UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMATICA

Existência e Multiplicidade de soluções para problemas elípticos pelo método da variedade de Nehari

Leandro da Luz Vieira

Belo Horizonte - MG
Setembro/2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Leandro da Luz Vieira

Orientador: Hamilton Prado Bueno
Coorientador: Helder Cândido Rodrigues

Existência e Multiplicidade de soluções para problemas elípticos pelo método da variedade de Nehari

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas (ICEX) da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Belo Horizonte - MG
Setembro/2015

Agradecimentos

À Deus por tudo.

À minha família pelo apoio e amor de sempre.

Ao meu orientador pelo exemplo de ser humano e de professor que é, e pelo quanto foi importante para a conclusão deste trabalho.

Ao meu coorientador Helder Cândido Rodrigues, ao colega Leandro Correa Paes Leme e ao professor Grey Ercole pelos momentos de discussão.

A todos os meus professores, das séries iniciais àqueles das disciplinas já cursadas por mim no doutorado, pela importância, principalmente, em minha formação intelectual.

Às secretárias do programa de pós graduação em Matemática da UFMG, Andrea e Kelly, pelo auxílio que prestaram e ainda prestam a mim, com total profissionalismo, dedicação e carisma. Saibam que sem o trabalho de vocês, tudo seria mais difícil.

Às pessoas que, de uma forma ou de outra, contribuíram e/ou contribuem para meu crescimento pessoal.

Aos colegas Renato Rodrigues, Daniel Oliveira e Leandro Gonzaga pelos momentos de estudo e descontração.

Aos colegas da UFMG, Gilberto de Assis, Joel Cruz, Julio Matute e Carlos Guzman, pelos constantes auxílios. Cada ajuda de vocês foi extremamente importante para a conclusão deste trabalho.

Ao Ireu e ao Etevaldo, companheiros de casa, obrigado pelo apoio.

Aos professores Narciso da Hora Lisboa, Ezequiel Rodrigues Barbosa, Helder Cândido Rodrigues e Luiz Gustavo Farah por terem sido membros da banca de avaliação deste trabalho, contribuindo de forma significativa.

À Fraternidade Espírita Chico Xavier pelas palestras esclarecedoras e pelos tratamentos espirituais.

À psicóloga Carina Ribeiro de Aquino pelos auxílios psicológicos prestados em meio às preocupações advindas da vida acadêmica, profissional e pessoal.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

A todos, muito obrigado!

"Competência, planejamento, determinação, espírito de equipe e amor são qualidades essenciais para ser dono do futuro. Mas também é preciso ter fé, acreditar."

Roberto Shinyasshiki

Notações e símbolos

E	Espaço de Banach
$\mathcal{H}$	Espaço de Hilbert
Ω	Aberto do R^N
$C^1(\Omega)$	Espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ com derivadas contínuas
$L^1_{loc}(\Omega)$	Espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ integráveis em cada subconjunto compacto $K \subset \Omega$
$W^{1,p}(\Omega)$	Espaço de Sobolev
$\\| \ \\|_{1,p}$	Norma em $W^{1,p}(\Omega)$
$W_0^{1,p}(\Omega)$	Fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ com relação à norma $\\| \cdot \\|_{1,p}$
$\mathcal{N} = \{u \in E \, : \, \Phi'(u)u = 0\}$	Variedade de Nehari
Φ, I, I_0, I_1, I_2	Funcionais, sendo Φ funcional "energia"
$\rightharpoonup$	Convergência fraca
$\to$	Convergência forte
$\hookrightarrow$	Imersão de espaços
$\Delta_p u := \mathrm{div}(\lvert\nabla u\rvert^{p-1} \nabla u)$	Operador p-laplaciano
$u^+ = \max\{u, 0\}$	Parte positiva da função $u : \Omega \to \mathbb{R}$
$u^- = \min\{u, 0\}$	Parte negativa da função $u : \Omega \to \mathbb{R}$
p^*	Expoente crítico da imersão de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$
$o(1)$	Denota um função ou sequência que tende a 0
$f(x, u) = o(\lvert u\rvert^{p-1})$	Denota uma função f que é muito pequena comparada à $\lvert u\rvert^{p-1}$
$I'(u) = o(\\|u\\|)$	Denota a derivada de um funcional que é muito pequena comparada à $\\|u\\|$

Resumo

Neste trabalho usaremos o método da Variedade de Nehari para mostrar a existência de estados fundamentais e múltiplas soluções para os seguintes problemas de fronteira elípticos não lineares:

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \lambda |u|^{p-2}u = f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

do qual (1) passa a ser um caso particular, uma generalização para p-laplaciano, definido por $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-1}\nabla u)$ para todo $p \in (1,\infty)$. Tanto em (1) quanto em (2), Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$, $\lambda < \lambda_1$, sendo λ_1 o primeiro autovalor de $-\Delta$ em Ω e , em (1), $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ é uma função satisfazendo a restrição de crescimento

$$|f(x,u)| \leq a(1 + |u|^{q-1}) \tag{3}$$

para algum $a > 0$ e $2 < q < 2^*$, sendo que 2^* representa aqui o expoente crítico da imersão de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, e tem valor

$$2^* = \begin{cases} \dfrac{2N}{N-2}, & \text{se } N \geq 3 \\ \infty, & \text{se } N = 1 \text{ ou } N = 2 \end{cases}$$

e, em (2), f precisa satisfazer a restrição de crescimento (3) com 2 substituído por p e 2^* substituído por

$$p^* := \begin{cases} \dfrac{Np}{N-p}, & \text{se } N > p \\ \infty, & \text{se } N \leq p. \end{cases}$$

Usaremos o método da variedade de Nehari também para provarmos a existência de soluções de menor energia com sinais trocados para (1) e (2), ou seja, uma solução $u \in \mathcal{N}_{sc}$ com $\Phi(u) = c_{sc} \geq 2c$, em que Φ é o funcional "Energia" associado a (1) e (2), respectivamente, $\mathcal{N}_{sc} := \{u \in E : u^{\pm} \in \mathcal{N}\}$, $c_{sc} = \inf\limits_{u \in \mathcal{N}_{sc}} \Phi(u)$, com $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \min\{u, 0\}$ denotando, sucessivamente, as parte positiva e negativa de u.

[1]

[1]**Palavras-chave:** variedade de Nehari, múltiplas soluções, estados fundamentais, problemas de fronteira elípticos não lineares, p-laplaciano, soluções de menor energia.

Abstract

In this work we will use the method of Nehari manifold to show the existence of ground states and multiple solutions to the following elliptical boundary problems nonlinear:

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u &= f(x,u), \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

and

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \lambda |u|^{p-2} u &= f(x,u), \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

which (4) becomes a particular case, a generalization for the p-laplacian, defined as $\Delta_p u := \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-1}\nabla u)$ for all $p \in (1,\infty)$. At (4) and (5), Ω is a bounded domain $\mathbb{R}^N$, $\lambda < \lambda_1$, being λ_1 the fist Dirichlet eigenvalue of $-\Delta$ in Ω and , at (4), $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ is a function satisfying the growth restrition

$$|f(x,u)| \leq a(1 + |u|^{q-1}) \tag{6}$$

for some $a > 0$ e $2 < q < 2^*$, wherein 2^* here denotes the critical exponent of the Sobolev embedding $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, and has value

$$2^* = \begin{cases} \dfrac{2N}{N-2}, & \text{if } \; N \geq 3 \\ \infty, & \text{if } N = 1 \;\text{ or }\; N = 2 \end{cases}$$

and, at (5), f need to satisfy the growth restriction (6) wuith 2 replaced by p e 2^* replaced by

$$p^* := \begin{cases} \dfrac{Np}{N-p}, & \text{if } \; N > p \\ \infty, & \text{if } N \leq p. \end{cases}$$

we will use the method of Nehari manifold also to show the existence of least energy sign-changing solutions for (4) and (5), i.e, a solution $u \in \mathcal{N}_{sc}$ with $\Phi(u) = c_{sc} \geq 2c$, wherein Φ is the funcional "Energy" associated with (4) and (5), respectively, $\mathcal{N}_{sc} := \{u \in E : u^{\pm} \in \mathcal{N}\}$, $c_{sc} = \inf_{u \in \mathcal{N}_{sc}} \Phi(u)$, with $u^+ = \max\{u, 0\}$ and $u^- = \min\{u, 0\}$ denoting, successively, the positive and negative part of u.

[2]

[2]**key words:** Nehari manifold, multiple solutions , ground states,nonlinear elliptic boundary value problems, p-laplacian, least energy solution.

Sumário

Introdução

Sabemos que, pelo Princípio de Dirichlet, as solução de uma equação diferencial juntamente com uma condição de fronteira pode ser obtida como minimizador de um funcional apropriado.

A ideia principal embutida no Princípio de Dirichlet é a interpretação de um problema diferencial, escrito abstratamente como $F(u) = 0$, como $\Phi'(u) = 0$, sendo Φ um funcional adequado definido em um conjunto de funções, e Φ' a diferencial de Φ. Em outras palavras, zeros de F são vistos como pontos críticos (não necessariamente mínimos) de Φ. A equação $\Phi'(u) = 0$ é equação de Euler ou equação de Euler-Lagrange associada à Φ.

Muitas vezes, verifica-se que é muito mais fácil encontrar um ponto crítico de Φ do que trabalhar diretamente com a equação $F(u) = 0$. Além disso, em inúmeras aplicações, o funcional Φ tem um significado físico por ser , em alguns casos, a integral de um Lagrangeano, sendo esta integral conhecida por muitos autores como *Funcional Ação.* Portanto, encontrar um ponto de mínimo de Φ significa não só resolver a equação diferencial, mas encontrar a solução de ação mínima, frequentemente de particular relevância em problemas concretos. A interpretação de Φ como uma energia é tão frequente que os funcionais associados a problemas diferenciais são normalmente chamado funcionais de energia, mesmo quando o problema não tem aplicações físicas diretas.

Acontece, muitas vezes, que o funcional Φ associado ao problema de valor de fronteira é ilimitado inferiormente. Portanto, nenhuma minimização é possível no espaço inteiro, sendo necessário, então, a restrição de Φ à um conjunto onde ele seja, de fato, limitado inferiormente, o que possibilita, em alguns casos, sob algumas hipóteses, resolver o problema, uma vez que um ponto crítico de Φ nesse conjunto será um ponto crítico de Φ no espaço inteiro. A variedade de Nehari é um exemplo de conjunto onde esta minimização pode ser realizada.

Na sequência, consideraremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = & |u|^{p-2}u, \quad x \in \Omega \\ \quad u = 0, & \quad\quad\quad\quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{7}$$

que pode ser encontrado em [18], e que ilustra a utilização da variedade de Nehari em um caso concreto. Em (7) Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $\lambda > -\lambda_1$, onde λ_1 denota o primeiro autovalor de $-\Delta$ em Ω e $2 < p < 2^*$, sendo que 2^* representa aqui o expoente crítico da imersão de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, e tem valor

$$2^* = \begin{cases} \dfrac{2N}{N-2}, & \text{se } \ N \geq 3 \\ \infty, & \text{se } N = 1 \ \text{ ou } \ N = 2. \end{cases}$$

Ressaltamos que, no capítulo 2 deste trabalho, faremos algumas hipóteses que nos possibilitarão aplicar o método da variedade a problemas onde o espaço ambiente é um espaço abstrato. A saber, consideraremos E um espaço de Banach uniformemente convexo tal que

(A_1) Existe uma função de normalização φ tal que

$$u \mapsto \psi(u) = \int_0^{\|u\|} \varphi(t)\ \mathrm{d}t \in C^1(E \setminus \{0\}, \mathbb{R}),$$

sendo que $J := \psi'$ é limitado em conjuntos limitados e $J(w)w = 1$ para todo $w \in S = \{w \in E \,:\, \|w\| = 1\}$;

(A_2) Para cada $w \in E \setminus \{0\}$ existe s_w tal que se $\alpha_w(s) := \Phi(sw)$, então $\alpha'_w(s) > 0$ para $0 < s < s_w$ e $\alpha'_w(s) < 0$ para $s > s_w$;

(A_3) Existe $\delta > 0$ tal que se $s_w \geq \delta$ para todo $w \in S$ e, para cada subconjunto compacto $\mathcal{K} \subset S$, existe uma constante $C_{\mathcal{K}}$ tal que $s_w \leq C_{\mathcal{K}}$ para todo $w \in \mathcal{K}$.

Considere, agora, o funcional "Energia" $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ associado ao problema (7), dado por

$$\begin{aligned} \Phi(u) &:= \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 + \lambda u^2)\ \mathrm{d}x - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{p}|u|_p^p \end{aligned}$$

em que

$$\|\cdot\|_\lambda := \left(\int_\Omega (|\nabla u|^2 + \lambda u^2)\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

denota aqui uma norma equivalente à norma usual em $H^1(\Omega)$.

A desigualdade de Poincaré assegura que este funcional está bem definido e sua relação com o problema (7) é dada pelo seguinte fato: Φ é de classe C^2 e

$$\Phi'(u)v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\ \mathrm{d}x + \lambda\int_\Omega uv\ \mathrm{d}x - \int_\Omega |u|^{p-2}uv\ \mathrm{d}x \quad \forall\, u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Em consequência, u é uma solução fraca do problema (7) se e só u é um ponto crítico de Φ.

Para estudar os pontos críticos de Φ convém analisar seu gráfico. Para isto, fixemos uma direção $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$, e observamos como é o gráfico de Φ sobre a reta gerada por u. Isto é, consideremos a função $\alpha_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha_u(s) := \Phi(su) = \left(\frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2\right)s^2 - \left(\frac{1}{p}|u|_p^p\right)|s|^p.$$

A hipótese A_2 acima garantirá a mesma análise para uma situação mais geral (veja o capítulo 2).

Pela hipótese $p > 2$, o gráfico desta função tem a seguinte forma:

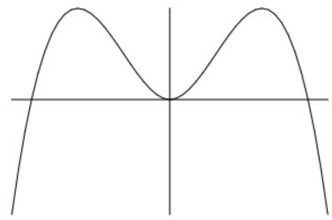

Figura 1: Desenho do gráfico de Φ.

Pode-se confirmar a afirmação anterior encontrando os pontos críticos e os valores críticos da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(s) = as^2 - b|s|^p$$

sendo $a, b > 0$ números reais e $p > 2$.

Observamos que Φ não é limitada inferiormente e que tem um mínimo local em 0. Note que 0 é uma solução do problema (7). Nos interessa saber se este problema tem uma solução não trivial. O fato de ser Φ ilimitada inferiormente impossibilita a aplicação de qualquer método direto da teoria de minimização.

Denotemos por s_u o único máximo de α_u em $(0, \infty)$. Ressaltamos, também aqui, que a hipótese A_2 garantirá a existência de um único máximo de α_u em $(0, \infty)$ (veja capítulo 2)

Os pontos críticos de Φ estão contidos no conjunto $\{s_u u : u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_\lambda = 1\}$. Tal conjunto se chama a *variedade de Nehari.*

O conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \{u \in H_0^1(\Omega) : u \neq 0, \Phi'(u)u = 0\} \\ &= \{u \in H_0^1(\Omega) : u \neq 0, \|u\|_\lambda^2 = |u|_p^p\} \end{aligned}$$

contém obviamente todos os pontos críticos não triviais de Φ. Tem-se as seguintes propriedades, que também se cumprirão na situação de nosso trabalho.

i) Existe $\delta > 0$ tal que $\|u\|_\lambda \geq \delta$ para todo $u \in \mathcal{N}$. Em consequência $\mathcal{N}$ é um conjunto fechado de $H_0^1(\Omega)$.

ii) $\mathcal{N}$ é uma subvariedade de classe C^2 de $H_0^1(\Omega)$.

iii) $u \notin T_u\mathcal{N}$

iv) Para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$, existe um único $s_u > 0$ tal que $s_u u \in \mathcal{N}$. s_u é o único ponto em $(0, \infty)$ para o qual se cumpre

$$\max_{s \geq 0} \Phi(su) = \Phi(s_u u).$$

Das propriedades anteriores concluímos os seguintes fatos:

i) $\inf_{u\in\mathcal{N}} \Phi(u) > 0$.

ii) Se $u \in \mathcal{N}$ é um ponto crítico de Φ sobre $\mathcal{N}$, então u é um ponto crítico não trivial de $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ e, como consequência, uma solução não trivial do problema (7).

Por outro lado, estes fatos nos sugerem investigar se Φ alcança seu mínimo em $\mathcal{N}$. Se $\mathcal{N}$ for compacta a resposta seria claramente afirmativa, já que toda função contínua em um conjunto compacto alcança seus valores extremos. Porém $\mathcal{N}$ não é compacta. De fato, $\mathcal{N}$ é homeomorfo à esfera unitária em $H_0^1(\Omega)$ e a esfera unitária em um espaço de dimensão infinita nunca é compacta.

Se $p < 2^*$ então Φ alcança seu mínimo em $\mathcal{N}$. Então, este fato somado à alguns resultados anteriores nos diz que o problema (7) tem ao menos uma solução não trivial. Por fim, por um resultado devido à Benci-Cerami(1991), que nos diz que se $u \in \mathcal{N}$ é um ponto crítico de Φ tal que

$$\Phi(u) < 2 \inf_{v\in\mathcal{N}} \Phi(v)$$

então, ou bem $u \geq 0$, ou bem $u \leq 0$ q.t.p em Ω, garantimos, em particular, que as soluções de (7) não mudam de sinal.

O método da Variedade de Nehari se tornou muito útil na teoria de ponto crítico e remonta aos trabalhos de Nehari [28] e [29]. Nesses trabalhos ele considerou um problema de valor de fronteira para uma certa equação diferencial parcial em um intervalo (a,b) e mostrou que ela tem uma solução não trivial que pode ser obtida por minimização restrita do funcional de Euler-Lagrange correspondente ao problema.

Para descrever o método de Nehari em um conjunto abstrato, considere E um espaço de Banach real e $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional. A derivada de Fréchet de Φ em u, $\Phi'(u)$, é um elemento do espaço dual E^*, e denotamos $\Phi'(u)$ calculada em $v \in E$ por $\Phi'(u)v$. Suponha que $u \neq 0$ seja um ponto crítico de Φ, isto é, $\Phi'(u) = 0$. Então, necessariamente u está contido no conjunto

$$\mathcal{N} = \{u \in E\backslash\{0\} : \Phi'(u)u = 0\}.$$

Assim, $\mathcal{N}$ é uma restrição natural para o problema de encontrar pontos críticos não-triviais (isto é, $u \neq 0$) de Φ. O conjunto $\mathcal{N}$ é chamado a *Varidade de Nehari* embora em geral ela pode não ser uma variedade.

Em nosso trabalho suporemos apenas que $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$, de modo que a verificação de que $\mathcal{N}$ é uma variedade não pode ser feita seguindo a Observação 2.2 adiante. Contornaremos essa dificuldade ao provarmos, com hipóteses adicionais posteriormente descritas, a existência de um homeomorfismo radial entre $\mathcal{N}$ e a esfera unitária S do espaço E.

As próximas considerações descrevem a situação usual em que pontos críticos para um funcional Φ são obtidos pelo método da variedade de Nehari.

Assuma, sem perda de generalidade que $\Phi(0) = 0$. Assuma também que, para cada $w \in S = \{w \in E : \|w\| = 1\}$, a função $\alpha_w(s) := \Phi(sw)$ atinja um único máximo $s_w \in (0, \infty)$ tal que $\alpha'_w(s) > 0$ sempre que $0 < s < s_w$, $\alpha'_w(s) < 0$ sempre que $s > s_w$ e $s_w \geq \delta$ para algum

$\delta > 0$, independente de $w \in S$ (veja figura 2 abaixo). Então, $\alpha'_w(s_w) = \Phi'(s_w w)w = 0$, o que implica que $\Phi'(s_w w)s_w w = s_w\Phi'(s_w w)w = 0$. Logo $s_w w$ é o único ponto no raio $s \mapsto sw$, $s > 0$, que intersecta $\mathcal{N}$. Ou seja, a variedade de Nehari é descrita como o conjunto dos pontos de máximo do funcional $\alpha_w(s) = \Phi(sw)$, para cada $w \in S$. Como consequência, para cada direção $w \in S$ fixada, o método da variedade de Nehari obtém pontos críticos simplesmente ao analisar a função real $\alpha_w\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$.

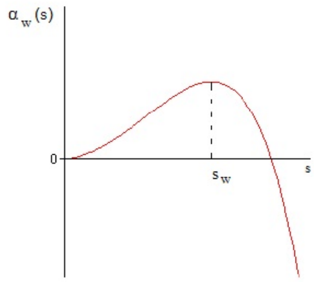

Figura 2: O gráfico de $\alpha_w(s) = \Phi(sw)$ é exibido para $s > 0$ e $w \in S$ fixado e ressaltando o único máximo $s_w \in (0,\infty)$ tal que $\alpha'_w(s) > 0$ sempre que $0 < s < s_w$, $\alpha'_w(s) < 0$ sempre que $s > s_w$.

Defina

$$c := \inf_{u\in\mathcal{N}} \Phi(u).$$

Sob condições apropriadas de Φ espera-se que c seja atingido em algum $u_0 \in \mathcal{N}$ e que u_0 seja um ponto crítico de Φ em E (expressamos este notável fato dizendo que $\mathcal{N}$ é uma restrição natural para Φ) e, portanto, uma solução dos problemas (1.1) e (1.5)(veja capítulo 3). Neste trabalho, provamos que $u_0 \in \mathcal{N}$ é um ponto crítico sempre que $\Phi(u_0) = c$.

Seguindo M. Willem [20, p. 71], definimos o que chamamos de Estado Fundamental ou solução de estado fundamental ou ponto crítico de menor energia: Seja $\Phi \in C^1(E,\mathbb{R})$ um funcional. Um ponto crítico $u \neq 0$ de Φ tal que $\Phi(u) = c$ é chamado **estado fundamental** ou **solução de estado fundamental** ou **ponto crítico de menor energia**.

Este trabalho foi desenvolvido tendo [1] como principal referência e tem como principal objetivo utilizar o método da Variedade de Nehari para mostrar a existência de estados fundamentais e múltiplas soluções para os seguintes problemas de fronteira elípticos não lineares:

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u &= f(x,u), \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{8}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \lambda|u|^{p-2}u &= f(x,u), \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{9}$$

do qual (8) passa a ser um caso particular, uma generalização para o p-laplaciano, definido por $\Delta_p u := \text{div}(|\nabla u|^{p-1}\nabla u)$ para todo $p \in (1, \infty)$. Tanto em (8) quanto em (9), Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$, $\lambda < \lambda_1$, sendo λ_1 o primeiro autovalor de $-\Delta$ em Ω e, em (8), $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ é uma função satisfazendo a restrição de crescimento

$$|f(x,u)| \leq a(1 + |u|^{q-1}) \tag{10}$$

para algum $a > 0$ e $2 < q < 2^*$, sendo que 2^* representa aqui o expoente crítico da imersão de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, e tem valor

$$2^* = \begin{cases} \dfrac{2N}{N-2}, & \text{se } \; N \geq 3 \\ \infty, & \text{se } N = 1 \;\text{ ou }\; N = 2 \end{cases}$$

e, em (9), f precisa satisfazer a restrição de crescimento (10) com 2 substituído por p e 2^* substituído por

$$p^* := \begin{cases} \dfrac{Np}{N-p}, & \text{se } \; N > p \\ \infty, & \text{se } N \leq p. \end{cases}$$

Além disso, usaremos o método da variedade de Nehari também para provarmos a existência de soluções de menor energia com sinais trocados para (8) e (9), ou seja, uma solução $u \in \mathcal{N}_{sc}$ com $\Phi(u) = c_{sc} \geq 2c$, em que Φ é o funcional "Energia" associado a (8) e (9), respectivamente, $\mathcal{N}_{sc} := \{u \in E : u^{\pm} \in \mathcal{N}\}$, $c_{sc} = \inf_{u \in \mathcal{N}_{sc}} \Phi(u)$, com $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \min\{u, 0\}$ denotando, sucessivamente, as parte positiva e negativa de u.

Capítulo 1

Preliminares

Na primeira seção deste capítulo apresentaremos alguns resultados básicos sobre um problema não linear para o Laplaciano, problema esse que será tratado, em outro capítulo, utilizando o método da variedade de Nehari.

Na segunda seção, consideraremos uma versão mais geral do mesmo problema, substituindo o operador Laplaciano pelo p-laplaciano. Como antes, o método da variedade de Nehari será aplicado posteriormente.

A apresentação em duas diferentes seções justifica-se pela utilização de espaços distintos: no caso do Laplaciano, podemos considerar o problema em um espaço de Hilbert, o que não será possível no caso mais geral do p-laplaciano.

1.1 Um problema não linear para o Laplaciano

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Consideremos o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u &= f(x,u), \quad x \in \Omega \\ \quad u &= \quad 0, \qquad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

em que λ é um parâmetro real e $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfaz a restrição de crescimento

$$|f(x,u)| \leq a(1 + |u|^{q-1}) \tag{1.2}$$

para algum $a > 0$ e $2 < q < 2^*$.

O expoente crítico da imersão de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, denotado aqui por 2^*, tem valor

$$2^* = \begin{cases} \dfrac{2N}{N-2}, & \text{se } \ N \geq 3, \\ \infty, & \text{se } N = 1 \ \text{ ou } \ N = 2. \end{cases}$$

Vamos procurar por soluções do problema (1.1) definidas no espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$.

Definição 1.1 (Solução fraca). *Uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo a igualdade*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega uv \, \mathrm{d}x = \int_\Omega fv \, \mathrm{d}x \quad \forall \, v \in H_0^1(\Omega)$$

*é chamada **solução fraca** do problema* (1.1)*, com*

$$\nabla u \cdot \nabla v = \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)$$

denotando o produto interno usual do espaço $\mathbb{R}^N$*.*

Como sabemos (veja o Apêndice C), a norma usual do espaço $H_0^1(\Omega)$ é equivalente à norma

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2},$$

que é gerada pelo produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x.$$

O espaço $H_0^1(\Omega)$ será considerado com essa norma. Denotaremos, respectivamente, por $\|\cdot\|_2$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ a norma e o produto interno usuais do espaço $L^2(\Omega)$. Mais geralmente, denotaremos por $\|\cdot\|_p$ a norma usual do espaço $L^p(\Omega)$. A notação $\|\cdot\|$ também será utilizada para denotar normas usuais de alguns espaços; por exemplo, a norma do espaço dual de algum espaço considerado.

Consideremos o funcional "energia" $\Phi\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_\Omega \lambda u^2 \, \mathrm{d}x - \int_\Omega F(x, u) \, \mathrm{d}x \equiv \frac{1}{2}\|u\|^2 - I_1(u) - I(u),$$

em que

$$F(x, u) = \int_0^u f(x, s) \mathrm{d}s. \tag{1.3}$$

Afirmamos que Φ está bem definido. De fato, a função I_0, dada por $I_0(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 = \frac{1}{2}\langle u, u \rangle$ está bem definida para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. Por sua vez, o mesmo acontece com a função I_1, dada por $I_1(u) = \frac{\lambda}{2}\|u\|_2^2$.

Assim, basta verificar que a função I está bem definida. Isto é uma consequência da restrição de crescimento (1.2). De fato, temos que

$$\begin{aligned} |F(x, u)| &= \left| \int_0^u f(x, s) \mathrm{d}s \right| \leq \int_0^{|u|} |f(x, s)| \mathrm{d}s \\ &\leq \int_0^{|u|} a(1 + |s|^{q-1}) \mathrm{d}s = a\left(|u| + \frac{|u|^q}{q} \right). \end{aligned}$$

Uma vez que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, nossas hipóteses garantem que $|u|, |u|^q \in L^1(\Omega)$. Consequentemente,

$$\int_\Omega a\left(|u| + \frac{|u|^q}{q} \right) \, \mathrm{d}x < \infty,$$

mostrando que a função I está bem definida e concluindo a demonstração de nossa afirmação.

Observação 1.2. A condição (1.2) é essencial para que o funcional energia Φ esteja bem definido em $H_0^1(\Omega)$, isto é, devemos ter $2 < q < 2^*$. De fato, se $f(x,u)$ crescer mais rápido que $|u|^{2^*-1}$, então $F(x,u)$ crescerá mais rápido do que $|u|^{2^*}$. De acordo com o Teorema C.9, $H_0^1(\Omega)$ não está imerso em $L^q(\Omega)$ quando $q > 2^*$. Como consequência, a integral de $F(x,u)$ pode divergir para algum $u \in H_0^1(\Omega)$.

Em algumas passagens utilizaremos o Corolário (D.5), o que impõe a condição $q-1 \geq 1$, mas permitiria $q = 2$. Contudo, só podemos garantir que o funcional Φ seja ilimitado inferiormente no caso em que $q > 2$: veja [17, p. 56]. Esse fato será importante em nossa abordagem utilizando a variedade de Nehari. $\lhd$

Lema 1.3 (Diferenciabilidade de Φ)**.** *O funcional energia Φ é de classe C^1 e*

$$\Phi'(u)v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega uv \, \mathrm{d}x - \int_\Omega f(x,u)v \, \mathrm{d}x.$$

Demonstração. Uma vez que $I_0(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 = \frac{1}{2}\langle u,u\rangle$ e $I_1(u) = \frac{\lambda}{2}\|u\|_2^2 = \frac{\lambda}{2}\langle u,u\rangle_2$, vemos que ambos funcionais são de classe[1] C^1, com

$$I_0'(u)v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad I_1'(u)v = \lambda \int_\Omega uv \, \mathrm{d}x.$$

Basta, portanto, considerar a diferenciabilidade de $I(u) = \int_\Omega F(x,u)\,\mathrm{d}x$.

Afirmamos que existe a derivada de Gâteaux de I. De fato, sejam $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Então

$$\frac{I(u+tv) - I(u)}{t} = \frac{1}{t}\left(\int_\Omega F(x,u+tv)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega F(x,u)\,\mathrm{d}x\right) = \int_\Omega \frac{F(x,u+tv) - F(x,u)}{t}\,\mathrm{d}x.$$

Para $x \in \Omega$ fixo, temos que F é uma função real (veja a equação (1.3)). Assim, o Teorema do Valor Médio garante a existência de $\theta \in \mathbb{R}$, satisfazendo $0 < \theta < 1$, tal que

$$\frac{F(x,u(x)+tv(x)) - F(x,u(x))}{t} = \frac{D_2F\left(x,u+\theta tv\right)tv}{t} = f\left(x,u+\theta tv\right)v,$$

de modo que

$$\frac{I(u+tv) - I(u)}{t} = \int_\Omega f\left(x,u(x)+\theta tv(x)\right)v(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.4}$$

Vamos mostrar que a integral em (1.4) é finita. Para isso, notamos que

$$\begin{aligned}
|f\left(x,u(x)+\theta tv(x)\right)v(x)| &\leq a\left(1 + |u(x)+\theta tv(x)|^{q-1}\right)|v(x)| \\
&\leq a\left(1 + (|u(x)|+|v(x)|)^{q-1}\right)|v(x)| \\
&\leq a\left(1 + 2^{q-2}(|u(x)|^{q-1}+|v(x)|^{q-1})\right)|v(x)|, \\
&\leq C\left(|v(x)| + |u(x)|^{q-1}|v(x)| + |v(x)|^q\right)
\end{aligned}$$

de acordo com a desigualdade mostrada no Corolário D.5. (Note que a limitação inferior $q > 2$ assumida em (1.2) é utilizada também aqui: para aplicar o Corolário D.5, precisamos que $q - 1 \geq 1$, ou seja, $q \geq 2$.)

[1]Os funcionais I_0 e I_1 são de classe C^∞.

Afirmamos que

$$\big(|v| + |u|^{q-1}|v)| + |v|^q\big) \in L^1(\Omega).$$

De fato, como $u, v \in H_0^1(\Omega)$, temos que $u, v \in L^q(\Omega)$, implicando que $|u|^q, |v|^q \in L^1(\Omega)$. Como $|v| \in L^q(\Omega)$ e $|u|^{q-1} \in L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)$, a desigualdade de Hölder garante que $|u|^{q-1}|v| \in L^1(\Omega)$, pois $\frac{q}{q-1}$ é o expoente conjugado de q, concluindo a prova de nossa afirmação.

Decorre então do Teorema da Convergência Dominada que

$$\lim_{t\to 0} \frac{I(u+tv) - I(u)}{t} = \int_\Omega \lim_{t\to 0} f(x, u+\lambda tv)v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x,u)v \,\mathrm{d}x,$$

que define uma aplicação linear contínua (como função de $v \in H_0^1(\Omega)$).

Para completarmos a demonstração, mostraremos que a derivada de Gâteaux

$$I' \colon H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)^*$$

é contínua.

Suponhamos que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Então $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < 2^*$. Decorre do Teorema D.6 que $f(x, u_n) \to f(x,u)$ em L^q, com $q := p/p-1$.

Assim, denotando por c_p uma constante que depende de p, as desigualdades de Hölder e Poincaré implicam

$$\begin{aligned}
|I'(u_n)v - I'(u)v| = \left|\int_\Omega (f(x,u_n) - f(x,u))\, v \,\mathrm{d}x\right| &\leq \int_\Omega |f(x, u_n - f(x,u)|\; |v| \,\mathrm{d}x \\
&\leq \|f(x,u_n) - f(x,u)\|_q \|v\|_p \\
&\leq c_p \|f(x,u_n) - f(x,u)\|_q \|v\|,
\end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\|I'(u_n) - I'(u)\| \leq c_p \|f(x,u_n) - f(x,u)\|_q \to 0, \quad n \to \infty,$$

o que mostra que I é de classe C^1 e conclui a prova do lema. ■

No próximo resultado coletamos algumas propriedades básicas do funcional energia Φ:

Teorema 1.4. *Suponhamos que f seja contínua e satisfaça (1.2). Então:*

(i) $\Phi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}))$ *e* $\Phi'(u) = 0$ *se, e somente se,* $u \in H_0^1(\Omega)$ *for uma solução fraca de* (1.1)*;*

(ii) Os funcionais I e I_1 são (sequencialmente) fracamente contínuos, isto é, se $u_n \rightharpoonup u$ então $I(u_n) \to I(u)$ e $I_1(u_n) \to I_1(u)$;

(iii) Os operadores I' e I_1' são completamente contínuos, isto é, se $u_n \rightharpoonup u$ então $I'(u_n) \to I'(u)$ e $I_1'(u_n) \to I_1'(u)$;

(iv) Se $f(x,u) = o(u)$ uniformemente em x quando $u \to 0$, então $I'(u) = o(\|u\|)$ e $I(u) = o(\|u\|^2)$ quando $u \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$;

(*v*) *Se* $N = 1$*, então* f *não precisa satisfazer a restrição de crescimento* (1.2).

Demonstração. Já vimos que Φ é de classe C^1. Utilizando a expressão de $\Phi'(u)$, calculada no Lema 1.3, temos imediatamente que $\Phi'(u) = 0$ se, e somente se, $u \in H_0^1(\Omega)$ for solução fraca de (1.1).

Vamos agora mostrar que I é fracamente (sequencialmente) contínuo e que I' é completamente contínuo. Suponhamos que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$. Os teoremas de imersão de Sobolev garantem então que $u_n \to u$ em $L^q(\Omega)$. Assim, quando $n \to \infty$ obtemos que

$$\begin{aligned}
|F(x,u) - F(x,u_n)| &\leq \left| \int_{u_n}^{u} f(x,s)\mathrm{d}s \right| \leq \left| \int_{u_n}^{u} a(1 + |s|^{q-1})\mathrm{d}s \right| \\
&\leq a \left(|s| + \frac{|s|^q}{q} \right) \Bigg|_{u_n}^{u} = a \left(|u| - |u_n| + \frac{|u|^q}{q} - \frac{|u_n|^q}{q} \right) \to 0,
\end{aligned}$$

o que implica que

$$I(u) - I(u) = \int_\Omega (F(x,u) - F(x,u_n))\,\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{quando} \;\; n \to \infty.$$

Por sua vez, decorre das desigualdades de Hölder e Poincaré que

$$\begin{aligned}
|(I'(u_n) - I'(u))\,v| &= \left| \int_\Omega (f(x,u_n)v - f(x,u)v)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_\Omega |(f(x,u_n) - f(x,u)|\;|v|\;\mathrm{d}x \\
&\leq \left(\int_\Omega \left|(f(x,u_n) - f(x,u)\right|^{\frac{p}{p-1}}\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |v|^p\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f(x,u_n) - f(x,u)\|_{\frac{p}{p-1}} \|v\|_p \\
&\leq c_p \|f(x,u_n) - f(x,u)\|_{\frac{p}{p-1}} \|v\|
\end{aligned}$$

Como $\|f(x,u_n) - f(x,u)\|_{L^{\frac{p}{p-1}}} \to 0$, concluímos que $\|I'(u_n) - I'(u)\| \to 0$.

Agora vamos mostrar que I_1 é fracamente sequencialmente contínuo e I_1' é completamente contínuo. Como antes, de $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ decorre $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$ e, portanto, $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
|I_1(u_n) - I_1(u)| &= \left| \frac{1}{2} \int_\Omega \lambda(u_n^2 - u^2)\mathrm{d}x \right| \leq \frac{|\lambda|}{2} \int_\Omega |(u_n^2 - u^2)|\mathrm{d}x \\
&= \frac{|\lambda|}{2} \|(u_n^2 - u^2)\|_1,
\end{aligned}$$

provando que $I_1(u_n) \to I_1(u)$.

Por sua vez, decorre da desigualdade de Hölder e Poincaré que

$$
\begin{aligned}
|(I_1'(u_n)v - I_1'(u)v)| = \left|\lambda \int_\Omega (u_n - u)v \, \mathrm{d}x\right| &\leq |\lambda| \int_\Omega |(u_n - u)v| \, \mathrm{d}x \\
&\leq |\lambda| \left(\int_\Omega |u_n - u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= |\lambda| \, \|u_n - u\|_2 \|v\|_2 \\
&\leq c_p \|u_n - u\|_2 \|v\|
\end{aligned}
$$

Como $\|u_n - u\|_2 \to 0$, completamos a prova de (ii) e (iii).

Da hipótese $f(x, u) = o(u)$ decorre que, dado $\varepsilon > 0$, existe C_ε tal que $0 < |u| < C_\varepsilon$ implica $|f(x, u)| < \varepsilon|u|$.

Mostraremos, primeiramente, que $I'(u) = o(\|u\|)$. Decorre das desigualdades de Hölder e Poincaré que

$$
\begin{aligned}
|I'(u)v| = \left|\int_\Omega f(x, u)v \, \mathrm{d}x\right| &\leq \int_\Omega |f(x, u)| \; |v| \, \mathrm{d}x \\
&\leq \int_\Omega \varepsilon|u| \; |v| \, \mathrm{d}x \leq \varepsilon\|u\|_2\|v\|_2 \leq \varepsilon c_p \|u\| \, \|v\|,
\end{aligned}
$$

o que implica que

$$\|I'(u)\| \leq \varepsilon c_p \|u\|$$

e prova que $I'(u) = o(\|u\|)$.

Mostramos agora que $I(u) = o(\|u^2\|)$. De fato,

$$
\begin{aligned}
|I(u)| = \left|\int_\Omega F(x, u) \, \mathrm{d}x\right| = \left|\int_\Omega \int_0^u f(x, s) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x\right| \leq \int_\Omega \int_0^{|u|} |f(x, s)| \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x \\
\leq \int_\Omega \int_0^{|u|} \varepsilon|s| \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega |u|^2 \, \mathrm{d}x = \frac{\varepsilon}{2}\|u\|_2^2 \leq \frac{c_p\varepsilon}{2}\|u\|^2,
\end{aligned}
$$

mostrando que $I(u) = o(\|u^2\|)$.

Decorre da compacidade da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ a afirmação (v). ∎

1.2 Um problema não linear para o p-Laplaciano

Para generalizar os resultados preliminares obtidos na Seção 1.1, consideraremos o operador p-laplaciano, definido por $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ para todo $p \in (1, \infty)$. O problema correspondente a (1.1) é

$$
\left\{
\begin{array}{rcll}
-\Delta_p u - \lambda|u|^{p-2}u & = & f(x, u), & x \in \Omega \\
u & = & 0, & x \in \partial\Omega,
\end{array}
\right.
\tag{1.5}
$$

do qual (1.1) passa a ser um caso particular. Neste contexto mais geral, o espaço adequado para considerarmos o problema é $W_0^{1,p}(\Omega)$, cuja norma usual é equivalente à norma

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Consideraremos $W_0^{1,p}(\Omega)$ com essa norma. (Note que, diferentemente da primeira seção, não estamos lidando com um espaço de Hilbert.)

O coeficiente crítico para a imersão de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é dado por

$$p^* = \begin{cases} \dfrac{Np}{N-p}, & \text{se } \ N > p, \\ \infty, & \text{se } N \le p \end{cases}$$

e uma solução fraca de (1.5) é definida por

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} uv \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x,u) v \, \mathrm{d}x, \quad \forall \ v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Como na Seção 1.1, consideramos o funcional “energia”, definido em nosso caso por

$$\Phi(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x - \int_\Omega F(x,u) \, \mathrm{d}x \equiv I_0(u) - I_1(u) - I(u),$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Para obtermos que o funcional energia está bem definido, precisamos alterar a restrição de crescimento utilizada na 1.1. Vamos supor que

$$|f(x,u)| \le a(1 + |u|^{q-1}) \tag{1.6}$$

com $a > 0$ e $p < q < p^*$. Note que essa restrição é a mesma que (1.2), com 2 e 2^* substituídos por p e p^*, respectivamente. Com essa restrição de crescimento, é fácil verificar que o funcional energia está bem definido.

Observação 1.5. A justificativa para o intervalo $p < q < p^*$ na condição (1.6) é análoga à apresentada na Seção 1.1. $\triangleleft$

Lema 1.6. *O funcional* $I_0 \colon W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, *dado por*

$$I_0(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x$$

é de classe C^1 *e*

$$I_0'(u)v = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x.$$

Demonstração. Consideremos a função $\eta \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por $\eta(x) = |x|^p$. Então, para todo

$x \neq 0$, temos $\nabla\eta(x) = p|x|^{p-1}\frac{1}{2|x|}2x = p|x|^{p-2}x$, de modo que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\eta(x+ty)-\eta(x)}{t} = p|x|^{p-2}x \cdot y.$$

Portanto,

$$\lim_{t\to 0} \frac{|\nabla u(x)+t\nabla v(x)|^p - |\nabla u(x)|^p}{t} = p|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\cdot\nabla v(x) \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega.$$

Contudo, para aplicarmos o limite dentro da integral, precisamos verificar que o Teorema da Convergência Dominada pode ser aplicado. Aplicando o Teorema do Valor Médio temos, de acordo com o mostrado anteriormente e o Lema D.5,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{|\nabla u+t\nabla v|^p-|\nabla u|^p}{t}\right| &= p\Big||\nabla u+\theta t\nabla v|^{p-2}(\nabla u+\theta t\nabla v)\nabla v\Big| \\
&= p|\nabla u+\theta t\nabla v|^{p-2}\cdot|(\nabla u+\theta t\nabla v)|\cdot|\nabla v| \\
&= p|\nabla u+\theta t\nabla v|^{p-1}|\nabla v| \\
&= p\cdot 2^{p-2}\left(|\nabla u|^{p-1}+|\theta t|^{p-1}|\nabla v|^{p-1}\right)\cdot|\nabla v| \\
&\leq C\left(|\nabla u|^{p-1}|\nabla v|+|\nabla v|^{pe}\right),
\end{aligned}$$

em que t foi suposto suficientemente pequeno, $0<\theta<1$ e $C = p\cdot 2^{p-2}$.

De modo semelhante ao caso do Laplaciano, verificamos facilmente que o lado direito dessa desigualdade está em $L^1(\Omega)$, mostrando que as condições do Teorema da Convergência Dominada estão satisfeitas. Assim

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{p}\int_\Omega \frac{|\nabla u(x)+tv(x)|^p-|\nabla u(x)|^p}{t}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x,$$

mostrando que I_0 é Gâteaux diferenciável.

Agora vamos mostrar que $I_0'\colon W_0^{1,p}(\Omega)\to W_0^{1,p}(\Omega)^*$ é contínua. Para isso, consideremos uma sequência (u_n) tal que $u_n\to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Passando a subsequências (veja a demonstração do Lema D.3), podemos supor que $\nabla u_n\to\nabla u$ em $\left(L^p(\Omega)\right)^N$, $\nabla u_n(x)\to\nabla u(x)$ q.t.p. em Ω e $|\nabla u_n(x)|^p\leq g(x)$ q.t.p. em Ω, com $g(x)\in L^1(\Omega)$.

Então temos, aplicando as desigualdades de Hölder,

$$\begin{aligned}
|(I_0'(u_n)-I_0'(u))\,v| &= \left|\int_\Omega\left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n-|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \left(\int_\Omega\left||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n-|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|^{\frac{p}{p-1}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega|\nabla v|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_\Omega\left||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n-|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|^{\frac{p}{p-1}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}}\|v\|.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|I_0'(u_n) - I_0'(u)\| \leq \left(\int_\Omega \left| |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \right|^{\frac{p}{p-1}} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Para mostrar que a integral na desigualdade anterior é finita, basta notarmos que

$$\left| |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \right|^{\frac{p}{p-1}} \leq C\left(|\nabla u_n|^p + |\nabla u|^p\right) \leq C(g + |\nabla u|^p) \in L^1(\Omega),$$

De acordo com o que assumimos sobre a sequência (u_n), temos que

$$|\nabla u_n(x)|^{p-2}\nabla u_n(x) \to |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x) \quad \text{q.t.p. em } \ \Omega.$$

Como consequência, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada e concluir que

$$\|I_0'(u_n) - I_0'(u)\| \to 0 \quad \text{quando } \ n \to \infty.$$

(Esse resultado foi mostrado para uma subsequência da sequência original (u_n); contudo, como sequências convergentes são de Cauchy, o resultado também vale para a sequência original (u_n).) ∎

Proposição 1.7. *O funcional energia Φ é de classe C^1 e*

$$\Phi'(u)v = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega |u|^{p-2}uv \, \mathrm{d}x - \int_\Omega f(x,u)v \, \mathrm{d}x$$

para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Já vimos que $I_0(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x$ é de classe C^1. Utilizando a imersão canônica $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, a demonstração que $I_1(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega \lambda|u|^p \mathrm{d}x$ é de classe C^1 é completamente análoga ao que foi feito no Lema 1.3, com o espaço $H_0^1(\Omega)$ substituído pelo espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$.

A demonstração de que o funcional $I(u) = \int_\Omega F(x,u) \, \mathrm{d}x$ é de classe C^1 também é análoga àquela apresentada no Lema 1.3, uma vez considerada a restrição de crescimento (1.6). ∎

Teorema 1.8. *Suponha que f seja contínua e satisfaça* (1.6). *Então:*

(i) $\Phi \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ *e* $\Phi'(u) = 0$ *se, e somente se,* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *for uma solução fraca de* (1.5)*;*

(ii) Os funcionais I e I_1 são (sequencialmente) fracamente contínuos, isto é, se $u_n \rightharpoonup u$, então $I(u_n) \to I(u)$ e $I_1(u_n) \to I_1(u)$;

(iii) Os operadores I' e I_1' são completamente contínuos, isto é, se $u_n \rightharpoonup u$, então $I'(u_n) \to I'(u)$ e $I_1'(u_n) \to I_1'(u)$.

(*iv*) *Se* $f(x,u) = o(|u|^{p-1})$ *uniformemente em* x *quando* $u \to 0$, *então* $I'(u) = o(\|u\|^{p-1})$ *e* $I(u) = o(\|u\|^p)$ *quando* $u \to 0$ *em* $W_0^{1,p}(\Omega)$;

(*v*) *Se* $N < p$, *então* f *não precisa satisfazer qualquer restrição de crescimento.*

Demonstração. Já vimos que $\Phi \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$. Utilizando a expressão de $\Phi'(u)$, calculada na Proposição 1.7, temos que $\Phi'(u) = 0$ se, e somente se, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ for solução fraca de (1.5).

Vamos agora mostrar que I e I_1 são fracamente (sequencialmente) contínuos e que I' e I_1' são completamente contínuos. Suponhamos que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Como no caso do laplaciano, os teoremas de imersão de Sobolev garantem então que $u_n \to u$ em $L^q(\Omega)$. Assim, também de forma análoga ao caso do Laplaciano, obtemos que

$$I(u) - I(u) = \int_\Omega (F(x,u) - F(x,u_n))\ \mathrm{d}x \to 0 \quad \text{quando} \ \ n \to \infty.$$

Por sua vez, decorre das desigualdades de Hölder e Poincaré,

$$\begin{aligned}
|(I'(u_n) - I'(u))\, v| &= \left| \int_\Omega (f(x,u_n)v - f(x,u)v)\ \mathrm{d}x \right| \le \int_\Omega |(f(x,u_n) - f(x,u)|\ |v|\ \mathrm{d}x \\
&\le \left(\int_\Omega \left| (f(x,u_n) - f(x,u) \right|^{\frac{p}{p-1}}\ \mathrm{d}x \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |v|^p\ \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f(x,u_n) - f(x,u)\|_{\frac{p}{p-1}} \|v\|_p \\
&\le c_p \|f(x,u_n) - f(x,u)\|_{\frac{p}{p-1}} \|v\|
\end{aligned}$$

Como $\|f(x,u_n) - f(x,u)\|_{\frac{p}{p-1}} \to 0$, concluímos que $\|I'(u_n) - I'(u)\| \to 0$.

Agora vamos mostrar que I_1 é fracamente sequencialmente contínuo e I_1' é completamente contínuo. Como antes, de $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ decorre $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$ e, portanto, $|u_n|^p \to |u|^p$ em $L^1(\Omega)$. Logo,

$$\begin{aligned}
|I_1(u_n) - I_1(u)| &= \left| \frac{1}{p} \int_\Omega \lambda(|u_n|^p - |u|^p) \mathrm{d}x \right| \le \frac{|\lambda|}{p} \int_\Omega |(|u_n|^p - |u|^p)|\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{|\lambda|}{p} \, \|(|u_n|^p - |u|^p)\|_1 \,,
\end{aligned}$$

provando que $I_1(u_n) \to I_1(u)$.

Antes de provarmos (*ii*) e (*iii*), notemos que $|u_n|^{p-2}u_n$, $|u|^{p-2}u \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$. De fato, como $(u_n) \subset L^p(\Omega)$, segue-se

$$\int_\Omega \left| |u_n|^{p-2} u_n \right|^{\frac{p}{p-1}}\ \mathrm{d}x = \int_\Omega \left(|u_n|^{p-2} |u_n| \right)^{\frac{p}{p-1}}\ \mathrm{d}x = \int_\Omega \left(|u_n|^{p-1} \right)^{\frac{p}{p-1}}\ \mathrm{d}x = \int_\Omega |u_n|^p\ \mathrm{d}x < \infty.$$

Da mesma forma, mostramos que $|u|^{p-2}u \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$.

Decorre,então, das desigualdades de Hölder e Poincaré que

$$
\begin{aligned}
|(I_1'(u_n)v - I_1'(u)v)| = \left|\lambda \int_\Omega (|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)v \,\mathrm{d}x\right| &\leq |\lambda| \int_\Omega \left|(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)v\right| \mathrm{d}x \\
&\leq |\lambda| \left(\int_\Omega \left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right|^{\frac{p-1}{p}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |v|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\lambda| \left\||u_n|^{p-2} - |u|^{p-2}u\right\|_{\frac{p}{p-1}} \|v\|_p \\
&\leq c_p \left\||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right\|_{\frac{p}{p-1}} \|v\|.
\end{aligned}
$$

Pelo Teorema (D.6) temos que $\||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\|_{\frac{p}{p-1}} \to 0$, completando assim a prova de (ii) e (iii).

Mostraremos agora (iv). Da hipótese $f(x,u) = o(|u|^{p-1})$ decorre que, dado $\varepsilon > 0$, existe C_ε tal que $0 < |u| < C_\varepsilon$ implica que $|f(x,u)| < \varepsilon|u|^{p-1}$. Mostraremos, primeiramente, que $I'(u) = o(\|u\|^{p-1})$. As desigualdades de Hölder e Poincaré implicam que

$$
\begin{aligned}
|I'(u)v| = \left|\int_\Omega f(x,u)v \,\mathrm{d}x\right| &\leq \int_\Omega |f(x,u)|\ |v| \,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega \varepsilon|u|^{p-1}\ |v| \,\mathrm{d}x \\
&\leq \varepsilon\|u^{p-1}\|_{\frac{p}{p-1}}\|v\|_p = \varepsilon\|u\|_p^{p-1}\|v\|_p \\
&\leq \varepsilon c_p\|u\|^{p-1}\ \|v\|
\end{aligned}
$$

o que garante que

$$\|I'(u)\| \leq \varepsilon c_p\|u\|^{p-1}$$

e prova que $I'(u) = o(\|u\|^{p-1})$.

Mostramos agora que $I(u) = o(\|u\|^p)$. De fato,

$$
\begin{aligned}
|I(u)| = \left|\int_\Omega F(x,u)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_\Omega\int_0^u f(x,s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right| &\leq \int_\Omega\int_0^{|u|} |f(x,s)|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x \\
\leq \int_\Omega\int_0^{|u|} \varepsilon|s|^{p-1}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon}{p}\int_\Omega |u|^p\,\mathrm{d}x = \frac{\varepsilon}{p}\|u\|_p^p \\
\leq \frac{c_p\varepsilon}{p}\|u\|^p,
\end{aligned}
$$

mostrando que $I(u) = o(\|u\|^p)$.

Finalmente, (v) segue da compacidade da imersão $W_0^{1,p} \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$. ■

Capítulo 2

A Variedade de Nehari

2.1 Definição e principais propriedades

Definição 2.1. *Sejam E um espaço de Banach real e $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional. O conjunto*

$$\mathcal{N} = \{u \in E \setminus \{0\} : \Phi'(u)u = 0\}$$

*é chamado **variedade de Nehari**.*

Note que, se $u \neq 0$ for um ponto crítico de Φ, isto é, se $\Phi'(u) = 0$, então necessariamente u pertence a $\mathcal{N}$. Assim, $\mathcal{N}$ é uma restrição natural para o problema de encontrar pontos críticos não triviais (isto é, $u \neq 0$) de Φ. A abordagem de um problema de minimização utilizando a variedade de Nehari transforma esse problema em um problema de minimização com vínculo.

Observação 2.2. Embora $\mathcal{N}$ seja chamado de variedade de Nehari, $\mathcal{N}$ pode não ser uma variedade. Lembramos que $0 \in \mathbb{R}$ é um *valor regular* da função diferenciável $g \colon U \subset E \to \mathbb{R}$ se, para todo $u \in U$ tal que $g(u) = 0$, tivermos $g'(u) \neq 0$. Satisfeita essa exigência, temos que $g^{-1}(0)$ é uma variedade em E.

Em nosso caso, o aberto U é dado por $E \setminus \{0\}$ e, definindo $g(u) = \Phi'(u)u$ e supondo $\Phi \in C^2$, temos $u \in \mathcal{N}$ se, e somente se, $g(u) = 0$. Uma vez que $g'(u)h = \Phi''(u)(h, u) + \Phi'(u)h$, temos $g'(u) \neq 0$ se, e somente se, para todo $u \in E \setminus \{0\}$ existir $h \in E \setminus \{0\}$ tal que $\Phi''(u)(h, u) + \Phi'(u)h \neq 0$. Se tivermos $\Phi''(u)(u, u) \neq 0$, como $g'(u)u = \Phi''(u)(u, u) + \Phi'(u)u = \Phi''(u)(u, u)$, então $\mathcal{N}$ é uma variedade de codimensão 1. $\lhd$

Em nosso trabalho suporemos apenas que $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$, de modo que a verificação de que $\mathcal{N}$ é uma variedade não pode ser feita seguindo a Observação 2.2. Contornaremos essa dificuldade ao provarmos, com hipóteses adicionais posteriormente descritas, a existência de um homeomorfismo radial entre $\mathcal{N}$ e a esfera unitária S do espaço E.

As próximas considerações descrevem a situação usual em que pontos críticos para um funcional Φ são obtidos pelo método da variedade de Nehari.

Assuma, sem perda de generalidade que $\Phi(0) = 0$. Assuma também que, para cada $w \in S = \{w \in E : \|w\| = 1\}$, a função $\alpha_w(s) := \Phi(sw)$ atinja um único máximo $s_w \in (0, \infty)$

tal que $\alpha'_w(s) > 0$ sempre que $0 < s < s_w$, $\alpha'_w(s) < 0$ sempre que $s > s_w$ e $s_w \geq \delta$ para algum $\delta > 0$, independente de $w \in S$. Então, $\alpha'_w(s_w) = \Phi'(s_w w)w = 0$, o que implica que $\Phi'(s_w w)s_w w = s_w \Phi'(s_w w)w = 0$. Logo $s_w w$ é o único ponto no raio $s \mapsto sw$, $s > 0$, que intersecta $\mathcal{N}$. Ou seja, a variedade de Nehari é descrita como o conjunto dos pontos de máximo do funcional $\alpha_w(s) = \Phi(sw)$, para cada $w \in S$. Como consequência, para cada direção $w \in S$ fixada, o método da variedade de Nehari obtém pontos críticos simplesmente ao analisar a função real $\alpha_w \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

O próximo resultado garante que a variedade de Nehari é um conjunto fechado do espaço de Banach E:

Proposição 2.3. *Assuma que, para cada $w \in S = \{w \in E : \|w\| = 1\}$, a função $\alpha_w(s) = \Phi(sw)$ atinja um único máximo $s_w \in (0, \infty)$ tal que $\alpha'_w(s) > 0$ sempre que $0 < s < s_w$, $\alpha'_w(s) < 0$ sempre que $s > s_w$ e $s_w \geq \delta$ para algum $\delta > 0$ independente de $w \in S$. Então $\mathcal{N}$ é um subconjunto fechado do espaço de Banach E.*

Demonstração. Como Φ é diferenciável, $\Phi^{-1}(\{0\}) \subset E$ é um subconjunto fechado. Nossas hipóteses garantem a existência de $\delta > 0$, independente de $w \in S$, tal que $s_w \geq \delta$. Ou seja, se $u \in \mathcal{N}$, então $\|u\| \geq \delta$. Assim, 0 não é ponto de acumulação de elementos de $\mathcal{N}$, o que garante que $\Phi^{-1}(\{0\}) = \mathcal{N}$. ■

Nossas suposições estabelecem uma bijeção entre S e $\mathcal{N}$. Veremos posteriormente que, se s_w for limitado em subconjuntos compactos de S, então essa bijeção é, de fato, um homeomorfismo.

Defina

$$c = \inf_{u \in \mathcal{N}} \Phi(u). \tag{2.1}$$

Sob condições apropriadas, espera-se que c seja atingido em algum $u_0 \in \mathcal{N}$ e que u_0 seja um ponto crítico de Φ considerado no espaço inteiro e, portanto, como vimos no capítulo 1, uma solução dos problemas considerados. Na verdade, veremos que $u_0 \in \mathcal{N}$ é um ponto crítico sempre que $\Phi(u_0) = c$. Note que sendo $s \mapsto \alpha_w(s)$ crescente para todo $w \in S$ e $0 < s < \delta$, 0 é um mínimo local, consequentemente, um ponto crítico de Φ.

Seguindo M. Willem [20, p. 71], definimos:

Definição 2.4 (Estado fundamental ou ponto crítico de menor energia)**.** *Seja $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional. Um ponto crítico $u \neq 0$ de Φ tal que $\Phi(u) = c$ é chamado **estado fundamental** ou **ponto crítico de menor energia**. Se $u_0 \in \mathcal{N}$ for tal que $\Phi(u_0) = c$, então u_0 é chamada **solução de estado fundamental**.*

De agora em diante, vamos supor que o espaço E seja *uniformemente convexo*. Mantemos a suposição que $\Phi(0) = 0$, com $\Phi \in C^1$.

Definição 2.5. *Uma função $\varphi \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ é uma **função de normalização** se φ for estritamente crescente, $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$.*

Descrevemos nossas hipóteses: seja E um espaço de Banach uniformemente convexo tal que

(A_1) Existe uma função de normalização φ tal que

$$u \mapsto \psi(u) = \int_0^{\|u\|} \varphi(t)\ \mathrm{d}t \in C^1(E \setminus \{0\}, \mathbb{R}),$$

sendo que $J := \psi'$ é limitado em conjuntos limitados e $J(w)w = 1$ para todo $w \in S = \{w \in E\ :\ \|w\| = 1\}$;

(A_2) Para cada $w \in E \setminus \{0\}$ existe s_w tal que se $\alpha_w(s) := \Phi(sw)$, então $\alpha'_w(s) > 0$ para $0 < s < s_w$ e $\alpha'_w(s) < 0$ para $s > s_w$;

(A_3) Existe $\delta > 0$ tal que se $s_w \geq \delta$ para todo $w \in S$ e, para cada subconjunto compacto $\mathcal{K} \subset S$, existe uma constante $C_{\mathcal{K}}$ tal que $s_w \leq C_{\mathcal{K}}$ para todo $w \in \mathcal{K}$.

A aplicação J definida em (A_1) é chamada *aplicação de dualidade* correspondente a φ. Veja [11] para uma discussão detalhada desta noção e algumas observações sobre essa aplicação no Apêndice E. Note que a hipótese (A_2) garante a unicidade de s_w.

Lema 2.6. *Suponhamos que a hipótese (A_1) seja satisfeita. Então a esfera $S \subset E$ é subvariedade de classe C^1 de codimensão 1 e o espaço tangente a S no ponto w é dado por*

$$T_w(S) = \{z \in E\ :\ J(w)z = 0\}.$$

Em particular, para todo $w \in S$, vale a decomposição

$$E = T_w(S) \oplus \mathbb{R}w.$$

Demonstração. Por hipótese, $\psi\colon E\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 e $J = \psi'$. Afirmamos que

$$S = \psi^{-1}\left(\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t\right).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\psi^{-1}\left(\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t\right) &= \left\{u \in E \setminus \{0\} : \psi(u) = \int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t\right\} \\
&= \left\{u \in E \setminus \{0\} : \int_0^{\|u\|} \varphi(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t\right\} \\
&= S.
\end{aligned}$$

Notamos também que, se $w \in \psi^{-1}\left(\int_0^1 \varphi(t)\ \mathrm{d}t\right) = S$, decorre de (A_1) que $J(w)w = 1$ para todo $w \in S$, o que implica que $J(w) \neq 0$, provando que $\int_0^1 \varphi(t)\ \mathrm{d}t$ é um valor regular de ψ.

Assim, S é uma subvariedade de classe C^1 e codimensão 1 em E. Dado $w \in S$, o espaço tangente a S em w, denotado por $T_w(S)$, é o núcleo do funcional $\psi'(w)$ (veja [23, Proposition 4.3.33]). Ou seja,

$$T_w(S) = \{z \in E : J(w)z = 0\}.$$

A última afirmação é imediata, pois o núcleo do funcional linear $J(w) = \psi'(w)$ tem codimensão 1 e $w \in S$ não pertence a $T_w(S)$. ■

Observação 2.7. Aqui estaremos principalmente interessados em dois casos: quando $E = \mathcal{H}$ for um espaço de Hilbert e quando E for o espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado e $p > 1$. (Note que $W_0^{1,p}(\Omega)$ é um espaço uniformemente convexo.)

No primeiro caso, ao considerarmos $\varphi(t) = t$, então J é a aplicação de dualidade usual entre E e E^*. De fato, como

$$\psi(u) = \int_0^{\|u\|} t \, \mathrm{d}t = \frac{\|u\|^2}{2},$$

temos $\psi'(u) = \langle u, \cdot \rangle$, ou seja, $J(u)v = \psi'(u)v = \langle u, v \rangle$ para todo $v \in E$.

No segundo caso, colocamos $\varphi(t) := t^{p-1}$. O funcional ψ associado é dado por

$$\psi(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x$$

e a aplicação de dualidade $J = \psi' \colon E \to E^*$ é dada por

$$J(u)v = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x.$$

Verificamos que J é contínua e limitada em conjuntos compactos. De fato, considere $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\|v\| = 1$. Pela desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} |J(u)v| = \left| \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x \right| &\leq \int_\Omega \left| |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \right| \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-1} \cdot |\nabla v| \, \mathrm{d}x \\ &\leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int_\Omega |\nabla v|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

o que mostra que $J(u)$ é limitado se u estiver em um conjunto limitado. $\lhd$

Por outro lado, o fato de termos $\psi \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ (veja Lema (1.6)) nos diz que J é contínua.

Como foi mostrado, segue de (A_2) que $sw \in \mathcal{N}$ se e somente se $s = s_w$. Além disso, pela primeira parte de A_3, $\mathcal{N}$ é fechado em E e é um conjunto afastado de 0.

Defina as aplicações $\widehat{m} \colon E \setminus \{0\} \to \mathcal{N}$ e $m \colon S \to \mathcal{N}$ por

$$\widehat{m}(w) := s_w w \qquad \text{e} \qquad m := \widehat{m}|S.$$

Proposição 2.8. *Suponha que Φ satisfaça (A_2) e (A_3). Então:*

(i) a aplicação $\widehat{m}$ é contínua;

(ii) a aplicação m é um homeomorfismo entre S e $\mathcal{N}$ e a inversa de m é dada por

$$m^{-1}(u) = \frac{u}{\|u\|}.$$

Demonstração. Seja (w_n) uma sequência em $E \setminus \{0\}$ e suponha que $w_n \to w \neq 0$. Devido a (A_2), temos que $\widehat{m}(tw) = \widehat{m}(w)$ para cada $t > 0$. Assim, podemos assumir que $w_n \in S$ para todo n. Queremos mostrar que $\widehat{m}(w_n) \to \widehat{m}(w)$.

Denotemos $\widehat{m}(w_n) = s_n w_n$. Por (A_2) e (A_3), temos $\delta \leq s_n \leq C_S$ para todo n. Dessa forma, passando a uma subsequência, podemos supor que $s_n \to \bar{s} > 0$. Como $\mathcal{N}$ é fechado e $\widehat{w}(w_n) \to \bar{s}w$, concluímos que $\bar{s}w \in \mathcal{N}$. Logo, $\bar{s}w = s_w w = \widehat{m}(w)$, mostrando o afirmado para uma subsequência da sequência original. Como a sequência original é de Cauchy, o resultado vale para toda a sequência, o que conclui a prova de (i).

Como a aplicação $\widehat{m}$ é contínua, segue que m é contínua por ser restrição de uma aplicação contínua. Além disso, a aplicação

$$\begin{aligned} \mu \colon \mathcal{N} &\to \mathcal{S} \\ u &\mapsto \frac{u}{\|u\|} \end{aligned}$$

também é contínua.

Uma vez que temos

$$\begin{array}{ccccc} S & \to & \mathcal{N} & \to & S \\ w & \mapsto & s_w w & \mapsto & \dfrac{s_w w}{\|s_w w\|} = \dfrac{w}{\|w\|} = w \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{N} & \to & S & \to & \mathcal{N} \\ w & \mapsto & \dfrac{w}{\|w\|} & \mapsto & s_{\frac{w}{\|w\|}} \frac{w}{\|w\|} = w, \end{array}$$

(pois, pela unicidade de s tal que $s_w w \in \mathcal{N}$, temos que $\frac{1}{\|w\|} s_{\frac{w}{\|w\|}} = 1$) provamos assim que μ é a inversa de m e, portanto, que m é um homeomorfismo entre S e $\mathcal{N}$ com inversa dada por $m^{-1}(u) = \dfrac{u}{\|u\|}$. ∎

Consideremos agora os funcionais $\widehat{\Psi} \colon E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ e $\Psi \colon S \to \mathbb{R}$ definidos por

$$\widehat{\Psi}(w) = \Phi(\widehat{m}(w)) \qquad e \qquad \Psi = \widehat{\Psi}|_S.$$

Não podemos garantir que $\mathcal{N}$ seja uma variedade de classe C^1, mas mostraremos que $\widehat{\Psi}$ é de classe C^1 e que existe uma correspondência injetiva entre os pontos críticos de Ψ e os pontos críticos não triviais de Φ.

Proposição 2.9. *Suponha que o espaço de Banach E satisfaça (A_1). Se Φ satisfizer (A_2) e (A_3), então $\widehat{\Psi} \in C^1(E \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ e*

$$\widehat{\Psi}'(w)z = \frac{\|\widehat{m}(w)\|}{\|w\|}\Phi'(\widehat{m}(w))z, \quad \forall\, w, z \in E,\ w \neq 0.$$

Demonstração. Sejam $w \in E \setminus \{0\}$ e $z \in E$. Usando a propriedade da maximalidade de $s_w w$ e o Teorema do Valor Médio, obtemos, para $|t|$ suficientemente pequeno:

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}(w+tz) - \widehat{\Psi}(w) &= \Phi(\widehat{m}(w+tz)) - \Phi(\widehat{m}(w)) = \Phi(s_{w+tz}(w+tz)) - \Phi(s_w w)\\ &\leq \Phi(s_{w+tz}(w+tz)) - \Phi(s_{w+tz}w)\\ &= \Phi'(s_{w+tz}(w+\tau_t tz))s_{w+tz}tz,\end{aligned}$$

em que $\tau_t \in (0,1)$. Analogamente,

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}(w+tz) - \widehat{\Psi}(w) &= \Phi(s_{w+tz}(w+tz)) - \Phi(s_w w)\\ &\geq \Phi(s_w(w+tz)) - \Phi(s_w w))\\ &= \Phi'(s_w(w+\eta_t tz))s_w tz,\end{aligned}$$

com $\eta_t \in (0,1)$, de modo que

$$\Phi'(s_w(w+\eta_t tz))s_w tz \leq \widehat{\Psi}(w+tz) - \widehat{\Psi}(w) \leq \Phi'(s_{w+tz}(w+\tau_t tz))s_{w+tz}tz.$$

Portanto,

$$\lim_{t\to 0}\frac{\widehat{\Psi}(w+tz) - \widehat{\Psi}(w)}{t} = s_w\Phi'(s_w w)z = \frac{\|\widehat{m}(w)\|}{\|w\|}\Phi'(\widehat{m}(w))z.$$

Uma vez que $\Phi \in C^1$ e a Proposição 2.8 garante a continuidade da função $w \mapsto s_w w$, concluímos que a derivada de Gâteaux de $\widehat{\Psi}$ é limitada em z, dependendo continuamente de w, mostrando que $\widehat{\Psi}$ é de classe C^1. ■

Corolário 2.10. *Suponha que E seja um espaço de Banach uniformemente convexo satisfazendo (A_1). Se Φ satisfizer (A_2) e (A_3), então:*

(i) $\Psi \in C^1(S, \mathbb{R})$ *e, para $w \in S$, vale*

$$\Psi'(w)z = \|m(w)\|\Phi'(m(w))z, \quad \forall\, z \in T_w(S);$$

(ii) Se (w_n) for uma sequência de Palais-Smale para Ψ, então $(m(w_n))$ é uma sequência de Palais-Smale para Φ. Se $u_n \subset \mathcal{N}$ for uma sequência de Palais-Smale limitada para Φ, então $(m^{-1}(u_n))$ é uma sequência de Palais-Smale para Ψ;

(iii) w é um ponto crítico de Ψ se e somente se $m(w)$ for um ponto crítico não trivial de Φ e $\Phi(\widehat{m}(w)) = \widehat{\Psi}(w)$. Em particular, $\inf_S \Psi = \inf_{\mathcal{N}} \Phi$;

(iv) Se Φ for par, então Ψ também é.

Demonstração. Se $w \in S$, então $\|w\| = 1$ e $m(w) = \widehat{m}(w)$. Assim, decorre da Proposição 2.9 que $\Psi'(w)z = \|m(w)\|\Phi'(m(w))z$ para todo $z \in T_w(S)$. Portanto, (i) está provado.

Para mostrar (ii), notamos inicialmente que, de acordo com a definição de Ψ temos que $\Psi(w_n)$ é limitada se, e somente se, $\Phi(m(w_n))$ o for.

Afirmamos que, definindo $u = m(w) \in \mathcal{N}$ para todo $w \in S$, temos

$$\|\Psi'(w)\| \leq \|u\|\,\|\Phi'(u)\| \leq (C+1)\|\Psi'(w)\|, \tag{2.2}$$

em que $C > 0$ é uma constante.

Suponhamos provado (2.2) e que $(w_n) \subset S$ seja uma sequência de Palais-Smale para Ψ. A segunda desigualdade em (2.2) implica que $\|u_n\|\|\Phi'(u_n)\| \to 0$ quando $n \to \infty$. Uma vez $\mathcal{N}$ está afastada do zero, não podemos ter $\|u_n\| \to 0$. Assim, podemos concluir que $\|\Phi'(u_n)\| \to 0$. Deste fato decorre que $(u_n) = m(w_n))$ é uma sequência de Palais-Smale para Φ.

Da mesma forma, seja $(u_n) \subset \mathcal{N}$ uma sequência limitada de Palais-Smale para Φ. Sendo (u_n) limitada, a primeira desigualdade em (2.2) implica que, para $w_n := m^{-1}(u_n))$, temos $\|\Psi'(w_n)\| \leq M\|\Phi'(u_n)\|$. Assim, $\Phi'(u_n) \to 0$ implica $\Psi'(w_n) \to 0$. Isso completa a prova de (ii).

A afirmação (iii) é consequência imediata de (2.2).

Para provar nossa afirmação, utilizamos a decomposição $E = T_w(S) \oplus \mathbb{R}w$ (provada no Lema 2.6) e hipótese (A_1), que garante que J é limitada em conjuntos limitados. Uma vez que $J(w)(z+tw) = t$ para $w \in S$ e $z + tw \in T_w(S) + \mathbb{R}w$, concluímos que $|t| = \|J(w)\| \leq C$ para alguma constante $C > 0$, ao supormos que $\|z + tw\| = 1$.

Uma vez que $\big|\|z\| - \|tw\|\big| = \big|\|z\| - |t|\big| \leq \|z + tw\|$, obtemos

$$\|z\| \leq 1 + |t| \leq (C+1)\|z + tw\| \tag{2.3}$$

Assim, decorre de (i) que, para $u = m(w)$, temos

$$\|\Psi'(w)\| = \sup_{\substack{z \in T_w(S)\\ \|z\|=1}} |\Psi'(w)z| = \sup_{\substack{z \in T_w(S)\\ \|z\|=1}} \|m(w)\|\,|\Phi'(m(w))z| = \|u\| \sup_{\substack{z \in T_w(S)\\ \|z\|=1}} |\Phi'(u)z|. \tag{2.4}$$

Mas, como $m(w) = u$, aplicando m^{-1} a essa igualdade, da Proposição 2.8 decorre que $w = m^{-1}(m(w)) = m^{-1}(u) = \frac{u}{\|u\|}$ e $\Phi'(u)\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{1}{\|u\|}\Phi'(u)u = 0$, pois $u \in \mathcal{N}$. Daí decorre que

$$\|\Phi'(u)\| = \sup_{\substack{z+tw \in T_w(S)\oplus\mathbb{R}w\\ \|z+tw\|=1}} |\Phi'(u)(z+tw)| = \sup_{\substack{z+tw \in T_w(S)\oplus\mathbb{R}w\\ \|z+tw\|=1}} |\Phi'(u)z| \geq \sup_{\substack{z \in T_w(S)\\ \|z\|=1}} |\Phi'(u)z|. \tag{2.5}$$

Combinando (2.4) e (2.5) obtemos a primeira desigualdade em (2.2).

Uma vez que

$$\|\Phi'(u)\| = \sup_{\substack{z+tw\in T_w(S)\oplus\mathbb{R}w\\ z+tw\neq 0}} \left|\Phi'(u)\frac{(z+tw)}{\|z+tw\|}\right| = \sup_{\substack{z\in T_w(S)\\ z+tw\neq 0}} \left|\Phi'(u)\frac{z}{\|z+tw\|}\right|,$$

aplicando a desigualdade (2.3) em (2.4) obtemos

$$\begin{aligned}\|u\| \sup_{\substack{z\in T_w(S)\\ \|z\|=1}} |\Phi'(u)z| \leq \|u\| \sup_{\substack{z\in T_w(S)\\ z+tw\neq 0}} \left|\Phi'(u)\frac{z}{\|z+tw\|}\right| &\leq (C+1)\|u\| \sup_{z\in T_w(S)\setminus\{0\}} \frac{|\Phi'(u)z|}{\|z\|}\\ &= (C+1)\|\Psi'(w)\|,\end{aligned}$$

completando a demonstração de (2.2).

Finalmente, se Φ for par, então $\Phi(sw) = \Phi(-sw)$ e, assim, $s_{-w} = s_w$. Consequentemente, $m(-w) = -m(w)$ e a definição mostra que Ψ é par, provando (iv). ■

Observação 2.11. Notamos que o ínfimo de ϕ sobre $\mathcal{N}$ tem a seguinte caracterização minimax:

$$c = \inf_{u\in\mathcal{N}} \Phi(u) = \inf_{w\in E\setminus\{0\}} \max_{s>0} \Phi(sw) = \inf_{w\in S} \max_{s>0} \Phi(sw).$$

◁

Os próximos teoremas deste capítulo fornecem condições suficientes para a existência de um estado fundamental e de infinitos pares de pontos críticos de Φ. Em suas demonstrações utilizaremos o teorema A.9 que nos diz que se E é um espaço de Banach de dimensão infinita, $\Phi \in C^1(S,\mathbb{R})$ é limitado inferiormente e satisfaz a condição de Palais-Smale, então Φ tem infinitos pares de pontos críticos.

Definição 2.12. *Dizemos que Φ satisfaz a condição de Palais-Smale em $\mathcal{N}$ se toda sequência de Palais-Smale (u_n) para Φ com $u_n \in \mathcal{N}$ para todo n contém uma subsequência convergente.*

Teorema 2.13. *Seja E um espaço de Hilbert e suponha que $\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - I(u)$, sendo*
(i) $I'(u) = o(\|u\|)$ quando $u \to 0$;
(ii) $s \mapsto \frac{I'(su)u}{s}$ é estritamente crescente para todo $u \neq 0$ e $s > 0$;
(iii) $\frac{I(su)}{s^2} \to \infty$ uniformemente para u em subconjuntos fracamente compactos de $E \setminus \{0\}$ quando $s \to \infty$;
(iv) I' é completamente contínuo.
Então a equação $\Phi'(u) = 0$ tem uma solução de estado fundamental. Além disso, se I é par, então esta equação tem infinitos pares de soluções.

Demonstração. Primeiramente verificamos que (A_2) e (A_3) são satisfeitas. Por (i) e por (iii), $\alpha_w(s) > 0$ para $s > 0$ pequeno e $\alpha_w(s) < 0$ para $s > 0$ grande. De fato, por (i) segue-se que, para todo $w \in S$, $I'(sw) = o(\|sw\|) = o(s)$ quando $sw \to 0$. Logo, $I(sw) = o(s^2)$. Suponhamos, por absurdo que exista $s > 0$ pequeno tal que $\alpha_w(s) \leq 0$. Como

$$\alpha_w(s) = \Phi(sw) = \frac{1}{2}s^2 - I(sw), \tag{2.6}$$

temos

$$\frac{1}{2}s^2 \leq I(sw).$$

Dividindo ambos os membros da desigualdade anterior por s^2 temos

$$\frac{1}{2} \leq \frac{I(sw)}{s^2}.$$

Assim, como vale (i) e $s > 0$ pequeno, fazendo $s \to 0$ temos que

$$\frac{1}{2} \leq 0,$$

um absurdo. Suponhamos agora que exista $s > 0$ grande tal que $\alpha_w(s) \geq 0$. Como, neste caso,

$$\frac{1}{2}s^2 \geq I(sw),$$

dividindo ambos os membros da desigualdade anterior por s^2 temos

$$\frac{1}{2} \geq \frac{I(sw)}{s^2}.$$

Pretendemos, aqui, utilizar a hipótese (iii) do teorema que estamos demonstrando. Como E é um espaço de Hilbert, segue-se que E é reflexivo. Consequentemente,a esfera unitária S é um subconjunto fracamente compacto de $E \setminus \{0\}$ e então, como $s > 0$ grande, fazendo $s \to \infty$ na desigualdade anterior, segue-se por (iii) que

$$\frac{1}{2} \geq \infty,$$

novamente um absurdo. Portanto, $\alpha_w(s) > 0$ para $s > 0$ pequeno e $\alpha_w(s) < 0$ para $s > 0$ grande.

Segue-se de (ii) que existe um único s_w com $\alpha'_w(s_w) = 0$. De fato, suponha que existam $s_1 < s_2$, tais que $\alpha'_w(s_1) = \alpha'_w(s_2) = 0$. Como vale (ii) temos

$$\frac{I'(s_1w)w}{s_1} \leq \frac{I'(s_2w)w}{s_2}.$$

Pelo fato de termos

$$\alpha'_w(s) = \frac{d}{ds}\Phi(sw) = s\|w\|^2 - I'(sw)w = s\left(\|w\|^2 - \frac{I'(sw)w}{s}\right),$$

segue-se que $\alpha'_w(s) = 0 \Leftrightarrow s\left(\|w\|^2 - \frac{I'(sw)w}{s}\right) = 0 \Leftrightarrow \|w\|^2 - \frac{I'(sw)w}{s} = 0 \Leftrightarrow \frac{I'(sw)w}{s} = \|w\|^2$. Ou seja, se vale $\alpha'_w(s_1) = \alpha'_w(s_2) = 0$, teremos

$$\frac{I'(s_1w)w}{s_1} = \frac{I'(s_2w)w}{s_2},$$

um absurdo. Portanto, existe um único s_w com $\alpha'_w(s_w) = 0$.

Afirmamos agora a existência de $\delta > 0$ tal que $s_w \geq \delta$ para todo $w \in S$. De fato, caso contrário, existiria uma sequência $\delta_n = 1/n$ e $w_n \in S$ tais que $s_n = s_{w_n} < 1/n$. Mas então, como

$$0 = \alpha(s_n) = s_n \|w_n\|^2 - I'(s_n w_n)w_n = s_n - I'(s_n w_n)w_n,$$

teríamos

$$1 = \frac{I'(s_n w_n)w_n}{s_n},$$

o que contradiz a hipótese (i). Portanto, existe $\delta > 0$ tal que $s_w \geq \delta$ para todo $w \in S$.

Seja $\mathcal{K} \subset S$ um compacto. Afirmamos que existe uma constante $C_{\mathcal{K}} > 0$ tal que $s_w \leq C_{\mathcal{K}}$ para todo $w \in \mathcal{K}$. Caso contrário, existiria uma sequência $(w_n) \subset \mathcal{K}$ tal que $s_n = s_{w_n} > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como antes, teríamos

$$0 = \alpha'(s_n) = s_n \|w_n\|^2 - I'(s_n w_n)w_n = s_n - I'(s_n w_n)w_n,$$

o que implica

$$1 = \frac{I'(s_n w_n)w_n}{s_n}.$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio à função $s \mapsto I(sw_n)$, concluímos que

$$\frac{I(s_n w_n)}{s_n} = I'(\bar{s}_n w_n)w_n,$$

em que $0 < \bar{s}_n < s_n$. Mas, de acordo com a hipótese (ii), temos

$$\frac{I'(\bar{s}_n w_n)w_n}{\bar{s}_n} < \frac{I'(s_n w_n)w_n}{s_n},$$

de modo que

$$\frac{I(s_n w_n)}{s_n^2} \leq \frac{I(s_n w_n)}{\bar{s}_n s_n} = \frac{I'(\bar{s}_n w_n)w_n}{\bar{s}_n} \leq \frac{I'(s_n w_n)w_n}{s_n} = 1.$$

o que contradiz a hipótese (iii). Portanto, $s_w \leq C_{\mathcal{W}}$ para todo w em um subconjunto compacto $\mathcal{W} \subset S$.

Vamos demonstrar na Proposição (2.17) **que Φ satisfaz a condição de Palais-Smale em $\mathcal{N}$**. Assumindo isto, seja (w_n) uma sequência de Palais-Smale para Ψ e coloque $u_n =: m(w_n) \in \mathcal{N}$. Então, pelo item (ii) do Corolário 2.10, (u_n) é uma sequência de Palais-Smale para Φ e, como Φ satisfaz a condição de Palais-Smale em $\mathcal{N}$, segue-se $u_n \to u$ depois de passar a uma subsequência, de onde obtemos $w_n \to m^{-1}(u)$. Logo Ψ satisfaz a condição de Palais-Smale.

Seja w_n uma sequência minimizante para Ψ. Pelo princípio variacional de Ekeland (veja o Teorema (B.3)) podemos assumir que $\Psi'(w_n) \to 0$ e pela condição de Palais-Smale, $w_n \to w$ depois de passar a uma subsequência. Logo w é um minimizador para Ψ, ou seja, $\Psi(w) = \Phi(m(w) = \Phi(u) = \inf_{u \in S} \Psi(u)$, e $\Psi'(w) = 0$ (veja o Teorema (A.8)). Isso implica que u é uma solução de estado fundamental para a equação $\Phi'(u) = 0$, uma vez que, pelo item (iii) do Corolário 2.10, $m(w) = u$ é um ponto crítico não trivial de Φ.

Assuma agora que I é par. Segue-se, então, que Φ também é, e, consequentemente, Ψ. De fato, por definição

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \Phi(u) = I(-u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \Phi(-u) \Rightarrow \Phi(u) = \Phi(-u),$$

ou seja, Φ é par. Logo, pelo item (v) do Corolário 2.10 segue-se que Ψ também é.

Pelo item (iii) do Corolário 2.10, temos $\inf_S \Psi = \inf_{\mathcal{N}} \Phi$. Daí, segue-se que $\inf_S \Psi > 0$ e, consequentemente, Ψ é limitada inferiormente. Dessa forma, como E é um espaço de dimensão infinita, $\Psi \in C^1(S, \mathbb{R})$ é limitada inferiormente e satisfaz a condição de Palais-Smale, então, pelo Teorema A.9, Ψ tem infinitos pares de pontos críticos e, novamente, pela primeira parte do item (iii) do Corolário 2.10, a equação $I'(u) = 0$ tem infinitos pares de soluções. ■

Observação 2.14. Note que não usamos a hipótese (iv) diretamente. A mesma será utilizada na demonstração de que Φ satisfaz a condição de Palais-Smale em $\mathcal{N}$. Da mesma forma, acontecerá no teorema abaixo. ◁

Em um dos problemas que trabalharemos precisaremos de uma extensão do resultado acima à espaços de Banach. Sendo assim, seja $I_0 \in C^1(E, \mathbb{R})$ par, positivamente homogêneo de grau $p > 1$ (i.e., $I_0(su) = s^p I_0(u), s > 0$) e tal que

$$c_0\|u\|^p \leq I_0(u) \leq c_0^{-1}\|u\|^p \tag{2.7}$$

para alguma constante $c_0 > 0$.

Teorema 2.15. *Seja E um espaço de Banach uniformemente convexo satisfazendo (A_1) e suponha que $\phi(u) = I_0(u) - I(u)$, onde,*
(i) $I'(u) = o(\|u\|^{p-1})$ quando $u \to 0$;
(ii) $s \mapsto \dfrac{I'(su)u}{s^{p-1}}$ é estritamente crescente para todo $u \neq 0$ e $s > 0$;
(iii) $\dfrac{I(su)}{s^p} \to \infty$ uniformemente para u em subconjuntos de $E \setminus \{0\}$ fracamente compactos quando $s \to \infty$;
(iv) I' é completamente contínuo;
(v) I_0 é fracamente semicontínuo, positivamente homogêneo de grau p, satisfaz (2.7) e

$$(I_0'(v) - I_0'(w))(v - w) \geq c_1(\|v\|^{p-1} - \|w\|^{p-1})(\|v\| - \|w\|)$$

para algum $c_1 > 0$ e todo $v,w \in E$.
Então a equação $\Phi'(u) = 0$ tem uma uma solução de estado fundamental. Além disso, se I é par, então esta equação tem infinitos pares de soluções.

Demonstração. Como no teorema 2.13, vamos mostrar que (A_2) e (A_3) são satisfeitas. Pela definição de Φ e pela homogeneidade de I_0 temos

$$\alpha_w(s) = \Phi(sw) = I_0(sw) - I(sw) = s^p I_0(w) - I(sw).$$

Por (i) e por (iii), $\alpha_w(s) > 0$ para $s > 0$ pequeno e $\alpha_w(s) < 0$ para $s > 0$ grande. De fato, por (i) temos que, para todo $w \in S$, $I'(sw) = o(\|sw\|^{p-1}) = o(s^{p-1})$, logo, $I(sw) = o(s^p)$ quando $sw \to 0$. Suponha que para $s > 0$ pequeno temos $\alpha_w(s) \leq 0$, ou seja,

$$s^p I_0(w) \leq I(sw).$$

Segue-se por 2.7 que

$$c_0 s^p \leq s^p I_0(w) \leq I(sw).$$

Daí, dividindo toda a desigualdade anterior por s^p temos

$$c_0 \leq \frac{I(sw)}{s^p}.$$

Como $s > 0$ é pequeno, fazendo $s \to 0$, segue que

$$c_0 \leq 0,$$

contradizendo o fato de ser $c_0 > 0$. Portanto, $\alpha_w(s) > 0$ para $s > 0$ pequeno.

Suponha, agora, que para $s > 0$ grande temos $\alpha_w(s) \geq 0$, ou seja, $s^p I_0(w) \geq I(sw)$. Novamente por 2.7 temos

$$c_0^{-1} s^p \geq s^p I_0(w) \geq I(sw).$$

Da mesma forma, dividindo toda a desigualdade anterior por s^p temos

$$c_0^{-1} \geq \frac{I(sw)}{s^p}.$$

Pretendemos, aqui, utilizar a hipótese (iii) do teorema que estamos demonstrando. Como E um espaço de Banach uniformemente Convexo(em particular, reflexivo), segue-se que S é um subconjunto fracamente compacto de $E\backslash\{0\}$. Daí, como $s > 0$ é grande, fazendo $s \to \infty$, segue-se por (iii) que

$$c_0^{-1} \geq \infty.$$

Novamente, um absurdo. Portanto, $\alpha_w(s) < 0$ para $s > 0$ grande.

Afirmamos, agora, a existência de um único s_w satisfazendo $\alpha'(s_w) = 0$. Note, primeiramente, que

$$\alpha_w'(s) = \frac{d}{ds}\Phi(sw) = ps^{p-1}I_0(w) - I'(sw)w = s^{p-1}\left(pI_0(w - \frac{I'(sw)}{s^{p-1}}\right).$$

Suponhamos que existam $0 < s_1 < s_2$ tal que $\alpha_w'(s_1) = \alpha_w'(s_2) = 0$. Então, temos

$$s_1^{p-1}\left(pI_0(w) - \frac{I'(s_1 w)w}{s_1^{p-1}}\right) = s_2^{p-1}\left(pI_0(w) - \frac{I'(s_2 w)w}{s_2^{p-1}}\right) = 0.$$

Como $s_1^{p-1}, s_2^{p-1} \neq 0$ segue-se que

$$pI_0(w) - \frac{I'(s_1 w)w}{s_1^{p-1}} = pI_0(w) - \frac{I'(s_2 w)w}{s_2^{p-1}},$$

consequentemente,

$$\frac{I'(s_1 w)w}{s_1^{p-1}} = \frac{I'(s_2 w)w}{s_2^{p-1}}.$$

Absurdo, uma vez que, por (ii), devemos ter

$$\frac{I'(s_1 w)w}{s_1^{p-1}} < \frac{I'(s_2 w)w}{s_2^{p-1}}.$$

Portanto, existe um único s_w satisfazendo $\alpha'(s_w) = 0$.

Afirmamos agora a existência de $\delta > 0$ tal que $s_w \geq \delta$ para todo $w \in S$. De fato, caso contrário, existiria uma sequência $\delta_n = 1/n$ e $w_n \in S$ tais que $s_n = s_{w_n} < 1/n$. Mas então, como

$$\alpha'_w(s_n) = ps_n^{p-1} I_0(w_n) - I'(s_n w_n)w_n = 0,$$

temos

$$pI_0(w_n) = \frac{I'(s_n w_n)w_n}{s_n^{p-1}}.$$

Por (2.7) segue-se que

$$pc_0 \leq \frac{I'(s_n w_n)w_n}{s_n^{p-1}} = pI_0(w_n)$$

e como vale (i) segue-se que

$$pc_0 \leq 0,$$

um absurdo , uma vez que, por hipótese, $p > 1$ e $c_0 > 0$. Portanto, existe $\delta > 0$ tal que $s_w \geq \delta$ para todo $w \in S$.

Seja $\mathcal{K} \subset S$ um compacto. Afirmamos que existe uma constante $C_{\mathcal{K}} > 0$ tal que $s_w \leq C_{\mathcal{K}}$ para todo $w \in \mathcal{K}$. Caso contrário, existiria uma sequência $(w_n) \subset \mathcal{K}$ tal que $s_n = s_{w_n} > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como antes, temos

$$\alpha'_w(s_n) = ps_n^{p-1} I_0(w_n) - I'(s_n w_n)w_n = 0,$$

o que implica

$$pI_0(w_n) = \frac{I'(s_n w_n)w_n}{s_n^{p-1}}.$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio à função $s \mapsto I(sw_n)$, concluímos que

$$\frac{I(s_n w_n)}{s_n} = I'(\bar{s}_n w_n)w_n,$$

em que $0 < \bar{s}_n < s_n$. Mas, de acordo com a hipótese (ii), temos

$$\frac{I'(\bar{s}_n w_n)w_n}{\bar{s}_n^{p-1}} < \frac{I'(s_n w_n)w_n}{s_n^{p-1}},$$

de modo que

$$\frac{I(s_n w_n)}{s_n^p} \leq \frac{I(s_n w_n)}{\bar{s}_n^{p-1} s_n} = \frac{I'(\bar{s}_n w_n)w_n}{\bar{s}_n^{p-1}} \leq \frac{I'(s_n w_n)w_n}{s_n^{p-1}} = pI_0(w_n) \leq pc_0^{-1}.$$

o que contradiz a hipótese (iii). Portanto, $s_w \leq C_{\mathcal{W}}$ para todo w em um subconjunto compacto $\mathcal{W} \subset S$.

Daqui em diante, a demonstração é idêntica à demonstração do teorema anterior. Note que para utilizar o Teorema A.8 precisamos garantir, dentre outros, que S é uma subvariedade de classe C^1, fato garantido pela hipótese (A_1). ■

Observação 2.16. Enquanto no Teorema 2.13, por ser E um espaço de Hilbert, a esfera S é uma C^∞-variedade, no teorema 2.15 S pode ser de classe C^1 apenas. Portanto é importante ter uma versão do Teorema A.9 que acontece para tal S. No próximo capítulo trabalharemos com um problema onde $S \in C^1$ mas $S \notin C^{1,1}$. $\triangleleft$

Para completar as provas dos Teoremas 2.13 e 2.15 ainda devemos mostrar que Φ satisfaz a condição de Palais-Smale em $\mathcal{N}$. Como (v) do Teorema 2.15 é automaticamente satisfeita se E é um espaço de Hilbert e $I_0(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2$, é suficiente mostrar isto para o teorema 2.13.

Proposição 2.17. *Assuma as hipóteses do teorema* 2.15. *Então:*
(i) *Se* $u_n \subset \mathcal{N}$ *é uma sequência tal que* $\sup_{n\in\mathcal{N}} \Phi(u_n) < \infty$*, então, passando a uma subsequência, temos* $u_n \rightharpoonup u \neq 0$ *quando* $n \to \infty$*, e existe* $s_u > 0$ *tal que* $s_u u \in \mathcal{N}$ *e*

$$\Phi(s_u u) \leq \liminf_{n\to\infty} \Phi(u_n) < \infty;$$

(ii) $\Phi|_N$ *é coercivo, isto é,* $\Phi(u_n) \to \infty$ *quando* $u_n \in N$, $\|u_n\| \to \infty$;
(iii) Φ *satisfaz a condição de Palais-Smale em* $\mathcal{N}$.

Demonstração. (a) Seja $(u_n) \subset \mathcal{N}$ uma sequência tal que $\Phi(u_n) \leq d \ \forall\ n$. Primeiramente afirmamos que u_n é limitada. De fato, se u_n não é limitada, então, $\|u_n\| \to \infty$ e, definindo, $v_n := \frac{u_n}{\|u_n\|}$ temos que $(v_n) \in S$. Como (v_n) é uma sequência limitada em um espaço reflexivo, então (v_n) admite uma subsequência (v_{n_k}) que converge fracamente. Consequentemente, $v_n := \frac{u_n}{\|u_n\|} \rightharpoonup v$ em E depois de passar a uma subsequência.Suponha $v = 0$. Como $(u_n) \in \mathcal{N}$, para cada $s > 0$ temos:

$$d \geq \Phi(u_n) = \Phi(\|u_n\| v_n) = \Phi(s_{v_n} v_n) \geq \Phi(s v_n), \tag{2.8}$$

uma vez que $sw \in \mathcal{N} \Leftrightarrow s = s_w$ e s_{v_n} é o máximo da função $\alpha_{v_n}(s) =: \Phi(sv_n)$. Por definição

$$\Phi(sv_n) = I_0(sv_n) - I(sv_n).$$

Pela p-homogeneidade de I_0 temos

$$I_0(sv_n) = s^p I_0(v_n).$$

Por (2.7), segue-se que

$$I_0(v_n) \geq c_0 \|v_n\|^p = c_0,$$

uma vez que $v_n \in S$. Isto implica que

$$s^p I_0(sv_n) \geq s^p c_0,$$

consequentemente,

$$\Phi(sv_n) \geq s^p c_0 - I_0(sv_n)),$$

o que implica que

$$d \geq \Phi(u_n) = \Phi(\|u_n\| v_n) = \Phi(s_{v_n} v_n) \geq \Phi(sv_n) \geq s^p c_0 - I_0(sv_n).$$

Note que assumindo (iv) do Teorema 2.15 temos que I é fracamente contínuo, ou seja,

$$I(sv_n) \to I(sv) = I(0) = 0.$$

Consequentemente,

$$d \geq \Phi(u_n) = \Phi(\|u_n\| v_n) = \Phi(s_{v_n} v_n) \geq \Phi(sv_n) \geq s^p c_0 - I_0(sv_n) \to c_0 s^p. \tag{2.9}$$

Isto produz uma contradição ao tomar $s > \left(\frac{d}{c_o}\right)^{\frac{1}{p}}$. De fato,

$$s > \left(\frac{d}{c_o}\right)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow s^p > \frac{d}{c_0} \Rightarrow c_0 s^p > c_0 \frac{d}{c_0} = d.$$

Então $v \neq 0$, o que garante que $I(v_n) \nrightarrow 0$, uma vez que $v_n \rightharpoonup v \Rightarrow I(v_n) \to I(v)$. Note que, por hipótese, $\Phi(0) = 0$ e, por (2.7), $I_0(0) = 0$, o que implica que $I(0) = 0$. Logo,

$$0 \leq \frac{\Phi(u_n)}{\|u_n\|^p} = \frac{I_0(u_n)}{\|u_n\|^p} - \frac{I(u_n)}{\|u_n\|^p} \leq \frac{1}{c_0} - \frac{I(\|u_n\| v_n)}{\|u_n\|^p} \to -\infty \tag{2.10}$$

quando $n \to \infty$ por (iii) do teorema 2.15 e pelo fato que, por (2.7),

$$c_0 \leq \frac{I_0(u_n)}{\|u_n\|^p} \leq c_0^{-1}.$$

Novamente,temos uma contradição. Segue-se que (u_n) é limitada e, então, pela reflexividade de E, segue-se que $u_n \rightharpoonup u$ depois de passar a uma subsequência. Se $u = 0$, vemos como em (2.9) que

$$d \geq \Phi(u_n) \geq \Phi(su_n) \geq d_0 s^p - I(su_n) \to d_0 s^p$$

para todo $s > 0$, sendo $d_0 = c_0 \inf_{\mathcal{N}} \|u\| > 0$. Novamente temos uma contradição.Logo, $u \neq 0$.

Vamos mostrar que $\Phi(s_u u) \leq \liminf_{n\to\infty} \Phi(u_n)$. De fato, como I é sequencialmente fracamente contínuo, temos que

$$I(s_u u_n) \to I(s_u u),$$

em particular,

$$\limsup_{n\to\infty} I(s_u u_n) = I(s_u u). \tag{2.11}$$

Como, por hipótese, I_0 é fracamente semicontínuo inferiormente, temos que

$$I_0(s_u u) \leq \liminf_{n\to\infty} I_0(s_u u_n). \tag{2.12}$$

Dai, como

$$\Phi(s_u u) = I_o(s_u u) - I(s_u u),$$

segue-se por (2.11) , (2.12) e do fato que se $u_n \in \mathcal{N}$ implica que $\Phi(s_u u_n) \leq \Phi(u_n)$, que

$$\begin{aligned}
\Phi(s_u u) &\leq \liminf_{n\to\infty} I_0(s_u u_n) - \limsup_{n\to\infty} I(s_u u_n) \\
&= \liminf_{n\to\infty} I_0(s_u u_n) + \liminf_{n\to\infty} -I(s_u u_n) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} (I_0(u) s u_n) - I(s_u u_n)) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \Phi(s_u u_n) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \Phi(u_n)
\end{aligned}$$

Assim, provamos (i).

Suponha, por absurdo, que $\Phi(u_n) \nrightarrow \infty$ quando $u_n \in \mathcal{N}$ e $\|u_n\| \to \infty$. Então, temos que $\sup_{n \in \mathcal{N}} < \infty$. Provamos acima que, nesse caso, (u_n) é limitada. Mas então $\|u_n\| \nrightarrow \infty$, um absurdo. Portanto, (ii) também está provado.

Finalmente, seja $(u_n) \subset \mathcal{N}$ uma sequência de Palais-Smale para Φ. Vamos mostrar que (u_n) possui uma subsequência convergente. Por definição de sequências de Palais-Smale, temos que $\Phi(u_n)$ é limitada e

$$\Phi'(u_n) \to 0. \tag{2.13}$$

Pelo item (i), $u_n \rightharpoonup u$ depois de passar a uma subsequência. Além disso, pela definição de

Φ temos que

$$\Phi'(u_n) = I_0'(u_n) - I'(u_n) \to 0 \tag{2.14}$$

e, por ser I completamente contínuo, segue-se que

$$I'(u_n) \to I'(u) \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

logo, por (5) do teorema 2.15,

$$[I_0'(u_n) - I_0'(u)](u_n - u) \geq c_1(\|u_n\|^{p-1} - \|u\|^{p-1})(\|u_n\| - \|u\|).$$

Note que o segundo membro da desigualdade anterior é maior ou igual a 0. Vamos provar que $[I_0'(u_n) - I_0'(u)](u_n - u) = o(1)$. De fato, por (2.13) temos que $I_0'(u_n) \to I'(u_n)$ e como $I'(u_n) \to I'(u)$, segue, por transitividade, que $I_0'(u_n) \to I'(u)$. Como $u_n \rightharpoonup u$, temos que $u_n - u \rightharpoonup 0$. Portanto, $u_n - u$ é uma sequência limitada em E e, como E é um espaço de Banach uniformemente convexo(em particular, reflexivo), passando a uma subsequência $(u_n - u)$ converge fortemente em E, consequentemente, $u_n \to u$. Temos que

$$[I_0'(u_n) - I_0'(u)](u_n - u) = [I_0'(u_n) - I'(u_n)](u_n - u) + [I'(u_n) - I'(u)](u_n - u) + [I'(u) - I_0'(u)](u_n - u).$$

Por definição de convergência fraca, como $u_n - u \rightharpoonup 0$ e $I' - I_0' \in E^*$, temos que $[I'(u) - I_0'(u)](u_n - u) \rightharpoonup 0$. Portanto,

$$[I_0'(u_n) - I_0'(u)](u_n - u) = o(1).$$

Segue-se que $\|u_n\| \to \|u\|$ e, portanto, $u_n \to u$ pela convexidade uniforme de E. Segue-se, então, que Φ satisfaz a condição de Palais-Smale em $\mathcal{N}$, o que prova (iii). ∎

O uso da observação seguinte será conveniente no próximo capítulo.

Observação 2.18. A prova da Proposição 2.17 ainda continua válida se a condição (v) do Teorema 2.15 for substituída por uma condição mais geral: a de que $I_0 = I_1 + I_2$, com I_1 satisfazendo (v) e I_2 sendo um funcional com derivada completamente contínua. Ou seja, estamos tomando $\Phi(u)$ na forma $\Phi(u) = I_1(u) + I_2(u) - I(u)$. De fato, Seja $(u_n) \subset \mathcal{N}$ tal que $\Phi(u_n) \leq d$ para todo n. Como na demonstração da Proposição 2.17 e sem nenhuma diferença mostra-se que (u_n) é limitada e, logo, $u_n \to u \neq 0$ depois de passar a uma subsequência. Como na Proposição 2.17, sendo I sequencialmente fracamente contínuo, temos que

$$I(s_u u_n) \to I(s_u u),$$

em particular,

$$\limsup_{n\to\infty} I(s_u u_n) = I(s_u u). \tag{2.15}$$

Como, por hipótese, I_1 é fracamente semicontínuo inferiormente, temos que

$$I_1(s_u u) \leq \liminf_{n\to\infty} I_1(s_u u_n). \tag{2.16}$$

Dai, como

$$\Phi(s_u u) = I_1(s_u u) + I_2(s_u u) - I(s_u u)$$

segue-se por (2.15) ,(2.16) e, como antes, pelo fato que $u_n \in \mathcal{N}$ implica que $\Phi(s_u u_n) \leq \Phi(u_n)$, que

$$\begin{aligned}
\Phi(s_u u) &\leq \liminf_{n\to\infty} I_1(s_u u_n) + \liminf_{n\to\infty} I_2(s_u u_n) - \limsup_{n\to\infty} I(s_u u_n)\\
&= \liminf_{n\to\infty} I_1(s_u u_n) + \liminf_{n\to\infty} I_2(s_u u_n) + \liminf_{n\to\infty} -I(s_u u_n)\\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \big(I_1(s_u u_n) + I_2(s_u u_n) - I(s_u u_n)\big)\\
&= \liminf_{n\to\infty} \Phi(s_u u_n)\\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \Phi(u_n)
\end{aligned}$$

A demonstração do item (ii) continua idêntica à demonstração que fornecemos na Proposição 2.17. Para mostrar (iii) agora, adotemos um raciocínio análogo ao adotado na demonstração da proposição do mesmo item na Proposição 2.17.

Seja $(u_n) \subset \mathcal{N}$ uma sequência de Palais-Smale para Φ. Vamos mostrar que (u_n) possui uma subsequência convergente. Por definição de sequências de Palais-Smale, temos que $\Phi(u_n)$ é limitada e

$$\Phi'(u_n) \to 0. \tag{2.17}$$

Por (i) $u_n \rightharpoonup u$ depois de passar a uma subsequência. Além disso, pela definição de Φ temos que

$$\Phi'(u_n) = I_1'(u_n) + I_2'(u_n) - I'(u_n) \to 0 \tag{2.18}$$

e, por ser I completamente contínuo, temos que

$$I'(u_n) \to I'(u) \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Por (v) do teorema 2.15,

$$[I_1'(u_n) - I_1'(u)](u_n - u) \geq c_1(\|u_n\|^{p-1} - \|u\|^{p-1})(\|u_n\| - \|u\|).$$

Note que, como antes, o segundo membro da desigualdade anterior é maior ou igual a 0. Vamos provar que $[I_1'(u_n) - I_1'(u)](u_n - u) = o(1)$. De fato, por (2.17) temos que $I_1'(u_n) + I_2'(u_n) - I'(u_n) \to 0$. Por hipótese, temos que $I_2'(u_n) \to I_2'(u)$ e que $I'(u_n) \to I'(u)$ quando $n \to \infty$. Defina o funcional $J = I_2 - I$. Então,

$J'(u_n) \to J'(u)$ e $I_1'(u_n) \to I'(u_n) - I_2(u_n) = -J(u_n) \to -J(u)$ quando $n \to \infty$.
Note que
$(I_1'(u_n) - J'(u))(u_n - u) = (I_1'(u_n) - J'(u_n))(u_n - u) + (J'(u_n) - J'(u))(u_n - u)) + (J'(u) - I_1'(u_n))(u_n - u)$.
Como $u_n \rightharpoonup u$, temos que $u_n - u \rightharpoonup 0$. Portanto, $u_n - u$ é uma sequência limitada em E, e como E é um espaço de Banach uniformemente convexo(em particular, reflexivo)passando a uma subsequência $(u_n - u)$ converge fortemente em E, consequentemente, $u_n \to u$. Por definição de convergência fraca, como $u_n - u \rightharpoonup 0$ e $I_1' - J' \in E^*$, temos que $[I_1'(u_n) - J'(u_n)](u_n - u) \rightharpoonup 0$. Portanto,

$$[I_1'(u_n) - I_1'(u)](u_n - u) = o(1).$$

Segue-se que $\|u_n\| \to \|u\|$ e, consequentemente, $u_n \to u$ pela convexidade uniforme de E. Portanto, Φ satisfaz a condição de Palais-Smale em $\mathcal{N}$. $\triangleleft$

Capítulo 3

Aplicações

Os próximos problemas descrevem situações em que o método da variedade de Nehari pode ser aplicado para encontrar estados fundamentais e soluções múltiplas de problemas de fronteira elíptico não lineares. Usaremos esse método também para provarmos a existêcia de soluções de menor energia com sinais trocados para nossos problemas, ou seja, uma solução $u \in \mathcal{N}_{sc}$ com $\Phi(u) = c_{sc} \geq 2c$, em que $\mathcal{N}_{sc} := \{u \in E \,:\, u^{\pm} \in \mathcal{N}\}$, $c_{sc} = \inf_{u \in \mathcal{N}_{sc}} \Phi(u)$, com $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \min\{u, 0\}$ denotando as parte positiva e negativa de u, respectivamente.

3.1 O problema para o Laplaciano

Consideremos inicialmente o problema (1.1):

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u &= f(x,u), \quad x \in \Omega \\ \qquad u &= \quad 0, \qquad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

em que λ é um parâmetro real e $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfaz a restrição de crescimento

$$|f(x,u)| \leq a(1 + |u|^{q-1}) \tag{3.2}$$

para algum $a > 0$ e $2 < q < 2^*$. Um exemplo simples de função satisfazendo a condição (3.2) é dado por

$$\begin{aligned} f \colon \Omega \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x\ ,\ u) &\mapsto |u|^{q-2}u \end{aligned}$$

sendo $2 < q < 2^*$.

Vamos supor que $\lambda < \lambda_1$, sendo que λ_1 denota o primeiro autovalor de $-\Delta$ em Ω. Como $\lambda < \lambda_1$, podemos introduzir em $H_0^1(\Omega)$ uma norma equivalente àquela utilizada na Seção 1.1:

$$\|u\| = \left(\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda u^2 \right) \mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

Definimos então

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda u^2\right) \mathrm{d}x - \int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\|u\|^2 - I(u),$$

em que, como antes, $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)\,\mathrm{d}s$.

Pelo Teorema 1.4, $\Phi \in C^1(E,\mathbb{R})$, I' é completamente contínuo e os pontos críticos de Φ são soluções de (1.1).

Na demonstração do próximo resultado aplicaremos o Teorema 2.13.

Teorema 3.1. *Suponha que $\lambda < \lambda_1$. Se a função f satisfizer a restrição de crescimento (3.2) e*

(i) *$f(x,u) = o(u)$ uniformemente em x quando $u \to 0$;*

(ii) *$u \to \dfrac{f(x,u)}{|u|}$ for estritamente crescente em $(-\infty,0)$ e $(0,\infty)$;*

(iii) *$\dfrac{F(x,u)}{u^2} \to \infty$ uniformemente em x quando $|u| \to \infty$,*

então a equação (3.1) tem uma solução de estado fundamental. Além disso, se f for ímpar em u, então (3.1) tem infinitos pares de soluções.

Lembramos que $c = \inf_{u\in\mathcal{N}} \Phi(u)$ e que uma solução $u_0 \in \mathcal{N}$ de estado fundamental satisfaz $\Phi(u_0) = c$.

Demonstração. Decorre de (i) e do Teorema 1.4 que $I'(u) = o(\|u\|)$ quando $u \to 0$. Assim, a hipótese (i) do Teorema 2.13 está satisfeita.

Afirmamos que (ii) implica que $s \mapsto I'(su)u/s$ é estritamente crescente para $u \neq 0$ e $s > 0$. De fato, de acordo com o Lema 1.3, temos

$$I'(u)v = \int_\Omega f(x,u)v\,\mathrm{d}x \quad \forall \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Consequentemente, denotando

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega \,:\, u(x) > 0\} \qquad \text{e} \qquad \Omega^- = \{x \in \Omega \,:\, u(x) < 0\},$$

para $0 < s_1 < s_2$ e x tal que $u(x) \neq 0$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{I'(s_1u)u}{s_1} - \frac{I'(s_1u)u}{s_2} &= \int_\Omega \frac{f(x,s_1u)u}{s_1}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{f(x,s_2u)u}{s_2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \left(\frac{f(x,s_1u)}{|s_1u|} - \frac{f(x,s_2u)}{|s_2u|}\right) u|u|\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega^+} \left(\frac{f(x,s_1u)}{s_1u} - \frac{f(x,s_2u)}{s_2u}\right) u^2\,\mathrm{d}x \\
&\qquad + \int_{\Omega^-} -\left(\frac{f(x,s_1u)}{s_1u} - \frac{f(x,s_2u)}{s_2u}\right) (-u^2)\,\mathrm{d}x \\
&< 0,
\end{aligned}$$

uma vez que, por (ii), se $0 < s_1 < s_2$ temos

$$\frac{f(x,s_1)}{s_1} < \frac{f(x,s_2)}{s_2}.$$

Isso mostra que a hipótese (ii) do Teorema 2.13 está satisfeita.

Para verificarmos a hipótese (iii) do Teorema 2.13, sejam $\mathcal{W} \subset E \setminus \{0\}$ um conjunto fracamente compacto e $(u_n) \subset \mathcal{W}$. Note que é suficiente mostrar que, se $s_n \to \infty$ quando $n \to \infty$, então o mesmo acontece com uma subsequência de $I(s_n u_n)/s_n^2$.

Podemos supor, passando a uma subsequência, que $u_n \rightharpoonup u \in E \setminus \{0\}$ e $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. Como $|s_n u_n(x)| \to \infty$ sempre que $u(x) \neq 0$, definindo a função g_j para tais pontos x por $g_j(x) = F(x, s_n u_j)u_j^2/(s_n u_j)^2 = F(x, s_n u_j)/s_n^2$, temos que g_j é contínua e, portanto, mensurável.

Afirmamos que $g_j \geq 0$. Para mostrar nossa afirmação basta verificar que $F \geq 0$. A hipótese (ii) garante que $f(x,u)/|u|$ é sempre crescente para $u \neq 0$. Pela hipótese (i) temos

$$h(x,u) = \lim_{u \to 0} \frac{f(x,u)}{|u|} = 0 \quad \forall\, x \in \Omega,$$

o que implica que podemos definir $h(x,0) = 0$. A hipótese (ii) então implica que $f(x,u)$ deve ser negativo para $u < 0$ e positivo para $u > 0$. Assim, o integrando na definição de F é positivo, se $u > 0$, e negativo, se $u < 0$. Isso nos mostra que F sempre é não negativa.

Logo, pelo Lema de Fatou segue-se que

$$\int_\Omega \liminf g_j \, \mathrm{d}x \leq \int_\Omega g_j \, \mathrm{d}x \quad \text{para todo } j,$$

o que implica, em particular, que

$$\int_\Omega \frac{F(x, s_n u)u^2}{(s_n u)^2} \, \mathrm{d}x \leq \int_\Omega \frac{F(x, s_n u_n)u_n^2}{(s_n u_n)^2} \, \mathrm{d}x.$$

Mas, de acordo com (iii),

$$\int_\Omega \frac{F(x, s_n u)u^2}{(s_n u)^2} \, \mathrm{d}x \to \infty \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

concluímos que

$$\int_\Omega \frac{F(x, s_n u_n)u_n^2}{(s_n u_n)^2} \, \mathrm{d}x \to \infty \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

ou seja,

$$\frac{I(s_n u_n)}{s_n^2} = \int_\Omega \frac{F(x, s_n u_n)u_n^2}{(s_n u_n)^2} \, \mathrm{d}x \text{ quando } n \to \infty,$$

uniformemente para $u \in \mathcal{K}$.

Por fim, (iv) do Teorema 2.13 é assegurada pelo Teorema A.8.

Agora, pelo Teorema 2.13 a equação (3.1) tem uma solução de estado fundamental. Se f é ímpar em u, temos que F é par em u e, consequentemente, I também é par em u. Logo, pelo, Teorema 2.13, segue-se que (3.1) tem infinitos pares de soluções. ■

Na sequência, mostraremos que cada solução de estado fundamental u_0 é positiva ou negativa. Denotemos por $u^+ := \max\{u, 0\}$ e por $u^- := \min\{u, 0\}$ as partes positiva e negativa de u, respectivamente.

Observação 3.2. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então $u^+, u^- \in H_0^1(\Omega)$. ◁

Lema 3.3. *Seja u uma solução de sinais trocados, ou seja, uma solução que assume tanto valores positivos quanto negativos. Então $u^\pm \in \mathcal{N}$.*

Demonstração. Vamos mostrar apenas que $u^+ \in \mathcal{N}$, pois a outra demonstração é inteiramente análoga.

Afirmamos que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u^+ \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u^+ \cdot \nabla u^+ \, \mathrm{d}x \tag{3.3}$$

implica

$$\Phi'(u)u^+ = \Phi'(u^+)u^+,$$

o que garante que $u^+ \in \mathcal{N}$, pois $\Phi'(u)u^+ = 0$.

Para provar nossa afirmação, basta notar que, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\Phi'(u)v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega uv \, \mathrm{d}x - \int_\Omega f(x,u)v \, \mathrm{d}x$$

e então tomar $v = u^+$. ■

Na sequência, considere o lema abaixo. Embora seja muito simples, o mesmo será muito útil no restante do trabalho.

Lema 3.4. $\Phi(u) = \Phi(u^+) + \Phi(u^-)$.

Demonstração. De fato, uma vez que u^+ é nula quando u^- é positiva e vice-versa, resulta

$$I\left(u^+ + u^-\right) = \int_0^{u^+ + u^-} f(x,s) \, \mathrm{d}s = \int_0^{u^+} f(x,s) \, \mathrm{d}s + \int_0^{u^-} f(x,s) \, \mathrm{d}s,$$

o que implica

$$F(x, u^+ + u^-) = F(x, u^+) + F(x, u^-).$$

Daí,

$$I\left(u^+ + u^-\right) = \int_\Omega F(x, u^+ + u^-) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega F(x, u^+) \, \mathrm{d}x + \int_\Omega F(x, u^-) \, \mathrm{d}x = I(u^+) + I(u^-).$$

Consequentemente, temos

$$\begin{aligned}
\Phi(u) = \Phi(u^+ + u^-) &= \frac{1}{2}\|u^+ + u^-\|^2 - I(u^+ + u^-) \\
&= \frac{1}{2}\|u^+\|^2 + (u^+ \cdot u^-) + \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - I(u^+) - I(u^-) \\
&= \frac{1}{2}\|u^+\|^2 + \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - I(u^+) - I(u^-) \\
&= \left(\frac{1}{2}\|u^+\|^2 - I(u^+)\right) + \left(\frac{1}{2}\|u^-\|^2 - I(u^-)\right) \\
&= \Phi(u^+) + \Phi(u^-)
\end{aligned}$$

■

Proposição 3.5. *Seja u_0 uma solução de estado fundamental. Então*

$$u_0 \geq 0 \quad ou \quad u_0 \leq 0.$$

Demonstração. Suponha que u_0 tenha partes positiva e negativa. Como $u_0^\pm \in \mathcal{N}$, pelo Lema (3.4) temos:

$$c = \Phi(u_0) = \Phi(u_0^+) + \Phi(u_0^-) \geq 2c,$$

um absurdo. ■

Note que, aplicando a desigualdade de Harnack, podemos concluir que $u_0 > 0$ ou $u_0 < 0$ em Ω.

Observação 3.6. Um resultado conhecido (veja [5]) garante que se f satisfizer a condição de crescimento (3.2), a hipótese (i) do Teorema 3.1, bem como a condição de Ambrosetti-Rabinowitz dada por

(AR) Existem $\mu > 2$ e $R > 0$ tais que

$$0 < \mu F(x,u) \leq f(x,u)u \quad \forall \ |u| > R$$

então o problema (1.1) possui uma solução positiva. Mais do que isso, se f for ímpar em u, então (3.1) possui infinitas soluções

Um exemplo típico de função f que satisfaz não apenas essas condições, mas todas as hipóteses do Teorema 3.1 é dado por

$$f(x,u) = |u|^{q-2}u,$$

para $2 < q < 2^*$. Por outro lado, se tomarmos $f(x,u) = u|g(u)|$ e escolhermos adequadamente a função g, teremos exemplos satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.1 mas não satisfazem a hipótese (AR): veja [1, Remark 17]. ◁

O nosso próximo resultado aborda a existência de soluções com sinais trocados e é devido a Liu e Wang [31]. Para isto, definimos

$$\mathcal{N}_{sc} = \{u \in E : u^{\pm} \in \mathcal{N}\} \qquad \text{e} \qquad c_{sc} := \inf_{u \in \mathcal{N}_{sc}} \Phi(u).$$

Como $u^{\pm} \in \mathcal{N}$, vemos que toda solução de sinais trocados de (3.1) pertence a $\mathcal{N}_{sc}$.

Teorema 3.7. *Sob as hipóteses do Teorema 2.13, o problema* (3.1) *admite uma solução de menor energia com sinais trocados, isto é, uma solução $u \in \mathcal{N}_{sc}$ satisfazendo $\Phi(u) = c_{sc} \geq 2c$.*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset \mathcal{N}_{sc}$ uma sequência minimizante, isto é,

$$\Phi(u_n) \to c_{sc} \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Como $\Phi(u_n) = \Phi(u_n^+) + \Phi(u_n^-)$ e $\Phi(u_n^{\pm}) \geq c > 0$ para todo n, podemos concluir que $\Phi(u_n^{\pm})$ é limitada. De fato, como $\Phi(u_n^{\pm}) > 0$, temos $\Phi(u_n^+) = \Phi(u_n) - \Phi(u_n^-) > 0$, mostrando que $\Phi(u_n) > \Phi(u_n^-)$. Como $\Phi(u_n)$ é limitada, temos que $\Phi(u_n^-)$ é limitada. Analogamente para $\Phi(u_n^+)$.

Logo, pela Proposição 2.17, $u_n^+ \rightharpoonup u_1 \neq 0$ e $u_n^- \rightharpoonup u_2 \neq 0$. Definindo $\tilde{u} = u_1 + u_2$, temos $u_n \rightharpoonup \tilde{u}$ quando $n \to \infty$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos assumir convergência em quase todo ponto. Daí decorre que $u_1 u_2 \equiv 0$. Além disso, definindo $u = s_{u_1} u_1 + s_{u_2} u_2 = u^+ + u^-$, pelo Lema 3.4 temos:

$$\begin{aligned} 2c \leq \Phi(u) &= \Phi(s_{u_1} u_1) + \Phi(s_{u_2} u_2) \\ &\leq \liminf_{n \to \infty} \Phi(u_n^+) + \liminf_{n \to \infty} \Phi(u_n^-) \\ &\leq \liminf_{n \to \infty} (\Phi(u_n^+) + \Phi(u_n^-)) = \liminf_{n \to \infty} \Phi(u_n) = c_{sc}, \end{aligned}$$

a penúltima desigualdade sendo consequência da Proposição 2.17 (i), enquanto a última igualdade decorre da escolha da sequência (u_n).

Dessa forma,

$$2c \leq \Phi(u) \leq c_{sc}. \tag{3.4}$$

Além disso, por definição, temos

$$c_{sc} \leq \Phi(u). \tag{3.5}$$

De (3.4) e (3.5) decorre que

$$\Phi(u) = c_{sc} \geq 2c.$$

Mostraremos agora que $\Phi'(u) = 0$. Para tal usaremos o Lema da Deformação (veja o Apêndice F) com $S = \bar{B}_\delta(u)$ em que $\delta > 0$. Essa escolha de S determina que $S_{2\delta} = \bar{B}_{3\delta}(u)$. Escolhemos então $c = c_{sc}$. Para mostrar que $\Phi'(u) = 0$, apresentaremos o seguinte resultado, que demonstraremos posteriormente:

Lema 3.8. *Se s, t forem números reais maiores do que* 0 *e ao menos um deles for diferente* *de* 1, *então temos*

$$\Phi(su^+ + tu^-) = \Phi(su^+) + \Phi(tu^-) < \Phi(u^+) + \Phi(u^-) = c_{sc}.$$

Suponhamos então $\Phi'(u) \neq 0$. Pela continuidade da aplicação $\Phi' \colon H_0^1(\Omega) \to (H_0^1(\Omega))^*$, existem $\delta > 0$ e $\mu > 0$ tais que

$$v \in \bar{B}_{3\delta}(u) \qquad \Rightarrow \qquad \|\Phi'(v)\| \geq \mu. \tag{3.6}$$

Seja $D = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \times [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ e $g(s,t) = su^+ + tu^-$. Segue-se do Lema 3.8 que $\Phi(g(s,t)) = c_{sc}$ se, e somente se, $s = t = 1$, com $\Phi(g(s,t)) < c_{sc}$ caso contrário. Logo,

$$\beta := \max_{\partial D} (\Phi \circ g) < c_{sc} \tag{3.7}$$

uma vez que $(1,1) \notin \partial D$.

Seja $\varepsilon = \min\left\{\frac{c_{sc}-\beta}{4}, \frac{\mu\delta}{8}\right\}$. (Essa escolha de ε vai ser justificada na sequência-veja Observação 3.9 logo abaixo) Note que a definição de ε imediatamente nos dá, como consequência de (3.6),

$$\|\Phi'(v)\| \geq \mu \geq \frac{8\varepsilon}{\delta}, \quad \forall\, v \in \bar{B}_{3\delta}(u).$$

Então, para este ε, o Lema da deformação implica a existência de uma deformação η tal que

(*i*) $\eta(1,v) = v$ se $v \notin \Phi^{-1}([c_{sc} - 2\varepsilon, c_{sc} + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$.

(*ii*) $\Phi(\eta(1,v)) \leq c_{sc} - \varepsilon$ para todo $v \in E$ com $\|v - u\| \leq \delta$ e $\Phi(v) \leq c_{sc} + \varepsilon$;

(*iii*) $\Phi(\eta(1,v)) \leq \Phi(v)$ para todo $v \in E$.

Pelo item *iii*)

$$\Phi(\eta(1, g(s,t))) \leq \Phi(g(s,t)) < c_{sc} \quad \text{se} \quad (s,t) \neq (1,1),$$

onde a desigualdade anterior se deve ao Lema 3.8. Se $(s,t) = (1,1)$, então

$$g(s,t) = u$$

e *ii*) se aplica (com $v = u$). Portanto,

$$\max_{(s,t)\in D} \Phi(\eta(1, g(s,t))) < c_{sc} \tag{3.8}$$

Observação 3.9. Desejamos que $\eta(1, g(s,t)) = g(s,t)$ para todo $(s,t) \in \partial D$ e por (*i*) isto acontecerá se provarmos que $g(s,t)$ não pertence à $\Phi^{-1}([c_{sc} - 2\varepsilon, c_{sc} + 2\varepsilon]$. Então, se ε for como definido acima, teremos que $\varepsilon \leq \frac{c_{sc}-\beta}{4}$ e, como vale $\Phi(g(s,t)) < \beta < c_{sc}$ para todo $(s,t) \in \partial D$ (veja (3.7)), concluímos que $\Phi(g(s,t)) < c_{sc} - 2\varepsilon$ e segue-se o resultado. $\lhd$

Vamos provar que $\eta(1, g(D)) \cap \mathcal{N}_{sc} \neq \emptyset$. (Note que isto produzirá uma contradição: De fato, suponha a existência de $u_0 \in E$ tal que $u_0 \in \eta(1, g(D)) \cap \mathcal{N}_{sc}$. Então, existe $(s_0, t_0) \in D$

tal que
$$\eta(1, g(s_0, t_0)) = u_0.$$
Por (3.8) temos
$$\Phi(u_o) = \Phi(\eta(1, g(s_0, t_0))) \leq \max_{(s,t)\in D} \Phi(\eta(1, g(s,t))) \leq c_{sc},$$
fato que contradiz a definição de c_{sc}.)

Definamos as aplicações
$$h(s,t) := \eta(1, g(s,t)),$$
$$\Psi_0(s,t) := (\Phi'(su^+)u^+, \Phi'(tu^-)u^-),$$
$$\Psi_1(s,t) := \left(\frac{1}{s}\Phi'(h^+(s,t))h^+(s,t), \frac{1}{t}\Phi'(h^-(s,t))h^-(s,t)\right).$$

Considere
$$\alpha(s) = \Phi(su^+).$$
Como $u^+ \in \mathcal{N}$ segue-se que
$$\alpha'(s) = \Phi'(su^+)u^+ = 0 \Leftrightarrow s = 1$$
e
$$\alpha'(s) = \Phi'(su^+)u^+ > 0$$
para $0 < s < 1$, isto é, antes de su^+ intersectar $\mathcal{N}$ e
$$\alpha'(s) = \Phi'(su^+)u^+ < 0$$
para $s > 1$, isto é, depois da intersecção de su^+ com $\mathcal{N}$ (veja a condição (A_2). De forma similar, o mesmo acontece com u^-. (Este fato garante que $0 \notin \partial\Psi_0(D)$).

Consequentemente, a fórmula produto para o grau (veja Proposição (G.4)) fornece
$$\deg(\Psi_0, \text{int } D, 0)) = 1.$$

Segue-se de (3.7) e da propriedade $i)$ de η que
$$g = h \quad \text{em } \partial D.$$
(veja Observação (3.9)). Consequentemente,
$$\Psi_1 = \Psi_0 \quad \text{em } \partial(\text{int } D)$$
e
$$\deg(\Psi_1, \text{int } D, 0) = \deg(\Psi_0, \text{int } D, 0) = 1.$$

Portanto,

$$\Psi_1(s,t) = 0$$

para algum $(s,t) \in \text{int } D$.(veja Proposição (G.3)(iv)). Logo,

$$\eta(1, g(s,t)) = h(s,t) \in \mathcal{N}_{sc}.$$

Concluímos, então, que u é um ponto crítico de Φ. ■

Demonstração do Lema 3.8. Note, primeiramente que todas as igualdades já foram verificadas anteriormente, restando-nos somente mostrar a desigualdade estrita.

O fato que $u^{\pm}$ pertence a $\mathcal{N}$ nos diz que, para $s \neq 1$ temos

$$\Phi(su^{\pm}) \leq \Phi(u^{\pm}).$$

Relembre-se que

$$\Phi(s_u u) = \max_{s>0} \Phi(su)$$

e que

$$u \in \mathcal{N} \Leftrightarrow s_u = 1.$$

Portanto, é suficiente mostrar que se $s \neq 1$, então $\Phi(su^{\pm}) \neq \Phi(u^{\pm})$. Vamos mostrar para o caso $u = u^+$. (O caso $u = u^-$ é análogo).

Suponhamos, por absurdo, que é válida a igualdade

$$\Phi(su^+) = \frac{1}{2}\|su^+\|^2 - I(su^+) = \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - I(u^+) = \Phi(u^+) \tag{3.9}$$

para algum $s > 0$, que suporemos maior do que 1. (O caso $0 < s < 1$ é análogo.)

Como $u = u^+$ segue-se que $u^+ > 0$ e, consequentemente,

$$\frac{1}{2}\|su^+\|^2 > \frac{1}{2}\|u^+\|^2.$$

Dessa forma, para mantermos a igualdade em (3.9) devemos ter

$$I(su^+) < I(u^+),$$

e vamos mostrar que, pela hipótese (ii) do Teorema (3.1) isto não pode acontecer. De fato, como $u^+ > 0$ e $s > 1$, segue-se que

$$su^+ > u^+.$$

Então, por (ii) do Teorema (3.1) resulta que

$$f(x, u^+) < \frac{f(x, su^+)}{s}.$$

Consequentemente,

$$\int_0^{u^+} f(x,t)\,\mathrm{d}t < \int_0^{u^+} \frac{f(x,st)}{s}\,\mathrm{d}t = \int_0^{su^+} \frac{f(x,w)}{s^2}\,\mathrm{d}w$$

Dessa forma,

$$I(u^+) = \int_\Omega \int_0^{u^+} f(x,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x < \int_\Omega \int_0^{su^+} \frac{f(x,w)}{s^2}\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}x = \frac{1}{s^2} I(su^+).$$

Como $s > 1$, temos

$$\frac{1}{s^2} < 1$$

e, consequentemente,

$$I(u^+) < I(su^+),$$

contradizendo, assim, nossa suposição anterior.

3.2 O problema para o p-Laplaciano

Consideremos agora o problema (1.5):

$$\begin{cases} -\triangle_p u - \lambda |u|^{p-2} u = & f(x,u), \quad x \in \Omega \\ \qquad u = 0, & \qquad\quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.10}$$

Seja Ω um domínio limitado. Sabemos, então, que

$$\lambda_1 := \inf_{\substack{w \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega |u|^p\,\mathrm{d}x}$$

é atingido e é o primeiro autovalor de Dirichlet do p-laplaciano.(Para mais detalhes, veja, por exemplo, [11] ou seção 7.5A em [23].)

Considere

$$I_0(u) := \frac{1}{p} \int_\Omega (|\nabla u|^p - \lambda |u|^p)\,\mathrm{d}x \equiv \frac{1}{p} \|u\|^p - I_1(u).$$

Lema 3.10. *Se $\lambda < \lambda_1$, então I_0 é positivamente p-homogêneo e satisfaz* (2.7).

Demonstração. Segue da definição de I_0 e da hipótese $\lambda < \lambda_1$.

■

O seguinte resultado abaixo é uma generalização do Teorema (3.1).

Teorema 3.11. *Suponha que $\lambda < \lambda_1$ e $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfaz* (3.2) *com 2^* substituído por p^* e 2 por p. Suponha além disso que*

(*i*) $f(x,u) = o(|u|^{p-1})$ *uniformemente em x quando $u \to 0$;*

(ii) $u \mapsto \frac{f(x,u)}{|u|^{p-1}}$ *é estritamente crescente em* $(-\infty, 0)$ *e* $(0, \infty)$;

(iii) $\frac{F(x,u)}{|u|^p} \to \infty$ *uniformemente em* x *quando* $|u| \to \infty$.

Então a equação (1.5) *tem uma solução de estado fundamental. Além disso, se* f *é ímpar em* u, *então* (1.5) *tem infinitos pares de soluções.*

Demonstração. Vamos aplicar o Teorema 2.15 ao funcional

$$\Phi(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x - \int_\Omega F(x,u)\,\mathrm{d}x \equiv I_0(u) - I(u),$$

em que

$$I_0(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{p}\int_\Omega \lambda |u|^p\,\mathrm{d}x \equiv \Psi(u) - I_1(u)$$

e

$$I(u) = \int_\Omega F(x,u)\,\mathrm{d}x.$$

É imediato que (A_1) acontece com $\psi(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p$ e $J = \psi'$ dado por

$$J\colon E \to E^*, \qquad J(u)v = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v\,\mathrm{d}x.$$

De forma muito similar à prova do Teorema (3.1) obtemos que as hipóteses (i) a (iii) do Teorema (2.15) são satisfeitas. Além disso, ambos I' e I_1' são completamente contínuos pelo Teorema (1.8) e, então, (iv) também é satisfeita. Em vista da Observação 2.2 é, portanto, suficiente mostrar que J satisfaz

$$(J(v) - J(w))(v - w) \geq (\|v\|^{p-1} - \|w\|^{p-1})(\|v\| - \|w\|)\ \forall\, v, w \in E.$$

Mas esta propriedade é conhecida e pode ser encontrada em [23],d, p.501, e em [11].

Portanto, pelo Teorema 2.15 segue-se o resultado. ∎

Utilizando a P-homogeneidade I_0 pode ser mostrado também aqui, de forma quase análoga ao caso do Laplaciano, que existe uma solução de menor energia com sinais trocados satisfazendo $c_{sc} \geq 2c$ e cada solução de estado fundamental satisfaz $u_0 \geq 0$ ou $u_0 \leq 0$.

Apêndice A

Teoria de ponto crítico

Neste apêndice sintetizaremos alguns resultados da Teoria de ponto crítico que foram utilizados na elaboração do trabalho. Maiores detalhes podem ser encontrados, por exemplo, em [3], [14], [19], [20], [21], [23] e [27].

Definição A.1 (Ponto crítico). *Seja E um espaço de Banach e $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional. Um ponto $u \in E$ é chamado ponto crítico se $\Phi'(u) = 0$. O correspondente valor $c = \Phi(u)$ é um valor crítico ou um nível crítico.*

Definição A.2 (Sequência de Palais-Smale e $(PS)_c$-sequência). *Seja E um espaço de Banach e $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional.Uma sequência $(u_n) \subset E$ é chamada uma sequência de Palais-Smale se $(\Phi(u_n))$ é limitada e $\phi'(u_n) \to 0$. Se $\phi(u_n) \to c \in \mathbb{R}$ e $\Phi'(u_n) \to 0$, então (u_n) é dita ser uma $(PS)_c$-sequência, ou sequência de Palais-Smale no nível c relacionada a Φ.*

Exemplo A.3. *Considere a função real $f(x) = xe^{1-x}$. A sequência $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ é uma sequência de Palais-Smale para f no nível 1. Ela converge para o ponto crítico x=1. A sequência $x_n = n$ é uma sequência de Palais-Smale para f no nível zero. Ela diverge para ∞.*

Definição A.4 (Condição de Palais-Smale e $(PS)_c$ condição). *Seja E um espaço de Banach e $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional. Φ é dito satisfazer a condição de Palais-Smale ($(PS)_c$ condição) se cada sequência de Palais-Smale($(PS)_c$ sequência) tem uma subsequência convergente.*

Exemplo A.5. *A função $f(x) = xe^{1-x}$ satisfaz a $(PS)_1$ condição, mas não $(PS)_0$ condição. Notamos que um funcional Φ satisfaz a condição de Palais-Smale em um certo nível ainda que não exista sequência de Palais-Smale neste nível. Com este argumento, $f(x) = xe^{1-x}$ satisfaz $(PS)_c$ se e somente se $c \neq 0$.*

Proposição A.6. *Se uma (subsequência de) uma sequência de Palais-Smale converge a u, então u é um ponto crítico.*

Demonstração. De fato, considere E um espaço de Banach, $\phi \in C^1(E, \mathbb{R})$, $(u_n) \in E$ uma sequência de Palais-Smale, ou seja, $\phi(u_n)$ é limitada e $\phi'(u_n) \to 0$. Por hipótese $u_n \to u$ e, da continuidade de ϕ', temos que $\phi'(u_n) \to \phi'(u)$. Logo, pela unicidade do limite, seque que $\phi'(u) = 0$. Note que uma subsequência de uma sequência de Palais-Smale é também uma sequência de Palais-Smale. ∎

precisaremos, agora, a noção de gênero.

Definição A.7 (Gênero)**.** *Seja A um subconjunto fechado de $E\backslash\{0\}$ tal que $A=-A$. O gênero de A, denotado por $\gamma(A)$, é o menor inteiro k tal que existe uma aplicação ímpar $h\in C(A,\mathbb{R}^k\backslash\{0\})$. Colocamos $\gamma(\emptyset)=0$ e $\gamma(A)=\infty$ se não existe h para qualquer k finito.*

Pode ser mostrado que se A é homeomorfo a esfera unitária em $\mathbb{R}^k$ por um homeomorfismo ímpar, então, $\gamma(A)=k$. Isto implica que a esfera unitária S em um espaço de Banach de dimensão infinita contém conjuntos compactos de qualquer gênero $k\geq 1$ e sendo $\gamma(A)\leq\gamma(B)$ quando $A\subset B$, segue que $\gamma(S)=\infty$.

Seja E um espaço de Banach tal que a esfera unitária S em E é uma subvariedade de classe (ao menos) C^1 e considere $\Phi\in C^1(S,\mathbb{R})$.

Teorema A.8. *Se Φ é limitado inferiormente e satisfaz a condição de Palais-Smale então $c=\inf_S\Phi$ é atingido e é um valor crítico de Φ.*

Demonstração. Seja $(u_n)\subset S$ uma sequência minimizante para Φ, ou seja, uma sequência tal que $\Phi(u_n)\to c$ sendo $c:=\inf\limits_{u\in S}\Phi(u)$. Pelo princípio variacional de Ekeland podemos assumir que $\Phi'(u_n)\to 0$. Dessa forma, (u_n) é uma sequência de Palais-Smale e como Φ satisfaz a condição de Palais-Smale,temos que $u_n\to u$ depois de passar a uma subsequência. Como $\Phi\in C^1(S,\mathbb{R})$, implica que

$$\Phi(u)=c \qquad \text{e} \qquad \Phi'(u)=0.$$

Portanto, $c=\inf_S\Phi$ é atingido e é um valor crítico de Φ.

■

Considere

$$\Gamma_j:=\{A\subset A: A=-A,\ \text{A é compacto e } \gamma(A)\geq j\}$$

e

$$c_j:=\inf_{A\in\Gamma_j}\sup_{u\in A}\Phi(u), j=1,2\ldots$$

Se E é tem dimensão infinita, então $\gamma(S)=\infty$ e $\Gamma_j\neq$ para qualquer j. Se Φ é limitado inferiormente, então temos $c_1\leq c_2\leq\ldots$ e $c_j<\infty$ para todo j uma vez que os conjuntos $A\in\Gamma_j$ são compactos. O seguinte acontece:

Teorema A.9. *Se E é um espaço de Banach de dimensão infinita, $\Phi\in C^1(S,\mathbb{R})$ é limitado inferiormente e satisfaz a condição de Palais-Smale, então Φ tem infinitos pares de pontos críticos.*

Este resultado pode ser encontrado em [19] e [21] para S respectivamente em um espaço de Hilbert e em um espaço de Banach tal que S é de classe $C^{1,1}$ e em [6] para S em um espaço de Banach tal que $S\in C^1$. Podemos, de fato, remover a exigência de compacidade na definição de Γ_j; esta exigência foi é essencial para o argumento em [6].

A prova deste resultado mostra que todos os c_j são níveis críticos e se $c_j = \ldots = c_{j+p}$ para algum $p \geq 0$, então $\gamma(K_{c_j}) \geq p + 1$, sendo

$$K_{c_j} := \{u \in S : \Phi(u) = c_j \ e \ \Phi'(u) = 0\}.$$

Logo, o número de pontos críticos é infinito independente de ser o número de c_j's distintos finito ou não.

Apêndice B

O princípio variacional de Ekeland

Neste apêndice enunciaremos algumas versões do princípio variacional de Ekeland. Maiores detalhes, podem ser encontrados, por exemplo, em [13], [14] e [21].

O princípio variacional de Ekeland é uma condição necessária e sufiente para a completeza de um espaço métrico.(veja, por exemplo, [25].)

Teorema B.1 (Príncípio variacional de Ekeland- Forma fraca)**.** *Seja M um espaço métrico completo e $\Phi : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup +\{\infty\}$ um funcional semicontínuo inferiormente, limitado inferiormente e não identicamente $+\infty$.Então, existe $v \in M$ tal que*

$$\Phi(v) \leq \Phi(u) + d(u, v)$$

para todo $u \neq v \in X$.

Teorema B.2 (Príncípio variacional de Ekeland- Forma forte)**.** *Seja M um espaço métrico completo e $\Phi : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup +\{\infty\}$ um funcional semicontínuo inferiormente, limitado inferiormente e não identicamente $+\infty$. Seja $\varepsilon > 0$ dado e $u \in M$ tal que*

$$\Phi(u) \leq \inf_M \Phi + \varepsilon.$$

Então, para todo $\gamma > 0$, existe $v \in M$ tal que

$$\Phi(v) \leq \phi(u) \tag{B.1}$$

$$d(u, v) \leq \gamma \tag{B.2}$$

e, para todo $w \neq v$ em M,

$$\Phi(w) \geq \phi(v) - (\varepsilon/\gamma) d(v, w). \tag{B.3}$$

Teorema B.3 (Ekeland, 1974)**.** *Seja X um espaço de Banach, $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, limitado inferiormente, $v \in X$ e $\varepsilon, \delta > 0$. Se*

$$\Phi(v) \leq \inf_X \Phi + 2\varepsilon$$

existe $u \in X$ *tal que*

$$\Phi(u) \leq \inf_X \phi + 2\varepsilon \ , \ \|\Phi'(u)\| < 8\varepsilon/\delta \ , \ \|u - v\| \leq 2\delta.$$

Apêndice C

Espaços de Sobolev

Os pré-requisitos desse apêndice são resultados de um curso básico de medida e integração. Provaremos poucos dos resultados enunciados.

Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$ e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. (Quer dizer, para todo $K \subset \Omega$ compacto, $\int_K u \, \mathrm{d}x < \infty$.)

Definição C.1. *Dizemos que $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ é a derivada parcial fraca de u com relação a x_i, se*

$$\int_\Omega u(\partial_i \phi) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega v_i \phi \, \mathrm{d}x, \quad \forall \ \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

É fácil verificar que a derivada parcial fraca de u, se existir, é única (a menos de conjuntos de medida nula). Nesse caso, a denotaremos por $\partial_i u$. Diremos que u é *fracamente diferenciável* se existirem as derivadas $\partial_i u$ para todo $1 \le i \le n$. Decorre da fórmula de integração por partes que toda função $u \in C^1(\Omega)$ possui derivadas parciais fracas, que coincidem com as derivadas parciais tradicionais.

Definição C.2. *Para todo $p \ge 1$ definimos o **espaço de Sobolev** $W^{1,p}(\Omega)$ por*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \, : \, \partial_i u \in L^p(\Omega), \ \forall \ i = 1, \ldots, n\}.$$

Em $W^{1,p}(\Omega)$ definimos a norma

$$\|u\|_{1,p} = \sum_{i=0}^n \left(\int_\Omega |\partial_i u|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} = \sum_{i=0}^n \|\partial_i u\|_p,$$

em que $\partial_0 u = u$ e $\| \cdot \|_p$ denota a norma em $L^p(\Omega)$.

É fácil verificar que $\| \cdot \|_{1,p}$ é uma norma, que é equivalente à norma

$$\left(\sum_{i=0}^n \int_\Omega |\partial_i u|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

Definição C.3. *Definimos o **espaço de Sobolev** $W_0^{1,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ com relação à norma $\| \cdot \|_{1,p}$.*

Assim, por definição, $W_0^{1,p}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $W^{1,p}(\Omega)$. Esses espaços são distintos, como consequência da desigualdade de Poincaré, que enunciaremos posteriormente.

Teorema C.4. *$W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach* separável *para todo $1 \leq p \leq \infty$. Se $1 \leq p < \infty$, então $W^{1,p}(\Omega)$ é* reflexivo *e* uniformemente convexo.

A demonstração do Teorema C.4 é simples e pode ser encontrada, por exemplo, em [8]. Note que, uma vez que $W_0^{1,p}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $W^{1,p}(\Omega)$, o enunciado do Teorema C.4 também é válido para o espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Proposição C.5 (Regra do produto)**.** *Seja $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então $\phi u \in W^{1,p}(\Omega)$ e*

$$\partial_i(\phi u) = (\partial_i \phi)u + \phi(\partial_i u).$$

Demonstração. Seja $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Então temos

$$\int_\Omega (\phi u)\partial_i \psi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega u[\phi \partial_i \psi] \, \mathrm{d}x = \int_\Omega u[\partial_i(\phi\psi) - \psi \partial_i \phi] \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega (\partial_i u)\phi\psi \, \mathrm{d}x - \int_\Omega u\psi\partial_i\phi \, \mathrm{d}x$$
$$= -\int_\Omega [(\partial_i u)\phi + u(\partial_i \phi)]\psi \, \mathrm{d}x.$$

■

Para os próximos resultados, lembramos que estamos utilizando

$$u^+(x) = \max\{u(x), 0\} \qquad \text{e} \qquad u^-(x) = \min\{u(x), 0\}.$$

Proposição C.6. *Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então $|u|$, u^+ e u^- pertencem a $W_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso, vale*

$$\int_\Omega |\nabla |u||^p \, \mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x.$$

Teorema C.7 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado. Então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x \leq C \int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x.$$

Como consequência da desigualdade de Poincaré, temos que

$$\|u\| = \int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x$$

é uma norma em $W^{1,p}(\Omega)$ equivalente à norma usual.

O próximo resultado coleta as principais imersões de Sobolev que utilizaremos dos espaços $W^{1,p}(\Omega)$:

Teorema C.8. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado com fronteira suave e $N \geq 3$. Então vale:*

(*i*) *Se $1 \leq p < N$, então a imersão $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é* contínua *para todo $q \in [1, p^*]$ e* compacta *para todo $q \in [1, p^*)$, em que $p^* = \frac{Np}{N-p}$;*

(ii) *Se* $p = N$*, então* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *é compacta para todo* $q < \infty$*;*

(iii) *Se* $p > N$*, então* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ *é compacta.*

No caso especial do espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$, o seguinte resultado que utilizaremos repetidamente é válido:

Teorema C.9. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto limitado. Então, para todo* $p \in (1, N)$ *vale:*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

desde que $q \in [1, p^*)$*.*

O próximo resultado será utilizado repetidamente. Para conveniência do leitor, recordamos o

Teorema C.10 (Banach-Alaoglu)**.** *Seja* X *um espaço de Banach reflexivo. Se* $B \subset X$ *for limitado, então* B *é relativamente compacto na topologia fraca de* X*.*

Exemplo C.11. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado. Suponha que uma sequência $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfaça

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^p \mathrm{d}x \leq C,$$

em que $C > 0$ independe de n. Como consequência da Desigualdade de Poincaré, temos que (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Como $W_0^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo, podemos aplicar o Teorema de Banach-Alaoglu e concluir que (u_n) é relativamente compacta em $W_0^{1,p}(\Omega)$ com a topologia fraca. Assim, existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. De acordo com o Teorema C.9, temos que $u_n \to u$ em $L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, p^*]$.

Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω.

Sintetizando, toda sequência (u_n) em $W_0^{1,p}(\Omega)$ que satisfaça $\|u_n\| \leq C$ para todo n satisfaz, após passagem a subsequência,

(i) Existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$;

(ii) $u_n \to u$ em $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, p^*]$;

(iii) $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω.

Novamente, pelo Teorema C.9, existe $g \in L^p(\Omega)$ tal que $|u_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p em Ω para todo n. $\triangleleft$

Apêndice D

Operador de Superposição

Neste apêndice mostraremos a continuidade do operador de superposição

$$\begin{array}{rcl} A\colon L^p(\Omega) & \to & L^q(\Omega) \\ u & \mapsto & f(x,u). \end{array}$$

Nossa principal referência para este apêndice é o livro de Willem [19]. Outras informações relevantes podem ser encontradas em [10] e [11] , também utilizadas neste apêndice.

Definição D.1. *Uma função $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de* ***Carathéodory*** *se*

(i) *a função*

$$x \mapsto f(x,s)$$

for mensurável em Ω, para todo $s \in \mathbb{R}$ fixo;

(ii) *a função*

$$s \mapsto f(x,s)$$

for contínua para quase todo ponto $x \in \Omega$ fixo.

Lema D.2. *Sejam $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável e $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory. Então*

$$x \mapsto f(x,u(x))$$

é mensurável.

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência de funções simples tal que $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω. Como $x \mapsto f(x,s)$ é mensurável para todo $s \in \mathbb{R}$, temos que $x \mapsto f(x,u_n(x))$ é mensurável, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $s \mapsto f(x,s)$ é contínua para quase todo $x \in \Omega$, temos que $f(x,u_n(x)) \to f(x,u(x))$ quando $n \to \infty$. Isso mostra o afirmado. ∎

Assim, denotando por $\mathcal{M}$ o conjunto das funções $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ (Lebesgue) mensuráveis, cada função de Carathéodory $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ define um operador $N_f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, chamado operador de Nemytskii.

Lema D.3. *Sejam Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$ e $1 \leq p < \infty$. Se $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$, existem uma subsequência (u_{n_j}) de (u_n) e $g \in L^p(\Omega)$ tais que $u_{n_j} \to u$ em $L^p(\Omega)$ e*

$$|u(x)|, |u_{n_j}(x)| \leq g(x)$$

em quase todo ponto $x \in \Omega$.

Demonstração. Passando, se necessário, a uma subsequência, podemos supor que

$$u_n(x) \to u(x) \qquad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Tomando outra subsequência, podemos supor que $\|u_{n+1} - u_n\|_p \leq 2^{-j}$, $\forall\, n \geq 1$.

Definimos então

$$g(x) := |u_1(x)| + \sum_{j=1}^{\infty} |u_{j+1}(x) - u_j(x)|.$$

Afirmamos que $g \in L^p(\Omega)$. De fato, seja

$$g_n(x) = |u_1(x)| + |u_2(x) - u_1(x)| + \ldots + |u_n(x) - u_{n-1}(x)|.$$

Temos que $g_n \in L^p(\Omega)$ pois, de acordo com a desigualdade de Minkowski, temos

$$\|g_n\|_p \leq \|u_1\|^p + \sum_{i=1}^{n} \|u_{i+1} - u_i\|_p \leq \|u_1\|_p + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \|u_1\|_p + 1,$$

o que implica, em particular, a existência de $C > 0$ tal que $\|g_n\|_p \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Uma vez que a função $|x|^p$ é contínua e $g_n(x) \to g(x)$, concluímos que $|g_n(x)|^p \to |g(x)|^p$ q.t.p. em Ω quando $n \to \infty$. Decorre então do Lema de Fatou que

$$\int_\Omega |g(x)|^p \,\mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |g_n(x)|^p \,\mathrm{d}x < C,$$

provando nossa afirmação.

Agora definimos

$$f(x) = u_1(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \left(u_{i+1}(x) - u_i(x)\right).$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, podemos escrever $u_n(x) = u_1(x) + \sum_{i=1}^{n-1} (u_{i+1}(x) - u_i(x))$, o que implica que $u_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω. Além disso, como

$$|f(x)| = \left| u_1(x) + \sum_{j=1}^{\infty} (u_{i+1}(x) - u_i(x)) \right| \leq |u_1(x)| + \sum_{j=1}^{\infty} |u_{i+1}(x) - u_i(x)) = g(x), \tag{D.1}$$

concluímos que $f \in L^p(\Omega)$.

Decorre então da desigualdade triangular que

$$|u_n(x)| = \left| u_1(x) + \sum_{j=1}^{n-1} (u_{i+1}(x) - u_i(x)) \right| \leq |u_1(x)| + \sum_{j=1}^{\infty} |u_{i+1}(x) - u_i(x)| = g(x).$$

Como $|u_n(x)| \leq g(x)$ e $|f(x)| \leq g(x)$, temos então que $|u_n(x) - f(x)| \leq |u_n(x)| + |f(x)| \leq 2g(x)$ e, portanto, $|u_n - f|^p \leq (2g)^p$. Dessa forma, o Teorema da Convergência Dominada garante que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n - f|^p = 0,$$

provando que $\|u_n - f\|_p \to 0$.

Uma vez que, por hipótese, $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$, concluímos que $f = u$ em $L^p(\Omega)$ e $\|u_n - u\|_p \to 0$ quando $n \to \infty$. Como (D.1) garante que $|f(x)| \leq g(x)$, temos $|u(x)| \leq g(x)$ q.t.p. em Ω, finalizando nossa demonstração. ∎

Lema D.4 (Forma finita da desigualdade de Jensen)**.** *Seja φ uma função* convexa *e $a_1, \ldots, a_n > 0$. Se $x_1, \ldots, x_n$ estão no domínio de φ, vale*

$$\varphi\left(\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i x_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i}\right) \leq \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i \varphi(x_i)}{\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i}.$$

Demonstração. Suponhamos que $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ satisfaçam $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. A convexidade de φ implica então

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2).$$

Essa desigualdade pode ser facilmente generalizada: se $\lambda_i \geq 0$ para todo i são tais que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$, então obtemos, por indução[1]

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(x_i).$$

Daí decorre o afirmado. ∎

Corolário D.5. *Para $r \geq 1$ vale*

$$|\alpha + \beta|^r \leq 2^{r-1} \left(|\alpha|^r + |\beta|^r\right).$$

Demonstração. A desigualdade dada é equivalente a

$$\left|\frac{\alpha + \beta}{2}\right|^r \leq \left(\frac{|\alpha| + |\beta|}{2}\right)^r.$$

[1]Supondo verdadeiro o caso $n = k$, escreva $\varphi\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right) = \varphi\left(\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) \sum_{i=2}^{k+1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} x_i\right)$ e aplique o caso $n = 2$.

Sem perda de generalidade, podemos supor $\alpha \neq 0 \neq \beta$.

Uma vez que, para $x > 0$, a função $\varphi(x) = x^r$ satisfaz $\varphi''(x) = r(r-1)x^{r-2} \geq 0$, vemos que x^r é convexa. Para $\alpha_1 = 1 = \alpha_2$, decorre então da desigualdade de Jensen (Lema D.4) que

$$\left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|^r \leq \left(\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}\right)^r \leq \frac{|\alpha|^r+|\beta|^r}{2}.$$ ■

Teorema D.6. *Assuma que $|\Omega| < \infty$. Se $1 \leq p, r < \infty$ e $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ satisfizer*

$$|f(x,u)| \leq c\big(1 + |u|^{\frac{p}{r}}\big), \tag{D.2}$$

então, para todo $u \in L^p(\Omega)$ vale:

(*i*) *$f(\cdot, u) \in L^r(\Omega)$;*

(*ii*) *o operador*

$$\begin{array}{rcl} A\colon L^p(\Omega) & \to & L^r(\Omega) \\ u & \mapsto & f(x,u) \end{array}$$

é contínuo.

Demonstração. Assuma que $u \in L^p(\Omega)$. Decorre da desigualdade de Jensen (Lema D.4) que

$$\int_\Omega |f(x,u)|^r \,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega \Big(c\big(1+|u|^{\frac{p}{r}}\big)\Big)^r \,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega c^r 2^{r-1}(1+|u|^p) \leq \int_\Omega c^r 2^{r-1} + c^r 2^{r-1} \int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}x < \infty,$$

mostrando que $|f(x,u)|^r \in L^1(\Omega)$.

Suponhamos que $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$. De acordo com o Lema D.3, existe $g \in L^P(\Omega)$ tal que, passando a uma subsequência, $|u(x)| < g(x)$ e $|u_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p. em Ω para todo n.

Decorre de (D.2), da desigualdade triangular e da desigualdade de Jensen que

$$\begin{aligned} |f(x,u_n) - f(x,u)|^r &\leq (|f(x,u_n)| + |f(x,u)|)^r \leq \left(c\left(1+|u_n|^{\frac{p}{r}}\right) + c\left(1+|u|^{\frac{p}{r}}\right)\right)^r \\ &\leq \left(c\left(1+|g|^{\frac{p}{r}}\right) + c\left(1+|g|^{\frac{p}{r}}\right)\right)^r = \left(2c\left(1+|g|^{\frac{p}{r}}\right)\right)^r \\ &= 2^r c^r \left(1+|g|^{\frac{p}{r}}\right)^r. \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\int_\Omega 2^r c^r \left(1+|g|^{\frac{p}{r}}\right)^r \,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega 2^{2r-1} c^r \,\mathrm{d}x + \int_\Omega 2^{2r-21} c^r |g|^p \,\mathrm{d}x < \infty,$$

concluímos que

$$|f(x,u_n) - f(x,u)|^r \in L^1(\Omega).$$

Uma vez que $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, temos que $u_n(x) \to u(x)$ implica que $f(x, u_n(x)) \to f(x, u(x))$ q.t.p. em Ω. Decorre então do Teorema da Convergência Dominada que

$$f(x,u_n) \to f(x,u) \quad \text{em} \quad L^r(\Omega).$$

Isso quer dizer que $A(u_n) \to A(u)$ em $L^r(\Omega)$. Note que a passagem a uma subsequência não interfere: foi provado acima que $A(u_{n_j}) \to A(u)$ em $L^r(\Omega)$. Como (u_n) é de Cauchy, daí decorre que $A(u_n) \to A(u)$ em $L^r(\Omega)$ para toda a sequência (u_n). ■

Observação D.7. *A utilização da desigualdade de Jensen não é necessária na demonstração do Teorema D.6: uma desigualdade mais simples é suficiente:*

$$|a+b| \leq (|a|+|b|) \leq 2\max\{|a|,|b|\}.$$

Daí decorre imediatamente que

$$|a+b|^r \leq 2^r(|a|^r+|b|^r).$$

Essa desigualdade conduz a uma outra desigualdade interessante: se p, q são expoentes conjugados, e $a, b \geq 0$, então

$$(a+b)^r \leq pa^r + qb^r.$$

Em particular, podemos tomar o coeficiente de a^r bem próximo de 1, pagando o preço ter termos um coeficiente bem grande para b^r.

A prova é obtida ao se verificar que ou $a+b \leq pa$ ou $a+b \leq qb$. De fato, caso contrário, teríamos $a+b > pa$ e $a+b > qb$, de onde decorre $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)(a+b) > (a+b)$, uma contradição.

Apêndice E

A aplicação de dualidade

Neste apêndice, faremos algumas obervações sobre a aplicação de dualidade correspondente à uma função de normalização φ. Admitiremos quase todos os resultados aqui sem demonstração. Para uma discussão detalhada, veja [11].

Sejam X um espaço de Banach *real*, X^* seu dual e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a aplicação de dualidade entre X e X^*. Aqui a norma em X e X^* será denotada por $\| \, \|$.

Consideremos um operador $A\colon X \to \mathcal{P}(X^*)$ que associa a cada elemento $x \in X$ um subconjunto $Ax \in \mathcal{P}(X^*)$. Definimos o *domínio* $\mathcal{D}(A)$ de A por $\mathcal{D}(A) = \{x \in X \, : \, Ax \neq \emptyset\}$ e a *imagem* de A, $\mathcal{R}(A)$, por $\mathcal{R}(A) = \bigcup_{x \in \mathcal{D}(A)} Ax$.

Definição E.1. *A aplicação $A\colon \mathcal{D}(A) \to \mathcal{R}(A)$ é **monótona** se*

$$\langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2 \rangle \geq 0 \quad \forall \, x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A), \; x_1^* \in Ax_1, \; x_2^* \in Ax_2.$$

Exemplo E.2. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno em $\mathcal{H}$. Então $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ definida por $A(x)(\cdot) = \langle \cdot, x \rangle$ é uma aplicação monótona.*

De fato, dados $x, y \in \mathcal{H}$, então $A(y-x)(\cdot) = \langle \cdot, y - x \rangle$, de modo que

$$A(y-x)(y-x) = \langle y - x, y - x \rangle = \|y - x\|^2 \geq 0.$$

$\triangleleft$

Definição E.3. *Uma função contínua $\varphi\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ é uma **função de normalização**, se φ for estritamente crescente, $\varphi(0) =)0$ e $\lim_{r \to \infty} \varphi(r) = \infty$.*

Definição E.4. *Uma **aplicação de dualidade** correspondente à função de normalização φ é a aplicação $J_\varphi\colon X \to \mathcal{P}(X^*)$ definida por*

$$J_\varphi x = \{x^* \in X^* \, : \, \langle x^*, x \rangle = \varphi(\|x\|)\|x\|, \; \|x^*\| = \varphi(\|x\|)\}.$$

Lema E.5. *Temos que $\mathcal{D}(J_\varphi) = X$.*

Demonstração. Para $x \in X$ fixo, defina o funcional linear $f(\lambda x) = \varphi(\|x\|)\lambda\|x\|$. O resultado decorre então da aplicação do Teorema de Hahn-Banach ao funcional linear f. ■

Note que, para cada $x \in X$, não podemos garantir *unicidade* de $x^* \in J_\varphi x$. (O Teorema de Hahn-Banach não garante unicidade.)

O próximo resultado, que não será demonstrado, relaciona as principais propriedades de uma aplicação de dualidade.

Teorema E.6. *Se φ é uma função de normalização, então:*

(i) *Para cada $x \in X$, $J_\varphi x$ é um conjunto limitado, fechado e convexo de X^*;*

(ii) *$J_\varphi x$ é monótona:*

$$\langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2 \rangle \geq \big(\varphi(\|x_1\|) - \varphi(\|x_2\|)\big)\,(\|x_1\| - \|x_2\|) \geq 0$$

para todos $x_1, x_2 \in X$ e $x_1^* \in J_\varphi x_1$, $x_2^* \in J_\varphi x_2$;

(iii) *para cada $x \in X$, $J_\varphi x = \partial\psi(x)$, em que*

$$\psi(x) = \int_0^{\|x\|} \varphi(t)\mathrm{d}t$$

e $\partial\psi \colon X \to \mathcal{P}(X^*)$ é a subdiferencial de ψ no sentido de análise convexa, isto é,

$$\partial\psi(x) = \{x^* \in X^* \,:\, \psi(y) - \psi(x) \geq \langle x^*, y - x\rangle,\ \forall\ y \in X\}.$$

Observação E.7. Um funcional $f \colon X \to \mathbb{R}$ é Gâteaux diferenciável em $x \in X$ se existir $f'(x) \in X^*$ tal que

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = \langle f'(x), h\rangle \quad \forall\ h \in X.$$

É fácil verificar que, se uma função *convexa* $f \colon X \to \mathbb{R}$ for Gâteaux diferenciável em $x \in X$, então $\partial f(x)$ consiste de um único elemento, qual seja, $x^* = f'(x)$. $\lhd$

Definição E.8. *X é dito ser:*

a) Uniformemente convexo se para cada $\epsilon \in (0,2]$, existe $\delta(\epsilon)$ tal que se $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x - y\| \geq \epsilon$ então $\|x + y\| \leq 2(1 - \delta(\epsilon))$;

b) Localmente uniformemente convexa se a partir de $\|x\| = \|x_n\| = 1$ e $\|x_n + x\| \to 2$ com $n \to \infty$, resulta que $x_n \to \infty$ (fortemente em X);

c) Estritamente convexo se para cada $x, y \in X$ com $\|x\| = \|y\| = 1$, $x \neq y$ e $\lambda \in (0,1)$, $\|(\lambda x + (1-x)y\| < 1$.

Teorema E.9. *X uniformememente convexo $\Rightarrow$ X localmente uniformemente convexo $\Rightarrow$ X estritamente convexo.*

Teorema E.10 (Pettis–Milman)**.** *Se X é uniformemente convexo então X é reflexivo.*

Na sequência, consideraremos φ uma função de normalização.

Proposição E.11. *Seja φ uma função de normalização. Então:*

i) Se X é convexo, então J_φ é estritamente monótona:

$$\langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2\rangle > 0 \quad \forall\, x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2 \text{ e } x_1^* \in J_\varphi x_1,\ x_2^* \in J_\varphi x_2.$$

Em particular, $J_\varphi x_1 \cap J_\varphi x_2 = \emptyset$ se $x_1 \neq x_2$.

ii) Se X^* é estritamente convexo, então $card(J_\varphi x) = 1\ \forall\, x \in X$.

Proposição E.12. *Se X é localmente uniformemente convexo e $J_\varphi : X \to X^*$, então J_φ satisfaz a (S_+) condição: se $x_n \rightharpoonup x$ e $\lim\limits_{n\to\infty}\langle J_\varphi x_n, x_n - x\rangle \leq 0$ então $x_n \to x$.*

Proposição E.13. *Se X é reflexivo e $J_\varphi : X \to X^*$ então J_φ é demicontínuo: Se $x_n \to x$ em X então $J_\varphi x_n \to J_\varphi x$ em X^*.*

Teorema E.14. *Seja X reflexivo e $J_\varphi : X \to X^*$. Então $R(J_\varphi) = X^*$*

Teorema E.15. *Seja X reflexivo, localmente uniformemente convexo e $J_\varphi : X \to X^*$. Então J_φ é bijetivo com inversa J_φ^{-1} limitado, contínuo e monótono. Além disso,*

$$J_\varphi^{-1} = \chi^{-1} J_\varphi J^*_{\varphi^{-1}}$$

onde $\chi : X \to X^{**}$ é o isomorfismo canônico entre X e X^{**} e $J^*_{\varphi^{-1}} : X^* \to X^{**}$ é a aplicação de dualidade em X^* correspondente à função de normalização φ^{-1}.

Teorema E.16. *O espaço $W^{1,p}$ com a norma $\|\ \|_{1,p}$ é separável, reflexivo e uniformemente convexo.*

Teorema E.17. *O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ com a norma $\|\ \|_{1,p}$ é uniformemente convexo.*

Teorema E.18. *O operador $-\triangle_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ é um operador potencial. Mais precisamente, seu potencial é o funcional $\Psi : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por*

$$\Psi(u) = \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p$$

e

$$\Psi' = -\triangle_p = J_\varphi$$

onde $J_\varphi : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é a aplicação de dualidade correspondente à função de normalização $\varphi(t) = t^{p-1}$.

Teorema E.19. *O operador $-\triangle_p$ define uma correspondência injetiva entre $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $W^{-1,p'}(\Omega)$, com inverso $(-\triangle_p)^{-1}$ monótono, limitado e contínuo.*

Teorema E.20. *O funcional ψ é continuamente Frechét diferenciável em $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Observação E.21. Naturalmente, vamos denotar a diferencial de Frechét de Ψ em $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ por $\Psi'(u)$ e $\Psi'(u) = -\triangle_p u$. $\lhd$

Teorema E.22. *O operador $-\triangle_p$ satisfaz a condição (S_+): se $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\limsup\limits_{n\to\infty}\langle -\triangle_p u_n, u_n - u\rangle \leq 0$, então $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Apêndice F

Lema da deformação quantitativa

Neste apêndice, forneceremos uma versão do Lema da deformação quantitativa. Para melhores entendimentos, recomendamos, principalmente, [23].

Lema F.1. *Seja X um espaço de Banach e considere $\Phi : X \to \mathbb{R}$, $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ $S \subset X$, $S \neq \emptyset$, $c \in \mathbb{R}$, ε, δ tal que para qualquer $u \in \Phi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$ temos*[1]

$$\|\Phi'(u)\|_{X^*} \geq \frac{8\varepsilon}{\delta}.$$

Então, existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que

(i) $\eta(t,u) = u$ se $t = 0$ ou se $u \notin \Phi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$;

(ii) $\eta(1, \Phi^{c+\varepsilon} \cap S) \subset \Phi^{c-\varepsilon}$,[2]

(iii) Para qualquer $t \in [0,1]$, $\eta(t,.)$ é um homeomorfismo de X,

(iv) Para qualquer $u \in X$ e qualquer $t \in [0,1]$, $\|\eta(t,u) - u\| \leq \delta$,

(v) Para qualquer $u \in X$, $\Phi(\eta(.,u))$ é decrescente,

(vi) Para qualquer $u \in \Phi^c \cap S_\delta$ e qualquer $t \in (0,1]$, $\Phi(\eta(t,u)) < c$.

---

[1] $S_{2\delta} := \{u \in X : dist(u,S) \leq 2\delta\}$

[2] $\Phi^{c\pm\varepsilon} := \Phi^{-1}((-\infty, c \pm \varepsilon])$.

Apêndice G

Grau Topológico

Neste apêndice, seguindo [23], enfatizaremos as propriedades básicas do Grau de Brouwer de uma uma aplicação contínua em um espaço de dimensão finita. Existe também uma teoria do grau no caso de dimensão infinita, devida a Leray e Schauder,porém não entraremos em detalhes aqui.

Definição G.1. *Seja* Ω *um subconjunto aberto e limitado do* $\mathbb{R}^N$ *e* $F \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. *Assuma que* $y_0 \in \mathbb{R}^N \backslash F(\partial\Omega)$ *e* y_0 *é um valor regular de* F. *Então definimos o* Grau de Brouwer *de* F *como*

$$deg(F, \Omega, y_0) = \sum_{x \in F^{-1}(y_0) \cap \Omega} sgn J_{F(x)}{}^{1} \tag{G.1}$$

onde $J_{F(x)}$ *denota aqui o determinante da matriz jacobiana de* F *em* x *e*

$$sgn J_{F(x)} = \begin{cases} 1 & se \quad , J_{F(x)} > 0 \\ 0 & se \quad J_{F(x)} < 0. \end{cases}$$

Observação G.2. *Como consequência do Teorema se Stone-Weierstrass, temos que para a definicão do grau* $deg(F, \Omega, y_0)$ *não é necessário assumir que* $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *uma vez que qualquer* $F \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *pode ser aproximada por aplicações suaves.*

Enfatizamos que a soma em (G.1) é finita. De fato, Caso contrário o conjunto

$$F^{-1}(y_0) \cap \Omega := \{x \in \Omega : F(x) = y_0\}$$

tem um ponto de acumulação $\widetilde{x} \in \overline{\Omega}$. Pela continuidade de F, $F(\widetilde{x}) = y_0$, e como $y_0 \notin F(\partial\Omega,)$ $\widetilde{x} \in \Omega$. Pelo Teorema da Função Inversa, F é injetiva em uma vizinhança $\mathcal{U}$ de $\widetilde{x}$. Mas $\mathcal{U}$ contém pontos de $F^{-1}(y_0)$ diferentes de $\widetilde{x}$, uma contradição. Note que neste argumento usamos todas as hipóteses da definição (G.1).

Proposição G.3. *Seja* Ω *um subconjunto aberto do* $\mathbb{R}^N$. *O grau definido na Definição* (G.1) *tem as seguintes propriedades:*

(i) *deg*$(I,\Omega,y_0)=\begin{cases} 1 & se \quad y_0\in\Omega, \\ 0 & se \quad y_0\notin\overline{\Omega}. \end{cases}$ *sendo I a aplicação identidade.*

Suponha que $F\in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)\cap C^1(\Omega,\mathbb{R}^N)$ e $y_0\in\mathbb{R}^N\backslash F(\partial\Omega)$ é um valor regular de F. Então:

(ii) $deg(F,\Omega,y_0)\in\mathbb{Z}$;

(iii) $deg(F,\Omega,y_0)=deg(F-y_0,\Omega,o)$;

(iv) *Se $deg(F,\Omega,y_0)\neq 0$, então a equação*

$$F(x)=y_0$$

tem uma solução em Ω;

(v) *Se Ω_1 é um subconjunto aberto de Ω e $y_0\notin F(\overline{\Omega}\backslash\Omega_1)$, então*

$$deg(F,\Omega,y_0)=deg(F,\Omega_1,y_0).$$

Mais geralmente, se $\Omega_1,\ldots,\Omega_k$ são subconjuntos abertos de Ω dois a dois disjuntos e $y_0\in F\left(\overline{\Omega}\backslash\bigcup_{j=1}^{k}\Omega_j\right)$, então

$$deg(F,\Omega,y_0)=\sum_{j=1}^{k}deg(F,\Omega_j,y_0).$$

(vi) *Para todo $y\in\mathbb{R}^N$ suficientemente próximos de y_0,*

$$deg(F,\Omega,y)=deg(F,\Omega,y_0)$$

acontece.

(vii) *Para toda $G\in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)\cap C^1(\Omega,\mathbb{R}^N)$ que são suficientemente próximas a F na C^1-topologia,*[2]

$$deg(G,\Omega,y_0)=deg(F,\Omega,y_0)$$

é válido.

$(viii)$ *se $f=g$ em $\partial\Omega$, então*

$$\deg(f,\Omega,y_0)=deg(g,\Omega,y_0)$$

O teorema de Sard nos diz que se Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e $F\in C(\Omega,\mathbb{R}^N)$, então a medida de Lebesgue do conjunto de valores críticos de F é zero. Um corolário deste teorema é o seguinte: Sobre as hipóteses do Teorema de Sard o conjunto de valores regulares de $F:\Omega\to\mathbb{R}^N$ é denso em $\mathbb{R}^N$.(Veja [23].) Portanto, podemos, agora definir $deg(F,\Omega,y_0)$ onde $y_0\in R^N\backslash F(\partial\Omega)$ é um valor crítico de F. De acordo com o corolário anterior, existe uma sequência y_n de valores regulares de F tal que

$$\lim_{n\to\infty}y_n=y_0,\qquad y_n\notin F(\partial\Omega).$$

[2]Isto é, existe $\varepsilon>0$ tal que $\|F-G\|_{C^1(\Omega,\mathbb{R}^N)}:=\sup_{x\in\overline{\Omega}}\|F(x)-G(x)\|_{\mathbb{R}^N}+\sup_{x\in\Omega}\|F'(x)-G'(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)}<\varepsilon$

Em particular, $deg(F, \Omega, y_n)$ está bem definido pela Definição (G.1). A parte (vi) da proposição (G.3) permite-nos supor que a sequência $deg(F, \Omega, y_n)_{n=1}^{\infty}$ é eventualmente constante e ela não depende da escolha da sequência $y_{n}{}_{n=1}^{\infty}$ de valores regulares. Para ver isto, extendemos a Proposição (G.3)(vi) para garantir que $deg(F, \Omega, y)$ é constante em qualquer conjunto conexo

$$U \subset \mathbb{R}^N \backslash \overline{F(\partial\Omega \cup S)}$$

(veja [23].)

Por fim, mais geralmente, definimos, então

$$deg(F, \Omega, y_0) = \lim_{n\to\infty} deg(F, \Omega, y_n)$$

e todas as propriedades da Proposição (G.3) continuam válidas.

Proposição G.4 (Fórmula Produto para o grau)**.**

$$deg(g, \Omega, y_0) = deg(f_1, \Omega_1, y_{1,0}) \cdot deg(f_2, \Omega_2, y_{2,0})$$

onde $g = (f_1, f_2) : \Omega \to \mathbb{R}^{N_1+N_2}$, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $y_0 = (y_{1,0}, y_{2,0})$, $\Omega_i \subset \mathbb{R}^{N_i}$, $f_i \in C(\overline{\Omega_i}, \mathbb{R}^{N_i})$, $y_{i,0} \notin f_i(\partial\Omega_i)$, $i = 1, 2$.

Referências Bibliográficas

[1] A. Szulkin and T. Weth, *The method of Nehari manifold*. In: Handbook of Nonconvex Analysis and Applications, D.Y. Gao and D. Motreanu eds., International Press, Boston, 2010, pp. 597-632.

[2] A. Pankov, a equação não-linear periódica Schrodinger com aplicação de cristais fotônicos, Milan J. Math. 73 (2005), 259-287.

[3] A. Ambrosetti and A. Malchiodi, Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 104, Cambridge University Press, Cambridge, 2007

[4] A. Ambrosetti, G. Prodi, *A Primer of Nonlinear Analysis*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 34 (Cambridge University Press, Cambridge, 1995). Corrected reprint of the 1993 original.

[5] A. Ambrosetti e P.H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. **14** (1973), 349-381.

[6] A. Szulkin, Ljusternik-Schnirelmann theory on C1-manifolds, Ann. IHP Analyse Non Linnéaire 5 (1988), 119-139.

[7] Brezis, Haim. F*unctional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. ISBN: 978-0-387-70913-O, DOI:10.1007/978-0-387-70914-7, Springer New York Dodrecht Heidelberg London.

[8] Biezuner, Rodney Josué. Notas de aulas-Análise funcional. Departamento de Matemática, Instituto de ciências exatas(ICEX), Universidade Federal de Minas Gerais(UFMG).

[9] Evans, Lawrence C. (1998). Partial Differential Equations. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society. ISBN 0-8218-0772-2.

[10] de Figueiredo, Djairo Guedes. Lectures on the Ekeland Variational Principle with Applications and Detours, Tata Inst. of Fundamental Research, Springer-Verlag, 1989.

[11] G. Dinca, P. Jebelean and J. Mawhin, *Variational and Topological Methods for Dirichlet problems with p-Laplacian*, Portugalieae Mathematica, Vol. **58**, Fasc. 3 (2001), 339-378.

[12] H.L.Royden. Real Analysis.Second edition.

[13] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl.

[14] J. Mawhin and M. Willem, Critical Point Theory and Hamiltonian Systems, Springer-Verlag, New York, 1989.

[15] Lima, Elon Lages. *Análise no espaço* $\mathbb{R}^n$.2 ed. Rio de Janeiro:IMPA, 2013.

[16] Lima, Elon Lages. *Espaços métricos*.4 ed.Rio de janeiro:IMPA, 2011.

[17] M.Badiale and E. Serra, *Semilinear Elliptic Equations for Beginners Existence Results via the Variational Approach.*

[18] M. Clapp, *Una probadita de métodos variacionales en ecuaciones diferenciales parciales*, Notas de um minicurso da Escola de Verão em Equações Diferenciais Parciais da Universidad Nacional Autônoma de México, 2011.

[19] M. Willem, *Minimax Theorems*, Birkhäuser, Boston, 1996.

[20] M. Willem, Minimax Theorems, *Birkhäuser*, Boston, 1996.

[21] M. Struwe, Variational Methods, Springer-Verlag, Berlin, 1990

[22] P.H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, CBMS Reg. Conf. Series Math. 65, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1986.

[23] P. Drábek and J. Milota, Methods of Nonlinear Analysis. Applications to Diferential Equations, Birkhäuser, Basel, 2007.

[24] RUDIM,W. Real and Complex Analysis.New York,Mc-GRAW HILL, 1966.

[25] Sullivan, F.: "A characterization of complete metric spaces", Proceedings of the American Mathematical Society, volume 83, number 2, october 1981.

[26] V.BENCI,G.CERAMI, The effect of the domain topology on the number of positive solutions of nonlinear elliptic problems, Arch.Rat.Mech.Anal.114(1991),79-93.

[27] W. Zou and M. Schechter, Critical Point Theory and Its Applications, Springer-Verlag, New York, 2006.

[28] Z. Nehari, *On a class of nonlinear second-order differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. (1960), 101-123.

[29] Z. Nehari, *Characteristic values associated with a class of non-linear second-order differential equations*, Acta Math. 105 (1961), 141-175.

[30] Z. Liu and Z.Q. Wang, On the Ambrosetti-Rabinowitz superlinear condition, Adv. Nonl. Stud. 4 (2004), 563-574.

[31] Z. Liu and Z.Q. Wang, On the Ambrosetti-Rabinowitz superlinear condition, Adv. Nonl. Stud. 4 (2004), 563-574.