UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Elementos Reversíveis e Fortemente Reversíveis em $U(n)$, $SU(n)$, $U(n,1)$, $SU(n,1)$ e $PU(n,1)$

Tauan Lucas Amaral Brandão

Belo Horizonte - MG
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Tauan Lucas Amaral Brandão

Orientador: Heleno da Silva Cunha

Elementos Reversíveis e Fortemente Reversíveis em $U(n)$, $SU(n)$, $U(n,1)$, $SU(n,1)$ e $PU(n,1)$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas (ICEX) da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Belo Horizonte - MG
2015

Agradecimentos

- Agradeço primeiramente a Deus;
- Agradeço à minha família;
- Agradeço ao meu orientador Heleno, ao departamento de matemática da UFMG e aos meus amigos e colegas que me acompanharam nessa jornada chamada Mestrado;
- Agradeço à minha noiva Lívia por sua paciência com a minha ausência.

À minha mãe Margarete, pai Ivan, irmã Michele e noiva Lívia.

Resumo

Este trabalho consiste em apresentar uma classificação completa dos elementos reversíveis e fortemente reversíveis no grupo de isometrias holomorfas do espaço hiperbólico complexo, denotado por $PU(n,1)$, e nos grupos $U(n)$, $SU(n)$, $U(n,1)$ e $SU(n,1)$, grupos estes que são de profundo interesse para a geometria hiperbólica complexa. Este trabalho foi baseado no artigo "Reversible Complex Hyperbolic Isometries" de K. Gongopadhyay e J. R. Parker [15].

Palavras-chave: Elementos Reversíveis e Fortemente Reversíveis, Grupo de Isometrias, Espaço Hiperbólico Complexo, Geometria Hiperbólica Complexa.

Abstract

This dissertation presents a complete classification of the reversible and strongly reversible elements in the holomorphic isometries group of the complex hyperbolic space, denoted by $PU(n,1)$, and in the groups $U(n)$, $SU(n)$, $U(n,1)$ and $SU(n,1)$. Those groups are of large importance to the complex hyperbolic geometry. This work is based on the "Reversible Complex Hyperbolic Isometries" authored by K. Gongopadhyay and John R. Parker [15].

Keywords: Reversible and Strongly Reversible Elements, Isometries Group, Complex Hyperbolic Space, Complex Hyperbolic Geometry.

Sumário

Introdução

Os elementos reversíveis e fortemente reversíveis (ver Definição 2.3) vêm sendo estudados em muitos contextos. Para elucidar estes contextos, podemos citar como referência [3], [10], [22], [28], [29], [30] para elementos reversíveis, e [4], [5], [6], [7], [8], [17], [18], [19], [24], [31] para elementos fortemente reversíveis.

Um bom exemplo de contexto em que esses elementos vêm sendo estudados é em geometria hiperbólica real. Denotemos o espaço hiperbólico real de dimensão n por $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, o seu grupo de isometrias por $Isom(\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}})$ e a componente conexa da identidade de $Isom(\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}})$ por $Isom_0(\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}})$ (grupo de isometrias de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ que preservam orientação). Para $n = 2$, todo elemento de $Isom(\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}})$ é fortemente reversível e consequentemente reversível. Entretanto, em $Isom_0(\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}) \approx PSL(2, \mathbb{R})$ existem elementos que não são reversíveis. Identificando $PSL(2, \mathbb{R})$ com o grupo das aplicações de Möbius, podemos tomar por exemplo a aplicação $z \to z + 1$ a qual não é conjugada à sua inversa $z \to z - 1$ em $PSL(2, \mathbb{R})$.

Para $n = 3$, W. Fenchel [11] demonstra que todo elemento de $Isom_0(\mathbb{H}^3_{\mathbb{R}}) \approx PSL(2, \mathbb{C})$ é fortemente reversível. Ainda em [11], prova-se que todo elemento de $Isom(\mathbb{H}^3_{\mathbb{R}})$ é fortemente reversível.

Para dimensões maiores, K. Gongopadhyay e R. S. Kulkarni [14, Teorema 1.2], provaram que todo elemento de $Isom(\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}})$ é fortemente reversível (ver também [4], [18], [17], [24], [31]). Os elementos reversíveis em $Isom_0(\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}})$ foram caracterizados por K. Gongopadhyay [13] e I. Short [27] (ver também [21]). K. Gongopadhyay [13] deu uma caracterização no âmbito da álgebra linear, associando isometrias que preservam orientação com a componente conexa da identidade do grupo ortogonal especial, denotado por $SO_0(n, 1)$. I. Short [27] obteve uma classificação geométrica para os elementos reversíveis de $Isom_0(\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}})$.

O estudo dos elementos reversíveis e fortemente reversíveis também vem sendo feito em geometria hiperbólica complexa conforme segue. Sejam $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ o espaço hiperbólico complexo de dimensão n, $Isom(\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}})$ seu grupo de isometrias. Sabe-se que podemos identificar o grupo das isometrias holomorfas de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ com o grupo unitário projetivo denotado por $PU(n,1)$ (ver [12]). Para $n=2$, E. Falbel e V. Zocca [9] provaram que todo elemento de $PU(2,1)$ pode ser expresso como um produto de duas involuções anti-holomorfas, ou seja, todo elemento de $PU(2,1)$ é fortemente reversível em $Isom(\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}})$. Posteriormente, H. Choi [2] estendeu este resultado para as isometrias de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$.

Neste trabalho, tivemos como ponto de partida o problema de caracterizar os elementos reversíveis e fortemente reversíveis de $PU(n,1)$. Grupo este, que tem uma relação natural com os grupos $U(n,1)$ e $SU(n,1)$. Deste problema, surgiu a necessidade do estudo de caracterizações desses elementos nos grupos $U(n)$ e $SU(n)$. Assim, por uma questão de completude, resolvemos estuda-los e incluí-los neste trabalho. Para o estudo destes grupos, nos baseamos nos artigos K. Gongopadhyay e J. R. Parker [15], E. W. Ellers [7] e M. J. Wonenburger [31].

Como a maioria dos resultados deste trabalho são demonstrados com ferramentas da álgebra linear, apresentamos no Capítulo 1 uma breve revisão de alguns conceitos básicos da álgebra linear que precisamos para os fins deste trabalho. Além disso, ainda neste primeiro capítulo, fazemos uma introdução ao estudo da geometria hiperbólica complexa. Definimos o espaço hiperbólico complexo, apresentando um de seus modelos, e definimos o seu grupo de isometrias holomorfas classificando as isometrias quanto ao número de seus pontos fixos em $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}} \cup \partial\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$.

Para o Capítulo 2, reservamos a apresentação de uma caracterização para os grupos $U(n)$ e $SU(n)$. Essas caracterizações são úteis para classificarmos, quanto à reversibilidade, os elementos dos grupos $U(n,1)$ e $SU(n,1)$, que por sua vez, nos ajuda a classificar os elementos de $PU(n,1)$ quanto à reversibilidade. Daí segue a importância deste capítulo para nossos objetivos nesta dissertação. Além disso, ainda no Capítulo 2, mostramos que se uma transformação linear não-singular unitária $T \in U(V^n_K)$ é reversível, então V^n_K é a soma direta de subespaços regulares W_i mutuamente ortogonais, onde cada W_i é cíclico, ou é a soma direta de dois subespaços cíclicos regulares de mesma ordem, onde $U(V^n_K)$ é o grupo das transformações lineares unitárias não-singulares definidas em V^n_K (ver Teorema 2.10).

Finalmente, no Capítulo 3, apresentamos uma classificação para os elementos reversíveis e fortemente reversíveis de $U(n,1)$, $SU(n,1)$ e $PU(n,1)$. Tal classificação é dada relacionando a reversibilidade dos elementos desses grupos aos seus polinômios característicos e autovalores respectivos.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, como o próprio título sugere, trataremos dos conceitos preliminares necessários para o entendimento do propósito deste trabalho. Muitos dos resultados relevantes que apresentaremos no decorrer desta dissertação, serão demonstrados utilizando-se de ferramentas da Álgebra Linear. Assim, traremos na Seção 1.1 deste capítulo, alguns conceitos e resultados necessários da Álgebra Linear. Reservamos para a Seção 1.2, uma breve introdução ao Espaço Hiperbólico Complexo, onde por conveniência para os nossos fins nesta dissertação, adotamos o chamado Modelo Projetivo para esse espaço. Ainda na Seção 1.2, falaremos sobre o Grupo de Isometrias Holomorfas do Espaço Hiperbólico Complexo, cujos elementos serão nossos principais objetos de estudo neste trabalho.

1.1 Conceitos Preliminares de Álgebra Linear

Nosso primeiro passo para podermos falar do Espaço Hiperbólico Complexo é definir Formas Hermitianas. Então, começaremos esta seção trabalhando num contexto mais geral de Formas Sesquilineares, e posteriormente nos restringiremos às Formas Hermitianas.

Para começar, vamos denotar por V_K um espaço vetorial de dimensão finita, sobre um corpo comutativo K. Consideremos a aplicação $J : K \to K$, que toma $t \in K$ e leva em $t^J \in K$, satisfazendo às condições:

(i) J é injetiva;

(ii) $(t+s)^J = t^J + s^J$ e $(ts)^J = t^J s^J$, para todo $t, s \in K$;

(iii) $(t^J)^J = t$, para todo $t \in K$.

Assim, dizemos que a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : V_K \times V_K \to K$ é uma **Forma Sesquilinear** se satisfaz às propriedades:

(i) $\langle v + tw, u \rangle = \langle v, u \rangle + t\langle w, u \rangle$, para todo $u, v, w \in V_K$ e $t \in K$;

(ii) $\langle v, w + tu \rangle = \langle v, w \rangle + t^J \langle v, u \rangle$, para todo $u, v, w \in V_K$ e $t \in K$.

Isto é, a aplicação é linear em relação à primeira coordenada e semilinear em relação à segunda coordenada. Além disso, dizemos que uma forma sesquilinear é **Não Degenerada** se o único vetor $u \in V_K$ que satisfaz $\langle u, v \rangle = 0$ para todo $v \in V_K$, é o vetor $u = 0$, caso contrário a forma é dita ser **Degenerada**. Se V_K é tal que a forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é não degenerada, dizemos que V_K é **Regular**.

Em geral, vamos considerar neste trabalho formas sesquilineares $\langle \cdot, \cdot \rangle$, tais que satisfazem à propriedade de que $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle^J$, para quaisquer elementos $u, v \in V_K$. Em particular, considerando $V_{\mathbb{C}}$ um espaço vetorial de dimensão finita, sobre o corpo dos complexos $\mathbb{C}$, e tomando J como sendo a conjugação complexa, denotada pelo símbolo "$-$", temos a seguinte definição:

Definição 1.1 (Forma Hermitiana.) *Uma forma sesquilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ é dita ser uma forma hermitiana, se para todo $u, v \in V_{\mathbb{C}}$ temos que $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$.*

Veja que para uma forma hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$, temos que para todo $v \in V_{\mathbb{C}}$, $\langle v, v \rangle = \overline{\langle v, v \rangle}$, ou seja, $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$. Assim, dizemos que uma forma hermitiana é **Definida Positiva** se $\langle u, u \rangle > 0$ para todo $u \in V_{\mathbb{C}}$ não nulo, e **Indefinida** se a forma admite valores positivos, negativos e eventualmente nulos. Dado um subespaço vetorial W de $V_{\mathbb{C}}$, dizemos que W é **Elíptico**, **Parabólico** ou **Hiperbólico** se a forma restrita a W é definida positiva, degenerada, ou não degenerada e indefinida, respectivamente. Além disso, denotando por $V_{\mathbb{C}}^n$ um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo dos complexos $\mathbb{C}$, munindo esse espaço de uma forma hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considerando uma base $\mathcal{B} = \{b_1, ..., b_n\}$, dizemos que $\mathcal{B}$ é uma **Base Ortonormal** de $V_{\mathbb{C}}^n$ se $\langle b_i, b_i \rangle = -1, 0$ ou 1 para $i = 1, ..., n$, e $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ para todo $i, j = 1, ..., n$, com $i \neq j$.

Pelo que vimos, a expressão $\langle b_i, b_i \rangle$ pode resultar em três valores: -1, 0 ou 1. Dessa forma, vamos agora denotar por $p = \#\{b_i \in \mathcal{B}; \langle b_i, b_i \rangle = 1\}$, $q = \#\{b_i \in \mathcal{B}; \langle b_i, b_i \rangle = -1\}$ e $r = \#\{b_i \in \mathcal{B}; \langle b_i, b_i \rangle = 0\}$. Isto é, p, q e r indicam a cardinalidade do conjunto de vetores da base de $V_{\mathbb{C}}^n$ tais que, quando aplicados na forma hermitiana, resultam respectivamente em 1, -1 e 0. Assim obtemos uma terna denotada por (p, q, r). Agora, uma pergunta natural a se fazer é: essa terna que obtemos depende da base ortonormal que estamos considerando para o espaço vetorial em questão? O próximo teorema responde a essa pergunta.

Teorema 1.2 (Sylvester.) *Seja $V_{\mathbb{C}}^n$ munido de uma forma hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Considere $\mathcal{B} = \{b_1, ..., b_n\}$ uma base ortonormal para $V_{\mathbb{C}}^n$. Então a terna (p, q, r) é sempre a mesma para qualquer base ortonormal que considerarmos no espaço.*

Prova. A demonstração deste fato pode ser encontrada em [20], páginas 104 e 105. ■

O Teorema de Sylvester nos diz que a terna (p, q, r) é intrínseca à forma, no sentido de não depender da base ortonormal que tomamos. Assim, chamamos a terna (p, q, r) de **Assinatura da Forma Hermitiana**. Para simplificar a notação, sempre que $r = 0$ na assinatura da forma, denotaremos a assinatura $(p, q, 0)$ apenas pelo par (p, q). Além disso, daqui para frente nós denotaremos por $V_{\mathbb{C}}^n$ um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo dos complexos $\mathbb{C}$ e por $V_{\mathbb{C}}^{p,q}$ o par $(V_{\mathbb{C}}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tal que a forma hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tem assinatura (p, q) com $n = p + q$. Aqui o par $(V_{\mathbb{C}}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ denota um espaço vetorial $V_{\mathbb{C}}^n$ munido de uma forma hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Para finalizar esta seção, seguem aqui dois resultados importantes da álgebra linear que serão utilizados neste trabalho. As respectivas demonstrações podem ser encontradas em livros do gênero.

Teorema 1.3 (Decomposição Primária.) *Sejam V_K um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo K e $T : V_K \to V_K$ uma aplicação linear cujo polinômio mínimo é $m(t) = g_1(t)^{h_1}...g_r(t)^{h_r}$, onde os polinômios g_i são mônicos, distintos e irredutíveis, e $h_1, ..., h_r \in \mathbb{N}$. Então, os fatores $g_i(t)^{h_i}$ são os polinômios mínimos das restrições de T a $W_i = Ker(g_i(T)^{h_i})$ e $V_K = W_1 \bigoplus ... \bigoplus W_r$.*

No teorema acima, quando falamos do polinômio mínimo da transformação linear T, estamos nos referindo ao polinômio mínimo da matriz associada à transformação linear T.

Essa relação entre transformações lineares e matrizes pode ser encontrada em livros do gênero (ver Observação 1.5). Veja que também estamos usando dessa relação no resultado abaixo.

Teorema 1.4 *Sejam V_K um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado K e $T : V_K \to V_K$ uma aplicação linear. Então $V_K = \bigoplus_{\lambda_i} V_{\lambda_i}$, onde V_{λ_i} são autoespaços de T associados respectivamente aos autovalores λ_i.*

1.2 O Espaço Hiperbólico Complexo

Uma vez entendido sobre as formas hermitianas, estudadas na Seção 1.1, estamos em condições de falar sobre um modelo do espaço hiperbólico complexo que será útil para nossos propósitos neste trabalho. Tal modelo é conhecido como Modelo Projetivo do Espaço Hiperbólico Complexo, e será definido na subseção 1.2.1. Ainda nesta seção, mais precisamente na Subseção 1.2.2, falaremos do Grupo de Isometrias do Espaço Hiperbólico Complexo, o qual é nosso principal objeto de estudo neste trabalho, já que um dos nossos objetivos nesta dissertação é classificar os elementos desse grupo quanto à reversibilidade (ver Definição 2.3).

1.2.1 O Modelo Projetivo

Para começar esta subseção, definimos os seguintes subconjuntos de $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$:

$$\begin{aligned} V_- &= \{u \in V_{\mathbb{C}}^{n,1}; \langle u, u\rangle < 0\} \\ V_+ &= \{u \in V_{\mathbb{C}}^{n,1}; \langle u, u\rangle > 0\} \\ V_0 &= \{u \in V_{\mathbb{C}}^{n,1}; \langle u, u\rangle = 0\} \end{aligned}$$

onde os vetores em V_-, V_+ e V_0 são chamados de vetores **Negativos**, **Positivos** e **Isotrópicos**, respectivamente.

Agora considere em $V_{\mathbb{C}}^{n,1} - \{0\}$ a seguinte relação de equivalência: dados $u, v \in V_{\mathbb{C}}^{n,1}$, temos que $u \sim v$ se, e somente se, $u = tv$ para algum $t \in \mathbb{C}$ não nulo. Seja $\mathbb{P}(V_{\mathbb{C}}^{n,1}) = V_{\mathbb{C}}^{n,1} - \{0\}/\sim$, o conjunto das classes de equivalência dadas pela relação "$\sim$". Seja também a projeção natural π dada por:

$$\begin{aligned} \pi : V_{\mathbb{C}}^{n,1} - \{0\} &\to \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}}^{n,1}) \\ u &\mapsto \pi(u) = [u] \end{aligned}$$

ou seja, associa cada vetor em $V_{\mathbb{C}}^{n,1} - \{0\}$ à sua respectiva classe de equivalência. Com isso, definimos o **Espaço Hiperbólico Complexo** por $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n = \pi(V_-)$, isto é, a projetivização do conjunto dos vetores negativos de $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$. Esse é o chamado **Modelo Projetivo do Espaço Hiperbólico Complexo**. Além disso, temos que a projetivização do conjunto de vetores isotrópicos em $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ nos dá a **Fronteira do Espaço Hiperbólico Complexo**, denotada por $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n = \pi(V_0)$, e a parte externa ao espaço hiperbólico e à sua fronteira, é dada pela projetivização do conjunto dos vetores positivos, o qual denotamos por $\ell\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n = \pi(V_+)$ e chamamos de **Alhures**.

No modelo projetivo do espaço hiperbólico complexo, a distância entre dois pontos $u, v \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ é dada por uma função distância ρ, definida pela fórmula:

$$\cosh^2\left(\frac{\rho(u,v)}{2}\right) = \frac{\langle\tilde{u},\tilde{v}\rangle\langle\tilde{v},\tilde{u}\rangle}{\langle\tilde{u},\tilde{u}\rangle\langle\tilde{v},\tilde{v}\rangle}\,,$$

onde $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ são vetores negativos em $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ tais que $\pi(\tilde{u}) = u$ e $\pi(\tilde{v}) = v$. A função distância ρ é chamada de **Métrica de Bergman**, e os elementos $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ são chamados de **Levantamentos** dos pontos u e v de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, respectivamente. Veja que a métrica de Bergman está bem definida, ou seja, a expressão acima não depende do levantamento que tomamos. De fato, se tomamos outros levantamentos $u' = \alpha\tilde{u}$ e $v' = \beta\tilde{v}$ de u e v respectivamente, com $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ não nulos, temos que:

$$\frac{\langle u',v'\rangle\langle v',u'\rangle}{\langle u',u'\rangle\langle v',v'\rangle} = \frac{\langle\alpha\tilde{u},\beta\tilde{v}\rangle\langle\beta\tilde{v},\alpha\tilde{u}\rangle}{\langle\alpha\tilde{u},\alpha\tilde{u}\rangle\langle\beta\tilde{v},\beta\tilde{v}\rangle} = \frac{|\alpha|^2|\beta|^2}{|\alpha|^2|\beta|^2}\frac{\langle\tilde{u},\tilde{v}\rangle\langle\tilde{v},\tilde{u}\rangle}{\langle\tilde{u},\tilde{u}\rangle\langle\tilde{v},\tilde{v}\rangle} = \frac{\langle\tilde{u},\tilde{v}\rangle\langle\tilde{v},\tilde{u}\rangle}{\langle\tilde{u},\tilde{u}\rangle\langle\tilde{v},\tilde{v}\rangle}\,.$$

1.2.2 O Grupo de Isometrias do Espaço Hiperbólico Complexo

Antes de falar sobre o grupo de isometrias do espaço hiperbólico complexo, vamos explicitar alguns grupos que são importantes para os fins deste trabalho. Para isso, seja $GL(n,\mathbb{C})$ o conjunto das matrizes $n \times n$ invertíveis, com entradas em $\mathbb{C}$. Esse conjunto tem uma estrutura de grupo quando munido da operação de multiplicação de matrizes. Vale lembrar que uma matriz $A \in GL(n,\mathbb{C})$ é dita ser **Unitária** com respeito à forma hermitiana $\langle\cdot,\cdot\rangle$, se $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$, para quaisquer vetores coluna $u, v \in V_{\mathbb{C}}^n$. Dito de outra forma, matrizes unitárias são aquelas que preservam a forma hermitiana. Tendo isso, dado $V_{\mathbb{C}}^n$ munido de uma forma hermitiana $\langle\cdot,\cdot\rangle$, denotamos o conjunto das matrizes unitárias de ordem $n \times n$

por:

$$U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}); \langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle, \forall u, v \in V_{\mathbb{C}}^n\} .$$

Munindo esse conjunto com a operação de produto de matrizes, temos que $U(n)$ tem uma estrutura de grupo, e é chamado de **Grupo Unitário**. Um subgrupo importante de $U(n)$ é o **Grupo Unitário Especial**, dado por:

$$SU(n) = \{A \in U(n); det(A) = 1\} ,$$

onde $det : U(n) \to U(1)$ é a aplicação determinante.

Se consideramos $V_{\mathbb{C}}^{n+1}$ munido de uma forma $\langle \cdot, \cdot\rangle$ de assinatura $(n, 1)$, ou seja, o par $V_{\mathbb{C}}^{n,1} = (V_{\mathbb{C}}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot\rangle)$, o grupo unitário e o grupo unitário especial são dados respectivamente por:

$$U(n, 1) = \{A \in GL(n + 1, \mathbb{C}); \langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle, \forall u, v \in V_{\mathbb{C}}^{n,1}\}$$

e

$$SU(n, 1) = \{A \in U(n, 1); det(A) = 1\} .$$

Observação 1.5 *Se consideramos uma base em $V_{\mathbb{C}}^n$, temos que $GL(n, \mathbb{C})$ e $GL(V_{\mathbb{C}}^n)$ são grupos isomorfos, onde $GL(V_{\mathbb{C}}^n)$ é o grupo das transformações lineares de $V_{\mathbb{C}}^n$ em $V_{\mathbb{C}}^n$ não-singulares, ou seja, transformações cujo o núcleo é o trivial. Assim, sempre podemos associar a cada matriz inversível uma transformação linear não-singular, e a cada transformação linear não-singular uma matriz inversível. Com isso, a cada matriz $A \in U(n)$ podemos considerar $T_A \in U(V_{\mathbb{C}}^n)$ a transformação linear não-singular unitária associada à matriz unitária A, onde $U(V_{\mathbb{C}}^n)$ é o grupo das transformações lineares unitárias não-singulares, que vão de $V_{\mathbb{C}}^n$ em $V_{\mathbb{C}}^n$. O mesmo podemos fazer com as matrizes do grupo $U(n, 1)$. Para facilitar a notação, denotaremos por $T_A = T$, para alguma matriz $A \in U(n)$.*

A Observação 1.5 também é válida para casos mais gerais. Isto é, se consideramos um espaço vetorial V_K^n de dimensão finita n sobre um corpo K, temos que $GL(n, K) \cong GL(V_K^n)$. E assim obtemos a mesma relação citada acima entre os elementos desses grupos.

Agora, seja a projeção natural $\pi : U(n, 1) \to Aut(\mathbb{P}(V_{\mathbb{C}}^{n,1}))$, onde $Aut(\mathbb{P}(V_{\mathbb{C}}^{n,1}))$ é o grupo de biholomorfismos de $\mathbb{P}(V_{\mathbb{C}}^{n,1})$. A imagem $\pi(U(n, 1))$ é o grupo de todos os biholomorfismos de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, e denotamos $\pi(U(n, 1)) = PU(n, 1)$. Assim definido, temos que $PU(n, 1)$ é a projetivização do $U(n, 1)$, e é chamado **Grupo Unitário Projetivo**.

Observação 1.6 *Veja que a aplicação π acima faz sentido, ou seja, a cada aplicação $T \in U(n,1)$ podemos associar uma aplicação $\tilde{T} \in Aut(\mathbb{P}(V_{\mathbb{C}}^{n,1}))$. Para isso, basta definir $\tilde{T}(v) = \pi(T\tilde{v})$, onde $\tilde{v}$ é um levantamento de v de $\mathbb{P}(V_{\mathbb{C}}^{n,1})$. Além disso, podemos notar que π está bem definida, isto é, π não depende dos levantamentos que considerarmos, e como T preserva a forma hermitiana, temos que $\tilde{T}$ é uma isometria de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$.*

O próximo teorema vai nos dizer que cada isometria de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ ou é holomorfa, ou seja, é dada por um elemento de $PU(n,1)$, ou é anti-holomorfa, dada pela composição da aplicação conjugação complexa com um elemento de $PU(n,1)$. Veja que a aplicação conjugação complexa dada por:

$$\begin{aligned} f : V_{\mathbb{C}}^{n,1} &\rightarrow V_{\mathbb{C}}^{n,1} \\ u &\mapsto f(u) = \overline{u} \end{aligned}$$

é uma isometria pois, usando a métrica de Bergman, temos que:

$$\cosh^2\left(\frac{\rho(\overline{u},\overline{v})}{2}\right) = \frac{\langle\overline{\tilde{u}},\overline{\tilde{v}}\rangle_1\langle\overline{\tilde{v}},\overline{\tilde{u}}\rangle_1}{\langle\tilde{u},\tilde{u}\rangle_1\langle\tilde{v},\tilde{v}\rangle_1} = \frac{\langle\tilde{v},\tilde{u}\rangle_1\langle\tilde{u},\tilde{v}\rangle_1}{\langle\tilde{u},\tilde{u}\rangle_1\langle\tilde{v},\tilde{v}\rangle_1} = \cosh^2\left(\frac{\rho(u,v)}{2}\right),$$

onde $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ são levantamentos dos pontos u e v de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, respectivamente. Assim, temos que a conjugação complexa é uma isometria de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, mas não está em $PU(n,1)$ pois não é holomorfa.

Teorema 1.7 *Cada isometria de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ ou é holomorfa ou é anti-holomorfa, ou seja, ou está em $PU(n,1)$ ou é a composição da aplicação conjugação complexa com um elemento de $PU(n,1)$.*

A demonstração do Teorema 1.7 pode ser encontrada em [25] página 14, para o caso $n = 2$. Para o nosso caso, a demonstração é similar. Esse teorema nos permite dizer que o $PU(n,1)$ é o Grupo de Isometrias Holomorfas do Espaço Hiperbólico Complexo. Além disso, a definição abaixo nos diz quais os tipos de isometrias holomorfas que existem em $PU(n,1)$.

Definição 1.8 *Uma isometria de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ em $PU(n,1)$, diferente da identidade, é dita ser:*

(i) Elíptica se fixa pelo menos um ponto de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$;

(ii) Parabólica se fixa um único ponto, e este ponto está em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$;

(iii) Hiperbólica (ou Loxodrômica) se fixa exatamente dois pontos, e estes pontos estão em $\partial\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$.

Para ver a prova de que esta definição cobre todas as possibilidades possíveis para os pontos fixos de uma isometria holomorfa, ver [1]. Com isso encerramos este capítulo.

Capítulo 2

Elementos Reversíveis e Fortemente Reversíveis em U(n) e SU(n)

Em Geometria Hiperbólica Complexa, cada isometria do espaço hiperbólico complexo ou é holomorfa ou é anti-holomorfa (ver Teorema 1.7). As isometrias holomorfas são identificadas com elementos do Grupo Unitário Projetivo $PU(n,1)$. Além disso, o $PU(n,1)$ tem uma relação natural com os grupos $U(n,1)$ e $SU(n,1)$. Essa relação surge do fato que $PU(n,1)$ é a projetivização tanto do grupo $U(n,1)$, quanto do grupo $SU(n,1)$. Segue daí um bom motivo para se aprofundar na busca por informações sobre os elementos desses grupos.

Neste trabalho, temos como objetivo obter informações e caracterizações dos elementos reversíveis e fortemente reversíveis (ver Definição 2.3) dos grupos $U(n)$, $SU(n)$, $U(n,1)$, $SU(n,1)$ e $PU(n,1)$. Neste capítulo fazemos um estudo desses elementos nos grupos $U(n)$ e $SU(n)$, e apresentamos caracterizações para esses elementos em seus respectivos grupos.

Vamos assumir as seguintes propriedades dos elementos do grupo $U(n)$:

(i) todo autovalor de um elemento de $U(n)$ é um número complexo de módulo 1;

(ii) todo elemento de $U(n)$ é diagonalizável.

2.1 Um Estudo dos Elementos Reversíveis e Fortemente Reversíveis do U(n)

Dividimos esta seção em duas subseções. Na primeira subseção, nos dedicamos ao problema de decompor um espaço vetorial em soma direta de subespaços regulares mutuamente ortogonais, onde cada subespaço ou é T-cíclico, ou é a soma direta de dois subespaços T-cíclicos regulares de mesma ordem, partindo da hipótese de que a aplicação linear unitária T seja reversível. O conceito de T-cíclico ficará claro no decorrer do texto. Na segunda subseção, apresentamos uma caracterização para os elementos reversíveis e fortemente reversíveis de $U(n)$.

2.1.1 Uma Decomposição em Subespaços Cíclicos

Sejam $V_{\mathbb{R}}^n \approx \mathbb{R}^n$ um espaço vetorial com dimensão finita n, isomorfo a $\mathbb{R}^n$, sobre o corpo dos reais $\mathbb{R}$, e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma forma bilinear simétrica. Sabe-se que todo elemento do Grupo Ortogonal, denotado por $O(V_{\mathbb{R}}^n) = \{T \in GL(V_{\mathbb{R}}^n); \langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle, \forall u, v \in V_{\mathbb{R}}^n\}$, pode ser escrito como um produto de duas involuções (ver Definição 2.3). Para o leitor interessado neste problema, ver [5], [16] e [31]. Um passo importante para a demonstração deste fato é demonstrar que para toda aplicação $T \in O(V_{\mathbb{R}}^n)$, o espaço vetorial $V_{\mathbb{R}}^n$ pode ser decomposto na soma direta de subespaços regulares mutuamente ortogonais T-cíclicos e T-bicíclicos. Assim, nesta subseção, sob certas hipóteses, apresentamos um resultado similar a esse para transformações lineares tais que preservam uma forma sesquilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que satisfaz à propriedade de que $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle^J$, para quaisquer elementos u e v do espaço vetorial em questão (ver Teorema 2.10). Em verdade, daqui para frente, sempre que falarmos em formas sesquilineares, estaremos sempre supondo que a forma satisfaça à propriedade $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle^J$ para todo u e v do espaço vetorial em questão.

Para começar, seja V_K um espaço vetorial de dimensão finita, sobre um corpo comutativo K, munido de uma forma sesquilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle : V_K \times V_K \to K$, onde $J : K \to K$ é uma aplicação que toma $t \in K$ e leva em $t^J \in K$ (ver Seção 1.1 do Capítulo 1). Nesta seção, vamos considerar V_K um espaço vetorial regular, ou seja, V_K é tal que a forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é não degenerada.

Agora, considere transformações lineares $T : V_K \to V_K$ tais que preservam a forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ou seja, $\langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle$ para todo $u, v \in V_K$. O conjunto dessas transformações munido da operação de composição de funções possui estrutura de grupo. Denotemos esse grupo por $U(V_K)$. Denotemos por $Im(T)$ e $Ker(T)$ a imagem e o núcleo de $T \in U(V_K)$, respectivamente.

Considere V_K^n, o espaço vetorial V_K com uma base $\mathcal{B} = \{b_1, ..., b_n\}$. Veja que dados $T \in U(V_K^n)$ e $p(x) \in K[x]$, onde $K[x]$ é o anel de polinômios com coeficientes em K, temos que $p(T) \in U(V_K^n)$, onde nesse caso, estamos olhando a composição $p(T)$ como a composição de um polinômio com uma matriz associada a T, obtendo assim uma matriz que está associada à aplicação $p(T)$ de $U(V_K^n)$ (ver Observação 1.5). Agora, fixado $T \in U(V_K^n)$, defina a aplicação $K[x] \times V_K^n \to V_K^n$, que toma pares $(p(x), v)$ de $K[x] \times V_K^n$, e leva no elemento $p(x)v = p(T)v$ de V_K^n. Observe que com esta aplicação, V_K^n é um módulo sobre o anel de polinômios, para todo T fixado. Com isso, faz sentido falarmos de polinômios agindo em vetores, no sentido de que $p(x)v = p(T)v$, como ocorre em alguns dos resultados desta seção. Agora, faremos uma definição de grande relevância no contexto deste trabalho.

Definição 2.1 *Dado um polinômio $p(x) \in K[x]$ de grau s e $p(0) \neq 0$, dizemos que o polinômio $\tilde{p}(x) = p(0)^{-1}x^s p(x^{-1})$ é o dual de $p(x)$. Se $p(x) = \tilde{p}(x)$, dizemos que $p(x)$ é auto-dual.*

Explicitamente, se $p(x) \in K[x]$ com $p(0) \neq 0$, tal que $p(x) = t_0 + t_1 x + ... + t_s x^s$, temos que o seu dual é dado por $\tilde{p}(x) = p(0)^{-1}x^s p(x^{-1}) = \frac{t_s}{t_0} + \frac{t_{s-1}}{t_0}x + ... + \frac{t_1}{t_0}x^{s-1} + x^s$. Se $p(x)$ é auto-dual, ou seja, $p(x) = \tilde{p}(x)$, temos que necessariamente $t_s = 1$, ou seja, $p(x)$ é um polinômio mônico. Além disso, os polinômios auto-duais também têm a propriedade de que se λ é uma raiz de multiplicidade k, então λ^{-1} também o é. Reciprocamente, se vale a propriedade que acabamos de citar, então o polinômio é auto-dual.

Antes de enunciar a próxima proposição, vale ressaltar também que dado um espaço vetorial V, dizemos que dois subespaços vetoriais V_1 e V_2 de V são **Mutuamente Ortogonais** se $\langle u, v \rangle = 0$ para todo $u \in V_1$ e todo $v \in V_2$. Além disso, dado $p(x) \in K[x]$, com a forma $p(x) = t_0 + t_1 x + ... + t_s x^s$, definimos $p^J(x) = t_0^J + t_1^J x + ... + t_s^J x^s$. Definimos também um subcorpo de K, dado por $F(J) = \{t \in K; t = t^J\}$, e denotamos por $F(J)[K]$ o anel de polinômios com coeficientes em $F(J)$. Veja que se um polinômio $p(x) \in F(J)[K]$, então o seu polinômio dual $\tilde{p}(x) \in F(J)[K]$. Agora, estamos em condições de enunciar a proposição.

Proposição 2.2 *Sejam V_K^n um espaço vetorial regular de dimensão n, sobre um corpo K, munido de uma forma sesquilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $T \in U(V_K^n)$ e $p(x) \in K[x]$ tal que $p(0) \neq 0$. Então, os subespaços $Im(p(T))$ e $Ker(\tilde{p}^J(T))$ de V_K^n, são mutuamente ortogonais. Se $p(x) \in F(J)[x]$ é auto-dual, então os subespaços $Im(p(T))$ e $Ker(p(T))$ de V_K^n, são mutuamente ortogonais.*

Prova. Fixado $T \in U(V_K^n)$, seguem das propriedades de forma sesquilinear que $\langle tv, w \rangle = \langle v, t^J w \rangle$ e $\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^{-1} w \rangle$, para todo $v, w \in V_K^n$, $t \in K$ e $T^{-1} \in U(V_K^n)$, onde T^{-1} é o elemento inverso de T o qual existe pois $U(V_K^n)$ é grupo. Agora, tome um polinômio $p(x) \in K[x]$ de grau l, onde $p(x) = t_0 + t_1 x + ... + t_l x^l$. Usando as duas igualdades obtidas pelas propriedades de forma sesquilinear, temos

$$\begin{aligned}
\langle p(T)v, w \rangle &= \langle (t_0 + t_1 T + ... + t_l T^l)v, w \rangle \\
&= \langle t_0 v + t_1 T v + ... + t_l T^l v, w \rangle \\
&= \langle t_0 v, w \rangle + \langle t_1 T v, w \rangle + ... + \langle t_l T^l v, w \rangle \\
&= \langle v, t_0^J w \rangle + \langle Tv, t_1^J w \rangle + ... + \langle T^l v, t_l^J w \rangle \\
&= \langle v, t_0^J w \rangle + \langle v, t_1^J T^{-1} w \rangle + ... + \langle v, t_l^J T^{-l} w \rangle \\
&= \langle v, t_0^J w + t_1^J T^{-1} w + ... + t_l^J T^{-l} w \rangle \\
&= \langle v, (t_0^J + t_1^J T^{-1} + ... + t_l^J T^{-l}) w \rangle \\
&= \langle v, p^J (T^{-1}) w \rangle \ ,
\end{aligned}$$

para todo $v, w \in V_K^n$, e $T \in U(V_K^n)$ fixado. Assim, segue que

$$\langle p(T)v, w \rangle = \langle v, p^J (T^{-1}) w \rangle. \tag{2.1}$$

Usando a igualdade (2.1), considerando $p(x) \in K[x]$ tal que $p(0) \neq 0$, temos que $\langle p(T)v, w \rangle = \langle v, p^J(T^{-1}) w \rangle = \langle v, \tilde{p}^J(T) T^{-l} p(0)^J w \rangle$, onde $\tilde{p}(x)$ é o polinômio dual de $p(x)$. Logo,

$$\langle p(T)v, w \rangle = \langle v, \tilde{p}^J(T) T^{-l} p(0)^J w \rangle. \tag{2.2}$$

Agora, tome $u \in Ker(\tilde{p}^J(T))$ e $v \in Im(p(T))$. Como v está na imagem de $p(T)$, existe $w \in V_K^n$ tal que $v = p(T)w$. Usando (2.2), temos que $\langle v, u \rangle = \langle p(T)w, u \rangle = \langle w, \tilde{p}^J(T) T^{-l} p(0)^J u \rangle =$

0, pois $u \in Ker(\tilde{p}^J(T))$. Segue que $Im(p(T))$ e $Ker(\tilde{p}^J(T))$ são mutuamente ortogonais. Por outro lado, suponha que $p(x) \in F(J)[x]$ e é um polinômio auto-dual. Como $p(x) \in F(J)[x]$, então $\tilde{p}(x) \in F(J)[x]$. Assim, temos que $\tilde{p}(x) = \tilde{p}^J(x)$. Como $p(x)$ é auto-dual, segue que $p(x) = \tilde{p}(x) = \tilde{p}^J(x)$. Logo $p(x) = \tilde{p}^J(x)$, e consequentemente $p(T) = \tilde{p}^J(T)$. Já que $p(T) = \tilde{p}^J(T)$, temos que $Ker(p(T)) = Ker(\tilde{p}^J(T))$. Tendo isso, tome $u \in Ker(p(T))$ e $v \in Im(p(T))$. Assim, existe $w \in V_K^n$ tal que $v = p(T)w$. Usando novamente (2.2), segue que $\langle v, u\rangle = \langle p(T)w, u\rangle = \langle w, \tilde{p}^J(T)T^{-l}p(0)^J u\rangle = \langle w, p(T)T^{-l}p(0)^J u\rangle = 0$, pois $u \in Ker(p(T))$. Segue que, se $p(x) \in F(J)[x]$ e é auto-dual, temos que $Im(p(T))$ e $Ker(p(T))$ são mutuamente ortogonais. ■

Agora vamos definir os tipos de elementos que temos interesse de caracterizar e trabalhar nesta dissertação. Esta definição nos diz o que vem a ser um elemento reversível e um elemento fortemente reversível de um grupo.

Definição 2.3 *Seja G um grupo. Dizemos que um elemento $g \in G$ é reversível se existe $h \in G$ tal que $g^{-1} = hgh^{-1}$. Se existe uma involução $h \in G$, ou seja, $h = h^{-1}$, tal que $g^{-1} = hgh^{-1} = hgh$, dizemos que g é fortemente reversível.*

Observe que, se $g \in G$ é fortemente reversível, então $g = hg^{-1}h = h(g^{-1}h)$ é decomposto como um produto de duas involuções. Essa afirmação segue do fato de $hg = g^{-1}h$, e do fato de hg ser uma involução, já que $(hg)^2 = hghg = e$, onde e é o elemento neutro de G. Reciprocamente, se $g = h_1h_2$, com h_1 e h_2 involuções, temos que $g^{-1} = h_2h_1$, e consequentemente, $g^{-1} = h_2h_1h_2h_2 = h_2(h_1h_2)h_2 = h_2gh_2$. Logo, g é fortemente reversível.

Para os próximos resultados, lembremos que o polinômio mínimo de uma matriz A é o polinômio $m(x)$ de menor grau tal que satisfaz à propriedade $m(A) = 0$. Veja que por definição o polinômio mínimo é mônico. Além disso, dizer que $m(x)$ é o polinômio mínimo de uma aplicação $T \in U(V_K^n)$, é dizer que $m(x)$ é o polinômio mínimo da matriz associada à aplicação T. Algumas vezes cometeremos o abuso de escrever $m(T) = 0$, tendo em vista que estamos nos referindo à composição do polinômio $m(x)$ com a matriz associada a T.

Proposição 2.4 *Seja V_K^n um espaço vetorial regular de dimensão n, sobre um corpo K, munido de uma forma sesquilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sejam $T \in U(V_K^n)$ reversível e $m(x) \in K[x]$ seu polinômio mínimo de grau l. Então $m(x) \in F(J)[x]$ e $m(x)$ é auto-dual.*

Prova. Sejam $m(x)$ o polinômio mínimo de T, com $T \in U(V_K^n)$, e $\tilde{m}(x)$ o seu polinômio dual. Veja que faz sentido falar do polinômio dual de $m(x)$, pois $m(0) \neq 0$, já que T é inversível. Afirmamos que se $m(x)$ é o polinômio mínimo de T, então o seu polinômio dual $\tilde{m}(x)$ é o polinômio mínimo de T^{-1}. O primeiro passo para verificar esta afirmação é notar que T^{-1} é raiz de $\tilde{m}(x)$. De fato, temos que $\tilde{m}(T^{-1}) = m(0)^{-1}T^{-l}m(T) = 0$, onde a última igualdade segue do fato de T ser raiz de $m(x)$. Logo, T^{-1} é uma raiz de $\tilde{m}(x)$. Pela definição de $\tilde{m}(x)$, temos que o mesmo é um polinômio mônico. Resta provar que $\tilde{m}(x)$ é o polinômio de menor grau tal que $\tilde{m}(T^{-1}) = 0$. Para isso, suponha que $r(x)$ seja o polinômio mínimo de T^{-1}, com grau s. Como $\tilde{m}(x)$ tem o mesmo grau de $m(x)$, então o grau de $\tilde{m}(x)$ é $l > s$. Já que T^{-1} é inversível, temos que $r(0) \neq 0$, e assim faz sentido falar no polinômio dual de $r(x)$, dado por $\tilde{r}(x) = r(0)^{-1}x^s r(x^{-1})$, que também tem grau s. Veja que $\tilde{r}(T) = r(0)^{-1}T^s r(T^{-1}) = 0$, pois $r(x)$ é polinômio mínimo de T^{-1}. Logo, T é raiz de $\tilde{r}(x)$. Segue que $\tilde{r}(x)$ é um polinômio mônico tal que T é raiz e tem grau menor que o grau de $m(x)$. Isso contradiz o fato de $m(x)$ ser polinômio mínimo. Logo, $\tilde{m}(x)$ é o polinômio mínimo de T^{-1}. Agora, como T é reversível, temos que $m(x)$ também é polinômio mínimo de T^{-1}. Segue da unicidade do polinômio mínimo que $m(x) = \tilde{m}(x)$. Logo, $m(x)$ é auto-dual. Para provar que $m(x) \in F(J)[x]$, veja que $m(0) \neq 0$, $m(x) = \tilde{m}(x)$ e $m(T)v = 0$ para todo $v \in V_K^n$. Assim, segue de (2.2) que $0 = \langle m(T)v, w\rangle = \langle v, \tilde{m}^J(T)T^{-l}m(0)^J w\rangle = \langle v, m^J(T)T^{-l}m(0)^J w\rangle$, para todo $v, w \in V_K^n$, sendo l o grau de $m(x)$. Assim, temos que $\langle v, m^J(T)T^{-l}m(0)^J w\rangle = 0$ para todo $v, w \in V_K^n$. Como V_K^n é regular, temos $m^J(T)w = 0$ pra todo $w \in V_K^n$. Logo, $m^J(T) = 0$ e consequentemente, pela unicidade do polinômio mínimo, $m(x) = m^J(x)$. Segue que $m(x) \in F(J)[x]$. ■

Agora faremos uma decomposição para os polinômios auto-duais, conveniente para nossos propósitos nesta subseção. Para isso, seja $p(x) \in K[x]$ um polinômio auto-dual. Considere $p(x) = \prod_i (g_i(x)^{t_i})$ a decomposição de $p(x)$ em potências de fatores irredutíveis mônicos. Veja que cada $g_i(x)$ ou é auto-dual, ou existe algum $g_j(x)$ tal que $g_j(x) = \tilde{g}_i(x)$, já que $p(x)$ é auto-dual. Observe que cada termo do tipo $g_i(x)g_j(x)$, também é auto-dual. Com isso, consideremos

$$p(x) = \prod_i (r_i(x)^{h_i}), \tag{2.3}$$

onde cada $r_i(x)$ ou tem a forma $r_i(x) = g_i(x)$ para o caso em que o termo $g_i(x)$ é auto-dual, ou tem a forma $r_i(x) = g_i(x)g_j(x)$ para o caso em que o termo $g_i(x)$ não é auto-dual e $g_j(x) = \tilde{g}_i(x)$. Chamaremos a expressão (2.3) de decomposição de $p(x)$ em fatores auto-duais irredutíveis. Com esse conceito e com a definição que faremos abaixo, podemos enunciar o próximo resultado, o qual nos dará uma decomposição em soma direta, para um espaço vetorial V_K^n.

Definição 2.5 *Dizemos que dois polinômios $p(x), q(x) \in K[x]$ são primos entre si, se existem polinômios $a(x), b(x) \in K[x]$ tais que $a(x)p(x) + b(x)q(x) = 1$.*

Proposição 2.6 *Seja V_K^n um espaço vetorial regular de dimensão n, sobre um corpo K, munido de uma forma sesquilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sejam $T \in U(V_K^n)$ reversível e $m(x) \in F(J)[x]$ o seu polinômio mínimo. Considere $m(x) = \prod_i (r_i(x)^{h_i})$ a decomposição de $m(x)$ em fatores auto-duais irredutíveis, onde $r_i(x) \neq r_j(x)$ para $i \neq j$. Então, $V_K^n = \bigoplus_i (Ker(r_i(T)^{h_i}))$ é uma decomposição em soma direta de V_K^n, em subespaços invariantes sob T, regulares e mutuamente ortogonais.*

Prova. Já que T é reversível, pela Proposição 2.4, temos que $m(x) \in F(J)[x]$ e $m(x)$ é auto-dual. já que $\prod_{i \neq j} (r_i(x)^{h_i})$ e $r_j(x)^{h_j}$ são primos entre si em $F(J)[x]$, então eles são primos entre si em $K[x]$. Dessa forma, pelo Teorema da Decomposição Primária (ver Teorema 1.3), temos que $V_K^n = \bigoplus_i (Ker(r_i(T)^{h_i}))$, a qual é uma soma direta. Como $V_K^n = \bigoplus_i (Ker(r_i(T)^{h_i}))$, temos que $(Ker(r_j(T)^{h_j}))^\perp = V_K^n - Ker(r_j(T)^{h_j}) = \bigoplus_{i \neq j} (Ker(r_i(T)^{h_i}))$, onde $(Ker(r_j(T)^{h_j}))^\perp$ é o complemento ortogonal de $Ker(r_j(T)^{h_j})$. Pela Proposição 2.2 temos que $Im(r_j(T)^{h_j}) \subseteq (Ker(r_j(T)^{h_j}))^\perp$. Segue daí que $Im(r_j(T)^{h_j}) \subseteq \bigoplus_{i \neq j} (Ker(r_i(T)^{h_i}))$. Além disso, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que

$$dim(Im(r_j(T)^{h_j})) = dim(V_K^n) - dim(Ker(r_j(T)^{h_j})) = dim(\bigoplus_{i \neq j} (Ker(r_i(T)^{h_i}))).$$

Segue que $Im(r_j(T)^{h_j}) = \bigoplus_{i \neq j} (Ker(r_i(T)^{h_i}))$, e como cada $r_i(x)^{h_i}$ é auto-dual, temos pela Proposição 2.2 que os subespaços $Ker(r_i(T)^{h_i})$ são mutuamente ortogonais. Como V_K^n é regular, e os subespaços $Ker(r_i(T)^{h_i})$ são mutuamente ortogonais, temos que cada subespaço $Ker(r_i(T)^{h_i})$ também é regular. Agora, dado $v \in Ker(r_i(T)^{h_i})$, temos que $r_i(T)^{h_i} Tv = 0$.

Segue que $Tv \in Ker(r_i(T)^{h_i})$. Logo, o subespaço $Ker(r_i(T)^{h_i})$ é invariante sob T. Segue o resultado. ■

Antes de avançar para o próximo resultado, vale ressaltar que um subespaço W de um espaço vetorial V_K^n, de dimensão s, invariante com respeito a uma transformação $T \in U(V_K^n)$, é dito **Cíclico** (relativo a T), ou T-**Cíclico**, se existe um elemento $v \in V_K^n$ tal que $v, Tv, T^2v, ..., T^{s-1}v$ é uma base de W. Nesse caso, dizemos que v gera W e denotamos o espaço gerado por v por $span\{v\} = W$. Agora, seja $W = span\{v\}$ um subespaço T-cíclico de V_K^n, com $v \in V_K^n$ não nulo. Então $v, Tv, T^2v, ..., T^{s-1}v$ é uma base para W, com $s \geq 1$. Como W é invariante por T, temos que o vetor $T^sv = TT^{s-1}v \in W$. Assim, podemos escrever $T^sv = t_0v + t_1Tv + t_2T^2v + ... + t_{s-1}T^{s-1}v$, com $t_0, ..., t_{s-1} \in K$. Desta forma, temos que $m(T)v = T^sv - t_0v - t_1Tv - t_2T^2v - ... - t_{s-1}T^{s-1}v = 0$, onde $m(x) = x^s - t_0 - t_1x - t_2x^2 - ... - t_{s-1}x^{s-1}$. Como $s \geq 1$, temos que $m(x)$ é não nulo. Além disso, veja que $m(x)$ é mônico, e é o polinômio de menor grau tal que a propriedade $m(T)v = 0$ é satisfeita. Nessas condições, chamamos o polinômio $m(x)$ de **Ordem** do vetor v. Para mais detalhes sobre subespaços T-cíclicos e ordem de um vetor, ver [23].

Veja que, o que fizemos até agora foi tomar uma aplicação $T \in U(V_K^n)$ reversível, considerar o polinômio mínimo $m(x)$ da matriz associada à aplicação T, e decompor $m(x)$ em fatores auto-duais irredutíveis. Tal decomposição é possível pois T é reversível, e consequentemente $m(x)$ é auto-dual (ver Proposição 2.4). Além disso, vimos que cada fator auto-dual irredutível tem uma das duas formas possíveis, ou é escrito como potência do produto de um polinômio com o seu respectivo polinômio dual, ou como a potência de um polinômio auto-dual. Veremos que para cada uma das formas desses fatores, poderemos decompor o espaço vetorial, que neste caso é V_K^n, em subespaços cíclicos (ver Lemas 2.7 e 2.9).

Lema 2.7 *Seja V_K^n um espaço vetorial regular de dimensão n, sobre um corpo K, munido de uma forma sesquilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja $T \in U(V_K^n)$ reversível o qual o polinômio mínimo é a h-ésima potência do produto de dois polinômios, $g(x)$ e o seu dual $\tilde{g}(x)$, ou seja, $m(x) = (g(x)\tilde{g}(x))^h$, onde $g(x)$ é um polinômio irredutível, mônico e não auto-dual em $F(J)[x]$. Então V_K^n é uma soma direta de subespaços cíclicos regulares, mutuamente ortogonais.*

Prova. Veja que, assim definido, $m(x)$ é um polinômio mônico auto-dual em $F(J)[x]$.

Além disso, como $g(x)$ é um polinômio mônico irredutível em $F(J)[x]$, temos que $\tilde{g}(x)$ também é um polinômio mônico irredutível em $F(J)[x]$. Observe que os polinômios $g(x)$ e $\tilde{g}(x)$ podem não ser irredutíveis em $K[x]$, mas eles são primos entre si em $K[x]$, já que o são em $F(J)[x]$. Assim, pelo Teorema da Decomposição Primária, temos $V_K^n = Ker(g(T)^h) \bigoplus Ker(\tilde{g}(T)^h)$. Com o mesmo argumento usado na prova da Proposição 2.6, temos que $Im(\tilde{g}(T)^h) = Ker(g(T)^h)$. Por outro lado, como $g(x) = \tilde{\tilde{g}}(x)$, pois $g(x)$ é mônico, e como $g(x) \in F(J)[x]$, pela Proposição 2.2, os subespaços $Im(\tilde{g}(T)^h)$ e $Ker(g(T)^h)$ são mutuamente ortogonais, bastando considerar $p(x) = \tilde{g}(x)$ na Proposição 2.2. Isso nos dá que $Im(\tilde{g}(T)^h) \subset (Ker(g(T)^h))^\perp$. Logo, temos que

$$(Ker(g(T)^h))^\perp \supset Im(\tilde{g}(T)^h) = Ker(g(T)^h),$$

ou seja, o subespaço $Ker(g(T)^h)$ é totalmente isotrópico, ou dito de uma outra forma, para todo $v \in Ker(g(T)^h)$ temos que $\langle v, v\rangle = 0$. Analogamente, $Ker(\tilde{g}(T)^h)$ também é totalmente isotrópico. Agora, seja u um elemento de ordem $g(x)^h$. Então, $g(T)^{h-1}u \neq 0$ e existe $w \in Ker(\tilde{g}(T)^h)$ tal que $\langle g(T)^{h-1}u, w\rangle \neq 0$. De fato, primeiro veja que $g(T)^{h-1}u \in Ker(g(T)^h)$, pois $g(T)^h g(T)^{h-1}u = g(T)^{h-1}g(T)^h u = 0$, já que a ordem de u é $g(x)^h$. Agora suponha que não exista $w \in Ker(\tilde{g}(T)^h)$ tal que $\langle g(T)^{h-1}u, w\rangle \neq 0$. Então $\langle g(T)^{h-1}u, w\rangle = 0$ para todo $w \in Ker(\tilde{g}(T)^h)$, ou seja, $g(T)^{h-1}u \in (Ker(\tilde{g}(T)^h))^\perp$. Tome $v \in V_K^n$. Temos que $v = v_1 + v_2$, onde $v_1 \in Ker(g(T)^h)$ e $v_2 \in Ker(\tilde{g}(T)^h)$. Assim, $\langle g(T)^{h-1}u, v\rangle = \langle g(T)^{h-1}u, v_1\rangle + \langle g(T)^{h-1}u, v_2\rangle = 0$ para todo $v \in V_K^n$, pois $Ker(g(T)^h) \subset (Ker(g(T)^h))^\perp$ e $g(T)^{h-1}u \in (Ker(\tilde{g}(T)^h))^\perp$. Isso contradiz o fato de V_K^n ser regular. Com isso, podemos tomar $w \in Ker(\tilde{g}(T)^h)$ tal que $\langle g(T)^{h-1}u, w\rangle \neq 0$. Além disso, usando a igualdade (2.1), o fato de $g(x) \in F(J)[x]$ e a Definição 2.1, temos que

$$\begin{aligned}
\langle g(T)^{h-1}u, w\rangle &= \langle u, g^J(T^{-1})^{h-1}w\rangle \\
&= \langle u, g(T^{-1})^{h-1}w\rangle \\
&= \langle u, T^{(1-h)gr(g(x))}g(0)^{h-1}\tilde{g}(T)^{h-1}w\rangle \\
&= \langle T^{(h-1)gr(g(x))}u, g(0)^{h-1}\tilde{g}(T)^{h-1}w\rangle \\
&= g(0)^{h-1}\langle T^{(h-1)gr(g(x))}u, \tilde{g}(T)^{h-1}w\rangle \ ,
\end{aligned}$$

onde $gr(g(x))$ denota o grau de $g(x)$. Com isso, temos que

$$g(0)^{h-1}\langle T^{(h-1)gr(g(x))}u, \tilde{g}(T)^{h-1}w\rangle \neq 0. \tag{2.4}$$

Segue daí que w tem ordem $\tilde{g}(x)^h$. Dessa forma, temos que o elemento $u + w$ tem ordem $(g(x)\tilde{g}(x))^h$. Agora, considere $N = span\{u + w\}$. A ideia agora é escrever o espaço V_K^n na forma $V_K^n = N \bigoplus N^{\perp}$, mas para isso precisamos provar que N é regular, ou seja, mostrar que a forma restrita a N é não degenerada. Para tanto, tome $v \in N$ não nulo. Temos que v tem a forma $v = T^{m_1}q_1(T)g(T)^{t_1}u + T^{m_2}q_2(T)\tilde{g}(T)^{t_2}w$, com $q_1(x), q_2(x) \in K[x]$, onde $q_1(x)$ e $g(x)$ são primos entre si, e $q_2(x)$ e $\tilde{g}(x)$ também o são, com $q_1(0) \neq 0$ e $q_2(0) \neq 0$, e $t_1, t_2 < h$. Como $q_1(x)$ e $g(x)$ são primos entre si, segue que $\tilde{q}_1(x)$ e $\tilde{g}(x)$ também o são. Assim, temos que $\tilde{q}_1^J(x)$ e $\tilde{g}^J(x)$ são primos entre si. Como $g(x) \in F(J)[x]$, temos que $\tilde{g}(x) \in F(J)[x]$, e então $\tilde{g}^J(x) = \tilde{g}(x)$. Logo, $\tilde{q}_1^J(x)$ e $\tilde{g}(x)$, e consequentemente $\tilde{q}_1^J(x)$ e $\tilde{g}(x)^h$ são primos entre si. Dessa forma, existem $a(x), b(x) \in K[x]$ tais que $a(x)\tilde{q}_1^J(x) + b(x)\tilde{g}(x)^h = 1$. Veja que ao aplicarmos w dos dois lados dessa última igualdade, temos que $(a(T)\tilde{q}_1^J(T) + b(T)\tilde{g}(T)^h)w = a(T)\tilde{q}_1^J(T)w + b(T)\tilde{g}(T)^h w = a(T)\tilde{q}_1^J(T)w = 1.w = w$, já que w tem ordem $\tilde{g}(x)^h$. Agora, como v é não nulo, então pelo menos um de seus termos é não nulo. Vamos supor que o termo $T^{m_1}q_1(T)g(T)^{t_1}u$ é não nulo, ou seja, $v = T^{m_1}q_1(T)g(T)^{t_1}u$. Precisamos provar que existe um vetor $z \in N$ tal que $\langle v, z\rangle \neq 0$. Para isso, vamos considerar z com uma forma conveniente dada por $z = T^f a(T)\tilde{g}(T)^{h-t_1-1}w$, com $f = m_1 + (t_1 - h + 1)gr(g(x)) + gr(q_1(x))$. Assim,

$$\begin{aligned}
\langle v, z\rangle &= \langle T^{m_1}q_1(T)g(T)^{t_1}u, T^f a(T)\tilde{g}(T)^{h-t_1-1}w\rangle \\
&= \langle q_1(T)g(T)^{t_1}u, T^{f-m_1}a(T)\tilde{g}(T)^{h-t_1-1}w\rangle \\
&= \langle (T^{gr(q_1(x))}q_1(0)\tilde{q}_1(T^{-1}))(T^{gr(g(x))t_1}g(0)^{t_1}\tilde{g}(T^{-1})^{t_1})u, T^{f-m_1}a(T)\tilde{g}(T)^{h-t_1-1}w\rangle \\
&= q_1(0)g(0)^{t_1}\langle \tilde{q}_1(T^{-1})\tilde{g}(T^{-1})^{t_1}u, T^{f-m_1-gr(q_1(x))-gr(g(x))t_1}a(T)\tilde{g}(T)^{h-t_1-1}w\rangle \\
&= q_1(0)g(0)^{t_1}\langle u, \tilde{q}_1^J(T)\tilde{g}^J(T)^{t_1}T^{(1-h)gr(g(x))}a(T)\tilde{g}(T)^{h-t_1-1}w\rangle \\
&= q_1(0)g(0)^{t_1}\langle T^{(h-1)gr(g(x))}u, a(T)\tilde{q}_1^J(T)\tilde{g}(T)^{t_1}\tilde{g}(T)^{h-t_1-1}w\rangle \\
&= q_1(0)g(0)^{t_1}\langle T^{(h-1)gr(g(x))}u, (1 - b(T)\tilde{g}(T)^h)\tilde{g}(T)^{h-1}w\rangle \\
&= q_1(0)g(0)^{t_1}\langle T^{(h-1)gr(g(x))}u, \tilde{g}(T)^{h-1}w\rangle \\
&\neq 0\ ,
\end{aligned}$$

donde a última desigualdade segue de (2.4). Logo, $\langle v, z\rangle \neq 0$ caso o primeiro termo de v seja não nulo. De maneira análoga, se o segundo termo de v for não nulo, ou seja, $v = T^{m_2}q_2(T)\tilde{g}(T)^{t_2}w$, prova-se que $\langle v, z\rangle \neq 0$ com $z = T^f a(T)g(T)^{h-t_2-1}u$ para um f escolhido de forma conveniente. Dessa forma, temos que para todo $v \in N$ não nulo, existe $z \in N$ tal que $\langle v, z\rangle \neq 0$. Segue que a forma restrita a N é não degenerada. Assim, podemos escrever $V_K^n = N \bigoplus N^{\perp}$. Se $N^{\perp}$ for cíclico, o lema está provado. Caso $N^{\perp}$ não seja cíclico, veja que T restrito ao espaço $N^{\perp}$ satisfaz às hipóteses deste lema, e assim repetimos o processo para o espaço $N^{\perp}$, para decompô-lo em soma direta de um subespaço cíclico não degenerado e seu respectivo complemento ortogonal. Continuando assim nesse processo, obteremos enfim uma decomposição de V_K^n em soma direta de subespaços cíclicos regulares, mutuamente ortogonais. $\blacksquare$

O próximo resultado será usado na demonstração do Lema 2.9. Antes de enunciarmos, vale ressaltar que quando falarmos de um subespaço U gerado como um $K[x]$-módulo por u, com $u \in V_K^n$, estamos querendo dizer que todo elemento $w \in U$ tem a forma $w = h(x)u = h(T)u$, para algum $h(x) \in K[x]$, com $T \in U(V_K^n)$ fixada.

Lema 2.8 *Seja V_K^n um espaço vetorial regular de dimensão n, sobre um corpo K, munido de uma forma sesquilinear $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Seja $T \in U(V_K^n)$ reversível, o qual o polinômio mínimo é $m(x) = g(x)^s$, onde $g(x)$ é irredutível e mônico em $F(J)[x]$. Seja $u \in V_K^n$ um vetor de ordem $m(x)$, então o subespaço U gerado como um $K[x]$-módulo por u é regular se, e somente se, existe $v \in U$ tal que $\langle g(T)^{s-1}u, v\rangle \neq 0$. Essa desigualdade implica que v tem ordem $m(x)$.*

Prova. $\Longrightarrow]$ Suponha que não exista $v \in U$ tal que $\langle g(T)^{s-1}u, v\rangle \neq 0$. Isso nos diz que para todo $v \in U$, temos que $\langle g(T)^{s-1}u, v\rangle = 0$. Considere $w = g(T)^{s-1}u$. Assim, existe $w \in U$ tal que $\langle w, v\rangle = 0$, para todo $v \in U$. Logo U não é regular.

$\Longleftarrow]$ Suponha que existe $v \in U$ tal que a condição $\langle g(T)^{s-1}u, v\rangle \neq 0$ é satisfeita. Como $v \in U$, ele pode ser escrito da forma $v = h(T)u$, para algum polinômio $h(x) \in K[x]$. Veja que T é reversível, então $m(x)$ é auto-dual pela Proposição 2.4, e consequentemente $g(x)$ também o é. Agora, dado $w \in U$ não nulo, podemos escrever w na forma $w = T^r q(T)g(T)^k u$, com $k < s$, onde $q(x) \in K[x]$ é tal que $q(x)$ e $g(x)$ são primos entre si, e $q(0) \neq 0$. Como $q(x)$ e $g(x)$ são primos entre si, temos que $q(x)$ e $g(x)^s$ também o são. Como $g(x)$ é auto-dual e

$g(x) \in F(J)[x]$, temos que $g(x) = \tilde{g}(x) = \tilde{g}^J(x)$. Assim, $\tilde{q}(x)$ e $\tilde{g}(x)^s$, e consequentemente $\tilde{q}^J(x)$ e $\tilde{g}^J(x)^s = g(x)^s$, são primos entre si. Dessa forma, existem polinômios $a(x), b(x) \in K[x]$ tais que $a(x)\tilde{q}^J(x) + b(x)g(x)^s = 1$. Precisamos mostrar que para todo $w \in U$ não nulo, existe pelo menos um vetor $z \in U$ tal que $\langle w, z\rangle \neq 0$. Para isso, vamos considerar um vetor $z \in U$ com uma forma conveniente dada por $z = T^f a(T)h(T)g(T)^{s-k-1}u$, com $f = gr(q(x)) - gr(g(x)(s-k-1)) + r$. Assim, basta verificar que para todo w não nulo, $\langle w, z\rangle \neq 0$ para esse z que estamos considerando. De fato,

$$\begin{aligned}
\langle w, z\rangle &= \langle T^r q(T)g(T)^k u, T^f a(T)h(T)g(T)^{s-k-1}u\rangle \\
&= \langle q(T)g(T)^k u, T^{f-r} a(T)h(T)g(T)^{s-k-1}u\rangle \\
&= \langle \tilde{q}(T^{-1})q(0)T^{gr(q(x))}g(T)^k u, T^{f-r} a(T)h(T)\tilde{g}(T^{-1})^{s-k-1}g(0)^{s-k-1}T^{gr(g(x))(s-k-1)}u\rangle \\
&= \langle \tilde{q}(T^{-1})q(0)T^{gr(q(x))}g(T)^k u, T^{f-r+gr(g(x))(s-k-1)} a(T)h(T)\tilde{g}(T^{-1})^{s-k-1}g(0)^{s-k-1}u\rangle \\
&= q(0)g(0)^{s-k-1}\langle \tilde{q}(T^{-1})T^{gr(q(x))}g(T)^k u, T^{gr(q(x))}a(T)h(T)\tilde{g}(T^{-1})^{s-k-1}u\rangle \\
&= q(0)g(0)^{s-k-1}\langle \tilde{q}(T^{-1})g(T)^k u, a(T)h(T)\tilde{g}(T^{-1})^{s-k-1}u\rangle \\
&= q(0)g(0)^{s-k-1}\langle g(T)^k u, a(T)\tilde{q}^J(T)h(T)\tilde{g}(T^{-1})^{s-k-1}u\rangle \\
&= q(0)g(0)^{s-k-1}\langle g(T)^k u, (1 - b(T)g(T)^s)h(T)\tilde{g}(T^{-1})^{s-k-1}u\rangle \\
&= q(0)g(0)^{s-k-1}\langle g(T)^k u, h(T)\tilde{g}(T^{-1})^{s-k-1}u\rangle \\
&= q(0)g(0)^{s-k-1}\langle \tilde{g}^J(T)^{s-k-1}g(T)^k u, h(T)u\rangle \\
&= q(0)g(0)^{s-k-1}\langle g(T)^{s-k-1}g(T)^k u, v\rangle \\
&= q(0)g(0)^{s-k-1}\langle g(T)^{s-1}u, v\rangle \\
&\neq 0\,,
\end{aligned}$$

e com isso temos que $\langle w, z\rangle \neq 0$. Logo U é regular. Além disso, como $\langle g(T)^{s-1}u, v\rangle \neq 0$, então com um argumento análogo ao usado no Lema 2.7 temos que v tem ordem $\tilde{g}(x)^s = g(x)^s = m(x)$, pois $g(x)$ é auto-dual. ■

Lema 2.9 *Seja V_K^n um espaço vetorial regular de dimensão n, sobre um corpo K, munido de uma forma sesquilinear $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Seja $T \in U(V_K^n)$ reversível, o qual o polinômio mínimo é $m(x) = g(x)^s$, onde $g(x) \in F(J)[x]$ e é irredutível em $F(J)[x]$. Então, um dos dois casos abaixo acontecem:*

(i) existe um vetor $u \in V_K^n$ de ordem $m(x)$ o qual gera um espaço regular U;

(ii) existem dois vetores $u, w \in V_K^n$ de ordem $m(x)$, os quais geram os subespaços U e W, respectivamente, tais que $U \cap W = 0$ e $U \bigoplus W$ é regular.

Prova. Tome $u \in V_K^n$, e considere o subespaço $U = span\{u\}$, onde u tem ordem $m(x) = g(x)^s$. Se U é regular, nada precisa ser provado. Vamos supor então que U não é regular. Pela regularidade de V_K^n, existe $w \in V_K^n$ tal que $\langle g(T)^{s-1}u, w\rangle \neq 0$. Pelo Lema 2.8 temos que $w \notin U$ e a ordem de w é $g(x)^s$. Agora, considere o subespaço $W = span\{w\}$. Suponha que existe $y \in U \cap W$, com y não nulo. Mostraremos que W é regular, ou seja, que (i) é verdadeira. De fato, como $y \in U \cap W$, temos que $y = q_1(T)g(T)^{t_1}u = q_2(T)g(T)^{t_2}w$, onde $q_1(x), q_2(x) \in K[x]$, tais que $q_1(x)$ e $g(x)$ são primos entre si, e $q_2(x)$ e $g(x)$ também o são, com $q_1(0) \neq 0$ e $q_2(0) \neq 0$. Veja que y tem ordem $g(x)^{s-t_1}$, já que $g(T)^{s-t_1}y = g(T)^{s-t_1}q_1(T)g(T)^{t_1}u = q_1(T)g(T)^s u = 0$, e $g(x)^{s-t_1}$ é o polinômio de menor grau com essa propriedade, pois caso contrário contrariaria o fato da ordem de u ser $g(x)^s$. De maneira análoga, obtemos que $g(T)^{s-t_2}y = 0$. Logo, $s - t_1 = s - t_2$ e consequentemente temos que $t_1 = t_2$. Com isso, já que $y = q_1(T)g(T)^{t_1}u = q_2(T)g(T)^{t_2}w$, temos que $q_1(T)g(T)^{t_1}u = q_2(T)g(T)^{t_1}w$, e consequentemente $q_1(T)u = q_2(T)w$. Agora, como $q_1(x)$ e $g(x)$ são primos entre si, segue que $q_1(x)$ e $g(x)^s$ também o são. Assim, existem polinômios $a(x), b(x) \in K[x]$ tais que $a(x)q_1(x) + b(x)g(x)^s = 1$. Então, temos que

$$\begin{aligned} a(T)g(T)^{s-t_1-1}y &= a(T)g(T)^{s-t_1-1}q_1(T)g(T)^{t_1}u \\ &= a(T)q_1(T)g(T)^{s-1}u \\ &= (1 - b(T)g(T)^s)g(T)^{s-1}u \\ &= g(T)^{s-1}u \,. \end{aligned}$$

Como $q_1(T)u = q_2(T)w$, temos que $a(T)q_2(T)g(T)^{s-1}w = a(T)q_1(T)g(T)^{s-1}u = g(T)^{s-1}u$. Assim, temos que $a(T)q_2(T)g(T)^{s-1}w = g(T)^{s-1}u$. Com isso, $\langle a(T)q_2(T)g(T)^{s-1}w, w\rangle = \langle g(T)^{s-1}u, w\rangle \neq 0$. Segue que $\langle a(T)q_2(T)g(T)^{s-1}w, w\rangle = \langle g(T)^{s-1}w, a^J(T^{-1})q_2^J(T^{-1})w\rangle \neq 0$. Como $a^J(T^{-1})q_2^J(T^{-1})w \in W$, pelo Lema 2.8 temos que W é regular. Logo (i) é satisfeita. Por outro lado, suponha que $U \cap W = 0$. Mostraremos que o subespaço $U + W$ é regular.

Para isso, tome $v \in U + W$ não nulo. Então v tem a forma

$$v = T^{m_1} q_1(T) g(T)^{t_1} u + T^{m_2} q_2(T) g(T)^{t_2} w,$$

com $q_1(x), q_2(x) \in K[x]$, onde $q_1(x)$ e $g(x)$ são primos entre si, e $q_2(x)$ e $g(x)$ também são primos entre si, com $q_1(0) \neq 0$ e $q_2(0) \neq 0$, e $t_1, t_2 < s$. Se $t_2 < t_1$, tomando $z = T^f a(T) g(T)^{s-t_2-1} u$ e $f = m_2 + gr(g(x))t_2$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle z, T^{m_2} q_2(T) g(T)^{t_2} w\rangle &= \langle T^f a(T) g(T)^{s-t_2-1} u, T^{m_2} q_2(T) g(T)^{t_2} w\rangle \\
&= \langle T^{f-m_2} a(T) g(T)^{s-t_2-1} g^J(T^{-1})^{t_2} u, q_2(T) w\rangle \\
&= \langle T^{f-m_2} a(T) g(T)^{s-t_2-1} [\tilde{g}^J(T)^{t_2} T^{-gr(g(x))t_2} (g(0)^J)^{t_2}] u, q_2(T) w\rangle \\
&= (g(0)^J)^{t_2} \langle T^{f-m_2-gr(g(x))t_2} a(T) g(T)^{s-t_2-1} g^J(T)^{t_2} u, q_2(T) w\rangle \\
&= (g(0)^J)^{t_2} \langle a(T) g(T)^{s-t_2-1} g(T)^{t_2} u, q_2(T) w\rangle \\
&= (g(0)^J)^{t_2} \langle a(T) g(T)^{s-1} u, q_2(T) w\rangle \\
&\neq 0 \,,
\end{aligned}$$

ou seja, $\langle z, T^{m_2} q_2(T) g(T)^{t_2} w\rangle \neq 0$, onde $a(x)$ é escolhido de forma conveniente. Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
\langle z, T^{m_1} q_1(T) g(T)^{t_1} u\rangle &= \langle T^f a(T) g(T)^{s-t_2-1} u, T^{m_1} q_1(T) g(T)^{t_1} u\rangle \\
&= \langle T^{f-m_1} a(T) g(T)^{s-t_2-1} g^J(T^{-1})^{t_1} u, q_1(T) u\rangle \\
&= \langle T^{f-m_1} a(T) g(T)^{s-t_2-1} [\tilde{g}^J(T)^{t_1} T^{-gr(g(x))t_1} (g(0)^J)^{t_1}] u, q_1(T) u\rangle \\
&= (g(0)^J)^{t_1} \langle T^{f-m_1-gr(g(x))t_1} a(T) g(T)^{s-t_2-1} \tilde{g}^J(T)^{t_1} u, q_1(T) u\rangle \\
&= (g(0)^J)^{t_1} \langle T^{f-m_1-gr(g(x))t_1} a(T) g(T)^{s-t_2-1} g(T)^{t_1} u, q_1(T) u\rangle \\
&= (g(0)^J)^{t_1} \langle T^{f-m_1-gr(g(x))t_1} a(T) g(T)^{s-1+t_1-t_2} u, q_1(T) u\rangle \\
&= (g(0)^J)^{t_1} \langle g(T)^{s-1+t_1-t_2} u, T^{-f+m_1+gr(g(x))t_1} a^J(T^{-1}) q_1(T) u\rangle \\
&= (g(0)^J)^{t_1} \langle g(T)^{s-1+t_1-t_2} u, h(T) u\rangle \\
&= 0 \,,
\end{aligned}$$

onde $h(x) = x^{-f+m_1+gr(g(x))t_1} a^J(x^{-1}) q_1(x)$, e a última igualdade acima segue do fato de $g(T)^{s-1+t_1-t_2} u = 0$ para o caso em que $t_2 < t_1$, e segue do Lema 2.8, juntamente com o fato de U não ser regular, para o caso em que $t_2 = t_1$. Logo, $\langle z, v\rangle = \langle z, T^{m_2}q_2(T)g(T)^{t_2}w\rangle \neq 0$. Para o caso $t_2 > t_1$, a demonstração é análoga, bastando tomar $z = T^{f_2}a_2(T)g(T)^{s-t_1-1}w$, para $a_2(T)$ e f_2 tomados de forma conveniente. Segue o resultado. ■

Enfim, enunciaremos e demonstraremos nosso principal resultado desta subseção. O próximo teorema nos dá uma decomposição em soma direta de subespaços cíclicos, regulares, e mutuamente ortogonais, para um espaço vetorial V_K^n, partindo da hipótese de que $T \in U(V_K^n)$ é reversível. Esse resultado finaliza esta subseção.

Teorema 2.10 *Seja V_K^n um espaço vetorial regular de dimensão n, sobre um corpo K, munido de uma forma sesquilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja $T \in U(V_K^n)$ reversível. Então, V_K^n é a soma direta de subespaços regulares W_i mutuamente ortogonais, onde cada W_i é cíclico, ou é a soma direta de dois subespaços cíclicos de mesma ordem.*

Prova. Pela Proposição 2.4, temos que o polinômio mínimo $m(x)$ de T é auto-dual. Com isso, podemos escrever $m(x) = \prod_i (r_i(x)^{h_i})$, a qual é sua decomposição em fatores auto-duais irredutíveis. Além disso, pela Proposição 2.6, temos que $V_K^n = \bigoplus_i (Ker(r_i(T)^{h_i}))$ é uma decomposição em soma direta de V_K^n, em subespaços invariantes sob T, regulares e mutuamente ortogonais. Com essa decomposição de V_K^n, podemos escrever $T = \bigoplus_i T_i$, onde cada $T_i = T|_{Ker(r_i(T)^{h_i})}$ é uma transformação linear unitária, reversível, com polinômio mínimo $r_i(x)^{h_i}$. Como cada $r_i(x)^{h_i}$ tem a forma $(g(x)\tilde{g}(x))^{h_i}$ ou $g(x)^{h_i}$, o resultado segue dos Lemas 2.7 e 2.9, ou de repedidas aplicações dos mesmos, se necessário. ■

2.1.2 Uma Caracterização para o U(n)

Embora os elementos de $O(V_{\mathbb{R}}^n)$ possam ser escritos como produto de involuções, este fato nem sempre é verdade para os elementos de $U(V_{\mathbb{C}}^n)$. Como exemplo, podemos tomar a aplicação linear unitária $T_D : V_{\mathbb{C}}^2 \to V_{\mathbb{C}}^2$ associada à matriz diagonal $D = diag(i, i) \in U(2)$, com $V_{\mathbb{C}}^2$ munido da forma hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle : V_{\mathbb{C}}^2 \times V_{\mathbb{C}}^2 \to \mathbb{C}$ definida por $\langle v, w\rangle = v_1\overline{w}_1 + v_2\overline{w}_2$, onde $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in V_{\mathbb{C}}^2$. Temos que T_D não pode ser escrita como produto de duas involuções.

Assim, veremos condições para que um elemento de $U(V_{\mathbb{C}}^n)$ possa ser escrito como um produto de duas involuções (ver Teorema 2.11). Usaremos esse resultado na prova do último teorema desta seção, que é a caracterização dos elementos reversíveis e fortemente reversíveis de $U(n)$ (ver Teorema 2.12). Como $U(V_{\mathbb{C}}^n) \approx U(n)$, daqui para frente vamos olhar sempre para elementos de $U(n)$ (ver a Observação 1.5).

A partir de agora, vamos considerar a aplicação J como sendo a conjugação complexa e o corpo $K = \mathbb{C}$. Vamos considerar também $V_{\mathbb{C}}^n \approx \mathbb{C}^n$ um espaço vetorial isomorfo a $\mathbb{C}^n$ sobre o corpo dos complexos $\mathbb{C}$, munido da forma hermitiana definida positiva $\langle \cdot, \cdot \rangle_0 : V_{\mathbb{C}}^n \times V_{\mathbb{C}}^n \to \mathbb{C}$, definida por $\langle v, w \rangle_0 = v_1\overline{w}_1 + ... + v_n\overline{w}_n$, onde $v = (v_1, ..., v_n), w = (w_1, ..., w_n) \in V_{\mathbb{C}}^n$.

Dato $T \in U(n)$, temos que se $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de T, então $\lambda\overline{\lambda} = 1$. Assim, se $\lambda \in \mathbb{R}$ temos que $\lambda = \pm 1$. Dado $\alpha \in \mathbb{C}$, definimos o subespaço $V_\alpha = \{v \in V_{\mathbb{C}}^n; Tv = \alpha v\}$ de $V_{\mathbb{C}}^n$. Veja que se $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $\alpha \neq \beta$, então V_α é ortogonal a V_β. De fato, tome $v \in V_\alpha$ e $w \in V_\beta$, temos que

$$\langle v, w \rangle = \langle Tv, Tw \rangle = \langle \alpha v, \beta w \rangle = \alpha\overline{\beta}\langle v, w \rangle,$$

e segue que $\langle v, w \rangle = 0$. Além disso, dizemos que o conjunto de autovalores de T é **Simétrico com Relação ao Eixo Real** se os subespaços V_α e $V_{\overline{\alpha}}$ têm mesma dimensão e se a dimensão de V_α é finita para todo $\alpha \in \mathbb{C}$.

Teorema 2.11 *Seja $V_{\mathbb{C}}^n \approx \mathbb{C}^n$ munido da forma hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$. Seja $T \in U(V_{\mathbb{C}}^n)$. Se $V_{\mathbb{C}}^n$ tem uma base de autovetores de T, e se o conjunto dos autovalores de T é simétrico com relação ao eixo real, então T é um produto de duas involuções unitárias.*

Prova. Suponha que $V_{\mathbb{C}}^n$ tem uma base de autovetores de T. Considere o espaço $W = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{C}} V_\alpha$. Veja que para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq \pm 1$, temos $V_\alpha = 0$. Suponha que o conjunto dos autovalores de T é simétrico com relação ao eixo real. Nesse caso, o espaço V_α tem uma base ortonormal $\mathcal{B}_\alpha$ e existe uma bijeção σ_α entre $\mathcal{B}_\alpha$ e $\mathcal{B}_{\overline{\alpha}}$. Assim, para $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, com $V_\alpha \neq 0$, temos que $V_\alpha + V_{\overline{\alpha}}$ é uma soma ortogonal de subespaços bidimensionais U_{b_α}, com $b_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ e $U_{b_\alpha} = span\{b_\alpha, \sigma_\alpha(b_\alpha)\}$, ou seja, temos que $V_\alpha + V_{\overline{\alpha}} = \bigoplus_{b_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha} U_{b_\alpha}$, onde cada U_{b_α} é ortogonal a $U_{b_{\alpha'}}$, sempre que $b_\alpha \neq b_{\alpha'}$. Já que os espaços V_1 e V_{-1} também têm bases ortonormais, segue que W é uma soma ortogonal de subespaços invariantes por T, regulares, unidimensionais e bidimensionais. Agora, para todo $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ com $V_\alpha \neq 0$, a restrição de T a U_{b_α} é um produto de duas involuções unitárias (ver [31]). Além disso, temos que T restrito a V_1 e a V_{-1} são involuções. Segue que T restrito a W é um produto de duas involuções unitárias. Logo T pode ser escrito como um produto de duas involuções unitárias. ∎

Para finalizarmos esta seção, faremos mais dois resultados. Agora temos todas as ferramentas necessárias para enunciá-los e demonstrá-los. O primeiro deles é a caracterização do $U(n)$, a qual almejamos nesta subseção, e o segundo é uma consequência dessa caracterização.

Teorema 2.12 *Seja $V_{\mathbb{C}}^n \approx \mathbb{C}^n$ um espaço vetorial munido da forma hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$. Um elemento $T \in U(n)$ é fortemente reversível se, e somente se, seu polinômio característico, denotado por $p_T(x)$, é auto-dual.*

Prova. $\Longrightarrow$] Suponha T fortemente reversível em $U(n)$. Então existe $S \in U(n)$ tal que $STS = T^{-1}$. Assim, para cada autovalor λ de T, temos que S aplica bijetivamente V_λ sobre $V_{\lambda^{-1}}$, onde V_λ e $V_{\lambda^{-1}}$ são os autoespaços de T associados aos autovalores λ e λ^{-1} respectivamente. Segue que V_λ e $V_{\lambda^{-1}}$ têm a mesma dimensão. Assim, λ e λ^{-1} são raízes de $p_T(x)$ com a mesma multiplicidade. Logo $p_T(x)$ é auto-dual.

$\Longleftarrow$] Seja $p_T(x)$ o polinômio característico de T. Suponha $p_T(x)$ auto-dual. Segue que se λ é raiz de $p_T(x)$, então λ^{-1} também o é, e com a mesma multiplicidade. Como as raízes de $p_T(x)$ são os autovalores de T, segue que o conjunto de autovalores de T é simétrico com relação ao eixo real. Por outro lado, como $V_{\mathbb{C}}^n$ tem dimensão finita e T é diagonalizável, segue que $V_{\mathbb{C}}^n$ tem uma base de autovetores de T. Assim, pelo Teorema 2.11, temos que T é um produto de duas involuções unitárias, ou seja, $T = S_1S_2$, onde $S_1, S_2 \in U(n)$ são involuções. Como $T = S_1S_2$, temos que $T^{-1} = S_2S_1$. Segue que $T^{-1} = S_2S_1 = S_2S_1(S_2S_2) = S_2(S_1S_2)S_2 = S_2TS_2$. Logo, T é fortemente reversível. ∎

Corolário 2.13 *Seja $V_{\mathbb{C}}^n \approx \mathbb{C}^n$ um espaço vetorial munido da forma hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$. Um elemento $T \in U(n)$ é reversível se, e somente se, seu polinômio característico é auto-dual.*

Prova. $\Longrightarrow$] Suponha T reversível em $U(n)$. Então existe $S \in U(n)$ tal que $STS^{-1} = T^{-1}$. A prova segue de maneira análoga à primeira parte da demonstração do Teorema 2.12.

$\Longleftarrow$] Se o polinômio característico de T é auto-dual, temos pelo Teorema 2.12 que T é fortemente reversível. Mas todo elemento fortemente reversível, em particular, é um elemento reversível. Segue o resultado. ∎

2.2 Uma Caracterização para o SU(n)

Para finalizar este capítulo, faremos mais um resultado importante para nossos fins neste trabalho. Esta seção consistirá da caracterização do $SU(n)$ quanto aos elementos reversíveis e fortemente reversíveis (Teorema 2.14). Nesse caso, a prova nos exige um pouco mais de cuidado.

Teorema 2.14 *Seja* $V_{\mathbb{C}}^n \approx \mathbb{C}^n$ *um espaço vetorial munido da forma hermitiana* $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$. *Um elemento* $T \in SU(n)$ *é reversível se, e somente se, seu polinômio característico é auto-dual. Contudo, para um elemento* $T \in SU(n)$ *com polinômio característico auto-dual, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) T *é reversível mas não é fortemente reversível;*

(ii) $n = 4m + 2$ *com* $m \in \mathbb{Z}$ *e* ± 1 *não são autovalores de* T.

Prova. Primeiro provaremos que um elemento $T \in SU(n)$ é reversível se, e somente se, seu polinômio característico é auto-dual. Para provar que se $T \in SU(n)$ é reversível, então seu polinômio característico é auto-dual, basta seguir os mesmos passos da demonstração da primeira parte do Teorema 2.12, fazendo a mudança de que $S \in SU(n)$, e assim obter o resultado desejado. Reciprocamente, suponha que $T \in SU(n)$ tem polinômio característico auto-dual. Seja E o conjunto dos autovalores $\lambda \neq \pm 1$, tais que λ^{-1} é também autovalor, e com mesma multiplicidade. Então, $V_{\mathbb{C}}^n$ possui uma decomposição em soma direta, mutuamente ortogonal, invariante por T de autoespaços, ou seja, $V_{\mathbb{C}}^n = V_1 \bigoplus V_{-1} \bigoplus W$, com $W = \bigoplus_{\lambda \in E} W_\lambda$, onde $W_\lambda = V_\lambda \bigoplus V_{\lambda^{-1}}$, cada V_λ é autoespaço de T associado ao autovalor λ, e $dim(V_\lambda) = dim(V_{\lambda^{-1}})$. Como V_λ e $V_{\lambda^{-1}}$ são não vazios, podemos encontrar bases ortonormais $\{e_1, ..., e_r\}$ e $\{f_1, ..., f_r\}$ de V_λ e $V_{\lambda^{-1}}$ respectivamente, onde r é a dimensão dos autoespaços V_λ e $V_{\lambda^{-1}}$. Defina $S_\lambda : W_\lambda \to W_\lambda$, tal que $S_\lambda(e_i) = f_i$ e $S_\lambda(f_i) = -e_i$, para cada $i = 1, ..., r$. Observe que S_λ tem a forma

$$S_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & -I_r \\ I_r & 0 \end{pmatrix}.$$

onde I_r é a matriz identidade de ordem $r \times r$ e o 0 representa a matriz nula de ordem $r \times r$. Assim, dados $u, v \in W_\lambda$, temos que $\langle S_\lambda u, S_\lambda v \rangle_0 = \langle u, v \rangle_0$. Isso nos dá que S_λ preserva a forma. Além disso, podemos ver que $det(S_\lambda) = 1$ e que S_λ não é uma involução, já que

$$S_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & -I_r \\ I_r & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix} = S_\lambda^{-1}.$$

Por outro lado, veja que se $v \in V_\lambda$, temos que $Tv = \lambda v$, e segue daí que $T^{-1}v = \lambda^{-1}v$. Isso nos diz que V_λ é o autoespaço de T^{-1} associado ao autovalor λ^{-1}. Analogamente obtemos que $V_{\lambda^{-1}}$ é o autoespaço de T^{-1} associado ao autovalor λ. Usando esses fatos, temos que $S_\lambda T|_{W_\lambda} S_\lambda^{-1}(e_i) = S_\lambda T|_{W_\lambda}(-f_i) = S_\lambda(-\lambda^{-1} f_i) = \lambda^{-1} e_i$ e $T^{-1}|_{W_\lambda}(e_i) = \lambda^{-1} e_i$. Assim, $S_\lambda T|_{W_\lambda} S_\lambda^{-1}(e_i) = T^{-1}|_{W_\lambda}(e_i)$. Analogamente, obtemos que $S_\lambda T|_{W_\lambda} S_\lambda^{-1}(f_i) = T^{-1}|_{W_\lambda}(f_i)$. Segue que $S_\lambda T|_{W_\lambda} S_\lambda^{-1} = T^{-1}|_{W_\lambda}$. Agora, seja $W_1 = V_1 \bigoplus V_{-1}$, onde V_1 e V_{-1} são autoespaços de T associados aos autovalores 1 e -1, respectivamente. Veja que, eventualmente V_1 ou V_{-1} pode ser vazio. Defina $S_1 : W_1 \to W_1$, dada pela identidade. Considere $S = S_1 \bigoplus S_W$, onde $S_W = \bigoplus_{\lambda \in E} S_\lambda$. Pela construção de S, temos que S preserva a forma pois é formada por blocos os quais preservam, e $det(S) = 1$, ou seja, $S \in SU(n)$, e além disso, também pela construção de S, temos que $STS^{-1} = T^{-1}$. Logo, T é reversível em $SU(n)$. Isso prova a primeira parte deste teorema.

Agora, vamos provar a segunda parte do teorema. Tomemos $T \in SU(n)$ com polinômio característico auto-dual, e demonstremos primeiro que $(i) \Rightarrow (ii)$. Para isso, como T tem polinômio característico auto-dual, podemos usar toda a construção feita na prova da primeira parte deste teorema. Entretanto, veja que se queremos que T seja fortemente reversível em $SU(n)$, então precisamos mudar um pouco a construção de S feita acima, de forma a garantir que S seja uma involução. Para tanto, consideremos bases ortonormais $\{e_1, ..., e_r\}$ e $\{f_1, ..., f_r\}$ de V_λ e $V_{\lambda^{-1}}$ respectivamente, onde r é a dimensão dos autoespaços V_λ e $V_{\lambda^{-1}}$. Seja $S_\lambda : W_\lambda \to W_\lambda$ tal que $S_\lambda(e_i) = f_i$ e $S_\lambda(f_i) = e_i$, com $W_\lambda = V_\lambda \bigoplus V_{\lambda^{-1}}$. Assim, S_λ tem a forma

$$S_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ I_r & 0 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, temos que $det(S_\lambda) = (-1)^{dim(V_\lambda)}$ e

$$S_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ I_r & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ I_r & 0 \end{pmatrix} = S_\lambda^{-1}.$$

Isto é, S_λ é uma involução. Agora, seja $S_W = \bigoplus_{\lambda \in E} S_\lambda$. Assim, por construção temos que S_W é uma involução, preserva a forma e $det(S_W) = (-1)^{\frac{1}{2}dim(W)}$, onde $W = \bigoplus_{\lambda \in E} W_\lambda$. Veja que se T não tem autovalores 1 e -1, ou seja, se V_1 e V_{-1} são vazios, então $W = V_{\mathbb{C}}^n$, já que $V_{\mathbb{C}}^n = V_1 \bigoplus V_{-1} \bigoplus W$, e n é par, já que a dimensão de W assim construído é sempre par. Considere $S = S_W$. Assim, $det(S) = 1$ somente quando n é um múltiplo de 4. Isto é, temos que se n tem a forma $n = 4m$, com $m \in \mathbb{Z}$, então $det(S) = 1$. Com um argumento análogo ao feito na prova da primeira parte deste teorema, temos que $STS^{-1} = T^{-1}$. Assim, T é fortemente reversível em $SU(n)$. Dessa forma, nos resta o caso em que n é ímpar, ou seja, $n = 4m+1$ ou $n = 4m+3$, e o caso em que $n = 4m+2$ com ± 1 como autovalor. Então, suponhamos que n é ímpar ou $n = 4m+2$ com ± 1 como autovalor. Assim, temos que V_1 ou V_{-1} é não vazio. Tomemos $v \in V_1 \bigoplus V_{-1} = W_1$ e definimos $S_1 : W_1 \to W_1$ tal que $S_1(v) = (-1)^{\frac{1}{2}dim(W)} v$, e S_1 é a identidade para os elementos do complemento ortogonal de v em W_1. Consideremos $S = S_1 \bigoplus S_W$. Então, assim construída, S é uma involução, preserva a forma e tem determinante 1. Logo, S é uma involução em $SU(n)$. Além disso, $STS^{-1} = STS = T^{-1}$. Segue que T é fortemente reversível. Portanto, se T é reversível, mas não é fortemente reversível, então precisamos ter $n = 4m+2$ com ± 1 não sendo autovalores de T. Isso nos dá que $(i) \Rightarrow (ii)$. Reciprocamente, suponhamos que $n = 4m+2$ e que ± 1 não sejam autovalores de T. Como T é reversível em $SU(n)$, existe $S \in SU(n)$ tal que $STS^{-1} = T^{-1}$. Suponhamos que T seja fortemente reversível em $SU(n)$. Então, podemos tomar $S \in SU(n)$ tal que seja uma involução. Vamos decompor $V_{\mathbb{C}}^n$ na forma $V_{\mathbb{C}}^n = W_+ \bigoplus W_-$, onde por exemplo, W_+ pode ser a soma direta $W_+ = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ e $W_- = \bigoplus_{\lambda^{-1}} V_{\lambda^{-1}}$. Sejam $S : W_+ \to W_-$ e $S^{-1} = S : W_- \to W_+$. Assim construído, $dim(W_+) = dim(W_-) = 2m+1$, já que estamos supondo $n = 4m+2$. Seja $\{e_1, ..., e_{2m+1}\}$ uma base ortonormal de W_+. Com isso, temos que $\{S(e_1), ..., S(e_{2m+1})\}$ forma uma base para W_-. Então, com respeito à base $\{e_1, S(e_1), ..., e_{2m+1}, S(e_{2m+1})\}$, temos que S tem a forma

$$S = \begin{pmatrix} A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A \end{pmatrix},$$

onde S tem ordem $4m+2 \times 4m+2$, 0 representa a matriz nula de ordem 2×2, e A é uma matriz de ordem 2×2 dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Veja que S possui $2m+1$ matrizes A em sua diagonal. Logo, como $det(A) = -1$, temos que $det(S) = (-1)^{2m+1} = -1$. Assim, temos uma contradição, já que $S \in SU(n)$. Segue que $(ii) \Rightarrow (i)$. Isso conclui a prova do teorema. ■

Capítulo 3

Elementos Reversíveis e Fortemente Reversíveis em U(n,1), SU(n,1) e PU(n,1)

Neste capítulo, nos voltaremos para o grupo de isometrias holomorfas do espaço hiperbólico complexo, isto é, o $PU(n,1)$. Mas para trabalharmos com o $PU(n,1)$, olhamos para levantamentos sobre os grupos $U(n,1)$ e $SU(n,1)$. Nesses grupos nem sempre é verdade que os autovalores tenham módulo 1 ou que seus elementos sejam diagonalizáveis, como acontece para os grupos $U(n)$ e $SU(n)$. Além disso, veja que se T é um elemento reversível de $U(n,1)$ (ou $SU(n,1)$), então por definição existe S em $U(n,1)$ (respectivamente em $SU(n,1)$) tal que $STS^{-1} = T^{-1}$. Isso nos diz que se λ é um autovalor de T com multiplicidade m, então λ^{-1} também o é. Assim, temos que o polinômio característico de T é auto-dual. Ou seja, o que acabamos de mostrar é que dado um elemento reversível de $U(n,1)$ ou $SU(n,1)$, temos que o polinômio característico desse elemento é auto-dual. A parte mais interessante é a recíproca desse fato. Mas antes de vermos condições para que a recíproca seja verdadeira, precisamos de algumas definições e alguns comentários sobre os elementos de $PU(n,1)$. Vamos começar dando uma definição que classifica os autovalores de elementos de $U(n,1)$ (respectivamente $SU(n,1)$).

Definição 3.1 *Um autovalor λ de $T \in U(n,1)$ é dito ser de tipo negativo (de tipo positivo)* *se todo autovetor do autoespaço V_λ está em V_- (está em V_+). O autovalor λ é dito nulo se o autoespaço V_λ é parabólico. O autovalor λ é dito ser de tipo indefinido se o autoespaço V_λ contém vetores de V_- e vetores de V_+. Além disso, para λ de tipo indefinido, a restrição da forma hermitiana para V_λ tem assinatura $(r, 1)$, com $1 \leq r \leq n$, onde $dim(V_\lambda) = r + 1$.*

Dado um elemento $T \in PU(n, 1)$, vimos na Definição 1.8 que ele pode ser elíptico, parabólico ou loxodrômico. Essa classificação é dada de acordo com os pontos fixados por T em $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}} \cup \partial\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$. Agora, considere $\hat{T}$ um levantamento de T para $U(n, 1)$ ou $SU(n, 1)$. Os pontos fixos de T correspondem aos autoespaços de $\hat{T}$, ou dito de uma outra forma, a projetivização dos autoespaços de $\hat{T}$ são os pontos fixos de T. Assim, se consideramos T um elemento elíptico de $PU(n, 1)$, temos por definição de elementos elípticos que T fixa pelo menos um ponto em $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$. Como cada ponto fixo de T corresponde a um autoespaço associado a algum autovalor λ de $\hat{T}$, temos que nesse caso λ é de tipo negativo ou indefinido. Para o caso em que T é parabólico (respectivamente T loxodrômico), de maneira análoga, podemos notar que $\hat{T}$ possui um autovalor nulo (respectivamente $\hat{T}$ possui dois autovalores nulos), no sentido da Definição 3.1. Daqui para frente, cometeremos algumas vezes o abuso de dizer que $\hat{T}$ é elíptico, parabólico ou loxodrômico, subentendendo que estamos nos referindo ao levantamento de um elemento $T \in PU(n, 1)$, tal que T é elíptico, parabólico ou loxodrômico, respectivamente.

Observação 3.2 *Os elementos elípticos, parabólicos e loxodrômicos possuem algumas propriedades relevantes que precisaremos nos resultados que seguem, as quais listaremos agora:*

(i) Elementos elípticos e loxodrômicos são semi-simples, ou seja, o polinômio mínimo é um produto de fatores lineares. Já os elementos parabólicos, não são semi-simples;

(ii) Elementos parabólicos T possuem uma única decomposição de Jordan $T = AN$, onde A é elíptico, N é unipotente (todos os autovalores são 1) e $AN = NA$. Se T é unipotente, temos que o polinômio mínimo de T tem a forma $(x - 1)^2$ ou $(x - 1)^3$. Se T não é unipotente, temos que T tem um autovalor nulo λ, e o polinômio mínimo de T contém um fator da forma $(x - \lambda)^2$ ou $(x - \lambda)^3$. Isso implica que $V^{n,1}_{\mathbb{C}}$ tem uma decomposição em soma direta de subespaços mutuamente ortogonais invariantes sob T, dada por

$V_{\mathbb{C}}^{n,1} = U \bigoplus W$, onde $T|_W$ é semi-simples, U é parabólico, dim$(U) = k$ com $k = 2$ ou $k = 3$, e $T|_U$ tem polinômio mínimo $(x - \lambda)^k$;

(iii) Se T é elíptico, então T possui um autovalor de tipo negativo ou indefinido, e os demais são todos de tipo positivo. Mais ainda, todos os autovalores terão módulo 1;

(iv) Se T é loxodrômico, então T tem um par de autovalores nulos, $re^{i\theta}$ e $r^{-1}e^{i\theta}$, com $r > 1$. Além disso, os autoespaços de T associados a tais autovalores são unidimensionais. Os demais autovalores são de tipo positivo e todos têm módulo 1.

Definição 3.3 *Dados V_K^n um espaço vetorial de dimensão finita n sobre um corpo K e T uma matriz quadrada de ordem $n \times n$. Dizemos que um autovalor λ de T é puro se o autoespaço de T associado ao autovalor λ, $\{v \in V; (T - \lambda I_n)v = 0\}$, coincide com o autoespaço generalizado $\{v \in V; (T - \lambda I_n)^{n+1}v = 0\}$, onde I_n é a matriz identidade de ordem $n \times n$. Caso contrário, dizemos que λ é um autovalor misto.*

Vamos considerar neste capítulo $V_{\mathbb{C}}^{n+1} \approx \mathbb{C}^{n+1}$ um espaço vetorial isomorfo a $\mathbb{C}^{n+1}$ sobre o corpo dos complexos $\mathbb{C}$, munido da forma hermitiana de assinatura $(n, 1)$ dada por $\langle \cdot, \cdot \rangle_1 : V_{\mathbb{C}}^{n+1} \times V_{\mathbb{C}}^{n+1} \to \mathbb{C}$, definida por $\langle v, w \rangle_1 = -v_1\overline{w}_1 + v_2\overline{w}_2 + ... + v_{n+1}\overline{w}_{n+1}$, onde $v = (v_1, ..., v_{n+1}), w = (w_1, ..., w_{n+1}) \in V_{\mathbb{C}}^{n+1}$. Ou seja, vamos sempre considerar o par $V_{\mathbb{C}}^{n,1} = (V_{\mathbb{C}}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ neste capítulo.

Agora estamos em condições de enunciar e demonstrar um dos principais resultados deste trabalho. O próximo teorema nos dá uma caracterização para os elementos elípticos, loxodrômicos e parabólicos nos grupos $U(n, 1)$ e $SU(n, 1)$. Essa caracterização exige que o elemento em questão tenha polinômio característico auto-dual. A Definição 3.3 feita acima, será usada exclusivamente na demonstração do item (iv) do próximo teorema.

Teorema 3.4 *Seja $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$. Considere T um elemento de $U(n, 1)$ ou $SU(n, 1)$ tal que o polinômio característico é auto-dual.*

(i) Seja T elíptico. Então T é reversível se, e somente se, o autovalor de tipo negativo ou indefinido de T é 1 ou -1.

(ii) Seja T unipotente com polinômio mínimo $(x - 1)^2$. Então T não é reversível.

(iii) Seja T unipotente com polinômio mínimo $(x-1)^3$. Então T é reversível.

(iv) Seja $T = NA$ parabólico e não unipotente. Então T é reversível se, e somente se, o autovalor nulo de T é 1 ou -1 e o polinômio mínimo de N é $(x-1)^3$.

(v) Seja T loxodrômico. Então T é reversível.

Prova. (i) $\Longrightarrow]$ Suponha T um elemento de $U(n,1)$ tal que o polinômio característico seja auto-dual. Suponha também que T seja elíptico, ou seja, T é um levantamento de um elemento elíptico de $PU(n,1)$ (fixa pelo menos um ponto de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$). Assim, T tem um autovalor do tipo negativo ou indefinido, já que seu autoespaço possui pelo menos um vetor de V_{-}. Seja λ o autovalor de T de tipo negativo ou indefinido. Então, $V^{n,1}_{\mathbb{C}}$ tem uma decomposição em soma direta de subespaços mutuamente ortogonais, invariantes sob T, da forma $V^{n,1}_{\mathbb{C}} = V_\lambda \bigoplus W$, onde V_λ é o autoespaço de T associado ao autovalor λ e W é o seu complemento ortogonal. Como $Tv = \lambda v$ para todo $v \in V_\lambda$, segue que $T^{-1}v = \lambda^{-1}v$. Isso nos diz que V_λ é o autoespaço de T^{-1} associado ao autovalor λ^{-1}. Logo, λ^{-1} é um autovalor de T^{-1} do tipo negativo ou indefinido. Já que o polinômio característico de T é auto-dual, temos que λ^{-1} também é um autovalor de T. Como T é reversível em $U(n,1)$, então existe uma matriz $S \in U(n,1)$ tal que $STS^{-1} = T^{-1}$. Dessa forma, temos que T e T^{-1} têm o mesmo autovalor de tipo negativo ou indefinido e existe uma matriz S_W tal que $S_W T|_W S_W^{-1} = T|_W^{-1}$ (ver em [1] o Teorema 3.4.1). Logo $\lambda = \lambda^{-1}$, e consequentemente $\lambda = \pm 1$. Por outro lado, se T é um elemento de $SU(n,1)$, a prova é inteiramente análoga ao que fizemos para o $U(n,1)$.

$\Longleftarrow]$ Suponha $T \in U(n,1)$. Suponha que o autovalor de tipo negativo ou indefinido de T seja $\lambda = 1$. Segue que $\lambda^{-1} = \lambda = 1$. Seja V_λ o autoespaço de T associado ao autovalor λ. Assim como foi feito acima, $V^{n,1}_{\mathbb{C}}$ tem uma decomposição em soma direta de subespaços mutuamente ortogonais, invariantes sob T, da forma $V^{n,1}_{\mathbb{C}} = V_\lambda \bigoplus W$, onde W é o complemento ortogonal de V_λ. Como V_λ é hiperbólico, ou seja, a forma restrita a V_λ é não degenerada e indefinida, então W é elíptico, ou seja, a forma restrita a W é definida positiva (ver em [1] a Proposição 2.1.4). Assim, se $dim(V_\lambda) = m$, temos que $T|_W$ é um elemento de $U(n+1-m)$. Como o polinômio característico de T é auto-dual, temos que o polinômio característico de $T|_W$ também o é. Logo, isso nos deixa em condições de usar o Corolário 2.13, que nos garante que $T|_W$ é reversível em $U(n+1-m)$, ou seja, existe uma matriz $S_W \in U(n+1-m)$ tal que $S_W T|_W S_W^{-1} = T|_W^{-1}$. Como $\lambda^{-1} = \lambda$, temos que $T|_{V_\lambda}$ e $T|_{V_\lambda}^{-1}$ têm o mesmo autovalor de tipo negativo ou indefinido. Assim, existe S_λ tal que $S_\lambda T|_{V_\lambda} S_\lambda^{-1} = T|_{V_\lambda}^{-1}$ (ver em [1] o Teorema 3.4.1). Tome $S = S_\lambda \bigoplus S_W$. Por construção, temos que $S \in U(n,1)$ e $STS^{-1} = T^{-1}$. Segue que T é reversível em $U(n,1)$. Por outro lado, suponha agora que $T \in SU(n,1)$. Suponha também que o autovalor de tipo negativo ou indefinido de T seja $\lambda = 1$. Assim, $\lambda^{-1} = \lambda = 1$. Agora, decompomos $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ como acima, ou seja, $V_{\mathbb{C}}^{n,1} = V_\lambda \bigoplus W$. Como V_λ é hiperbólico, temos que W é elíptico. Além disso, como o polinômio característico de T é auto-dual, temos que o polinômio característico de $T|_W$ também o é. Se $dim(V_\lambda) = m$, temos que $T|_W$ é um elemento de $SU(n+1-m)$, e pelo Teorema 2.14, temos que existe uma matriz $S_W \in SU(n+1-m)$ tal que $S_W T|_W S_W^{-1} = T|_W^{-1}$, ou seja, $T|_W$ é reversível em $SU(n+1-m)$. Segue do fato de $\lambda^{-1} = \lambda$, que $T|_{V_\lambda}$ e $T|_{V_\lambda}^{-1}$ têm o mesmo autovalor de tipo negativo ou indefinido (ver em [1] o Teorema 3.4.1). Assim, existe S_λ tal que $S_\lambda T|_{V_\lambda} S_\lambda^{-1} = T|_{V_\lambda}^{-1}$. Tome $S = S_\lambda \bigoplus S_W$, e se necessário, ajuste $S|_{V_\lambda}$ como no Teorema 2.14, para garantir que $det(S) = 1$. Dessa forma, obtemos que $S \in SU(n,1)$. Logo, T é reversível em $SU(n,1)$. Para $\lambda = -1$ a prova é inteiramente análoga ao caso em que $\lambda = 1$, pois obtemos da mesma forma que $\lambda = \lambda^{-1}$.

(ii) Seja T um elemento unipotente de $U(n,1)$ ou $SU(n,1)$, ou seja, todos os autovalores de T são 1. Suponha que T tem polinômio mínimo $(x-1)^2$. Usando a Forma Normal de Jordan para autovalores reais, podemos encontrar vetores u e v de $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ tais que $Tu = \lambda u$ e $Tv = \lambda v + u$, onde λ é um autovalor de T. Como todos os autovalores de T são 1, temos que as últimas igualdades ficam $Tu = u$ e $Tv = v + u$. Consequentemente, temos que $T^{-1}u = u$ e $T^{-1}v = v - u$. Além disso, u e v geram um subespaço invariante sob T e não degenerado, $W = span\{u, v\}$, tal que a forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ restrita a W tem assinatura $(1,1)$. Como T preserva a forma, temos que

$$\langle u, v \rangle_1 = \langle Tu, Tv \rangle_1 = \langle u, v + u \rangle_1 = \langle u, v \rangle_1 + \langle u, u \rangle_1.$$

Assim, segue que $\langle u, u \rangle_1 = 0$. Como a forma hermitiana restrita a W tem assinatura $(1,1)$, segue que $\langle u, v \rangle_1 \neq 0$. Agora, suponha que T seja reversível, ou seja, existe S tal que $STS^{-1} = T^{-1}$. Já que S satisfaz $STS^{-1} = T^{-1}$, e W é invariante por T, temos que W é invariante por S, ou seja, $S(W) \subseteq W$. Como S preserva a forma, temos que $\langle Su, Su \rangle_1 =$

$\langle u, u\rangle_1 = 0$. Segue que $Su \in V_0$, isto é, Su é isotrópico. Além disso, veja que $TSu = T(T^{-1}ST^{-1})u = ST^{-1}u = Su$, já que $STS^{-1} = T^{-1}$. Segue que Su é um autovetor isotrópico de T, associado ao autovalor 1. Entretanto, pela Forma Normal de Jordan, u é o único vetor da base de W tal que $Tu = u$. Assim, como vimos que $S(W) \subseteq W$ e consequentemente $Su \in W$, a unicidade do ponto fixo de T nos dá que Su deve ser um múltiplo de u, e Sv será uma combinação linear de u e v. Isto é, $Su = au$ e $Sv = bu + cv$, onde $a, b, c \in \mathbb{C}$. Como $\langle u, v\rangle_1 = 0$ e S preserva a forma, temos que

$$\langle u, v\rangle_1 = \langle Su, Sv\rangle_1 = \langle au, bu + cv\rangle_1 = \langle au, cv\rangle_1 = a\bar{c}\langle u, v\rangle_1.$$

Logo, $a\bar{c} = 1$, pois $\langle u, v\rangle_1 \neq 0$. Agora, segue de $STS^{-1} = T^{-1}$ que $ST = T^{-1}S$. Aplicando ST e $T^{-1}S$ em u e em v, obtemos as igualdades:

$$\begin{aligned} STu &= Su = au \\ STv &= S(v + u) = Sv + Su = bu + cv + au = (a + b)u + cv \\ T^{-1}Su &= T^{-1}au = au \\ T^{-1}Sv &= T^{-1}(bu + cv) = bT^{-1}u + cT^{-1}v = bu + cv - cu = (b - c)u + cv\ . \end{aligned}$$

Como $STu = T^{-1}Su$, segue das últimas igualdades que $au = au$, e como $STv = T^{-1}Sv$, segue também das últimas igualdades que $(a + b)u + cv = (b - c)u + cv$, e consequentemente $a = -c$. Assim, temos que $a\bar{c} = 1$ e $a = -c$, nos dando que $|a|^2 = |c|^2 = -1$, que não é possível. Logo, T não é reversível.

(iii) Seja T um elemento unipotente de $U(n, 1)$ ou $SU(n, 1)$. Suponha que T tem polinômio mínimo $(x-1)^3$. Usando a Forma Normal de Jordan para autovalores reais, podemos encontrar vetores u, v e w de $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ tais que $Tu = u$, $Tv = v + u$ e $Tw = w + v$, já que T tem somente autovalores iguais a 1. Além disso, $W = span\{u, v, w\}$ é não degenerado e invariante sob T. Decomponha $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ na forma $V_{\mathbb{C}}^{n,1} = W \bigoplus W^{\perp}$, onde $W^{\perp}$ é o complemento

ortogonal de W. Como T preserva a forma, temos as expressões

$$\begin{aligned}
\langle u,v\rangle_1 &= \langle Tu,Tv\rangle_1 = \langle u,v+u\rangle_1 = \langle u,v\rangle_1 + \langle u,u\rangle_1 \\
&\Rightarrow \langle u,u\rangle_1 = 0 \\
\langle u,w\rangle_1 &= \langle Tu,Tw\rangle_1 = \langle u,w+v\rangle_1 = \langle u,w\rangle_1 + \langle u,v\rangle_1 \\
&\Rightarrow \langle u,v\rangle_1 = 0 \\
\langle v,w\rangle_1 &= \langle Tv,Tw\rangle_1 = \langle v+u,w+v\rangle_1 = \langle v,w\rangle_1 + \langle v,v\rangle_1 + \langle u,w\rangle_1 \\
&\Rightarrow \langle v,v\rangle_1 + \langle u,w\rangle_1 = 0 \\
\langle w,w\rangle_1 &= \langle Tw,Tw\rangle_1 = \langle w+v,w+v\rangle_1 = \langle w,w\rangle_1 + \langle w,v\rangle_1 + \langle v,w\rangle_1 + \langle v,v\rangle_1 \\
&\Rightarrow \langle w,v\rangle_1 + \langle v,w\rangle_1 + \langle v,v\rangle_1 = 0\ .
\end{aligned}$$

Seguem das implicações acima as igualdades

$$0 = \langle u,u\rangle_1 = \langle u,v\rangle_1 = \langle v,v\rangle_1 + \langle u,w\rangle_1 = \langle w,v\rangle_1 + \langle v,w\rangle_1 + \langle v,v\rangle_1. \tag{3.1}$$

Como a restrição da forma $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ a W é não degenerada, temos que $\langle v,v\rangle_1 \neq 0$, pois caso $\langle v,v\rangle_1 = 0$, por (3.1) teríamos que $\langle u,v\rangle_1 = 0$ e $\langle v,w\rangle_1 = 0$. Dessa forma, $\langle v,z\rangle_1 = 0$, para todo $z \in W$. Logo, a forma restrita a W seria degenerada. Assim, tendo que $\langle v,v\rangle_1 \neq 0$, defina

$$k = \frac{\langle v,w\rangle_1}{2\langle v,v\rangle_1}.$$

Por (3.1), temos que

$$0 = \langle w,v\rangle_1 + \langle v,w\rangle_1 + \langle v,v\rangle_1 = \frac{\langle w,v\rangle_1}{\langle v,v\rangle_1} + \frac{\langle v,w\rangle_1}{\langle v,v\rangle_1} + \frac{\langle v,v\rangle_1}{\langle v,v\rangle_1} = 2\overline{k} + 2k + 1.$$

Com isso, temos que $2\overline{k} + 2k + 1 = 0$, e consequentemente $2\overline{k} + 2k = -1$. Agora, defina S sobre W por $Su = -u$, $Sv = v + 2ku$ e $Sw = -w + 2\overline{k}v + 2|k|^2u$. Então, temos que

$$\begin{aligned}
STu &= Su = -u \\
STv &= S(v+u) = Sv + Su = v + 2ku - u = v + u(2k-1) \\
STw &= S(w+v) = Sw + Sv \\
&= -w + 2\overline{k}v + 2|k|^2u + v + 2ku \\
&= -w + (2\overline{k}+1)v + (2|k|^2 + 2k)u\ .
\end{aligned}$$

Veja que S, assim definida sobre W, é uma involução. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
SSu &= -Su = u \\
SSv &= Sv + 2kSu = v + 2ku - 2ku = v \\
SSw &= -Sw + 2\overline{k}Sv + 2|k|^2Su = w - 2\overline{k}v - 2|k|^2u + 2\overline{k}(v + 2ku) - 2|k|^2u = w\ .
\end{aligned}$$

Além disso, ST sobre W também é uma involução, pois

$$\begin{aligned}
STSTu &= -STu = u \\
STSTv &= STv + (2k-1)STu = v + u(2k-1) - (2k-1)u = v \\
STSTw &= -STw + (2\overline{k}+1)STv + (2|k|^2 + 2k)STu \\
&= w - (2\overline{k}+1)v - (2|k|^2+2k)u + (2\overline{k}+1)(v + u(2k-1)) - (2|k|^2+2k)u \\
&= w - 2(2|k|^2+2k)u + (2\overline{k}+1)u(2k-1) \\
&= w - (4|k|^2+4k)u + (4|k|^2+2k-2\overline{k}-1)u \\
&= w - (4|k|^2+4k)u + (4|k|^2+2k+2k)u \\
&= w\ ,
\end{aligned}$$

donde no caso $STSTw = w$, usamos o fato que $2\overline{k} + 2k = -1$. Como ST é uma involução, temos que $ST = (ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$, ou seja, $ST = T^{-1}S^{-1}$. Como S é uma involução, temos que $S = S^{-1}$, e assim obtemos que $ST = T^{-1}S$, isto é, $STS = T^{-1}$ sobre W. Por outro lado, temos que S preserva a forma $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$, pois

$$\begin{aligned}
\langle Su, Sv\rangle_1 &= \langle -u, v + 2ku\rangle_1 \\
&= -\langle u, v\rangle_1 - 2\overline{k}\langle u, u\rangle_1 \\
&= 0 \\
&= \langle u, v\rangle_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle Su, Sw\rangle_1 &= \langle -u, -w + 2\overline{k}v + 2|k|^2u\rangle_1 \\
&= \langle u, w\rangle_1 - \langle u, 2\overline{k}v\rangle_1 - \langle u, 2|k|^2u\rangle_1 \\
&= \langle u, w\rangle_1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\langle Sw, Sv\rangle_1 &= \langle -w + 2\overline{k}v + 2|k|^2u, v + 2ku\rangle_1 \\
&= -\langle w, v\rangle_1 - 2\overline{k}\langle w, u\rangle_1 + 2\overline{k}\langle v, v\rangle_1 \\
&= -\langle w, v\rangle_1 - \tfrac{2\langle w,v\rangle_1}{2\langle v,v\rangle_1}\langle w, u\rangle_1 + \tfrac{2\langle w,v\rangle_1}{2\langle v,v\rangle_1}\langle v, v\rangle_1 \\
&= -\langle w, v\rangle_1 - \tfrac{\langle w,v\rangle_1\langle w,u\rangle_1 + \langle w,v\rangle_1\langle v,v\rangle_1}{\langle v,v\rangle_1} \\
&= -\langle w, v\rangle_1 + \tfrac{\langle w,v\rangle_1(-\langle w,u\rangle_1 + \langle v,v\rangle_1)}{\langle v,v\rangle_1} \\
&= -\langle w, v\rangle_1 + \tfrac{\langle w,v\rangle_1(\langle v,v\rangle_1 + \langle v,v\rangle_1)}{\langle v,v\rangle_1} \\
&= -\langle w, v\rangle_1 + \tfrac{2\langle w,v\rangle_1\langle v,v\rangle_1}{\langle v,v\rangle_1} \\
&= -\langle w, v\rangle_1 + 2\langle w, v\rangle_1 \\
&= \langle w, v\rangle_1 ,
\end{aligned}
$$

donde para obter as igualdades acima usamos (3.1) e a definição de k. Veja que ST também preserva a forma, pois

$$
\begin{aligned}
\langle STu, STv\rangle_1 &= \langle -u, v + u(2k-1)\rangle_1 \\
&= 0 \\
&= \langle u, v\rangle_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle STu, STw\rangle_1 &= \langle -u, -w + (2\overline{k}+1)v + (2|k|^2 + 2k)u\rangle_1 \\
&= \langle -u, -w\rangle_1 \\
&= \langle u, w\rangle_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle STv, STw\rangle_1 &= \langle v + u(2k-1), -w + (2\overline{k}+1)v + (2|k|^2 + 2k)u\rangle_1 \\
&= \langle v, -w\rangle_1 + \langle v, (2\overline{k}+1)v\rangle_1 + \langle u(2k-1), -w\rangle_1 \\
&= \langle v, -w\rangle_1 + (2k+1)\langle v, v\rangle_1 + (2k-1)\langle u, -w\rangle_1 \\
&= \langle v, -w\rangle_1 + (2k+1)\langle v, v\rangle_1 + (2k-1)\langle v, v\rangle_1 \\
&= \langle v, -w\rangle_1 + 4k\langle v, v\rangle_1 \\
&= -\langle v, w\rangle_1 + 2\langle v, w\rangle_1 \\
&= \langle v, w\rangle_1
\end{aligned}
$$

donde as expressões acima seguem de (3.1) e da definição de k. Como S e ST assim definidas, sobre W, têm respectivamente as formas

$$S|_W = \begin{pmatrix} -1 & 2k & 2|k|^2 \\ 0 & 1 & 2\overline{k} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad ST|_W = \begin{pmatrix} -1 & (2k-1) & (2|k|^2+2k) \\ 0 & 1 & (2\overline{k}+1) \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

temos que $det(S) = det(ST) = 1$. Como a forma restrita a W é não degenerada e indefinida, ou seja, W é um subespaço hiperbólico, temos que o complemento ortogonal de W é um subespaço elíptico (ver em [1] a Proposição 2.1.4). Para terminar a prova de (iii), basta ver que T é a aplicação identidade quando restrito ao complemento ortogonal, elíptico, de W. Assim, basta considerar $S|_{W^\perp}$ como sendo a aplicação identidade. Dessa forma, temos que para $S = S|_W \bigoplus S|_{W^\perp}$, T é fortemente reversível, e consequentemente reversível.

(iv) Seja T um elemento de $U(n,1)$ ou $SU(n,1)$. Suponha T parabólico e não unipotente.

$\Longrightarrow$] Seja $T = AN = NA$, a decomposição de Jordan de T, onde N é unipotente e A é elíptico. Como A é elíptico, temos que A é semi-simples (ver em [1] o Teorema 3.4.1), ou seja, o polinômio mínimo de A é um produto de fatores lineares. Suponha T reversível, então A e N são reversíveis (ver em [1] o Teorema 3.4.1). Como N é unipotente, temos que N tem polinômio mínimo com a forma $(x-1)^2$ ou $(x-1)^3$. Como N é reversível e unipotente, pelo item (ii), temos que o polinômio mínimo de N não tem a forma $(x-1)^2$. Segue que o polinômio mínimo de N tem a forma $(x-1)^3$. Por outro lado, como A é elíptico e é reversível, pelo item (i) temos que o autovalor de tipo negativo ou indefinido de A é 1 ou -1. Segue que o autovalor de tipo nulo de T é 1 ou -1.

$\Longleftarrow$] Como T é parabólico e não unipotente, T tem a decomposição de Jordan $T = NA = AN$, onde N é unipotente e A é elíptico. Nesse caso, T tem um autovalor nulo λ e o polinômio mínimo de T tem a forma $(x-\lambda)^2$ ou $(x-\lambda)^3$. Suponha que o autovalor nulo de T é 1 ou -1, e que o polinômio mínimo de N é $(x-1)^3$. A decomposição de Jordan nos dá que T é reversível se, e somente se, A e N são reversíveis (ver em [1] o item (c) do Teorema 3.4.1). Assim, a demonstração agora se resume em provar que A e N são reversíveis. Como o polinômio mínimo de N é $(x-1)^3$ e N é unipotente, segue da parte (iii) que N é reversível. Por outro lado, como T é parabólico, temos que T tem um autovalor nulo λ. Veja que esse autovalor nulo é misto (ver Definição 3.3). Entretanto, para A, λ é um autovalor de tipo indefinido e o autoespaço generalizado V_λ de T será o autoespaço usual de A associado ao autovalor λ. Caso $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$, temos que A é um elemento elíptico, tal que o autovalor de tipo indefinido é 1 ou -1. Segue de (i) que A é reversível. Logo, T é reversível.

(v) Suponha que T é um elemento loxodrômico de $SU(n,1)$ ou $U(n,1)$. Então T tem dois autovalores nulos dados por $\lambda = re^{i\theta}$ e $\overline{\lambda}^{-1} = r^{-1}e^{i\theta}$, onde $r > 1$, tais que os respectivos autoespaços V_λ e $V_{\overline{\lambda}^{-1}}$ são unidimensionais. Além disso, os demais autovalores de T são de tipo positivo e de módulo 1. Assim, decompomos $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ em soma direta de subespaços mutuamente ortogonais e invariantes por T, dada por $V_{\mathbb{C}}^{n,1} = U \bigoplus U^\perp$, onde $U = V_\lambda \bigoplus V_{\overline{\lambda}^{-1}}$ e $U^\perp$ é seu complemento ortogonal, o qual é um subespaço elíptico, ou seja, a forma restrita a $U^\perp$ é definida positiva. Temos que a forma restrita a U tem assinatura $(1,1)$, então a restrição $T|_U$ pode ser visto como um elemento de $U(1,1)$. Além disso, veja que se $v \in V_\lambda$, temos que $T|_U v = \lambda v$, e segue daí que $T|_U^{-1} v = \lambda^{-1} v$. Isso nos diz que V_λ é o autoespaço de $T|_U^{-1}$ associado ao autovalor λ^{-1}. Analogamente obtemos que $V_{\overline{\lambda}^{-1}}$ é o autoespaço de $T|_U^{-1}$ associado ao autovalor $\overline{\lambda}$. Com isso, temos que $T|_U$ é reversível em $U(1,1)$ se, e somente se, λ é real. De fato, se $T|_U$ é reversível em $U(1,1)$, temos que o polinômio característico de $T|_U$ é auto-dual. Assim, se λ é raiz do polinômio, temos que λ^{-1} também o é, e com a mesma multiplicidade. Mas os autovalores de $T|_U$ são λ e $\overline{\lambda}^{-1}$, então isso nos diz que $\lambda^{-1} = \overline{\lambda}^{-1}$, ou seja, λ é real. Reciprocamente, suponha que λ é real. Vimos que V_λ e $V_{\overline{\lambda}^{-1}}$ têm a mesma dimensão. Isso nos diz que os autovalores λ e $\overline{\lambda}^{-1}$ são raízes do polinômio característico de $T|_U$, com a mesma multiplicidade. Como λ é real, temos que $\overline{\lambda}^{-1} = \lambda^{-1}$. Assim, λ e λ^{-1} são autovalores de $T|_U$ com a mesma multiplicidade. Da mesma forma, temos que λ e λ^{-1} também são autovalores de $T|_U^{-1}$ com a mesma multiplicidade. Com isso, temos que $T|_U$ e $T|_U^{-1}$ têm os mesmos autovalores. Logo, $T|_U$ é reversível em $U(1,1)$ (ver em [1] Proposição 3.2.3). Assim, o polinômio característico de $T|_U$ é auto-dual, com raízes reais λ e $\lambda^{-1} = \overline{\lambda}^{-1}$, e $T|_U$ está em $SU(1,1)$. Segue também do fato de $T|_U$ e $T|_U^{-1}$ terem os mesmos autovalores λ e λ^{-1} reais, que $T|_U$ é reversível em $SU(1,1)$. Agora, sabemos que $U^\perp$ é elíptico, então $T|_{U^\perp}$ pode ser visto como um elemento de $U(n-1)$ ou $SU(n-1)$. Como T tem polinômio característico auto-dual e $T|_U$ também tem, temos que $T|_{U^\perp}$ tem polinômio característico auto-dual. Logo, como $T|_{U^\perp}$ é um elemento de $U(n-1)$ (respectivamente de $SU(n-1)$), temos que $T|_{U^\perp}$ é reversível pelo Teorema 2.12 (respectivamente pelo Teorema 2.14). Como

$T = T|_U \bigoplus T|_{U^\perp}$, segue que T é reversível em $U(n,1)$ (respectivamente em SU(n,1)). ■

Dado um elemento de $U(n,1)$ ou $SU(n,1)$, se este elemento é fortemente reversível temos que em particular ele é reversível. Agora, se este elemento é reversível, sob quais condições podemos obter que o mesmo seja fortemente reversível em um desses grupos? O próximo teorema nos responde a essa pergunta. Veremos no próximo teorema que em $U(n,1)$ todo elemento reversível é fortemente reversível. Entretanto, este fato nem sempre acontece para os elementos de $SU(n,1)$. Segue o teorema.

Teorema 3.5 *Seja $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$. Temos que são verdadeiras as seguintes afirmações:*

(i) Seja $T \in U(n,1)$. Então T é fortemente reversível se, e somente se, T é reversível.

(ii) Seja $T \in SU(n,1)$ tal que o polinômio característico é auto-dual. Então as seguintes condições são equivalentes:

(a) T é reversível mas não é fortemente reversível;

(b) T é loxodrômico, $n = 4m+1$, com $m \in \mathbb{Z}$, e ± 1 não é um autovalor de T.

Prova. Primeiramente, se T é fortemente reversível em $U(n,1)$ ou em $SU(n,1)$, em particular temos que T é reversível em $U(n,1)$ ou em $SU(n,1)$, respectivamente. Isto conclui a primeira parte da prova.

Por outro lado, suponha T reversível em $U(n,1)$ ou $SU(n,1)$. Seguindo a construção da prova do Teorema 2.14, sejam E o conjunto de autovalores $\lambda \neq \pm 1$ de T e $W = \bigoplus_{\lambda \in E}(V_\lambda \bigoplus V_{\lambda^{-1}})$. Então, podemos construir $S|_W$, assim como no Teorema 2.14, tal que $S|_W T|_W S|_W^{-1} = T|_W^{-1}$, $det(S|_W) = (-1)^{\frac{1}{2}dim(W)}$ e $S|_W^2 = I$, onde I é a identidade. Seja U o complemento ortogonal de W. Então U contém os autoespaços de ± 1, se esses autovalores existirem. Defina $S|_U$ como sendo a identidade, e considere $S = S|_U \bigoplus S|_W$. Dessa forma, temos que $STS = T^{-1}$, isto é, T é fortemente reversível em $U(n,1)$. Se 1 ou -1 é um autovalor de T, então nós podemos ajustar $S|_U$, como no Teorema 2.14, de forma que $det(S) = 1$, obtendo que T é fortemente reversível em $SU(n,1)$. Agora, caso T seja unipotente, temos que 1 é um autovalor de T, W é vazio e seu polinômio mínimo tem a forma $(x-1)^2$ ou $(x-1)^3$. Como T é reversível, temos pela parte (ii) do Teorema 3.4 que o polinômio mínimo de T não pode ter a forma $(x-1)^2$, e assim temos pela parte (iii) do Teorema 3.4 que T é fortemente reversível em $U(n,1)$ (respectivamente em $SU(n,1)$), já que na prova de (iii) nós demonstramos que T era fortemente reversível para garantir que T, em particular, era reversível. Caso T seja parabólico e não unipotente, já que T é reversível, temos pela parte (iv) do Teorema 3.4 que T possui autovalor nulo 1 ou -1. Com isso, usando a construção feita acima, temos que T é fortemente reversível em $U(n,1)$ (respectivamente em $SU(n,1)$). Para o caso em que T é elíptico, como T é reversível, temos pela parte (i) do Teorema 3.4 que T tem autovalor de tipo negativo ou indefinido 1 ou -1. Assim, usando a construção feita acima, temos que T é fortemente reversível em $U(n,1)$ (respectivamente em $SU(n,1)$). Até agora, o que temos é que se $T \in U(n,1)$ é reversível em $U(n,1)$, então é fortemente reversível em $U(n,1)$ para os casos em que T é unipotente, elíptico ou parabólico e não unipotente. Se T é loxodrômico reversível com autovalor 1 ou -1, temos pela construção acima que T é fortemente reversível em $U(n,1)$. Se T é loxodrômico reversível, tal que ± 1 não é autovalor de T, temos que T é também fortemente reversível em $U(n,1)$, já que não é necessário que a matriz $S = S|_W$ (construída acima), tal que $STS^{-1} = T^{-1}$, tenha determinante 1. Assim, para matrizes em $U(n,1)$ não temos problemas com o fato de $det(S|_W) = (-1)^{\frac{1}{2}dim(W)}$ na construção acima. Agora, veja que para $T \in SU(n,1)$ reversível em $SU(n,1)$, temos provado que T é fortemente reversível em $SU(n,1)$ para os casos em que T é unipotente, elíptico ou parabólico e não unipotente. Se T é loxodrômico com autovalor 1 ou -1, segue da construção acima que T é fortemente reversível em $SU(n,1)$. Entretanto, para o caso em que T é um elemento loxodrômico de $SU(n,1)$, tal que ± 1 não é autovalor de T, não podemos concluir que T seja fortemente reversível em $SU(n,1)$ diretamente da construção acima, para qualquer n, pois necessitamos que a matriz S, tal que $STS^{-1} = T^{-1}$, tenha determinante 1. Então, agora vamos ver o que acontece no caso em que T é um elemento loxodrômico de $SU(n,1)$, tal que ± 1 não é autovalor. Veja que, como T é reversível, temos que o polinômio característico de T é auto-dual. Assim, temos que se λ é um autovalor de T, então λ^{-1} também o é, e com a mesma multiplicidade. Dessa forma, temos que os autoespaços de T, V_λ e $V_{\lambda^{-1}}$, associados respectivamente aos autovalores λ e λ^{-1}, têm a mesma dimensão. Assim, como $\lambda \neq \pm 1$, temos que a dimensão de $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ é par. Segue que n é necessariamente ímpar. Como T é loxodrômico, temos que T tem dois autovalores nulos dados por $\lambda = re^{i\theta}$ e $\overline{\lambda}^{-1} = r^{-1}e^{i\theta}$, onde $r > 1$, tais que os respectivos autoespaços V_λ e $V_{\overline{\lambda}^{-1}}$ são unidimensionais. Além disso, os demais autovalores de T são de tipo positivo e de módulo 1. Assim, decompomos $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ em soma direta de subespaços mutuamente ortogonais e invariantes por T, dada por $V_{\mathbb{C}}^{n,1} = U \bigoplus U^\perp$, onde $U = V_\lambda \bigoplus V_{\overline{\lambda}^{-1}}$ e $U^\perp$ seu complemento ortogonal, o qual é um subespaço elíptico. Defina $S|_U$ uma involução em $U(1,1)$ a qual troca os autoespaços de λ e λ_{-1}. Temos que $det(S|_U) = -1$. Veja que $T|_{U^\perp}$ pode ser visto como um elemento de $SU(n-1)$, já que $U^\perp$ é elíptico. Agora, se T é fortemente reversível em $SU(n,1)$, então $T|_{U^\perp}$ precisa ser fortemente reversível através de um elemento $S|_{U^\perp}$, cujo determinante é -1. Ajustando o que foi feito no Teorema 2.14, nós temos que esse é o caso se, e somente se, $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} = -1$ e então, temos que $n-1 = 4m+2$, ou seja, $n = 4m+3$. Segue que T é fortemente reversível em $SU(n,1)$ quando $n = 4m+3$. Logo, como vimos que n é ímpar, e T é fortemente reversível em $SU(n,1)$ somente quando $n = 4m+3$, então segue que T não é fortemente reversível para o caso em que $n = 4m+1$. Isto conclui a prova. ■

Agora, enunciaremos e demonstraremos dois lemas cujas provas são simples mas têm aplicações relevantes neste trabalho. O primeiro nos diz que se um elemento de $U(n,1)$ tem autovalor λ, então o inverso conjugado de λ, isto é, $\overline{\lambda}^{-1}$, também é um autovalor deste elemento. O segundo lema nos dá um levantamento conveniente em $U(n,1)$ para elementos de $PU(n,1)$. Este segundo lema será importante para a demonstração do Teorema 3.8.

Lema 3.6 *Sejam $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ e $T \in U(n,1)$. Se λ é um autovalor de T, então $\overline{\lambda}^{-1}$ é também um autovalor de T, e tem a mesma multiplicidade de λ.*

Prova. Sejam $T \in U(n,1)$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$. Considere $H_1 = diag(-1,1,...,1)$, a matriz diagonal que representa a forma hermitiana $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$. Temos que T está em $U(n,1)$ se, e somente se, $\overline{T}^t H_1 T = H_1$, onde $\overline{T}^t$ indica a matriz T transposta e conjugada. Equivalentemente, temos que $T = H_1^{-1}(\overline{T}^t)^{-1}H_1$. Assim, segue que T tem os mesmos autovalores de $\overline{T}^{-1}$, com suas respectivas multiplicidades. Segue o resultado. ■

Lema 3.7 *Seja $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$. Para todo $T \in PU(n,1)$, existe um único levantamento $\hat{T}$ de T em $U(n,1)$, tal que para cada ponto fixo de T em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n \cup \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, o autovalor associado de $\hat{T}$ é um número real positivo.*

Prova. Temos que para o caso em que T é parabólico ou elíptico, T fixa um subconjunto conexo de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}} \cup \partial\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$. Esse subconjunto fixado por T, corresponde a um autoespaço $V_{e^{i\theta}}$ associado ao autovalor $e^{i\theta}$ de algum levantamento $\tilde{T}$. Agora, considere $\hat{T} = e^{-i\theta}\tilde{T}$. Veja que $\hat{T} = e^{-i\theta}\tilde{T}$ satisfaz às condições do lema. De fato, como $\tilde{T}$ é um levantamento e $e^{-i\theta} \in \mathbb{C}$, temos que $\hat{T}$ também é um levantamento de T. Além disso, como $\tilde{T}$ preserva a forma, temos que $\hat{T}$ também preserva, e então $\hat{T} \in U(n,1)$. Como para cada ponto fixo de T em $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}} \cup \partial\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, o autovalor associado de $\hat{T}$ é 1, temos o resultado para esse caso. Agora, se T é loxodrômico, então os pontos fixos em $\partial\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ correspondem aos autoespaços V_λ e V_μ associados aos autovalores λ e μ, respectivamente, de algum levantamento $\tilde{T}$ de T. Pelo Lema 3.6, temos que $\mu = \overline{\lambda}^{-1}$. Ou seja, $\lambda = re^{i\theta}$ e $\mu = \overline{\lambda}^{-1} = r^{-1}e^{i\theta}$ para algum $r > 1$. Assim, basta considerar $\hat{T} = e^{-i\theta}\tilde{T}$. De maneira análoga ao que foi feito acima, temos que $\hat{T}$ é um levantamento de T e que $\hat{T} \in U(n,1)$. Entretanto, nesse caso temos que para os pontos fixos de T, os autovalores associados de $\hat{T}$ são r e r^{-1}, que são números reais positivos. A unicidade segue da construção. Segue o resultado. ■

O que fizemos até agora foi dá algumas caracterizações para os elementos reversíveis e fortemente reversíveis dos grupos $U(n,1)$ e $SU(n,1)$. O próximo teorema nos dá uma relação entre elementos do grupo de isometrias holomorfas de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, isto é, $PU(n,1)$, e seus respectivos levantamentos em $U(n,1)$. Essa relação nos dá uma caracterização para os elementos reversíveis e fortemente reversíveis de $PU(n,1)$.

Teorema 3.8 *Sejam $V^{n,1}_{\mathbb{C}}$ e $T \in PU(n,1)$. Então T é reversível, ou fortemente reversível, em $PU(n,1)$ se, e somente se, o levantamento $\hat{T}$ de T em $U(n,1)$ dado no Lema 3.7 é reversível, ou fortemente reversível, respectivamente. Em particular, T é reversível, ou fortemente reversível, em $PU(n,1)$ se, e somente se, são satisfeitas as seguintes condições:*

(i) o polinômio característico de $\hat{T}$ é auto-dual e,

(ii) se T é parabólico, o polinômio mínimo da parte unipotente de $\hat{T}$ é $(x-1)^3$.

Prova. Sejam $T \in PU(n,1)$ e $\hat{T} \in U(n,1)$ o levantamento de T dado no Lema 3.7.

$\Longrightarrow$] Suponha que $\hat{T}$ é reversível. Então podemos encontrar $\hat{S} \in U(n,1)$ tal que $\hat{S}\hat{T}\hat{S}^{-1} = \hat{T}^{-1}$. Aplicando a projeção canônica de $U(n,1)$ para $PU(n,1)$, ou seja, projetivizando, temos um elemento $S \in PU(n,1)$ tal que $STS^{-1} = T^{-1}$, e então T é reversível em $PU(n,1)$. Além disso, se $\hat{T}$ é fortemente reversível, temos que $\hat{S}$ é um elemento de ordem 2, isto é, $\hat{S}^2 = I$, onde I é a identidade. Consequentemente, temos que a projetivização S tem ordem no máximo 2. Segue que T é fortemente reversível.

$\Longleftarrow$] Suponha que T é reversível. Então existe $S \in PU(n,1)$ tal que $STS^{-1} = T^{-1}$. Seja $\hat{S}$ um levantamento de S para $U(n,1)$. Note que a expressão $\hat{S}\hat{T}\hat{S}^{-1}$ independe de qual levantamento tomamos para S. Se S tem ordem 2, então multiplicando $\hat{S}$ por um escalar se necessário, nós podemos supor que $\hat{S}$ tem ordem 2 também. Já que $STS^{-1} = T^{-1}$, temos que $\hat{S}\hat{T}\hat{S}^{-1} = k\hat{T}^{-1}$ para algum $k \in \mathbb{C}$. Veja que, $|k| = 1$. A prova agora se resume à demonstração de que $k = 1$. Para tanto, seja $z \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}} \cup \partial\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ um ponto fixo de T. Então Sz é fixado por T^{-1}, e consequentemente também é fixado por T. Pela definição de $\hat{T}$, sabemos que z corresponde a um autovetor v de $\hat{T}$ com autovalor λ, o qual λ é real e positivo. Considere $\hat{S}v$. Temos que

$$\hat{T}^{-1}\hat{S}v = k^{-1}(\hat{S}\hat{T}\hat{S}^{-1})\hat{S}v = k^{-1}\hat{S}\hat{T}v = \lambda k^{-1}\hat{S}v,$$

ou seja, $\hat{S}v$ é um autovetor de $\hat{T}^{-1}$ com autovalor λk^{-1}. Com isso, obtemos que $\hat{S}v$ é um autovetor de $\hat{T}$ com autovalor $\lambda^{-1}k$. Agora, $\hat{S}v$ corresponde a um ponto fixo de T em $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}} \cup \partial\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, que é o ponto Sz. Assim, pela construção de $\hat{T}$, sabemos que $\lambda^{-1}k$ é real e positivo. Como λ^{-1} é real e positivo e $|k| = 1$, temos que $k = 1$. Segue que $\hat{S}\hat{T}\hat{S}^{-1} = \hat{T}^{-1}$. Logo, $\hat{T}$ é reversível.

Para provar o caso particular, veja que por construção, temos que se T é elíptico ou parabólico, o autovalor de tipo negativo ou indefinido, respectivamente o autovalor nulo, é 1. Assim, o resultado segue da aplicação do Teorema 3.4 para o caso em que $\hat{T}$ é reversível, e segue do Teorema 3.5 para o caso em que $\hat{T}$ é fortemente reversível. ■

O próximo lema relaciona elementos de $SU(n,1)$ cujo polinômio característico é auto-dual, com os coeficientes do polinômio característico em questão. Em particular, o lema nos diz que se um elemento de $SU(n,1)$ tem polinômio característico auto-dual, então o traço do elemento em questão é real.

Lema 3.9 *Sejam $V^{n,1}_{\mathbb{C}}$ e $T \in SU(n,1)$. Então o polinômio característico de T é auto-dual* *se, e somente se, os coeficientes do polinômio característico de T são reais. Em particular, se o polinômio característico de T é auto-dual, então o traço de T é real.*

Prova. $\Longrightarrow$] Seja λ um autovalor de T. Então, pelo Lema 3.6 temos que $\overline{\lambda}^{-1}$ também é um autovalor de T e com mesma multiplicidade. Suponha que o polinômio característico de T é auto-dual. Assim, como $\overline{\lambda}^{-1}$ é um autovalor de T, temos que $(\overline{\lambda}^{-1})^{-1} = \overline{\lambda}$ também o é, e com a mesma multiplicidade. Dessa forma, temos que o conjunto de autovalores é invariante sob conjugação complexa. Já que os coeficientes do polinômio característico são polinômios simétricos desses autovalores, temos que os coeficientes são reais.

$\Longleftarrow$] Suponha que os coeficientes do polinômio característico de T são reais. Então, suas raízes são reais ou vêm em pares de conjugados complexos, ou seja, se λ é uma raiz do polinômio característico, então $\overline{\lambda}$ também será. De toda forma, temos pelo Lema 3.6 que se λ é uma raiz do polinômio característico, então $\overline{\lambda}^{-1}$ também o é, e com mesma multiplicidade. Segue que $\lambda^{-1} = \overline{(\overline{\lambda}^{-1})}$ é raiz do polinômio característico. Logo, o polinômio característico de T é auto-dual.

Em particular, se o polinômio característico de T é auto-dual, temos que os coeficientes do polinômio característico de T são reais, e consequentemente, o traço de T é real. Segue o resultado. ∎

Seja T um elemento reversível de $SU(n,1)$. Vimos no início deste capítulo que todo elemento reversível de $SU(n,1)$ tem polinômio característico auto-dual. Observe que o Lema 3.9 nos diz em particular, que o fato de T ter polinômio característico auto-dual nos garante que o traço de T é real. Isto prova o nosso próximo resultado.

Corolário 3.10 *Sejam $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ e T um elemento de $SU(n,1)$ tal que T é reversível em $SU(n,1)$. Então o traço de T é real.*

Veja que a recíproca do Corolário 3.10 nem sempre é verdadeira. Por exemplo, considere o elemento loxodrômico $T \in SU(4,1)$ tal que os autovalores são:

$$\tfrac{(3+\sqrt{5})}{2}e^{i\pi/5}, \tfrac{(3-\sqrt{5})}{2}e^{i\pi/5}, -e^{i\pi/5}, -e^{i\pi/5}, -e^{i\pi/5}\ .$$

Temos que neste caso o traço de T é 0, mas no polinômio característico de T existem coeficientes que não são reais. Assim, pelo Lema 3.9 temos que o polinômio característico de T não é auto-dual, e consequentemente T não é reversível em $U(4,1)$. Então, para $n \geq 4$ temos que a recíproca do Corolário 3.10 não é verdadeira. Entretanto, veremos no próximo lema que para $n = 2$ ou $n = 3$, a situação é um pouco melhor. Segue o lema.

Lema 3.11 *Seja $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$. Para $n = 2$ ou $n = 3$, seja $T \in SU(n,1)$ tal que o traço de T é real. Então o polinômio característico de T é auto-dual.*

Prova. Considere $n = 3$. Sejam $T \in SU(3,1)$ e λ_j os autovalores de T, para $j = 1,2,3,4$. Considere também $\tau = tr(T) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$, o traço de T. Como $T \in SU(3,1)$ temos que $det(T) = 1$. Assim, segue que

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = 1. \tag{3.2}$$

Dessa forma, temos que o polinômio característico de T tem a forma

$$p_T(x) = x^4 - a_3x^3 + a_2x^2 - a_1x + 1.$$

Agora, relacionando as raízes e os coeficientes do polinômio característico, temos pelas relações de Girard para polinômios de grau 4 que

$$\begin{aligned} a_3 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \tau \\ a_1 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 = \lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} + \lambda_3^{-1} + \lambda_4^{-1}\ , \end{aligned}$$

donde a última igualdade segue da igualdade 3.2. Pelo Lema 3.6, temos que para cada j, existe k tal que $\lambda_j = \overline{\lambda_k}^{-1}$, e consequentemente $\lambda_j^{-1} = \overline{\lambda_k}$. Assim, temos que $a_1 = \overline{\lambda_1} + \overline{\lambda_2} + \overline{\lambda_3} + \overline{\lambda_4} = \overline{\tau}$. Segue que o polinômio característico de T agora tem a forma

$$p_T(x) = x^4 - \tau x^3 + a_2x^2 - \overline{\tau}x + 1.$$

Veja que a_2 é real, pois, novamente usando as relações de Girard e a igualdade 3.2 temos

$$\begin{aligned} a_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4 \\ &= \lambda_3^{-1}\lambda_4^{-1} + \lambda_2^{-1}\lambda_4^{-1} + \lambda_2^{-1}\lambda_3^{-1} + \lambda_1^{-1}\lambda_4^{-1} + \lambda_1^{-1}\lambda_3^{-1} + \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1} \\ &= \overline{\lambda_1\lambda_2} + \overline{\lambda_1\lambda_3} + \overline{\lambda_1\lambda_4} + \overline{\lambda_2\lambda_3} + \overline{\lambda_2\lambda_4} + \overline{\lambda_3\lambda_4} \\ &= \overline{a_2}\ , \end{aligned}$$

ou seja, $a_2 = \overline{a_2}$. Como por hipótese temos que τ também é real, segue que os coeficientes do polinômio característico $p_T(x)$ são reais. Dessa forma, temos que as raízes de $p_T(x)$ ou são reais ou vêm em pares de conjugados complexos, ou seja, se λ é uma raiz de $p_T(x)$, então $\overline{\lambda}$ também será. De toda forma, temos pelo Lema 3.6 que se λ é uma raiz do polinômio característico, então $\overline{\lambda}^{-1}$ também o é, e com mesma multiplicidade. Segue que $\lambda^{-1} = \overline{(\overline{\lambda}^{-1})}$ é raiz do polinômio característico. Logo, o polinômio característico de T é auto-dual. Para $n = 2$ a prova é similar. Segue o resultado. ■

Para finalizar este trabalho de dissertação, enunciamos o próximo teorema, cuja demonstração segue imediatamente da aplicação do Teorema 3.4 e do Lema 3.11. Como consequência desse resultado, temos o Corolário 3.13.

Teorema 3.12 *Sejam $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ e T um elemento de $SU(n, 1)$.*

(i) Seja T loxodrômico. Então T é reversível em $SU(n, 1)$ se, e somente se, o polinômio característico de T tem coeficientes reais.

(ii) Seja T elíptico. Então T é reversível em $SU(n, 1)$ se, e somente se, o polinômio característico de T tem coeficientes reais e o autovalor de tipo negativo ou indefinido de T é 1 ou -1.

(iii) Seja $T = NA$ parabólico. Então T é reversível em $SU(n, 1)$ se, e somente se, o polinômio característico de T tem coeficientes reais, o autovalor nulo de T é 1 ou -1 e o polinômio mínimo de N é $(x - 1)^3$.

Prova. $(i) \Longrightarrow]$ Seja T um elemento loxodrômico e reversível em $SU(n, 1)$. Vimos no início deste capítulo que todo elemento reversível de $SU(n, 1)$ tem polinômio característico auto-dual. Segue do Lema 3.9 que T tem polinômio característico com coeficientes reais.

$\Longleftarrow]$ Suponha que o polinômio característico de T tem coeficientes reais. Assim, pelo Lema 3.9 temos que o polinômio característico de T é auto-dual. Como T é loxodrômico e o polinômio característico de T é auto-dual, pelo item (v) Teorema 3.4, temos que T é reversível em $SU(n, 1)$.

$(ii) \Longrightarrow]$ Seja T um elemento elíptico e reversível em $SU(n, 1)$. Vimos no início deste capítulo que todo elemento reversível de $SU(n, 1)$ tem polinômio característico auto-dual.

Assim, pelo Lema 3.9, temos que T tem polinômio característico com coeficientes reais. Segue do item (i) do Teorema 3.4 que o autovalor de tipo negativo ou indefinido de T é 1 ou -1.

$\Longleftarrow$] Suponha que o polinômio característico de T tem coeficientes reais. Assim, pelo Lema 3.9 temos que o polinômio característico de T é auto-dual. Como T é elíptico, o polinômio característico de T é auto-dual e o autovalor de tipo negativo ou indefinido de T é 1 ou -1, pelo item (i) do Teorema 3.4, temos que T é reversível em $SU(n,1)$.

(iii) $\Longrightarrow$] Seja $T = NA$ um elemento parabólico e reversível em $SU(n,1)$. Vimos no início deste capítulo que todo elemento reversível de $SU(n,1)$ tem polinômio característico auto-dual. Pelo Lema 3.9, temos que T tem polinômio característico com coeficientes reais. Agora, se T não é unipotente, segue do item (iv) do Teorema 3.4 que o autovalor nulo de T é 1 ou -1 e o polinômio mínimo de N é $(x-1)^3$.

$\Longleftarrow$] Suponha que o polinômio característico de T tem coeficientes reais. Assim, pelo Lema 3.9 temos que o polinômio característico de T é auto-dual. Como $T = NA$ é parabólico, o autovalor nulo de T é 1 ou -1, o polinômio característico de T é auto-dual, e o polinômio mínimo de N é $(x-1)^3$, para o caso em que T não é unipotente, temos pelo item (iv) do Teorema 3.4 que T é reversível em $SU(n,1)$. ■

Corolário 3.13 *Sejam $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ e T um elemento de $SU(n,1)$, para $n = 2$ ou $n = 3$.*

(i) Seja T loxodrômico. Então T é reversível em $SU(n,1)$ se, e somente se, o traço de T é real.

(ii) Seja T elíptico. Então T é reversível em $SU(n,1)$ se, e somente se, o traço de T é real e o autovalor de tipo negativo ou indefinido de T é 1 ou -1.

(iii) Seja $T = NA$ parabólico. Então T é reversível em $SU(n,1)$ se, e somente se, o traço de T é real, o autovalor nulo de T é 1 ou -1 e o polinômio mínimo de N é $(x-1)^3$.

Prova. (i) $\Longrightarrow$] Suponha T reversível. Então, pelo Corolário 3.10, temos que o traço de T é real.

$\Longleftarrow$] Suponha que o traço de T é real. Então, pelo Lema 3.11, o polinômio característico de T é auto-dual. Assim, como o polinômio característico de T é auto-dual e T é loxodrômico, temos pelo item (v) do Teorema 3.4 que T é reversível em $SU(n,1)$.

(ii) $\Longrightarrow$] Suponha T reversível. Então, pelo Corolário 3.10, temos que o traço de T é real. Por outro lado, como T é elíptico, reversível e tem polinômio característico auto-dual, temos pelo item (i) do Teorema 3.4 que o autovalor de tipo negativo ou indefinido de T é 1 ou -1.

$\Longleftarrow$] Suponha que o traço de T é real. Então, pelo Lema 3.11, o polinômio característico de T é auto-dual. Agora, como o autovalor de tipo negativo ou indefinido de T é 1 ou -1, o polinômio característico de T é auto-dual e T é elíptico, temos pelo item (i) do Teorema 3.4 que T é reversível em $SU(n,1)$.

(iii) $\Longrightarrow$] Suponha T reversível. Então, pelo Corolário 3.10, temos que o traço de T é real. Por outro lado, como T é parabólico, reversível e tem polinômio característico auto-dual, temos pelo item (iv) do Teorema 3.4, para o caso em que T não é unipotente, que o autovalor nulo de T é 1 ou -1 e o polinômio mínimo de N é $(x-1)^3$.

$\Longleftarrow$] Suponha que o traço de T é real. Então, pelo Lema 3.11, o polinômio característico de T é auto-dual. Agora, como T é parabólico, tem polinômio característico auto-dual, o autovalor nulo de T é 1 ou -1 e o polinômio mínimo de N é $(x-1)^3$, temos pelo item (iv) do Teorema 3.4, para o caso em que T não é unipotente, que T é reversível em $SU(n,1)$. ■

Referências Bibliográficas

[1] Chen, S. S.; Greenberg, L. Hyperbolic spaces. *Contributions to analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers)*, pp. $49-87$. Academic Press, New York, 1974.

[2] Choi, H. Product of two involutions in complex and real hyperbolic geometry, (preprint), *summary available in Abstract of the Korean mathematics Society*, no. 1 (2007).

[3] Comerford, Leo P., Jr. Real elements in small cancellation groups. *Math. Ann.* **208** (1974), $279-293$.

[4] Djokovic, D. Z. The product of two involutions in the unitary group of a hermitian form. *Indiana Univ. Math. J.* **21** 1971/1972, $449-456$.

[5] Ellers, Erich W. Bireflectionality in classical groups. *Canad. J. Math.* **29** (1977), no. 6, $1157-1162$.

[6] Ellers, Erich W. Bireflectionality of orthogonal and symplectic groups of characteristic 2. *Arch. Math. (Basel)* **73** (1999), no. 6, $414-418$.

[7] Ellers, Erich W. Cyclic decomposition of unitary spaces. *J. Geom.* **21** (1983), no. 2, $101-107$.

[8] Ellers, Erich W.; Frank, R.; Nolte, W. Bireflectionality of the weak orthogonal and the weak symplectic groups. *J. Algebra* **88** (1984), no. 1, $63-67$.

[9] Falbel, Elisha; Zocca, Valentino. A Poincaré's polyhedron theorem for complex hyperbolic geometry. *J. Reine Angew. Math.* **516** (1999), $133-158$.

[10] Feit, Walter; Zuckerman, Gregg J. Reality properties of conjugacy classes in spin groups and symplectic groups. *Algebraists' homage: papers in ring theory and related topics (New Haven, Conn., 1981)*, pp. 239 – 253, Contemp. Math., **13**, *Amer. Math. Soc., Providence, R.I.*, 1982.

[11] FENCHEL, W. Elementary geometry in hyperbolic space. With an editorial by Heinz Bauer. de Gruyter Studies in Mathematics, 11. *Walter de Gruyter & Co., Berlin*, 1989. $XII + 225$ pp.

[12] GOLDMAN, W. M.(1-MD) Complex hyperbolic geometry. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. *The Clarendon Press*, *Oxford University Press*, *New York*, 1999. $XX + 316$ pp.

[13] Gongopadhyay, Krishnendu. Conjugacy classes in Möbius groups. *Geom. Dedicata* **151** (2011), no. 1, 245 – 258.

[14] Gongopadhyay, Krishnendu; Kulkarni, R. S. z-Classes of isometries of the hyperbolic space. *Conform. Geom. Dyn.* **13** (2009), 91 – 109.

[15] Gongopadhyay, Krishnendu; Parker, John R. Reversible complex hyperbolic isometries. *Linear Algebra Appl.* **438** (2013), no. 6, 2728 – 2739.

[16] Gow, R. Products of two involutions in classical groups of characteristic 2. *J. Algebra.* **71** (1981), no. 2, 583 – 591.

[17] Knüppel, Frieder; Nielsen, Klaus. On products of two involutions in the orthogonal group of a vector space. *Linear Algebra Appl.* **94** (1987), 209 – 216.

[18] Knüppel, Frieder; Nielsen, Klaus. Products of involutions in $O^+(V)$. *Linear Algebra Appl.* **94** (1987), 217 – 222.

[19] Knüppel, Frieder; Thomsen, Gerd. Involutions and commutators in orthogonal groups. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **65** (1998), no. 1, 1 – 36.

[20] KOSTRIKIN, A. I.; MANIN, Y. I. Linear algebra and geometry. Translated from the second Russian (1986) edition by M. E. Alferieff. Revised reprint of the 1989 English

edition. Algebra, Logic and Applications, 1. *Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam*, 1997. $X + 308$ pp.

[21] Lávička, R.; O'Farrell, A. G.; Short, I. Reversible maps in the group of quaternionic Möbius transformations. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **143** (2007), no. 1, $57 - 69$.

[22] MOEGLIN, C.; VIGNÉRAS, Marie-France; WALDSPURGER, Jean-Loup. Correspondances de Howe sur un corps p-adique. Lecture Notes in Mathematics, **1291**. *Springer-Verlag, Berlin*, 1987. $VIII + 163$ pp.

[23] JACOBSON, N. Lectures in abstract algebra. New York: D. Van Nostrand Company, $1951 - 1964$. Vol.2.

[24] Nielsen, Klaus. On bireflectionality and trireflectionality of orthogonal groups. *Linear Algebra Appl.* **94** (1987), $197 - 208$.

[25] R. Parker, John. *Notes on complex hyperbolic geometry.* 16 de jun de 2010. Notas de Aula - University of Durham.

[26] Santana, J. D. *Fórmulas de Distância no Espaço Hiperbólico Complexos.* 2014. 72 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2014.

[27] Short, I. Reversible maps in isometry groups of spherical, Euclidian and hyperbolic space. *Math. Proc. R. Ir. Acad.* **108** (2008), no. 1, $33 - 46$.

[28] Singh, Anupam; Thakur, Maneesh. Reality properties of conjugacy classes in algebraic groups. *Israel J. Math.* **165** (2008), $1 - 27$.

[29] Singh, Anupam; Thakur, Maneesh. Reality properties of conjugacy classes in G_2. *Israel J. Math.* **145** (2005), $157 - 192$.

[30] Tiep, Pham Huu; Zalesski, A. E. Real conjugacy classes in algebraic groups and finite groups of Lie type. *J. Group Theory* **8** (2005), no. 3, $291 - 315$.

[31] Wonenburger, María J. Transformations which are products of two involutions. *J. Math. Mech.* **16** 1966, $327 - 338$.