

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Dimensões fractais generalizadas e o seu papel na dinâmica quântica



Moacir Aloisio Nascimento dos Santos

Belo Horizonte - MG

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Moacir Aloisio Nascimento dos Santos

Orientador:

Prof. Dr. Silas Luiz de Carvalho

Dimensões fractais generalizadas e o seu papel na dinâmica quântica

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Belo Horizonte - MG
2015

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela paz que me concede a cada dia.

Aos meus pais e minhas irmãs por todo amor e apoio incondicional.

Ao meu orientador Silas e aos professores Anderson e Mário Jorge, pela paciência e confiança em meu trabalho.

À professora Deborah e aos professores Douglas, Leonardo, Weverson, Willian e Willer, os quais me ensinaram matemática com tanto zelo.

Ao professor Caio Olindo, pelas excelentes aulas de física e por ter me dado a oportunidade de discutir física com alguém tão genial.

Aos professores e colegas da UFMG e da UFVJM pelos ensinamentos e companherismo.

Aos membros da banca pela gentileza em participar da avaliação deste trabalho.

Agradeço de modo especial às secretárias do Demat-UFMG, Andrea e Kelly.

À Adriana, ao Anilton, Moisés e ao Two, tão importantes para mim.

Ao CNPq pela bolsa de estudos.

“As vezes você levanta da cama de manhã e pensa, eu não vou conseguir, mas você ri por dentro lembrando todas as vezes que sentiu isso.”

Resumo

Neste trabalho, apresentamos relações entre o grupo unitário de evolução gerado por um operador auto-adjunto definido em $\ell^2(\mathbb{Z}^d) := \{u : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |u(n)|^2 < \infty\}$ e algumas propriedades fractais de suas respectivas medidas espectrais. Mais especificamente, apresentamos resultados que fornecem limitantes inferiores para os expoentes de transporte em termos das dimensões fractais generalizadas associadas às medidas espectrais do respectivo operador auto-adjunto. Para a situação particular de um operador de Schrödinger definido em $\ell^2(\mathbb{Z}^+) := \ell^2(\{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\})$, apresentamos limitantes inferiores para tais dimensões em termos das chamadas matrizes de transferência.

Abstract

In the present text we discuss some relations between the unitary evolution group generated by a self-adjoint operator defined in $\ell^2(\mathbb{Z}^d) := \{u : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |u(n)|^2 < \infty\}$ and some fractal properties of its spectral measures. More precisely, we present some lower bounds for the transport exponents related to a self-adjoint operator in terms of the generalized fractal dimensions of its spectral measures. In particular, for Schrödinger operators defined in $\ell^2(\mathbb{Z}^+) := \ell^2(\{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\})$, these lower bounds are presented in terms of transfer matrices.

Sumário

Introdução	2
1 Expoentes de transporte I	7
1.1 Dinâmica para operadores compactos e medidas $U\alpha H$	7
1.2 Uma versão mais forte do Teorema de Guarneri-Combes	14
1.3 Expoentes de transporte I	17
2 Expoentes de transporte II	18
2.1 Dimensões fractais generalizadas	18
2.2 Expoentes de transporte II	21
3 Matrizes de transferência e operadores de Schrödinger 1D	32
3.1 Expoentes de transporte para o caso unidimensional	32
3.2 Transporte quase-balístico para o almost Mathieu	41
A Teoria espectral	43
A.1 Adjunto de Hilbert	43
A.2 Espectro	46
A.3 Teorema Espectral	47
A.4 Teorema de Stone	49
B Medidas em espaços euclidianos	50
B.1 Medidas de Hausdorff e de empacotamento	50
B.2 Teoria de Rogers e Taylor	53
Referências Bibliográficas	54

Introdução

A teoria de operadores auto-adjuntos definidos sobre espaços de Hilbert separáveis é vasta, assim como o seu campo de aplicações. Parte desta teoria se dedica ao estudo de modelos, que determinam a descrição da evolução temporal do “estado quântico não-relativístico” de um sistema físico, intensamente estudados por físicos e matemáticos.

Sabemos que, se descrito pela mecânica quântica não-relativística, o movimento de um elétron em uma rede cristalina está relacionado à dinâmica do grupo unitário de evolução gerado por um operador auto-adjunto; como veremos, a presença de transportes balístico ou quase-balístico (definidos adiante) se deve a propriedades (fractais) das medidas espectrais associadas a estes operadores; a ocorrência de tal fenômeno tem uma conexão direta com a existência de uma “fase metálica” em materiais condutores (para detalhes vide [13]).

Neste trabalho, nosso principal objetivo é justamente estudar relações existentes entre a dinâmica do grupo unitário de evolução gerado por um operador auto-adjunto e algumas propriedades fractais de suas respectivas medidas espectrais.

Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert separável, $H : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador auto-adjunto e $\psi \in \mathcal{H}$ (com $\|\psi\| = 1$). A medida espectral μ_ψ de ψ (e H) é unicamente definida pela identidade (vide a Seção A.3)

$$\langle \psi, f(H)\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu_\psi(x),$$

satisfeita para toda função Borel mensurável f . A evolução do vetor ψ , ou a dinâmica associada ao grupo unitário de evolução gerado pelo operador H (via Teorema de Stone, vide Seção A.4) é dada por

$$\psi(t) = e^{-iHt}\psi.$$

O estado ψ , no contexto da mecânica quântica, é chamado de vetor de estado (ou de pacote de onda) e descreve o “estado quântico não-relativístico” de um sistema de uma partícula.

Vejamos como os objetos acima se relacionam. Para tanto, introduzimos a chamada *probabilidade de retorno*, isto é, a probabilidade, no instante de tempo t , de uma partícula se encontrar em seu estado inicial $\psi(0) = \psi$:

$$|\langle \psi(0), \psi(t) \rangle|^2 = |\langle \psi, e^{-iHt}\psi \rangle|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} d\mu_{\psi}(x) \right|^2 = |\hat{\mu}_{\psi}(t)|^2.$$

A relação acima nos diz que a probabilidade de retorno coincide com o quadrado do módulo da transformada de Fourier da medida espectral μ_{ψ} .

A medida espectral μ_{ψ} é uma medida finita sobre \mathbb{R} (vide a Seção A.3); logo, o Teorema de Decomposição de Lebesgue [Teorema 6.10 [21]] nos diz que essa medida admite decomposição única em partes absolutamente contínua, $\mu_{\psi_{ac}}$ e singular, μ_{ψ_s} , com respeito à medida de Lebesgue. A medida μ_{ψ_s} se decompõe, por sua vez, em partes singular contínua, $\mu_{\psi_{sc}}$, e puramente pontual, $\mu_{\psi_{pp}}$. Assim, temos que

$$\mu_{\psi} = \mu_{\psi_{ac}} + \mu_{\psi_{sc}} + \mu_{\psi_{pp}}.$$

Em teoria espectral clássica, usamos essa decomposição para estabelecer uma correspondente decomposição no espaço de Hilbert [Teorema 12.1.8. (iii)[18]]:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sc} \oplus \mathcal{H}_{pp},$$

em que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{ac} &= \{ \psi \mid \mu_{\psi} \text{ é absolutamente contínua} \} \\ \mathcal{H}_{sc} &= \{ \psi \mid \mu_{\psi} \text{ é singular contínua} \} \\ \mathcal{H}_{pp} &= \{ \psi \mid \mu_{\psi} \text{ é puramente pontual} \}. \end{aligned}$$

Esses subespaços são fechados, mutuamente ortogonais e invariantes por H . Os espectros correspondentes, σ_{ac} , σ_{sc} e σ_{pp} são definidos como o espectro de H restrito a cada subespaço. Neste caso, temos

$$\sigma = \sigma_{ac} \cup \sigma_{sc} \cup \sigma_{pp}.$$

O próximo resultado nos diz como se comporta a probabilidade de retorno caso uma dada medida finita seja absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue [Lema 13.3.2 [18]].

Teorema (Lema de Riemann-Lebesgue). *Se μ é uma medida finita absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue, então $\hat{\mu}(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.*

Logo, para qualquer vetor $\psi \in \mathcal{H}_{ac}$, a probabilidade de retorno tende a zero quando $t \rightarrow \infty$. Este é um exemplo claro da relação entre uma propriedade espectral de um operador auto-adjunto e a dinâmica do grupo unitário de evolução gerado pelo mesmo.

Consideremos, em particular, o operador de Schrödinger d -dimensional livre [24], ou seja, o operador $H_0 : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ dado por

$$(H_0 u)(n) = - \sum_{k \in \mathbb{Z}^d, |k|=1} u(n+k), \quad n \in \mathbb{Z}^d,$$

em que $k = (k_1, \dots, k_d)$, com $|k| = |k_1| + \dots + |k_d|$.

Seja $\mathcal{F} : L^2([0, 2\pi]^d) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ a transformada de Fourier, definida pela ação

$$(\mathcal{F}g)(n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \int_{[0, 2\pi]^d} g(x) e^{-ix \cdot n} dx;$$

trata-se de um operador unitário, com inversa $(\mathcal{F}^{-1}u)(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d, |n| \leq N} u(n) e^{-ix \cdot n}$,

em que $x \cdot n = x_1 n_1 + \dots + x_d n_d$. Então, de

$$\begin{aligned} (H_0(\mathcal{F}g))(n) &= - \sum_{k \in \mathbb{Z}^d, |k|=1} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \int_{[0, 2\pi]^d} g(x) e^{-ix \cdot (n+k)} dx \\ &= - \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \int_{[0, 2\pi]^d} g(x) e^{-ix \cdot n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d, |k|=1} e^{-ix \cdot k} dx \\ &= - \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \int_{[0, 2\pi]^d} g(x) e^{-ix \cdot n} \sum_{i=1}^d 2 \cos(x_i) dx = (\mathcal{F}\psi)(n), \end{aligned}$$

em que $\psi(x) = (-2 \sum_{i=1}^d \cos(x_i))g(x)$, concluímos que $\mathcal{F}H_0\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{M}_\phi$ em $L^2([0, 2\pi]^d)$, em que $\phi(x) = -2 \sum_{i=1}^d \cos(x_i)$. Em outras palavras, H_0 é unitariamente equivalente ao operador de multiplicação \mathcal{M}_ϕ em $L^2([0, 2\pi]^d)$.

Assim, segue-se (Teorema A.1 e Proposição A.2) que H_0 é auto-adjunto, limitado e que o espectro de H_0 é igual a $\sigma(H_0) = \sigma(\mathcal{M}_\phi) = \overline{\text{Im}\phi} = [-2d, 2d]$.

Por outro lado, dado um boreliano qualquer $A \subset \mathbb{R}$, segue-se que $|A| = 0 \Rightarrow |\phi^{-1}(A)| = 0$ ($|A|$ denotando a medida de Lebesgue de A) donde se segue (Proposição A.3) que $\sigma(H_0) = \sigma(\mathcal{M}_\phi) = \sigma_{ac}(\mathcal{M}_\phi) = [-2d, 2d]$, ou seja, H_0 tem espectro puramente absolutamente contínuo.

O Lema de Riemann-Lebesgue nos diz que a probabilidade de retorno de qualquer partícula livre tende a zero quando o tempo tende para infinito, uma vez que H_0 tem espectro puramente absolutamente contínuo. Com efeito, tal resultado é esperado já que fisicamente a partícula desenvolve um “movimento retilíneo uniforme”; assim, a probabilidade da partícula retornar ao seu estado original é assintoticamente nula.

Em contrapartida, a presença de espectro puramente pontual está, em um dado sentido, associada à ocorrência de localização. Seja $\langle f \rangle_T := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$ a média temporal (de Cezàro) entre 0 e $T > 0$ de uma função $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ (Borel) mensurável. O resultado a seguir pode ser encontrado em [18].

Teorema (Teorema de Wiener). $\lim_{T \rightarrow \infty} \langle |\hat{\mu}_\psi(t)|^2 \rangle_T = 0$ se, e somente se, $P_{pp}\psi = 0$, em que P_{pp} representa a projeção ortogonal sobre \mathcal{H}_{pp} .

Antes de prosseguirmos, façamos a seguinte observação. Primeiramente, o Teorema de Wiener apenas nos diz que a média temporal entre 0 e $T > 0$ da probabilidade de retorno tende a zero quando T tende ao infinito, caso a medida espectral seja puramente contínua. O teorema, no entanto, não nos fornece informação sobre a convergência da probabilidade de retorno. É natural, portanto, indagarmos se existe uma extensão do Lema de Riemann-Lebesgue para vetores quaisquer em \mathcal{H} , ou seja, se o resultado se estende a todos os tipos espectrais. Infelizmente, quando não temos espectro puramente absolutamente contínuo, a situação é mais delicada, como discutiremos ao longo do texto.

Nas últimas décadas, foram desenvolvidas técnicas para se estudar algumas relações entre a dinâmica do grupo unitário de evolução gerado por um operador auto-adjunto e as propriedades fractais de suas medidas espectrais, particularmente no caso em que há componente singular-contínua. O que se faz, em geral, é buscar determinar o momento médio de ordem p associado ao operador de posição, $|X|^p := \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |n|^p \langle \delta_n, \cdot \rangle \delta_n$, a saber,

$$\langle \langle |X|^p \rangle \rangle_{\psi, T} := \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |n|^p |\langle e^{-iHt}\psi, \delta_n \rangle|^2 dt,$$

em que $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{Z}^d}$ é uma base ortonormal de \mathcal{H} . Mais especificamente, obtém-se em geral limitantes inferiores para os chamados expoentes dinâmicos, que neste caso denominamos expoentes de transporte, que nada mais são do que os expoentes de crescimento de $\langle \langle |X|^p \rangle \rangle_{\psi, T}$:

$$\alpha^-(\psi, p, d) := \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{\log \langle \langle |X|^p \rangle \rangle_{\psi, T}}{\log T}$$

$$\alpha^+(\psi, p, d) := \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\log \langle \langle |X|^p \rangle \rangle_{\psi, T}}{\log T}.$$

Sob algumas condições, pode-se mostrar que $\alpha^\pm(\psi, p, d) \in [0, p]$ (vide [12]). Existe uma conexão entre tais expoentes e o comportamento (como função do tempo) da distribuição do pacote de onda. Com efeito, pode-se assegurar que o que entendemos por localização, ou seja, quando para todo $\eta > 0$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle \langle |X|^p \rangle \rangle_{\psi, T}}{T^\eta} = 0,$$

não ocorre caso existam limitantes inferiores positivos para tais expoentes. Neste caso, dizemos que há transporte, já que ao menos para uma sequência temporal, parte do pacote de onda não se encontra confinado em uma dada região limitada do espaço. Para mais detalhes sobre o fenômeno de dispersão do pacote de onda, vide [10]; para uma discussão sobre os diversos tipos de localização, vide [7].

No caso particular em que $\alpha^-(\psi, p, d) = p$ (e, portanto, existe $T_0 > 0$ tal que para todo $T > T_0$, $\langle\langle |X|^p \rangle\rangle_{\psi, T} \sim T^p$), dizemos que o transporte é balístico, já que a “lei horária” que descreve o comportamento do pacote de onda se remete à do movimento retilíneo uniforme; caso $\alpha^+(\psi, p, d) = p$ (e, portanto, existe uma sequência T_n tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n \rightarrow +\infty$ e $\langle\langle |X|^p \rangle\rangle_{\psi, T_n} \sim T_n^p$), dizemos que o transporte é quase-balístico. Como veremos (Teorema 1.6, caso $\alpha = 1$), transporte balístico está associado à ocorrência de espectro puramente absolutamente contínuo; já o transporte quasi-balístico pode ocorrer mesmo quando o espectro é puramente pontual (vide Seção 3.4).

Um dos objetivos deste texto é, portanto, apresentar, para os expoentes de transporte, limitantes inferiores que justamente independam da natureza espectral do operador, indo bem além dos resultados clássicos sobre dinâmica quântica apresentados até aqui. Para tanto, discutimos os resultados centrais demonstrados por Barbaroux *et. al.* em [2], por Germinet *et. al.* em [10] e por Y. Last em [15].

O texto se estrutura da seguinte maneira: no Capítulo 1, introduzimos alguns conceitos básicos e demonstramos uma versão mais forte do Teorema de Guarneri-Combes, que fornece limitantes inferiores para $\langle\langle |X|^p \rangle\rangle_{\psi, T}$. Para tanto, usamos uma teoria devido a Rogers e Taylor [4] sobre decomposição de medidas positivas e finitas com respeito às medidas de Hausdorff. Ainda neste capítulo, apresentamos sucintamente os resultados demonstrados por Guarneri em [8], os quais também fornecem limitantes inferiores para $\langle\langle |X|^p \rangle\rangle_{\psi, T}$, só que em termos das dimensões de Hausdorff e de empacotamento. No Capítulo 2, obtemos limitantes inferiores em termos das chamadas dimensões fractais generalizadas, mostrando que estes resultados aprimoram os resultados de [8]. Por fim, no Capítulo 3, estabelecemos uma relação entre os resultados demonstrados no Capítulo 2 e as chamadas matrizes de transferência, obtendo-se um método prático de determinação de limitantes inferiores para as dimensões fractais generalizadas das medidas associadas a operadores de Schrödinger unidimensionais.

Adicionamos dois apêndices ao texto, um com tópicos sobre teoria espectral e outro com tópicos sobre medidas em espaços euclidianos. Estes compõem as principais ferramentas que utilizamos ao longo do texto.

Capítulo 1

Expoentes de transporte I

Iniciamos a seção apresentando o conceito central deste capítulo.

Definição 1.1. Seja μ uma medida de Borel em \mathbb{R} , $\alpha \in [0, 1]$ e denote por $|\cdot|$ a medida de Lebesgue. Dizemos que μ é uniformemente α -Hölder contínua (denotamos $U\alpha H$) se existir uma constante C tal que para qualquer intervalo I com $|I| < 1$, $\mu(I) < C|I|^\alpha$.

Guarneri [9] em 1989 mostrou que, para qualquer operador auto-adjunto H definido em $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, se μ_ψ é $U\alpha H$, então $\langle\langle |X|^2 \rangle\rangle_{\psi, T} > CT^{\frac{2\alpha}{d}} / \ln^2 T$, em que C é uma constante que depende somente de ψ . Em 1993, Combes [5] estendeu esse resultado para qualquer momento de ordem $p > 0$.

Teorema 1.1 (Teorema de Guarneri-Combes). *Se H é um operador auto-adjunto definido em $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ e μ_ψ é $U\alpha H$, então, para cada $p > 0$, existe uma constante $C_{\psi, p}$ que depende somente de ψ e p , tal que para todo $T > 0$,*

$$\langle\langle |X|^p \rangle\rangle_{\psi, T} > C_{\psi, p} T^{\frac{p\alpha}{d}}.$$

O nosso principal objetivo, neste capítulo, é demonstrar uma versão mais forte do Teorema de Guarneri-Combes (Teorema 1.6). Para tanto, seguimos a exposição feita por Y. Last em [15]. Este capítulo cumpre o papel de introduzir técnicas básicas que empregamos no decorrer de todo o texto.

1.1 Dinâmica para operadores compactos e medidas $U\alpha H$

Discutimos, de início, uma condição suficiente para que uma dada medida de Borel em \mathbb{R} seja $U\alpha H$.

Lema 1.1. *Sejam μ uma medida de Borel em \mathbb{R} e*

$$\langle\langle |\hat{\mu}| \rangle\rangle_T := \frac{1}{T} \int_0^T dt \int e^{-ixt} d\mu(x).$$

Então,

$$\langle |\widehat{\mu}| \rangle_T \geq \frac{1}{2} \int d\mu(x)d\mu(y) \frac{\text{sen}^2((x-y)T/2)}{((x-y)T/2)^2}.$$

Demonstração. Vide [15]. □

Teorema 1.2. *Se existir uma constante C tal que $\langle |\widehat{\mu}| \rangle_T < CT^{-\alpha}$ para qualquer $T > 0$, então μ é $U_{\frac{\alpha}{2}}H$.*

Demonstração. Suponha que μ não seja $U_{\frac{\alpha}{2}}H$, então existe uma sequência de intervalos $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ tais que a sequência $|I_n|$ converge a 0 quando n tende ao infinito e $\mu(I_n) > n|I_n|^{\alpha/2}$. Seja $T_n = \pi/2|I_n|$, então para qualquer $x, y \in I_n$, nós temos que $|(x-y)T_n| \leq |I_n|T_n \leq \pi/2$. Assim,

$$\frac{\text{sen}^2((x-y)T_n/2)}{((x-y)T_n/2)^2} \geq \frac{\text{sen}^2(\pi/4)}{(\pi/4)^2} = \frac{8}{\pi^2}.$$

Por outro lado, pelo Lema 1.1,

$$\langle |\widehat{\mu}| \rangle_{T_n} \geq \frac{1}{2} \int_{I_n \times I_n} d\mu(x)d\mu(y) \frac{\text{sen}^2((x-y)T_n/2)}{((x-y)T_n/2)^2}.$$

Desta forma,

$$\langle |\widehat{\mu}| \rangle_{T_n} \geq \frac{4(\mu(I_n))^2}{\pi^2} \geq \frac{4n^2}{\pi^2} |I_n|^2 = \frac{4n^2 \pi^\alpha}{\pi^{2\alpha}} T_n^{-\alpha},$$

o que demonstra o Teorema. □

Discutamos agora um exemplo.

Exemplo 1.1. Consideramos $\beta \in (1/2, 1)$ e $d\mu(x) = x^{-\beta} dx$ em $(0, 1]$. Seja $\alpha = 2(1 - \beta)$, então $|\widehat{\mu}(t)| < Ct^{-\alpha}$. Com efeito,

$$\widehat{\mu}(t) = \int_0^1 e^{-ixt} x^{-\beta} dx = t^{\beta-1} \int_0^1 e^{-ixt} (xt)^{-\beta} t dx = t^{-\alpha/2} \int_0^t e^{-iu} u^{-\beta} du.$$

Como $\int_0^\infty e^{-iu} u^{-\beta} du$ converge (use o Teorema de Resíduos), nós concluimos que $t^\alpha |\widehat{\mu}(t)| \rightarrow Const$ quando $t \rightarrow \infty$.

Sejam \mathcal{H} um espaço de Hilbert separável e $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador linear. Definimos o valor esperado de A no instante t como

$$\langle A \rangle := \langle \psi(t), A\psi(t) \rangle.$$

Teorema 1.3 (Teorema RAGE). $\lim_{T \rightarrow \infty} \langle \langle A \rangle \rangle_T = 0$ para qualquer operador compacto A se, e somente se, μ_ψ é puramente contínua.

Demonstração. Vide [18].

Uma consequência interessante do Teorema RAGE é que, se $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}^d)$, então, para vetores $\psi \notin \mathcal{H}_{pp}$, o momento médio de ordem p associado ao operador de posição tende ao infinito quando T tende ao infinito, o que é bem intuitivo. Com efeito, quando olhamos para o complementar da bola de raio N , esperamos que o momento cresça proporcionalmente a uma constante que dependa da “dimensão” do espaço multiplicada por N . Mais precisamente:

Corolário 1.1. *Seja $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}^d)$. Se $P_c\psi \neq 0$ para $\psi \in \mathcal{H}$, em que P_c representa a projeção ortogonal sobre $\mathcal{H}_c = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sc}$, então para qualquer $p > 0$ $\lim_{T \rightarrow \infty} \langle\langle |X|^p \rangle\rangle_{\psi, T} = \infty$.*

Demonstração. Sejam $\psi_1 = P_c\psi$, $\psi_2 = (1 - P_c)\psi$ e $\psi_j(t) = e^{-iHt}\psi_j$, $j = 1, 2$. Então, ψ_1 e ψ_2 pertencem a subespaços (invariantes) mutuamente ortogonais, $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$ são ortogonais para todo t , $\|\psi_j(t)\|^2 = \|\psi_j\|^2$ para $j = 1, 2$ e $\|\psi_1\|^2 + \|\psi_2\|^2 = \|\psi\|^2 = 1$. Com efeito,

$$\langle\psi_1, \psi_2\rangle = \langle P_c\psi, (1 - P_c)\psi \rangle = \langle P_c\psi, \psi \rangle - \langle P_c\psi, P_c\psi \rangle = \langle \psi, P_c\psi \rangle - \langle \psi, P_c^2\psi \rangle; \quad (1.1)$$

como $P_c^2 = P_c$, (1.1) nos fornece $\langle\psi_1, \psi_2\rangle = 0$. Agora, como e^{-iHt} é um operador unitário, temos que

$$\langle\psi_1(t), \psi_2(t)\rangle = \langle e^{-iHt}\psi_1, e^{-iHt}\psi_2 \rangle = \langle \psi_1, (e^{-iHt})^{-1}e^{-iHt}\psi_2 \rangle = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle = 0. \quad (1.2)$$

Um cálculo análogo ao realizado em (1.2) nos mostra que $\|\psi_j(t)\|^2 = \|\psi_j\|^2$ para $j = 1, 2$ e a ortogonalidade dos vetores ψ_1 e ψ_2 implicam em $\|\psi_1\|^2 + \|\psi_2\|^2 = \|\psi\|^2 = 1$.

Consideramos agora a projeção P_N sobre a esfera de raio N , a saber

$$P_N := \sum_{|n| \leq N} \langle \delta_n, \cdot \rangle \delta_n,$$

que é um operador de posto finito, e portanto compacto. Observamos que μ_{ψ_1} é puramente contínua, já que $\psi_1 = P_c\psi \neq 0$. Desta forma, o Teorema 1.3 nos diz que $\langle\|P_N\psi_1(t)\|^2\rangle_T \rightarrow 0$ quando $T \rightarrow \infty$. Usamos a linearidade da projeção e a desigualdade triangular, para obter

$$\langle\|P_N\psi(t)\|^2\rangle_T = \langle\|P_N\psi_1(t) + P_N\psi_2(t)\|^2\rangle_T \leq \langle(\|P_N\psi_1(t)\| + \|P_N\psi_2(t)\|)^2\rangle_T. \quad (1.3)$$

Por outro lado, a desigualdade de Cauchy-Schwarz implica em

$$\|P_N\psi_2(t)\|^2 = \langle\psi_2(t), P_N\psi_2(t)\rangle \leq \|\psi_2(t)\| \|P_N\psi_2(t)\|. \quad (1.4)$$

Dividimos os dois membros de (1.4) por $\|P_N\psi_2(t)\|$ e tomamos, em seguida, o quadrado, para obter

$$\|P_N\psi_2(t)\|^2 \leq \|\psi_2(t)\|^2 = \|\psi_2\|^2. \quad (1.5)$$

Combinamos (1.3) a (1.5) e usamos o fato de que $\langle \|P_N\psi_1(t)\|^2 \rangle_T \rightarrow 0$ quando $T \rightarrow \infty$, para chegar a

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \langle \|P_N\psi(t)\|^2 \rangle_T \leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \langle (\|P_N\psi_1(t)\| + \|P_N\psi_2(t)\|)^2 \rangle_T \leq \|\psi_2\|^2. \quad (1.6)$$

Agora, escrevamos

$$1 = \langle \|\psi(t)\|^2 \rangle_T = \langle \|P_N\psi(t)\|^2 \rangle_T + \langle \|(1 - P_N)\psi(t)\|^2 \rangle_T,$$

ou equivalentemente,

$$\langle \|(1 - P_N)\psi(t)\|^2 \rangle_T = 1 - \langle \|P_N\psi(t)\|^2 \rangle_T; \quad (1.7)$$

então, de (1.6) e (1.7), obtemos

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \langle \|(1 - P_N)\psi(t)\|^2 \rangle_T = \liminf_{T \rightarrow \infty} (1 - \langle \|P_N\psi(t)\|^2 \rangle_T) \geq 1 - \|\psi_2\|^2 = \|\psi_1\|^2. \quad (1.8)$$

Por fim, uma vez que e^{-iHt} é unitário, a igualdade de Parseval implica em

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} N^p |\langle e^{-iHt}\psi, \delta_n \rangle|^2 = N^p \|\psi\|^2 = N^p.$$

Daí,

$$\begin{aligned} N^p \langle \|(1 - P_N)\psi(t)\|^2 \rangle_T &= N^p \langle \psi(t), (1 - P_N)\psi(t) \rangle \\ &= N^p - \langle \psi(t), N^p P_N \psi(t) \rangle = N^p - \langle \psi(t), \sum_{|n| \leq N} N^p \langle \delta_n, \psi(t) \rangle \delta_n \rangle \\ &= N^p - \sum_{|n| \leq N} N^p |\langle e^{-iHt}\psi, \delta_n \rangle|^2 = \sum_{|n| > N} N^p |\langle e^{-iHt}\psi, \delta_n \rangle|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |n|^p |\langle e^{-iHt}\psi, \delta_n \rangle|^2. \end{aligned}$$

Assim, (1.8) implica em

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \langle \langle |X|^p \rangle \rangle_{\psi, T} \geq \|\psi_1\|^2 N^p.$$

Como N é arbitrário, obtemos

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle \langle |X|^p \rangle \rangle_{\psi, T} = \infty.$$

□

Apesar de simples, os argumentos utilizados acima não foram introduzidos apenas com o propósito de demonstrar o Corolário 1.1; veremos que tais argumentos, combinados com um resultado da teoria de decomposição de medidas de Rogers e Taylor (Teorema B.3), nos darão uma demonstração de uma versão mais forte do Teorema 1.1.

Teorema 1.4 (Strichartz [25]). *Seja μ uma medida $U\alpha H$, e para cada $f \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ considere,*

$$\widehat{f\mu}(t) := \int e^{-ixt} f(x) d\mu(x).$$

Então, existe uma constante C , que depende somente de μ , tal que para quaisquer $f \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ e $T > 0$,

$$\langle |\widehat{f\mu}(t)|^2 \rangle_T < C \|f\|^2 T^{-\alpha},$$

em que $\|f\|$ é a norma L^2 de f .

Demonstração. Como a desigualdade $e^{1-(t^2/T^2)} \geq 1$ é válida no intervalo $[0, T]$, temos que

$$\langle |\widehat{f\mu}(t)|^2 \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T dt |\widehat{f\mu}(t)|^2 \leq \frac{e}{T} \int_0^T dt e^{-t^2/T^2} |\widehat{f\mu}(t)|^2 \leq \frac{e}{T} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-t^2/T^2} |\widehat{f\mu}(t)|^2. \quad (1.9)$$

Observamos que

$$|\widehat{f\mu}(t)|^2 = \int e^{-ixt} f(x) d\mu(x) \int e^{-i(-y)t} \overline{f(y)} d\mu(y). \quad (1.10)$$

Combinamos (1.9) a (1.10) e aplicamos o Teorema de Fubini [Teorema 8.8. [21]] para obter

$$\begin{aligned} \langle |\widehat{f\mu}(t)|^2 \rangle_T &\leq \frac{e}{T} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-t^2/T^2} \int d\mu(x) d\mu(y) f(x) \overline{f(y)} e^{-i(x-y)t} \\ &= \frac{e}{T} \int d\mu(x) d\mu(y) f(x) \overline{f(y)} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-t^2/T^2 - i(x-y)t}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Agora, da identidade

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-t^2/T^2 - i(x-y)t} = T\sqrt{\pi} e^{-(x-y)^2 T^2/4},$$

obtemos

$$\langle |\widehat{f\mu}(t)|^2 \rangle_T \leq e\sqrt{\pi} \int d\mu(x) d\mu(y) (|f(x)| e^{-(x-y)^2 T^2/2}) (|f(y)| e^{-(x-y)^2 T^2/2}). \quad (1.12)$$

Em seguida, aplicamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o Teorema de Fubini a (1.12), e chegamos a

$$\langle |\widehat{f\mu}(t)|^2 \rangle_T \leq e\sqrt{\pi} \int d\mu(x) |f(x)|^2 \int d\mu(y) e^{-(x-y)^2 T^2/4}. \quad (1.13)$$

Nesse momento, a hipótese de que μ é $U\alpha H$ nos permitirá estimar $\int d\mu(y) e^{-(x-y)^2 T^2/4}$. De fato, como μ é $U\alpha H$, existe uma constante C_1 tal que $\mu(I) < C_1 |I|^\alpha$ para $|I| < 1$. Sem perda de generalidade, suponhamos $T > 1$ (para o caso $T < 1$ a partição que faremos na reta real depende de T); então, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$\int d\mu(y) e^{-(x-y)^2 T^2/4} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{n}{T} \leq |x-y| < \frac{n+1}{T}} d\mu(y) e^{-(x-y)^2 T^2/4}$$

$$\leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} C_1 T^{-\alpha} e^{-n^2/4}.$$

Por fim, se definirmos $C := e\sqrt{\pi}2C_1 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2/4}$, o resultado se segue da desigualdade acima combinada a (1.13). □

Encerramos esta seção com um resultado que nos permitirá demonstrar uma versão mais forte do Teorema 1.1 (Teorema 1.6).

Lema 1.2. *Se μ_ψ é U α H, então existe uma constante C_ψ tal que para qualquer $\varphi \in \mathcal{H}$ com $\|\varphi\| \leq 1$,*

$$\langle |\langle \varphi, \psi(t) \rangle|^2 \rangle_T < C_\psi T^{-\alpha}.$$

Demonstração. Primeiramente, lembramos que o subespaço cíclico gerado por ψ (e H) é definido por

$$\mathcal{H}_\psi := \{f(H)\psi \mid f \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)\}.$$

Pelo Teorema Espectral (vide Teorema A.3), H restrito a \mathcal{H}_ψ é unitariamente equivalente ao operador de multiplicação por x em $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$, ou seja, existe um operador unitário $U : \mathcal{H}_\psi \rightarrow L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$ tal que

$$(UHU^{-1}f)(x) = xf(x).$$

Temos também que $U(e^{-iHt}\psi)(x) = e^{-ixt}$.

Seja $P_\psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_\psi$ a projeção ortogonal sobre o subespaço cíclico gerado por ψ . Então, para todo $\varphi \in \mathcal{H}$ existe $f_\varphi \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$ com $\|f_\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)} \leq \|\varphi\|$ tal que

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \psi(t) \rangle &= \langle \varphi, e^{-iHt}\psi \rangle = \langle \varphi, P_\psi(e^{-iHt}\psi) \rangle = \langle P_\psi\varphi, e^{-iHt}\psi \rangle \\ &= \langle U(P_\psi\varphi), U(e^{-iHt}\psi) \rangle_{L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)} \\ &= \langle f_\varphi(x), e^{-ixt} \rangle_{L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)} = \int e^{-ixt} f_\varphi(x) d\mu_\psi(x) \equiv \widehat{f_\varphi\mu_\psi}. \end{aligned}$$

Assim, o Teorema 1.4 implica em

$$\langle |\langle \varphi, \psi(t) \rangle|^2 \rangle_T = \langle |\widehat{f_\varphi\mu_\psi}|^2 \rangle_T < \|f_\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)}^2 C_\psi T^{-\alpha} \leq \|\varphi\|^2 C_\psi T^{-\alpha} \leq C_\psi T^{-\alpha},$$

o que encerra a demonstração. □

Antes de demonstrarmos o próximo resultado, recordamos que se $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é um operador linear compacto, em que \mathcal{H} é um espaço de Hilbert separável, então A pode ser obtido como o limite uniforme de uma sequência de operadores de posto finito. Simon [23] apresentou explicitamente uma forma de se escrever essa sequência, a saber,

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \langle \varphi_n, \cdot \rangle \psi_n,$$

em que $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ são bases ortonormais de \mathcal{H} , $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, $E_n \geq 0$, é uma sequência monótona decrescente e $\|A\|_p := (\sum_{n=1}^{\infty} E_n^p)^{1/p}$ define uma norma no espaço vetorial dos operadores compactos, a chamada p -ésima norma de Schatten de A .

Teorema 1.5. *Se μ_ψ é $U\alpha H$, então existe uma constante C_ψ tal que para qualquer operador compacto A , $p \in \mathbb{N}$ e $T > 0$,*

$$\langle |\langle A \rangle| \rangle_T < C_\psi^{1/p} \|A\|_p T^{-\alpha/p},$$

em que $\|A\|_p$ denota a p -ésima norma de Schatten de A .

Demonstração. Escrevamos

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \langle \varphi_n, \cdot \rangle \psi_n;$$

então,

$$\begin{aligned} \langle |\langle A \rangle| \rangle_T &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \left| \langle \psi(t), \sum_{n=1}^{\infty} E_n \langle \varphi_n, \psi(t) \rangle \psi_n \rangle \right| \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \left| \sum_{n=1}^{\infty} E_n \langle \psi(t), \langle \varphi_n, \psi(t) \rangle \psi_n \rangle \right| \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \left| \sum_{n=1}^{\infty} E_n \overline{\langle \varphi_n, \psi(t) \rangle} \langle \psi(t), \psi_n \rangle \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} E_n \frac{1}{T} \int_0^T dt |\langle \varphi_n, \psi(t) \rangle \langle \psi(t), \psi_n \rangle|. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Para obter a desigualdade em (1.14), usamos a desigualdade triangular e o Teorema da Convergência Monótona [Teorema 1.26. [21]]. Aplicamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz a (1.14) e obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n \frac{1}{T} \int_0^T dt |\langle \varphi_n, \psi(t) \rangle \langle \psi(t), \psi_n \rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(\frac{1}{T} \int_0^T dt |\langle \varphi_n, \psi(t) \rangle|^2 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{T} \int_0^T dt |\langle \psi(t), \psi_n \rangle|^2 \right)^{1/2},$$

ou equivalentemente,

$$\langle\langle A \rangle\rangle_T \leq \sum_{n=1}^{\infty} E_n (\langle\langle \varphi_n, \psi(t) \rangle\rangle_T^2)^{1/2} (\langle\langle \psi(t), \psi_n \rangle\rangle_T^2)^{1/2}. \quad (1.15)$$

Sejam $p, q \in \mathbb{N}$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; a desigualdade de Hölder e (1.15) implicam em

$$\begin{aligned} \langle\langle A \rangle\rangle_T &\leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} E_n^p \right]^{1/p} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (\langle\langle \varphi_n, \psi(t) \rangle\rangle_T^2)^{q/2} (\langle\langle \psi(t), \psi_n \rangle\rangle_T^2)^{q/2} \right]^{1/q} \\ &\leq \|A\|_p \left[\sum_{n=1}^{\infty} (\langle\langle \varphi_n, \psi(t) \rangle\rangle_T^2)^q \sum_{n=1}^{\infty} (\langle\langle \psi(t), \psi_n \rangle\rangle_T^2)^q \right]^{1/2q}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Agora, o Lema 1.2 nos garante que existe uma constante C_ψ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\langle\langle \varphi_n, \psi(t) \rangle\rangle_T^2 < C_\psi T^{-\alpha}, \quad \langle\langle \psi_n, \psi(t) \rangle\rangle_T^2 < C_\psi T^{-\alpha}.$$

Além disso, como $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ são bases ortonormais e e^{-iHt} é unitário, a igualdade de Parseval implica em

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle\langle \varphi_n, \psi(t) \rangle\rangle_T^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle\langle \psi(t), \psi_n \rangle\rangle_T^2 = \|\psi\|^2 = 1.$$

Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\langle\langle \varphi_n, \psi(t) \rangle\rangle_T^2)^q < (C_\psi T^{-\alpha})^{q-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\langle\langle \psi(t), \psi_n \rangle\rangle_T^2)^q < (C_\psi T^{-\alpha})^{q-1} \quad (1.17)$$

e portanto, (1.16) e (1.17) implicam em

$$\langle\langle A \rangle\rangle_T < \|A\|_p [(C_\psi T^{-\alpha})^{q-1} (C_\psi T^{-\alpha})^{q-1}]^{1/2q} = \|A\|_p (C_\psi T^{-\alpha})^{(q-1)/q} = C_\psi^{1/p} \|A\|_p T^{-\alpha/p},$$

como queríamos demonstrar. □

1.2 Uma versão mais forte do Teorema de Guarneri-Combes

Demonstramos em seguida uma versão mais forte do Teorema 1.1. Com efeito, em vez de pedirmos que μ_ψ seja $U\alpha H$ na hipótese do teorema, pediremos que $P_{\alpha c}\psi \neq 0$, em que $P_{\alpha c}$ representa a projeção ortogonal sobre $\mathcal{H}_{\alpha c}$, o subespaço α -Hausdorff contínuo (vide Definição B.7 e Teorema B.2). Enfatizamos que o novo resultado se estende a vetores cuja medida espectral associada seja, em um certo sentido, quase $U\alpha H$, isto é, cuja medida associada possa ser decomposta em uma parte $U\alpha H$ e outra parte que atribui peso arbitrariamente pequeno a todo boreliano da reta (vide Teorema B.3).

Teorema 1.6. *Se H é um operador auto-adjunto definido em $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ e $P_{\alpha c}\psi \neq 0$, então, para cada $p > 0$, existe uma constante $C_{\psi,p}$ (que depende somente de ψ e p) tal que para todo $T > 0$,*

$$\langle \langle |X|^p \rangle \rangle_{\psi,T} > C_{\psi,p} T^{\frac{p\alpha}{d}}.$$

Demonstração. Sejam $\psi_{\alpha c} = P_{\alpha c}\psi$ e $\psi_{\alpha s} = (1 - P_{\alpha c})\psi$. Como $P_{\alpha c}\psi \neq 0$, temos que $\mu_{\psi_{\alpha c}}$ é α -Hausdorff contínua.

Agora, sabemos do Teorema B.3 que existem medidas de Borel mutuamente singulares, $\mu_{\psi_{\alpha c,1}}$ e $\mu_{\psi_{\alpha c,2}}$, tais que $d\mu_{\psi_{\alpha c}} = d\mu_{\psi_{\alpha c,1}} + d\mu_{\psi_{\alpha c,2}}$, em que $\mu_{\psi_{\alpha c,1}}$ é U α H e $\mu_{\psi_{\alpha c,2}}(\mathbb{R}) < \frac{1}{2}\|\psi_{\alpha c}\|^2$. Como essas medidas são mutuamente singulares, existe um conjunto de Borel $S \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\mu_{\psi_{\alpha c,1}}$ é suportada em S (vide Definição B.5) e $\mu_{\psi_{\alpha c,2}}(S) = 0$.

Sejam $P(S) := \chi_S(H)$, a projeção espectral sobre S , $\psi_1 = P(S)P_{\alpha c}\psi$ e $\psi_2 = (1 - P(S))\psi_{\alpha c} + \psi_{\alpha s}$. Então, $\mu_{\psi_1} = \mu_{\psi_{\alpha c,1}}$. De fato,

$$\begin{aligned} \mu_{\psi_1}(S) &= \langle \psi_1, P(S)\psi_1 \rangle = \langle P(S)P_{\alpha c}\psi, P(S)^2P_{\alpha c}\psi \rangle = \langle P(S)P_{\alpha c}\psi, P(S)P_{\alpha c}\psi \rangle \\ &= \langle P_{\alpha c}\psi, P(S)^2P_{\alpha c}\psi \rangle = \langle P_{\alpha c}\psi, P(S)P_{\alpha c}\psi \rangle = \langle \psi_{\alpha c}, P(S)\psi_{\alpha c} \rangle = \mu_{\psi_{\alpha c}}(S) = \mu_{\psi_{\alpha c,1}}(S) + \mu_{\psi_{\alpha c,2}}(S) \\ &= \mu_{\psi_{\alpha c,1}}(S) + 0 = \mu_{\psi_{\alpha c,1}}(S). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Logo, como $\mu_{\psi_1}(S) = \mu_{\psi_{\alpha c,1}}(S)$ e, $\mu_{\psi_{\alpha c,1}}$ e μ_{ψ_1} são suportadas em S , a igualdade em (1.18) é válida para qualquer boreliano. Assim, temos que μ_{ψ_1} é U α H e

$$\|\psi_1\|^2 = \int d\psi_1 = \int d\psi_{\alpha c} - \int d\mu_{\psi_{\alpha c,2}} > \|\psi_{\alpha c}\|^2 - \frac{1}{2}\|\psi_{\alpha c}\|^2 = \frac{1}{2}\|\psi_{\alpha c}\|^2 > 0,$$

pois $P_{\alpha c}\psi \neq 0$.

Note que $\psi = \psi_1 + \psi_2$ e $\|\psi_1\|^2 + \|\psi_2\|^2 = \|\psi\|^2 = 1$ (para um argumento análogo, vide a demonstração do Corolário 1.1).

Consideramos, agora, a projeção sobre a esfera de raio N , $P_N = \sum_{|n| \leq N} \langle \delta_n, \cdot \rangle \delta_n$. Então, existe uma constante C_d , que depende somente de d , tal que

$$\|P_N\|_1 < C_d N^d. \tag{1.19}$$

Usaremos agora as hipóteses de P_N ser um operador compacto (pois é de posto finito) e de μ_{ψ_1} ser U α H. De fato, combinamos (1.19) ao Teorema 1.5 para obter

$$\langle \langle \|P_N\psi_1(t)\|^2 \rangle \rangle_T = \langle \langle \psi_1(t), P_N\psi_1(t) \rangle \rangle_T < C_{\psi_1} \|P_N\|_1 T^{-\alpha} < C_{\psi_1} C_d N^d T^{-\alpha}. \tag{1.20}$$

Definamos

$$N_T := \left(\frac{\|\psi_1\|^4 T^\alpha}{64 C_{\psi_1} C_d} \right)^{1/d}. \quad (1.21)$$

Então, (1.20) implica em

$$\langle \|P_{N_T} \psi_1(t)\|^2 \rangle_T < \frac{\|\psi_1\|^4}{64}. \quad (1.22)$$

Por fim, usamos (1.22) (e raciocinamos de modo análogo ao modo como raciocinamos na demonstração do Corolário 1.1) para obter

$$\begin{aligned} \langle \|P_{N_T} \psi(t)\|^2 \rangle_T &\leq \langle (\|P_{N_T} \psi_1(t)\| + \|P_{N_T} \psi_2(t)\|)^2 \rangle_T \leq \langle (\|P_{N_T} \psi_1(t)\| + \|\psi_2\|)^2 \rangle_T \\ &\leq \left(\sqrt{\langle \|P_{N_T} \psi_1(t)\|^2 \rangle_T} + \|\psi_2\| \right)^2 < \left(\frac{\|\psi_1\|^2}{8} + \|\psi_2\| \right)^2 = \frac{\|\psi_1\|^4}{64} + \|\psi_2\|^2 + \frac{\|\psi_1\|^2 \|\psi_2\|}{4} \\ &< \|\psi_2\|^2 + \frac{\|\psi_1\|^2}{2} = 1 - \frac{\|\psi_1\|^2}{2}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Observamos que a terceira desigualdade de (1.23) se segue da desigualdade de Jensen [Teorema 3.3 [21]].

Agora,

$$1 = \langle \|P_{N_T} \psi(t)\|^2 \rangle_T + \langle \|(1 - P_{N_T})\psi(t)\|^2 \rangle_T; \quad (1.24)$$

logo, (1.23) implica em

$$\langle \|(1 - P_{N_T})\psi(t)\|^2 \rangle_T > \frac{\|\psi_1\|^2}{2}$$

e assim obtemos

$$\langle \langle |X|^p \rangle \rangle_{\psi, T} > \frac{\|\psi_1\|^2}{2} N_T^p = \frac{\|\psi_1\|^2}{2} \left(\frac{\|\psi_1\|^4}{64 C_{\psi_1} C_d} \right)^{p/d} T^{p\alpha/d},$$

o que encerra a demonstração. □

1.3 Expoentes de transporte I

Para encerrarmos a discussão deste capítulo, apresentamos outro resultado que relaciona a dinâmica do grupo unitário de evolução gerado por um operador auto-adjunto (expoentes de transporte α^- e α^+) e algumas propriedades fractais de suas medidas espectrais, mais especificamente, suas dimensões de Hausdorff e de empacotamento (vide a Seção B.1 para as definições). Não nos preocupamos em demonstrar tal resultado, que foi apresentado por Guarneri em [8]; para detalhes, vide [17].

Teorema 1.7. *Se H é um operador auto-adjunto definido em $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, então*

$$\alpha^-(\psi, p, d) \geq \dim_{\mathbb{H}}(\mu_{\psi})p/d$$

$$\alpha^+(\psi, p, d) \geq \dim_{\mathbb{P}}(\mu_{\psi})p/d.$$

O resultado acima, apesar de interessante, certamente não é ótimo. Com efeito, alguns operadores de Schrödinger unidimensionais apesar de possuírem espectro puramente pontual (e portanto, com $\dim_{\mathbb{H}}(\mu_{\delta_1}) = \dim_{\mathbb{P}}(\mu_{\delta_1}) = 0$), admitem transporte quase-balístico (isto é, $\alpha^+(\psi, 2, 1) = 2$). Para mais detalhes sobre esses exemplos, consulte [7].

No próximo capítulo, estudaremos em detalhes um resultado que fornece limitantes inferiores para os expoentes de transporte mais precisos dos que os fornecidos pelo Teorema 1.7. Para tanto, introduziremos as chamadas dimensões fractais generalizadas.

Capítulo 2

Expoentes de transporte II

Este capítulo representa o cerne do nosso trabalho. Buscamos, inicialmente, relacionar as dimensões de Hausdorff e de empacotamento às chamadas dimensões fractais generalizadas (Proposição 2.1). Em seguida, discutimos como estas relações nos levam à obtenção de limitantes inferiores para os expoentes de transporte (α^- e α^+) mais precisos (Teorema 2.1) do que os fornecidos pelo Teorema 1.7.

Os resultados que discutiremos neste capítulo foram apresentados por Barbaroux *et. al.* em [2].

2.1 Dimensões fractais generalizadas

Seja μ uma medida (de Borel positiva) de probabilidade. Sejam $q \in (-\infty, 1)$ e $\epsilon \in (0, 1)$. Definimos a função $I_\mu(q, \epsilon)$, que toma valores em $[1, \infty]$, a qual damos o nome de integral de transporte, por

$$I_\mu(q, \epsilon) := \int_{\text{supp}\mu} \mu([x - \epsilon, x + \epsilon])^{q-1} d\mu(x).$$

As dimensões fractais generalizadas inferior e superior da medida μ são definidas, respectivamente, por

$$D_\mu^-(q) := \frac{1}{1-q} \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log I_\mu(q, \epsilon)}{-\log \epsilon}$$
$$D_\mu^+(q) := \frac{1}{1-q} \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log I_\mu(q, \epsilon)}{-\log \epsilon}.$$

Se para algum $\epsilon > 0$ $I_\mu(q, \epsilon) = \infty$, então $D_\mu^+(q) := \infty$ e $D_\mu^-(q) := \infty$. É possível mostrar que, quando $q \in (0, 1)$, $D_\mu^\pm(q) \leq 1$ (para detalhes, consulte [2]).

Encerramos esta seção estabelecendo algumas relações entre estas dimensões e as dimensões de Hausdorff e de empacotamento.

Proposição 2.1. *Para qualquer $q \in (-\infty, 1)$, valem*

- (i) $D_{\mu}^{-}(q) \geq \dim_{\mathbb{H}}(\mu)$
- (ii) $D_{\mu}^{+}(q) \geq \dim_{\mathbb{P}}(\mu)$.

Demonstração. (i) Como $q \in (-\infty, 1)$, temos que $q - 1 < 0$; então, para qualquer boreliano $A \subset \mathbb{R}$, vale

$$\begin{aligned} I_{\mu}(q, \epsilon)^{1/(q-1)} &= \left(\int_{\mathbb{R}} \mu([x - \epsilon, x + \epsilon])^{q-1} d\mu(x) \right)^{1/(q-1)} \\ &\leq \left(\int_A \mu([x - \epsilon, x + \epsilon])^{q-1} d\mu(x) \right)^{1/(q-1)}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Por outro lado, a desigualdade de Jensen [Teorema 3.3. [21]] nos diz que

$$\left(\int_A \mu([x - \epsilon, x + \epsilon])^{q-1} d\mu(x) \right)^{1/(q-1)} \leq \int_A \mu([x - \epsilon, x + \epsilon]) d\mu(x); \quad (2.2)$$

assim, (2.1) e (2.2) implicam em

$$I_{\mu}(q, \epsilon)^{1/(q-1)} \leq \int_A \mu([x - \epsilon, x + \epsilon]) d\mu(x). \quad (2.3)$$

Para todo $\delta \in (0, 1)$, seja

$$A_{\delta}^{(H)}(\epsilon) := \{x \in \mathbb{R} \mid \mu([x - \epsilon, x + \epsilon]) < \epsilon^{\dim_{\mathbb{H}}(\mu) - \delta}\}.$$

Agora, definamos

$$A_{\delta}^{(H)} := \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} A_{\delta}^{(H)}(\epsilon).$$

Observamos que

$$A_{\delta}^{(H)} \supset \{x \in \mathbb{R} \mid \gamma_{\mu}^{-}(x) > \dim_{\mathbb{H}}(\mu) - \delta\},$$

em que $\gamma_{\mu}^{-}(x) := \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(\mu([x - \epsilon, x + \epsilon]))}{\log(\epsilon)}$. Com efeito, seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma_{\mu}^{-}(x) > \dim_{\mathbb{H}}(\mu) - \delta$; assim, dado ϵ_0 suficientemente pequeno, para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, vale

$$\frac{\log(\mu([x - \epsilon, x + \epsilon]))}{\log(\epsilon)} > \dim_{\mathbb{H}}(\mu) - \delta. \quad (2.4)$$

Logo, (2.4) implica em

$$\log(\mu([x - \epsilon, x + \epsilon])) < \log(\epsilon^{\dim_{\mathbb{H}}(\mu) - \delta}), \quad (2.5)$$

e portanto, em

$$\mu([x - \epsilon, x + \epsilon]) < \epsilon^{\dim_{\mathbb{H}}(\mu) - \delta}; \quad (2.6)$$

assim, temos que $x \in A_{\delta}^{(H)}$.

Por outro lado, como $\dim_{\mathbb{H}}(\mu) = \mu\text{-ess. sup } \gamma_{\mu}^{-}(x)$ (vide Teorema B.1), temos que

$$\mu(\{x \in \mathbb{R} \mid \gamma_{\mu}^{-}(x) > \dim_{\mathbb{H}}(\mu) - \delta\}) > 0.$$

Logo, $\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \mu(A_{\delta}^{(H)})(\epsilon) \geq \mu(A_{\delta}^{(H)}) \geq \mu(\{x \in \mathbb{R} \mid \gamma_{\mu}^{-}(x) > \dim_{\mathbb{H}}(\mu) - \delta\}) > 0$. Assim, o logaritmo do número $\mu(A_{\delta}^{(H)})(\epsilon)\epsilon^{\dim_{\mathbb{H}}(\mu) - \delta}$ está bem definido.

Por fim, se tomarmos $A = A_{\delta}^{(H)}(\epsilon)$ em (2.3), obtemos

$$I_{\mu}(q, \epsilon)^{1/(q-1)} \leq \int_{A_{\delta}^{(H)}(\epsilon)} \mu([x - \epsilon, x + \epsilon]) d\mu(x) \leq \mu(A_{\delta}^{(H)}(\epsilon))\epsilon^{\dim_{\mathbb{H}}(\mu) - \delta},$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} D_{\mu}^{-}(q) &= \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log I_{\mu}(q, \epsilon)^{1/(q-1)}}{\log(\epsilon)} \\ &\geq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log\left(\mu(A_{\delta}^{(H)}(\epsilon))\epsilon^{\dim_{\mathbb{H}}(\mu) - \delta}\right)}{\log(\epsilon)} = \dim_{\mathbb{H}}(\mu) - \delta. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Como a desigualdade em (2.7) vale para todo $\delta \in (0, 1)$, demonstramos (i).

(ii) Seja $\epsilon_k = e^{-k}$. Para todo $\delta \in (0, 1)$, definamos

$$A_{\delta}^{(P)}(\epsilon_k) := \{x \in \mathbb{R} \mid \mu([x - \epsilon_k, x + \epsilon_k]) < \epsilon_k^{\dim_{\mathbb{P}}(\mu) - \delta}\}.$$

Observamos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \log(\epsilon_k)/\log(\epsilon_{k+1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} k/(k+1) = 1$. Assim,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \log \mu([x - \epsilon_k, x + \epsilon_k]) / \log(\epsilon_k) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \log \mu([x - \epsilon, x + \epsilon]) / \log(\epsilon). \quad (2.8)$$

Deixamos implícito acima o emprego do Teorema do Confronto para $k \rightarrow \infty$, em que $\epsilon \in [\epsilon_{k+1}, \epsilon_k]$. Logo, (2.8) implica em

$$\begin{aligned} A_{\delta}^{(P)} &:= \limsup_{k \rightarrow \infty} A_{\delta}^{(P)}(\epsilon_k) \supset \{x \in \mathbb{R} \mid \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \mu([x - \epsilon_k, x + \epsilon_k])}{\log(\epsilon_k)} > \dim_{\mathbb{P}}(\mu) - \delta\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \gamma_{\mu}^{+}(x) > \dim_{\mathbb{P}}(\mu) - \delta\}. \end{aligned}$$

A inclusão acima é obtida de modo análogo ao que fizemos em (i). Assim (do Teorema B.1) temos que $\mu(A_\delta^{(P)}) > 0$. Logo, pelo Lema de Borel-Cantelli, $\sum_k \mu(A_\delta^{(P)}(\epsilon_k)) = \infty$, e portanto, existe uma subsequência $\epsilon_{k(n)} \searrow 0$ de ϵ_k tal que $\mu(A_\delta^{(P)}(\epsilon_{k(n)})) \geq k(n)^{-2} = (\log \epsilon_{k(n)})^{-2}$. Com efeito, se tal subsequência não existisse, pelo critério da comparação, esta série seria convergente, uma contradição. Desta forma, o logaritmo do número $\mu(A_\delta^{(P)}(\epsilon_{k(n)})) (\epsilon_{k(n)})^{\dim_{\mathbb{P}}(\mu) - \delta}$ está bem definido.

Agora, tomamos $A = A_\delta^{(P)}(\epsilon_{k(n)})$ em (2.3) e obtemos

$$I_\mu(q, \epsilon)^{1/(q-1)} \leq \int_{A_\delta^{(P)}(\epsilon_{k(n)})} \mu([x - \epsilon, x + \epsilon]) d\mu(x) \leq \mu(A_\delta^{(P)}(\epsilon_{k(n)})) (\epsilon_{k(n)})^{\dim_{\mathbb{P}}(\mu) - \delta},$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} D_\mu^+(q) &= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log I_\mu(q, \epsilon)^{1/(q-1)}}{\log(\epsilon)} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\mu(A_\delta^{(P)}(\epsilon_{k(n)})) (\epsilon_{k(n)})^{\dim_{\mathbb{P}}(\mu) - \delta}\right)}{\log(\epsilon_{k(n)})} = \dim_{\mathbb{P}}(\mu) - \delta. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Como a desigualdade em (2.9) vale para todo $\delta \in (0, 1)$, demonstramos (ii). □

2.2 Expoentes de transporte II

Na seção anterior, introduzimos as dimensões fractais generalizadas e estabelecemos algumas relações entre estas dimensões e as dimensões de Hausdorff e de empacotamento. Uma observação interessante que poderia ser posta na seção anterior, mas que propositalmente deixamos para agora é que há exemplos de medidas finitas puramente pontuais cujas dimensões fractais generalizadas são não-nulas [Apêndice D, [2]]. Recorde que, neste caso, as dimensões de Hausdorff e de empacotamento são necessariamente nulas. Isto nos leva a crer que as estimativas fornecidas pelo Teorema 1.7 podem ser aprimoradas ao se usarem as dimensões fractais generalizadas, uma vez conhecidas as desigualdades da Proposição 2.1. De fato, sob uma hipótese adicional, podemos obter estimativas melhores.

Teorema 2.1. *Sejam H um operador auto-adjunto definido em $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ e $\psi \in \mathcal{H}$ com $\|\psi\| = 1$. Assuma que a medida espectral μ_ψ associada a ψ é tal que*

$$D_{\mu_\psi}^\pm(s) < +\infty \text{ para qualquer } s \in (0, 1). \quad (\text{H})$$

Então, valem

$$\alpha^-(\psi, p, d) \geq \frac{p}{d} D_{\mu_\psi}^- \left(\frac{1}{1 + p/d} \right)$$

$$\alpha^+(\psi, p, d) \geq \frac{p}{d} D_{\mu_\psi}^+ \left(\frac{1}{1 + p/d} \right).$$

Há critérios para se verificar a validade da hipótese (H); basta, por exemplo, que a medida espectral tenha suporte compacto, o que sempre ocorre caso o operador seja limitado. Para detalhes, vide o Apêndice C em [2].

Agora, discutiremos em detalhes os resultados que implicam no Teorema 2.1. De início, assim como no Teorema 1.6, encontraremos limitantes inferiores para $\langle\langle |X|^p \rangle\rangle_{\psi, T}$.

Lema 2.1. *Considere $h(z)$ uma função qualquer em $L^1(\mathbb{R})$. Seja H um operador auto-adjunto definido em $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ e A um operador de Hilbert-Schmidt (Exemplo A.4) também definido em \mathcal{H} . Para quaisquer dois vetores ψ, ϕ em \mathcal{H} , definamos as quantidades*

$$D_{\phi, \psi}^{(h)}(T) := \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle A e^{-iHt} \phi, e^{-iHt} \psi \rangle h(t/T) dt$$

e

$$U_{\phi, \psi}^{(h)}(T) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} d\mu_\phi(x) d\mu_\psi(y) |\widehat{h}((x-y)T)|^2.$$

Então, vale

$$|D_{\phi, \psi}^{(h)}(T)| \leq \|A\|_2 (U_{\phi, \psi}^{(h)}(T))^{1/2},$$

em que $\|A\|_2$ é a norma de Hilbert-Schmidt de A .

Demonstração. Como A é um operador de Hilbert-Schmidt (em particular, compacto [Teorema 1.4.6 [18]]), escrevamos

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \langle \cdot, \phi_n \rangle \psi_n,$$

em que $\|A\|_2^2 = (\sum_{n=1}^{\infty} E_n^2)$. Assim,

$$D_{\phi, \psi}^{(h)}(T) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \langle e^{-iHt} \phi, \phi_n \rangle \langle \psi_n, e^{-iHt} \psi \rangle h(t/T) dt. \quad (2.10)$$

Agora, para todo $\phi \in \mathcal{H}$, pelo Teorema Espectral (Teorema A.3), existe um operador unitário $U : \mathcal{H}_\phi \rightarrow L^2(\mathbb{R}, d\mu_\phi)$ tal que $U\phi = 1$ e $U(e^{-iHt}\phi)(x) = e^{-ixt}$. Denote a projeção ortogonal sobre \mathcal{H}_ϕ por P_ϕ ; então, existe uma função $u(n, x)$ em $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\phi)$, $u(n, \cdot) \equiv U(P_\phi \phi_n)(\cdot)$, de modo que

$$\langle e^{-iHt} \phi, \phi_n \rangle = \int_{\mathbb{R}} d\mu_\phi(x) e^{-ixt} \overline{u(n, x)}. \quad (2.11)$$

Uma fórmula análoga vale para ψ , com $v(n, \cdot) \equiv U(P_\psi \psi_n)(\cdot)$ (uma construção semelhante a esta se encontra em detalhes na demonstração do Lema 1.2). Desta forma, (2.10), (2.11) e uma mudança de variável do tipo $z = t/T$ implicam em

$$D_{\phi, \psi}^{(h)}(T) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} d\mu_\phi(x) d\mu_\psi(y) \widehat{h}((x-y)T) S(x, y), \quad (2.12)$$

em que

$$S(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \overline{u(n, x)} v(n, y).$$

Esta série converge em $L^2(\mathbb{R}^2, d\mu_\phi \times d\mu_\psi)$.

Agora, (2.12) implica em

$$|D_{\phi, \psi}^{(h)}(T)|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} d\mu_\phi(x) d\mu_\psi(y) |\widehat{h}((x-y)T)|^2 |S(x, y)|^2. \quad (2.13)$$

Aplicamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz a (2.13), e obtemos

$$|D_{\phi, \psi}^{(h)}(T)|^2 \leq U_{\phi, \psi}^{(h)}(T) \|S\|_{L^2(\mathbb{R}^2, d\mu_\phi \times d\mu_\psi)}^2.$$

Resta-nos mostrar que $\|S\|_{L^2(\mathbb{R}^2, d\mu_\phi \times d\mu_\psi)}^2 \leq \|A\|^4$. Uma construção análoga a que foi feita em (2.11) nos leva à

$$\|S\|_{L^2(\mathbb{R}^2, d\mu_\phi \times d\mu_\psi)}^2 = \sum_{n, k=1}^{\infty} E_n E_k a_{nk} \overline{b_{nk}}, \quad (2.14)$$

em que $a_{nk} = \langle P_\phi \phi_k, \phi_n \rangle$ e $b_{nk} = \langle \psi_k, P_\psi \psi_n \rangle$.

Sabemos da igualdade de Parseval que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{nk}|^2 = \|P_\phi \phi_k\|^2 \text{ e } \sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}|^2 = \|P_\psi \psi_n\|^2; \quad (2.15)$$

assim, como $\|\phi_k\| = \|\psi_n\| = 1$ para todos $n, k \in \mathbb{N}$, temos

$$\|S\|_{L^2(\mathbb{R}^2, d\mu_\phi \times d\mu_\psi)}^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} E_k^2 \|P_\phi \phi_k\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} E_n^2 \|P_\psi \psi_n\|^2 \leq (\sum_{n=1}^{\infty} E_n^2)^2 = \|A\|^4,$$

como queríamos demonstrar. \square

Antes de prosseguirmos, definiremos algumas quantidades que serão úteis no que se segue.

Dados $\psi, \varphi \in \mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ e $p \in \mathbb{N}$, seja

$$L_\psi(\phi, T) := \frac{|\langle \phi, \psi \rangle|^{2+(2p/d)}}{\|\phi\|^2 U_{\phi, \psi}(T)^{p/d}}. \quad (2.16)$$

Aqui, $U_{\phi,\psi}(T) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} d\mu_{\phi}(x) d\mu_{\psi}(y) R((x-y)T)$, em que R é a função de decaimento rápido

$$R(w) = \begin{cases} 1 & \text{se } |w| \leq 1, \\ |\widehat{h}(w)|^2 & \text{se } |w| > 1, \end{cases} \quad (2.17)$$

e h é qualquer função positiva em $C_0^\infty([0, 1])$ (o espaço vetorial das funções suaves com suporte compacto em $[0, 1]$) que satisfaz $\int_0^1 h(z) dz = 1$.

Observamos que, se $\phi = \chi_\Lambda(H)\psi$, em que Λ é um boreliano qualquer, então podemos reescrever (2.16) como

$$L_\psi(\phi, T) = \frac{\|\phi\|^{2+(4p/d)}}{U_{\phi,\psi}(T)^{p/d}}. \quad (2.18)$$

Por fim, seja

$$L_\psi(T) := \sup \{L_\psi(\phi, T) \mid \phi \in \mathcal{H}_\psi, \langle \psi, \phi \rangle \neq 0\}.$$

Teorema 2.2. *Sejam H um operador auto-adjunto definido em $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ e $\psi \in \mathcal{H}$ com $\|\psi\| = 1$; então, para qualquer $p > 0$, existe uma constante $C(\psi, p, h)$ tal que para todo $T > 0$,*

$$\langle\langle |X|^p \rangle\rangle_{\psi, T} \geq C(\psi, p, h) L_\psi(T).$$

Demonstração. Seja $h(z) \in C_0^\infty([0, 1])$ tal que $\int_0^1 h(z) dz = 1$. Se $z \in [0, 1]$, então $h(z) \leq \|h\|_\infty \chi_{[0,1]}(z)$; em particular,

$$\frac{h(t/T)}{\|h\|_\infty} \leq \chi_{[0,1]}(t/T). \quad (2.19)$$

Assim, (2.19) implica em

$$\begin{aligned} \langle\langle |X|^p \rangle\rangle_{\psi, T} &= \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |n|^p |\langle e^{-iHt}\psi, \delta_n \rangle|^2 dt \geq \frac{1}{\|h\|_\infty} \int_0^\infty \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |n|^p |\langle e^{-iHt}\psi, \delta_n \rangle|^2 h(t/T) \frac{dt}{T} \\ &\geq \frac{N^p}{\|h\|_\infty} \int_0^\infty \|(1 - P_N)\psi(t)\|^2 h(t/T) \frac{dt}{T} = \frac{N^p}{\|h\|_\infty} \int_0^\infty (\|\psi\|^2 h(t/T) - \|P_N\psi(t)\|^2 h(t/T)) \frac{dt}{T} \\ &= \frac{N^p}{\|h\|_\infty} \left(\|\psi\|^2 - \int_0^\infty \sum_{|n| \leq N} |\langle e^{-iHt}\psi, \delta_n \rangle|^2 h(t/T) \frac{dt}{T} \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Definamos $B_\psi(T, N) := \frac{1}{T} \int_0^\infty \sum_{|n| \leq N} |\langle e^{-iHt}\psi, \delta_n \rangle|^2 h(t/T) dt$; então, (2.20) nos fornece

$$\langle \langle |X|^p \rangle \rangle_{\psi, T} \geq \frac{N^p}{\|h\|_\infty} (\|\psi\|^2 - B_\psi(T, N)). \quad (2.21)$$

Usualmente é preciso controlar $B_\psi(T, N)$ (essa quantidade pode ser interpretada fisicamente como a probabilidade, ponderada por h , de se encontrar o pacote de onda na esfera de raio N centrada na origem no instante T). Reescrevamos $\psi = \phi + \chi$, com $\langle \phi, \chi \rangle = 0$ e $\phi \neq 0$ (isto pode ser feito tomando-se $\phi = \chi_\Lambda(H)\psi$ e $\chi = (1 - \chi_\Lambda(H))\psi$, para um boreliano Λ estritamente contido na reta). Assim,

$$B_\psi(T, N) = -B_\phi(T, N) + B_\chi(T, N) + \frac{2}{T} \operatorname{Re} \int_0^\infty \sum_{|n| \leq N} \langle e^{-iHt}\phi, \delta_n \rangle \overline{\langle e^{-iHt}\psi, \delta_n \rangle} h(t/T) dt. \quad (2.22)$$

Agora, uma vez que $1/T \int_0^\infty h(t/T) dt = 1$ e $h(z) \geq 0$, temos que $B_\chi(T, N) \leq \|\chi\|^2 = \|\psi\|^2 - \|\phi\|^2$. Ponhamos $A = \sum_{|n| \leq N} \langle \cdot, \delta_n \rangle \delta_n$; então, o Lema 2.1 e (2.22) implicam em

$$B_\psi(T, N) \leq \|\psi\|^2 - \|\phi\|^2 + 2 \operatorname{Re} D_{\phi, \psi}^{(h)}(T, N) \leq \|\psi\|^2 - \|\phi\|^2 + CN^{d/2} (U_{\phi, \psi}^{(h)}(T))^{1/2}. \quad (2.23)$$

Como $|\widehat{h}(w)| \leq \|h\|_{L^1} = 1$, pela definição de R (vide (2.17)), temos que $R(w) \geq |\widehat{h}(w)|^2$ para todo w . Portanto, $U_{\phi, \psi}^{(h)}(T) \leq U_{\phi, \psi}(T)$ e a desigualdade em (2.23) é válida para $U_{\phi, \psi}(T)$.

Finalmente, podemos concluir a demonstração do Teorema 2.2. A estratégia que empregamos agora é padrão: seja N um inteiro tal que $CN^{d/2} (U_{\phi, \psi}(T))^{1/2} \leq \|\phi\|^2/2$; então, (2.23) implica em

$$B_\psi(T, N) \leq \|\psi\|^2 - \frac{\|\phi\|^2}{2}. \quad (2.24)$$

Assim, (2.21), (2.24) e o fato de que N foi escolhido para satisfazer $CN^{d/2} \leq \|\phi\|^2/2C(U_{\phi, \psi}(T))^{1/2}$ implicam em

$$\langle \langle |X|^p \rangle \rangle_{\psi, T} \geq C(\psi, p, h) \frac{\|\phi\|^{2+(4p/d)}}{U_{\phi, \psi}(T)^{p/d}} = C(\psi, p, h) L_\psi(\phi, T). \quad (2.25)$$

Em particular, a desigualdade em (2.25) vale para $L_\psi(T)$, o que encerra a demonstração. \square

Vejamos agora como a quantidade dinâmica $L_\psi(T)$ se relaciona com as dimensões fractais generalizadas. Demonstramos o seguinte:

Teorema 2.3. *Sejam H um operador auto-adjunto definido em $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ e $\psi \in \mathcal{H}$ com $\|\psi\| = 1$. Assuma que a medida espectral μ_ψ associada a ψ é tal que que valha (H) (vide Teorema 2.1).*

Então, valem

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{\log L_\psi(T)}{\log T} = \frac{p}{d} D_{\mu_\psi}^- \left(\frac{1}{1+p/d} \right)$$

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\log L_\psi(T)}{\log T} = \frac{p}{d} D_{\mu_\psi}^+ \left(\frac{1}{1+p/d} \right).$$

A demonstração do Teorema 2.3 resultará da combinação dos resultados que demonstraremos a seguir.

Teorema 2.4. *Sejam H um operador auto-adjunto definido em $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ e $\psi \in \mathcal{H}$ com $\|\psi\| = 1$. Assuma que a medida espectral μ_ψ associada a ψ é tal que (H) se segue. Então, para todo $\beta > 0$ racional, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que para todo $\epsilon > 0$,*

$$\frac{C_1}{|\log \epsilon|^{1+\beta}} K_{\mu_\psi} \left(\frac{1}{1+\beta}, \epsilon \right)^{1+\beta} \leq L_\psi(\epsilon^{-1}) \leq K_{\mu_\psi} \left(\frac{1}{1+\beta}, \epsilon \right)^{1+\beta}, \quad (2.26)$$

em que

$$K_{\mu_\psi} \left(\frac{1}{1+\beta}, \epsilon \right) = \int_{\text{supp} \mu_\psi} d\mu_\psi(x) \left(\int_{\mathbb{R}} d\mu_\psi(y) R((x-y)/\epsilon) \right)^{-\beta/(1+\beta)}$$

e R é a função dada por (2.17).

Demonstração (da segunda desigualdade em (2.26)). Tome $\phi = f(H)\psi$, com $f \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$. Então,

$$d\mu_\phi(x) = |f(x)|^2 d\mu_\psi(x) \text{ e } \langle \phi, \psi \rangle = \int d\mu_\psi(x) f(x).$$

Escrevamos agora (recorde (2.16))

$$L_\psi(f(H)\psi, \epsilon^{-1}) = \frac{\left| \int d\mu_\psi(x) f(x) \right|^{2+2\beta}}{\left(\int d\mu_\psi(x) |f(x)|^2 \right) \left(\int d\mu_\psi(x) |f(x)|^2 b^{(R)}(x, \epsilon) \right)^\beta}, \quad (2.27)$$

com $b^{(R)}(x, \epsilon) = \int d\mu_\psi(y) R((x-y)/\epsilon)$. Em seguida, aplicamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz ao numerador de (2.27) para obter

$$\left| \int d\mu_\psi(x) f(x) \right|^{2+2\beta} = \left| \int d\mu_\psi(x) b^{(R)}(x, \epsilon)^{-\beta/(2+2\beta)} b^{(R)}(x, \epsilon)^{\beta/(2+2\beta)} f(x) \right|^{2+2\beta}$$

$$\leq \left(\int d\mu_\psi(x) b^{(R)}(x, \epsilon)^{-\beta/(1+\beta)} \right)^{1+\beta} \times \left(\int d\mu_\psi(x) b^{(R)}(x, \epsilon)^{\beta/(1+\beta)} |f(x)|^2 \right)^{1+\beta}$$

$$= K_{\mu_\psi}(1/(1+\beta), \epsilon)^{1+\beta} \times \left(\int d\mu_\psi(x) b^{(R)}(x, \epsilon)^{\beta/(1+\beta)} |f(x)|^2 \right)^{1+\beta}. \quad (2.28)$$

Por fim, usamos a desigualdade de Hölder aplicada a $p = 1 + \beta$ e $p' = (1 + \beta)/\beta$ para obter

$$\begin{aligned} & \left(\int d\mu_\psi(x) b^{(R)}(x, \epsilon)^{\beta/(1+\beta)} |f(x)|^2 \right)^{1+\beta} \\ &= \left(\int d\mu_\psi(x) (|f(x)|^2)^{1/(1+\beta)} (|f(x)|^2 b^{(R)}(x, \epsilon))^{\beta/(1+\beta)} \right)^{1+\beta} \\ &\leq \left(\int d\mu_\psi(x) |f(x)|^2 \right) \left(\int d\mu_\psi(x) |f(x)|^2 b^{(R)}(x, \epsilon) \right)^\beta. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Combinamos (2.27) e (2.28) a (2.29) para chegarmos a

$$L_\psi(f(H)\psi, \epsilon^{-1}) \leq K_{\mu_\psi}(1/(1+\beta), \epsilon)^{1+\beta},$$

o que encerra a demonstração. \square

Para demonstrarmos a primeira desigualdade em (2.26), necessitaremos dos seguintes lemas.

Lema 2.2. *Seja $q \in (0, 1)$ e suponha que valha a hipótese (H). Defina*

$$b(x, \epsilon) := \int d\mu_\psi(x) g((x - y)\epsilon^{-1}),$$

com $g(w) = \chi_{[-1,1]}(w)$ ou $R(w)$ (a função de decaimento rápido definida em (2.17)). Então, existem $A = A(q)$ e $\epsilon_0(q) > 0$ tais que, para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$,

$$\int_{\{x \in \text{supp}\mu_\psi \mid b(x, \epsilon) \leq \epsilon^A\}} b(x, \epsilon)^{q-1} d\mu_\psi(x) \leq \epsilon.$$

Demonstração. Para quaisquer $A > 0$ e $\epsilon > 0$, definamos

$$B(A, \epsilon) = \{x \in \text{supp}\mu \mid b(x, \epsilon) \leq \epsilon^A\}.$$

Sejam $0 < s < q < 1$. Como $b(x, \epsilon) \geq \mu([x - \epsilon, x + \epsilon])$, podemos obter a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \int_{B(A, \epsilon)} b(x, \epsilon)^{q-1} d\mu(x) &= \int_{B(A, \epsilon)} b(x, \epsilon)^{q-s} b(x, \epsilon)^{s-1} d\mu(x) \\ &\leq \epsilon^{A(q-s)} \int_{B(A, \epsilon)} b(x, \epsilon)^{s-1} d\mu(x) \\ &\leq \epsilon^{A(q-s)} \int_{B(A, \epsilon)} \mu([x - \epsilon, x + \epsilon])^{s-1} d\mu(x) \\ &\leq \epsilon^{A(q-s)} I_\mu(s, \epsilon). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Como $D_\mu^+(s) < +\infty$, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno vale

$$I_\mu(s, \epsilon) \leq \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{(D_\mu^+(s)+1)(1-s)}. \quad (2.31)$$

Portanto, se tomarmos $A = (q-1)^{-1}((D_\mu^+(s)+1)(1-s)+1)$ e $s = q/2$ em (2.30) e combinarmos (2.30) a (2.31), obtemos o resultado. \square

Lema 2.3. *Sejam μ_ψ , q , $A = A(q)$ e $b(x, \epsilon)$ como no Lema 2.2 e $N \in \mathbb{N}$. Então, existem um r_0 e um conjunto $\Omega(r_0) = \{x \in \text{supp}\mu_\psi \mid \epsilon^{r_0+A/N} < b(x, \epsilon) \leq \epsilon^{r_0}\}$ tais que, para todo ϵ suficientemente pequeno,*

$$\int_{\Omega(r_0)} b(x, \epsilon)^{q-1} d\mu_\psi(x) \geq \frac{1}{2N} \int b(x, \epsilon)^{q-1} d\mu_\psi(x).$$

Demonstração. Sejam $B_A = \{x \in \text{supp}\mu_\psi \mid b(x, \epsilon) \leq \epsilon^A\}$ e $\bar{B}^A = \{x \in \text{supp}\mu_\psi \mid b(x, \epsilon) > \epsilon^A\}$. Então, se segue do Lema 2.2 que, para ϵ suficientemente pequeno,

$$\begin{aligned} \int_{\text{supp}\mu_\psi} b(x, \epsilon)^{q-1} d\mu_\psi(x) &= \int_{\bar{B}^A} b(x, \epsilon)^{q-1} d\mu_\psi(x) + \int_{B_A} b(x, \epsilon)^{q-1} d\mu_\psi(x) \\ &\leq \int_{\bar{B}^A} b(x, \epsilon)^{q-1} d\mu_\psi(x) + \epsilon. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Observamos que $b(x, \epsilon) \leq 1$ (uma vez que $R(w) \leq 1$). Assim, podemos decompor o conjunto \bar{B}^A em N partes: $\Omega(KA/N) = \{x \in \text{supp}\mu_\psi \mid \epsilon^{(K+1)A/N} < b(x, \epsilon) \leq \epsilon^{KA/N}\}$, com $K = 0, 1, \dots, N-1$. Pelo menos um desses conjuntos dá origem a uma integral maior ou igual do que $1/N$ vezes a integral sobre o conjunto \bar{B}^A ; com efeito, se isso não ocorresse, chegaríamos a

$$\int_{\bar{B}^A} b(x, \epsilon)^{q-1} d\mu_\psi(x) > N \frac{1}{N} \int_{\bar{B}^A} b(x, \epsilon)^{q-1} d\mu_\psi(x),$$

um absurdo. Escolhemos agora K_0 e $r_0 = AK_0/N$, em que a integral sobre $\Omega(K_0A/N)$ é $1/N$ vezes maior do que a integral sobre o conjunto \bar{B}^A .

Por fim, segue-se que $\int b(x, \epsilon)^{q-1} d\mu_\psi(x) \geq 1$, uma vez que $q-1 < 0$ e $b(x, \epsilon) \leq 1$. Portanto, para todo $\epsilon \leq 1/2$, se segue de (2.32) que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(r_0)} b(x, \epsilon)^{q-1} d\mu_\psi(x) &\geq \frac{1}{N} \left(\int b(x, \epsilon)^{q-1} d\mu_\psi(x) - \epsilon \right) \\ &\geq \frac{1}{2N} \int b(x, \epsilon)^{q-1} d\mu_\psi(x), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. \square

Demonstração (da primeira desigualdade em (2.26)). Seja A como no Lema 2.2 e no Lema 2.3. Tome $q = 1/(1 + \beta)$, de modo que $q - 1 = -\beta/(1 + \beta)$. Fixados ϵ e $\phi = \chi_{\Omega(r_0)}(H)\psi$, em que $\Omega(r_0)$ é dado pelo Lema 2.3, segue-se da definição de $\Omega(r_0)$ que

$$U_{\phi, \psi}(\epsilon^{-1}) = \int_{\Omega(r_0)} b^{(R)}(x, \epsilon) d\mu_{\psi}(x) \leq \epsilon^{r_0} \mu_{\psi}(\Omega(r_0)). \quad (2.33)$$

Por fim, usamos uma expressão análoga a (2.27) para $L_{\psi}(f(H)\psi, \epsilon^{-1})$, com $f(H) = \chi_{\Omega(r_0)}(H)$, aplicamos o Lema 2.3 para $N = -\log \epsilon$, com ϵ suficientemente pequeno, e obtemos

$$\begin{aligned} L_{\psi}(\epsilon^{-1}) &\geq \frac{\mu_{\psi}(\Omega(r_0))^{1+2\beta}}{\epsilon^{r_0\beta} \mu_{\psi}(\Omega(r_0))^{\beta}} \\ &\geq \epsilon^{(A\beta)/N} \left(\int_{\Omega(r_0)} b^{(R)}(x, \epsilon)^{-\beta/(1+\beta)} d\mu_{\psi}(x) \right)^{1+\beta} \\ &\geq \frac{e^{-A\beta}}{(-2 \log \epsilon)^{1+\beta}} \left(\int b^{(R)}(x, \epsilon)^{-\beta/(1+\beta)} d\mu_{\psi}(x) \right)^{1+\beta} \\ &= \frac{C_1}{|\log \epsilon|^{1+\beta}} K_{\mu_{\psi}} \left(\frac{1}{1 + \beta}, \epsilon \right)^{1+\beta}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

como queríamos demonstrar. □

Lema 2.4. *Seja $q \in (0, 1)$. Suponha que a hipótese (H) valha para μ_{ψ} . Então, para todo $\delta \in (0, 1)$, existe um ϵ_0 tal que para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$,*

$$\frac{1}{2^{2-q}} I_{\mu_{\psi}}(q, \epsilon^{1-\delta}) \leq K_{\mu_{\psi}}(q, \epsilon) \leq I_{\mu_{\psi}}(q, \epsilon), \quad (2.35)$$

Observação: segue-se de (2.35) que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-q} \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log K_{\mu_{\psi}}(q, \epsilon)}{-\log \epsilon} &= D_{\mu_{\psi}}^{-}(q) \\ \frac{1}{1-q} \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log K_{\mu_{\psi}}(q, \epsilon)}{-\log \epsilon} &= D_{\mu_{\psi}}^{+}(q). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Demonstração. Primeiramente,

$$\begin{aligned} I_{\mu_{\psi}}(q, \epsilon) &= \int \mu_{\psi}(\overline{B(x, \epsilon)})^{q-1} d\mu_{\psi}(x) \\ &= \int d\mu_{\psi}(x) \left(\int \chi_{[-1, 1]} \left(\frac{x-y}{\epsilon} \right) d\mu_{\psi}(x) \right)^{q-1}. \end{aligned}$$

Como $\chi_{[-1, 1]}(w) \leq R(w)$ e $q - 1 < 0$, temos que

$$\begin{aligned}
K_{\mu_\psi}(q, \epsilon) &= \int_{\text{supp}\mu_\psi} d\mu_\psi(x) \left(\int_{\mathbb{R}} d\mu_\psi(y) R((x-y)/\epsilon) \right)^{q-1} \\
&\leq \int d\mu_\psi(x) \left(\int \chi_{[-1,1]} \left(\frac{x-y}{\epsilon} \right) d\mu_\psi(x) \right)^{q-1},
\end{aligned}$$

ou seja, $K_{\mu_\psi}(q, \epsilon) \leq I_{\mu_\psi}(q, \epsilon)$. Resta-nos obter a primeira desigualdade de (2.35).

Observamos inicialmente que

$$\begin{aligned}
b^{(R)}(x, \epsilon) &= \int d\mu_\psi(y) R\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) \\
&= \int_{|(x-y)/\epsilon| < \epsilon^{-\delta}} d\mu_\psi(y) R\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) + \int_{|(x-y)/\epsilon| \geq \epsilon^{-\delta}} d\mu_\psi(y) R\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) \\
&\leq \mu_\psi(B(x, \epsilon^{1-\delta})) + \sup_{|w| \geq \epsilon^{-\delta}} R(w),
\end{aligned} \tag{2.37}$$

já que $R(w) \leq 1$. Sejam $\bar{R}(z) := \sup_{|w| \geq z} R(w)$,

$$A_\delta^{(R)}(\epsilon) := \{x \in \text{supp}\mu_\psi \mid \mu_\psi(B(x, \epsilon^{1-\delta})) \geq \bar{R}(\epsilon^{-\delta})\}, \tag{2.38}$$

e

$$\tilde{A}_\delta^{(R)}(\epsilon) := \text{supp}\mu_\psi \setminus A_\delta^{(R)}(\epsilon). \tag{2.39}$$

Para qualquer $x \in A_\delta^{(R)}(\epsilon)$, segue-se de (2.37) e (2.38) que $b^{(R)}(x, \epsilon) \leq 2\mu_\psi(B(x, \epsilon^{1-\delta}))$; logo,

$$\begin{aligned}
K_{\mu_\psi}(q, \epsilon) &= \int d\mu_\psi(x) b^{(R)}(x, \epsilon)^{q-1} \geq \int_{A_\delta^{(R)}(\epsilon)} d\mu_\psi(x) b^{(R)}(x, \epsilon)^{q-1} \geq \\
&\int_{A_\delta^{(R)}(\epsilon)} d\mu_\psi(x) \left(2\mu_\psi(B(x, \epsilon^{1-\delta})) \right)^{q-1} \\
&= \frac{1}{2^{1-q}} \left(I_{\mu_\psi}(q, \epsilon^{1-\delta}) - \int_{\tilde{A}_\delta^{(R)}(\epsilon)} d\mu_\psi(x) \mu_\psi(B(x, \epsilon^{1-\delta}))^{q-1} \right).
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Como $R(w)$ decai quando w tende ao infinito, temos, para ϵ suficientemente pequeno ($\epsilon \leq \epsilon(\delta)$), $\bar{R}(\epsilon^{-\delta}) \leq \epsilon^A$, em que A é dado pelo Lema 2.2. Assim,

$$\tilde{A}_\delta(\epsilon) := \{x \in \text{supp}\mu_\psi \mid \mu_\psi(B(x, \epsilon^{1-\delta})) \geq \epsilon^A\} \supset \tilde{A}_\delta^{(R)}(\epsilon).$$

Agora, aplicamos o Lema 2.2 com $\epsilon = \epsilon^{1-\delta}$ e com $g(w) = \chi_{[-1,1]}(w)$, e obtemos

$$2^{1-q} K_{\mu_\psi}(q, \epsilon) \geq I_{\mu_\psi}(q, \epsilon^{1-\delta}) - \int_{\tilde{A}_\delta^{(R)}(\epsilon)} d\mu_\psi(x) \mu_\psi(B(x, \epsilon^{1-\delta}))^{q-1}$$

$$\begin{aligned}
 &\geq I_{\mu_\psi}(q, \epsilon^{1-\delta}) - \int_{\tilde{A}_\delta(\epsilon)} d\mu_\psi(x) \mu_\psi(B(x, \epsilon^{1-\delta}))^{q-1} \\
 &\geq I_{\mu_\psi}(q, \epsilon^{1-\delta}) - \epsilon^{1-\delta}.
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Assim, escolhemos $\epsilon^{1-\delta} \leq \frac{1}{2}$ (uma vez que $I_{\mu_\psi}(q, \epsilon^{1-\delta}) \leq 1$) em (2.41), e obtemos o resultado. \square

Demonstração (Teorema 2.3). Para cada $T > 0$, tomamos $\beta = p/d$, $\epsilon = \frac{1}{T}$ no Teorema 2.4 e $q = 1/(1 + \beta)$ no Lema 2.4 e obtemos

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{\log L_\psi(T)}{\log T} = \frac{p}{d} \frac{1}{1-q} \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log K_{\mu_\psi}(\frac{1}{1+p/d}, \epsilon)}{-\log \epsilon} = \frac{p}{d} D_{\mu_\psi}^- \left(\frac{1}{1+p/d} \right)$$

e

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\log L_\psi(T)}{\log T} = \frac{p}{d} \frac{1}{1-q} \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log K_{\mu_\psi}(\frac{1}{1+p/d}, \epsilon)}{-\log \epsilon} = \frac{p}{d} D_{\mu_\psi}^- \left(\frac{1}{1+p/d} \right),$$

como queríamos demonstrar. \square

Demonstração (Teorema 2.1). O teorema resulta do Teorema 2.2 e do Teorema 2.3 \square

Capítulo 3

Matrizes de transferência e operadores de Schrödinger 1D

No capítulo anterior, apresentamos limitantes inferiores para os expoentes de transporte (α^- e α^+) em termos das dimensões fractais generalizadas. No entanto, não mencionamos como é possível obter explicitamente tais dimensões, dado um operador auto-adjunto qualquer. Como veremos, a determinação dessas dimensões não é um problema trivial. Para o caso particular de um operador de Schrödinger discreto unidimensional em $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$, isto é, um operador definido pela ação

$$(Hu)(n) = (-\Delta u)(n) + (Vu)(n) = u(n+1) + u(n-1) + V(n)u(n), \quad (3.1)$$

(em que $V(n)$ é uma sequência de números reais) satisfazendo uma condição de contorno do tipo

$$\cos \alpha u(0) + \sin \alpha u(1) = 0, \quad \alpha \in (-\pi/2, \pi/2),$$

Germinet *et. al.* [10] obtiveram limitantes inferiores para tais dimensões em termos das chamadas matrizes de transferência (Teorema 3.2). Neste capítulo, discutimos como é possível obter tais limitantes.

3.1 Expoentes de transporte para o caso unidimensional

Nesta seção, mostraremos como as matrizes de transferência constituem uma ferramenta poderosa para determinar limitantes inferiores para os expoentes de transporte associados a um operador de Schrödinger discreto unidimensional (vide [6] para resultados envolvendo matrizes de transferência e limitantes superiores para os expoentes de transporte). Para tanto, introduzimos uma versão modificada do momento médio de ordem p associado ao operador de posição; a saber,

$$\mathbb{M}(p, f, T) := \frac{2}{T} \int_0^{\infty} e^{-2t/T} \left\| |X|^{p/2} e^{-iHt} f(H) \psi_0 \right\|^2 dt,$$

em que $f \in C_{0,+}^{\infty}(J)$ e $\psi_0 = \delta_1$ (vetor da base canônica de $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$), e os respectivos expoentes de transporte

$$\beta^-(p, f) := \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{\log \mathbb{M}(p, f, T)}{p \log T}$$

$$\beta^+(p, f) := \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\log \mathbb{M}(p, f, T)}{p \log T}.$$

É possível mostrar que $\beta^{\pm} = \frac{\alpha^{\pm}}{p}$. Desta forma, segue-se do Teorema 2.1 que

$$\beta^{\pm}(p, f) \geq \frac{1}{d} D_{\mu_{f(H)\psi_0}}^{\pm} \left(\frac{1}{1 + p/d} \right).$$

Como veremos, para o caso unidimensional, isto implica (pelo Teorema 3.2 e pelo Teorema 3.3) em

$$\beta^{\pm}(p, f) \geq D_{\mu_{f(H)\psi_0}}^{\pm} \left(\frac{1}{1 + p} \right) \geq 1 - \frac{2\theta_S}{p}, \quad (3.2)$$

em que θ_S é uma constante obtida a partir das matrizes de transferência associadas a H .

Introduzimos, agora, as matrizes de transferência. Sejam H definido como em (3.1) e a equação de autovalores

$$Hu = Eu, \quad E \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Então, se $\varphi(n)$ é uma solução da equação (3.3), definimos a matriz de transferência no sítio n , $n \in \mathbb{N}$, associada ao operador H como a matriz que, quando aplicada ao vetor $(\varphi(n), \varphi(n-1))^T$, resulta no vetor $(\varphi(n+1), \varphi(n))^T$, ou seja,

$$A(E, n) := \begin{pmatrix} E - V(n) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observamos que $\det A(E, n) = 1$ (isto é, $A(E, n) \in \text{Sl}(2, \mathbb{R})$). Já a nomenclatura matriz de transferência se deve ao fato da matriz “transferir” a solução da equação (3.3) em n e $n-1$ para a solução em $n+1$ e n .

Agora, se $\varphi(n)$ é solução da equação (3.3), então $\varphi(n)$ é unicamente determinada, a menos de constantes C_1 e C_2 (trata-se de uma equação de diferença finita de ordem 2). Desta forma, para evitar essas constantes, fixamos condições iniciais $u_{\theta}(m) = \sin \theta$ e $u_{\theta}(m+1) = \cos \theta$ e definimos a matriz de transferência nos sítios n e m ($n > m$) associada a equação de autovalores (3.3) (chamada simplesmente matriz de transferência) como

$$T(E, n, m) := \begin{pmatrix} u_0(n+1) & u_{\pi/2}(n+1) \\ u_0(n) & u_{\pi/2}(n) \end{pmatrix}.$$

Note que $T(E, n, m) = \prod_{i=m}^n A(E, i)$.

Exemplificando, considere $E = 2$ e a equação de autovalor

$$-\Delta u = 2u;$$

então, $u(n) = c_1 + c_2 n$ é solução da equação acima, donde se segue que

$$T(2, n, 0) = \begin{pmatrix} n+1 & -n \\ n & 1-n \end{pmatrix}.$$

No que se segue, discutiremos em detalhes a demonstração dos resultados (Teorema 3.2 e Teorema 3.3) que resultam em (3.2).

Seja $E_0 \in \mathbb{R}$. Definamos, para $N \in \mathbb{N}$, o operador de volume finito

$$H^{(E_0, N)} = -\Delta + V\chi_{[0, N]} + E_0(1 - \chi_{[0, N]}),$$

em $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$, em que $\chi_{[0, N]} := P_N$.

Denotamos por $\mu_\psi^{(E_0, N)}$ a medida espectral associada a ψ e a $H^{(E_0, N)}$, e por $R^{(E_0, N)}(z) = (H^{(E_0, N)} - zI)^{-1}$ o resolvente correspondente. Uma vez que $H^{(E_0, N)}$ é uma perturbação compacta do Laplaciano Δ (que possui espectro puramente absolutamente contínuo, como discutido na Introdução), segue-se que $\mu_\psi^{(E_0, N)}$ é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue.

Lema 3.1. *Seja $H = -\Delta + V$ um operador de Schrödinger discreto unidimensional. Então, existe uma constante C_1 tal que para quaisquer $E_0 \in \mathbb{R}$, $E \in [E_0 - 1, E_0 + 1]$ e $N > 1$*

$$\frac{d\mu_{\delta_1}^{(E_0, N)}}{dx}(E) \geq \frac{C_1}{u_0^2(N, E) + u_0^2(N+1, E)} \geq \frac{C_1}{\|T(E, N, 0)\|^2}, \quad (3.4)$$

em que $T(E, N, 0)$ é a matriz de transferência do operador $H^{(E_0, N)}$, que coincide com a matriz de transferência do operador H .

Demonstração. Recordemo-nos da fórmula de Stone [22]

$$\frac{d\mu_{\delta_1}^{(E_0, N)}}{dx}(E) = \frac{1}{\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta \|R^{(E_0, N)}(E + i\eta)\delta_1\|^2. \quad (3.5)$$

Seja $\varphi = R^{(E_0, N)}(E + i\eta)\delta_1$, $\eta > 0$. Então,

$$\begin{aligned}
 \|R^{(E_0, N)}(E + i\eta)\delta_1\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(n)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(n)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} |\varphi(n+1)|^2 \\
 &\geq \frac{1}{2} \sum_{n=N}^{\infty} |\varphi(n)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=N}^{\infty} |\varphi(n+1)|^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=N}^{\infty} (|\varphi(n)|^2 + |\varphi(n+1)|^2). \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

Note que para todo $n \geq N$, temos

$$\begin{aligned}
 |\varphi(N)|^2 + |\varphi(N+1)|^2 &= \|T^{-1}(E + i\eta, n, N)(\varphi(n+1), \varphi(n))^T\|^2 \\
 &\leq \|T(E + i\eta, n, N)\|^2 (|\varphi(n)|^2 + |\varphi(n+1)|^2), \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

em que T é a matriz de transferência do operador $H^{(E_0, N)}$. Em (3.7), usamos o fato de que $\|T\| = \|T^{-1}\|$ para matrizes 2×2 com coeficientes complexos e determinante igual a 1. Agora, note que $T(E + i\eta, n, N) = T_0(E - E_0 + i\eta, n, N)$ para $n \geq N$, em que T_0 é matriz de transferência do Laplaciano:

$$T_0(z, n, m) = A_0(z)^{n-m}, \quad A_0(z) = \begin{pmatrix} z & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note também que

$$\sup_{|w| \leq 1} \sup_{n, m \in \mathbb{Z}} \|T_0(w, n, m)\| = C < +\infty. \tag{3.8}$$

Assim, para $|w| \leq 1$, $|\eta| \leq 1$, como $A_0(w + i\eta) = A_0(w) + i\eta J$, em que

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{com } \|J\| = 1,$$

segue-se que

$$\|T_0(w + i\eta, n, m)\| \leq C(1 + C\eta)^{n-m}. \tag{3.9}$$

Combinamos (3.6) e (3.7) a (3.9) e obtemos

$$\eta \|R^{(E_0, N)}(E + i\eta)\delta_1\|^2 \geq \frac{\eta}{2C^2} (|\varphi(N)|^2 + |\varphi(N+1)|^2) \sum_{n=N}^{\infty} (1 + C\eta)^{-2(n-N)}$$

$$\geq \frac{1}{4C^3} (|\varphi(N)|^2 + |\varphi(N+1)|^2). \quad (3.10)$$

Agora, ponhamos

$$\varphi(N) = (R^{(E_0, N)}(E + i\eta)\delta_1)(N) = u_{\pi/2}(N, E + i\eta) + m(E + i\eta)u_0(N, E + i\eta),$$

em que m é a função de *Weyl-Titchmarsh* do operador $H^{(E_0, N)}$. Esta função coincide com a transformação de Borel da medida espectral associada ao vetor cíclico δ_1 , e é tal que $\varphi \in \ell^2(\mathbb{Z}^+)$. Para detalhes, vide [Apêndice C, [3]].

Agora, observamos que as soluções $u_0(n, E)$, $u_{\pi/2}(n, E)$ são as mesmas para $H^{(E_0, N)}$ e H para $n \leq N+1$, uma vez que os potenciais associados coincidem em $[0, N]$. Além disso, como a medida espectral de $H^{(E_0, N)}$ é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue, $m(E + i0) < +\infty$ [Proposição D.4.1, [3]]. Assim, como $u_0(N, E)$ e $u_{\pi/2}(N, E)$ são funções reais, temos que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} |\varphi(N)|^2 \geq (u_{\pi/2}(N, E) + \operatorname{Re} m(E + i0)u_0(N, E))^2. \quad (3.11)$$

Portanto, uma vez que vale uma fórmula análoga para $\varphi(N+1)$, (3.5), (3.10) e (3.11) implicam em

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_{\delta_1}^{(E_0, N)}}{dx}(E) &\geq C [(u_{\pi/2}(N, E) + \operatorname{Re} m(E + i0)u_0(N, E))^2 \\ &+ (u_{\pi/2}(N+1, E) + \operatorname{Re} m(E + i0)u_0(N+1, E))^2]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Por fim, o mínimo do polinômio $t \rightarrow (a + tb)^2 + (c + td)^2$ é obtido quando $t = -\frac{ab + cd}{b^2 + d^2}$. Assim, como o Wronskiano de u_0 e $u_{\pi/2}$ é

$$W[u_0, u_{\pi/2}](N, E) = u_0(N, E)u_{\pi/2}(N+1, E) - u_0(N+1, E)u_{\pi/2}(N, E) = 1,$$

(para mais detalhes a respeito da constância do Wronskiano consulte [Apêndice C, [3]]) fazendo-se algumas manipulações algébricas se mostra que $ab + cd = -1$. Desta forma, a primeira desigualdade de (3.4) é consequência imediata de (3.12). Já a segunda desigualdade se segue do fato de que $(u_0(N+1, E), u_0(N, E))^T = T(E, N, 0)(0, 1)^T$. □

Lema 3.2. *Sejam $H_1 = -\Delta + V_1$ e $H_2 = -\Delta + V_2$ operadores de Schrödinger definidos em $\ell^2(\mathbb{Z})$, tais que existe $N > 1$ tal que para todo $|n| \leq N$, $V_1(n) = V_2(n)$. Assuma que existam $A > 0$ e $b > 0$ tais que*

$$|V_1(n) - V_2(n)| \leq A\langle n \rangle^b, \quad (3.13)$$

em que $\langle n \rangle := \sqrt{1 + |n|^2}$. Sejam $M > 0$, $\sigma > 0$ e $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq f \leq 1$. Então, existem constantes $C(f, M, \sigma, A, b) > 0$ e $m(M, \sigma, b)$ tais que para todos $\epsilon > N^{-\frac{1}{1+\sigma}}$ e $x \in \mathbb{R}$,

$$|\langle \delta_1, f_{x,\epsilon}(H_1)\delta_1 \rangle - \langle \delta_1, f_{x,\epsilon}(H_2)\delta_1 \rangle| \leq C(f, M, \sigma, A, b)(1 + |x|)^{m(M, \sigma, b)} \epsilon^M, \quad (3.14)$$

em que $f_{x,\epsilon}(y) = f((y-x)/\epsilon)$. Se J é um intervalo compacto, uma vez que

$$\langle \delta_1, f_{x,\epsilon}(H_1)\delta_1 \rangle = \int f_{x,\epsilon}(y) d\mu_{\delta_1}(y) \leq \int f_{x,\epsilon/2}(y) d\mu_{\delta_1}(y) = \langle \delta_1, f_{x,\epsilon/2}(H_2)\delta_1 \rangle,$$

então existe uma constante $C(J, M, \sigma, A, b) > 0$ tal que para todos $\epsilon > N^{-\frac{1}{1+\sigma}}$ e $x \in J$,

$$\mu_{\delta_1}^{H_1}(x - \epsilon, x + \epsilon) \geq \mu_{\delta_1}^{H_2}(x - \frac{\epsilon}{2}, x + \frac{\epsilon}{2}) - C(J, M, \sigma, A, b)\epsilon^M. \quad (3.15)$$

Demonstração. Vide [10]. □

Observamos que a existência da função f usada no Lema 3.2 é garantida pelo Lema de Urysohn. Apesar da demonstração deste resultado está presente em [10], sugerimos que o leitor consulte também [11] para o melhor entendimento das técnicas envolvidas na demonstração deste resultado.

Proposição 3.1. *Seja $H = -\Delta + V$ um operador de Schrödinger definido em $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$, em que V é polinomialmente limitado, ou seja, existem $A, b > 0$ tais que*

$$|V(n)| \leq A\langle n \rangle^b. \quad (3.16)$$

Considere $\psi_0 = \delta_1$ em $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ e J um intervalo compacto. Então, existe uma constante C_1 e, para quaisquer $M, \sigma > 0$, existe uma constante C_2 (que depende de J, M, σ, A, b) tal que, para todos $\epsilon \in (0, 1)$ e $\lambda \in J$,

$$\mu_{\psi_0}(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon) \geq C_1 \int_{\lambda - \frac{\epsilon}{2}}^{\lambda + \frac{\epsilon}{2}} \frac{dE}{\|T(E, N, 0)\|^2} - C_2 \epsilon^M, \quad (3.17)$$

em que $N = \lceil \epsilon^{-1-\sigma} \rceil$.

Demonstração. Para $\lambda \in J$ e $N > 1$ tomamos $H_1 = H$ e $H_2 = H^{(\lambda, N)}$. Como V é polinomialmente limitado e J é compacto, existem constantes $A, b > 0$ tais que $|V_1(n) - V_2(n)| \leq A\langle n \rangle^b$. Assim, segue-se do Lema 3.1 e do Lema 3.2 que, para quaisquer $M, \sigma > 0$,

$$\mu_{\psi_0}(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon) \geq \mu_{\psi_0}^{(\lambda, N)}(\lambda - \frac{\epsilon}{2}, \lambda + \frac{\epsilon}{2}) - C_2 \epsilon^M \geq \int_{\lambda - \frac{\epsilon}{2}}^{\lambda + \frac{\epsilon}{2}} \frac{C_1 dE}{\|T(E, N, 0)\|^2} - C_2 \epsilon^M, \quad (3.18)$$

em que $N = \lceil \epsilon^{-1-\sigma} \rceil$ e C_2 é uma constante que depende de J, M, σ, A, b .

□

O próximo resultado, como veremos, relaciona as matrizes de transferência com as integrais de transporte.

Teorema 3.1. *Sejam H e V como na Proposição 3.1. Sejam $K > 0$ e $S \subset [-K, K]$ um conjunto mensurável de medida de Lebesgue positiva. Tome $f \in C_{0,+}^{\infty}(\mathbb{R})$ tal que $f = 1$ em S . Então, para quaisquer $q \in (0, 1)$ e $\sigma > 0$, existem constantes $C_q > 0$ e C_2 (que depende de q, f, σ, A, b, K) tais que para todo $\epsilon \in (0, 1)$,*

$$I_{\mu_{f(H)\psi_0}}(q, \epsilon) \geq C_q \epsilon^{q-1} \int_S \frac{dE}{\|T(E, N, 0)\|^{2q}} - C_2 \epsilon, \quad (3.19)$$

em que $N = \lceil \epsilon^{-1-\sigma} \rceil$.

Demonstração. Barbaroux *et. al.* em [1] demonstraram que, dado $\epsilon > 0$ e dada uma medida de Borel positiva e finita, existem constantes $C_q > 0$ e $C'_q > 0$ tais que

$$\frac{C_q}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} dx \mu(x - \epsilon, x + \epsilon)^q \leq I_{\mu}(q, \epsilon) \leq \frac{C'_q}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} dx \mu(x - \epsilon, x + \epsilon)^q. \quad (3.20)$$

Assim, o Teorema 3.1 se seguirá de (3.20) e de

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} dx \mu_{f(H)\psi_0}(x - \epsilon, x + \epsilon)^q \geq \epsilon^{q-1} \int_S \frac{dE}{\|T(E, N, 0)\|^{2q}} - C_2 \epsilon.$$

Seja $f \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, com $f \geq 0$ e $f = 1$ em S (novamente, a existência desta função é garantida pelo Lema de Urysohn). Como f é uniformemente contínua (já que f é contínua e de suporte compacto), podemos garantir a existência de um $\eta \in (0, 1)$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}$ quando $|x - y| \leq 2\eta$.

Definamos

$$F := \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, S) \leq \eta\}.$$

Então, para todos $\epsilon < \eta$ e $x \in F$, temos que

$$(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset \{y \mid d(y, S) \leq 2\eta\} \subset \{y \mid f(y) \geq \frac{1}{2}\}. \quad (3.21)$$

Com efeito,

$$z \in (x - \epsilon, x + \epsilon) \Rightarrow |x - z| \leq \epsilon < \eta.$$

Daí, se $w \in S$, como $x \in F$, temos que

$$|z - w| \leq |z - x| + |x - w| \leq 2\eta \Rightarrow z \in \{y \mid d(y, S) \leq 2\eta\}.$$

Agora,

se $z \in \{y, d(y, S) \leq 2\eta\}$, então $|z - w| \leq 2\eta$ para todo $w \in S$,

o que por sua vez resulta em

$$|f(z) - f(w)| \leq \frac{1}{2};$$

no entanto, como $f(w) = 1$, para todo $w \in S$, segue-se que $z \in \{y, f(y) \geq \frac{1}{2}\}$.

Portanto, segue-se de (3.21) para todos $\epsilon < \eta$ e $x \in F$

$$\mu_{f(H)\psi_0}(x - \epsilon, x + \epsilon) = \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} f(y) d\mu_{\psi_0}(y) \geq \frac{1}{2}\mu_{\psi_0}(x - \epsilon, x + \epsilon). \quad (3.22)$$

Por outro lado, se segue da Proposição 3.1 que para quaisquer $M, \sigma > 0$, se $x \in J = [-1 - B, 1 + B]$ (com B tal que $\text{supp} f \subset [-B, B]$), então

$$\mu_{\psi_0}(x - \epsilon, x + \epsilon) \geq A(x, \epsilon) - D(\epsilon),$$

com

$$A(x, \epsilon) = C_1 \int_{x-\frac{\epsilon}{2}}^{x+\frac{\epsilon}{2}} \frac{dE}{\|T(E, N, 0)\|^2}, \quad D(\epsilon) = C_2 \epsilon^M.$$

Recordamos que $(A - D)^q \geq A^q - D^q$ quando $q \in (0, 1)$ e $A \geq D$. Assim, como $\mu_{\psi_0}(x - \epsilon, x + \epsilon) \geq 0$, temos que

$$\mu_{\psi_0}(x - \epsilon, x + \epsilon) \geq A^q(x, \epsilon) - D^q(\epsilon). \quad (3.23)$$

Além disso, segue-se da desigualdade de Jensen que

$$A(x, \epsilon)^q = \left(\int_{x-\frac{\epsilon}{2}}^{x+\frac{\epsilon}{2}} \frac{\epsilon C_1}{\|T(E, N, 0)\|^2} \frac{dE}{\epsilon} \right)^q \geq C_1^q \epsilon^{q-1} \int_{x-\frac{\epsilon}{2}}^{x+\frac{\epsilon}{2}} \frac{dE}{\|T(E, N, 0)\|^{2q}}. \quad (3.24)$$

Combinamos (3.22), (3.23) e (3.24) ao fato de que $F \subset J$ para obter

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} dx (\mu_{f(H)\psi_0}(x - \epsilon, x + \epsilon))^q \\ & \geq \frac{1}{2^q \epsilon} \int_F dx \mu_{\psi_0}(x - \epsilon, x + \epsilon)^q \\ & \geq \frac{1}{2^q \epsilon} \int_F dx A(x, \epsilon)^q - \frac{1}{2^q} C_2^q \epsilon^{Mq-1} \\ & \geq \frac{C_1^q \epsilon^{q-2}}{2^q} \int_F dx \int_{x-\frac{\epsilon}{2}}^{x+\frac{\epsilon}{2}} \frac{dE}{\|T(E, N, 0)\|^{2q}} - C_2 \frac{\epsilon}{2^q}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

em que fixamos $M = \frac{2}{q}$.

Por fim, seja $E \in S$. Então, se $|x - E| \leq \epsilon/2$ e $\epsilon < \eta$, segue-se da definição de F que $x \in F$. Portanto, usando-se o Teorema de Fubini e se integrando em E somente sobre S (note que $|\{x, |x - E| \leq \frac{\epsilon}{2}\} \cap F| \geq \frac{\epsilon}{2}$), temos que

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} dx (\mu_{f(H)\psi_0}(x - \epsilon, x + \epsilon))^q \geq C_q \epsilon^{q-1} \int_S \frac{dE}{\|T(E, N, 0)\|^{2q}} - C_2 \frac{\epsilon}{2}, \quad (3.26)$$

com ϵ suficientemente pequeno e $N = \lceil \epsilon^{-1-\sigma} \rceil$, o que encerra a demonstração. □

Por fim, relacionamos as dimensões fractais generalizadas às matrizes de transferência.

Teorema 3.2. *Sejam H e ψ_0 como no enunciado do Teorema 3.1. Sejam $K > 0$ e $S \subset [-K, K]$ um conjunto mensurável de medida de Lebesgue positiva tal que $\theta_S := \text{Leb-essinf}_S \theta(E) < +\infty$, em que*

$$\theta(E) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \log \|T(E, n, 0)\|.$$

Então, para qualquer $f \in C_{0,+}^\infty(\mathbb{R})$, $f = 1$ em S , temos que para todo $p > 0$,

$$D_{\mu_{f(H)\psi_0}}^- \left(\frac{1}{1+p} \right) \geq 1 - \frac{2\theta_S}{p}. \quad (3.27)$$

Demonstração. Pela definição de θ_S , dado $\delta > 0$, existe $S_\delta \subset S$ tal que se $E \in S_\delta$, então $|S_\delta| > 0$ e $\theta(E) < \theta_S + \delta$. Agora, da definição de $\theta(E)$, para todos $E \in S_\delta$ e $N \in \mathbb{N}$, temos que

$$\|T(E, N, 0)\| \leq h(E) N^{\theta_S + \delta}, \quad (3.28)$$

em que $h(E) = \sup_n n^{-\theta_S - \delta} \|T(E, n, 0)\| \geq 1$ é uma função mensurável. Note que $h(E)$ é finito para todo $E \in S_\delta$. Como S_δ é um conjunto limitado e $f = 1$ em S_δ , podemos aplicar o Teorema 3.1 para $S = S_\delta$ e $\sigma = \delta$, e assim obter

$$I_{\mu_{f(H)\psi_0}}(q, \epsilon) \geq C_q \epsilon^{q-1} N^{-2q(\theta_S + \delta)} \int_{S_\delta} h^{-2q}(E) dE - C_2 \epsilon. \quad (3.29)$$

Como h é finito em S_δ , a integral em (3.29) depende apenas de δ, S e $p (= \frac{1}{q} - 1)$. Finalmente, como $N = [T^{1+\delta}]$, $T = \frac{1}{\epsilon}$, segue-se de (3.29) que, para todo $\delta > 0, T > 0$,

$$I_{\mu_{f(H)\psi_0}}(q, \epsilon) \geq C_{p,\delta} \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{p-(1+\delta)(2\theta_S+2\delta)-C_2\epsilon}. \quad (3.30)$$

O resultado se segue portanto, da definição de dimensão fractal generalizada. \square

A demonstração do próximo teorema é análoga à do Teorema 3.2 e portanto será omitida.

Teorema 3.3. *Sejam H e ψ_0 como no enunciado do Teorema 3.1. Para uma sequência decrescente $(n_i)_{i \geq 0}$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} n_i = \infty$ e para todo $E \in \mathbb{R}$, definamos a função mensurável*

$$\theta(E) := \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n_i} \log \|T(E, n_i, 0)\|.$$

Considere $K > 0$ e $S \subset [-K, K]$ um conjunto mensurável de medida de Lebesgue positiva tal que $\theta_S := \text{Leb-essinf}_S \theta(E) < +\infty$. Então, $\forall f \in C_{0,+}^\infty(\mathbb{R})$, $f = 1$ em S , temos para todo $p > 0$, que

$$D_{\mu_{f(H)\psi_0}}^+ \left(\frac{1}{1+p} \right) \geq 1 - \frac{2\theta_S}{p}. \quad (3.31)$$

3.2 Transporte quase-balístico para o almost Mathieu

Encerramos o capítulo apresentando uma aplicação dos resultados aqui obtidos anteriormente a uma perturbação de posto 1 em $n = 1$ do operador Almost Mathieu:

$$H_{\theta,\alpha,\lambda} = -\Delta + \Lambda \cos(\pi\alpha n + \theta) + \lambda \langle \delta_1, \cdot \rangle \delta_1.$$

Teorema 3.4. *Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{t} = 0$ (tipicamente, $g(t) = \log t$). Então, existe um subconjunto genérico Ω (isto é, um G_δ denso) dos irracionais tal que, para todos $\alpha \in \Omega$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\lambda \in [0, 1]$ e $q \in (0, 1)$, existem uma constante C_q e uma sequência $\epsilon_k \rightarrow 0$ tais que*

$$I_{\mu_{\delta_1}}(q, \epsilon_k) \geq \frac{C_q}{g(\epsilon_k^{-1})} \left(\frac{1}{\epsilon_k}\right)^{1-q}.$$

Demonstração. Vide [10]. \square

O Teorema 3.4 representa uma extensão do Teorema C.1 de Del Rio *et. al.* [7] para um conjunto genérico de frequências, e nos dá um exemplo concreto de um operador cujo espectro é puramente pontual, mas cuja respectiva medida espectral (associada ao vetor cíclico δ_1) possui dimensão fractal generalizada superior igual a 1 (o que acarreta em transporte quase-balístico). Para mais detalhes, vide [7].

Apêndice A

Teoria espectral

Abordamos aqui, alguns tópicos sobre teoria espectral. Nosso objetivo neste apêndice é criar uma sequência lógica e natural para podermos expor o Teorema Espectral e o Teorema de Stone. Para mais detalhes sobre essa teoria, vide [18] e [20].

A.1 Adjunto de Hilbert

No que se segue, apresentaremos a definição de operadores auto-adjuntos em espaços de Hilbert.

Definição A.1. Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert. Um operador linear A em \mathcal{H} é uma aplicação linear $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ cujo domínio $\mathcal{D}(A)$ é um subespaço vetorial de \mathcal{H} .

Definição A.2. Um operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é dito densamente definido se o domínio do operador, $\mathcal{D}(A)$, é um subconjunto denso de \mathcal{H} .

Definição A.3. Um operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é dito simétrico se

$$\langle A\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, A\varphi \rangle \quad \forall \psi, \varphi \in \mathcal{D}(A).$$

Neste caso, quando $\mathcal{D}(A)$ é denso em \mathcal{H} , o operador é dito hermitiano.

Definição A.4. O operador adjunto (de Hilbert) A^* de um operador linear A em \mathcal{H} densamente definido é definido por

$$\mathcal{D}(A^*) = \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \exists \tilde{\varphi} \in \mathcal{H} : \langle A\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, \tilde{\varphi} \rangle, \forall \psi \in \mathcal{D}(A)\},$$

$$A^*\varphi = \tilde{\varphi}.$$

Assim, vale

$$\langle A\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, A^*\varphi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(A), \forall \varphi \in \mathcal{D}(A^*).$$

Pode-se garantir que A^* está bem-definido, uma vez que $\mathcal{D}(A)$ é denso em \mathcal{H} . Diz-se que A é auto-adjunto quando $A = A^*$.

Exemplo A.1. Seja $\mathcal{H} = L^2([0, 2\pi])$, com produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{[0, 2\pi]} f(x)\overline{g(x)} dx, \quad \forall f, g \in \mathcal{H}.$$

Considere A_1, A_2 e A_3 , com

$$\mathcal{D}(A_1) = \{f \in C^1[0, 2\pi] \mid f \in L^2([0, 2\pi])\}$$

$$\mathcal{D}(A_2) = \mathcal{D}(A_1) \cap \{f \mid f(0) = f(2\pi)\}$$

$$\mathcal{D}(A_3) = \mathcal{D}(A_1) \cap \{f \mid f(0) = f(2\pi) = 0\},$$

em que $A_i f = -i \frac{df(x)}{dx}$ para $f \in \mathcal{D}(A_i)$, $i = 1, 2, 3$. Cada um desses domínios é denso em $L^2([0, 2\pi])$. Além disso,

$$A_1^* = A_3, \quad A_2^* = A_2 \text{ e } A_3^* = A_1.$$

Veja que todos os operadores acima são hermitianos (use a definição do produto interno e integre por partes), mas somente A_2 é auto-adjunto. Para mais detalhes sobre esse exemplo, consulte [26].

Introduzimos agora uma classe interessante de operadores lineares.

Definição A.5. Seja $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador linear definido sobre um espaço de Hilbert \mathcal{H} . A é dito limitado se existir $C \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $\varphi \in \mathcal{H}$,

$$\|A\varphi\| \leq C\|\varphi\|. \tag{A.1}$$

Denotamos por $B(\mathcal{H})$ o conjunto de operadores lineares limitados sobre \mathcal{H} . Note que (B.1) é uma forma prática de se exigir uma certa regularidade do operador; mais precisamente, esta é uma forma de se exigir que este seja uma função de Lipchitz (em particular, uniformemente contínua). Por outro lado, qualquer operador linear que seja contínuo em $\varphi = 0$ é limitado. Com efeito, da continuidade no zero, para qualquer vetor $\|\varphi\| \leq 1$, para algum $\delta > 0$ temos

$$\delta \|\varphi\| \leq \delta \Rightarrow \|A\varphi\| \leq \frac{1}{\delta}.$$

Assim, $C = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|A\varphi\| < +\infty$, e portanto vale

$$\left\| A \frac{\varphi}{\|\varphi\|} \right\| \leq C \Rightarrow \|A\varphi\| \leq C\|\varphi\|$$

para todo $\varphi \in \mathcal{H}$.

Exemplo A.2. Seja $A \in B(\mathcal{H})$, então

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

converge em $B(\mathcal{H})$. Com efeito, para todo $N > 0$ inteiro,

$$\sum_{k=0}^N \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^N \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|} < +\infty,$$

e portanto a série converge absolutamente, o que basta.

Dado um operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, definimos o seu gráfico como

$$\text{Graf}(A) := \{(\varphi, A\varphi) \in \mathcal{D}(A) \times \mathcal{H}\}.$$

Exemplo A.3. Seja $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador auto-adjunto. Então, A é limitado. Com efeito, uma vez que $\text{Graf}(A) = \text{Graf}(A^*) = \mathcal{J}(\text{Graf}(A))^\perp$ em $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, em que $\mathcal{J}(\psi, \varphi) = (-\varphi, \psi)$, o resultado se segue do Teorema do Gráfico Fechado [18]. Observamos que este resultado nos diz que qualquer operador auto-adjunto não-limitado tem como domínio um subconjunto próprio de \mathcal{H} .

Exemplo A.4. Um operador $A \in B(\mathcal{H})$ é dito ser de Hilbert-Schmidt se existir uma base ortonormal $\{e_n\}_{n \in \Lambda}$ de \mathcal{H} tal que

$$\left(\sum_{n \in \Lambda} \|Ae_n\|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Definição A.6. Um operador linear $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ é chamado unitário se $\langle U\psi, U\varphi \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle \psi, \varphi \rangle_{\mathcal{H}_1}$ $\forall \psi, \varphi \in \mathcal{H}_1$ e $U(\mathcal{H}_1) = \mathcal{H}_2$.

Definição A.7. Dois operadores $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ e $B : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$ são ditos unitariamente equivalentes se existir um operador unitário $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ tal que $B = UAU^*$.

Definição A.8. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ e $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável. Definimos o operador de multiplicação por ϕ , $M_\phi : \text{dom}M_\phi \rightarrow L^2(\Omega)$, pela lei $M_\phi\psi = \phi\psi$, em que $\psi \in \text{dom}M_\phi = \{\psi \in L^2(\Omega) : \phi\psi \in L^2(\Omega)\}$.

Um cálculo simples (integração por partes) e o Teorema de Hellinger-Toeplitz [18] nos dizem que esse operador é auto-adjunto e limitado.

A.2 Espectro

O espectro de um operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ generaliza o conceito de conjunto de autovalores de operadores lineares definidos sobre espaços vetoriais de dimensão finita.

Definição A.9. Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador linear. Seja $\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ existe e é limitado}; tal conjunto é chamado de resolvente de A , o seu complementar em \mathbb{C} , $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$, é chamado o espectro de A .

Proposição A.1. *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operado linear. Então, $\rho(A)$ é aberto em \mathbb{C} ; consequentemente, $\sigma(A)$ é fechado.*

Demonstração. Vide [18]. □

É possível mostrar que se A é limitado, então $\sigma(A) \neq \emptyset$ e $\forall \lambda \in \sigma(A) \quad \lambda \leq \|A\|$; segue-se daí que $\sigma(A)$ é compacto, neste caso. Além disso, também é possível mostrar que quando A é auto-adjunto, temos $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Definição A.10. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ e $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável. A μ -imagem essencial de ϕ é definida como o conjunto de todos os $y \in \mathbb{R}$ tais que, para todo $\epsilon > 0$, $\mu(\{x \in \Omega : |\phi(x) - y| < \epsilon\}) > 0$.

Observamos que quando ϕ é contínua, a imagem essencial de ϕ coincide com o fecho da imagem de ϕ .

Proposição A.2. *O espectro $\sigma(M_\phi)$ é igual a imagem essencial de ϕ .*

Demonstração. Vide [18]. □

Teorema A.1. *Sejam $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ e $B : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$ operadores lineares unitariamente equivalentes, então*

(i) *A é auto-adjunto e limitado se, e somente se, B é auto-adjunto e limitado.*

(ii) $\sigma(A) = \sigma(B)$.

Demonstração. Vide [18]. □

A.3 Teorema Espectral

Nesta seção, apresentamos o Teorema Espectral para operadores lineares limitados definidos em espaços de Hilbert.

Introduzimos agora um resultado que nos permitirá definir, de modo elegante, a medida espectral associada a um operador auto-adjunto A definido sobre um espaço de Hilbert \mathcal{H} .

Teorema A.2 (Cálculo Funcional Contínuo [20]). *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador auto-adjunto. Então, existe uma única aplicação $\Phi : C(\sigma(A)) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ com as seguintes propriedades:*

(i) Φ é um $*$ -homomorfismo algébrico, ou seja, $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$, $\Phi(\lambda f) = \lambda\Phi(f)$, $\Phi(1) = I$ e $\Phi(\bar{f}) = \Phi(f)^*$.

(ii) Φ é contínua, ou seja, $\|\Phi(f)\|_{B(\mathcal{H}, \mathcal{H})} \leq C\|f\|_\infty$.

(iii) Se $f(x) = x$, então $\Phi(f) = A$.

(iv) Se $A\psi = \lambda\psi$, então $\Phi(f)\psi = f(\lambda)\psi$.

(v) $\sigma[\Phi(f)] = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$.

Usualmente, usaremos a notação $f(A) := \Phi(f)$.

Sejam $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador auto-adjunto e $\psi \in \mathcal{H}$. Então, uma vez que $f \rightarrow \langle \psi, f(A)\psi \rangle$ é um funcional linear positivo sobre $C(\sigma(A))$, pelo Teorema de Riesz-Markov [20], existe uma única medida μ_ψ definida sobre $\sigma(A)$ que satisfaz a identidade:

$$\langle \psi, f(A)\psi \rangle = \int_{\sigma(A)} f(x) d\mu_\psi(x). \quad (\text{A.2})$$

Definição A.11. A medida μ_ψ é chamada medida espectral associada ao vetor ψ .

A relação (B.2) se estende a qualquer função Borel mensurável e $\sigma(A)$ é o suporte topológico da medida espectral. Para detalhes consulte [20].

Segue-se imediatamente de (B.2) que a medida espectral μ_ψ é finita. Com efeito, $\mu_\psi(\mathbb{R}) = \int 1 d\mu_\psi(x) = \langle \psi, I\psi \rangle = \|\psi\|^2$. Se S é um boreliano, então denotamos $P(S) := \chi_S(A)$, que chamamos de projeção espectral sobre S (note que como a função característica só assume os valores 1 e 0, $P(S)$ é auto-adjunto e $P(S)^2 = P(S)$). Assim, $\mu_\psi(S) = \int \chi_S d\mu_\psi(x) = \langle \psi, P(S)\psi \rangle$.

O próximo resultado estabelece um critério para existência de espectro puramente absolutamente contínuo.

Proposição A.3. *Se $|\Lambda| = 0$ implica em $|\phi^{-1}(\Lambda)| = 0$ para todo boreliano Λ , então o espectro $\sigma(M_\phi)$ é puramente absolutamente contínuo.*

Demonstração. O resultado segue de

$$\mu_\psi(\Lambda) = \langle \psi, \chi_\Lambda(M_\phi)\psi \rangle = \int_{\Omega} \chi_\Lambda(\phi(x)) |f(x)|^2 dx = \int_{\phi^{-1}(\Lambda)} |f(x)|^2 dx,$$

em que f é uma função (Borel) mensurável. □

Finalmente, apresentamos o Teorema Espectral. Primeiramente, uma versão pouco refinada:

Teorema A.3. *Seja $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador auto-adjunto definido sobre um espaço de Hilbert separável \mathcal{H} e $\psi \in \mathcal{H}$. Então, existe um operador unitário $U : \mathcal{H}_\psi \rightarrow L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$ tal que*

$$(UAU^{-1}f)(x) = xf(x),$$

em que o subespaço cíclico gerado por ψ (e A) é definido por $\mathcal{H}_\psi := \{f(A)\psi : f \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)\}$. Além disso, $U\psi = 1$ e $U(e^{-iAt}\psi) = e^{-ixt}$.

Demonstração. Vide [20]. □

Mais geral, temos

Teorema A.4 (Teorema Espectral - operador de multiplicação [20]). *Seja $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador auto-adjunto definido sobre um espaço de Hilbert separável \mathcal{H} . Então existem medidas de Borel $\{\mu_n\}_{n=1}^N$ em $\sigma(A)$ e um operador unitário*

$$U : \mathcal{H} \rightarrow \bigoplus_{n=1}^N L^2(\mathbb{R}, d\mu_n),$$

de modo que

$$(UAU^{-1}f)_n(x) = xf_n(x),$$

em que escrevemos $f \in \bigoplus_{n=1}^N L^2(\mathbb{R}, d\mu_n)$ como a N -upla $(f_1(x), \dots, f_n(x))$.

A.4 Teorema de Stone

Apresentamos no que se segue o Teorema de Stone, que estabelece uma relação entre operadores auto-adjuntos e os grupos unitários de evolução .

Definição A.12. Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert. Uma função $G : \mathbb{R} \rightarrow B(\mathcal{H})$ é um grupo unitário de evolução sobre \mathcal{H} se $G(t)$ é um operador unitário sobre \mathcal{H} e $G(t+s) = G(t)G(s)$, para todos $t, s \in \mathbb{R}$.

Definição A.13. Se $G(t)$ é um grupo unitário de evolução, o operador linear definido por

$$\mathcal{D}(A) := \left\{ \psi \in \mathcal{H} : \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (G(h) - I)\psi \right\},$$

$$A\psi := i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (G(h) - I)\psi, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(A)$$

é chamado de gerador infinitesimal de $G(t)$.

O que torna interessante o estudo dos grupos unitários de evolução para nosso trabalho é justamente a relação biunívoca entre tais grupos e os operadores auto-adjuntos:

Teorema A.5. Se A é auto-adjunto, então existe um grupo de evolução unitário $U(t)$ sobre \mathcal{H} tal que A é o gerador infinitesimal de $U(t)$. Neste caso, escrevemos $U(t) = e^{-iAt}$, $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Vide [18]. □

Teorema A.6 (Teorema de Stone). Se $U(t)$ é um grupo de evolução unitário sobre \mathcal{H} , então o seu gerador infinitesimal A é auto-adjunto. Neste caso, $U(t) = e^{-iAt}$, $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Vide [18]. □

Apêndice B

Medidas em espaços euclidianos

Neste apêndice, definimos as medidas de Hausdorff e de empacotamento e apresentamos um pouco da teoria de decomposição de medidas devido a Rogers e Taylor [4]. Para mais informações, sugerimos que o leitor consulte [16].

B.1 Medidas de Hausdorff e de empacotamento

Introduzida em 1918 pelo matemático Felix Hausdorff, a classe de medidas de Hausdorff surge naturalmente em diversos segmentos da matemática moderna. Tais medidas, juntamente com a noção de dimensão de Hausdorff de um conjunto boreliano surgiram com a necessidade de se entender a complexa estrutura dos fractais que, devido as suas formas geométricas não-padrão, não são classificados segundo a geometria euclidiana.

Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ um boreliano. Considere todas as famílias $\{U_i\}_{i \in \Lambda}$ de subconjuntos de M que possuam as seguintes propriedades:

(i) $\{U_i\}_{i \in \Lambda}$ é enumerável ou finita.

(ii) $\bigcup_{i \in \Lambda} U_i = M$.

Denotando-se por \mathcal{U} uma família qualquer de subconjuntos de M com essas propriedades, definimos o diâmetro de \mathcal{U} como $\text{diam}(\mathcal{U}) := \sup\{\text{diam}(U_i) : U_i \in \mathcal{U}\}$. Para cada $\alpha > 0$, a medida de Hausdorff α -dimensional de M é definida por

$$h^\alpha(M) := \liminf_{\delta \downarrow 0} \left\{ \sum_i (\text{diam}(U_i))^\alpha : \text{diam}(\mathcal{U}) < \delta \right\},$$

em que o ínfimo é tomado sobre \mathcal{U} .

Observamos que $h^t(M) < \delta^{t-\alpha} h^\alpha(M)$ para quaisquer α e t , com $t > \alpha$ e $\delta > 0$. Logo, se $h^\alpha(M) < +\infty$, então $h^t(M) = 0$. Isto nos leva à seguinte:

Definição B.1. A dimensão de Hausdorff de um boreliano $M \subset \mathbb{R}^n$ é definida como $\dim_{\text{H}} M := \inf\{\alpha : h^\alpha(M) = 0\}$.

Há uma série de exemplos interessantes de fractais cuja dimensão de Hausdorff é conhecida. Dentre eles, podemos citar o *conjunto de Cantor ternário* na reta real, cuja dimensão de Hausdorff é $\log(2)/\log(3)$, e também o *triângulo de Sierpinski*, cuja dimensão de Hausdorff é $\log(3)/\log(2)$. Para detalhes, vide [19].

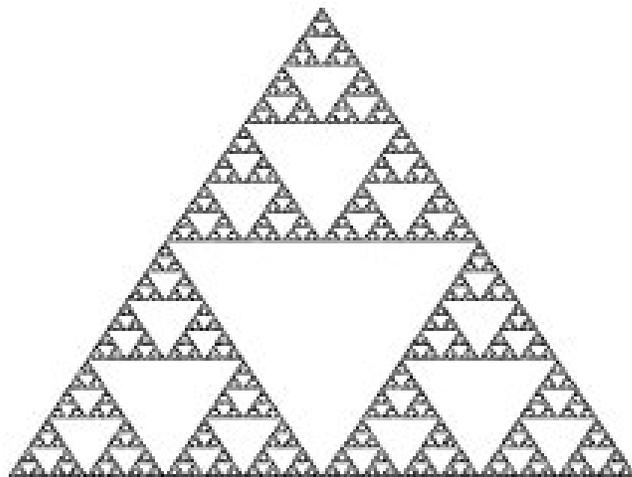


Figura B.1: Triângulo de Sierpinski

Definição B.2. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ um boreliano. Um δ -empacotamento de M é uma coleção ε_δ disjunta e contável de bolas fechadas centradas em pontos de M de raio menor ou igual a δ .

Para $\alpha > 0$, definimos

$$P_\delta^\alpha(M) := \sup\left\{\sum_i (\text{diam}(B_i))^\alpha : B_i \in \varepsilon_\delta\right\} \text{ e } P_0^\alpha(M) := \lim_{\delta \rightarrow 0} P_\delta^\alpha(M),$$

em que o supremo é tomado sobre todos os δ -empacotamentos de M . Então, a medida de empacotamento α -dimensional de M é definida por

$$P^\alpha(M) := \inf\left\{\sum_i P_0^\alpha(U_i) : U_i \in \mathcal{U}\right\},$$

em que o ínfimo é tomado sobre todas as famílias enumeráveis \mathcal{U} de subconjuntos de M cujas uniões resultem em M .

Definição B.3. A dimensão de empacotamento de um boreliano $M \subset \mathbb{R}^n$ é definida como $\text{dim}_P M := \inf\{\alpha : P^\alpha(M) = 0\}$.

No que se segue, definiremos as dimensões de Hausdorff e de empacotamento de uma medida μ de Borel positiva e finita. Estamos interessados, em particular, nas medidas de Radon.

Definição B.4. Seja μ uma medida em \mathbb{R}^n . Dizemos que μ é de Radon se as seguintes propriedades são satisfeitas:

(i) $\mu(K) < +\infty$ para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$.

(ii) Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, então $\mu(U) = \sup\{\mu(K), K \text{ é compacto } K \subset U\}$.

(iii) Se $A \subset \mathbb{R}^n$, então $\mu(A) = \inf\{\mu(U), U \text{ é aberto } A \subset U\}$.

Seja μ uma medida de Borel positiva, finita e de Radon em \mathbb{R}^n . Definimos as dimensões (superiores) de Hausdorff e de empacotamento da medida μ , respectivamente, por

$$\text{dim}_H(\mu) := \inf\{\text{dim}_H(E) : E \text{ é boreliano e } \mu(E^c) = 0\}$$

$$\text{dim}_P(\mu) := \inf\{\text{dim}_P(E) : E \text{ é boreliano e } \mu(E^c) = 0\}.$$

O resultado que se segue nos permite caracterizar as dimensões definidas anteriormente através das dimensões locais (γ^- e γ^+) da medida μ .

Teorema B.1. *Seja μ uma medida de Borel positiva, finita e de Radon em \mathbb{R}^n . Então,*

(i) $\dim_{\mathbb{H}}(\mu) = \mu\text{-ess. sup } \gamma_{\mu}^{-}(x)$

(ii) $\dim_{\mathbb{P}}(\mu) = \mu\text{-ess. sup } \gamma_{\mu}^{+}(x),$

em que $\gamma_{\mu}^{-}(x) := \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mu(\overline{B(x, \epsilon)})}{\log(\epsilon)}$ e $\gamma_{\mu}^{+}(x) := \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mu(\overline{B(x, \epsilon)})}{\log(\epsilon)}$.

Demonstração. Vide [17]. □

B.2 Teoria de Rogers e Taylor

Nesta seção, apresentamos de forma objetiva algumas definições e resultados sobre a teoria de decomposição de medidas devido a Rogers e Taylor. Para detalhes, vide [4] e [15].

Definição B.5. *Seja μ uma medida de Borel em \mathbb{R} . Diz-se que μ está suportada em S , $S \subset \mathbb{R}$, se $\mu(\mathbb{R} \setminus S) = 0$.*

Definição B.6. *Seja $S \subseteq \mathbb{R}$. Uma coleção contável (finita ou enumerável) de intervalos $\{\delta_i\}_i$ é chamada uma δ -cobertura de S se $S \subset \bigcup_i \delta_i$ e $|\delta_i| < \delta$ para todo δ_i .*

Definição B.7. *Sejam μ uma medida de Borel positiva e finita em \mathbb{R} e $\alpha > 0$.*

(i) *Diz-se que μ é α -Hausdorff contínua (denotamos αc) se $\mu(S) = 0$ para qualquer conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ com $h^{\alpha}(S) = 0$.*

(ii) *Diz-se que μ é α -Hausdorff singular (denotamos αs) se μ possui suporte em um conjunto S com $h^{\alpha}(S) = 0$.*

Teorema B.2. *Sejam $\mathcal{H}_{\alpha c} = \{\psi | d\mu_{\psi} \text{ é } \alpha\text{-Hausdorff contínua}\}$ e $\mathcal{H}_{\alpha s} = \{\psi | d\mu_{\psi} \text{ é } \alpha\text{-Hausdorff singular}\}$. Então, $\mathcal{H}_{\alpha c}$ e $\mathcal{H}_{\alpha s}$ são subespaços fechados, mutuamente ortogonais e invariantes por H , e $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\alpha c} \oplus \mathcal{H}_{\alpha s}$.*

Demonstração. Vide [15]. □

Teorema B.3 (Rogers e Taylor). *Seja μ uma medida de Borel positiva e finita em \mathbb{R} e seja $\alpha > 0$. Então, μ é α -Hausdorff contínua se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existem medidas mutuamente singulares, μ_1^{ϵ} e μ_2^{ϵ} , tais que $d\mu = d\mu_1^{\epsilon} + d\mu_2^{\epsilon}$, em que μ_1^{ϵ} é $U\alpha H$ e $\mu_2^{\epsilon}(\mathbb{R}) < \epsilon$.*

Demonstração. Vide [4]. □

Referências Bibliográficas

- [1] Barbaroux, J. M., Germinet F., Tcheremchantsev S.: Fractal dimensions and the phenomenon of intermittency in Quantum Dynamics, *Duke Math. J.*, 2001.
- [2] Barbaroux, J. M., Germinet F., Tcheremchantsev S.: Generalized fractal dimensions: equivalence and basic properties. *J. Math. Pure et Appl.*, 2001.
- [3] Carvalho, S. L.: Espectro e dimensão Hausdorff de operadores bloco-Jacobi com perturbações esparsas distribuídas aleatoriamente. Universidade de São Paulo - Brasil, 2010.
- [4] C. A. Rogers: Hausdorff Measures. Cambridge University Press, 1970.
- [5] Combes, J. M.: Connections between quantum dynamics and spectral properties of time-evolution operators. *Differential Equations with Applications to Mathematical Physics*. Boston: Academic Press, 1993.
- [6] Damanik, D. Tcheremchantsev S.: Upper bounds in quantum dynamics. *J. Amer. Math. Soc.*, 2007.
- [7] Del Rio, R., Jitomirskaya, S., Last, Y. and Simon B.: Operators with singular continuous spectrum, IV: Hausdorff dimensions, rank one perturbations, and localization. *Journa of Anal, Math.* 1996
- [8] Guarneri, I. Schulz-baldes H.: Lower bounds on wave packet propagation by packing dimensions of spectral measures. *Math. Phys. Electronic Journal*, 1999.
- [9] Guarneri, I.: Spectral properties of quantum diffusion on discret lattices. *Europhys. Lett.* 10, 95-100 (1989).
- [10] Germinet, F., Kiselev A., Tcheremchantsev S.: Transfer matrices and transport for 1D Schrödinger operators with singular spectrum. *Ann. Inst. Fourier*, 2004.
- [11] Germinet, F., Klein, A.: Sub-exponential decay of operator-valued kernels of functions of Schrödinger and other operators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2003.
- [12] Germinet, F., Klein, A.: A characterization of the Anderson metal-insulator transport transition. *Duke Math. J.*, 2004.
- [13] Lapas, L. C.: Transporte Balístico. Universidade de Brasília - Brasil, 2005.

- [14] Last, Y., Simon B.: Eigenfunctions, transfer matrices and absolutely continuous spectrum of one-dimensional Schrödinger operators. *Invent. Math.*, 1999.
- [15] Last, Y.: Quantum Dynamics and Decompositions of Singular Continuous Spectra. *Journal of Functional Analysis*, 1996.
- [16] Mattila, P.: *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*. Cambridge University Press, 1995.
- [17] Olivares, E. A. L. B.: Estimativas de magnitudes da dinâmica quântica envolvendo dimensões de Hausdorff e empacotamento. Ufscar, 2014.
- [18] Oliveira, C. R.: *Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics*. Birkhäuser, Basel, 2009.
- [19] Oliveira, K.: *Tópicos em Teoria Ergódica*. UFAL, 2014.
- [20] Reed M., Simon B.: *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*. London, San Diego: Academic Press, 1980.
- [21] Rudin, W.: *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill Science, 1986.
- [22] Simon, B.: *Spectral Analysis Of Rank One Perturbations And Applications*. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1995.
- [23] Simon, B.: *Trace Ideals and their Applications*. London: Cambridge Univ. Press, 1979.
- [24] Stolz, G.: *An Introduction to the mathematics of Anderson Localization*. Contemp. Math. 552, Amer. Math. Soc., Providence, 2011.
- [25] Strichartz, R. S.: Fourier asymptotics of fractal measures. *Journal of Functional Analysis*, 1990.
- [26] Teschl, G.: *Mathematical Methods in Quantum Mechanics with Applications to Schrödinger Operators*. American Mathematical Society, 2008.