



Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Curso de Pós Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Superfícies Isoperimétricas e a Conjectura de Willmore no 3-Espaço Projetivo Real

Aluno: Yuri Juan Balcona Mamani

Orientador: Prof. Dr. Ezequiel Rodrigues Barbosa

Belo Horizonte - Brasil
2016

Superfícies Isoperimétricas e a Conjectura de Willmore no 3-Espaço Projetivo Real

Yuri Juan Balcona Mamani

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Ezequiel Rodrigues Barbosa - Orientador (UFMG)

Prof. Dr. Emerson Alves Mendonça de Abreu (UFMG)

Prof. Dr. Julian Eduardo Haddad (UFMG)

*En matemática uno no entiende las cosas,
se acostumbra a ellas.*

Jonh Von Neumann

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado força, saúde, coragem e determinação diante de tantas dificuldades que a vida nos oferece.

Aos meus pais Lourdes Simona Mamani Benito e Hector Balcona Cuno pelo amor, carinho e dedicação.

Agradeço a Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais que me acolheram e contribuíram para minha formação, em especial aos professores da Pós-Graduação em Matemáticas, aos colegas e amigos do mestrado em Matemáticas da UFMG.

Agradeço também a meu amigo Bruno Mendes Rodrigues pela leitura deste trabalho, corrigindo vários erros gramaticais.

Ao meu orientador, Prof. Ezequiel Rodrigues Barbosa, pela sua orientação, confiança, determinação e por acreditar que eu seria capaz de ir até o final deste trabalho.

Finalmente, agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior) pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudaremos a prova da conjectura de Willmore no espaço projetivo real $\mathbb{R}\mathbb{P}^3(1)$, feito por A. Ross [24], que nos diz, para qualquer toro Σ imerso no espaço projetivo real $\mathbb{R}\mathbb{P}^3(1)$ com curvatura média H , tem-se

$$\int_{\Sigma} (1 + H^2) dA \geq \pi^2,$$

e a igualdade é válida se, e somente se, Σ é o toro de Clifford mínimo. Em termos de superfícies imersas na esfera $\mathbb{S}^3(1)$, o resultado diz que a conjectura de Willmore é válida para qualquer toro Σ imerso na esfera unitária $\mathbb{S}^3(1)$ invariante sob a aplicação antípoda.

Abstract

In this paper, we study the proof of the Willmore conjecture in the real projective space $\mathbb{RP}^3(1)$, made by A. Ross [24], which tells us for any torus Σ immersed in the real projective space $\mathbb{RP}^3(1)$ with mean curvature H we have that

$$\int_{\Sigma} (1 + H^2) dA \geq \pi^2$$

and that the equality is true if and only if Σ is the minimal Clifford torus. In terms of immersed surfaces in $\mathbb{S}^3(1)$, this result says that the Willmore conjecture is true for immersed tori in $\mathbb{S}^3(1)$ invariant under the antipodal map.

Índice

Introdução	8
1 Preliminares	10
1.1 Teoria básica da Geometria Riemanniana	10
1.1.1 Variedades Diferenciáveis	10
1.1.2 Campos Vetoriais e Tensoriais	14
1.1.3 Métricas e Conexões Riemannianas	20
1.1.4 Curvatura	25
1.1.5 Imersões Isométricas	27
1.2 O Toro de Clifford	33
1.2.1 Métrica e Volume do Toro de Clifford	34
1.3 Espaços de Recobrimento	35
2 Problema Isoperimétrico e Superfícies Isoperimétricas	38
2.1 O Problema Isoperimétrico para uma Região	38
2.1.1 Superfícies Estáveis	40
3 A Conjetura de Willmore no Espaço Projetivo Real	44
3.1 Invariância Conforme	44
3.2 Demonstração do Teorema Principal	52
Referências Bibliográficas	63

Introdução

Em 27 de Fevereiro de 2012, os matemáticos Fernando Codá Marques e André Neves anunciaram uma solução da chamada *Conjectura de Willmore*. A conjectura foi proposta em 1965 pelo matemático inglês Thomas Willmore, [31], e nos diz que qualquer toro Σ imerso no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 satisfaz a desigualdade

$$\int_{\Sigma} H^2 dA \geq 2\pi^2,$$

onde H é a curvatura média de Σ , e a igualdade é válida se, e somente se, Σ é a imagem conforme de qualquer toro de Clifford mínimo imerso em $\mathbb{S}^3(1)$ (via projeção estereográfica). Por outro lado, se $\pi : \mathbb{S}^3(1) - \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ denota a projeção estereográfica e $\Sigma \subset \mathbb{S}^3(1) - \{p\}$ é uma superfície fechada tal que $\pi(\Sigma) = \tilde{\Sigma}$, então

$$\int_{\tilde{\Sigma}} \tilde{H}^2 d\tilde{A} = \int_{\Sigma} (1 + H^2) dA,$$

onde \tilde{H} e H são as curvaturas médias de $\tilde{\Sigma} \subset \mathbb{R}^3$ e $\Sigma \subset \mathbb{S}^3(1)$, respectivamente. Donde podemos definir o *funcional energia de Willmore* de $\Sigma \subset \mathbb{S}^3(1)$ por

$$\mathcal{W}(\Sigma) = \int_{\Sigma} (1 + H^2) dA.$$

Esta energia é muito interessante porque tem a notável propriedade de ser invariante sob transformações conformes de $\mathbb{S}^3(1)$.

O presente trabalho tem por objetivo estudar algumas propriedades das superfícies isoperimétricas e expor a resolução da conjectura de Willmore para qualquer toro (imerso) na esfera $\mathbb{S}^3(1)$ que é invariante sob aplicações antipodais, ou equivalentemente, achar o mínimo do *funcional energia de Willmore* para o toro imerso no 3-espaço projetivo real $\mathbb{RP}^3(1)$. Mas precisamente, veremos que

Se Σ é um toro imerso em $\mathbb{RP}^3(1)$, então $\int_{\Sigma} (1 + H^2) dA \geq \pi^2$, e a igualdade é válida se, e somente se, Σ é o toro de Clifford mínimo.

De fato, estudaremos a desigualdade anterior para qualquer superfície fechada, orientável de gênero $g \geq 1$ imersa no espaço projetivo real $\mathbb{RP}^3(1)$. Em termos de superfícies imersas na esfera $\mathbb{S}^3(1)$, o resultado diz que

Se Σ é um toro imerso na esfera $\mathbb{S}^3(1)$ invariante pela aplicação antipodal, então $\int_{\Sigma}(1 + H^2)dA \geq 2\pi^2$, e a igualdade é válida se, e somente se, Σ é o toro de Clifford mínimo.

Esta dissertação está dividida em três capítulos. No primeiro capítulo, faremos uma breve introdução à Geometria Riemanniana e daremos alguns conceitos básicos de espaços de recobrimento com o intuito de fixar a notação e a terminologia para os capítulos subsequentes.

No segundo capítulo faremos uma breve descrição da teoria de superfícies isoperimétricas, a qual usaremos como ferramenta para provar o teorema principal deste trabalho. Finalmente, no último capítulo, faremos o desenvolvimento da prova da conjectura de Willmore no espaço projetivo real, nossa principal referência para este capítulo foi o trabalho de A. Ross [24].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos os principais requisitos que serão usados neste trabalho. Não temos o intuito de fazer uma exposição sistemática nem completa desses preliminares. Sempre que for possível, damos as indicações bibliográficas necessárias para que o leitor encontre as demonstrações aqui omitidas. De um modo geral, as referências para este capítulo são [7], [11], [17], [18], [20], [21], e as notas de aula do Professor Rodney Josué Biezuner.

1.1 Teoria básica da Geometria Riemanniana

1.1.1 Variedades Diferenciáveis

A noção de variedades diferenciáveis é necessária para estender os métodos do Cálculo Diferencial a espaços mais gerais que o \mathbb{R}^n . Assim como os espaços topológicos formam o domínio natural das funções contínuas, as variedades diferenciáveis são o domínio natural das aplicações diferenciáveis.

Ao longo deste trabalho a palavra diferenciável significará sempre de classe C^∞ .

Definição 1.1.1. *Seja M um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável. Um **atlas** de dimensão n para M é uma família*

$$\Phi = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow M\}_{\alpha \in \Lambda}$$

de aplicações contínuas tais que $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha)$ é um homeomorfismo de um aberto $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ sobre um aberto $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ de M para cada $\alpha \in \Lambda$, satisfazendo as seguintes condições:

(a) *Os abertos $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ cobrem M , isto é*

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \varphi_\alpha(U_\alpha) = M$$

(b) Para todos os índices $\alpha, \beta \in \Lambda$, com $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) = V_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, as aplicações

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha : \varphi_\alpha^{-1}(V_{\alpha\beta}) \rightarrow \varphi_\beta^{-1}(V_{\alpha\beta})$$

$$\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta : \varphi_\beta^{-1}(V_{\alpha\beta}) \rightarrow \varphi_\alpha^{-1}(V_{\alpha\beta})$$

são diferenciáveis.

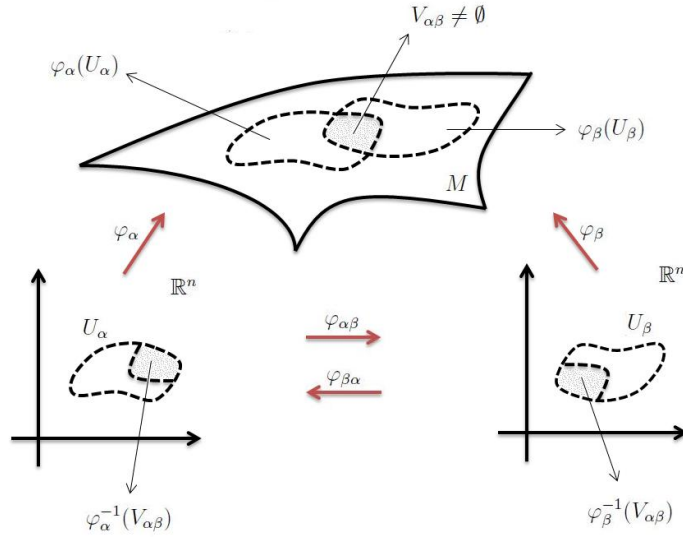


Figura 1.1:

Cada aplicação φ_α é chamada uma *parametrização* ou carta local de uma vizinhança de M , e $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ é chamada uma *vizinhança coordenada*.

Se $p = \varphi_\alpha(x^1, \dots, x^n)$, então x^1, \dots, x^n são chamadas as *coordenadas* de p na parametrização φ_α . Por esse motivo, a aplicação φ_α também é chamada um *sistema de coordenadas locais*.

Um *atlas* diferenciável Φ , sobre M , é dito *maximal* se, além das condições da definição de atlas, estiverem satisfeitas ainda esta:

(c) Se $\varphi_\gamma : U_\gamma \rightarrow M$ é um homeomorfismo de um aberto $U_\gamma \subset \mathbb{R}^n$, sobre $\varphi_\gamma(U_\gamma)$ de M , de modo que para todo sistema de coordenadas $\varphi_\alpha \in \Phi$, com $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\gamma(U_\gamma) = V_{\alpha\gamma} \neq \emptyset$, se tenha que

$$\varphi_\gamma^{-1} \circ \varphi_\alpha : \varphi_\alpha^{-1}(V_{\alpha\gamma}) \rightarrow \varphi_\gamma^{-1}(V_{\alpha\gamma})$$

seja diferenciável.

Uma *estrutura diferenciável* para M é um atlas maximal.

Definição 1.1.2. Uma *variedade diferenciável* de dimensão n , é um espaço topológico de Hausdorff M , com base enumerável, munido de uma estrutura diferenciável de dimensão n .

Para denotar que M é uma variedade de dimensão n usaremos às vezes a notação M^n .

Exemplo 1.1.1. A esfera $\mathbb{S}^n(1)$ definida como

$$\mathbb{S}^n(1) = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = 1\},$$

é uma variedade diferenciável.

Com efeito, sejam $N = (0, 0, \dots, 0, 1)$ e $S = (0, 0, \dots, 0, -1)$ os pólos norte e sul de $\mathbb{S}^n(1) = \mathbb{S}^n$, respectivamente. Observe que os conjuntos U_N e U_S são abertos em \mathbb{S}^n , tais que $\mathbb{S}^n = U_N \cup U_S$, onde $U_N = \mathbb{S}^n - \{N\}$ e $U_S = \mathbb{S}^n - \{S\}$, defina as aplicações φ_N e φ_S por

$$\begin{aligned} \varphi_N : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \varphi_N(\mathbb{R}^n) = U_N \\ x = (x^1, \dots, x^n) &\mapsto \left(\frac{2x^1}{1+\|x\|^2}, \dots, \frac{2x^n}{1+\|x\|^2}, \frac{\|x\|^2-1}{1+\|x\|^2} \right) \\ \varphi_S : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \varphi_S(\mathbb{R}^n) = U_S \\ x = (x^1, \dots, x^n) &\mapsto \left(\frac{2x^1}{1+\|x\|^2}, \dots, \frac{2x^n}{1+\|x\|^2}, \frac{1-\|x\|^2}{1+\|x\|^2} \right) \end{aligned}$$

são chamadas de projeção estereográfica norte e sul, e suas respectivas inversas são definidas por

$$\begin{aligned} \varphi_N^{-1} : \quad U_N &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x^1, \dots, x^{n+1}) &\mapsto \frac{1}{1-x^{n+1}}(x^1, \dots, x^n) \\ \varphi_S^{-1} : \quad U_S &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x^1, \dots, x^{n+1}) &\mapsto \frac{1}{1+x^{n+1}}(x^1, \dots, x^n). \end{aligned}$$

Observe que $\varphi_N(\mathbb{R}^n) \cap \varphi_S(\mathbb{R}^n) = \mathbb{S}^n - \{N, S\} \neq \emptyset$, donde as aplicações

$$\begin{aligned} \varphi_S^{-1} \circ \varphi_N : \quad \varphi_N^{-1}(\mathbb{S}^n - \{N, S\}) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x = (x^1, \dots, x^n) &\mapsto \left(\frac{x^1}{\|x\|^2}, \dots, \frac{x^n}{\|x\|^2} \right) \\ \varphi_N^{-1} \circ \varphi_S : \quad \varphi_S^{-1}(\mathbb{S}^n - \{N, S\}) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x = (x^1, \dots, x^n) &\mapsto \left(\frac{x^1}{\|x\|^2}, \dots, \frac{x^n}{\|x\|^2} \right) \end{aligned}$$

são funções diferenciáveis. Logo, a estrutura diferenciável para \mathbb{S}^n é dada por

$$\Phi = \{\varphi_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n\}_{\alpha \in \{N, S\}},$$

e pelo fato de que \mathbb{S}^n é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável, conclui-se que \mathbb{S}^n é uma variedade diferenciável.

Exemplo 1.1.2. (O espaço projetivo real $\mathbb{RP}^n(1)$). Seja $\mathbb{RP}^n(1)$, o conjunto das retas de \mathbb{R}^{n+1} que passam pela origem.

Vamos introduzir em $\mathbb{RP}^n(1)$ uma estrutura diferenciável. Para isto, sejam $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ e observe, inicialmente, que $\mathbb{RP}^n(1)$ pode ser considerado como o espaço quociente de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ pela relação de equivalência:

$$x \sim \bar{x} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \text{tal que} \quad \bar{x} = \lambda x,$$

os pontos de $\mathbb{RP}^n(1)$ serão indicados por $[x^1, \dots, x^{n+1}]$, onde $(x^1, \dots, x^{n+1}) = x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Observe que se $x^i \neq 0$,

$$[x^1, \dots, x^{n+1}] = \left[\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, 1, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right].$$

Definamos em $\mathbb{RP}^n(1)$ subconjuntos V_1, \dots, V_{n+1} , dados por:

$$V_i = \{[x^1, \dots, x^{n+1}]; x^i \neq 0\}, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Geometricamente, V_i é o conjunto das retas do \mathbb{R}^{n+1} que passam pela origem e não pertencem ao hiperplano $x^i = 0$. Vamos mostrar que podemos tomar os V_i 's como vizinhanças coordenadas, onde as coordenadas em V_i são

$$y^1 = \frac{x^1}{x^i}, \dots, y^{i-1} = \frac{x^{i-1}}{x^i}, y^i = \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, y^n = \frac{x^{n+1}}{x^i}.$$

Para isto, definamos as aplicações

$$\begin{aligned} \varphi_i : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow V_i \\ (y^1, \dots, y^n) &\mapsto [y^1, \dots, y^{i-1}, 1, y^i, \dots, y^n], \end{aligned}$$

e mostremos que $\Psi = \{\varphi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow V_i\}_{i \in \{1, \dots, n+1\}}$ é uma estrutura diferenciável, sobre $\mathbb{RP}^n(1)$.

Com efeito, cada aplicação φ_i é biunívoca e

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} \varphi_i(\mathbb{R}^n) = \mathbb{RP}^n(1).$$

Resta mostrar que $\varphi_i^{-1}(V_i \cap V_j)$ é aberto em \mathbb{R}^n e $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ é aí diferenciável, $j = 1, \dots, n+1$. Como os pontos de $\varphi_i^{-1}(V_i \cap V_j)$ são da forma:

$$\{(y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n; y^j \neq 0\}.$$

Portanto $\varphi_i^{-1}(V_i \cap V_j)$ é aberto em \mathbb{R}^n , e, supondo $i > j$ (o caso $i < j$ é análogo),

$$\begin{aligned} \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i(y^1, \dots, y^n) &= \varphi_j^{-1}[y^1, \dots, y^{i-1}, 1, y^i, \dots, y^n] \\ &= \varphi_j^{-1} \left[\frac{y^1}{y^j}, \dots, \frac{y^{j-1}}{y^j}, 1, \frac{y^{j+1}}{y^j}, \dots, \frac{y^{i-1}}{y^j}, \frac{1}{y^j}, \frac{y^i}{y^j}, \dots, \frac{y^n}{y^j} \right] \\ &= \left(\frac{y^1}{y^j}, \dots, \frac{y^{j-1}}{y^j}, \frac{y^{j+1}}{y^j}, \dots, \frac{y^{i-1}}{y^j}, \frac{1}{y^j}, \frac{y^i}{y^j}, \dots, \frac{y^n}{y^j} \right), \end{aligned}$$

são funções diferenciáveis. Logo, a estrutura diferenciável para $\mathbb{R}\mathbb{P}^n(1)$ é dada por Ψ , e considerando $\mathbb{R}\mathbb{P}^n(1)$ com a topologia quociente. O espaço $\mathbb{R}\mathbb{P}^n(1)$ com esta topologia é Hausdorff e compacto, sendo denominado espaço projetivo real de dimensão n .

Definição 1.1.3. Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Dizemos que uma aplicação $F : M_1 \rightarrow M_2$ é **diferenciável** em $p \in M_1$ se dada uma parametrização $\tilde{\varphi} : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M_2$ em $F(p)$ existe uma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$ em p tal que $F(\varphi(U)) \subset \tilde{\varphi}(V)$ e a aplicação

$$\tilde{\varphi}^{-1} \circ F \circ \varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $\varphi^{-1}(p)$. F é diferenciável em um aberto de M_1 se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Definição 1.1.4. Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\psi : M \rightarrow N$ é uma **imersão** se $d\psi_p : T_p M \rightarrow T_{\psi(p)} N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se, além disto, ψ é um homeomorfismo sobre $\psi(M) \subset N$, onde $\psi(M)$ tem a topologia induzida por N , diz-se que ψ é um **mergulho**. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow N$ é um mergulho, diz-se que M é uma **subvariedade** de N .

Seja M uma variedade diferenciável e $\Phi = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow M\}_{\alpha \in \Lambda}$ seu atlas maximal. Considere uma cobertura enumerável por abertos $\varphi_n(U_n) = V_n$ da variedade M . Dizemos que esta cobertura é localmente finita se todo ponto de M admite uma vizinhança que intercepta apenas um número finito de V_n 's.

Definição 1.1.5. Uma **partição da unidade subordinada à cobertura** (V_i) é uma coleção enumerável de funções reais diferenciáveis $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots : M \rightarrow \mathbb{R}$ não negativas, definidas em M tais que:

- (1) O suporte de ξ_i está contido em V_i . Lembramos que o suporte de uma função é o fecho do conjunto de pontos onde a função não se anula.
- (2) $\sum_i \xi_i(p) = 1$, para todo $p \in M$.

1.1.2 Campos Vetoriais e Tensoriais

Definição 1.1.6. Sejam $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável com $\gamma(t_0) = p$ e

$$C_p^\infty(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é diferenciável em } p \in M\}$$

o espaço vetorial das funções reais em M diferenciáveis em p . O **vetor tangente** à curva γ em p é a função $\gamma'(t_0) : C_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\gamma'(t_0)f = (f \circ \gamma)'(t_0).$$

Nota: Se na definição acima, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável para todo $p \in M$, então indicaremos, para simplificar a notação, $C_p^\infty(M)$ simplesmente por $C^\infty(M)$.

Proposição 1.1.1. O vetor tangente $v_p : C_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a propriedade

$$v_p(fg) = v_p(f)g(p) + f(p)v_p(p)$$

Demonstração. Seja $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ uma curva diferenciável com $\gamma(t_0) = p$. Então

$$\begin{aligned}\gamma'(t_0)(fg) &= ((fg) \circ \gamma)'(t_0) \\ &= ((f \circ \gamma)'(t_0)(g \circ \gamma)(t_0) + (f \circ \gamma)(t_0)(g \circ \gamma)'(t_0)) \\ &= [\gamma'(t_0)f]g(p) + f(p)[\gamma'(t_0)g].\end{aligned}$$

□

Definição 1.1.7. Seja M uma variedade diferenciável. O conjunto dos vetores tangentes a um ponto $p \in M$ é chamado o **espaço tangente** a M em p e denota por T_pM .

Observação 1.1.1. O espaço tangente T_pM é um espaço vetorial n -dimensional, onde n é a dimensão de M .

Denote por $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica de \mathbb{R}^n . Seja $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset M$ uma parametrização de uma vizinhança V de $p = \varphi(x) \in V$, então denotando

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p = d\varphi_x(e_i),$$

segue que

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p$$

formam uma base para T_pM que é a *base coordenada* associada à parametrização φ , muitas vezes denotaremos $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$ por $\partial_i(p)$.

Observe que, se $f \in C_p^\infty(M)$, então

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p (f) = d\varphi_x(e_1)(f) = \frac{(f \circ \varphi)}{\partial x^1}(x).$$

Definição 1.1.8. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n com um atlas

$$\Phi = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow M\}_{\alpha \in \Lambda}$$

diferenciável. O **fibrado tangente** de M é a variedade diferenciável de dimensão $2n$

$$TM = \{(p, v); p \in M \text{ e } v \in T_pM\}$$

com um atlas $\Psi = \{\psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM\}_{\alpha \in \Lambda}$ definido por

$$\psi_\alpha(x, \xi^1, \dots, \xi^n) = \left(\varphi_\alpha(x), \sum_{i=1}^n \xi^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x \right).$$

Definição 1.1.9. Um **campo de vetores** X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X_p \in T_pM$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM .

Em termos de coordenadas locais, se $\mathcal{B} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$ é a base do espaço tangente $T_p M$ associada a uma parametrização $\varphi : U \rightarrow M$ para pontos $p \in \varphi(U)$, então

$$X_p = \sum_{i=1}^n X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p,$$

é o campo vetorial X e diferenciável em $\varphi(U)$ se, e somente se, as funções coordenadas X^1, \dots, X^n são diferenciáveis em $\varphi(U)$.

Outra forma de ver um campo vetorial diferenciável em M é como uma aplicação que associa a cada função $f \in C^\infty(M)$ uma outra função $Xf \in C^\infty(M)$ através da expressão

$$(Xf)(p) = X_p f,$$

onde $X_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ é um vetor tangente.

Definição 1.1.10. *Seja M uma variedade diferenciável. um **campo vetorial** diferenciável em M é uma aplicação $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ que satisfaz as seguintes propriedades*

- (a) X é linear: $X(\alpha f + \beta g) = \alpha Xf + \beta Xg$, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f, g \in C^\infty(M)$,
- (b) X satisfaz a regra do produto: $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$, para todos $f, g \in C^\infty(M)$.

Agora denotemos o *espaço vetorial dos campos vetoriais* diferenciáveis em M por $\mathfrak{X}(M)$, isto é,

$$\mathfrak{X}(M) = \{X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M); X \text{ é um campo vetorial diferenciável em } M\}$$

Definição 1.1.11. *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. O **colchete de Lie** de X e Y é definido por*

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Observação 1.1.2. *O colchete de Lie é um campo vetorial, isto é,*

$$\begin{aligned} [X, Y] : M &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto [X, Y]_p \end{aligned}$$

logo $[X, Y]_p \in T_p M$. Então

$$\begin{aligned} [X, Y]_p : C^\infty(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longrightarrow [X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf). \end{aligned}$$

Definição 1.1.12. *Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita e V^* seu espaço dual. Um **k -tensor covariante** em V (ou **tensor covariante de ordem k**) é uma função real k -linear*

$$T : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-vezes}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Um *l-tensor contravariante* em V é uma função real *l-linear*

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{l\text{-vezes}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Um **tensor de tipo** (k, l) é um tensor k -covariante e l -contravariante, isto é, uma função real multilinear

$$T : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-vezes}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{l\text{-vezes}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

O espaço vetorial real dos k -tensores covariantes sobre V será denotado por $T^k(V)$; o espaço vetorial dos l -tensores contravariantes sobre V será denotado por $T_l(V)$ e o espaço vetorial dos tensores de tipo (k, l) sobre V será denotado por $T_l^k(V)$.

Algumas identificações naturais

1. 0-tensor são números reais: $T^0(V) = \mathbb{R}$,
2. tensores do tipo $(k, 0)$ são k -tensores covariantes: $T_0^k(V) = T^k(V)$,
3. tensores do tipo $(0, l)$ são l -tensores contravariantes: $T_l^0(V) = T_l(V)$,
4. 1-tensores covariantes são covetores: $T^1(V) = V^*$,
5. 1-tensores contravariante são vetores: $T_1(V) = V^{**} = V$.

Definição 1.1.13. Sejam T e S tensores de tipos (k, l) e (p, q) , respectivamente. Seu **produto tensorial** é o tensor $T \otimes S$ do tipo $(k + p, l + q)$ definido por

$$(T \otimes S)(v_1, \dots, v_{k+p}, \omega^1, \dots, \omega^{l+q}) = T(v_1, \dots, v_k, \omega^1, \dots, \omega^l) S(v_{k+1}, \dots, v_{k+p}, \omega^{l+1}, \dots, \omega^{l+q}).$$

Exemplo 1.1.3. Sejam ω^1, ω^2 dois covetores (1-tensores covariantes). Então

$$\omega^1 \otimes \omega^2(v_1, v_2) = \omega^1(v_1) \cdot \omega^2(v_2)$$

é um 2-tensor covariante (uma forma bilinear).

Definição 1.1.14. Seja M uma variedade diferenciável e $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi(U)$ uma parametrização de uma vizinhança de um ponto $p \in M$. A base coordenada

$$\mathcal{B}_p = \left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p \right\}$$

do espaço tangente $T_p M$ associada à parametrização φ dá origem a uma **base dual coordenada** para o espaço cotangente $T_p^* M$ associada à parametrização φ que denotamos por

$$\mathcal{B}_p^* = \{dx^1|_p, \dots, dx^n|_p\}.$$

Observação 1.1.3. Se $\mathcal{B}_p = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$ é a base para o espaço vetorial $T_p M$ e $\mathcal{B}_p^* = \{dx^1|_p, \dots, dx^n|_p\}$ a base dual de $T_p^* M$, então

$$dx^i|_p \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Exemplo 1.1.4. Sejam M uma variedade diferenciável e $u, v \in T_p M$, escrevendo u, v em coordenadas locais temos

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^n u^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\ v &= \sum_{j=1}^n v^j(p) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p, \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} dx^i|_p(u) &= \sum_{k=1}^n u^k(p) dx^i|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p \right) \\ &= \sum_{k=1}^n u^k(p) \delta_{ik} \\ &= u^i(p), \end{aligned}$$

logo $dx^i|_p(u) = u^i(p)$, similarmente, tem-se $dx^j|_p(u) = u^j(p)$. Daí pelo Exemplo 1.1.3, obtém-se

$$\begin{aligned} u^i(p) \cdot v^j(p) &= dx^i|_p(u) \cdot dx^j|_p(v) \\ &= (dx^i|_p \otimes dx^j|_p)(u, v), \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Definição 1.1.15. Sejam M uma variedade diferenciável. Para cada $p \in M$ definimos o **espaço tensorial tangente** $T_l^k(T_p M)$ a M em p . Seja $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi(U)$ uma parametrização de um ponto $p \in M$. A base coordenada

$$\mathcal{B}_p = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$$

do espaço tangente $T_p M$ associada à parametrização φ e sua respectiva base dual

$$\mathcal{B}_p^* = \{dx^1|_p, \dots, dx^n|_p\}$$

dão origem à **base coordenada** associada à parametrização φ para o espaço tensorial tangente $T_l^k(T_p M)$

$$(\mathcal{B}_l^k)_p = \left\{ dx^{i_1}|_p \otimes \dots \otimes dx^{i_k}|_p \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j^1}} \Big|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j^l}} \Big|_p \right\}_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n \\ 1 \leq j^1, \dots, j^l \leq n}}$$

Definição 1.1.16. *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n com um atlas $\Phi = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow M\}_{\alpha \in \Lambda}$. O **fibrado (k,l) -tensorial** de M é a variedade diferenciável de dimensão $n + n^{k+l}$*

$$T_l^k M = \{(p, T); p \in M \text{ e } T \in T_l^k(T_p M)\}$$

com um atlas

$$\Psi = \left\{ \psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^{n^{k+l}} \longrightarrow T_l^k T M \right\}_{\alpha \in \Lambda}$$

definido por

$$\begin{aligned} & \psi_\alpha \left(x, (T_{i_1, \dots, i_k}^{j^1, \dots, j^l})_{\substack{i_1, \dots, i_k=1, \dots, n \\ j^1, \dots, j^l=1, \dots, n}} \right) \\ &= \left(\varphi_\alpha(x), \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j^1, \dots, j^l=1}}^n T_{i_1, \dots, i_k}^{j^1, \dots, j^l} dx^{i_1}|_p \otimes \dots \otimes dx^{i_k}|_p \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j^1}} \Big|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j^l}} \Big|_p \right). \end{aligned}$$

Observação 1.1.4. *O fibrado (k,l) -tensorial de uma variedade M se pode definir também como*

$$T_l^k M := \coprod_{p \in M} T_l^k(T_p M),$$

onde \coprod denota união disjunta.

Definição 1.1.17. *Um **campo tensorial** é uma seção do fibrado tensorial. Um **campo tensorial diferenciável** é uma seção diferenciável do fibrado tensorial.*

Definição 1.1.18. *Um **campo (k,l) -tensorial** é uma aplicação diferenciável*

$$T : M \longrightarrow T_l^k M$$

tal que $\pi \circ T = id_M$, onde $\pi : T_l^k M \rightarrow M$ é a projeção canônica do fibrado (k,l) -tensorial de M sobre M .

Observação 1.1.5. *A Definição 1.1.18, é equivalente a dizer*

$$T_p = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j^1, \dots, j^l=1}}^n T_{i_1, \dots, i_k}^{j^1, \dots, j^l}(p) dx^{i_1}|_p \otimes \dots \otimes dx^{i_k}|_p \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j^1}} \Big|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j^l}} \Big|_p,$$

onde $T_{i_1, \dots, i_k}^{j^1, \dots, j^l} : V \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis para todos os índices e para todas as vizinhanças coordenadas de M .

O espaço vetorial dos campos (k,l) -tensoriais é denotado por $\mathcal{T}_l^k M$, isto é,

$$\mathcal{T}_l^k M = \{T : M \rightarrow T_l^k M; T \text{ é um campo } (k,l) \text{ - tensorial} \}.$$

1.1.3 Métricas e Conexões Riemannianas

Definição 1.1.19. *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n . Uma **métrica Riemanniana** em M é um campo 2-tensorial covariante diferenciável g , que é simétrico (isto é, $g_p(u, v) = g_p(v, u)$ para todos $u, v \in T_pM$) e positivo definido (isto é, $g_p(u, u) \geq 0$, se $u \neq 0$). Uma variedade diferenciável M com uma métrica Riemanniana g dada é chamada de **variedade Riemanniana**.*

Observação 1.1.6. $g \in \mathcal{T}_0^2M$, isto é,

$$\begin{aligned} g : M &\rightarrow T_0^2M \\ p &\mapsto g_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R} \\ &\quad (u, v) \rightarrow g_p(u, v) \end{aligned}$$

Notação: Na maioria das vezes a métrica Riemanniana será denotado por $g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$.

Em outras palavras, uma métrica Riemanniana em M é uma aplicação que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida)

$$g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$$

no espaço tangente T_pM .

Escrevendo o tensor métrico em coordenadas: Sejam $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset M$ uma parametrização de uma vizinhança V de M , $\mathcal{B}_p = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$ a base coordenada de T_pM associada a esta parametrização, para cada $p \in V$, e $\mathcal{B}_p^* = \{dx^1|_p, \dots, dx^n|_p\}$ a base dual para o espaço cotangente T_p^*M , logo

$$\begin{aligned} g_p : T_pM \times T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longrightarrow g_p(u, v) = \langle u, v \rangle_p \end{aligned}$$

escrevendo $u, v \in T_pM$ em coordenadas temos

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^n u^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\ v &= \sum_{j=1}^n v^j(p) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
g_p(u, v) &= \langle u, v \rangle_p \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n u^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \sum_{j=1}^n v^j(p) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right\rangle_p \\
&= \sum_{i,j=1}^n \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right\rangle_p u^i(p) \cdot v^j(p) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right\rangle_p dx^i|_p(u) \cdot dx^j|_p(v) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right\rangle_p (dx^i|_p \otimes dx^j|_p)(u, v).
\end{aligned}$$

Portanto, a métrica em coordenadas é dada por

$$g_p = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(p) dx^i|_p \otimes dx^j|_p,$$

onde as funções $g_{ij} : V \rightarrow \mathbb{R}$ são definidas por

$$g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right\rangle_p.$$

Observação 1.1.7. A métrica Riemanniana g é diferenciável no seguinte sentido: Se

$$\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset M$$

é uma parametrização de uma vizinhança V de M , $\mathcal{B}_p = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$ é a base coordenada de $T_p M$ associada a esta parametrização, para cada $p \in V$, e $\mathcal{B}_p^* = \{dx^1|_p, \dots, dx^n|_p\}$ é a base dual para o espaço $T_p^* M$, então as funções

$$\begin{aligned}
g_{ij} : V \subset M &\longrightarrow \mathbb{R} \\
p &\longrightarrow g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right\rangle_p
\end{aligned}$$

são diferenciáveis.

Sempre que for necessário denotaremos a variedade Riemanniana M junto com sua métrica Riemanniana g por (M, g) .

Exemplo 1.1.5. (Métrica para a esfera unitária $\mathbb{S}^n(1)$). Da projeção estereográfica definida no Exemplo 1.1.1, tem-se

$$\begin{aligned}
\varphi_N : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \varphi_N(\mathbb{R}^n) = U_N \\
x = (x^1, \dots, x^n) &\mapsto \left(\frac{2x^1}{1+\|x\|^2}, \dots, \frac{2x^n}{1+\|x\|^2}, \frac{\|x\|^2-1}{1+\|x\|^2} \right)
\end{aligned}$$

Daí

$$\frac{\partial \varphi_N^k}{\partial x^j}(x) = \begin{cases} \frac{2\delta_{kj}}{1+\|x\|^2} - \frac{4x^j x^k}{(1+\|x\|^2)^2} & \text{se } k \neq n+1 \\ \frac{4x^j}{(1+\|x\|^2)^2} & \text{se } k = n+1. \end{cases}$$

Segue-se, que as componentes do tensor métrico nas coordenadas dadas pela parametrização φ_N são

$$\begin{aligned} g_{ij}(x) &= \left\langle \frac{\partial \varphi_N}{\partial x^i}(x), \frac{\partial \varphi_N}{\partial x^j}(x) \right\rangle_{\varphi_N(x)} = \left\langle \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial \varphi_N^k}{\partial x^i}(x) e_k, \sum_{l=1}^{n+1} \frac{\partial \varphi_N^l}{\partial x^j}(x) e_l \right\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} \\ &= \sum_{k,l=1}^{n+1} \frac{\partial \varphi_N^k}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi_N^l}{\partial x^j} \langle e_k, e_l \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \sum_{k,l=1}^{n+1} \frac{\partial \varphi_N^k}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi_N^l}{\partial x^j} \delta_{kl} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial \varphi_N^k}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi_N^k}{\partial x^j} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{2\delta_{ki}}{1+\|x\|^2} - \frac{4x^i x^k}{(1+\|x\|^2)^2} \right) \left(\frac{2\delta_{kj}}{1+\|x\|^2} - \frac{4x^j x^k}{(1+\|x\|^2)^2} \right) + \frac{16x^i x^j}{(1+\|x\|^2)^4} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{4\delta_{ki}\delta_{kj}}{(1+\|x\|^2)^2} - \frac{8(\delta_{ki}x^j x^k + \delta_{kj}x^i x^k)}{(1+\|x\|^2)^3} + \frac{16x^i x^j (x^k)^2}{(1+\|x\|^2)^4} \right) + \frac{16x^i x^j}{(1+\|x\|^2)^4} \\ &= \frac{4\delta_{ij}}{(1+\|x\|^2)^2} - \frac{16x^i x^j}{(1+\|x\|^2)^3} + \frac{16x^i x^j \|x\|^2}{(1+\|x\|^2)^4} + \frac{16x^i x^j}{(1+\|x\|^2)^4} \\ &= \frac{4\delta_{ij}}{(1+\|x\|^2)^2} - \frac{16x^i x^j}{(1+\|x\|^2)^3} + \frac{16x^i x^j}{(1+\|x\|^2)^3} \\ &= \frac{4\delta_{ij}}{(1+\|x\|^2)^2}. \end{aligned}$$

Daí

$$g_{ij}(x) = \frac{4\delta_{ij}}{(1+\|x\|^2)^2}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Definição 1.1.20. Seja M^n uma variedade Riemanniana e $R \subset M$ uma região (= conjunto aberto e conexo) cujo fecho é compacto, tal que R está contida em uma vizinhança coordenada $\varphi(U)$ de uma parametrização $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset M$ e à fronteira de $\varphi^{-1}(R)$ tem medida nula em \mathbb{R}^n . O **volume** de R é definido por

$$\text{vol}(R) = \int_{\varphi^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \dots dx^n.$$

Se $R \subset M$ é um compacto, tome qualquer cobertura finita $\{V_i\}_{i=1, \dots, n}$ de R por vizinhanças parametrizadas de M e considere uma partição da unidade $\{\rho_i\}_{i=1, \dots, n}$ subordinada a esta cobertura; se $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$, $i = 1, \dots, n$ são parametrizações destas vizinhanças, definimos

$$\text{vol}(R) = \sum_{i=1}^n \int_{\varphi_i^{-1}(R)} \rho_i \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \dots dx^n.$$

Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua com suporte compacto R , definimos

$$\int_M f dV_g = \sum_{i=1}^n \int_{\varphi_i^{-1}(R)} f(\varphi_i^{-1}(x)) \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \dots dx^n.$$

Para o que se segue convém observar que $\mathfrak{X}(M)$ é um módulo sobre $C^\infty(M)$, isto é, $\mathfrak{X}(M)$ tem uma estrutura linear quando tomamos como escalares os elementos de $C^\infty(M)$.

Definição 1.1.21. *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n . Uma **conexão** ∇ em M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

denotada por $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- (a) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
- (b) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
- (c) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$.

Para todos os campos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e para todas as funções $f, g \in C^\infty(M)$. Dizemos que $\nabla_X Y$ é a **derivada covariante** do campo Y na direção de X .

O símbolo $\nabla_X Y$ deve ser interpretado como a derivada direcional do campo Y na direção X .

Observação 1.1.8. *Se ∇ é uma conexão em uma variedade diferenciável M , então $(\nabla_X Y)_p$ depende apenas do valor de X em p e do valor de Y ao longo de uma curva tangente a X_p .*

Seja M uma variedade Riemanniana com uma conexão ∇ . Se $\mathcal{B} = \{\partial_1(p), \dots, \partial_n(p)\}$ é uma base do espaço tangente $T_p M$, então

$$(\nabla_{\partial_i} \partial_j)(p) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(p) \partial_k(p), \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

Definição 1.1.22. *As funções diferenciáveis Γ_{ij}^k definidas pela expressão (1.1) são chamadas **símbolos de Christoffel** associados à parametrização particular utilizada.*

Observação 1.1.9. *Sejam M uma variedade Riemanniana com uma conexão ∇ e X, Y campos de vetores em $\mathfrak{X}(M)$, se $\mathcal{B}_p = \{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ é uma base coordenada do espaço tangente $T_p M$, então a expressão local para o campo $\nabla_X Y$ é*

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \left(X(Y^k) + \sum_{i,j=1}^n X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k.$$

Exemplo 1.1.6. *(Conexão Euclidiana). Identificando espaços tangentes em \mathbb{R}^n com o próprio \mathbb{R}^n , vetores tangentes com vetores de \mathbb{R}^n e campos vetoriais em \mathbb{R}^n com aplicações diferenciáveis $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a **conexão euclidiana** por*

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \\ (X, Y) &\longrightarrow (\nabla_X Y)_p = dY_p(X_p), \end{aligned}$$

ou seja, a derivada direcional do campo Y em p na direção de X_p . Observe que a conexão euclidiana satisfaz todas as condições da Definição 1.1.21. :

$$\begin{aligned} (\nabla_{fX+gY}Z)_p &= dZ_p [(fX + gY)_p] \\ &= dZ_p(f(p)X_p + g(p)Y_p) \\ &= f(p)dZ_p(X_p) + g(p)dZ_p(Y_p) \\ &= f(p)(\nabla_X Z)_p + g(p)(\nabla_Y Z)_p, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\nabla_X(Y + Z)]_p &= d(Y + Z)_p(X_p) = dY_p(X_p) + dZ_p(X_p) \\ &= (\nabla_X Y)_p + (\nabla_X Z)_p, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} [\nabla_X(fY)]_p &= d(fY)_p(X_p) = f(p)[dY_p(X_p)] + df_p(X_p)Y_p \\ &= f(p)(\nabla_X Y)_p + X(f)(p)Y_p. \end{aligned}$$

A Definição 1.1.21., não é tão transparente quanto a de estrutura Riemanniana. A seguinte proposição, no entanto, deverá esclarecer um pouco a situação.

Proposição 1.1.2. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão ∇ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c , denominado derivada covariante de V ao longo de c , tal que:*

$$(a) \quad \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}.$$

$$(b) \quad \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}(V) + f \frac{DV}{dt}, \quad \text{onde } W \text{ é um campo de vetores ao longo de } c \text{ e } f \text{ é uma função diferenciável em } I.$$

$$(c) \quad \text{Se } V \text{ é induzido por um campo de vetores } Y \in \mathfrak{X}(M), \text{ isto é, } V(t) = Y(c(t)), \text{ então } \frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y.$$

Demonstração. A demonstração da proposição pode ser encontrada em [11], Cap. 2, P. 55.

□

Definição 1.1.23. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana com uma conexão ∇ . Dizemos que a conexão é **compatível com a métrica g** quando ela satisfaz*

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (1.2)$$

Definição 1.1.24. *Uma conexão ∇ em uma variedade diferenciável M é dita **simétrica** quando*

$$\nabla_X Y + \nabla_Y X = [X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (1.3)$$

Teorema 1.1.1. (Levi-Civita) : *Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão ∇ em M satisfazendo as condições:*

(a) ∇ é simétrica.

(b) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

Demonstração. A demonstração do teorema pode ser encontrada em [11], Cap. 2, P. 61.

□

Observação 1.1.10. A conexão dada pelo teorema acima é denominada **conexão de Levi-Civita (ou Riemanniana)** de M .

Lema 1.1.1. Seja M uma variedade Riemanniana com uma conexão Riemanniana ∇ . Então, para todos os campos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, vale

$$\langle \nabla_Y X, Z \rangle = \frac{1}{2} (X \langle Y, Z \rangle + Y \langle X, Z \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle)$$

Demonstração. A demonstração do lema pode ser encontrada em [18], Cap. 5, P. 69.

□

Observação 1.1.11. Se M é uma variedade Riemanniana com uma conexão Riemanniana ∇ , então

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n (\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij}) g^{mk}. \quad (1.4)$$

De agora em diante, sempre que nos referimos a uma variedade Riemanniana, estaremos supondo que ela está munida da sua conexão Riemanniana.

Definição 1.1.25. Seja M uma variedade Riemanniana. Dizemos que uma curva diferenciável $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ é uma **geodésica** se

$$\frac{D\gamma'}{dt}(t) = 0$$

para todo $t \in I$.

1.1.4 Curvatura

Nesta subseção, recordaremos alguns dos conceitos básicos de curvatura em uma variedade Riemanniana. A curvatura, intuitivamente, mede o quanto localmente uma variedade Riemanniana deixa de ser o espaço Euclidiano.

Definição 1.1.26. Seja M uma variedade Riemanniana. O **endomorfismo curvatura** de M é um campo $(3, 1)$ -tensorial

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

definido por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Observação 1.1.12. R é multilinear sobre $C^\infty(M)$.

Proposição 1.1.3. Seja M uma variedade Riemanniana. Temos

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = (\nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i} - \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j})\partial_k.$$

Em particular, as componentes do tensor endomorfismo curvatura são

$$R_{ijk}^l = \sum_{m=1}^n (\Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l) + \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i}. \quad (1.5)$$

Observação 1.1.13. Seja M é uma variedade Riemanniana, então

$$R(X, Y)Z = \sum_{i,j,k,l=1}^n R_{ijk}^l X^i Y^j Z^k \partial_l, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \quad (1.6)$$

Definição 1.1.27. Seja M uma variedade Riemanniana. O **tensor curvatura** de M é um campo 4-tensorial covariante

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

definido por

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle.$$

Definição 1.1.28. Seja M uma variedade Riemanniana. O **tensor curvatura de Ricci** de M , denotado por Ric , é um campo 2-tensorial covariante definido como o traço do tensor endomorfismo curvatura em relação ao seu índice contravariante e segundo índice covariante ou, equivalentemente, como o traço em relação à métrica do tensor curvatura no seu segundo e último índices. Portanto, os componentes da curvatura de Ricci são dados por

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^n R_{ikj}^k = \sum_{k,m=1}^n g^{km} R_{ikjm}.$$

Observação 1.1.14. A curvatura de Ricci é um campo tensorial simétrico, isto é,

$$R_{ij} = R_{ji}.$$

Definição 1.1.29. Seja M uma variedade Riemanniana. A **curvatura escalar** de M , denotada por S , é a função real $S : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida como o traço em relação à métrica do tensor de Ricci

$$S = tr_g Ric = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} R_{ij}.$$

Relacionado com o tensor curvatura está a curvatura seccional, que passaremos a definir. Dados um espaço vetorial V com produto interno \langle, \rangle e $x, y \in V$, indicaremos $|x \wedge y|$ por a expressão

$$\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2},$$

que representa a área do paralelogramo bi-dimensional determinado pelo par de vetores $x, y \in V$.

Definição 1.1.30. *Seja M uma variedade Riemanniana. Dado $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_p M$, o número real*

$$K(\sigma) = K(x, y) = \frac{R(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2},$$

onde x, y é uma base qualquer de σ , é chamado **curvatura seccional** de σ em p .

1.1.5 Imersões Isométricas

Seja $\psi : M \rightarrow \overline{M}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M de dimensão n em uma variedade Riemanniana \overline{M} de dimensão $k = n + m$. A métrica Riemanniana de \overline{M} induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em M : se $u, v \in T_p M$, define-se $\langle u, v \rangle_p = \langle d\psi_p(u), d\psi_p(v) \rangle_{\psi(p)}$. Nesta situação, ψ passa a ser uma imersão isométrica de M em \overline{M} .

O objetivo desta subseção é estudar as relações entre as geometrias de M e \overline{M} . Inicialmente notamos que, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $\psi(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de \overline{M} . Isto quer dizer que existe uma vizinhança $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $\psi(p)$ e um difeomorfismo $\varphi : \overline{U} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$ em um aberto V do \mathbb{R}^k , tais que φ aplica difeomorficamente $\psi(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$.

Para simplificar a notação, identificamos $\psi(U)$ com U e cada vetor $d\psi_p(u) \in T_{\psi(p)}\overline{M}$, com $u \in T_p M$, $p \in U$.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p \overline{M}$, decompõe $T_p \overline{M}$ na soma direta

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp,$$

onde $(T_p M)^\perp$ é complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p \overline{M}$.

Denominamos espaço normal da imersão ψ em p ao conjunto $(T_p M)^\perp$. Assim, cada $v \in T_p \overline{M}$ pode ser escrito como

$$v = v^T + v^\perp, \quad v^T \in T_p M \quad e \quad v^\perp \in (T_p M)^\perp.$$

Diz-se que v^T é a componente tangencial de v e v^\perp a componente normal de v . Tal decomposição é diferenciável no sentido que as aplicações de $T\overline{M}$ em $T\overline{M}$ dadas por

$$(p, v) \mapsto (p, v^T) \quad e \quad (p, v) \mapsto (p, v^\perp)$$

são diferenciáveis.

A partir da decomposição acima, obtemos o **fibrado normal** em M

$$TM^\perp := \coprod_{p \in M} (T_p M)^\perp.$$

Observe que neste caso

$$T\overline{M}|_{\psi(M)} = TM \oplus TM^\perp.$$

A conexão Riemanniana de \overline{M} será indicada por $\overline{\nabla}$. Se X e Y são campos diferenciáveis locais de vetores em M , e \overline{X} , \overline{Y} são suas respectivas extensões locais a \overline{M} , definimos a conexão em M por

$$\nabla_X Y := (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T.$$

No que se segue, indicaremos por $\mathfrak{X}(M)^\perp$ os campos diferenciáveis em U de vetores normais a $\psi(U) \approx U$.

Observação 1.1.15. *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\overline{X}, \overline{Y}$ são suas respectivas extensões locais a \overline{M} , então*

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T + (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^\perp = \nabla_X Y + (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^\perp, \quad (1.7)$$

de modo que

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^\perp = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y.$$

Queremos definir a segunda forma fundamental da imersão $\psi : M \rightarrow \overline{M}$. Para isto convém introduzir previamente a seguinte definição. Se X, Y são campos locais em M ,

$$B(X, Y) := \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y, \quad (1.8)$$

é um campo local em \overline{M} normal a M .

Observe que a definição acima, está bem definida, isto é, $B(X, Y)$ não depende das extensões $\overline{X}, \overline{Y}$. Com efeito, se \overline{X}_1 é outra extensão local de X a M , então

$$\begin{aligned} (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^\perp - (\overline{\nabla}_{\overline{X}_1} \overline{Y})^\perp &= (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_{\overline{X}_1} \overline{Y} - \nabla_X Y) \\ &= \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{X}_1} \overline{Y} \\ &= \overline{\nabla}_{\overline{X} - \overline{X}_1} \overline{Y}. \end{aligned}$$

Como em M , $\overline{X} - \overline{X}_1 = 0$, concluímos que

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^\perp = (\overline{\nabla}_{\overline{X}_1} \overline{Y})^\perp.$$

Analogamente, se \overline{Y}_1 é outra extensão local de Y a M , então

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^\perp = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}_1)^\perp.$$

Proposição 1.1.4. *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, a aplicação $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)^\perp$ definida por*

$$B(X, Y) = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^\perp$$

é bilinear e simétrica.

Demonstração. Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$, $f \in C^\infty(U)$ e $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}, \bar{f}$ suas respectivas extensões locais a \bar{U} . Então

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y \\ &= \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X} + \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X} - \nabla_X Y - (-\nabla_Y X + \nabla_Y X) \\ &= [\bar{X}, \bar{Y}] - [X, Y] + B(Y, X) = B(Y, X) \end{aligned}$$

pois, em M , $[\bar{X}, \bar{Y}] = [X, Y]$. Com isso, B é simétrica.

Observe também que em M

$$B(fX, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{fX}}\bar{Y} - \nabla_{fX} Y = \bar{f}\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - f\nabla_X Y = fB(X, Y).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} B(X + Y, Z) &= \bar{\nabla}_{\bar{X} + \bar{Y}}\bar{Z} - \nabla_{X+Y} Z \\ &= \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z} - \nabla_X Z + \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{Z} - \nabla_Y Z \\ &= B(X, Z) + B(Y, Z). \end{aligned}$$

Usando a simetria de B provamos assim a linearidade na segunda componente. Portanto, B é bilinear. □

Como B é bilinear, concluímos, exprimindo B em um sistema de coordenadas, que o valor de $B(X, Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$.

Notação: Na maioria das vezes a métrica Riemanniana será denotado por

$$\begin{aligned} g_p : T_p M \times T_p M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longrightarrow g_p(u, v) = \langle u, v \rangle_p \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{g}_p : (T_p M)^\perp \times (T_p M)^\perp &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longrightarrow \tilde{g}_p(u, v) = \langle u, v \rangle_p \end{aligned}$$

Agora podemos definir a segunda forma fundamental. Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$. A aplicação $H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle, \quad x, y \in T_p M,$$

é, pela Proposição 1.1.4, uma forma bilinear simétrica.

Definição 1.1.31. A forma quadrática II_η definida em $T_p M$ por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x)$$

é chamada a **segunda forma fundamental** de ψ em p segundo o vetor normal η .

Às vezes se utiliza também a expressão *segunda forma fundamental* para designar a aplicação B que em cada $p \in M$ é uma aplicação bilinear, simétrica, tomando valores em $(T_pM)^\perp$.

Proposição 1.1.5. (1) A aplicação $(X, \eta) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \rightarrow S_\eta(X) \in \mathfrak{X}(M)$ é bilinear sobre $C^\infty(M)$; Além disso, $(S_\eta(X))_p$ depende apenas de X_p e η_p , e existe uma aplicação induzida por S de $T_pM \times (T_pM)^\perp$ sobre T_pM , onde p é um ponto qualquer de M .

(2) Para cada $\eta \in (T_pM)^\perp$, tem-se

$$g(S_\eta(X), Y) = \tilde{g}(B(X, Y), \eta) \quad (1.9)$$

para todo $X, Y \in T_pM$; Além disso, S_η é uma transformação linear e simétrica de T_pM , com respeito de g_p .

Demonstração. A demonstração da proposição pode ser encontrada em [17], Cap. 1, P. 14.

□

Observe que a aplicação bilinear H_η fica associada a uma aplicação linear auto-adjunta $S_\eta : T_pM \rightarrow T_pM$ por

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle.$$

Esta aplicação linear auto-adjunta é chamada de *operador forma*. A proposição seguinte nos dá uma expressão deste operador associada à segunda forma fundamental em termos da derivada covariante.

Proposição 1.1.6. (*Fórmula de Weingarten*). Sejam $p \in M$, $x \in T_pM$, $\eta \in (T_pM)^\perp$ e N uma extensão local de η normal a M . Então

$$S_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_x N)^T.$$

Demonstração. Sejam $x, y \in T_pM$, X, Y extensões locais de x, y , respectivamente, (e tangentes a M) e \bar{X}, \bar{Y} extensões locais de X, Y respectivamente. Então $\langle N, Y \rangle = 0$, e portanto

$$\begin{aligned} \langle S_\eta(x), y \rangle &= H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y, N \rangle(p) \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, N \rangle(p) - \langle \nabla_X Y, N \rangle(p) = \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, N \rangle(p) \\ &= \bar{X} \langle \bar{Y}, N \rangle(p) - \langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} N \rangle(p) = -\langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} N \rangle(p) \\ &= -\langle (\bar{\nabla}_{\bar{X}} N)^T + (\bar{\nabla}_{\bar{X}} N)^N, \bar{Y} \rangle(p) \\ &= -\langle Y, (\bar{\nabla}_{\bar{X}} N)^T \rangle(p) = \langle -(\bar{\nabla}_x N)^T, y \rangle, \end{aligned}$$

para todo $y \in T_pM$. Portanto $S_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_x N)^T$.

□

Teorema 1.1.2. (*Gauss*). *Sejam $p \in M$ e x, y vetores ortonormais de T_pM . Então*

$$K(x, y) - \bar{K}(x, y) = \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2.$$

Demonstração. Sejam X, Y extensões locais ortogonais de x, y , respectivamente, e tangentes a M ; indicamos por \bar{X}, \bar{Y} as extensões locais de X, Y a \bar{M} . Então

$$\begin{aligned} K(x, y) - \bar{K}(x, y) &= \langle R(X, Y)X, Y \rangle(p) - \langle \bar{R}(\bar{X}, \bar{Y})\bar{X}, \bar{Y} \rangle(p) \\ &= \langle \nabla_Y \nabla_X X - \nabla_X \nabla_Y X + \nabla_{[X, Y]} X, Y \rangle(p) - \\ &\quad \langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{X} - \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X} + \bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{X}, \bar{Y} \rangle(p) \\ &= \langle \nabla_Y \nabla_X X - \nabla_X \nabla_Y X - (\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{X} - \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}), Y \rangle(p) + \\ &\quad \langle \nabla_{[X, Y]} X - \bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{X}, Y \rangle(p). \end{aligned}$$

Observe inicialmente que o último termo se anula, pois

$$\langle \nabla_{[X, Y]} X - \bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{X}, Y \rangle(p) = -\langle (\bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{X})^\perp, Y \rangle(p) = 0.$$

Por outro lado, se indicarmos por E_1, \dots, E_m , $m = \dim \bar{M} - \dim M$, campos locais ortonormais e normais a M , tem-se

$$B(X, Y) = \sum_{i=1}^m H_i(X, Y) E_i, \quad H_i = H_{E_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Como $B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y$. Segue-se que

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{X} = B(X, X) + \nabla_X X. \tag{1.10}$$

Portanto, em p ,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{X} &= \bar{\nabla}_{\bar{Y}} (B(X, X) + \nabla_X X) \\ &= \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \left(\sum_{i=1}^m H_i(X, X) E_i + \nabla_X X \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \{ H_i(X, X) \bar{\nabla}_{\bar{Y}} E_i + \bar{Y} H_i(X, X) E_i \} + \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \nabla_X X. \end{aligned}$$

Logo, em p ,

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{X}, Y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^m \{ H_i(X, X) \bar{\nabla}_{\bar{Y}} E_i + \bar{Y} H_i(X, X) E_i \}, Y \right\rangle + \langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \nabla_X X, Y \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \{ H_i(X, X) \langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} E_i, Y \rangle + \bar{Y} H_i(X, X) \langle E_i, Y \rangle \} + \langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \nabla_X X, Y \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m H_i(X, X) \langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} E_i, Y \rangle + \langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \nabla_X X, Y \rangle. \end{aligned}$$

Daí

$$\langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{X}, Y \rangle = \sum_{i=1}^m H_i(X, X) \langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} E_i, Y \rangle + \langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \nabla_X X, Y \rangle. \quad (1.11)$$

Observe que

$$0 = \langle B(Y, \nabla_X X), Y \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \nabla_X X - \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle,$$

então

$$\langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \nabla_X X, Y \rangle = \langle \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle. \quad (1.12)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} H_i(Y, Y) &= \langle B(Y, Y), E_i \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{Y} - \nabla_Y Y, E_i \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{Y}, E_i \rangle - \langle \nabla_Y Y, E_i \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{Y}, E_i \rangle \\ &= \bar{Y} \langle \bar{Y}, E_i \rangle - \langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{Y}} E_i \rangle \\ &= -\langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{Y}} E_i \rangle. \end{aligned}$$

Daí

$$\langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{Y}} E_i \rangle = -H_i(Y, Y). \quad (1.13)$$

Utilizando as equações (1.13), (1.12) em (1.11), obtém-se

$$\langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{X}, Y \rangle = -\sum_{i=1}^m H_i(X, X) H_i(Y, Y) + \langle \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle. \quad (1.14)$$

Analogamente,

$$\langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}, Y \rangle = -\sum_{i=1}^m H_i(X, Y) H_i(X, Y) + \langle \nabla_X \nabla_Y X, Y \rangle. \quad (1.15)$$

Utilizando as equações (1.14) e (1.15) na seguinte equação

$$\begin{aligned} K(x, y) - \bar{K}(x, y) &= \langle \nabla_Y \nabla_X X - \nabla_X \nabla_Y X - (\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{X} - \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}), Y \rangle(p) \\ &= \sum_{i=1}^m H_i(X, X) H_i(Y, Y) - \sum_{i=1}^m H_i(X, Y) H_i(X, Y). \end{aligned}$$

Obtém-se

$$K(x, y) - \bar{K}(x, y) = \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2.$$

□

Uma imersão $\psi : M \rightarrow \bar{M}$ é *geodésica* em $p \in M$ se para todo $\eta \in (T_p M)^\perp$ a segunda forma fundamental II_η é identicamente nula em p . A imersão ψ é **totalmente geodésica** se ela é geodésica para todo $p \in M$. A razão desta terminologia é dada pela seguinte proposição.

Proposição 1.1.7. *Uma imersão $\psi : M \rightarrow \bar{M}$ é geodésica em $p \in M$ se, e somente se, toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de \bar{M} em p .*

Demonstração. veja [11], Cap. 6, P. 145.

□

Definição 1.1.32. Uma imersão $\psi : M \rightarrow \overline{M}$ é **mínima** se para todo $p \in M$ e todo $\eta \in (T_p M)^\perp$ tem-se que $\text{traço } S_\eta = 0$.

Escolhendo um referencial ortonormal E_1, \dots, E_m de vetores em $\mathfrak{X}(U)^\perp$, onde U é uma vizinhança de p na qual ψ é um mergulho, podemos escrever, em p ,

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^m H_i(x, y) E_i, \quad x, y \in T_p M,$$

onde $H_i = H_{E_i}$. Logo o vetor normal é dado por

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (\text{traço } S_i) E_i,$$

onde $S_i = S_{E_i}$, não depende do referencial E_i escolhido. O vetor H é chamado o **vetor curvatura média** de ψ . É claro que ψ é mínima se e só se $H(p) = 0$, para todo $p \in M$.

A razão da palavra mínima neste contexto é que tais imersões minimizam o volume da métrica induzida do mesmo modo que as geodésicas minimizam o comprimento de arco. Mais precisamente, se $M \subset \overline{M}$ é uma subvariedade mínima e $\Omega \subset M$ um domínio suficientemente pequeno de M com bordo $\partial\Omega$ regular, então o volume de Ω na métrica induzida é menor ou igual ao volume de qualquer outra subvariedade de \overline{M} com o mesmo bordo.

Definição 1.1.33. Sejam M uma variedade riemanniana com métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $p \in M$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O **gradiente** de f em p é o (único) vetor $\text{grad}f(p) \in T_p M$ que satisfaz

$$\langle \text{grad}f(p), v \rangle = df_p(v) = v(f), \quad \forall v \in T_p M.$$

1.2 O Toro de Clifford

Seja $\mathbb{S}^1(r)$ o círculo de raio r em \mathbb{R}^2 definido por

$$\mathbb{S}^1(r) = \{r(\cos \theta, \sin \theta); \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Então o *toro de Clifford* em \mathbb{R}^4 é definido por

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \mathbb{S}^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta, \sin \theta, \cos \varphi, \sin \varphi); \ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\}.$$

Uma parametrização desta variedade é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (\theta, \varphi) &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta, \sin \theta, \cos \varphi, \sin \varphi). \end{aligned}$$

Observe que $\mathbf{x}([0, 2\pi] \times [0, 2\pi]) \subset \mathbb{S}^3(1)$, pois para todo $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, tem-se que

$$\|\mathbf{x}(\theta, \varphi)\|^2 = \frac{1}{2}(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 1.$$

1.2.1 Métrica e Volume do Toro de Clifford

Seja $\mathbf{x} : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{T}^2$ a parametrização anterior, definida por

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta, \sin \theta, \cos \varphi, \sin \varphi).$$

Temos,

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2}(-\sin \theta, \cos \theta, 0, 0),$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2}(0, 0, -\sin \varphi, \cos \varphi).$$

Daí

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2}(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \frac{1}{2} \\ g_{12} &= g_{21} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \right\rangle = 0 \\ g_{22} &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2}(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Portanto a métrica do *toro de Clifford* é dada por

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Agora, pela definição de volume, tem-se

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathbb{T}^2) &= \int_{[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]} \sqrt{\det(g_{ij})} d\theta d\varphi \\ &= \int_{[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]} \frac{1}{2} d\theta d\varphi = 2\pi^2. \end{aligned}$$

Portanto o volume do *toro de Clifford* é $2\pi^2$.

1.3 Espaços de Recobrimento

Os espaços de recobrimento se introduzem, muitas vezes como simples ferramentas, porque eles são geralmente mais simples do que aqueles espaços que cobrem: Por exemplo, $\mathbb{S}^n(1)$ frente a $\mathbb{RP}^n(1)$, como veremos mais adiante.

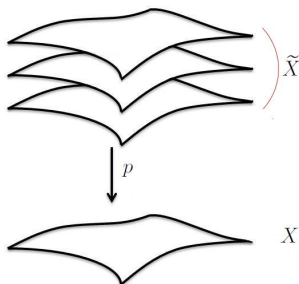


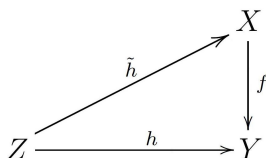
Figura 1.2: Aplicação de recobrimento

Definição 1.3.1. Sejam \tilde{X} , X espaços topológicos e $p : \tilde{X} \rightarrow X$ uma aplicação contínua p , chama-se **aplicação de recobrimento** quando para cada ponto $x \in X$, existe uma vizinhança $V \subset X$ de x , tal que $p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ é uma reunião de abertos U_{α} , dois a dois disjuntos, cada um dos quais se aplica por p homeomorficamente sobre V . Cada aberto V desse tipo chama-se uma vizinhança distinguida. O espaço \tilde{X} chama-se uma espaço de recobrimento de X e, para cada $x \in X$, o conjunto $p^{-1}(x)$ chama-se a fibra sobre x . Às vezes, X chama-se a base.

Observação 1.3.1. Se $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é uma aplicação de recobrimento, os espaços \tilde{X} e X são localmente idênticos, mas podem ser completamente distintos num sentido global.

Exemplo 1.3.1. Seja $\mathbb{RP}^3(1)$ o quociente de $\mathbb{S}^3(1)$ pela relação de equivalência que identifica dois pontos antípodas (x e $-x$). A aplicação $p : \mathbb{S}^3(1) \rightarrow \mathbb{RP}^3(1)$ que associa a cada $x \in \mathbb{S}^3(1)$ a sua classe de equivalência $\{x, -x\}$ é um recobrimento.

Definição 1.3.2. Se $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é uma aplicação de recobrimento e $x \in X$, a cardinalidade dos conjuntos $p^{-1}(x)$ é chamada de **número de folhas** do recobrimento.



Definição 1.3.3. Sejam X , Y , Z espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$, $h : Z \rightarrow Y$ aplicações contínuas. Um **levantamento** de h (relativamente a f) é uma aplicação contínua $\tilde{h} : Z \rightarrow X$ tal que $f \circ \tilde{h} = h$.

Observação 1.3.2. *Os levantamentos das funções diferenciáveis são diferenciáveis.*

Observação 1.3.3. *Se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação de recobrimento e $h : Z \rightarrow Y$ uma aplicação contínua com Z simplesmente conexa, então existe um levantamento $\bar{h} : Z \rightarrow X$ de h .*

Teorema 1.3.1. *Para toda variedade diferenciável M existe uma aplicação de recobrimento $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ com \widetilde{M} simplesmente conexo.*

Teorema 1.3.2. *Sejam (M_1, g_1) e (M_2, g_2) duas variedades Riemannianas. Se $\psi : M_1 \rightarrow M_2$ é uma imersão isométrica de (M_1, g_1) em (M_2, g_2) , então para cada função $f : M_2 \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e com suporte compacto em M_2 vale*

$$\int_{M_2} f dv(g_2) = \int_{M_1} f \circ \psi dv(g_1),$$

onde $dv(g_2)$ e $dv(g_1)$ denotam os elementos de volume.

Demonstração. veja [21], Cap. 4, P. 115. □

Corolário 1.3.1. *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana, $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ uma aplicação de recobrimento de k -folhas e $\tilde{g} = p^*g$. Para cada função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e com suporte compacto em M*

$$\int_M f dv(g) = \frac{1}{k} \int_{\widetilde{M}} f \circ p dv(\tilde{g}).$$

Demonstração. Seja $\Phi = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow M\}_{\alpha \in \Lambda}$ o atlas maximal de M . Tome qualquer $\varphi_\beta \in \Phi$ e $V_\beta = \varphi_\beta(U_\beta) \subset M$. Como $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ é uma aplicação de recobrimento. Então existe k coberturas disjuntas $\widetilde{V}_\beta^1, \dots, \widetilde{V}_\beta^k$ de \widetilde{M} tais que

$$p^{-1}(V_\beta) = \bigcup_{m=1}^k \widetilde{V}_\beta^m.$$

Observe que para cada $m \in \{1, \dots, k\}$, a aplicação de recobrimento p é uma difeomorfismo de \widetilde{V}_β^m sobre V_β . Resulta então que para qualquer $m \in \{1, \dots, k\}$, p é uma imersão isométrica de $(\widetilde{V}_\beta^m, \tilde{g})$ em (V_β, g) . Logo, pelo Teorema 1.3.2., para cada função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e com suporte compacto em V_β , tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\widetilde{M}} f \circ p dv(\tilde{g}) &= \sum_{m=1}^k \int_{\widetilde{V}_\beta^m} f \circ p dv(\tilde{g}) \\ &= k \int_{V_\beta} f dv(g) \\ &= k \int_M f dv(g). \end{aligned}$$

Agora, considere (λ_β) uma partição da unidade subordinada ao atlas Φ e uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ contínua com suporte compacto em M . Logo,

$$\begin{aligned}\int_M f \circ p \, dv(g) &= \int_M \sum_{\beta \in \Lambda} \lambda_\beta f \, dv(g) \\ &= \sum_{\beta \in \Lambda} \int_M \lambda_\beta f \, dv(g) \\ &= \sum_{\beta \in \Lambda} \frac{1}{k} \int_{\tilde{M}} (\lambda_\beta \circ p)(f \circ p) \, dv(\tilde{g}) \\ &= \frac{1}{k} \int_{\tilde{M}} f \circ p \, dv(\tilde{g}).\end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Problema Isoperimétrico e Superfícies Isoperimétricas

O problema isoperimétrico clássico pode então ser enunciado da seguinte forma:

Entre todas as curvas fechadas simples $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, de dado comprimento $L = L(c)$, achar aquelas para as quais a área do interior de c é máxima.

A solução deste problema era conhecida desde a antiguidade. Aristóteles, no século III A.C., enunciava explicitamente que o círculo era a solução do problema isoperimétrico. Porém, não havia demonstração: a afirmação era verdadeira devido a razões filosóficas.

Várias demonstrações desta propriedade de círculo apareceram, ligadas a grandes nomes da matemática, algumas incompletas. Entender bem o que é uma solução completa do problema isoperimétrico foi muito importante para a formulação correta do que é a solução de problemas variacionais em matemática. Principalmente no que se refere ao aspecto existencial das soluções.

Neste capítulo, M denotará uma variedade Riemanniana compacta, orientável sem fronteira, e de dimensão 3, e Σ uma superfície diferenciável compacta e orientável. O volume de M será denotado por $V = V(M)$. Alguns dos resultados que veremos mais adiante são também verdadeiros em dimensão maior. No entanto, por questões de clareza, iremos considerar somente o caso de dimensão 3.

2.1 O Problema Isoperimétrico para uma Região

Seja M uma variedade Riemanniana com volume $V(M) \in [0, \infty)$. Dado um número positivo $v < V(M)$, o problema isoperimétrico para uma região consiste em achar uma superfície compacta Σ (mergulhada) em M tal que

- (1) Σ delimita uma região Ω de volume $V(\Omega) = v$, e
- (2) Σ minimiza a área sob a restrição (1),

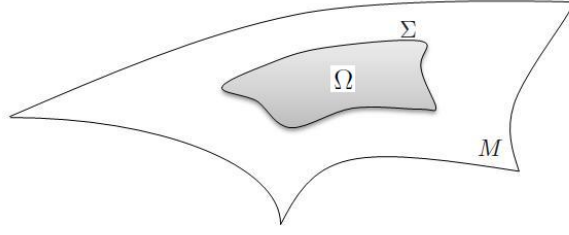


Figura 2.1: Problema isoperimétrico em uma região

Existência e regularidade para o problema isoperimétrico tem sido considerados por vários autores. Dos trabalhos de [1], [14] e [13], Antonio Ros no artigo [25], considerou o seguinte resultado.

Teorema 2.1.1. *Se M é uma variedade Riemanniana compacta de dimensão 3, então, para qualquer v , $0 < v < V(M)$, existe uma região compacta $\Omega \subset M$ cujo bordo $\partial\Omega = \Sigma$ é uma superfície com curvatura média constante mergulhada em M , que resolve o problema isoperimétrico acima.*

Definição 2.1.1. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta de dimensão 3. Uma superfície Σ mergulhada em M é chamada de **superfície isoperimétrica** se, dentre todas as superfícies mergulhadas que delimitam alguma região $\Omega \subset M$ de algum volume $V(\Omega) = v$, $0 < v \leq \frac{V(M)}{2}$, Σ tem área mínima. Cada região Ω desse tipo chama-se **região isoperimétrica**.*

Para ter uma ideia geométrica vejamos o exemplo das bolhas de sabão, (veja a Figura 2.2), que são úteis para melhorar a nossa intuição sobre o comportamento das soluções do problema isoperimétrico. Do ponto de vista teórico, uma película de sabão é uma membrana que também é um líquido homogêneo. Para deduzir como a película de sabão em equilíbrio empurra o espaço perto dele, vamos cortar um pequeno pedaço Σ na membrana. Se queremos que Σ permaneça em equilíbrio, devemos reproduzir de alguma maneira o restante da membrana sobre a peça, devido à hipótese dessa ação é dada por uma distribuição de forças ao longo da fronteira de Σ . Além disso, estas forças seguem a direção do vetor normal ν : elas são tangentes à membrana e normal à fronteira de Σ . Finalmente, a homogeneidade implica que o comprimento dos vetores desta distribuição é constante, digamos de comprimento 1, e assim, empurra o espaço Σ em torno dele, com uma força determinada por

$$F(\Sigma) = \int_{\partial\Sigma} \nu d\Sigma.$$

Definição 2.1.2. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta de dimensão 3. O perfil isoperimétrico de M é uma função contínua $I_M : (0, V(M)) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por*

$$I_M(v) = \min\{A(\partial\Omega); \Omega \subset M \text{ região com } V(\Omega) = v\}.$$



Figura 2.2: bolha de sabão

Observação 2.1.1. *O complemento de uma região isoperimétrica é uma outra região isoperimétrica, I_M é sempre simétrica, isto é, $I_M(V(M) - 2v) = I_M(v)$.*

Propriedades gerais desta função serão consideradas na próxima subseção. Limites inferiores explícitos para o perfil I_M são muito importantes em aplicações e são chamados desigualdades isoperimétricas. Para os resultados deste tipo, veja [8], [9], e [12].

Teorema 2.1.2. *Superfícies isoperimétricas em \mathbb{R}^3 são esferas redondas.*

Demonstração. veja [25], Cap. 3, P. 151.

□

Teorema 2.1.3. *Superfícies isoperimétricas em $\mathbb{S}^3(1)$ são esferas geodésicas.*

Explicaremos agora vários fatos sobre superfícies estáveis de curvatura média constante. Alguns destes argumentos de estabilidade nos permitem resolver o problema isoperimétrico no espaço projetivo real $\mathbb{RP}^3(1)$.

2.1.1 Superfícies Estáveis

A estabilidade é uma noção fundamental no estudo do problema isoperimétrico. Mais adiante veremos várias consequências interessantes desta ideia.

Seja M uma variedade Riemanniana e $\Omega \subset M$ um domínio relativamente compacto cujo bordo $\partial\Omega = \Sigma$ é uma superfície. Sujeitaremos Σ a variações que mantenham o volume de Ω fixo (pelo menos até segunda ordem).

Definição 2.1.3. *Seja $\psi : \Sigma \rightarrow M$ uma imersão de uma superfície compacta, conexa e orientável Σ com bordo $\partial\Sigma$ (possivelmente = \emptyset), na variedade Riemanniana orientável M tal que a orientação de Σ seja compatível com a orientação de M . Uma **variação** de ψ é uma aplicação diferenciável*

$$X : \Sigma \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$$

satisfazendo as seguintes condições:

1. A aplicação $X(\cdot, t) : \Sigma \rightarrow M$ é uma imersão para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$

2. $X(\cdot, 0) = \psi$

3. $X(\cdot, t)|_{\partial\Sigma} = \psi|_{\partial\Sigma}$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

O campo de vetores $W(p) = \frac{\partial X}{\partial t}|_{t=0}$ em Σ é chamado de *campo variacional* associado à variação X .

O *funcional área* $A : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ associado à variação X é dado por

$$A(t) = \int_{\Sigma} d\Sigma_t,$$

onde $d\Sigma_t$ denota o elemento de volume de Σ na métrica induzida por X_t .

O *funcional volume* $V : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ associado à variação X é dado por

$$V(t) = \int_{[0,t] \times \Sigma} X^* dM,$$

onde dM denota o elemento de volume de M .

Lema 2.1.1. *Seja $\psi : \Sigma \rightarrow M$ uma imersão com curvatura média H . Se*

$$X : \Sigma \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$$

é uma variação de ψ , então

$$(a) \frac{dA}{dt}(0) = -2 \int_{\Sigma} H f d\Sigma$$

$$(b) \frac{dV}{dt}(0) = - \int_{\Sigma} f d\Sigma,$$

onde $f = \langle W, N \rangle$ e N é o campo normal unitário a Σ .

Demonstração. veja [5], Cap. 2, P. 125.

□

Observação 2.1.2. *Uma variação é **normal** se W é paralelo a N e **preserva volume** se $V(t) = V(0)$, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.*

Lema 2.1.2. *Seja $\psi : \Sigma \rightarrow M$ uma imersão com curvatura média H . Dado uma função diferenciável $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ com $f|_{\partial\Sigma} = 0$ e $\int_{\Sigma} f d\Sigma = 0$, existe uma variação normal de ψ que preserva volume e cujo vetor normal é fN .*

Demonstração. veja [5], Cap. 2, P. 126.

□

Dada uma variação X de uma imersão $\psi : \Sigma \rightarrow M$ podemos escrever

$$H_0 = A^{-1} \int_{\Sigma} H d\Sigma, \quad A = A(0),$$

e logo definir $J : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$J(t) = A(t) + 2H_0V(t). \quad (2.1)$$

No artigo de Lucas Barbosa [5], Cap. 2, P. 126., se considera o seguinte resultado.

Proposição 2.1.1. *Seja $\psi : \Sigma \rightarrow M$ uma imersão. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) ψ tem curvatura média constante $H \neq 0$
- (ii) Para toda variação X de ψ que preserva volume, tem-se $A'(0) = 0$
- (iii) Para toda variação (arbitrária) X de ψ , tem-se $J'(0) = 0$.

Observe que a condição $H_0 \neq 0$, é desnecessária (isso corrige um engano no artigo [5]). Assim hipersuperfícies mínimas também são incluídos dentre os pontos críticos do área para variações que preservam volume.

Derivando a expressão (2.1), segue-se

$$J'(t) = A'(t) + 2H_0V'(t).$$

Daí, usando o Lema 2.1.1, obtém-se que

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{\Sigma} (-2H_t + 2H_0)f_t d\Sigma,$$

onde H_t é a curvatura média de X_t , e $f_t = \langle \frac{\partial X}{\partial t}, N_t \rangle$, onde N_t é o vetor normal unitário de X_t . Então

$$J''(0) = - \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial H_t}{\partial t} \right) (0) f d\Sigma.$$

No artigo de Lucas Barbosa [5], Cap. 2, P. 126., se considera o seguinte resultado

Proposição 2.1.2. *Sejam $\psi : \Sigma \rightarrow M$ uma imersão com curvatura média constante H e X uma variação de ψ . Então $J''(0)$ depende somente de f e é dado por*

$$J''(0)(f) = \int_{\Sigma} (-f\Delta f - (\text{Ric}(N) + |B|^2)f^2) d\Sigma,$$

onde Δ é o laplaciano na métrica induzida em Σ , $|B|$ é a norma da segunda forma fundamental da imersão ψ , e $\text{Ric}(N) = 2\text{Ric}_M(N)$, onde $\text{Ric}_M(N)$ é a curvatura de Ricci (normalizada) de M na direção N .

Agora, em virtude dos resultados anteriores podemos definir estabilidade da seguinte forma.

Definição 2.1.4. *Seja $\psi : \Sigma \rightarrow M$ uma imersão com curvatura média constante. Dizemos que Σ é uma **superfície estável** (pela identificação $\psi(\Sigma) \approx \Sigma$), se $A''(0) \geq 0$ para toda variação de ψ que preserva volume.*

Observação 2.1.3. *$\psi : \Sigma \rightarrow M$ é estável se, e somente se, $J''(0)(f) \geq 0$ para toda função f .*

Da Definição 2.1.4., podemos dizer que uma superfície $\Sigma \subset M$ é *estável* se satisfaz as seguintes condições:

- (1) Σ tem curvatura média constante;
- (2) $Q(f, f) \geq 0$ para toda função f em um espaço de Sobolev $H^1(\Sigma)$ com $\int_{\Sigma} f d\Sigma = 0$, onde Q é uma forma quadrática definida pela fórmula da segunda variação de área, isto é,

$$Q(f, f) = \int_{\Sigma} (|\nabla f|^2 - (\text{Ric}(N) + |B|^2)f^2) d\Sigma,$$

onde $\text{Ric}(N)$ é a curvatura de Ricci de M na direção do vetor normal unitário N , e B a segunda forma fundamental da imersão. A função f corresponde a uma deformação infinitesimal da superfície Σ , e a condição $\int_{\Sigma} f d\Sigma = 0$ garante a existência da variação normal da imersão que preserva volume, (dado pelo Lema 2.1.2.).

Agora, em virtude destas condições de estabilidade para uma dada superfície $\Sigma \subset M$, no trabalho [26], Cap. 2, P. 18 e P. 19, Antonio Ross provou os seguintes teoremas.

Teorema 2.1.4. *Seja M uma variedade compacta, orientável, de dimensão 3 com $\partial M = \emptyset$ e curvatura de Ricci, $\text{Ric} \geq 2$. Se Σ é uma superfície isométrica de M , então Σ é compacta, conexa e orientável de gênero menor ou igual a 3. Além disso, se $\text{gênero}(\Sigma) = 2$ ou 3, então $(1 + H^2)A(\Sigma) \leq 2\pi$.*

O problema isoperimétrico para uma forma espacial de dimensão 3, isto é, espaços completos de dimensão 3 com curvatura seccional constante, é uma situação particular muito interessante. No caso simplesmente conexo o problema isoperimétrico é resolvido por simetriação mas, se o grupo fundamental é não trivial, então este método não funciona ou fornece pouca informação.

Teorema 2.1.5. *Seja Σ uma superfície isoperimétrica de um forma espacial $M^3(c)$ orientável com curvatura constante c .*

- (a) *Se Σ tem gênero zero, então Σ é uma esfera umbílica;*
- (b) *Se Σ tem gênero um, então Σ é plana.*

Usaremos estes resultados como ferramentas para provar alguns dos resultados que nos levam à solução do Teorema Principal.

Capítulo 3

A Conjetura de Willmore no Espaço Projetivo Real

Seja Σ uma superfície fechada imersa em $\mathbb{S}^3(1)$. O *funcional energia de Willmore* da superfície Σ , com curvatura média H , é definido por

$$\mathcal{W}(\Sigma) = \int_{\Sigma} (1 + H^2) dA.$$

Neste capítulo, estudaremos a notável propriedade da energia de Willmore de ser invariante sob transformações conformes de $\mathbb{S}^3(1)$, [32], veremos também a prova da conjectura de Willmore no espaço projetivo real $\mathbb{RP}^3(1)$ feita por Antonio Ros [24].

Ao longo deste capítulo, Σ denotará uma superfície diferenciável orientável sem bordo.

3.1 Invariância Conforme

Definição 3.1.1. *Duas métricas Riemannianas g e g^λ em uma variedade diferenciável M de dimensão n , são **conformes** se existe uma função diferenciável $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ positiva, tal que para todo $p \in T_p M$ e todo $u, v \in T_p M$ se tenha*

$$g_p^\lambda(u, v) = \lambda^2 g_p(u, v). \quad (3.1)$$

Em particular, se $\lambda(p) = k$ onde k é uma constante positiva, dizemos que g e g^λ são métricas Homotéticas.

Proposição 3.1.1. *Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão n , g e g^λ métricas conformes em M com ∇ e ∇^λ as conexões Riemannianas em M induzidas pelas métricas g e g^λ , respectivamente. Então ∇ e ∇^λ são relacionados por*

$$\nabla_X^\lambda Y - \nabla_X Y = X(\log \lambda)Y + Y(\log \lambda)X - g(X, Y)\text{grad}(\log \lambda), \quad (3.2)$$

para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. [3] Usaremos a seguinte notação: $g^\lambda = \langle \cdot, \cdot \rangle^\lambda$ e $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

Seja $\mathcal{B}_p = \{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ uma base coordenada ortonormal do espaço tangente T_pM .

Da Observação 1.1.9 tem-se

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \left(X(Y^k) + \sum_{i,j=1}^n X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, \partial_l \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^n \left(X(Y^k) + \sum_{i,j=1}^n X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k, \partial_l \right\rangle \\ &= X(Y^l) + \sum_{i,j=1}^n X^i Y^j \Gamma_{ij}^l. \end{aligned}$$

Daí, obtém-se

$$\nabla_X Y = \sum_{l=1}^n \langle \nabla_X Y, \partial_l \rangle \partial_l. \quad (3.3)$$

Similarmente, tem-se

$$\nabla_X^\lambda Y = \sum_{l=1}^n \langle \nabla_X^\lambda Y, \partial_l \rangle \partial_l. \quad (3.4)$$

Logo, das equações (3.3) e (3.4), obtém-se

$$\nabla_X^\lambda Y - \nabla_X Y = \sum_{l=1}^n (\langle \nabla_X^\lambda Y, \partial_l \rangle - \langle \nabla_X Y, \partial_l \rangle) \partial_l,$$

e pelo fato de serem g e g^λ métricas conformes, segue-se que

$$\lambda^2 (\nabla_X^\lambda Y - \nabla_X Y) = \sum_{l=1}^n (\langle \nabla_X^\lambda Y, \partial_l \rangle^\lambda - \lambda^2 \langle \nabla_X Y, \partial_l \rangle) \partial_l.$$

Por outro lado, usando o Lema 1.1.1, tem-se

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X^\lambda Y, \partial_l \rangle^\lambda - \lambda^2 \langle \nabla_X Y, \partial_l \rangle &= \frac{1}{2} \{ Y \langle X, \partial_l \rangle^\lambda + X \langle Y, \partial_l \rangle^\lambda - \partial_l \langle Y, X \rangle^\lambda \\ &\quad - \langle [Y, X], \partial_l \rangle^\lambda - \langle [Y, \partial_l], X \rangle^\lambda - \langle [X, \partial_l], Y \rangle^\lambda \\ &\quad - \lambda^2 Y \langle X, \partial_l \rangle - \lambda^2 X \langle Y, \partial_l \rangle + \lambda^2 \partial_l \langle Y, X \rangle \\ &\quad + \lambda^2 \langle [Y, X], \partial_l \rangle + \lambda^2 \langle [Y, \partial_l], X \rangle + \lambda^2 \langle [X, \partial_l], Y \rangle \}. \end{aligned}$$

Logo, pelo fato de ser g e g^λ métricas conformes, tem-se

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X^\lambda Y, \partial_l \rangle^\lambda - \lambda^2 \langle \nabla_X Y, \partial_l \rangle &= \frac{1}{2} \{ Y(\lambda^2 \langle X, \partial_l \rangle) + X(\lambda^2 \langle Y, \partial_l \rangle) - \partial_l(\lambda^2 \langle Y, X \rangle) \\ &\quad - \lambda^2 \langle [Y, X], \partial_l \rangle - \lambda^2 \langle [Y, \partial_l], X \rangle - \lambda^2 \langle [X, \partial_l], Y \rangle \\ &\quad - \lambda^2 Y \langle X, \partial_l \rangle - \lambda^2 X \langle Y, \partial_l \rangle + \lambda^2 \partial_l \langle Y, X \rangle \\ &\quad + \lambda^2 \langle [Y, X], \partial_l \rangle + \lambda^2 \langle [Y, \partial_l], X \rangle + \lambda^2 \langle [X, \partial_l], Y \rangle \} \\ &= \frac{1}{2} \{ Y(\lambda^2) \langle X, \partial_l \rangle + X(\lambda^2) \langle Y, \partial_l \rangle - \partial_l(\lambda^2) \langle Y, X \rangle \}. \end{aligned}$$

Daí, obtém-se

$$\nabla_X^\lambda Y - \nabla_X Y = \frac{1}{2\lambda^2} \sum_{l=1}^n \{ Y(\lambda^2) \langle X, \partial_l \rangle + X(\lambda^2) \langle Y, \partial_l \rangle - \partial_l(\lambda^2) \langle Y, X \rangle \} \partial_l. \quad (3.5)$$

Como $X = \sum_{j=1}^n X^j \partial_j$ e $Y = \sum_{i=1}^n Y^i \partial_i$, tem-se

$$\langle X, \partial_l \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n X^j \partial_j, \partial_l \right\rangle = \sum_{j=1}^n X^j \langle \partial_j, \partial_l \rangle = X^l.$$

Daí, obtém-se

$$X = \sum_{l=1}^n \langle X, \partial_l \rangle \partial_l. \quad (3.6)$$

Similarmente, tem-se

$$Y = \sum_{l=1}^n \langle Y, \partial_l \rangle \partial_l. \quad (3.7)$$

Logo, usando as expressões (3.6) e (3.7) na equação (3.5), e pelo fato que $grad(\lambda^2) = \sum_{l=1}^n \partial_l(\lambda^2) \partial_l$, segue-se que

$$\begin{aligned} \nabla_X^\lambda Y - \nabla_X Y &= \frac{1}{2\lambda^2} \{ Y(\lambda^2) X + X(\lambda^2) Y - \langle Y, X \rangle grad(\lambda^2) \} \\ &= \frac{1}{2\lambda^2} \{ 2\lambda Y(\lambda) X + 2\lambda X(\lambda) Y - \langle Y, X \rangle 2\lambda grad(\lambda) \} \\ &= \frac{1}{\lambda} \{ Y(\lambda) X + X(\lambda) Y - \langle Y, X \rangle grad(\lambda) \}. \end{aligned}$$

Daí

$$\nabla_X^\lambda Y - \nabla_X Y = \frac{1}{\lambda} \{ Y(\lambda) X + X(\lambda) Y - \langle Y, X \rangle grad(\lambda) \}. \quad (3.8)$$

Observe que, se $X_p \in T_p M$, então existe uma função diferenciável $f : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ tal que $f(0) = p$ e $f'(0) = X_p$, donde

$$\begin{aligned} X_p(\log \lambda) &= (\log \lambda \circ f)'(0) = \frac{d}{dt} (\log \lambda(f(t))) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{(\lambda \circ f)(0)} (\lambda \circ f)'(0) = \frac{1}{\lambda_p} X_p(\lambda). \end{aligned}$$

Daí

$$X(\log \lambda) = \frac{1}{\lambda} X(\lambda). \quad (3.9)$$

Agora, substituindo a equação (3.9) em (3.8), obtemos

$$\nabla_X^\lambda Y - \nabla_X Y = X(\log \lambda)Y + Y(\log \lambda)X - g(X, Y)\text{grad}(\log \lambda).$$

□

Usaremos este último resultado para provar o seguinte teorema, que é um caso particular do Teorema 1., do artigo [3].

Teorema 3.1.1. *Seja $f : \Sigma \rightarrow M$ uma imersão de uma superfície compacta Σ sobre uma variedade Riemanniana M de dimensão 3. Então o funcional energia de Willmore*

$$\mathcal{W}(\Sigma) = \int_{\Sigma} (H^2 + \bar{K}) dA$$

é invariante sob transformações conformes de M . Onde H é a curvatura média e \bar{K} é a curvatura seccional de M .

Demonstração. Sejam \bar{g} e \bar{g}^λ duas métricas conformes em M , isto é

$$\bar{g}^\lambda = \bar{\lambda}^2 \bar{g},$$

onde $\bar{\lambda} : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função diferenciável positiva. Denotemos por $\bar{\nabla}$ e $\bar{\nabla}^\lambda$ as conexões de Levi-Civita de M induzidas por \bar{g} e \bar{g}^λ respectivamente. Definamos

$$g = f^* \bar{g}$$

e

$$g^\lambda = f^* \bar{g}^\lambda$$

como duas métricas Riemannianas em Σ , induzidas pela imersão f , observe que

$$g^\lambda = f^* \bar{g}^\lambda = f^* (\bar{\lambda}^2 \bar{g}) = (\bar{\lambda} \circ f)^2 f^* \bar{g} = \lambda^2 g,$$

onde $\lambda = \bar{\lambda} \circ f$. Logo g e g^λ são duas métricas conformes em Σ .

Denotemos por ∇ e ∇^λ as conexões de Levi-Civita de Σ induzidas pelas métrica g e g^λ respectivamente.

Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, pela formula de Gauss, temos

$$\bar{\nabla}_{f_* X} f_* Y = f_* (\nabla_X Y) + B(X, Y) \quad (3.10)$$

$$\bar{\nabla}_{f_* X}^\lambda f_* Y = f_* (\nabla_X^\lambda Y) + B^\lambda(X, Y) \quad (3.11)$$

onde as aplicações

$$B : T\Sigma \times T\Sigma \longrightarrow T\Sigma^\perp \subset TM$$

e

$$B^\lambda : T\Sigma \times T\Sigma \longrightarrow T\Sigma^\perp \subset TM$$

são as *segundas formas fundamentais* de Σ com respeito das métricas g e g^λ , respectivamente.

Logo, das equações (3.10) e (3.11), obtemos

$$B^\lambda(X, Y) - B(X, Y) = \bar{\nabla}_{f_*X}^{\bar{\lambda}} f_*Y - \bar{\nabla}_{f_*X} f_*Y - f_*(\nabla_X^\lambda Y - \nabla_X Y). \quad (3.12)$$

Agora, usando a Proposição 3.1.1., na equação (3.12), obtemos

$$\begin{aligned} B^\lambda(X, Y) - B(X, Y) &= (f_*X(\log \bar{\lambda})) f_*Y + (f_*Y(\log \bar{\lambda})) f_*X - \bar{g}(f_*X, f_*Y) \overline{\text{grad}}(\log \bar{\lambda}) \\ &\quad - f_*(X(\log \lambda)Y + Y(\log \lambda)X - g(X, Y) \text{grad}(\log \lambda)) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Observe que, se $\varphi = \log \bar{\lambda} : M \rightarrow \mathbb{R}^+$, então $\varphi \circ f = (\log \bar{\lambda}) \circ f = \log(\bar{\lambda} \circ f) = \log \lambda$.

Portanto,

$$\log \bar{\lambda} \circ f = \log \lambda. \quad (3.14)$$

Por outro lado, temos

$$(f_*X(\log \bar{\lambda})) (f(p)) = (f_*X)_{f(p)}(\log \bar{\lambda}) \quad (3.15)$$

Como $X_p \in T_p\Sigma$, isto é, existe uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Sigma$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = X_p$, daí

$$(f_*X)_{f(p)} = df_p X_p = df_p \alpha'(0) = (f \circ \alpha)'(0),$$

logo na equação (3.15), temos

$$\begin{aligned} (f_*X(\log \bar{\lambda})) (f(p)) &= (f \circ \alpha)'(0)(\log \bar{\lambda}) \\ &= \left. \frac{d}{dt} [(\log \bar{\lambda}) \circ (f \circ \alpha)](t) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} [\log \lambda \circ \alpha](t) \right|_{t=0} \\ &= \alpha'(0)(\log \lambda) \\ &= X_p(\log \lambda) = (X(\log \lambda))(p) \end{aligned}$$

Portanto,

$$(f_*X(\log \bar{\lambda})) \circ f = X(\log \lambda), \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{X}(\Sigma). \quad (3.16)$$

Note que,

$$\begin{aligned} f_* (X(\log \lambda)Y) (f(p)) &= df_p (X(\log \lambda)(p)Y_p) \\ &= X(\log \lambda)(p)df_p Y_p \\ &= X(\log \lambda)(p) (f_* Y) (f(p)), \end{aligned}$$

logo, usando a equação (3.16), tem-se

$$\begin{aligned} f_* (X(\log \lambda)Y) (f(p)) &= [(f_* X(\log \bar{\lambda})) \circ f] (p) (f_* Y) (f(p)) \\ &= (f_* X(\log \bar{\lambda})) (f(p)) (f_* Y) (f(p)) \\ &= [(f_* X(\log \bar{\lambda})) (f_* Y)] (f(p)) \end{aligned}$$

Portanto,

$$f_* (X(\log \lambda)Y) = (f_* X(\log \bar{\lambda})) (f_* Y). \quad (3.17)$$

Analogamente, temos

$$f_* (Y(\log \lambda)X) = (f_* Y(\log \bar{\lambda})) (f_* X). \quad (3.18)$$

Agora, usando as equações (3.17) e (3.18) na equação (3.13), tem-se

$$\begin{aligned} B^\lambda(X, Y) - B(X, Y) &= g(X, Y) [f_* (\text{grad}(\log \lambda)) - \overline{\text{grad}(\log \bar{\lambda})}] \\ &= g(X, Y) \left[(\overline{\text{grad}(\log \bar{\lambda})})^\top - \overline{\text{grad}(\log \bar{\lambda})} \right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$B^\lambda(X, Y) - B(X, Y) = -g(X, Y) [\overline{\text{grad}(\log \bar{\lambda})}]^\perp. \quad (3.19)$$

Seja $\eta \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$. Logo pela equação (1.9), tem-se

$$g(S_\eta(X), Y) = \tilde{g}(B(X, Y), \eta)$$

e

$$g(S_\eta^\lambda(X), Y) = \tilde{g}(B^\lambda(X, Y), \eta)$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$. Daí

$$g(S_\eta^\lambda(X), Y) - g(S_\eta(X), Y) = \tilde{g}(B^\lambda(X, Y) - B(X, Y), \eta).$$

Logo, usando a equação (3.19), obtemos

$$g(S_\eta^\lambda(X), Y) - g(S_\eta(X), Y) = -g(X, Y) \tilde{g} \left([\overline{\text{grad}(\log \lambda)}]^\perp, \eta \right) \quad (3.20)$$

Observe que, $S_\eta(E_i) = k_i(\eta)E_i$, onde $\{E_i\}$ é um referencial (ortonormal) móvel em U , onde U é uma vizinhança de p em M , logo $g^\lambda(\lambda^{-1}E_i, \lambda^{-1}E_j) = \delta_{ij}$.

Observemos também que,

$$\begin{aligned}
g^\lambda (S_\eta^\lambda(\lambda^{-1}E_i), \lambda^{-1}E_j) &= \lambda^2 g (S_\eta^\lambda(\lambda^{-1}E_i), \lambda^{-1}E_j) \\
&= g (S_\eta^\lambda(E_i), E_j) \\
&= g (S_\eta(E_i), E_j) - g(E_i, E_j) \tilde{g}([\overline{\text{grad}}(\log \bar{\lambda})]^\perp, \eta) \\
&= g(k_i(\eta)(E_i), E_j) - \delta_{ij} \tilde{g}([\overline{\text{grad}}(\log \bar{\lambda})]^\perp, \eta) \\
&= (k_i(\eta) - \tilde{g}([\overline{\text{grad}}(\log \bar{\lambda})]^\perp, \eta)) \delta_{ij}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Portanto, $\{\lambda^{-1}E_i\}$ é uma base ortonormal que diagonaliza S_η^λ . Denotamos por $k_1^\lambda(\eta)$ e $k_2^\lambda(\eta)$ as curvaturas principais de S_η^λ . Isto é,

$$S_\eta^\lambda(\lambda^{-1}E_i) = k_i^\lambda(\eta)\lambda^{-1}E_i \tag{3.22}$$

Por outro lado, como $S_\eta^\lambda(E_i) = k_i^\lambda(\eta)E_i$ obtemos

$$g(S_\eta^\lambda(E_i), E_j) = k_i^\lambda(\eta)\delta_{ij} \tag{3.23}$$

Logo, das expressões (3.21) e (3.23), obtemos

$$k_i^\lambda(\eta) = k_i(\eta) - \tilde{g}([\overline{\text{grad}}(\log \bar{\lambda})]^\perp, \eta).$$

Da expressão acima, decorre que

$$k_1^\lambda(\eta) - k_2^\lambda(\eta) = k_1(\eta) - k_2(\eta). \tag{3.24}$$

Observe que, $\tilde{g}^\lambda = \lambda^2 \tilde{g}$ e $\eta^\lambda = \lambda^{-1}\eta$. Como

$$\tilde{g}^\lambda(\eta^\lambda, \eta^\lambda) = \lambda^2 \tilde{g}(\lambda^{-1}\eta, \lambda^{-1}\eta) = \tilde{g}(\eta, \eta) = 1$$

logo, η^λ é uma seção normal unitária respeito a \tilde{g}^λ . Daí,

$$\begin{aligned}
g^\lambda (S_{\eta^\lambda}^\lambda(X), Y) &= \tilde{g}^\lambda (B^\lambda(X, Y), \eta^\lambda) \\
&= \lambda^2 \tilde{g} (B^\lambda(X, Y), \lambda^{-1}\eta)
\end{aligned}$$

e daí decorre a seguinte expressão

$$g^\lambda (S_{\eta^\lambda}^\lambda(X), Y) = \lambda \tilde{g} (B^\lambda(X, Y), \eta) \tag{3.25}$$

Por outro lado, tem-se

$$g^\lambda (S_\eta^\lambda(X), Y) = \lambda^2 \tilde{g} (B^\lambda(X, Y), \eta) \tag{3.26}$$

Agora, das equações (3.25) e (3.26), segue-se

$$g^\lambda (S_\eta^\lambda(X), Y) = g^\lambda (\lambda S_{\eta^\lambda}^\lambda(X), Y)$$

de onde segue-se que

$$S_\eta^\lambda = \lambda S_{\eta^\lambda}^\lambda \tag{3.27}$$

Logo, das equações (3.22) e (3.27), tem-se

$$k_i^\lambda(\eta) = \lambda k_i^\lambda(\eta^\lambda). \quad (3.28)$$

Agora, substituindo a expressão (3.28), na equação (3.24), obtemos

$$\lambda (k_1^\lambda(\eta^\lambda) - k_2^\lambda(\eta^\lambda)) = k_1(\eta) - k_2(\eta)$$

Assim,

$$\lambda^2 (k_1^\lambda(\eta^\lambda) - k_2^\lambda(\eta^\lambda))^2 = (k_1(\eta) - k_2(\eta))^2 \quad (3.29)$$

Daí, pelo Teorema de Gauss (no caso de hipersuperfícies), obtemos

$$\begin{aligned} (k_1(\eta) - k_2(\eta))^2 &= (k_1(\eta) + k_2(\eta))^2 - 4k_1(\eta)k_2(\eta) \\ &= (2H)^2 - 4(K - \bar{K}). \end{aligned}$$

Assim,

$$(k_1(\eta) - k_2(\eta))^2 = 4(H^2 - K + \bar{K}). \quad (3.30)$$

Analogamente, temos

$$(k_1^\lambda(\eta^\lambda) - k_2^\lambda(\eta^\lambda))^2 = 4(H_\lambda^2 - K_\lambda + \bar{K}_\lambda) \quad (3.31)$$

Logo, substituindo as equações (3.30) e (3.31) na equação (3.29), obtemos

$$\lambda^2 (H_\lambda^2 - K_\lambda + \bar{K}_\lambda) = H^2 - K + \bar{K}.$$

Observe que,

$$dA_\lambda = \sqrt{E_\lambda G_\lambda - (F_\lambda)^2} dx dy = \lambda^2 \sqrt{EG - F^2} dx dy = \lambda^2 dA.$$

Assim,

$$(H_\lambda^2 - K_\lambda + \bar{K}_\lambda) dA_\lambda = (H^2 - K + \bar{K}) dA.$$

Logo, aplicando o teorema de Gauss-Bonnet, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Sigma (H_\lambda^2 + \bar{K}_\lambda) dA_\lambda - 2\pi\chi(\Sigma) &= \int_\Sigma (H_\lambda^2 - K_\lambda + \bar{K}_\lambda) dA_\lambda \\ &= \int_\Sigma (H^2 - K + \bar{K}) dA \\ &= \int_\Sigma (H^2 + \bar{K}) dA - 2\pi\chi(\Sigma). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_\Sigma (H_\lambda^2 + \bar{K}_\lambda) dA_\lambda = \int_\Sigma (H^2 + \bar{K}) dA.$$

□

3.2 Demonstração do Teorema Principal

Seja $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3(1) \subset \mathbb{R}^4$ uma imersão de uma superfície diferenciável orientável Σ na esfera unitária $\mathbb{S}^3(1)$, a qual denotaremos simplesmente por \mathbb{S}^3 , e $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$ um campo diferenciável de vetores normais unitários em Σ . Considere, para cada $t \in \mathbb{R}$, a aplicação paralela

$$\begin{aligned} \psi_t : \Sigma &\longrightarrow \mathbb{S}^3 \\ p &\longmapsto \psi(p) \cos t + N(p) \sin t. \end{aligned}$$

Além disso, para todo $p \in \Sigma$, a aplicação $\gamma_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^3$ definida por $\gamma_p(t) = \psi_t(p)$ é uma geodésica de \mathbb{S}^3 , isto é,

$$\frac{D}{dt} \gamma_p(t) = 0.$$

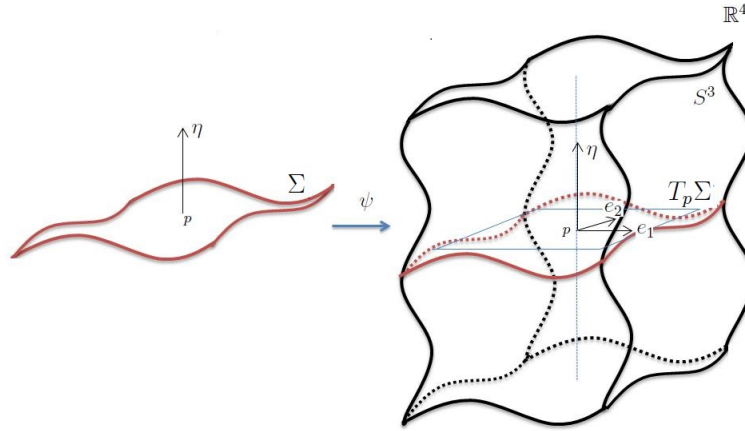


Figura 3.1:

Seja $\eta \in (T_p\Sigma)^\perp$ tal que $N|_p = \eta$. Como o operador forma

$$S_\eta : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$$

é uma aplicação linear auto-adjunta, então pelo teorema espectral existe uma base ortogonal de vetores próprios $\{e_1, e_2\}$ de $T_p\Sigma$ tal que $S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = 1, 2$, onde λ_1 e λ_2 são valores próprios reais de S_η . Além disso, sendo Σ e \mathbb{S}^3 orientadas (isto é, podemos escolher uma orientação para Σ e \mathbb{S}^3), então o vetor η fica univocamente determinado, se exigirmos que $\{e_1, e_2\}$ seja uma base na orientação de Σ e $\{e_1, e_2, \eta\}$ seja uma base na orientação de \mathbb{S}^3 . Neste caso, denotamos os e_i direções principais e os $\lambda_i = k_i$ as curvaturas principais de ψ . Logo

$$S_\eta(e_i) = k_i e_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.32)$$

Sendo agora ∇ , $\tilde{\nabla}$ e $\bar{\nabla}$ as conexões Riemannianas de Σ , \mathbb{S}^3 e \mathbb{R}^4 , respectivamente, e considerando os campos $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^4)$, $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^3)$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, tais que \bar{X}, \bar{Y}

sejam as extensões locais de \tilde{X}, \tilde{Y} e estes por sua vez sejam as extensões locais de X, Y , respectivamente. Agora, identificando os espaços tangentes em \mathbb{R}^4 com o próprio \mathbb{R}^4 , definimos a conexão euclidiana, como o Exemplo 1.1.6., por

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})_p = d\overline{Y}_p(\overline{X}_p), \quad \overline{X}, \overline{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^4). \quad (3.33)$$

Como $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ é a esfera unitária com a métrica induzida pelo \mathbb{R}^4 , então a conexão Riemanniana de \mathbb{S}^3 é dada por

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, N \rangle N, \quad (3.34)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica a métrica euclidiana do \mathbb{R}^4 . Além disso, se $\overline{Y} = N$, então segue-se

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}. \quad (3.35)$$

Observe que, podemos escrever:

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T + (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\perp. \quad (3.36)$$

Como $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T$, e substituindo esta última expressão na equação (3.36), obtém-se

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} + (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\perp,$$

substituindo a equação acima em (3.34), obtemos

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\perp = \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, N \rangle N. \quad (3.37)$$

Agora, sejam $\overline{V} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^4)$, $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^3)$ e $v \in T_p\Sigma$ tais que \overline{V} seja uma extensão local de V e este por sua vez é uma extensão local de v . Substituindo $\overline{Y} = N$ na equação (3.37), tem-se

$$(\overline{\nabla}_v N)^\perp = 0. \quad (3.38)$$

Logo $\overline{\nabla}_v N = (\overline{\nabla}_v N)^T$. Considerando agora que $S_\eta(v) = -(\overline{\nabla}_v N)^T$ e usando a equação (3.33), obtém-se

$$S_\eta(v) = \overline{\nabla}_v N = -dN_p(v)$$

Como $S_\eta(e_i) = k_i e_i$. Então

$$dN_p(e_i) = -k_i e_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.39)$$

Daí, como $\psi_t = \psi \cos t + N \sin t$, então $(\psi_t)_*(e_i) = (\psi)_*(e_i) \cos t + (N)_*(e_i) \sin t$, $i = 1, 2$. Logo pela equação (3.39) e $(\psi)_*(e_i) = e_i$ tem-se

$$(\psi_t)_*(e_i) = (\cos t - k_i \sin t)e_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.40)$$

Logo, obtemos que o Jacobiano de ψ_t é

$$(Jac \psi_t)(p) = (\cos t - k_1 \sin t)(\cos t - k_2 \sin t). \quad (3.41)$$

Lema 3.2.1. Dado t , $0 \leq t < \pi$ o Jacobiano da aplicação ψ_t paralelo ao ψ satisfaz

$$Jac \psi_t \leq 1 + H^2,$$

onde $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ é a curvatura média da imersão ψ . Além disso, a igualdade é válida em todo ponto de Σ se, e somente se, ψ é totalmente umbílica e ψ_t é totalmente geodésica ou ψ é uma imersão mínima e $t = 0$.

Demonstração. Seja k_1 e k_2 as curvaturas principais de ψ , como $0 \leq (k_1 - k_2)^2$, tem-se

$$k_1 k_2 \leq H^2 \tag{3.42}$$

Agora, das expressões (3.41) e (3.42), e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue-se que

$$\begin{aligned} (Jac \psi_t)(p) &= (\cos t - k_1 \sin t)(\cos t - k_2 \sin t) \\ &= \cos^2 t - (k_1 + k_2) \sin t \cos t + k_1 k_2 \sin^2 t \end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\leq \cos^2 t - 2H \sin t \cos t + H^2 \sin^2 t \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned} &= (\cos t - H \sin t)^2 \\ &= |\langle (\cos t, \sin t), (1, H) \rangle|^2 \end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned} &\leq \|(\cos t, \sin t)\|^2 \|(1, H)\|^2 \\ &= 1 + H^2. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Daí, dado $0 \leq t < \pi$, obtemos

$$Jac \psi_t \leq 1 + H^2.$$

Agora provemos que a igualdade é válida em todo ponto de Σ se, e somente se, ψ é totalmente umbílica e ψ_t é totalmente geodésica ou ψ é uma imersão mínima e $t = 0$.

1º (\Rightarrow) Se $Jac \psi_t = 1 + H^2$, mostremos que ($H = 0$ e $t = 0$) ou (ψ é totalmente umbílica e ψ_t é totalmente geodésica).

Com efeito, pelas expressões (3.43) e (3.44), tem-se

$$k_1 k_2 \sin^2 t = H^2 \sin^2 t.$$

Daí

$$(k_1 k_2 - H^2) \sin^2 t = 0,$$

donde

$$\sin t = 0 \quad \text{ou} \quad k_1 k_2 = H^2.$$

Se $\sin t = 0$, então $t = 0$, pois $0 \leq t < \pi$, logo usando as expressões (3.45) e (3.46), obtém-se que os vetores $(\cos t, \sin t)$ e $(1, H)$ são paralelos, isto é, existe

uma constante $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $(\cos t, \sin t) = k(1, H)$. Agora, usando o fato que $t = 0$, tem-se $H = 0$, isto é, ψ é uma imersão mínima.

Se $k_1 k_2 = H^2$, então a imersão ψ é totalmente umbílica. Logo $\psi(\Sigma) \approx \Sigma$ é totalmente umbílica e pelo fato de serem Σ uma superfície fechada, segue-se que Σ é uma esfera de dimensão 2. Portanto, ψ é uma imersão totalmente geodésica.

2º (\Leftarrow) Agora, provemos que, se ψ é totalmente umbílica e ψ_t é totalmente geodésica ou ψ é uma imersão mínima e $t = 0$, então $Jac \psi_t = 1 + H^2$

(i) Se ψ é uma imersão mínima (isto é, $H = \frac{k_1 + k_2}{2} = 0$) e $t = 0$, então

$$\begin{aligned}
 (Jac \psi_t)(p) &= (\cos t - k_1 \sin t)(\cos t - k_2 \sin t) \\
 &= \cos^2 t - (k_1 + k_2) \sin t \cos t + k_1 k_2 \sin^2 t \\
 &= \cos^2 t - 2H \sin t \cos t + H^2 \sin^2 t \\
 &= (\cos t - H \sin t)^2 \\
 &= |\langle (\cos t, \sin t), (1, H) \rangle|^2 \\
 &= \|(\cos t, \sin t)\|^2 \|(1, H)\|^2 \\
 &= 1 + H^2.
 \end{aligned}$$

(ii) Suponha agora que ψ é totalmente umbílica e ψ_t é totalmente geodésica. Então pelo fato de ser ψ totalmente umbílica temos que $k_1 = k_2$, donde $k_1 = H = k_2$.

Como

$$(Jac \psi_t)(p) = (\cos t - k_1 \sin t)(\cos t - k_2 \sin t).$$

Daí

$$(Jac \psi_t)(p) = (\cos t - H \sin t)^2.$$

Por outro lado, ψ_t é totalmente geodésica, isto é, para cada $t \in [0, \pi)$ e para cada $p \in \psi_t(\Sigma) \approx \Sigma_t$, temos que, a segunda forma fundamental de ψ_t em p segundo o vetor normal $\eta_t \in (T_p \Sigma_t)^\perp$ é identicamente nula em p , logo a curvatura média H_t de Σ_t é identicamente nula em p , para $t \in [0, \pi)$, em particular $H_{t=0} = H = 0$, logo usando as equações (3.22) e (3.23), obtém-se que os vetores $(\cos t, \sin t)$ e $(1, H)$ são paralelos, isto é, existe uma constante $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $(\cos t, \sin t) = k(1, H)$, pelo fato de ser $H = 0$, obtém-se que $\sin t = 0$, daí $t = 0$, pois $0 \leq t < \pi$. Logo, pelo mesmo argumento da parte (i) concluímos que $(Jac \psi_t)(p) = 1 + H^2$.

□

Seja Ω uma região delimitada por uma dada superfície fechada Σ mergulhada em \mathbb{S}^3 . Para qualquer número t , $0 \leq t < \pi$, podemos considerar o conjunto

$$\Omega_t = \{p \in \mathbb{S}^3; \text{dist}(p, \Omega) \leq t\}$$

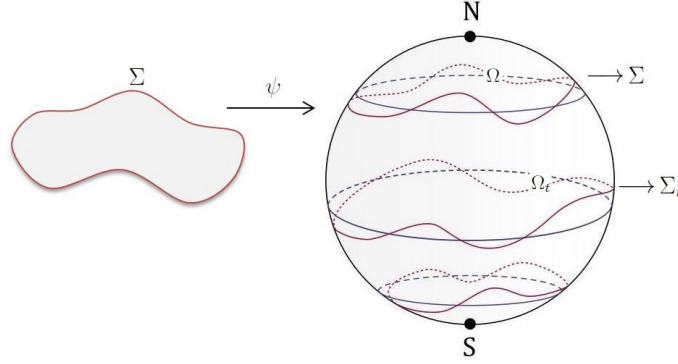


Figura 3.2:

de pontos cuja distância a Ω é menor ou igual a t , (veja a Figura 3.2). A distância entre Ω e um ponto em $\Omega_t - \Omega$ é atingido por uma geodésica minimizante a qual atinge à superfície Σ ortogonalmente. Esta distância é controlada pela função de corte

$$\begin{aligned} c : \Sigma &\longrightarrow \{0 \leq t < \pi\} \\ p &\longrightarrow c(p) = \inf\{t; \psi_t(p) \in \partial\Omega_t\} \end{aligned}$$

Como $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$ é um campo normal unitário ao longo de Σ , então $c(p)$ é o tempo final, tal que a geodésica normal

$$\begin{aligned} \gamma : [0, \pi) &\longrightarrow \mathbb{S}^3 \\ t &\longrightarrow \gamma(t) = p \cos t + N(p) \sin t \end{aligned}$$

alcança a distância a Σ . Logo, temos

$$\Omega_t = \Omega \cup \{p \cos t + N(p) \sin t; p \in \Sigma, 0 \leq s \leq \min\{t, c(p)\}\}$$

Além disso, $c(p)$ é menor ou igual ao primeiro valor focal ao longo da geodésica normal em p e, por isso, para qualquer t , $0 \leq t \leq c(p)$, o Jacobiano em p da superfície paralela $\psi_t : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$ é não negativa, isto é, $(Jac \psi_t)(p) \geq 0$.

Como qualquer ponto da fronteira de Ω_t encontra-se a uma distância t de Σ obtemos que

$$\partial\Omega_t \subseteq \psi_t(\{p \in \Sigma; (Jac \psi_t)(p) \geq 0\}). \quad (3.47)$$

Proposição 3.2.1. *Seja $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$ uma superfície compacta mergulhada em \mathbb{S}^3 e $\Omega \subset \mathbb{S}^3$ o fecho de uma das componentes de $\mathbb{S}^3(1) - \Sigma$. Então para qualquer t , $0 \leq t < \pi$, tem-se*

$$A(\partial\Omega_t) \leq \int_{\Sigma} (1 + H^2) dA,$$

onde H é a curvatura média de Σ . Além disso, a igualdade é satisfeita se, e somente se, Σ é qualquer superfície umbílica e Ω_t é uma semiesfera em $\mathbb{S}^3(1)$, ou Σ é uma superfície mínima.

Demonstração. A partir da inclusão (3.47), tem-se

$$A(\partial\Omega_t) \leq A(\psi_t(\{p \in \Sigma; (Jac \psi_t)(p) \geq 0\})). \quad (3.48)$$

Sejam $D = \psi_t(\{p \in \Sigma; (Jac \psi_t)(p) \geq 0\})$ e

$$\begin{aligned} f : \psi_t(D) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longrightarrow f(y) = 1 \end{aligned}$$

uma função integrável, logo usando o Teorema de Mudança de Variável, obtém-se

$$A(\psi_t(D)) = \int_{\psi_t(D)} 1 dA = \int_D (f \circ \psi_t) Jac \psi_t dA = \int_D 1 Jac \psi_t dA = \int_D Jac \psi_t dA. \quad (3.49)$$

Daí, usando as expressões (3.48) e (3.49), segue-se

$$A(\partial\Omega_t) \leq A(\psi_t(D)) = \int_D Jac \psi_t dA.$$

Daí, usando o Lema 3.2.1 na última expressão, obtemos

$$A(\partial\Omega_t) \leq \int_D (1 + H^2) dA \leq \int_{\Sigma} (1 + H^2) dA.$$

Agora, se a igualdade é satisfeita, então conclui-se que $Jac \psi_t \geq 0$ em Σ e usando o Lema 3.2.1, temos que ou Σ é uma esfera umbilica e ψ_t é totalmente geodésica, ou $t = 0$ e Σ é uma superfície mínima.

□

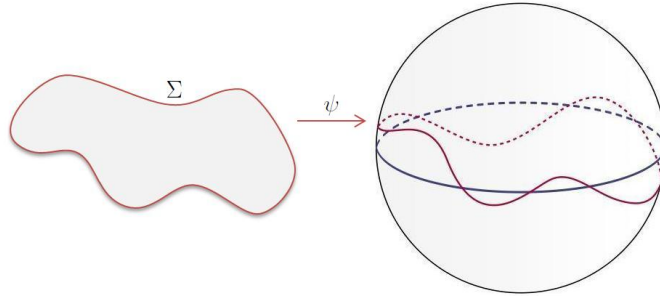


Figura 3.3:

Observação 3.2.1. Se M é uma variedade Riemanniana, orientável e fechada com curvatura de Ricci positiva, então seu perfil isoperimétrico I_M é côncavo, (veja [6]). Portanto, a partir da simetria de I_M , temos que o valor máximo do perfil isoperimétrico é dado por $I_M\left(\frac{V(M)}{2}\right)$.

Proposição 3.2.2. *Se $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$ é uma superfície compacta que separa \mathbb{S}^3 em duas componentes, então*

$$\int_{\Sigma} (1 + H^2) dA \geq \max I_{\mathbb{S}^3} = 4\pi,$$

e a igualdade é válida se, e somente se, Σ é uma esfera umbílica.

Demonstração. Observe que Σ é uma superfície fechada, pois ela é uma superfície compacta e sem bordo.

Seja Ω uma das componentes de $\mathbb{S}^3 - \Sigma$, (isto é, $\partial\Omega = \Sigma$). Considere

$$\Omega_t = \{p \in \mathbb{S}^3; \text{dist}(p, \Omega) \leq t\}, \quad 0 \leq t < \pi.$$

Como a função volume

$$\begin{aligned} V(\Omega_{(\cdot)}) : [0, \pi) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto V(\Omega_t), \end{aligned}$$

é uma função contínua, então existe $t_0 \in [0, \pi)$ tal que

$$V(\Omega_{t_0}) = \frac{V(\mathbb{S}^3)}{2}.$$

Além disso, pela Observação 3.2.1, tem-se

$$\max I_{\mathbb{S}^3} = I_{\mathbb{S}^3} \left(\frac{V(\mathbb{S}^3)}{2} \right). \quad (3.50)$$

Como $I_{\mathbb{S}^3} \left(\frac{V(\mathbb{S}^3)}{2} \right) = \min \left\{ A(\partial\Omega_{t_0}); \Omega_{t_0} \subset \mathbb{S}^3 \text{ região com } V(\Omega_{t_0}) = \frac{V(\mathbb{S}^3)}{2} \right\}$, então

$$I_{\mathbb{S}^3} \left(\frac{V(\mathbb{S}^3)}{2} \right) \leq A(\partial\Omega_{t_0}). \quad (3.51)$$

Logo, das expressões (3.50) e (3.51), e usando a Proposição 3.2.1, segue-se que

$$\max I_{\mathbb{S}^3} \leq \int_{\Sigma} (1 + H^2) dA.$$

Por outro lado, como \mathbb{S}^3 é uma variedade compacta e $0 < v_0 = V(\Omega_{t_0}) < V(\mathbb{S}^3)$, temos pelo Teorema 2.1.1, que existe uma região isoperimétrica $\tilde{\Omega}$ com $V(\tilde{\Omega}) = v_0$, e cuja fronteira $\partial\tilde{\Omega} = \tilde{\Sigma}$ é uma superfície isoperimétrica. Por outro lado, as superfícies isoperimétricas da esfera \mathbb{S}^3 são esferas geodésicas de dimensão 2, portanto $\tilde{\Sigma} = \mathbb{S}^2(r)$. Além do mais $r = 1$, pois caso contrário $V(\tilde{\Omega}) \neq \frac{V(\mathbb{S}^3)}{2}$. Logo $\max I_{\mathbb{S}^3} = 4\pi$.

□

Caso Σ seja uma superfície compacta imersa, não mergulhada em \mathbb{S}^3 . Então

$$\int_{\Sigma} (1 + H^2) dA > 8\pi. \quad (3.52)$$

Para a prova desta última desigualdade, veja [19], P. 286.

Agora, vejamos uma aplicação do perfil isoperimétrico, mais precisamente veremos a relação do perfil isoperimétrico da esfera unitária \mathbb{S}^3 e o espaço projetivo real $\mathbb{RP}^3(1)$. Seja

$$\begin{aligned} \bar{I}_{\mathbb{S}^3} : (0, 2\pi^2) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longrightarrow \bar{I}_{\mathbb{S}^3} = \{A(\partial\Omega); \Omega \subset \mathbb{S}^3 \text{ região isoperimétrica com } V(\Omega) = v\} \end{aligned}$$

a função que determina o perfil isoperimétrico da esfera unitária \mathbb{S}^3 , isto é, para qualquer $v \in (0, 2\pi^2)$, a função $\bar{I}_{\mathbb{S}^3}$ denota o área das esferas geodésicas de \mathbb{S}^3 que delimitam as regiões isoperimétricas com volume v .

Teorema 3.2.1. *O perfil isoperimétrico de $\mathbb{RP}^3(1)$ é dado por*

$$\bar{I}_{\mathbb{RP}^3(1)}(v) = \begin{cases} \bar{I}_{\mathbb{S}^3}(v), & \text{se } 0 < v \leq \mu \\ 2v^{\frac{1}{2}}(\pi^2 - v)^{\frac{1}{2}}, & \text{se } \mu \leq v \leq \pi^2 - \mu \\ \bar{I}_{\mathbb{S}^3}(\pi^2 + v), & \text{se } \pi^2 - \mu \leq v < \pi^2, \end{cases}$$

onde $\mu \cong 4.1432835$. Além disso, no primeiro caso a solução do problema isoperimétrico é uma esfera geodésica, no segundo caso a solução é um tubo ao redor de uma geodésica, e no último caso a solução é o exterior de uma esfera geodésica.

Demonstração. veja [23], Cap. 3. P. 302.

Teorema 3.2.2. *As superfícies isoperimétricas de $\mathbb{RP}^3(1)$ são esferas geodésicas e tubos ao redor das geodésicas de $\mathbb{RP}^3(1)$.*

Demonstração. Seja $\Sigma \subset \mathbb{RP}^3(1)$ uma superfície isoperimétrica. Pelo Teorema 2.1.4, Σ é compacta, conexa e orientável de gênero menor ou igual a 3. Se $\text{gênero}(\Sigma) = 0$ ou 1, então pelo Teorema 2.1.5, Σ é uma esfera umbílica ou plana. Tais superfícies são facilmente classificadas [26] e coincidem com as do enunciado do Teorema 3.2.2.

Se $\text{gênero}(\Sigma) = 2$ ou 3, então pelo Teorema 2.1.4, tem-se $(1 + H^2)A(\Sigma) < 2\pi$. Observe que, pela Proposição 3.2.2, para qualquer superfície fechada $\tilde{\Sigma}$ imersa em \mathbb{S}^3 , tem-se

$$\int_{\tilde{\Sigma}} (1 + \tilde{H}^2) d\tilde{A} \geq 4\pi, \quad (3.53)$$

e a igualdade é válida se, e somente se, $\tilde{\Sigma}$ é uma esfera umbilical. Se tomamos $\tilde{\Sigma}$ como a imagem do pullback de Σ em \mathbb{S}^3 , então pelo Corolário 1.3.1, obtém-se

$$\int_{\Sigma} (1 + H^2) dA = \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Sigma}} (1 + \tilde{H}^2) d\tilde{A}, \quad (3.54)$$

onde H e \tilde{H} são as curvaturas médias de Σ e $\tilde{\Sigma}$, respectivamente. Como $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$ é uma superfície isoperimétrica segue que sua curvatura média é constante, logo

$$4\pi \geq 2(1 + H^2)A(\Sigma) = 2 \int_{\Sigma} (1 + H^2)dA = \int_{\tilde{\Sigma}} (1 + \tilde{H}^2)d\tilde{A} \geq 4\pi. \quad (3.55)$$

Daí, das expressões (3.53), (3.54) e (3.55), segue-se que

$$2(1 + H^2)A(\Sigma) = \int_{\Sigma} (1 + H^2)dA = \int_{\tilde{\Sigma}} (1 + \tilde{H}^2)d\tilde{A} \geq 4\pi \quad (3.56)$$

Por outro lado, $(1 + H^2)A(\Sigma) \leq 2\pi$. Substituindo essa desigualdade na expressão (3.56), obtemos

$$4\pi \geq \int_{\tilde{\Sigma}} (1 + \tilde{H}^2)d\tilde{A} \geq 4\pi.$$

Então $\tilde{\Sigma}$ é uma esfera redonda, o que é impossível, porque $\tilde{\Sigma}$ deve delimitar uma região simétrica de modo antipodal. Portanto, Σ só pode ser de gênero=0 ou 1, isto é Σ pode ser ou uma esfera geodésica ou um tubo ao redor de uma geodésica de $\mathbb{RP}^3(1)$.

□

Corolário 3.2.1. *Seja $\Sigma \subset \mathbb{RP}^3(1)$ uma superfície compacta de gênero positivo.*

- (a) *Se Σ divide $\mathbb{RP}^3(1)$ em duas regiões de mesmo volume, então $A(\Sigma) \geq \pi^2$ e a igualdade é válida se, e somente se, Σ é o toro de Clifford mínimo.*
- (b) *Se Σ divide $\mathbb{S}^3(1)$ em duas regiões antipodalmente simétricas de mesmo volume, então $A(\Sigma) \geq 2\pi^2$ e a igualdade é válida se, e somente se, Σ é o toro de Clifford mínimo.*

Demonstração. A parte (a). Com efeito, seja $\Omega \subset \mathbb{RP}^3(1)$ um domínio delimitado por Σ , (isto é, $\partial\Omega = \Sigma$). Como Σ divide $\mathbb{RP}^3(1)$ em duas regiões de mesmo volume. Então usando a Observação 3.2.1, segue-se que

$$\max I_{\mathbb{RP}^3(1)} = I_{\mathbb{RP}^3(1)} \left(\frac{V(\mathbb{RP}^3(1))}{2} \right). \quad (3.57)$$

Observe que,

$$I_{\mathbb{RP}^3(1)} \left(\frac{V(\mathbb{RP}^3(1))}{2} \right) = \min \left\{ A(\partial\Omega); \Omega \subset \mathbb{RP}^3(1) \text{ região com } V(\Omega) = \frac{V(\mathbb{RP}^3(1))}{2} \right\}.$$

Daí

$$I_{\mathbb{RP}^3(1)} \left(\frac{V(\mathbb{RP}^3(1))}{2} \right) \leq A(\partial\Omega). \quad (3.58)$$

Resta provar que

$$\max I_{\mathbb{RP}^3(1)} = \pi^2.$$

Com efeito, como $\mathbb{RP}^3(1)$ é uma variedade compacta com $0 \leq v = V(\Omega) < V(\mathbb{RP}^3(1))$, usando o Teorema 2.1.1, segue-se que existe uma região isoperimétrica $\tilde{\Omega}$ com $V(\tilde{\Omega}) = v$, e cujo bordo $\partial\tilde{\Omega} = \tilde{\Sigma}$ é uma superfície isoperimétrica, logo usando o Teorema 3.2.1, segue-se que as superfícies isoperimétricas de $\mathbb{RP}^3(1)$ são esferas geodésicas e tubos ao redor das geodésicas, pelo fato de ser $\tilde{\Sigma}$ de gênero positivo, descartamos o fato de serem $\tilde{\Sigma}$ esferas geodésicas. Portanto $\tilde{\Sigma}$ é um tubo ao redor de uma geodésica de $\mathbb{RP}^3(1)$, isto é, $\tilde{\Sigma}$ é um toro de gênero positivo. Além disso, $\tilde{\Sigma}$ é uma superfície isoperimétrica, usando o Teorema 3.2.1, tem-se

$$\bar{I}_{\mathbb{RP}^3(1)}(v) = 2v^{\frac{1}{2}}(\pi^2 - v)^{\frac{1}{2}}.$$

Como $v = V(\tilde{\Omega}) = V(\Omega) = \frac{V(\mathbb{RP}^3(1))}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{V(\mathbb{S}^3)}{2} \right) = \frac{\pi^2}{2}$, logo

$$\bar{I}_{\mathbb{RP}^3(1)} \left(\frac{\pi^2}{2} \right) = 2 \left(\frac{\pi^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = \pi^2.$$

Daí

$$\max I_{\mathbb{RP}^3(1)} = \bar{I}_{\mathbb{RP}^3(1)} \left(\frac{\pi^2}{2} \right) = \pi^2. \quad (3.59)$$

Portando, das expressões (3.57), (3.58) e (3.59), obtemos

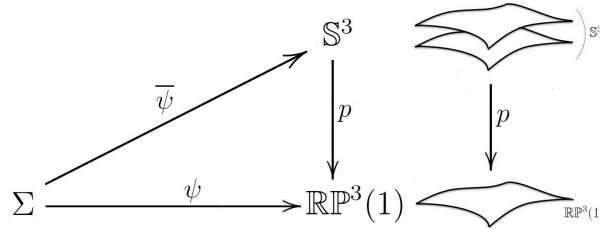
$$A(\Sigma) \geq \pi^2.$$

Teorema 3.2.3. *Seja $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{RP}^3(1)$ uma imersão, de uma superfície orientável compacta Σ no espaço projetivo real $\mathbb{RP}^3(1)$ com curvatura média H . Então*

$$\int_{\Sigma} (1 + H^2) dA \geq \pi^2,$$

e a igualdade é satisfeita se, e somente se, Σ é o toro de Clifford.

Demonstração. Seja $p : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{RP}^3(1)$ uma aplicação de recobrimento de duas folhas.



Se Σ é uma superfície compacta simplesmente conexa, então, pela Observação 1.3.2, a imersão ψ admite um levantamento $\bar{\psi} : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$ da superfície Σ na esfera unitária \mathbb{S}^3 . Observe que $p|_{\bar{\Sigma}} : \bar{\Sigma} \rightarrow \mathbb{RP}^3(1)$ é uma aplicação injetiva, (onde $\bar{\Sigma} \approx \bar{\psi}(\Sigma)$) e pelo fato de ser p uma aplicação de recobrimento, segue que $p|_{\bar{\Sigma}}$ é um difeomorfismo sobre sua imagen

$$p|_{\bar{\Sigma}} : \bar{\Sigma} \rightarrow p(\bar{\Sigma}).$$

Por outro lado, $\bar{\psi} : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$ é um levantamento de ψ , isto é, $\bar{\psi}$ é contínua tal que $p \circ \bar{\psi} = \psi$. Observe que, $p(\bar{\Sigma}) \approx \Sigma$, pois $p(\bar{\Sigma}) = (p \circ \bar{\psi})(\Sigma) = \psi(\Sigma)$, segue-se que

$$p|_{\bar{\Sigma}} : \bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma$$

é um difeomorfismo, e pelo fato de serem \mathbb{S}^3 e $\mathbb{RP}^3(1)$ ambas orientáveis, podemos considerar $p|_{\bar{\Sigma}}$ como um difeomorfismo que preserva orientação. Portanto

$$\int_{\bar{\Sigma}} (1 + \bar{H}^2) d\bar{A} = \int_{\Sigma} (1 + H^2) dA.$$

Daí, pela Proposição 3.2.2, tem-se

$$\int_{\Sigma} (1 + H^2) dA \geq 4\pi \geq \pi^2.$$

Agora, no caso que Σ não é simplesmente conexa, podemos usar o Teorema 1.3.1, que garante a existencia de uma aplicação de recobrimento

$$\tilde{p} : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma,$$

com $\tilde{\Sigma}$ simplesmente conexo. Como $\Sigma \subset \mathbb{RP}^3(1)$, podemos considerar $\tilde{p} : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ como uma aplicação de recobrimento de 2-folhas e $\tilde{\psi} : \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{S}^3$ uma imersão localmente congruente a ψ . Logo, se tomamos a imagem do pullback de Σ em \mathbb{S}^3 , então pelo Corolário 1.3.1, obtém-se

$$2 \int_{\Sigma} (1 + H^2) dA = \int_{\tilde{\Sigma}} (1 + \tilde{H}^2) d\tilde{A}, \quad (3.60)$$

onde H e \tilde{H} são as curvaturas médias de Σ e $\tilde{\Sigma}$, respectivamente.

Se $\tilde{\psi}$ não é um mergulho, então pela expressão (3.52), obtém-se

$$2 \int_{\Sigma} (1 + H^2) dA = \int_{\tilde{\Sigma}} (1 + \tilde{H}^2) d\tilde{A} > 8\pi,$$

segue-se que

$$\int_{\Sigma} (1 + H^2) dA > 4\pi > \pi^2.$$

Agora, considere $\tilde{\psi}$ um mergulho em \mathbb{S}^3 tal que $\tilde{\psi}(\tilde{\Sigma}) \approx \tilde{\Sigma}$ é invariante sob a aplicação antipoda. Seja Ω uma componente de $\mathbb{S}^3 - \tilde{\Sigma}$, (isto é, $\partial\Omega = \tilde{\Sigma}$), tal que $0 \leq V(\Omega) \leq \frac{1}{2}V(\mathbb{S}^3)$. Como Σ é orientável, segue-se que Ω é invariante sob a aplicação antipodal, logo Ω_t é também antipodalmente simétrica. Como o volume de Ω_t é uma aplicação contínua em t e $V(\Omega_t) \leq \frac{1}{2}V(\mathbb{S}^3)$, então existe $t_0 \in [0, \pi)$ tal que $V(\Omega_{t_0}) = \frac{1}{2}V(\mathbb{S}^3)$. Logo pelo Corolário 3.2.1, tem-se

$$A(\tilde{\Sigma}_{t_0}) \geq 2\pi^2, \quad (3.61)$$

onde, $\tilde{\Sigma}_{t_0} = \partial\Omega_{t_0}$, Por outro lado pela Proposição 3.2.1, tem-se

$$\int_{\tilde{\Sigma}} (1 + \tilde{H}^2) d\tilde{A} \geq A(\tilde{\Sigma}_{t_0}) \quad (3.62)$$

Logo, das expressões (3.61) e (3.62), segue-se que

$$\int_{\tilde{\Sigma}} (1 + \tilde{H}^2) d\tilde{A} \geq 2\pi^2,$$

substituindo esta última expressão na desigualdade (3.60), obtemos

$$\int_{\Sigma} (1 + H^2) dA \geq \pi^2.$$

Se a igualdade é válida, então pelo Lema 3.2.1, tem-se que $\tilde{\Sigma}$ é uma esfera umbílica, ou $t = 0$ e $\tilde{\Sigma}$ é mínima. A primeira opção é descartada pois Ω é invariante sob a aplicação antípoda e assim obtemos do Corolário 3.2.1 que $\tilde{\Sigma}$ é o toro de Clifford mergulhado em $\mathbb{S}^3(1)$.

□

Referências Bibliográficas

- [1] Almgren, F. J., *Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints*, Men. AMS **165**, 1976.
- [2] Bang-Yen Chen, *An Invariant of Conformal Mapping* Proc. Amer. Soc., **40** (1973), pp. 563-564.
- [3] Bang-Yen Chen, *Some Conformal Invariants of Submanifolds and Their Applications*. Bollettino U.M.I.(4), **10** (1974), 380-385.
- [4] Barbosa, J. L., Do Carmo, M., *Stability of Hypersurfaces with Constant Mean Curvature*, Math. Z. **185** (1984), 123-138.
- [5] Barbosa, J. L., Do Carmo, M. & Eschenburg, J., *Stability of Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in Riemannian Manifolds*, Math. Z. **197** (1988), 123-138.
- [6] Bavard, C. & Pansu, P. *Sur le volume minimal de \mathbb{R}^2* , Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **19** (1986), 479-490.
- [7] Camacho, C. & Lins Neto, A. *Teoria geométrica das folheações*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1943.
- [8] Chavel, I., *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, 1984.
- [9] Chavel, I., *Differential Geometric and Analytic Perspectives*, Cambridge Tracts in Mathematics 145, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [10] Chen, B.-Y., *Geometry of Submanifolds*. Marcel Dekker, New York, 1973.
- [11] Do Carmo, P. M., *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 4a Edição, 2008.
- [12] Gallot, S., *Inégalités isopérimétriques et analytiques sur les variétés Riemanniennes*, Asterisque, **163-164** (1988), 31-91.
- [13] Gonzalez, E., Massari, U. & Tamanini, I., *On the regularity of boundaries of sets minimizing perimeter with a volume constraint*. Indiana Univ. Math. J. **32** (1983), 25-37.
- [14] Grüter, M., *Boundary regularity for solutions of a partitioning problem*, Arch. Rat. Mech. Anal. **97** (1987), 261-270.

- [15] Hsiang, W. Y., *A symmetry theorem on isoperimetric regions*, PAM-409, UC Berkeley, 1988.
- [16] Hsiang, W. Y., *Isoperimetric Regions and Soap Bubbles*, Proceedings conference in honor to Msnfredo do Carmo, Pitman survey in pure and. appl. Math. **52** (1991), 229-240.
- [17] Kobayachi, S., & Nomizu, K., *Foundations of Diferential Geometry*. Vol. II, Interscience Publishers, 1969.
- [18] Lee, J. M., *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Graduate Texts in Mathematics 176, Springer, 1997.
- [19] Li, P. & Yau, T., *A New Conformal Invariant and Its Applications to the Willmore Conjecture and the First Eigenvalue of Compact Surfaces*, Invent. Math. **69** (1982), 269-291.
- [20] Lima, E. L., *Curso de Análise Vol. 2*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2006.
- [21] Lima, E. L., *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2a. edição, 1998.
- [22] Morgan, F., *Geometric measure theory: a beginner's guide*, Academic Press, 2nd ed, 1998.
- [23] Ritoré, M. & Ros, A., *Stable Constant Mean Curvature Tori and the Isoperimetric Problem in Three Space Forms*, Comment. Math. Helvet. **67** (1999), 293-305.
- [24] Ros, A., *The Willmore Conjeture in the Real Projective Space*. Math. Res. Lett. (1999) 6, 487-493.
- [25] Ros, A., *The Isoperimetric and Willmore Problems*, Global differential geometry: the mathematical legacy of Alfred Gray (Bilbao, 2000), 149-161, Contemp. Math., 288, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2001).
- [26] Schwarz, H. A., *The Isoperimetric Problem*, Departamento de Geometria y Topologia, Facultad de Ciencias, Universidade de Granada 18071 - Granada, Spain.
- [27] Schwarz, H. A., *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Springer Verlag, Berlin, 1890.
- [28] Steiner, J., *Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général*, J. Reine Angew. Math. **24** (1842), 93-152.
- [29] Willmore, T. J., *Riemannian Geometry*. Oxford Science Publications, The Claredon Press/Oxford University Press, New York, 1993.
- [30] Willmore, T. J., *Total Curvature in Riemnnian Geometry*. Ellis Horwood, Chiches-ter, 1982.

- [31] Willmore, T. J., *Note on Embedded Surfaces*, An. Sti. Univ. Al. I. Cuza. Iasi. Sect. I a Mat. **11** (1998) 307-310.
- [32] White, J. A. *A Global Invariant of Conformal Mappings in Space*. Proc. Amer. Math. Soc. **38** (1973), 162-164.