2}} \tilde{f} \rightarrow 0$  quando  $r_2 \rightarrow \infty$ , concluímos que  $\tilde{f} \leq 0$  fora de  $B_{r_1}$ . Além disso, aplicando o princípio do máximo forte a  $H(\tilde{f}) \geq 0$ , temos  $\tilde{f} < 0$  fora de  $B_{r_1}$ , a menos que  $\tilde{f} \equiv 0$ . Neste último caso, podemos, além disso, concluir que  $G(\tilde{f})$  é idêntico a  $\{x_{n+1} = 0\}$  repetindo o argumento sobre  $B_{r_2} \setminus B_{r_0}$ , para  $0 < r_0 < r_1$ , e fazendo  $r_0 \rightarrow 0$ . Com isso concluímos que se  $\tilde{f} \neq 0$ , então  $\tilde{f} < 0$ , ou seja,  $G(\tilde{f}) \subset \{x_{n+1} < 0\}$ . Segue-se que, para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, algumas componentes conexas do conjunto de nível  $\{x \in \{x_{n+1} = 0\} \mid \tilde{f}(x) = -\epsilon\}$  repousam sobre  $G(\tilde{f})$  e não possuem bordo. Defina  $\Sigma_{-\epsilon}$  como sendo a componente conexa mais externa, isto é,  $\Sigma_{-\epsilon}$  não é delimitada pelas outras componentes. Pelo Teorema de Sard,  $\Sigma_{-\epsilon}$  é  $C^{n+1}$  para quase todo  $\epsilon$ . Além disso, porque  $\tilde{f}$  tende a zero, para algum  $\epsilon > 0$  e pequeno,  $\eta = -D\tilde{f}/|D\tilde{f}|$  é o vetor normal e unitário, sobre  $\Sigma_{-\epsilon}$ , apontando para dentro da região limitada em  $\{x_{n+1} = 0\}$ , a qual é delimitada por  $\Sigma_{-\epsilon}$ . Seja  $H_{\Sigma_{-\epsilon}}$  a curvatura média de  $\Sigma_{-\epsilon}$  definida por  $\eta$ . Então, usando que  $H(\tilde{f}) \geq 0$ ,  $S(\tilde{f}) \geq 0$  e (1.11) temos  $H_{\Sigma_{-\epsilon}} \geq 0$ . Como  $S(f) \geq 0$  e  $c(n)m(G(f), g) = 0$ , por (1.9) concluímos que  $S(f) = 0$ , logo  $S(\tilde{f}) = 0$  e  $c(n)m(G(\tilde{f}), g) = 0$ , isso implica que

#### 1.4. Rigidez da Massa Nula

$G(\tilde{f}) = \{x_{n+1} = 0\}$ . Caso contrário, por (1.12) teríamos  $H_{\Sigma_{-\epsilon}} = 0$  e portanto  $\Sigma_{-\epsilon}$  seria uma hipersuperfície mínima e compacta em  $\mathbb{R}^n$ , isso contradiz o Corolário 1.2.12.  $\square$

# Capítulo 2

## Gráficos Esfericamente Simétricos

Neste capítulo consideraremos gráficos esfericamente simétricos e com bordo não compacto, isto é, consideraremos gráficos de funções, definidas num semi-espaço, cujos conjuntos de níveis são semi-esferas. Na primeira seção enunciaremos alguns resultados auxiliares e definiremos o que é uma subvariedade mínima e estável. Na segunda seção discutiremos, muito brevemente, sobre a convergência plana intrínseca de variedades, com o único intuito de definir o que é uma convergência plana intrínseca; a qual será adotada na quarta seção. O leitor interessado poderá encontrar uma exposição mais detalhada, com várias figuras e diversas referências, sobre o assunto em [45]. Na terceira seção provaremos que a massa de tais gráficos é não negativa, mesmo sem supor curvatura escalar não negativa. Na quarta e última seção verificaremos que a rigidez da massa de tais gráficos é estável, isto é, se a massa está próxima de zero, então o gráfico está “próximo” de um semiplano.

### 2.1 Resultados Auxiliares

Com o intuito de definir o que é uma subvariedade mínima e estável, continuaremos com o assunto iniciado na Seção 1.2. Seja  $F : \Sigma \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  uma variação de  $\Sigma^k \subset M^n$ , diz-se que a variação é **normal**, quando a componente tangente, sobre  $\Sigma$ , do campo variacional for identicamente nula, isto é,

$$\left(dF_{(x,0)} \frac{d}{dt}\right)^T = 0 \forall x \in \Sigma.$$

Os próximos lemas são fatos básicos da Álgebra Linear, suas provas são simples e por isso incluímos-las aqui.

**Lema 2.1.1.** *Sejam  $A = (a_{ij})$  e  $B = (b_{ij})$  matrizes quadradas de ordem  $n$ , então*

$$\sum_i \sum_j a_{ij} b_{ij} = \text{tr}(A^t B).$$

*Demonstração.* Tem-se  $(AB)_{jk} = \sum_i a_{ji} b_{ik}$ . Deste modo,  $(A^t B)_{jk} = \sum_i a_{ij} b_{ik}$  e portanto

$$\text{tr}(A^t B) = \sum_j (A^t B)_{jj} = \sum_j \sum_i a_{ij} b_{ij}.$$

□

**Lema 2.1.2.** *Seja  $U \subset M(n \times n, \mathbb{R})$  um conjunto aberto de matrizes invertíveis, considere  $\det : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Então,*

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \det A = \det A \cdot (A^{-1})_{ji}.$$

*Demonstração.* Denote a matriz dos cofatores de  $A$  por  $\text{adj } A$ :

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} \det A_{11} & -\det A_{21} & \cdots \\ -\det A_{12} & \det A_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Da Álgebra Linear tem-se  $A \cdot \text{adj } A = \text{adj } A \cdot A = \det A \cdot \text{Id}_{n \times n}$ . Disso segue que  $(\text{adj } A)_{ji} = \det A (A^{-1})_{ji}$  e também que  $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A_{ij}$ . Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \det A &= (-1)^{i+j} \det A_{ij} \\ &= (\text{adj } A)_{ji} \\ &= \det A \cdot (A^{-1})_{ji}. \end{aligned}$$

□

Agora apresentaremos a segunda variação do volume, esta variação nos permitirá definir o operador de Jacobi, o qual pode ser usado para definir a estabilidade de uma subvariedade mínima.

**Teorema 2.1.3** (Segunda Variação do Volume). *Suponha que  $\Sigma^k \subset M^n$  seja uma subvariedade mínima. Seja  $F$  uma variação normal de  $\Sigma$  com suporte compacto e cujo campo variacional seja  $X$ , então*

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \text{vol}(F(\Sigma, t)) &= - \sum_{i,j=1}^k \int_{\Sigma} g(A(\partial_i, \partial_j), X)^2 d\Omega_{\Sigma} \\ &\quad + \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma}^N X|^2 d\Omega_{\Sigma} \\ &\quad - \sum_{i=1}^k \int_{\Sigma} g(R_M(X, \partial_i) \partial_i, X) d\Omega_{\Sigma}. \end{aligned}$$

## 2.1. Resultados Auxiliares

*Demonstração.* Como antes, sejam  $(x_i)$  coordenadas locais sobre  $\Sigma$ ,  $g_{ij}(t) := g(F_{x_i}, F_{x_j})$  e  $\nu_t := \sqrt{\det(g_{ij}(t))} \sqrt{\det(g^{ij}(0))}$ . Então,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \text{vol}(F(\Sigma, t)) &= \int_{\Sigma} \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \nu_t \sqrt{\det(g_{ij}(0))} dx \\ &=: \int_{\Sigma} \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \nu_t d\Omega_{\Sigma}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Primeiro note que

$$2 \frac{d}{dt} \nu_t = \text{tr}(g'_{ij}(t) g^{lm}(t)) \nu_t.$$

Com efeito, da regra da cadeia e dos Lemas 2.1.1 e 2.1.2 segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sqrt{\det g(t)} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det g(t)}} \frac{d}{dt} \det g(t) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det g(t)}} \sum_{ij} \frac{\partial \det g(t)}{\partial g_{ij}} \frac{d}{dt} g_{ij}(t) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det g(t)}} \sum_{ij} \det g(t) (g^{-1})_{ji}(t) \frac{d}{dt} g_{ij}(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\det g(t)} \sum_{ij} (g^{-1})_{ji}(t) \frac{d}{dt} g_{ij}(t) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\det g(t)} \sum_{ij} ((g^{-1})^t)_{ij}(t) g'_{ij}(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\det g(t)} \text{tr}[(g^{-1})^t]^t(t) g'(t)] \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\det g(t)} \text{tr}[g^{-1}(t) g'(t)] = \frac{1}{2} \sqrt{\det g(t)} \text{tr}[g'_{ij}(t) g^{lm}(t)]. \end{aligned}$$

Daí, multiplicando os dois lados por  $\sqrt{\det(g^{ij}(0))}$  tem-se

$$2 \frac{d}{dt} \nu_t = \text{tr}[g'_{ij}(t) g^{lm}(t)] \nu_t.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} 2 \frac{d^2}{dt^2} \nu_t &= \frac{d}{dt} \{ \text{tr}[g'_{ij}(t) g^{lm}(t)] \nu_t \} \\ &= \frac{d}{dt} \{ \text{tr}[g'_{ij}(t) g^{lm}(t)] \} \nu_t + \text{tr}[g'_{ij}(t) g^{lm}(t)] \frac{d}{dt} \nu_t \\ &= \text{tr}[g''_{ij}(t) g^{lm}(t) + g'_{ij}(t) (g^{lm})'(t)] \nu_t + \text{tr}[g'_{ij}(t) g^{lm}(t)] \frac{d}{dt} \nu_t \\ &= \text{tr}[g''_{ij}(t) g^{lm}(t) + g'_{ij}(t) (g^{lm})'(t)] \nu_t + \text{tr}[g'_{ij}(t) g^{lm}(t)] \frac{1}{2} \text{tr}[g'_{ij}(t) g^{lm}(t)] \nu_t \\ &= \text{tr}[g''_{ij}(t) g^{lm}(t) + g'_{ij}(t) (g^{lm})'(t)] \nu_t + \frac{1}{2} \{ \text{tr}[g'_{ij}(t) g^{lm}(t)] \}^2 \nu_t. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Para avaliar  $d^2/dt^2|_{t=0} \nu_t$  em algum ponto  $x \in \Sigma$ , pode-se escolher o sistema de coordenadas  $(x_i)$  sendo ortonormal em  $x$ . Diferenciando  $g^{lk}(t) g_{km}(t) = \delta_m^l$ , obtém-se  $(g^{lk})'(t) g_{km}(t) + g^{lk}(t) g'_{km}(t) = 0$ , daí,  $(g^{lk})'(0) \delta_{km} = -\delta_{lk} g'_{km}(0)$  e portanto,  $(g^{lm})'(0) = -g'_{lm}(0)$ . Usando (2.2) tem-se

$$2 \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \nu_t = \text{tr}[g''_{ij}(0)] - \text{tr}[g'_{ij}(0) g'_{lm}(0)] + \frac{1}{2} \{ \text{tr}[g'_{ij}(0)] \}^2. \quad (2.3)$$



## 2.1. Resultados Auxiliares

Por outro lado, usando que

$$\nabla_{F_t} F_{x_i} - \nabla_{F_{x_i}} F_t = [F_t, F_{x_i}] = 0, \quad (2.4)$$

que a variação é normal e que a segunda forma fundamental é simétrica, encontra-se

$$\begin{aligned} g'_{ij}(0) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g(F_{x_i}, F_{x_j}) = F_t g(F_{x_i}, F_{x_j}) \\ &= g(\nabla_{F_t} F_{x_i}, F_{x_j}) + g(F_{x_i}, \nabla_{F_t} F_{x_j}) \\ &= g(\nabla_{F_{x_i}} F_t, F_{x_j}) + g(F_{x_i}, \nabla_{F_{x_j}} F_t) \\ &= F_{x_i} g(F_t, F_{x_j}) - g(F_t, \nabla_{F_{x_i}} F_{x_j}) + F_{x_j} g(F_{x_i}, F_t) - g(\nabla_{F_{x_j}} F_{x_i}, F_t) \\ &= -g(F_t, \nabla_{F_{x_i}} F_{x_j}) - g(\nabla_{F_{x_j}} F_{x_i}, F_t) \\ &= -g(F_t, (\nabla_{F_{x_i}} F_{x_j})^N) - g((\nabla_{F_{x_j}} F_{x_i})^N, F_t) \\ &= -g(F_t, A(F_{x_i}, F_{x_j})) - g(A(F_{x_j}, F_{x_i}), F_t) \\ &= -2g(F_t, A(F_{x_i}, F_{x_j})). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \text{tr}[g'_{ij}(0)] &= \sum_i g'_{ii}(0) \\ &= \sum_i -2g(F_t, A(F_{x_i}, F_{x_i})) \\ &= -2g(F_t, \sum_i A(F_{x_i}, F_{x_i})) \\ &= -2g(F_t, H) \\ &= 0, \end{aligned}$$

já que  $\Sigma$  é mínima. Usando isso em (2.3) obtém-se

$$2 \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \nu_t = \text{tr}[g''_{ij}(0)] - \text{tr}[g'_{ij}(0)g'_{lm}(0)]. \quad (2.6)$$

Note que, em  $x$ , tem-se

$$\begin{aligned} \text{tr}[g''_{ij}(0)] &= \sum_{i=1}^k g''_{ii}(0) \\ &= \sum_{i=1}^k 2g(F_{x_i t t}, F_{x_i}) + 2g(F_{x_i t}, F_{x_i t}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Usando (2.4) tem-se

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^k g(F_{x_i t t}, F_{x_i}) &= \sum_{i=1}^k g(\nabla_{F_t} \nabla_{F_t} F_{x_i}, F_{x_i}) \\
 &= \sum_{i=1}^k g(\nabla_{F_t} \nabla_{F_{x_i}} F_t, F_{x_i}) \\
 &= \sum_{i=1}^k g(\nabla_{F_t} \nabla_{F_{x_i}} F_t - \nabla_{F_{x_i}} \nabla_{F_t} F_t - \nabla_{[F_t, F_{x_i}]} F_t, F_{x_i}) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^k g(\nabla_{F_{x_i}} \nabla_{F_t} F_t, F_{x_i}) \\
 &= \sum_{i=1}^k g(R_M(F_t, F_{x_i}) F_t, F_{x_i}) + \operatorname{div}_\Sigma(F_{t t}).
 \end{aligned}$$

Substituindo em (2.7),

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tr}[g''_{ij}(0)] &= 2 \sum_{i=1}^k g(R_M(F_t, F_{x_i}) F_t, F_{x_i}) + 2 \operatorname{div}_\Sigma(F_{t t}) + 2 \sum_{i=1}^k g(F_{x_i t}, F_{x_i t}) \\
 &= 2 \sum_{i=1}^k g(R_M(F_t, F_{x_i}) F_t, F_{x_i}) + 2 \operatorname{div}_\Sigma(F_{t t}) + 2 \sum_{i=1}^k g(F_{x_i t}^T, F_{x_i t}^T) \\
 &\quad + 2 \sum_{i=1}^k g(F_{x_i t}^N, F_{x_i t}^N). \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

Usando (2.4) e que a variação é normal, em  $x$ , tem-se

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^k g(F_{x_i t}^T, F_{x_i t}^T) &= \sum_{i=1}^k g((\nabla_{F_t} F_{x_i})^T, (\nabla_{F_t} F_{x_i})^T) = \sum_{i=1}^k g((\nabla_{F_{x_i}} F_t)^T, (\nabla_{F_{x_i}} F_t)^T) \\
 &= \sum_{i=1}^k g \left( \sum_{j=1}^k g(\nabla_{F_{x_i}} F_t, F_{x_j}) F_{x_j}, \sum_{l=1}^k g(\nabla_{F_{x_i}} F_t, F_{x_l}) F_{x_l} \right) \\
 &= \sum_{i,j,l=1}^k g(\nabla_{F_{x_i}} F_t, F_{x_j}) g(\nabla_{F_{x_i}} F_t, F_{x_l}) g(F_{x_j}, F_{x_l}) \\
 &= \sum_{i,j,l=1}^k g(\nabla_{F_{x_i}} F_t, F_{x_j}) g(\nabla_{F_{x_i}} F_t, F_{x_l}) \delta_{jl} = \sum_{i,j=1}^k g(\nabla_{F_{x_i}} F_t, F_{x_j})^2 \\
 &= \sum_{i,j=1}^k \{F_{x_i} g(F_t, F_{x_j}) - g(F_t, \nabla_{F_{x_i}} F_{x_j})\}^2 \\
 &= \sum_{i,j=1}^k \{g(F_t, \nabla_{F_{x_i}} F_{x_j})\}^2 = \sum_{i,j=1}^k g(F_t, (\nabla_{F_{x_i}} F_{x_j})^N)^2 \\
 &= \sum_{i,j=1}^k g(A(F_{x_i}, F_{x_j}), F_t)^2. \tag{2.9}
 \end{aligned}$$

## 2.1. Resultados Auxiliares

Também note, usando (2.4), que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^k g(F_{x_i t}^N, F_{x_i t}^N) &= \sum_{i=1}^k g((\nabla_{F_t} F_{x_i})^N, (\nabla_{F_t} F_{x_i})^N) \\
&= \sum_{i=1}^k g((\nabla_{F_{x_i}} F_t)^N, (\nabla_{F_{x_i}} F_t)^N) \\
&= \sum_{i=1}^k |(\nabla_{F_{x_i}} F_t)^N|^2 \\
&=: |\nabla_{\Sigma}^N F_t|^2.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Substituindo (2.9) e (2.10) em (2.8), tem-se

$$\begin{aligned}
\text{tr}[g''_{ij}(0)] &= 2\text{div}_{\Sigma}(F_{tt}) + 2 \sum_{i=1}^k g(R_M(F_t, F_{x_i})F_t, F_{x_i}) \\
&\quad + 2 \sum_{i,j=1}^k g(A(F_{x_i}, F_{x_j}), F_t)^2 + 2|\nabla_{\Sigma}^N F_t|^2.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Observe, usando (2.5), que

$$\begin{aligned}
\text{tr}(g'_{ij}(0)g'_{lm}(0)) &= \sum_{i,j=1}^k g'_{ij}(0)g'_{ji}(0) = \sum_{i,j=1}^k g'_{ij}(0)^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^k [-2g(A(F_{x_i}, F_{x_j}), F_t)]^2 \\
&= 4 \sum_{i,j=1}^k g(A(F_{x_i}, F_{x_j}), F_t)^2.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Substituindo (2.11) e (2.12) em (2.6) encontra-se

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \nu_t &= - \sum_{i,j=1}^k g(A(F_{x_i}, F_{x_j}), F_t)^2 + |\nabla_{\Sigma}^N F_t|^2 \\
&\quad - \sum_{i=1}^k g(R_M(F_t, F_{x_i})F_{x_i}, F_t) + \text{div}_{\Sigma}(F_{tt}).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Substituindo (2.13) em (2.1) e usando a Observação 1.2.9,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \text{vol}(F(\Sigma, t)) &= - \sum_{i,j=1}^k \int_{\Sigma} g(A(F_{x_i}, F_{x_j}), F_t)^2 d\Omega_{\Sigma} \\
&\quad + \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma}^N F_t|^2 d\Omega_{\Sigma} \\
&\quad - \sum_{i=1}^k \int_{\Sigma} g(R_M(F_t, F_{x_i})F_{x_i}, F_t) d\Omega_{\Sigma}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Agora use que  $F_t = X$  e  $F_{x_i} = \partial_i$  em  $t = 0$ . □

## 2.1. Resultados Auxiliares

Sejam  $\Sigma^k \subset M^n$  imersa e  $\Gamma(N\Sigma)$  o fibrado normal de  $\Sigma$ . O **operador de estabilidade**, também conhecido como **operador de Jacobi**,  $L : \Gamma(N\Sigma) \rightarrow \Gamma(TM|_\Sigma)$ , é um operador autoadjunto que age sobre campos vetoriais normais a  $\Sigma$  e é definido por

$$LX = \Delta_\Sigma^N X + \sum_{i=1}^k R_M(X, E_i)E_i + \tilde{A}(X),$$

em que  $\tilde{A}$  é o **operador de Simons**, definido por

$$\tilde{A}(X) = \sum_{i,j=1}^k g(A(E_i, E_j), X)A(E_i, E_j),$$

e  $\Delta_\Sigma^N$  é o **Laplaciano sobre o fibrado normal**,

$$\Delta_\Sigma^N X = \sum_{i=1}^k (\nabla_{E_i} \nabla_{E_i} X)^N - \sum_{i=1}^k (\nabla_{(\nabla_{E_i} E_i)^T} X)^N.$$

**Observação 2.1.4.** *Suponha as hipóteses do Teorema da Segunda Variação do Volume, então*

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \text{vol}(F(\Sigma, t)) = - \int_\Sigma g(X, LX) d\Omega_\Sigma. \quad (2.15)$$

Um campo normal à  $\Sigma$ ,  $X \in \Gamma(N\Sigma)$ , é dito ser um **campo de Jacobi**, se  $LX = 0$ . Diz-se que  $\Sigma^k \subset M^n$  tem **fibrado normal trivial**, se existe uma base ortonormal e globalmente definida para o fibrado normal.

Para uma hiperfície com um fibrado normal trivial, o operador de estabilidade fica significativamente mais simples, pois neste caso, ele passa a operar sobre funções. De fato, como o fibrado normal é trivial, todo campo normal  $X \in \Gamma(N\Sigma)$  pode ser escrito como  $X = \eta N$ , em que  $N$  é um campo unitário. Como  $g(N, \nabla_Y N) = 0$  para todo  $Y \in \Gamma(TM)$ , tem-se

$$L(\eta N) = (\Delta_\Sigma \eta + |A|^2 \eta + \text{Ric}_M(N, N)\eta)N. \quad (2.16)$$

Por isso,  $X = \eta N$  será identificado com  $\eta$  e ao invés de se usar a expressão acima, será usada a seguinte

$$L\eta = \Delta_\Sigma \eta + |A|^2 \eta + \text{Ric}_M(N, N)\eta. \quad (2.17)$$

Por definição,  $\lambda$  é um **autovalor** (de Dirichlet) de  $L$  sobre  $\Omega \subset \Sigma$ , se existir um campo vetorial normal e não trivial que se anula sobre  $\partial\Omega$  e tal que

$$LX + \lambda X = 0.$$

O **índice de Morse** de uma subvariedade mínima e compacta,  $\Sigma$ , é o número de autovalores (de Dirichlet) negativos do operador de estabilidade (contados com suas multiplicidades),  $L$ , agindo sobre o espaço das seções suaves, do fibrado normal, que se anulam no bordo de  $\Sigma$ .

Diz-se que uma subvariedade mínima,  $\Sigma^k \subset M^n$ , é **estável**, se para todas as variações próprias,  $F$ , de  $\Sigma$  tem-se

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \text{vol}(F(\Sigma, t)) = - \int_{\Sigma} g(F_t, LF_t) d\Omega_{\Sigma} \geq 0.$$

Note que isto equivale a exigir que o operador de estabilidade seja semi-definido negativo, isto é, tenha índice de Morse nulo. De fato,  $L$  será semi-definido negativo se, e somente se, seu primeiro autovalor,  $\lambda_1$ , for não positivo, isto é, se  $X$  for um elemento do autoespaço de  $\lambda_1$ , então  $LX = -\lambda_1 X$ , em que  $\lambda_1 \geq 0$ . Portanto,  $\Sigma$  será estável se, e somente se, seu primeiro autovalor de Dirichlet for não negativo, ou seja,  $\Sigma$  será estável se, e somente se, seu índice de Morse for nulo. Note também que se o primeiro autovalor de  $L$  for não positivo,  $LX = -\lambda_1 X$  com  $\lambda_1 \geq 0$ , então

$$- \int_{\Sigma} g(X, LX) = - \int_{\Sigma} g(X, -\lambda_1 X) = \lambda_1 \int_{\Sigma} g(X, X) \geq 0.$$

Uma subvariedade mínima, completa (possivelmente não compacta) e sem bordo,  $\Sigma$ , é dita ser **estável**, se todo subdomínio compacto de  $\Sigma$  for estável.

**Exemplo 2.1.5.** Um plano  $\Pi \subset \mathbb{R}^3$  é estável.

**Exemplo 2.1.6.** Seja  $\mathbb{S}^1(t)$ ,  $t \in (-1, 1)$ , a circunferência de  $\mathbb{S}^2$  obtida pela interseção de  $\mathbb{S}^2$  com  $\{z = t\} \subset \mathbb{R}^3$ , então  $\mathbb{S}^1(0)$  não é subvariedade estável. Com efeito, qualquer  $\mathbb{S}^1(t)$ ,  $t \neq 0$ , tem volume menor do que  $\mathbb{S}^1(0)$ .

Note que a hiperfície mínima da variedade de Schwarzschild é estável.

**Lema 2.1.7** (Inequação de estabilidade). *Suponha que  $\Sigma^{n-1} \subset M^n$  seja uma hiperfície mínima, estável e com fibrado normal trivial. Então, para todas as funções de lipschitz,  $\eta$ , com suporte compacto tem-se*

$$\int_{\Sigma} (\inf_M \text{Ric}_M + |A|^2) \eta^2 \leq \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \eta|^2.$$

*Demonstração.* Já que  $\Sigma$  é estável, tem-se

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \text{vol}(F(\Sigma, t)) \\
 &= - \int_{\Sigma} g(F_t, LF_t) d\Omega_{\Sigma} \\
 &= - \int_{\Sigma} g(\eta N, L(\eta N)) d\Omega_{\Sigma} \\
 &= - \int_{\Sigma} \eta L\eta g(N, N) d\Omega_{\Sigma} \\
 &= - \int_{\Sigma} \eta \Delta_{\Sigma} \eta + |A|^2 \eta^2 + \text{Ric}_M(N, N) \eta^2 d\Omega_{\Sigma}.
 \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Sigma} |A|^2 \eta^2 + \text{Ric}_M(N, N) \eta^2 d\Omega_{\Sigma} &\leq - \int_{\Sigma} \eta \Delta_{\Sigma} \eta d\Omega_{\Sigma} \\
 &= \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \eta|^2 d\Omega_{\Sigma} \\
 &\quad - \int_{\partial \Sigma} \eta g(\nabla_{\Sigma} \eta, \nu) d\sigma.
 \end{aligned}$$

Como  $\eta$  tem suporte compacto,

$$\int_{\Sigma} [|A|^2 + \text{Ric}_M(N, N)] \eta^2 d\Omega_{\Sigma} \leq \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \eta|^2 d\Omega_{\Sigma}. \quad (2.18)$$

Daí,

$$\int_{\Sigma} [|A|^2 + \inf_M \text{Ric}_M] \eta^2 d\Omega_{\Sigma} \leq \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \eta|^2 d\Omega_{\Sigma}.$$

Já que pelo fato de o tensor de Ricci ser simétrico, ele fica completamente determinado pelos valores da forma  $\text{Ric}_M(N, N)$ .  $\square$

**Observação 2.1.8.** *Note que se (2.18) valer para toda  $\eta$  com suporte compacto, então  $\Sigma$  será estável.*

## 2.2 Distância Plana Intrínseca

A **medida de Hausdorff**  $k$ -dimensional de um subconjunto  $X$ , de um espaço métrico, é definida por

$$\mathcal{H}^k(X) := \liminf_{r \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(k) \left( \frac{\text{diam}(C_i)}{2} \right)^k \mid X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i, \text{diam}(C_i) < r \right\},$$

em que  $\alpha(k)$  é o volume de uma bola unitária em  $\mathbb{R}^k$  e  $\text{diam}(C_i)$  é o diâmetro do conjunto  $C_i$ .

Um espaço métrico,  $X$ , é chamado de  $\mathcal{H}^m$  **retificável enumerável**, se existe uma coleção enumerável de aplicações Lipschitz  $\varphi_i : A_i \rightarrow X$ , em que cada  $A_i \subset \mathbb{R}^m$  é Borel mensurável, tal que

$$\mathcal{H}^m \left( X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \varphi_i(A_i) \right) = 0.$$

Uma **corrente** de dimensão  $k \in \mathbb{N}$ ,  $T$ , é um funcional linear suave, sobre  $k$ -formas. Qualquer subvariedade orientada e compacta,  $M$ , de dimensão  $k$ , com bordo compacto e suave, pode ser vista como uma corrente  $k$ -dimensional,  $T$ , definida por

$$T(\omega) := \int_M \omega. \quad (2.19)$$

Uma **corrente integral**,  $T$ , é uma corrente munida de um conjunto canônico,  $R$ , e uma função multiplicidade,  $\theta$ :

$$T(\omega) := \int_R \theta \omega.$$

O conjunto canônico deve ser  $\mathcal{H}^k$  retificável enumerável e a função multiplicidade,  $\theta : R \rightarrow \mathbb{N}$ , deve ser uma função Borel mensurável. Assim, pode-se calcular a integral usando os conjuntos  $E_i \subset \mathbb{R}^k$ :

$$T(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} \theta \circ \varphi_i \varphi_i^* \omega.$$

Além do que foi posto acima, para que uma corrente seja uma corrente integral, requisita-se que a sua massa (também chamada de volume com peso) seja finita e que seu bordo também tenha massa finita. A **massa** de uma corrente integral é definida por

$$M(T) := \int_R \theta d\mathcal{H}^k,$$

e o **bordo**,  $\partial T$ , de uma corrente integral é definido por

$$\partial T(\omega) := T(d\omega),$$

em que  $d$  é a derivada exterior e  $\omega$  é uma  $(k-1)$ -forma.

Quando uma subvariedade compacta e com bordo,  $M$ , é vista como uma corrente integral,  $T$ , então  $M$  é o próprio conjunto canônico, a multiplicidade é igual a 1; e o bordo,  $\partial T$ , é justamente  $\partial M$  visto como uma corrente integral. A massa,  $M(T)$ , é exatamente o volume de  $M$ .

A **distância plana** entre duas correntes integrais  $k$ -dimensionais,  $T_1$  e  $T_2$ , é definida por

$$d_{\mathcal{F}}(T_1, T_2) := \inf_c \{M(A) + M(B)\},$$

em que  $\mathcal{C}$  é o conjunto das correntes integrais  $k$ -dimensionais  $A$  e  $(k+1)$ -dimensionais  $B$ , tais que  $A + \partial B = T_1 - T_2$ .

Sejam  $X$  e  $Z$  espaços métricos, um **mergulho isométrico** de  $X$  em  $Z$  é uma aplicação  $\varphi : X \rightarrow Z$  que satisfaz

$$d_Z(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) = d_X(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

A **distância plana intrínseca** entre variedades Riemannianas orientadas e compactas é definida por

$$d_{\mathcal{F}}(M_1, M_2) := \inf_{\mathcal{C}} \{d_{\mathcal{F}}^Z(\varphi_{1\#}T_1, \varphi_{2\#}T_2)\},$$

em que  $\mathcal{C}$  é o conjunto dos espaços métricos  $Z$  e dos mergulhos isométricos  $\varphi_i$  tais que  $\varphi_i : M_i \rightarrow Z$ . Aqui,  $d_{\mathcal{F}}^Z$  denota a distância plana em  $Z$  e as correntes integrais  $T_i$  são definidas pela integração sobre as variedades  $M_i$ , como em (2.19), e  $\varphi_{i\#}T_i$  são definidas por

$$\begin{aligned} \varphi_{i\#}T_i(f, x_1, \dots, x_k) &= T_i(f \circ \varphi_i, x_1 \circ \varphi_i, \dots, x_k \circ \varphi_i) \\ &= \int_{M_i} f \circ \varphi_i d(x_1 \circ \varphi_i) \wedge \dots \wedge d(x_k \circ \varphi_i). \end{aligned}$$

### 2.3 Massa Não Negativa

Como pode ser visto no Teorema 15 de [28]; gráficos, sem bordo, de funções esfericamente simétricas, possuem massa ADM não negativa mesmo sem a suposição de curvatura escalar não negativa. Os gráficos de funções esfericamente simétricas, com bordo não compacto, também possuem tal propriedade.

**Teorema 2.3.1.** *Seja  $f : \mathbb{R}_-^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função assintoticamente plana sobre  $\mathbb{R}_-^n \setminus \Omega$ , esfericamente simétrica e de classe  $C^2$ , com ordem  $p > \frac{n-2}{2}$ . Então, a massa do gráfico de  $f$  é não negativa.*

*Demonstração.* Denote por  $f_r$  a derivada radial de  $f$ . Temos que  $f_i = f_r \frac{x_i}{r}$  e  $f_{ij} =$



$f_{rr} \frac{x_i x_j}{r^2} + f_r \left( \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x_i x_j}{r^3} \right)$ . Deste modo,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n (g_{ij,j} - g_{jj,i})(\eta_r)^i &= \sum_{i,j=1}^n (f_{jj} f_i - f_{ji} f_j) \frac{x_i}{|x|} \\ &= \sum_{i,j=1}^n f_{jj} f_i \frac{x_i}{|x|} - \sum_{i,j=1}^n f_{ji} f_j \frac{x_i}{|x|} \\ &= f_{rr} f_r + (f_r)^2 \frac{n-1}{r} - f_{rr} f_r \\ &= (f_r)^2 \frac{n-1}{r}. \end{aligned}$$

Por outro lado, para  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  temos

$$\begin{aligned} g_{ni}(\nu_r)^i &= f_n f_i \frac{x^i}{|x|} \\ &= (f_r)^2 \frac{(x_i)^2}{r^3} x_n. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Como  $x_n = 0$  sobre  $S_r^{n-2}$ , temos

$$c(n)m(g) \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^-} (f_r)^2 \frac{n-1}{r} d\sigma_r \geq 0.$$

□

## 2.4 Estabilidade da Rigidez

**Definição 2.4.1.** *Seja  $n \geq 3$  e denote por  $RS_n$  o conjunto das  $n$ -variedades Riemannianas rotacionalmente simétricas, com curvatura escalar não negativa, ou sem bordo ou com bordo mínimo e estável; e por fim, sem hiperfícies mínimas e fechadas no seu interior.*

Pode-se mostrar que se  $M \in RS_n$ , então  $M$  pode ser isometricamente mergulhada num Espaço Euclidiano como gráfico de alguma função radial. Também é possível mostrar o seguinte: Se  $M \in RS_n$  possui massa ADM finita, então  $M$  é assintoticamente plana.

**Teorema 2.4.2.** *Seja  $M_j^n$  uma sequência em  $RS_n$ . Fixe uma área  $A_0$  e escolha  $p_j \in \Sigma_j$ , em que  $\Sigma_j \subset M_j$  é uma esfera simétrica com área  $\text{vol}_{n-1}(\Sigma_j) = A_0$ . Se  $m_{ADM}(M_j)$  converge para 0, então  $(M_j^n, p_j)$  converge pontualmente para o espaço Euclidiano  $(\mathbb{R}^n, 0)$  no sentido plano intrínseco, isto é, para quase todo  $D > 0$ , existe  $D_j \rightarrow D$ , tal que  $B_{p_j}(D_j) \subset M_j^n$  converge no sentido plano intrínseco para  $B_0(D) \subset \mathbb{R}^n$ .*

*Demonstração.* Veja [29], Corolário 1.3. □

**Corolário 2.4.3.** *Sejam  $f_j : \mathbb{R}_-^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , esfericamente simétricas e de classe  $C^2$ . Fixe uma área  $A_0$  e escolha  $p_j \in \Sigma_j$ , em que  $\Sigma_j \subset G(f_j)$  é uma semi-esfera simétrica com área  $\text{vol}_{n-1}(\Sigma_j) = A_0/2$ . Se a massa dos gráficos das funções  $f_j$  convergem para 0, então  $(G(f_j), p_j)$  converge pontualmente para o semi-espaço Euclidiano  $(\mathbb{R}_-^n, 0)$  no sentido plano intrínseco.*

*Demonstração.* Primeiramente, note que pelo fato de o gráfico ser esfericamente simétrico, podemos duplicar os gráficos considerando  $\tilde{f}_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\tilde{f}_j(x_1, \dots, x_n) = f_j(x_1, \dots, x_n),$$

se  $x_n \leq 0$ ; e

$$\tilde{f}_j(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = f_j(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n),$$

se  $x_n > 0$ . Além disso, como  $x_n = 0$  sobre  $\partial\mathbb{R}_-^n$ , considerando (2.20), concluímos que a massa ADM do gráfico de  $\tilde{f}_j$  é o dobro da massa do gráfico de  $f_j$ . Assim, usando o Teorema 2.4.2 concluímos o resultado.  $\square$

# Capítulo 3

## Desigualdade de Penrose

Neste capítulo provaremos a Desigualdade de Penrose para hipersuperfícies gráficas com bordo não compacto, mergulhadas em um Espaço Euclidiano de qualquer dimensão. Na primeira seção apresentamos alguns resultados que serão usados na prova da desigualdade, e na segunda seção apresentamos a prova do Teorema.

### 3.1 Resultados Auxiliares

A próxima proposição será útil na prova da proposição posterior.

**Proposição 3.1.1.** *Sejam  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  uma  $(n + 1)$ -variedade Riemanniana e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Sejam  $\Sigma \subset M$  uma hipersuperfície mergulhada e  $\nu$  um campo unitário e normal a  $\Sigma$ . Suponha que  $f$  seja constante sobre  $\Sigma$ , então sobre  $\Sigma$  tem-se*

$$\Delta f = \nabla \nabla f(\nu, \nu) - H^\Sigma \langle Df, \nu \rangle.$$

Aqui,  $H^\Sigma$  está relacionada com o vetor  $\nu$ .

*Demonstração.* Dado um ponto  $x \in \Sigma$ , temos

$$\begin{aligned} \Delta f &= \operatorname{div} Df = \operatorname{div}(\langle Df, \nu \rangle \nu) = \langle D \langle Df, \nu \rangle, \nu \rangle + \langle Df, \nu \rangle \operatorname{div} \nu \\ &= \langle e_i \langle Df, \nu \rangle e_i, \nu \rangle + \langle Df, \nu \rangle \operatorname{div} \nu \\ &= [\langle \bar{\nabla}_{e_i} Df, \nu \rangle + \langle Df, \bar{\nabla}_{e_i} \nu \rangle] \langle e_i, \nu \rangle + \langle Df, \nu \rangle \operatorname{div} \nu \\ &= \langle \bar{\nabla}_{e_i} Df, \nu \rangle \langle e_i, \nu \rangle + \langle Df, \bar{\nabla}_{e_i} \nu \rangle \langle e_i, \nu \rangle + \langle Df, \nu \rangle \operatorname{div} \nu \\ &= \langle \bar{\nabla}_\nu Df, \nu \rangle + \langle Df, \bar{\nabla}_\nu \nu \rangle + \langle Df, \nu \rangle \operatorname{div} \nu \end{aligned}$$

### 3.1. Resultados Auxiliares

Usando que  $\Sigma$  está mergulhada em  $M$ , tome uma vizinhança  $U$  de  $x$  em  $\Sigma$  tal que  $U = g^{-1}(a)$ , em que  $g : V \subset M \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável,  $U \subset V$  e  $a \in \mathbb{R}$  é valor regular de  $g$ . Escolha um referencial ortonormal  $E_1, \dots, E_{n+1}$ , sobre  $V$ , tal que  $E_{n+1} = \frac{Dg}{|Dg|} = \nu$ . Denote por  $H$  a curvatura média e por  $A$  a segunda forma fundamental de  $\Sigma$ , então

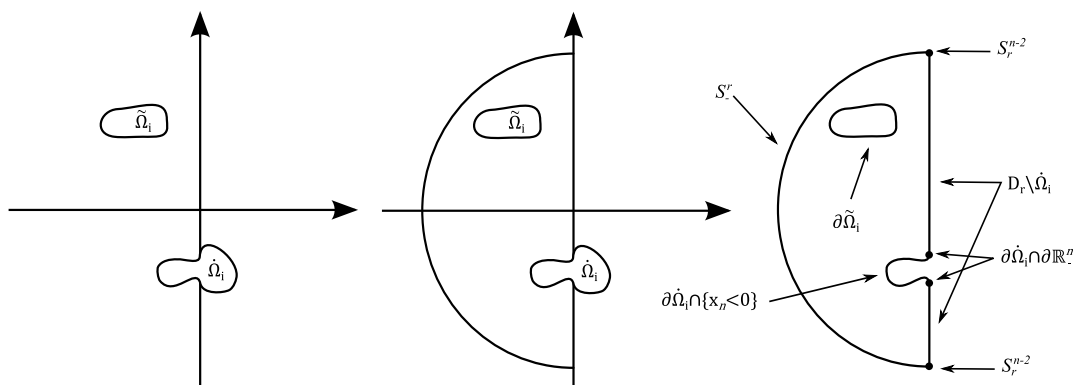
$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^n \langle A(E_i, E_i), \nu \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i, \nu \rangle \\ &= - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} \nu, E_i \rangle - \langle \bar{\nabla}_\nu \nu, \nu \rangle \\ &= - \sum_{i=1}^{n+1} \langle \bar{\nabla}_{E_i} \nu, E_i \rangle \\ &= -\operatorname{div} \nu. \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} \Delta f &= \langle \bar{\nabla}_\nu Df, \nu \rangle + \langle Df, \bar{\nabla}_\nu \nu \rangle - H^\Sigma \langle Df, \nu \rangle \\ &= \nabla \nabla f(\nu, \nu) + \langle Df, \nu \rangle \langle \nu, \bar{\nabla}_\nu \nu \rangle - H^\Sigma \langle Df, \nu \rangle \\ &= \nabla \nabla f(\nu, \nu) - H^\Sigma \langle Df, \nu \rangle. \end{aligned}$$

□

A demonstração da próxima proposição é bastante semelhante à demonstração do Teorema 1.3.4; a única diferença, é que esta proposição generaliza, levemente, aquele Teorema. Ela será fundamental na prova da Desigualdade de Penrose.



**Proposição 3.1.2.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto aberto, limitado e tal que o bordo de  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  seja suave. Seja  $f : \mathbb{R}^n \setminus \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  até o bordo, assintoticamente plana, constante ao longo de cada componente conexa de  $\partial\Omega$  e tal que  $|Df| \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow \partial\Omega$ . Suponha que o gráfico de  $f$  possua a métrica induzida de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Denote por  $\dot{\Omega}_i$ ,  $i = 1, \dots, \dot{n}$ , as componentes conexas de  $\Omega$  tais que  $\dot{\Omega}_i \cap \{x_n < 0\} \neq \emptyset$  e*

### 3.1. Resultados Auxiliares

$\tilde{\Omega}_i \cap \{x_n > 0\} \neq \emptyset$ ; e por  $\tilde{\Omega}_i$ ,  $i = 1, \dots, \tilde{n}$ , as componentes conexas de  $\Omega$  tais que  $\tilde{\Omega}_i \subset \mathbb{R}_-^n$ , então

$$\begin{aligned} c(n)m(g) &= \int_{\mathbb{R}_-^n \setminus \Omega} S dx_\delta + \int_{\partial \mathbb{R}_-^n \setminus \cup \tilde{\Omega}_i} \bar{H} \sqrt{1 + (f_n)^2} \left\{ 2 - \frac{|Df|^2}{1 + |Df|^2} \right\} dx_\delta \\ &+ \int_{\partial \mathbb{R}_-^n \setminus \cup \tilde{\Omega}_i} f_n \tilde{H} |Df|^2 \frac{\sqrt{1 + |\bar{D}f|^2}}{1 + |Df|^2} dx_\delta - \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \int_{\partial \tilde{\Omega}_i \cap \partial \mathbb{R}_-^n} f_n \langle \bar{D}f, \dot{\eta} \rangle d\dot{\sigma}_i \\ &+ \int_{\cup \partial \tilde{\Omega}_i \cap \{x_n < 0\}} H^{\partial \Omega} d\dot{\sigma} + \int_{\cup \partial \tilde{\Omega}_i} H^{\partial \Omega} d\tilde{\sigma}. \end{aligned}$$

Aqui,  $\bar{H}$  e  $\tilde{H}$  são as curvaturas médias definidas no Teorema 1.3.4,  $H^{\partial \Omega}$  é a curvatura média de  $\partial \Omega$  visto como subvariedade dos hiperplanos que o contém e  $\dot{\eta}$  denota o campo vetorial normal, unitário e exterior a  $\cup_i \tilde{\Omega}_i$ .

*Demonstração.* Temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_-^n \setminus \Omega} S dx_\delta &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_r^- \setminus \Omega} \operatorname{div} X dx_\delta \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^-} \langle X, \frac{x}{|x|} \rangle d\sigma_r + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r \setminus \cup \tilde{\Omega}_i} \langle X, e_n \rangle dx_\delta + \int_{\cup \partial \tilde{\Omega}_i \cap \{x_n < 0\}} \langle X, \dot{\eta}_i \rangle d\dot{\sigma} \\ &+ \int_{\cup \partial \tilde{\Omega}_i} \langle X, \tilde{\eta}_i \rangle d\tilde{\sigma}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

em que  $X$  é definido por (1.8). Como no Teorema 1.3.4, (1.10), encontramos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^-} \langle X, \frac{x}{|x|} \rangle d\sigma_r = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^-} (f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) \frac{x_i}{|x|} d\sigma_r. \quad (3.2)$$

Por outro lado, como  $\bar{U} = 1 - \frac{|Df|^2}{1 + |Df|^2}$ :

$$\langle X, e_n \rangle = \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) - \frac{|Df|^2}{1 + |Df|^2} \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r \setminus \cup \tilde{\Omega}_i} \langle X, e_n \rangle dx_\delta &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r \setminus \cup \tilde{\Omega}_i} \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) dx_\delta \\ &- \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r \setminus \cup \tilde{\Omega}_i} \frac{|Df|^2}{1 + |Df|^2} \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) dx_\delta \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r \setminus \cup \tilde{\Omega}_i} (\operatorname{div}_{\mathbb{R}^{n-1}}(f_n \bar{D}f) - 2 \langle \bar{D}f, \bar{D}f_n \rangle) dx_\delta \\ &- \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r \setminus \cup \tilde{\Omega}_i} \frac{|Df|^2}{1 + |Df|^2} \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) dx_\delta. \end{aligned}$$

### 3.1. Resultados Auxiliares

Aqui,  $\bar{D}f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} \right)$ . Usando que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r \setminus \cup \dot{\Omega}_i} \operatorname{div}_{\mathbb{R}^{n-1}}(f_n \bar{D}f) dx_\delta = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^{n-2}} f_n \langle \bar{D}f, \eta_r \rangle d\sigma_r + \sum_{i=1}^{\dot{n}} \int_{\partial \dot{\Omega}_i \cap \partial \mathbb{R}_-^n} f_n \langle \bar{D}f, \dot{\eta} \rangle d\dot{\sigma}_i,$$

em que  $\eta_r$  é o campo vetorial normal unitário e exterior a  $S_r^{n-2}$ , encontramos

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r \setminus \cup \dot{\Omega}_i} \langle X, e_n \rangle dx_\delta &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^{n-2}} f_n \langle \bar{D}f, \eta_r \rangle d\sigma_r + \sum_{i=1}^{\dot{n}} \int_{\partial \dot{\Omega}_i \cap \partial \mathbb{R}_-^n} f_n \langle \bar{D}f, \dot{\eta} \rangle d\dot{\sigma}_i \\ &\quad - 2 \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r \setminus \cup \dot{\Omega}_i} \langle \bar{D}f, \bar{D}f_n \rangle dx_\delta \\ &\quad - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r \setminus \cup \dot{\Omega}_i} \frac{|Df|^2}{1 + |Df|^2} \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) dx_\delta. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Usando (3.1), (3.2) e (3.3), encontramos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_-^n \setminus \Omega} S dx_\delta &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^-} (f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) \frac{x_i}{|x|} d\sigma_r + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^{n-2}} f_n \langle \bar{D}f, \eta_r \rangle d\sigma_r \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\dot{n}} \int_{\partial \dot{\Omega}_i \cap \partial \mathbb{R}_-^n} f_n \langle \bar{D}f, \dot{\eta} \rangle d\dot{\sigma}_i - 2 \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r \setminus \cup \dot{\Omega}_i} \langle \bar{D}f, \bar{D}f_n \rangle dx_\delta \\ &\quad - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r \setminus \cup \dot{\Omega}_i} \frac{|Df|^2}{1 + |Df|^2} \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) dx_\delta \\ &\quad + \int_{\cup \partial \dot{\Omega}_i \cap \{x_n < 0\}} \langle X, \dot{\eta}_i \rangle d\dot{\sigma} + \int_{\cup \partial \tilde{\Omega}_i} \langle X, \tilde{\eta}_i \rangle d\tilde{\sigma}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} c(n)m(g) &= \int_{\mathbb{R}_-^n \setminus \Omega} S dx_\delta - \sum_{i=1}^{\dot{n}} \int_{\partial \dot{\Omega}_i \cap \partial \mathbb{R}_-^n} f_n \langle \bar{D}f, \dot{\eta} \rangle d\dot{\sigma}_i + 2 \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r \setminus \cup \dot{\Omega}_i} \langle \bar{D}f, \bar{D}f_n \rangle dx_\delta \\ &\quad + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r \setminus \cup \dot{\Omega}_i} \frac{|Df|^2}{1 + |Df|^2} \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) dx_\delta - \int_{\cup \partial \dot{\Omega}_i \cap \{x_n < 0\}} \langle X, \dot{\eta}_i \rangle d\dot{\sigma} \\ &\quad - \int_{\cup \partial \tilde{\Omega}_i} \langle X, \tilde{\eta}_i \rangle d\tilde{\sigma}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Como no Teorema 1.3.4 temos que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r \setminus \cup \dot{\Omega}_i} f_k f_{nk} \left\{ 2 - \frac{|Df|^2}{1 + |Df|^2} \right\} dx_\delta = \int_{\partial \mathbb{R}_-^n \setminus \cup \dot{\Omega}_i} \bar{H} \sqrt{1 + (f_n)^2} \left\{ 2 - \frac{|Df|^2}{1 + |Df|^2} \right\} dx_\delta, \quad (3.5)$$

em que  $\bar{H}$  é a curvatura média de  $\partial G(f)$ , visto como subvariedade de  $G(f)$ , e também temos que

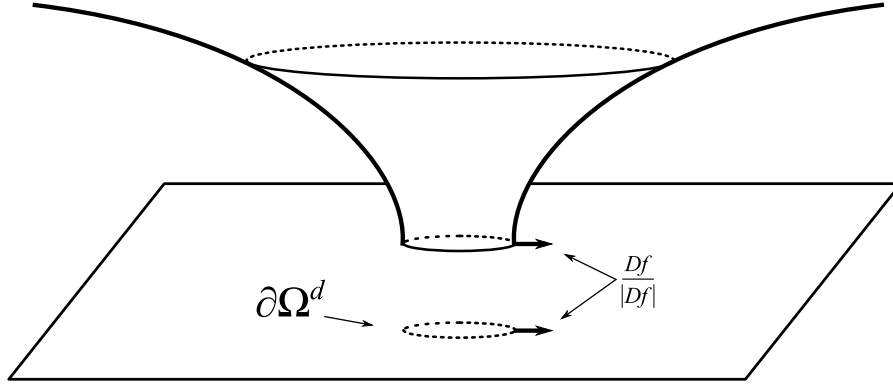
$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r \setminus \cup \dot{\Omega}_i} f_n f_{kk} \frac{|Df|^2}{1 + |Df|^2} dx_\delta = \int_{\partial \mathbb{R}_-^n \setminus \cup \dot{\Omega}_i} f_n \bar{H} |Df|^2 \frac{\sqrt{1 + |\bar{D}f|^2}}{1 + |Df|^2} dx_\delta, \quad (3.6)$$

### 3.1. Resultados Auxiliares

em que  $\tilde{H}$  é a curvatura média de  $\partial G(f)$ , visto como subvariedade de  $\partial \mathbb{R}_-^n$ . Portanto,

$$\begin{aligned} c(n)m(g) &= \int_{\mathbb{R}_-^n \setminus \Omega} S dx_\delta + \int_{\partial \mathbb{R}_-^n \setminus \cup \Omega_i} \bar{H} \sqrt{1 + (f_n)^2} \left\{ 2 - \frac{|Df|^2}{1 + |Df|^2} \right\} dx_\delta \quad (3.7) \\ &+ \int_{\partial \mathbb{R}_-^n \setminus \cup \Omega_i} f_n \tilde{H} |Df|^2 \frac{\sqrt{1 + |\bar{D}f|^2}}{1 + |Df|^2} dx_\delta - \sum_{i=1}^{\dot{n}} \int_{\partial \Omega_i \cap \partial \mathbb{R}_-^n} f_n \langle \bar{D}f, \dot{\eta} \rangle d\dot{\sigma}_i \\ &- \int_{\cup \partial \Omega_i \cap \{x_n < 0\}} \langle X, \dot{\eta} \rangle d\dot{\sigma} - \int_{\cup \partial \bar{\Omega}_i} \langle X, \tilde{\eta} \rangle d\tilde{\sigma}. \end{aligned}$$

Como  $f$  é constante sobre  $\partial \Omega$ , tem-se que  $Df$  é normal a este conjunto. Denote por  $\Omega^c$  uma componente de  $\Omega$ , tal que  $f$  cresce quando  $x \rightarrow \partial \Omega^c$ , assim  $Df/|Df|$  é o campo normal, unitário e exterior ao gráfico ao longo de  $\partial \Omega^c$  ( $Df/|Df|$  aponta para dentro de  $\Omega^c$  no hiperplano que contém  $\Omega^c$ ). Denote por  $\Omega^d$  uma componente de  $\Omega$ , tal que  $f$  decresce quando  $x \rightarrow \partial \Omega^d$ , assim  $-Df/|Df|$  é o campo normal, unitário e exterior ao gráfico ao longo de  $\partial \Omega^d$  ( $-Df/|Df|$  aponta para dentro de  $\Omega^d$  no hiperplano que contém  $\Omega^d$ ).



Temos que

$$\begin{aligned} \left\langle X, \frac{Df}{|Df|} \right\rangle &= \left\langle \bar{U}(f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) e_i, \frac{f_j}{|Df|} e_j \right\rangle = \frac{f_i \bar{U}}{|Df|} (f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) \\ &= \frac{\bar{U}}{|Df|} (f_i^2 f_{kk} - f_k f_i f_{ik}) = \frac{\bar{U}}{|Df|} (|Df|^2 \Delta f - \nabla \nabla f(Df, Df)) \\ &= \frac{|Df|^2}{|Df|} \bar{U} \left( \Delta f - \nabla \nabla f \left( \frac{Df}{|Df|}, \frac{Df}{|Df|} \right) \right). \end{aligned}$$

Como  $\nu = \frac{Df}{|Df|}$  é o campo normal, unitário e interior a  $\Omega^c$ , usando a Proposição 3.1.1 e que  $\bar{U} = \frac{1}{1+|Df|^2}$  encontramos

$$\begin{aligned} \left\langle X, \frac{Df}{|Df|} \right\rangle &= \frac{|Df|}{1 + |Df|^2} (-H^{\partial \Omega^c} \left\langle Df, \frac{Df}{|Df|} \right\rangle) \\ &= -\frac{|Df|^2}{1 + |Df|^2} H^{\partial \Omega^c} \left\langle \frac{Df}{|Df|}, \frac{Df}{|Df|} \right\rangle \\ &= -\frac{|Df|^2}{1 + |Df|^2} H^{\partial \Omega^c}. \end{aligned}$$

### 3.1. Resultados Auxiliares

Como  $\nu = -\frac{Df}{|Df|}$  é o campo normal, unitário e interior a  $\Omega^d$ , usando a Proposição 3.1.1 e que  $\bar{U} = \frac{1}{1+|Df|^2}$  encontramos

$$\begin{aligned} \langle X, -\frac{Df}{|Df|} \rangle &= -\frac{|Df|}{1+|Df|^2} (-H^{\partial\Omega^d} \langle Df, -\frac{Df}{|Df|} \rangle) \\ &= -\frac{|Df|^2}{1+|Df|^2} H^{\partial\Omega^d} \langle -\frac{Df}{|Df|}, -\frac{Df}{|Df|} \rangle \\ &= -\frac{|Df|^2}{1+|Df|^2} H^{\partial\Omega^d}. \end{aligned}$$

Aqui,  $H^{\partial\Omega}$  é fornecida pelo vetor interior a  $\Omega$ . Sabemos que  $\lim_{x \rightarrow \partial\Omega} |Df(x)| = \infty$ , assim  $\lim_{x \rightarrow \partial\Omega} \frac{|Df|^2}{1+|Df|^2} = 1$ , logo, supondo que  $\nu$  seja o campo normal, unitário e interior a  $\Omega$  ao longo de  $\partial\Omega$ , sobre  $\partial\Omega$  tem-se

$$\langle X, \nu \rangle = -H^{\partial\Omega}.$$

Usando (3.7), temos

$$\begin{aligned} c(n)m(g) &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} S dx_\delta + \int_{\partial\mathbb{R}^n \setminus \cup\Omega_i} \bar{H} \sqrt{1+(f_n)^2} \left\{ 2 - \frac{|Df|^2}{1+|Df|^2} \right\} dx_\delta \\ &\quad + \int_{\partial\mathbb{R}^n \setminus \cup\Omega_i} f_n \tilde{H} |Df|^2 \frac{\sqrt{1+|\bar{D}f|^2}}{1+|Df|^2} dx_\delta - \sum_{i=1}^{\dot{n}} \int_{\partial\Omega_i \cap \partial\mathbb{R}^n_-} f_n \langle \bar{D}f, \dot{\eta} \rangle d\dot{\sigma}_i \\ &\quad + \int_{\cup\partial\Omega_i \cap \{x_n < 0\}} H^{\partial\Omega} d\dot{\sigma} + \int_{\cup\partial\bar{\Omega}_i} H^{\partial\Omega} d\tilde{\sigma}. \end{aligned}$$

□

Uma hiperfície,  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ , é dita ser **média-convexa**, se sua curvatura média, com respeito à métrica Euclidiana, é positiva. Um conjunto aberto,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , é dito ser **êxtero-minimizante**, se para todo aberto  $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $\Omega \subset \Omega'$ , tem-se que  $|\partial\Omega| \leq |\partial\Omega'|$ .

**Proposição 3.1.3.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto (não necessariamente conexo) limitado, suave, com bordo médio-convexo e êxtero-minimizante. Denote por  $H^{\partial\Omega}$  a curvatura média de  $\partial\Omega$  com respeito ao campo normal, unitário e interior a  $\Omega$ . Então,*

$$\frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{\partial\Omega} H^{\partial\Omega} d\partial\Omega \geq \frac{1}{2} \left( \frac{|\partial\Omega|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

*Além disso, a igualdade ocorrerá se, e somente se, cada componente conexa de  $\Omega$  for uma bola redonda.*

*Demonstração.* Veja [17], Teorema 5, item (V). □



### 3.1. Resultados Auxiliares

Dado um conjunto limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , assumamos que  $\partial\Omega$  seja suave. Dado  $x \in \partial\Omega$ , denote por  $\kappa(x) = (\kappa_1(x), \dots, \kappa_n(x))$  as curvaturas principais de  $\partial\Omega$  em  $x$ . Defina  $\sigma_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\sigma_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \binom{n}{k}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}.$$

Note que  $\sigma_0(\kappa_1, \dots, \kappa_n) = 1$ ,  $\sigma_1(\kappa_1, \dots, \kappa_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \kappa_i = \frac{1}{n} H$ ,  $H$  é curvatura média de  $\partial\Omega$ , e  $\sigma_n(\kappa_1, \dots, \kappa_n) = \prod_{i=1}^n \kappa_i$  é a curvatura Gaussiana de  $\partial\Omega$ . Seja  $k$  um número inteiro e positivo, definimos

$$V_{(n+1)-k}(\Omega) := C_{n,k} \int_{\partial\Omega} \sigma_{k-1}(\kappa) d\mu_{\partial\Omega},$$

em que

$$C_{n,k} = \frac{\sigma_k(I)}{\sigma_{k-1}(I)},$$

e  $I = (1, \dots, 1)$ .

Para  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , diz-se que  $\Omega$  é  **$k$ -convexo**, se  $\kappa(x) \in \bar{\Gamma}_k$  para todo  $x \in \partial\Omega$ , em que  $\Gamma_k$  é o **cone de Garding**:

$$\Gamma_k := \{\lambda \in \mathbb{R}^n \mid \sigma_m(\lambda) > 0, \forall m \leq k\}.$$

Diz-se que  $\Omega$  é **estritamente  $k$ -convexo**, se  $\kappa(x) \in \Gamma_k$  para todo  $x \in \partial\Omega$ .

A seguir, uma extensão da inequação isoperimétrica de Alexandrov-Fenchel, [1, 2], para domínios estrelados de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Proposição 3.1.4.** *Suponha que  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  seja um conjunto limitado, suave, estrelado e  $k$ -convexo. Denote por  $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma bola de raio 1. Então,*

$$\left( \frac{V_{(n+1)-m}(\Omega)}{V_{(n+1)-m}(B)} \right)^{\frac{1}{n+1-m}} \leq \left( \frac{V_{n-m}(\Omega)}{V_{n-m}(B)} \right)^{\frac{1}{n-m}},$$

para qualquer  $m \in \{0, \dots, k\}$ . Além disso, a igualdade ocorrerá se, e somente se,  $\Omega$  for uma bola.

*Demonstração.* Veja [18], Teorema 2. □

**Corolário 3.1.5.** *Suponha que  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  seja um conjunto limitado e estrelado. Suponha também que  $\partial\Omega$  seja suave e médio-convexo, isto é, que  $\Omega$  seja 1-convexo. Denote por  $H^{\partial\Omega}$  a curvatura média de  $\partial\Omega$  com respeito ao campo normal, unitário e interior a  $\Omega$  e por  $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma bola unitária. Então,*

$$\frac{1}{2n\omega_n} \int_{\partial\Omega} H^{\partial\Omega} d\mu_{\partial\Omega} \geq \frac{1}{2} \left( \frac{|\partial\Omega|}{\omega_n} \right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

### 3.1. Resultados Auxiliares

Além disso, a igualdade ocorrerá se, e somente se,  $\Omega$  for uma bola.

*Demonstração.* Usando  $m = 1$  encontramos

$$\left(\frac{V_n(\Omega)}{V_n(B)}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{V_{n-1}(\Omega)}{V_{n-1}(B)}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Temos,

$$V_n(\Omega) = C_{n,1} \int_{\partial\Omega} \sigma_0(\kappa) d\mu_{\partial\Omega} = C_{n,1} |\partial\Omega|, \quad V_n(B) = C_{n,1} |\mathbb{S}^n| = C_{n,1} \omega_n,$$

e

$$V_{n-1}(\Omega) = C_{n,2} \int_{\partial\Omega} \sigma_1(\kappa) d\mu_{\partial\Omega} = C_{n,2} \int_{\partial\Omega} H^{\partial\Omega} d\mu_{\partial\Omega}$$

e

$$V_{n-1}(B) = C_{n,2} \int_{\mathbb{S}^n} H^{\mathbb{S}^n} d\mu_{\mathbb{S}^n} = C_{n,2} n \omega_n.$$

Assim,

$$\left(\frac{C_{n,2} \int_{\partial\Omega} H^{\partial\Omega} d\mu_{\partial\Omega}}{C_{n,2} n \omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \geq \left(\frac{C_{n,1} |\partial\Omega|}{C_{n,1} \omega_n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

ou seja,

$$\frac{1}{n \omega_n} \int_{\partial\Omega} H^{\partial\Omega} d\mu_{\partial\Omega} \geq \left(\frac{|\partial\Omega|}{\omega_n}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

□

Note, no Corolário anterior, que se  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , então

$$\frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{\partial\Omega} H^{\partial\Omega} d\mu_{\partial\Omega} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{|\partial\Omega|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

A seguinte proposição pode ser encontrada em [22], incluímos a sua prova devido a sua simplicidade.

**Proposição 3.1.6.** *Sejam  $a_1, \dots, a_k$  números reais não negativos e  $0 \leq \beta \leq 1$ . Então,*

$$\sum_{i=1}^k a_i^\beta \geq \left(\sum_{i=1}^k a_i\right)^\beta.$$

*Se  $0 \leq \beta < 1$ , então a igualdade acontecerá se, e somente se, no máximo um elemento de  $\{a_1, \dots, a_k\}$  for não nulo.*

### 3.2. Desigualdade de Penrose

*Demonstração.* Suponha, inicialmente,  $k = 2$ . Fixe  $x \geq 0$ ,  $\beta \in [0, 1]$  e defina  $w(y) = x^\beta + y^\beta - (x + y)^\beta$ . Temos que  $w(0) = 0$  e

$$w'(y) = \beta(y^{\beta-1} - (x + y)^{\beta-1}) \geq 0 \quad \forall y \geq 0.$$

Portanto,  $w(y) \geq 0$  para todo  $y \geq 0$  com  $w(y) = 0$  se, e somente se,  $x = 0$  ou  $y = 0$  ou  $\beta = 1$ . Se  $k = n > 2$ , então  $(a_1 + \dots + a_n)^\beta \leq (a_1 + \dots + a_{n-1})^\beta + a_n^\beta \leq (a_1 + \dots + a_{n-2})^\beta + a_{n-1}^\beta + a_n^\beta \leq \dots \leq a_1^\beta + a_2^\beta + \dots + a_n^\beta$ .  $\square$

### 3.2 Desigualdade de Penrose

**Teorema 3.2.1.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}_-^n$ ,  $n \geq 3$ , um conjunto aberto, limitado, com bordo suave, médio-convexo e tal que  $\partial\Omega \cap \partial\mathbb{R}_-^n = \emptyset$ . Suponha que  $\partial\Omega$  seja êxtero-minimizante ou que cada componente conexa de  $\Omega$  seja estrelada. Seja  $f : \mathbb{R}_-^n \setminus \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  até o bordo, assintoticamente plana, constante ao longo de cada componente conexa de  $\partial\Omega$  e tal que  $|Df| \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow \partial\Omega$ . Suponha também que  $f_n \geq 0$  sobre  $\partial\mathbb{R}_-^n$ , que a curvatura escalar e as curvaturas médias que aparecem na Proposição 3.1.2 são não negativas. Então,*

$$m(g) \geq \frac{1}{2} \left( \frac{|\partial\Omega|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}},$$

em que  $|\partial\Omega|$  é o  $(n-1)$ -volume de  $\partial\Omega$ .

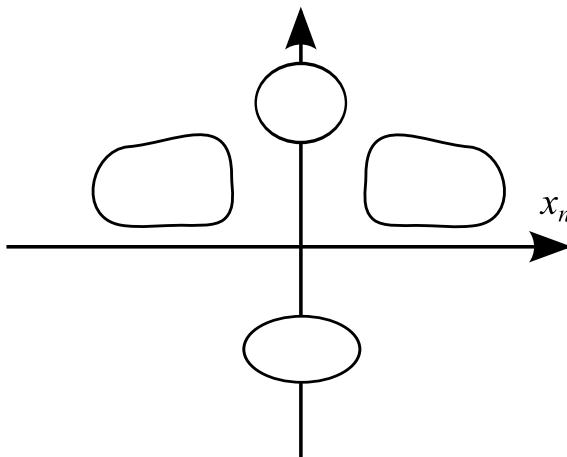
*Demonstração.* Pela Proposição 3.1.2 temos

$$\begin{aligned} 2(n-1)\omega_{n-1}m(g) &= \int_{\mathbb{R}_-^n \setminus \Omega} S dx_\delta + \int_{\partial\mathbb{R}_-^n} \bar{H} \sqrt{1 + (f_n)^2} \left\{ 2 - \frac{|Df|^2}{1 + |Df|^2} \right\} dx_\delta \\ &\quad + \int_{\partial\mathbb{R}_-^n} f_n \tilde{H} |Df|^2 \frac{\sqrt{1 + |\bar{D}f|^2}}{1 + |Df|^2} dx_\delta + \int_{\partial\Omega} H^{\partial\Omega} d\partial\Omega. \end{aligned}$$

Denote por  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , as componentes conexas de  $\Omega$ . Temos,

$$\begin{aligned} m(g) &\geq \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \sum_i \int_{\partial\Omega_i} H^{\partial\Omega_i} d\partial\Omega_i \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_i \left( \frac{|\partial\Omega_i|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} \\ &\geq \frac{1}{2} \left( \sum_i \frac{|\partial\Omega_i|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{|\partial\Omega|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}. \end{aligned}$$

$\square$



**Teorema 3.2.2.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , um conjunto aberto, limitado e simétrico em relação ao hiperplano  $\{x_n = 0\} = \partial\mathbb{R}^n$ ; com bordo suave, médio-convexo e tal que  $\partial\Omega$  seja ortogonal a  $\partial\mathbb{R}^n$  nos pontos de interseção. Suponha que  $\partial\Omega$  seja êxtero-minimizante ou que cada componente conexa de  $\Omega$  seja estrelada. Seja  $f : \mathbb{R}^n \setminus \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  até o bordo, assintoticamente plana, constante ao longo de cada componente conexa de  $\partial\Omega$  e tal que  $|Df| \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow \partial\Omega$ . Suponha também que  $f_n = 0$  sobre  $\partial\mathbb{R}^n$ , que a curvatura escalar e as curvaturas médias que aparecem na Proposição 3.1.2 são não negativas. Então,*

$$m(g) \geq \frac{1}{2^{n/(n-1)}} \left( \frac{|\partial\Omega \cap \mathbb{R}^n_-|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}},$$

em que  $|\partial\Omega|$  é o  $(n-1)$ -volume de  $\partial\Omega$ .

*Demonstração.* Como na Proposição 3.1.2 denotamos por  $\hat{\Omega}_i$  as componentes que tocam o bordo de  $\mathbb{R}^n_-$  e por  $\tilde{\Omega}_i$  as componentes tais que  $\partial\tilde{\Omega}_i \cap \partial\mathbb{R}^n_- = \emptyset$ . Pela Proposição 3.1.2, temos

$$\begin{aligned} 2(n-1)\omega_{n-1}m(g) &= \int_{\mathbb{R}^n_- \setminus \Omega} S dx_\delta + \int_{\partial\mathbb{R}^n_- \setminus \cup \hat{\Omega}_i} \bar{H} \sqrt{1 + (f_n)^2} \left\{ 2 - \frac{|Df|^2}{1 + |Df|^2} \right\} dx_\delta \\ &\quad + \int_{\cup \partial\hat{\Omega}_i \cap \{x_n < 0\}} H^{\partial\Omega} d\tilde{\sigma} + \int_{\cup \partial\tilde{\Omega}_i \cap \{x_n < 0\}} H^{\partial\Omega} d\tilde{\sigma} \\ &\geq \int_{\cup \partial\hat{\Omega}_i \cap \{x_n < 0\}} H^{\partial\Omega} d\tilde{\sigma} + \int_{\cup \partial\tilde{\Omega}_i \cap \{x_n < 0\}} H^{\partial\Omega} d\tilde{\sigma} \\ &= \sum_{i=1}^{\hat{n}} \int_{\partial\hat{\Omega}_i \cap \{x_n < 0\}} H^{\partial\hat{\Omega}_i} d\tilde{\sigma} + \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \int_{\partial\tilde{\Omega}_i \cap \{x_n < 0\}} H^{\partial\tilde{\Omega}_i} d\tilde{\sigma}. \end{aligned}$$

Até aqui, todos os domínios de integração estão contidos em  $\mathbb{R}^n_-$ . Podemos considerar uma extensão,  $\tilde{f}$ , de  $f$  para  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  dada por  $\tilde{f}(x) = f(x)$  se  $x \in \mathbb{R}^n_-$  e  $\tilde{f}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) =$

### 3.2. Desigualdade de Penrose

$f(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$  se  $x \notin \mathbb{R}^n_-$ . Assim, passamos a integrar sobre  $\partial\Omega$  e pela simetria da extensão e de  $\Omega$ , multiplicamos cada integral por  $\frac{1}{2}$ .

$$2(n-1)\omega_{n-1}m(g) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\dot{n}} \int_{\partial\dot{\Omega}_i} H^{\partial\dot{\Omega}_i} d\dot{\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \int_{\partial\tilde{\Omega}_i} H^{\partial\tilde{\Omega}_i} d\tilde{\sigma}.$$

Usando os resultados auxiliares e denotando por  $\Omega_i$  as componentes de  $\Omega$ , obtemos

$$\begin{aligned} m(g) &\geq \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^{\dot{n}} \int_{\partial\dot{\Omega}_i} H^{\partial\dot{\Omega}_i} d\dot{\sigma} + \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \int_{\partial\tilde{\Omega}_i} H^{\partial\tilde{\Omega}_i} d\tilde{\sigma} \right\} \\ &\geq \frac{1}{2} \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \sum_i \int_{\partial\Omega_i} H^{\partial\Omega_i} d\partial\Omega_i \\ &\geq \frac{1}{4} \sum_i \left( \frac{|\partial\Omega_i|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} \\ &\geq \frac{1}{4} \left( \sum_i \frac{|\partial\Omega_i|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{|\partial\Omega|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$m(g) \geq \frac{1}{4} \left( 2 \frac{|\partial\Omega \cap \mathbb{R}^n_-|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} = \frac{1}{2^{n/(n-1)}} \left( \frac{|\partial\Omega \cap \mathbb{R}^n_-|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

□

# Capítulo 4

## Rigidez para Hiperfícies semi-Einstein

### Minimizantes de Volume

Neste capítulo provaremos um resultado que generaliza o Teorema de Bray-Brendle-Neves, [8], e o Teorema de Barros et al., [5], para hiperfícies semi-Einstein de variedades com dimensão qualquer. Na primeira seção apresentaremos alguns resultados auxiliares, muitos destes são resultados clássicos de Geometria. Na segunda seção apresentaremos a prova do principal resultado deste capítulo.

#### 4.1 Resultados Auxiliares

Dado um conjunto  $\Omega$ , denotaremos por  $\mathcal{D}(\Omega)$  o conjunto das funções reais de classe  $C^\infty$ , com suporte compacto e contido em  $\Omega$ . Também denotaremos por  $K(n, q)$  a melhor constante para a imersão de Sobolev clássica, isto é,

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq K(n, q) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^q dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

e não existe  $A \in \mathbb{R}$  tal que  $A < K(n, q)$  e

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq A \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^q dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

para toda  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Em que  $1 \leq q < n$  e  $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$ . No Teorema 5.3.1 de [20], pode ser encontrada a seguinte caracterização

$$K(n, 1) = \frac{1}{n} \left( \frac{n}{\omega_{n-1}} \right)^{1/n},$$

$$K(n, q) = \frac{1}{n} \left( \frac{n(q-1)}{n-q} \right)^{1-1/q} \left( \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n/q)\Gamma(n+1-n/q)\omega_{n-1}} \right)^{1/n}.$$

A próxima proposição mostra que  $K(n, q)$  é a melhor constante. Ela será útil para obtermos uma desigualdade envolvendo o volume de uma esfera e da hiperfície semi-Einstein.

**Proposição 4.1.1.** *Sejam  $n \geq 2$  e  $(M, g)$  uma  $n$ -variedade Riemanniana. Suponha que  $1 \leq q < n$ ,  $q \in \mathbb{R}$ , e que existam  $A, B \in \mathbb{R}$  tais que para toda  $f \in \mathcal{D}(M)$  tenha-se*

$$\left( \int_M |f|^p dV_g \right)^{\frac{1}{p}} \leq A \left( \int_M |\nabla f|^q dV_g \right)^{\frac{1}{q}} + B \left( \int_M |f|^q dV_g \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (4.1)$$

em que  $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$ . Então,  $A \geq K(n, q)$ .

*Demonstração.* Veja [20], Proposição 5.3.2. □

O próximo teorema foi provado por Ilias em 1983, [26], este teorema em conjunto com a proposição anterior irá garantir a desigualdade do teorema mais importante deste capítulo, Teorema 4.2.3, para qualquer dimensão  $n \geq 3$ . Dada uma  $n$ -variedade Riemanniana compacta  $(M, g)$ ,  $n \geq 2$ , definimos  $R(M, g) := \inf\{\text{Ric}_M(V, V) \mid V \in TM, |V|_g = 1\}$ .

**Teorema 4.1.2.** *Sejam  $n \geq 2$  e  $(M, g)$  uma  $n$ -variedade Riemanniana compacta e sem bordo. Suponha que  $R(M, g) \geq R(\mathbb{S}^n, \frac{1}{8}g_{can}) = \delta(n-1) > 0$ , então*

$$\left( \int_M |f|^{\frac{2n}{n-2}} dV_g \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq [K(n, 2)]^2 \left( \frac{\omega_n(\delta)}{\text{vol } M} \right)^{\frac{2}{n}} \int_M |\nabla f|^2 dV_g + (\text{vol } M)^{-\frac{2}{n}} \int_M |f|^2 dV_g, \quad (4.2)$$

para toda  $f \in H^{1,2}(M)$ ; em que  $\omega_n(\delta) = \delta^{-\frac{n}{2}}\omega_n$ ,  $\omega_n = \text{vol}_n \mathbb{S}^n$  e

$$K(n, 2) = \sqrt{\frac{4}{n(n-2)\omega_n^{2/n}}}.$$

*Demonstração.* Veja [26], Teorema 3. □

O lema a seguir é uma consequência direta da celebrada equação de Gauss, veja [16, 30] para uma prova desta equação, que relaciona a curvatura de uma variedade ambiente com a curvatura de uma subvariedade. No nosso teorema ele será utilizado para verificarmos que a curvatura escalar da variedade ambiente coincide com a curvatura escalar da subvariedade.

**Lema 4.1.3.** *Suponha que  $(M, g)$  seja uma  $n$ -variedade Riemanniana e que  $\Sigma \subset M$  seja uma hipersuperfície imersa. Denote a curvatura escalar por  $R$ , a curvatura de Ricci por  $\text{Ric}$ , a segunda forma fundamental da imersão por  $A$  e a curvatura média por  $H$ . Então, sobre  $\Sigma$  tem-se*

$$R_M = 2 \text{Ric}_M(\nu, \nu) + R_\Sigma + |A|^2 - H^2. \quad (4.3)$$

*Demonstração.* Dado  $p \in \Sigma$ , seja  $\{e_i\} \subset T_p\Sigma$  uma base ortonormal. Sejam  $X, Y, Z, W \in T_p\Sigma$  e seja  $\nu \in N_p\Sigma$ , pela equação de Gauss tem-se

$$\begin{aligned} \text{Ric}_M(Y, Z) &= \sum_{i=1}^n Rm_M(e_i, Y, Z, e_i) + Rm_M(\nu, Y, Z, \nu) \\ &= Rm_M(\nu, Y, Z, \nu) + \sum_{i=1}^n Rm_\Sigma(e_i, Y, Z, e_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \{ \langle A(e_i, Z), A(Y, e_i) \rangle - \langle A(e_i, e_i), A(Y, Z) \rangle \} \\ &= Rm_M(\nu, Y, Z, \nu) + \text{Ric}_\Sigma(Y, Z) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \langle A(e_i, Z), A(Y, e_i) \rangle - H \langle A(Y, Z), \nu \rangle. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} R_M &= \sum_{j=1}^n \text{Ric}_M(e_j, e_j) + \text{Ric}_M(\nu, \nu) \\ &= \text{Ric}_M(\nu, \nu) + \sum_{j=1}^n \{ Rm_M(\nu, e_j, e_j, \nu) + \text{Ric}_\Sigma(e_j, e_j) \} \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n \langle A(e_i, e_j), A(e_j, e_i) \rangle - H \sum_{j=1}^n \langle A(e_j, e_j), \nu \rangle \\ &= 2 \text{Ric}_M(\nu, \nu) + R_\Sigma + |A|^2 - H^2. \end{aligned}$$

□

Sejam  $n \geq 3$  e  $(M, g)$  uma  $n$ -variedade Riemanniana compacta e conexa. O **invariante de Yamabe** é definido por  $\lambda(M) = \inf\{Q_g(\varphi) \mid \varphi : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ é positiva e suave}\}$ , em que

$$Q_g(\varphi) = \frac{\int_M 4 \frac{n-1}{n-2} |\nabla \varphi|^2 + S \varphi^2 dV_g}{\left( \int_M |\varphi|^{\frac{2n}{n-2}} \right)^{\frac{n-2}{n}}}.$$

Este número também pode ser definido como  $\lambda(M) = \inf\{Q(\tilde{g}) \mid \tilde{g} \in [g]\}$ , em que  $[g]$  é a classe conforme de  $g$  e

$$Q(\tilde{g}) = \frac{\int_M \tilde{R} dV_{\tilde{g}}}{\left( \int_M dV_{\tilde{g}} \right)^{\frac{n-2}{n}}},$$



em que  $\tilde{R}$  é a curvatura escalar de  $\tilde{g}$ . Note que  $Q(\tilde{g}) = Q_g(\varphi)$ , se  $\tilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-2}}g$ , veja [31].

O próximo teorema foi provado por Schoen, em 1984, no seu famoso trabalho, no qual ele completou a solução para o problema de Yamabe, provando os casos restantes que Trudinger e Aubin deixaram em aberto.

**Teorema 4.1.4.** *Seja  $n \geq 3$ , suponha que  $(M, g)$  seja uma  $n$ -variedade Riemanniana compacta e conexa. Se  $M$  não é conformemente difeomorfa a  $\mathbb{S}^n$ , então  $\lambda(M) < \lambda(\mathbb{S}^n)$ .*

*Demonstração.* Veja [38], Teorema 2. □

O teorema anterior juntamente com o próximo teorema - provado por Obata, em 1971 - nos permitirá concluir que a hiperfície semi-Einstein será isométrica à esfera canônica, caso haja igualdade na desigualdade que encontraremos utilizando o Teorema de Ilias.

**Teorema 4.1.5.** *Sejam  $n \geq 3$  e  $(M, g)$  uma  $n$ -variedade Riemanniana compacta, conexa e com curvatura escalar constante e igual a  $k$ . Então,  $(M, g)$  será conformemente difeomorfa à  $(\mathbb{S}^n, g_{can})$  se, e somente se,  $k > 0$  e  $(M, g)$  for isométrica à  $n$ -esfera Euclidiana de raio  $\sqrt{n(n-1)/k}$ .*

*Demonstração.* Veja [35], Teoremas I e II. □

O seguinte Teorema nos mostra que o operador Laplaciano, sob a condição de bordo de Dirichlet, é um isomorfismo linear. Ele será útil na prova do teorema central deste capítulo, no qual precisaremos usar o Teorema da Função Implícita.

**Teorema 4.1.6** (Problema de Dirichlet Homogêneo). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto, limitado e conexo. Seja  $f \in L^2(\Omega)$ , então existe uma única solução fraca  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  para o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

*Demonstração.* Pela desigualdade de Poincaré,  $\forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  podemos escrever

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

na qual  $C = C(n, \Omega)$ . Como  $W_0^{1,2}(\Omega)$  é de Banach, segue que  $\|u\|_0 := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$  é uma norma equivalente em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , logo  $W_0^{1,2}(\Omega)$  é um espaço de Hilbert sob o produto interno

$$\langle u, v \rangle_0 := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v.$$

## 4.2. Resultado Principal

Portanto, a existência de uma única solução fraca  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  para o problema de Dirichlet homogêneo, é equivalente à existência de um único vetor  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  tal que

$$\langle u, v \rangle_0 := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f \cdot v, \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Basta mostrar então que

$$F(v) = \int_{\Omega} f \cdot v \in (W_0^{1,2}(\Omega))^*$$

e usar o teorema de Representação de Riez para espaços de Hilbert.

De fato, pela desigualdade de Holder,

$$|F(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}.$$

Daí,  $F \in (W_0^{1,2}(\Omega))^*$ . □

Este resultado pode, facilmente, ser estendido para variedades Riemannianas, veja [20]. O próximo Lema é muito conhecido, já que ele é utilizado na demonstração do famoso Teorema de Cartan-Hadamard.

**Lema 4.1.7.** *Suponha que  $\tilde{M}$  e  $M$  sejam variedades Riemannianas conexas, que  $\tilde{M}$  seja completa e que  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  seja uma isometria local. Então,  $M$  é completa e  $\pi$  é uma aplicação de recobrimento.*

*Demonstração.* Veja [30], Lema 11.6 ou [16], Lema 3.3 do Capítulo VII. □

## 4.2 Resultado Principal

Motivados por um clássico teorema da Geometria Diferencial - o Teorema de Topogonov, [47] - em 2010 Bray, Brendle e Neves obtiveram o seguinte resultado.

**Teorema 4.2.1.** *Seja  $(M, g)$  uma 3-variedade Riemanniana compacta e tal que  $\pi_2(M) \neq 0$ . Então, existe uma imersão  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow M$  tal que  $(\mathbb{S}^2, f^*g)$  é minimizante de área e*

$$\text{área}(\mathbb{S}^2, f^*g) \min_M R_M \leq 8\pi,$$

em que  $R_M$  é a curvatura escalar de  $(M, g)$ . Além disso, se a igualdade ocorrer, então o recobrimento universal de  $(M, g)$  será isométrico ao cilindro canônico,  $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, g_{can})$ , a menos de uma constante.

*Demonstração.* Veja [8], Teorema 1.1. □

Motivados por este teorema, Barros et al., em 2015, provaram o seguinte teorema.

**Teorema 4.2.2.** *Seja  $(M, g)$  uma 5-variedade Riemanniana completa, com curvatura escalar positiva e curvatura de Ricci não negativa. Seja  $\Sigma \subset M$  uma hiperfície Einstein, compacta, com fibrado normal trivial e mergulhada de modo que  $\Sigma$  seja minimizante de volume na sua classe de homotopia. Então,*

$$\text{vol}(\Sigma)^{\frac{1}{2}} \min_M R_M \leq 8\sqrt{6}\pi.$$

*Além disso, se a igualdade ocorrer, então  $(\Sigma, g_\Sigma)$  será isométrica a  $(\mathbb{S}^4, g_{can})$  e numa vizinhança de  $\Sigma$ ,  $(M, g)$  será isométrica a  $((-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{S}^4, dt^2 + g_{can})$  e o recobrimento universal de  $(M, g)$  será isométrico a  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^4$ , a menos de uma constante.*

*Demonstração.* Veja [5], Teorema 1.1. □

Agora, generalizaremos este teorema para qualquer dimensão  $n \geq 3$ ; usaremos o Teorema de Ilias para obter a desigualdade, a qual também pode ser obtida como consequência do Teorema de Bishop-Gromov, e generalizaremos algumas ideias apresentadas em [4], [5] e [34]. Salientamos que Barros et al. supuseram que a hiperfície fosse Einstein e embora as superfícies sejam Einstein, este é o caso do Teorema de Bray-Brendle-Neves, aqui iremos supor apenas que a hiperfície seja semi-Einstein:  $\text{Ric}_\Sigma \geq \frac{R_\Sigma}{n} g_\Sigma$ .

**Teorema 4.2.3.** *Suponha  $n \geq 3$  e seja  $(M, g)$  uma  $(n + 1)$ -variedade Riemanniana completa, com curvatura escalar positiva e curvatura de Ricci não negativa. Suponha que  $\Sigma \subset M$  seja uma  $n$ -subvariedade compacta, com fibrado normal trivial e mergulhada de modo que  $(\Sigma, g_\Sigma)$ ,  $g_\Sigma$  sendo induzida por  $g$ , seja minimizante de volume na sua classe de homotopia e tal que  $\text{Ric}_\Sigma \geq \frac{R_\Sigma}{n} g_\Sigma$ . Então,*

$$\text{vol}_n(\Sigma)^{\frac{2}{n}} \min_M R_M \leq n(n - 1)(\omega_n)^{\frac{2}{n}}, \quad (4.4)$$

*em que  $\omega_n$  é o  $n$ -volume da  $n$ -esfera cuja curvatura seccional é igual a 1 e  $\text{vol}_n$  é o  $n$ -volume. Além disso, se a igualdade ocorrer, então  $(\Sigma, g_\Sigma)$  será isométrica a  $(\mathbb{S}^n, g_{can})$ , a menos de uma constante, e existirá uma vizinhança de  $\Sigma$ , em  $(M, g)$ , que será isométrica a  $((-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{S}^n, dt^2 + g_{can})$  e o recobrimento universal de  $(M, g)$  será isométrico ao cilindro  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$ , a menos de uma constante.*

*Demonstração.* Primeiro note que a curvatura escalar de  $\Sigma$  é positiva, mais precisamente,  $R_M = R_\Sigma$ . Com efeito, se  $\nu$  é um campo normal e unitário ao longo de  $\Sigma$  e  $\phi \in C^\infty(\Sigma)$ .

## 4.2. Resultado Principal

Como  $\Sigma$  é minimizante de volume, o operador de estabilidade fornece

$$\int_{\Sigma} (\text{Ric}_M(\nu, \nu) + |A|^2) \phi^2 d\sigma \leq \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \phi|^2 d\sigma. \quad (4.5)$$

Escolhendo  $\phi = 1$ , encontra-se

$$\int_{\Sigma} \text{Ric}_M(\nu, \nu) + |A|^2 d\sigma \leq 0. \quad (4.6)$$

Esta desigualdade junto com o fato de que  $\text{Ric}_M \geq 0$  implica que  $\text{Ric}_M(\nu, \nu) = 0$  e  $|A|^2 = 0$  sobre  $\Sigma$ . Como  $\text{Ric}_M(\nu, \nu) = |A|^2 = H = 0$ , por (4.3) temos  $R_M = R_{\Sigma}$ . Por outro lado, como  $R_M > 0$ ,  $\text{Ric}_{\Sigma} \geq \frac{R_{\Sigma}}{n} g_{\Sigma} = \frac{R_M}{n} g_{\Sigma}$  e  $\Sigma$  é compacta, existe  $\delta > 0$  tal que  $R(\Sigma, g_{\Sigma}) = \delta(n-1)$ . Portanto, podemos usar o Teorema 4.1.2; além disso, extraindo raízes de ambos os membros de (4.2) e usando que  $(x+y)^{\frac{1}{2}} \leq x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$ , para  $x, y \geq 0$ , temos

$$\left( \int_{\Sigma} |f|^{\frac{2n}{n-2}} dV_{g_{\Sigma}} \right)^{\frac{n-2}{2n}} \leq K(n, 2) \left( \frac{\omega_n(\delta)}{\text{vol } \Sigma} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \int_{\Sigma} |\nabla f|^2 dV_{g_{\Sigma}} \right)^{\frac{1}{2}} + (\text{vol } \Sigma)^{-\frac{1}{n}} \left( \int_{\Sigma} |f|^2 dV_{g_{\Sigma}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

para toda  $f \in H^{1,2}(M)$ . A Proposição 4.1.1 garante que  $\left( \frac{\omega_n(\delta)}{\text{vol } \Sigma} \right)^{\frac{1}{n}} \geq 1$ . Portanto,

$$\left( \frac{\omega_n(\delta)}{\text{vol } \Sigma} \right)^{\frac{2}{n}} \geq 1, \quad (4.7)$$

donde  $(\delta^{-\frac{n}{2}} \omega_n)^{\frac{2}{n}} \geq (\text{vol } \Sigma)^{\frac{2}{n}}$  e portanto  $(\omega_n)^{\frac{2}{n}} \geq \delta (\text{vol } \Sigma)^{\frac{2}{n}}$ . Como  $R(\Sigma, g_{\Sigma}) = \delta(n-1)$  e  $\Sigma$  é compacta, existe  $\tilde{V} \in T\Sigma$  tal que  $|\tilde{V}|_{g_{\Sigma}} = 1$  e  $R(\Sigma, g_{\Sigma}) = \text{Ric}_{\Sigma}(\tilde{V}, \tilde{V})$ . Já que  $\text{Ric}_{\Sigma} \geq \frac{R_{\Sigma}}{n} g_{\Sigma}$ , temos que  $\delta(n-1) \geq \frac{R_{\Sigma}}{n}$ . Portanto, concluímos que  $(\omega_n)^{\frac{2}{n}} \geq \frac{R_{\Sigma}}{n(n-1)} (\text{vol } \Sigma)^{\frac{2}{n}}$ , logo

$$n(n-1)(\omega_n)^{\frac{2}{n}} \geq (\text{vol } \Sigma)^{\frac{2}{n}} R_{\Sigma} \geq (\text{vol } \Sigma)^{\frac{2}{n}} \min_{\Sigma} R_{\Sigma} = (\text{vol } \Sigma)^{\frac{2}{n}} \min_{\Sigma} R_M \geq (\text{vol } \Sigma)^{\frac{2}{n}} \min_M R_M.$$

Isso prova (4.4). Se a igualdade ocorrer,  $R_{\Sigma}$  será constante e

$$R_{\Sigma} (\text{vol } \Sigma)^{\frac{2}{n}} = n(n-1)(\omega_n)^{\frac{2}{n}}. \quad (4.8)$$

Note que o lado direito desta equação é o invariante de Yamabe de  $(\mathbb{S}^n, g_{can})$ , logo o invariante de  $(\Sigma, g_{\Sigma})$  é igual ao invariante de  $(\mathbb{S}^n, g_{can})$ . De fato, fazendo uma re-escala na métrica da variedade ambiente, e consequentemente na métrica das subvariedades com métrica induzida, poderíamos supor que  $\text{vol}(\Sigma) = \omega_n(\delta)$  e mesmo assim chegaríamos na

desigualdade acima. Pelo Teorema 4.1.2 teríamos

$$\begin{aligned} \|f\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 &\leq K(n, 2)^2 \|\nabla f\|_2^2 + (\text{vol}(\Sigma))^{-\frac{2}{n}} \|f\|_2^2 \\ &= K(n, 2)^2 \left[ \|\nabla f\|_2^2 + \frac{(\text{vol}(\Sigma))^{-\frac{2}{n}}}{K(n, 2)^2} \|f\|_2^2 \right] \\ &= K(n, 2)^2 \left[ \|\nabla f\|_2^2 + \frac{n(n-2)\omega_n^{2/n}}{4} (\text{vol}(\Sigma))^{-\frac{2}{n}} \|f\|_2^2 \right]. \end{aligned}$$

Por (4.8) teríamos

$$\begin{aligned} \frac{1}{K(n, 2)^2} \|f\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 &\leq \|\nabla f\|_2^2 + \frac{n(n-2)\omega_n^{2/n}}{4} \frac{R_\Sigma}{n(n-1)\omega_n^{2/n}} \|f\|_2^2 \\ &= \|\nabla f\|_2^2 + \frac{n-2}{4(n-1)} R_\Sigma \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{4(n-1)}{n-2} \frac{n(n-2)\omega_n^{2/n}}{4} \leq \frac{\frac{4(n-1)}{n-2} \|\nabla f\|_2^2 + R_\Sigma \|f\|_2^2}{\|f\|_{\frac{2n}{n-2}}^2},$$

ou seja,

$$\lambda(\mathbb{S}^n) = n(n-1)\omega_n^{2/n} \leq \frac{\frac{4(n-1)}{n-2} \|\nabla f\|_2^2 + R_\Sigma \|f\|_2^2}{\|f\|_{\frac{2n}{n-2}}^2},$$

para toda  $f \in H^{1,2}(\Sigma)$ , logo  $\lambda(\mathbb{S}^n) \leq \lambda(\Sigma)$ . Como o invariante de Yamabe de toda variedade compacta e conexa é sempre menor do que, ou igual a, o invariante da esfera unitária canônica (veja o Teorema 6.2.13 de [20]), temos que  $\lambda(\mathbb{S}^n) = \lambda(\Sigma)$ . Por outro lado, como o invariante de Yamabe é um invariante da classe conforme, segue-se que a igualdade permanece mesmo quando não re-escalamos a métrica.

Pelo Teorema 4.1.4,  $(\Sigma, g_\Sigma)$  será conformemente difeomorfa à  $(\mathbb{S}^n, g_{can})$  e pelo Teorema 4.1.5,  $(\Sigma, g_\Sigma)$  será isométrica à  $n$ -esfera Euclidiana de raio  $\sqrt{n(n-1)/R_\Sigma}$ . Concluiremos o restante do Teorema, a partir das próximas proposições.  $\square$

Note que a desigualdade (4.7) pode ser provada por meio do Teorema de Bishop-Gromov. De agora em diante, iremos supor as hipóteses do Teorema 4.2.3. A próxima proposição pode ser encontrada em [4], [8] ou [34].

**Proposição 4.2.4.** *Existe  $\epsilon > 0$  e uma função suave  $w : \Sigma \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$\Sigma_t := \{\exp_x(w(x, t)N(x)) \mid x \in \Sigma\}$$

## 4.2. Resultado Principal

é uma família de variedades compactas, com curvatura média constante. Além disso,

$$w(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 1, \quad \int_{\Sigma} (w(\cdot, t) - t) d\sigma = 0,$$

para cada  $x \in \Sigma$  e para todo  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ .

*Demonstração.* Considere o operador de Jacobi  $Lu = \Delta_{\Sigma}u + |A|^2u + \text{Ric}(N, N)u$  de  $\Sigma$ , em que  $N$  é um campo vetorial normal ao longo de  $\Sigma$ . Sabemos que  $L = \Delta_{\Sigma}$ . Fixe  $\alpha \in (0, 1)$  e considere os Espaços de Bannach  $X = \{u \in C^{2,\alpha}(\Sigma) \mid \int_{\Sigma} u d\sigma = 0\}$  e  $Y = \{u \in C^{0,\alpha} \mid \int_{\Sigma} u = 0\}$ . Para cada função  $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ , seja  $\Sigma_u := \{\exp_x(u(x)N(x)) \mid x \in \Sigma\}$ .

Escolha  $\epsilon > 0$  e  $\delta > 0$  tais que  $\Sigma_{u+t}$  seja uma subvariedade compacta, de classe  $C^{2,\alpha}$  para todo  $(t, u) \in (-\epsilon, \epsilon) \times B(0, \delta)$ , em que  $B(0, \delta) = \{u \in C^{2,\alpha}(\Sigma) \mid \|u\|_{C^{2,\alpha}} < \delta\}$ . Denote por  $H_{\Sigma_{u+t}}$  a curvatura média de  $\Sigma_{u+t}$ .

Defina  $\Psi : (-\epsilon, \epsilon) \times B(0, \delta) \subset X \rightarrow Y$  por

$$\Psi(t, u) = H_{\Sigma_{u+t}} - \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} H_{\Sigma_{u+t}} d\sigma.$$

Note que  $\Psi(0, 0) = 0$  porque  $\Sigma_0 = \Sigma$ .

Desejamos usar o Teorema da Função Implícita, para isso, verificaremos que  $D\Psi(0, 0)$  é um isomorfismo linear. De fato, dado  $v \in X$ , temos

$$\begin{aligned} D\Psi(0, 0) \cdot v &= \left. \frac{d\Psi}{ds}(0, sv) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{d}{ds} \left( H_{\Sigma_{sv}} - \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} H_{\Sigma_{sv}} d\sigma \right) \right|_{s=0} \\ &= Lv - \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} Lv d\sigma \\ &= \Delta_{\Sigma}v, \end{aligned}$$

a última igualdade procede de  $L = \Delta_{\Sigma}$  e do Teorema da Divergência, usando que  $\Sigma$  é compacta e sem bordo.

Já que  $\Delta_{\Sigma} : X \rightarrow Y$  é um isomorfismo linear, Teorema 4.1.6, pelo Teorema da Função Implícita, existem  $0 < \epsilon_1 < \epsilon$  e  $u(t) = u(t, \cdot) \in B(0, \delta)$  para  $t \in (-\epsilon_1, \epsilon_1)$  tais que

$$u(0) = 0 \text{ e } \Psi(t, u(t)) = 0, \quad \forall t \in (-\epsilon_1, \epsilon_1).$$

Assim, definindo  $w(t, x) = u(t, x) + t$ , para  $(t, x) \in (-\epsilon_1, \epsilon_1) \times \Sigma$ , temos que cada  $\Sigma_t$  dada por

$$\Sigma_t = \{\exp_x(w(t, x)N(x)) \mid x \in \Sigma\} \tag{4.9}$$

## 4.2. Resultado Principal

possui curvatura média constante. Note que  $w(0, x) = 0$  e  $\int_{\Sigma} (w(t, \cdot) - t) d\sigma = 0$ , já que  $w(0, x) = u(0, x) = 0$  e  $w(t, \cdot) - t = u(t, \cdot) \in B(0, \delta) = \{u \in C^{2,\alpha}(\Sigma) \mid \int_{\Sigma} u d\sigma = 0\}$ . A fim de ver que

$$\frac{\partial w}{\partial t}(0, x) = 1, \forall x \in \Sigma,$$

primeiro note que

$$0 = \Psi(t, u(t)) = H_{\Sigma_{w(t, \cdot)}} - \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} H_{\Sigma_{w(t, \cdot)}} d\sigma, \forall t \in (-\epsilon_1, \epsilon_1). \quad (4.10)$$

Defina  $f(t, x) = \exp_x(w(t, x)N(x))$ ,  $x \in \Sigma$  e perceba que

$$\frac{\partial f}{\partial t}(0, x) = \frac{\partial w}{\partial t}(0, x)N(x), \forall x \in \Sigma,$$

já que a derivada de  $\exp_x$  na origem é igual à identidade. Assim,

$$\rho_0(x) := \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}(0, x), N(x) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial w}{\partial t}(0, x)N(x), N(x) \right\rangle = \frac{\partial w}{\partial t}(0, x).$$

Diferenciando (4.10) em  $t = 0$  e usando a Proposição 4.2.5, obtemos

$$0 = -\Delta_{\Sigma} \left( \frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) \right) + \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} \Delta_{\Sigma} \left( \frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) \right) d\sigma = -\Delta_{\Sigma} \left( \frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) \right).$$

Portanto,  $\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot)$  é uma função harmônica; como  $\Sigma$  é compacta, do Princípio do Máximo segue que  $\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot)$  é constante, e já que  $\int_{\Sigma} (w(t, \cdot) - t) d\sigma = 0$ , diferenciando esta igualdade em  $t = 0$ , obtemos

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) d\sigma = |\Sigma|.$$

Ou seja,  $\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot)|_{\Sigma} = 1$ , portanto  $\frac{\partial w}{\partial t}(0, x) = 1$ , para todo  $x \in \Sigma$ . □

Seja  $f_t : \Sigma \rightarrow M$  definida por  $f_t(x) = \exp_x(w(x, t)N(x))$  para cada  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Faça  $N_t$  ser o campo vetorial normal e unitário ao longo de  $\Sigma_t := \{\exp_x(w(x, t)N(x)) \mid x \in \Sigma\}$ , tal que  $N_0(x) = N(x)$  para todo  $x \in \Sigma$ . Denote por  $d\sigma_t$  o elemento de volume de  $\Sigma_t$  com respeito à métrica induzida por  $f_t$ .

**Proposição 4.2.5.** *Seja  $\epsilon > 0$  como na prova anterior. Seja  $\rho_t(x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} f_t(x), N_t(x) \right\rangle$ .*

*Temos*

$$-\frac{d}{dt} H_{\Sigma_t} = (\Delta_{\Sigma_t} + \text{Ric}_M(N_t, N_t) + |A_{\Sigma_t}|^2) \rho_t = L_{\Sigma_t} \rho_t. \quad (4.11)$$

*Demonstração.* Veja [23], Teorema 3.2 ou [25], Equação (1.2). □

**Proposição 4.2.6.** *Existe  $\delta \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \delta < \epsilon$ , tal que  $\text{vol}(\Sigma_t) = \text{vol}(\Sigma)$  para todo  $t \in (-\delta, \delta)$ .*

## 4.2. Resultado Principal

*Demonstração.* Note, primeiramente, que  $\rho_0(x) = 1$  para cada  $x \in \Sigma$ . Temos

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \right|_{t=0} = \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0)N(x) = N(x),$$

porque a derivada de  $\exp_x$  na origem é a identidade e  $\frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = 1$ ; assim  $\rho_0(x) = \langle N(x), N(x) \rangle = 1$ . Por continuidade, existe  $\delta > 0$ ,  $\delta < \epsilon$ , tal que  $\rho_t(x) > 0$  para todo  $t \in (-\delta, \delta)$  e  $x \in \Sigma$ . Agora, multiplicando a equação (4.11) por  $1/\rho_t$ , integrando sobre  $\Sigma_t$  e lembrando, através de (4.9), que  $H(t)$  não depende de  $x \in \Sigma_t$ , obtemos

$$\begin{aligned} -H'(t) \int_{\Sigma_t} \frac{1}{\rho_t} d\sigma_t &= \int_{\Sigma_t} \left[ \frac{\Delta_{\Sigma_t} \rho_t}{\rho_t} + (\text{Ric}_M(N_t, N_t) + |A|^2) \right] d\sigma_t \\ &= \int_{\Sigma_t} \left[ \frac{|\nabla_{\Sigma_t} \rho_t|^2}{\rho_t^2} + (\text{Ric}_M(N_t, N_t) + |A|^2) \right] d\sigma_t, \end{aligned}$$

como,

$$\int_{\Sigma_t} (\text{Ric}_M(N_t, N_t) + |A_t|^2) d\sigma_t \geq 0, \quad (4.12)$$

temos

$$-H'(t) \int_{\Sigma_t} \frac{1}{\rho_t} d\sigma_t \geq \int_{\Sigma_t} \frac{|\nabla_{\Sigma_t} \rho_t|^2}{\rho_t^2} d\sigma_t \geq 0. \quad (4.13)$$

Consequentemente, deduzimos que  $H'(t) \leq 0$  para todo  $t \in (-\delta, \delta)$ . Deste modo,  $H(t) \geq 0$  para  $t \in (-\delta, 0]$  e  $H(t) \leq 0$  para  $t \in [0, \delta)$ . Já que o vetor curvatura média de  $\Sigma_t$  pode ser escrito como  $-H(t)N_t$ , usamos a fórmula da primeira variação do volume e encontramos

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{vol}(\Sigma_t) = \int_{\Sigma_t} \langle H(t)N_t, \frac{\partial}{\partial t} f_t \rangle d\sigma_t = H(t) \int_{\Sigma_t} \rho_t d\sigma_t.$$

Disso concluímos que  $\text{vol}(\Sigma_t) \leq \text{vol}(\Sigma)$ , para todo  $t \in (-\delta, \delta)$ . Como  $\Sigma$  é minimizante de volume, temos

$$\text{vol}(\Sigma_t) = \text{vol}(\Sigma),$$

para todo  $t \in (-\delta, \delta)$ . □

**Proposição 4.2.7.** *Se  $\Sigma$  realiza a igualdade em (4.4), então para cada  $x \in \Sigma$ , existe uma vizinhança de  $x$ , em  $M$ , que é isométrica a um produto Riemanniano.*

*Demonstração.* Como  $\Sigma$  minimiza o volume na sua classe de homotopia e como  $\text{vol}(\Sigma) = \text{vol}(\Sigma_t)$ , segue-se que cada  $\Sigma_t$  também minimiza o volume na mesma classe de  $\Sigma$ . Como fizemos anteriormente nas equações (4.5) e (4.6), concluímos que cada  $\Sigma_t$ ,  $t \in (-\delta, \delta)$  é totalmente geodésica,  $|A_t|^2 = 0$ , e  $\text{Ric}_M(N_t, N_t) = 0$  sobre  $\Sigma_t$ . Usando isso na Proposição 4.2.5, encontramos

$$\Delta_{\Sigma_t} \rho_t = -\frac{\partial}{\partial t} H_{\Sigma_t}.$$



## 4.2. Resultado Principal

Como  $|A_t| = 0$ , temos  $H_{\Sigma_t} = 0$  para todo  $t \in (-\delta, \delta)$ , portanto  $\Delta_{\Sigma_t}\rho_t = 0$ ; como escolhemos  $\epsilon > 0$  de modo que cada  $\Sigma_t$  também seja compacta, segue-se que cada  $\rho_t$  atinge um máximo em  $\Sigma_t$  e como  $\rho_t$  é harmônica, do Princípio do Máximo segue que cada  $\rho_t$  é constante, isto é,  $\rho_t$  não depende de  $x$ .

Sejam  $(x_1, \dots, x_n)$  coordenadas locais sobre  $\Sigma$ . Dado  $\frac{\partial}{\partial x_i} \in T\Sigma$ , então  $(f_t)_* \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial f_t}{\partial x_i} \in T\Sigma_t$ . Já que  $\Sigma_t$  é totalmente geodésica, temos que a segunda forma fundamental da imersão, que fornece  $\Sigma_t$ , é nula; isto é, para todos  $i, j \in 1, \dots, n$ , temos  $0 = A_t(\frac{\partial f_t}{\partial x_i}, \frac{\partial f_t}{\partial x_j}) = \langle \nabla_{\frac{\partial f_t}{\partial x_i}} \frac{\partial f_t}{\partial x_j}, N_t \rangle = -\langle \frac{\partial f_t}{\partial x_j}, \nabla_{\frac{\partial f_t}{\partial x_i}} N_t \rangle$ , portanto

$$\nabla_{\frac{\partial f_t}{\partial x_i}} N_t = 0, \quad (4.14)$$

para  $i = 1, \dots, n$ . Como  $\rho_t$  não depende de  $x$ , obtemos

$$0 = \frac{\partial f_t}{\partial x_i} \rho_t = \frac{\partial f_t}{\partial x_i} \left\langle N_t, \frac{\partial f_t}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \nabla_{\frac{\partial f_t}{\partial x_i}} N_t, \frac{\partial f_t}{\partial t} \right\rangle + \left\langle N_t, \nabla_{\frac{\partial f_t}{\partial x_i}} \frac{\partial f_t}{\partial t} \right\rangle = \left\langle N_t, \nabla_{\frac{\partial f_t}{\partial x_i}} \frac{\partial f_t}{\partial t} \right\rangle,$$

por outro lado, como  $\frac{\partial f_t}{\partial x_i}$  e  $\frac{\partial f_t}{\partial t}$  são  $f_t$  relacionados com  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  e  $\frac{\partial}{\partial t}$ , respectivamente; temos

$$\nabla_{\frac{\partial f_t}{\partial t}} \frac{\partial f_t}{\partial x_i} - \nabla_{\frac{\partial f_t}{\partial x_i}} \frac{\partial f_t}{\partial t} = \left[ \frac{\partial f_t}{\partial x_i}, \frac{\partial f_t}{\partial t} \right] = \left[ (f_t)_* \frac{\partial}{\partial x_i}, (f_t)_* \frac{\partial}{\partial t} \right] = (f_t)_* \left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial t} \right] = 0,$$

com isso, obtemos

$$0 = \left\langle N_t, \nabla_{\frac{\partial f_t}{\partial x_i}} \frac{\partial f_t}{\partial t} \right\rangle = \left\langle N_t, \nabla_{\frac{\partial f_t}{\partial t}} \frac{\partial f_t}{\partial x_i} \right\rangle = - \left\langle \nabla_{\frac{\partial f_t}{\partial t}} N_t, \frac{\partial f_t}{\partial x_i} \right\rangle,$$

para  $i = 1, \dots, n$ . Portanto  $\nabla_{\frac{\partial f_t}{\partial t}} N_t = 0$ ; como  $\frac{\partial f_t}{\partial t}$  é o campo tangente da curva  $\alpha_x : (-\delta, \delta) \rightarrow M$  dada por  $\alpha_x(t) = \exp_x(w(x, t)N(x))$ , concluímos que  $N_t(x)$  é um campo vetorial paralelo ao longo de  $\alpha_x$ .

Agora note que o campo  $D(\exp_x)_{w(x, t)N(x)}N(x)$  também é paralelo ao longo de  $\alpha_x$ . Primeiro observe que, pela definição de aplicação exponencial, o traço de  $\alpha_x : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ ,  $\alpha_x(t) = \exp_x(w(x, t)N(x))$ , está contido no traço da geodésica maximal que passa por  $x$  e tem vetor velocidade  $N(x)$ , em  $t = 0$ . Em segundo lugar,  $D(\exp_x)_{w(x, t)N(x)}N(x)$  é um múltiplo de  $\alpha'_x(t) = \frac{\partial w}{\partial t} D(\exp_x)_{w(x, t)N(x)}N(x)$ . Em terceiro lugar,

$$\|D(\exp_x)_{w(x, t)N(x)}N(x)\|_g = 1.$$

De fato, pelo Lema de Gauss temos

$$\langle D(\exp_x)_{w(x, t)N(x)}(w(x, t)N(x)), D(\exp_x)_{w(x, t)N(x)}N(x) \rangle = \langle w(x, t)N(x), N(x) \rangle,$$

## 4.2. Resultado Principal

como  $\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 1$  e  $w(x, 0) = 0$ , para  $t \neq 0$  e pequeno, temos

$$\langle D(\exp_x)_{w(x,t)N(x)}N(x), D(\exp_x)_{w(x,t)N(x)}N(x) \rangle = \langle N(x), N(x) \rangle = 1.$$

Por continuidade, temos  $\|D(\exp_x)_{w(x,t)N(x)}N(x)\|_g = 1$ . Por fim, através destas observações, podemos ver que a curva integral de  $D(\exp_x)_{w(x,t)N(x)}N(x)$  será uma geodésica e portanto

$$\nabla_{D(\exp_x)_{w(x,t)N(x)}N(x)}D(\exp_x)_{w(x,t)N(x)}N(x) = 0,$$

com isso,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial w}{\partial t} \nabla_{D(\exp_x)_{w(x,t)N(x)}N(x)}D(\exp_x)_{w(x,t)N(x)}N(x) \\ &= \nabla_{D(\exp_x)_{w(x,t)N(x)}\left(\frac{\partial w}{\partial t}N(x)\right)}D(\exp_x)_{w(x,t)N(x)}N(x) \\ &= \nabla_{\alpha'_x(t)}D(\exp_x)_{w(x,t)N(x)}N(x). \end{aligned}$$

Como  $w(x, 0) = 0$ , temos  $D(\exp_x)_{w(x,0)N(x)}(N(x)) = N(x) = N_0(x)$ ; portanto, pelo Teorema de Existência e Unicidade do Transporte Paralelo, concluímos que  $N_t(x) = D(\exp_x)_{w(x,t)N(x)}(N(x))$ . Consequentemente,

$$\begin{aligned} \rho_t(x) &= \left\langle N_t(x), \frac{\partial f_t(x)}{\partial t} \right\rangle \\ &= \left\langle N_t(x), D(\exp_x)_{w(x,t)N(x)}\left(\frac{\partial w}{\partial t}(x, t)N(x)\right) \right\rangle \\ &= \left\langle N_t(x), \frac{\partial w}{\partial t}(x, t)N_t(x) \right\rangle \\ &= \frac{\partial w}{\partial t}(x, t). \end{aligned}$$

Como  $\int_{\Sigma}(w(x, t) - t)d\sigma = 0$ , derivando esta equação com respeito a  $t$ , temos que

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial w}{\partial t}(x, t)d\sigma = \text{vol}(\Sigma).$$

Já que  $\frac{\partial w}{\partial t}(x, t) = \rho_t(x)$  e  $\rho_t(x)$  não depende de  $x$  e  $w(x, 0) = 0$ , concluímos que  $\frac{\partial w}{\partial t}(x, t) = 1$ , portanto  $w(x, t) = t$  para cada  $(x, t) \in \Sigma \times (-\delta, \delta)$ . Logo,  $f(x, t) = \exp_x(tN(x))$ .

Para cada  $x \in \Sigma$ , existe uma vizinhança aberta,  $\tilde{U}$ , de  $x$  em  $M$ , tal que  $f_t : \tilde{U} \rightarrow M$ ,  $t \in (-\delta, \delta)$ , dada por  $f_t(x) = \exp_x(tN)$  é um difeomorfismo sobre sua imagem, isso é um caso particular da demonstração do Lema da Vizinhança Uniformemente Normal. Já sabemos que  $\Sigma_t = f_t(\Sigma)$  é totalmente geodésica para  $t \in (-\delta, \delta)$ ,  $\delta > 0$  e pequeno. Defina  $U = \tilde{U} \cap \Sigma$ , queremos mostrar que  $f_t : U \rightarrow f_t(U) \subset \Sigma_t$  é uma isometria. Devemos

## 4.2. Resultado Principal

verificar que  $\langle D(f_t)_x V, D(f_t)_x W \rangle_{T_{f_t(x)}\Sigma_t} = \langle V, W \rangle_{T_x\Sigma}$  para todos  $V, W \in T_x\Sigma$ , ou de modo equivalente,  $\langle D(\exp_x)_{tN} V, D(\exp_x)_{tN} W \rangle_{T_{f_t(x)}\Sigma_t} = \langle V, W \rangle_{T_x\Sigma}$ . Dados  $V, W \in T_x\Sigma$ , considere  $V(t), W(t) \in T_{f_t(x)}\Sigma_t$  obtidos pelo transporte paralelo de  $V$  e  $W$  ao longo de  $\alpha_x(t) = \exp_x(tN)$ . Pelas propriedades do transporte paralelo, temos que  $\langle V(t), W(t) \rangle_{T_{f_t(x)}\Sigma_t} = \langle V, W \rangle_{T_x\Sigma}$ . Mostraremos que  $D(\exp_x)_{tN} V = V(t)$ . Note que  $\alpha'_x(t) = D(\exp_x)_{tN} N$ , assim se mostrarmos que  $\nabla_{D(\exp_x)_{tN} N} D(\exp_x)_{tN} V = \nabla_{\alpha'_x(t)} D(\exp_x)_{tN} V = 0$ , pela unicidade do transporte paralelo, teremos  $D(\exp_x)_{tN} V = V(t)$ . Temos  $D(\exp_x)_{tN} N = (f_t)_* \frac{\partial}{\partial t}$  e  $D(\exp_x)_{tN} V = V_i (f_t)_* \frac{\partial}{\partial x_i}$ , assim

$$\begin{aligned}
 \nabla_{D(\exp_x)_{tN} N} D(\exp_x)_{tN} V &= V_i \nabla_{(f_t)_* \frac{\partial}{\partial t}} (f_t)_* \frac{\partial}{\partial x_i} \\
 &= V_i \nabla_{(f_t)_* \frac{\partial}{\partial x_i}} (f_t)_* \frac{\partial}{\partial t} + V_i \left[ (f_t)_* \frac{\partial}{\partial x_i}, (f_t)_* \frac{\partial}{\partial t} \right] \\
 &= V_i \nabla_{(f_t)_* \frac{\partial}{\partial x_i}} (f_t)_* N \\
 &= V_i \nabla_{\frac{\partial f_t}{\partial x_i}} N_t \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Pois  $\Sigma_t$  é totalmente geodésica, (4.14). Assim,  $f : U \times (-\delta, \delta) \rightarrow f(U \times (-\delta, \delta))$  é isometria e  $(f|_{U \times (-\delta, \delta)})^* g$  será a métrica produto  $dt^2 + g_\Sigma$ , em que  $g_\Sigma$  é a métrica induzida sobre  $\Sigma$ . □

Como  $\Sigma$  é compacta e está mergulhada em  $M$ ; diminuindo  $\delta > 0$ , se necessário, obteremos que  $f : \Sigma \times (-\delta, \delta) \rightarrow f(\Sigma \times (-\delta, \delta))$  será uma isometria, ou seja, existirá uma vizinhança de  $\Sigma$ , em  $(M, g)$ , que será isométrica a  $((-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{S}^n, dt^2 + g_{can})$ .

**Proposição 4.2.8.** *A aplicação  $\Phi : \Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow M$  dada por  $\Phi(x, t) = \exp_x(tN(x))$  é uma isometria local. Além disso,  $\Phi$  também é um recobrimento.*

*Demonstração.* Mostraremos que  $\Phi|_{\Sigma \times [0, \infty)}$  é uma isometria local, pois, de modo similar, pode-se mostrar que  $\Phi|_{\Sigma \times (-\infty, 0]}$  também é uma isometria local. Considere  $A := \{t \in \mathbb{R}_+ \mid \Phi|_{\Sigma \times [0, t]}$  é uma isometria local $\}$ . Pela Proposição anterior,  $A \neq \emptyset$ . Além disso,  $A$  é fechado. Resta-nos mostrar que  $A$  é aberto. Dado  $t \in A$ , considere  $\Sigma_t = \{\exp_x(tN(x)) \mid x \in \Sigma\}$ , munida com a métrica induzida por  $\Phi$ . Como  $\Sigma$  é homotópica a  $\Sigma_t$  e  $\text{vol}(\Sigma_t) = \text{vol}(\Sigma)$ , temos que  $\Sigma_t$  é minimizante de área na sua classe de homotopia e realiza a igualdade (4.4). Consequentemente, podemos aplicar a Proposição prévia para obter a existência de um  $\delta > 0$  tal que  $\Phi|_{\Sigma \times [0, t+\delta]}$  seja uma isometria local, isso mostra que  $A$  é aberto. Portanto,

## 4.2. Resultado Principal

concluimos que  $\Phi|_{\Sigma \times [0, \infty)}$  é uma isometria local. Como  $(\Sigma \times \mathbb{R}, dt^2 + g_\Sigma)$  é completa, pelo Lema 4.1.7, temos que  $\Phi : \Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow M$  é uma aplicação de recobrimento.  $\square$

Como  $(\Sigma, g_\Sigma)$  é isométrica a  $(\mathbb{S}^n(r), g_{can})$ ,  $r > 0$  e  $n \geq 3$ ; e  $\pi_1(\mathbb{S}^n(r) \times \mathbb{R}) = 0$ , temos que o recobrimento universal de  $(M, g)$  é isométrico a  $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}, g_{can})$ , a menos de uma constante. Isto conclui a prova do Teorema 4.2.3.

**Corolário 4.2.9.** *Suponha  $n \geq 3$  e seja  $(M, g)$  uma  $(n + 1)$ -variedade Riemanniana completa, com curvatura de Ricci não negativa e tal que a curvatura escalar satisfaça  $R_M \geq n(n - 1)$ . Suponha que  $\Sigma \subset M$  seja uma  $n$ -subvariedade compacta, com fibrado normal trivial e mergulhada de modo que  $(\Sigma, g_\Sigma)$ ,  $g_\Sigma$  sendo induzida por  $g$ , seja minimizante de volume na sua classe de homotopia e atinja o invariante de Yamabe. Então,*

$$\text{vol}_n(\Sigma) \leq \omega_n, \quad (4.15)$$

em que  $\omega_n$  é o  $n$ -volume da  $n$ -esfera cuja curvatura seccional é igual a 1 e  $\text{vol}_n$  é o  $n$ -volume. Além disso, se a igualdade ocorrer, então  $(\Sigma, g_\Sigma)$  será isométrica a  $(\mathbb{S}^n, g_{can})$ , a menos de uma constante, e existirá uma vizinhança de  $\Sigma$ , em  $(M, g)$ , que será isométrica a  $((-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{S}^n, dt^2 + g_{can})$  e o recobrimento universal de  $(M, g)$  será isométrico ao cilindro  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$ , a menos de uma constante.

*Demonstração.* Como  $\Sigma$  é mínima, pela equação (4.3), temos

$$\text{Ric}(N, N) = \frac{1}{2}(R_M - R_\Sigma - |A|^2). \quad (4.16)$$

Como  $\Sigma$  é estável,

$$\int_\Sigma |A|^2 + \text{Ric}(N, N) d\Sigma \leq 0,$$

pela equação anterior,

$$\int_\Sigma |A|^2 + R_M - R_\Sigma d\Sigma \leq 0.$$

Como  $(\Sigma, g_\Sigma)$  atinge o invariante de Yamabe,  $R_\Sigma$  é constante; logo

$$\begin{aligned} (n(n - 1) - R_\Sigma) \text{vol}(\Sigma) &= \int_\Sigma n(n - 1) - R_\Sigma d\Sigma \\ &\leq \int_\Sigma R_M - R_\Sigma + |A|^2 d\Sigma \\ &\leq 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Portanto,

$$n(n - 1) \text{vol}(\Sigma)^{\frac{2}{n}} \leq R_\Sigma \text{vol}(\Sigma)^{\frac{2}{n}} \leq \lambda(\Sigma) \leq \lambda(\mathbb{S}^n) = n(n - 1)(\omega_n)^{\frac{2}{n}}. \quad (4.18)$$

## 4.2. Resultado Principal

Isso demonstra a desigualdade (4.15). Assumindo que  $\text{vol}(\Sigma) = \omega_n$ , as desigualdades de (4.18) se tornarão igualdades, então teremos  $R_\Sigma = n(n-1)$  e  $\lambda(\Sigma) = \lambda(\mathbb{S}^n)$ . Pelos Teoremas de Schoen e Obata, 4.1.4 e 4.1.5, concluimos que  $(\Sigma, g_\Sigma)$  é isométrica a  $(\mathbb{S}^n, g_{can})$ . Como  $R_M \geq n(n-1) = R_\Sigma$ , obtemos  $R_M - R_\Sigma \geq 0$ . Por (4.17), temos  $R_M - R_\Sigma + |A|^2 = 0$ , sobre  $\Sigma$ ; logo  $|A|^2 = 0$  e  $R_M = R_\Sigma = n(n-1)$ , sobre  $\Sigma$ . Por (4.16),  $\text{Ric}(N, N) = 0$ , sobre  $\Sigma$ . As afirmações restantes são consequências Teorema 4.2.3; pois como  $(\Sigma, g_\Sigma)$  tem curvatura seccional constante, ela é Einstein e como  $R_M = n(n-1)$  sobre  $\Sigma$ , temos que  $\min_M R_M = n(n-1)$ ; portanto, a desigualdade (4.4) será atingida.  $\square$

## Referências Bibliográficas

- [1] A. D. Alexandrov - *Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern, II. Neue Ungleichungen zwischen den gemischten Volumina und ihre Anwendungen*, Mat. Sb., 2, 1205-1238, 1937.
- [2] A. D. Alexandrov - *Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern, III. Die Erweiterung zweier Lehrsätze Minkowskis über die konvexen Polyeder auf beliebige konvexe Flächen*, Mat. Sb., 3, 27-46, 1938.
- [3] S. Almaraz, E. Barbosa, L. L. de Lima - *A Positive Mass Theorem for Asymptotically Flat Manifolds with Non-Compact Boundary*, arXiv: 1407.0673v1, 2014.
- [4] L. C. Ambrozio - *Rigidity of area-minimizing free boundary surfaces in mean convex three-manifolds*, arXiv: 1301.6257, 2013.
- [5] A. Barros, C. Cruz, R. Batista and P. Sousa - *Rigidity in dimension four of area-minimising Einstein manifolds*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 158, 355-363, 2015.
- [6] R. Bartnik - *The Mass of an Asymptotically Flat Manifold*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XXXIX 661-693, 1986.
- [7] H. L. Bray - *Proof of the Riemannian Penrose inequality using the Positive Mass Theorem*, J. Differential Geom., 59, 177-267, 2001.
- [8] H. Bray, S. Brendle, A. Neves - *Rigidity of area-minimizing two-spheres in three-manifolds*, Communications in Analysis and Geometry, 18, 821-830, 2010.

- [9] H. Bray, S. Brendle, M. Eichmair, and A. Neves - *Area-minimizing projective planes in three-manifolds*, Comm. Pure Appl. Math., 63, 1237-1247, 2010.
- [10] H. L. Bray and K. Iga - *Superharmonic functions in  $\mathbb{R}^n$  and the Penrose inequality in general relativity*, Comm. Anal. Geom., 10, 999-1016, 2002.
- [11] H. L. Bray, D. A. Lee - *On the Riemannian Penrose inequality in dimensions less than eight*, Duke Math. J., 148, 81-106, 2009.
- [12] S. Brendle - *Rigidity phenomena involving scalar curvature*, Surveys in Differential Geometry, arXiv: 1008.3097, 2010.
- [13] B. Chow, P. Lu, L. Ni - *Hamilton's Ricci Flow*, AMS, 2006.
- [14] T. H. Colding, W. P. Minicozzi II - *A Course in Minimal Surfaces*, AMS, 2011.
- [15] M. P. do Carmo - *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Terceira Edição, SBM, 2008.
- [16] M. P. do Carmo - *Geometria Riemanniana*, Quarta Edição, SBM, 2008.
- [17] A. Freire, F. Schwartz - *Mass-capacity Inequalities for Conformally Flat Manifolds with Boundary*, arXiv: 1407.0673v1, 2014.
- [18] P. Guan, J. Li - *The Quermassintegral Inequalities for  $k$ -Convex Starshaped domains*, Adv. Math. 221, no. 5, 1725-1732, 2009.
- [19] F. Hang, X. Wang - *Rigidity theorems for compact manifolds with boundary and positive Ricci curvature*, J. Geom. Anal., 19, 628-642, 2009.
- [20] E. Hebey - *Introduction à l'Analyse non Linéaire sur les Variétés*, Diderot Editeur Arts Sciences, 1997.
- [21] L-H Huang, D. Wu - *Hypersurfaces with Nonnegative Scalar Curvature*, arXiv: 1102.5749v3, 2013.
- [22] L-H Huang, D. Wu - *The Equality Case of the Penrose Inequality for Asymptotically Flat Graphs*, arXiv: 1205.2061v2, 2013.

- [23] G. Huisken and A. Polden - *Geometric evolution equations for hypersurfaces*, Calculus of variations and geometric evolution problems (Cetraro 1996), 45-84, Lecture Notes in Mathematics vol. 1713, Springer, Berlin, 1999.
- [24] G. Huisken and T. Ilmanen - *The Riemannian Penrose Inequality*, Int. Math. Res. Not., no. 20, 1045-1058, 1997.
- [25] G. Huisken and T. Ilmanen - *The Inverse Mean Curvature Flow and The Riemannian Penrose Inequality*, J. Differential Geometry, no. 59, 353-437, 2001.
- [26] S. Ilias - *Constantes Explicites pour les Inégalités de Sobolev sur les Variétés Riemanniennes Compactes*, Annales de l'institut Fourier, tome 33, no. 2, p. 151-165, 1983.
- [27] J. L. Jauregui - *Penrose-type inequalities with a Euclidean background*, arXiv: 1108.4042v1, 2011.
- [28] M-K G. Lam - *The graph cases of the Riemannian positive mass and Penrose inequalities in all dimensions*, arXiv: 1010.4256, 2010.
- [29] D. A. Lee, C. Sormani - *Stability of the Positive Theorem for Rotationally Symmetric Riemannian Manifolds*, arXiv: 1104.2657v2, 2014.
- [30] J. M. Lee - *Riemannian Geometry: An Introduction to Curvature*, Springer, 1997.
- [31] J. M. Lee, T. H. Parker - *The Yamabe Problem*, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 17, Number 1, 1987.
- [32] L. L. de Lima, F. Girão - *The ADM mass of asymptotically flat hypersurfaces*, arXiv: 1108.5474v3, 2011.
- [33] H. Mirandola, F. Vitório - *The Positive Mass Theorem and Penrose Inequality for Graphical Manifolds*, arXiv: 1304.3504, 2013.
- [34] I. Nunes - *Rigidity of Area-Minimising hyperbolic surfaces in three-manifolds.*, J. Geom. Anal., 23, 1290-1302, 2013.
- [35] M. Obata - *The Conjectures on Conformal Transformations of Riemannian Manifolds*, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 77, n° 2, 1971.



- [36] R. Penrose - *Naked Singularities* Ann. New York Acad. Sci., 224, 125-134, 1973.
- [37] R. C. Reilly - *On the Hessian of a function and the curvatures of its graph*, Michigan Math., 20, 373-383, 1973.
- [38] R. Schoen - *Conformal Deformation of a Riemannian Metric to Constant Scalar Curvature*, J. Differential Geometry, 20, 479-495, 1984.
- [39] R. Schoen and S-T Yau - *Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three-dimensional manifolds with nonnegative scalar curvature*, Ann. Math., 110, 127-142, 1979.
- [40] R. Schoen, S-T Yau - *On the Proof of the Positive Mass Conjecture in General Relativity*, Communications in Mathematical Physics, 65, 45-76, 1979.
- [41] R. Schoen, S-T Yau - *Proof of the positive action conjecture in quantum relativity*, Phys. Rev. Lett., 42, 547-548, 1979.
- [42] R. Schoen, S-T Yau - *The energy and the linear momentum of space-times in general relativity*, Communications in Mathematical Physics, 79, 47-51, 1981.
- [43] R. Schoen, S-T Yau - *Proof of the Positive Mass Theorem. II*, Communications in Mathematical Physics, 79, 231-260, 1981.
- [44] F. Schwartz - *A volumetric Penrose inequality for conformally flat manifolds*, Ann. Henri Poincaré, 12, 67-76, 2011.
- [45] C. Sormani - *How Riemannian Manifolds Converge*, arXiv: 1006.0411v2, 2011.
- [46] C. Sormani, S. Wenger - *The intrinsic flat distance between riemannian manifolds and other integral current spaces*, Journal of differential geometry, 87, 117-199, 2011.
- [47] V. A. Topogonov - *Evaluation of the length of a closed geodesic on a convex surface*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 124, 282-284, 1959.
- [48] E. Witten - *A new proof of the positive energy theorem*, Communications in Mathematical Physics, 80, 381-402, 1981.
- [49] L. Yaowen, X. Xingwang, Z. Jiuru - *The Complete Hyper-Surfaces with Zero Scalar Curvature in  $\mathbb{R}^{n+1}$* , Annals of Global Analysis and Geometry, 2013.

# Índice Remissivo

## Notações

$B_r^-$ , 7  
 $C_{n,k}$ , 48  
 $K(n, q)$ , 53  
 $M(T)$ , 38  
 $Q(\tilde{g})$ , 55  
 $Q_g(\varphi)$ , 55  
 $R(M, g)$ , 54  
 $RS_n$ , 40  
 $S_r^-$ , 11  
 $S_r^{n-2}$ , 11  
 $T(\omega)$ , 38  
 $V_{(n+1)-k}(\Omega)$ , 48  
 $[g]$ , 55  
 $\Delta_\Sigma f$ , 19  
 $\Delta_\Sigma^N$ , 35  
 $\operatorname{div}_\Sigma X$ , 13  
 $\lambda(M)$ , 55  
 $\mathbb{R}_-^n$ , 7  
 $\mathcal{D}(\Omega)$ , 53  
 $\mathcal{H}^k(X)$ , 37  
 $\omega_{n-1}$ , 10  
 $\partial T(\omega)$ , 38  
 $c(n)$ , 11, 22  
 $d_{\mathcal{F}}(T_1, T_2)$ , 38

## A

Aplicação  
    Assintoticamente Plana, 9  
Autovalor de Dirichlet, 35

## B

Bordo  
    de uma Corrente Integral, 38

## C

Campo  
    de Jacobi, 35  
    Variacional, 14  
Cone de Garding, 48  
Conjunto  
     $k$ -convexo, 48  
    Êxtero-Minimizante, 47  
    Estritamente  $k$ -convexo, 48  
Corrente, 38  
    Integral, 38

## D

Distância  
    Plana, 38  
    Plana Intrínseca, 39  
Divergente, 13

**E**

Espaço Métrico

$\mathcal{H}^m$  Retificável Enumerável, 38

**F**

Fibrado Normal Trivial, 35

Fim Assintótico, 8

**H**

Hiperfície

Média-Convexa, 47

**I**

Índice de Morse, 36

Invariante de Yamabe, 55

**M**

Massa, 11

de uma Corrente Integral, 38

ADM, 10, 11

Medida

de Hausdorff, 37

Mergulho Isométrico, 39

**O**

Operador

de Estabilidade, 35

de Jacobi, 35

de Simons, 35

**S**

Segunda Forma Fundamental, 13

Subvariedade

Mínima, 17

Estável, 36

Extrema, 3

**V**

Varição, 14

de Suporte Compacto, 14

Normal, 29

Própria, 14

Variedade

Riemanniana

Assintoticamente Plana, 7

Vetor Curvatura Média, 13