Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

Curvas Pontuadas com Semigrupo de Weierstrass Simétrico

por

Carlos Mejia Aleman

Orientador: Prof. Renato Vidal da Silva Martins

Belo Horizonte 2015

Curvas Pontuadas com Semigrupo de Weierstrass Simétrico

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação apresentada por **Carlos Mejia Aleman.**

Belo Horizonte, 30 de Novembro de 2015.

Prof. **Renato Vidal da Silva Martins.**
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Renato Vidal Martins
Prof. André Contiero
Prof. André Gimenez Bueno

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Exatas, **ICEX**, como requisito parcial para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Agradecimentos

Ao término deste trabalho, deixo aqui meus sinceros agradecimentos: Ao Professor Renato Vidal, por toda dedicação, paciência e estímulo em sua orientação. Ao professor André Contiero quem é o dono original deste trabalho e que ajudou a esclarecer as ideias junto com Aislam. A todos os professores do Departamento de Matemática do ICEX. A Irene minha futura esposa e mãe de meu filho Tomás, pelo incentivo e segurança que me passou durante todo esse periodo. A meus pais Domitila e Carlos por me dar a chance de estudar e confiar em mim. Aos amigos da pós graduação, Pablo, Aislam, Yuri, Carlos Salazar, Julio, Vinicius, Henrique, Claudinha, Danton, Igor, Moacir, Javier e também aos amigos de sinuca e cerveja. A Andrea e Kelly secretarias e amigas. A CAPES pelo auxilio financeiro.

Resumo

Este trabalho detalha parte do artigo de Contiero e Stöhr [CS], onde se abordam o tema das estimativas para a dimensão de $\mathcal{M}_{\mathrm{S}}$ através de uma construção explícita de sua compactificação, onde o espaço de moduli original é visto como um aberto de um espaço maior, no qual se permite que as curvas admitam singularidades, desde que estas sejam Gorenstein.

Palavras-chave: Espaço de moduli, feixe, syzygies, semigrupos numéricos, semigrupos de Weierstrass, curvas pontuadas, lacuna, Gorenstein.

Abstract

This work details a part of the article of Contiero and Stöhr [CS], where is approached the estimatives for the dimenson of $\mathcal{M}_{\mathrm{S}}$ through a construction explicit of its compactification, where the original moduli space is seen as an open on a bigger space, where is allowed that the curves admit singularities, since they are Gorenstein.

Keywords: Moduli space, sheaves, feixe, syzygies, numerical semigroup, Weierstrass semigroup, pointed curves, gap, Gorenstein.

Conteúdo

Introdução

O estudo de curvas pontuadas com semigrupo de Weierstrass fixo é vasto na literatura. Particular interesse tem a construção de seu moduli, bem como a análise da dimensão deste.

Com respeito ao segundo problema, ao menos no caso em que as curvas são suaves, existem duas estimativas clássicas. Por um lado, Eisenbud e Harris mostraram que se $\mathcal{M}_{\mathrm{S}}$ é o espaço de moduli das curvas projetivas suaves pontuadas com semigrupo de Weierstrass S de gênero g e peso w então $\dim \mathcal{M}_{\mathrm{S}} \geq 3g - 2 - w$, e especificaram os casos para os quais vale a igualdade [EH, Trm. 3]. No sentido inverso, Deligne exibe em [D, Trm. 2.27] um limite superior para esta dimensão, qual seja, $\dim(\mathcal{M}_{\mathrm{S}}) \leq 2g - 2 + \lambda$ onde λ, igual ao peso, é um invariante totalmente determinado por S. Via Kontsevich e Zorich [KZ], Bullock notou em [Bu] quais são os casos em que esta cota superior é atingida

Motivados por estas questões, Contiero e Stöhr publicaram recentemente o artigo [CS], que é a referência-mestra deste trabalho. Nele, os autores abordam o tema das estimativas para a dimensão de $\mathcal{M}_{\mathrm{S}}$ através de uma construção explícita de sua compactificação, onde o espaço de moduli original é visto como um aberto de um espaço maior, no qual se permite que as curvas admitam singularidades, desde que estas sejam Gorenstein. A base de tal construção é precisamente o objetivo central destas linhas.

Começamos com um capítulo de preliminares, onde é dado o ferramental necessário para a compreensão do seguinte, que contêm os resultados principais. As Seções 1.1 e 1.2 devem ser comparadas uma com a outra. Na primeira exibimos os principais pontos da teoria de divisores de Weil para curvas suaves, ao passo que na segunda dizemos como a mesma teoria passa naturalmente para curvas singulares. Na essência, a Secão 1.2 é exatamente a teoria dos divisores "por produto"de Stöhr apresentada na linguagem de feixes. Esta teoria influenciou muitos artigos publicados depois, e exibe tanto uma construção natural de divisores canônicos em curvas singulares via mergulhos apropriados do dualizante, bem como uma obtenção construtiva de

Riemann-Roch seguindo os mesmos passos de sua demonstração original (embora não exibimos aqui) a partir de uma definição consistente e, no contexto, natural de grau, sem o uso imediato de característica de Euler. As Seções 2.3 e 2.4 são breves definições básicas de semigrupo numérico e semigrupo de Weierstrass.

No Capítulo 2 provamos os dois teoremas centrais. A Seção 2.1 é uma rápida descrição de curvas pontuadas Gorenstein com semigrupo de Weierstrass fixo. Já a Seção 2.2 merece mais comentários; parte do esforço para caracterizar as curvas pontuadas em questão está em mostrar que os elementos do condutor de um semigrupo simétrico se escrevem como soma apropriada de elementos do seu complementar no semigrupo. Em particular, obtem-se uma prova alternativa, numérica e construtiva do famoso Teorema de Max Noether (provado para curvas suaves em 1880) no caso em que a curva é Gorenstein. Na Seção 2.3 começa-se a construir as equações que vão definir uma curva com as características citadas acima. Quanto a Seção 2.4, pode-se dizer que, de certa forma, trata-se do coração da prova, ou seja, o dito Lema das Syzygies, além de ser uma versão mais forte de [S, Lem. 2.3] é o que propicia grande parte do que será feito na seqüência.

A Seção 2.5 traz enunciado e (final da) prova dos dois resultados centrais deste trabalho: (a) uma caracterização de curvas pontuadas Gorenstein com semigrupo de Weierstrass fixo via equações quadráticas bem determinadas com certas condições de anulamento de seus coeficientes (Teorema 2.5.1) e (b) a realização das classes de isomorfismo de tais curvas como um quasecone afim cujas coordenadas são os coeficientes acima, e cujas equações são as condições de anulamento acima (Teorema 2.5.2) junto com uma ação bem definida de $\mathbb{G}_m(k)$, ou seja, a construção do moduli. Apenas lembramos que os casos de curvas não determinadas por equações quadráticas (que os teoremas não contemplam) são já bem conhecidos da literatura desde o início do século passado: as curvas trigonais e as quínticas planas.

Capítulo 1

Preliminares

Para todo este texto, C será sempre uma curva irredutível e projetiva sobre um corpo algebricamente fechado k. Denotamos por $k(C)$ o corpo das funções racionais de C, e por g o seu gênero aritmético. Vamos denotar também o espaço das diferenciais de $k(C)$ sobre k por $\Omega_{k(C)/k}$.

1.1 Divisores de Weil

Se C é suave podemos desenvolver a teoria de divisores de Weil, que segue abaixo.

Definição 1.1.1. Um *divisor (de Weil)* em C é uma soma formal

$$D = \sum_{P \in C} n_P \cdot P$$

onde $n_P \in \mathbb{Z}$ e $n_P = 0$ exceto para um número finito de pontos $P \in C$.

Note que a soma ponto a ponto faz do conjunto dos divisores de C, denotado $\mathrm{Div}(C)$, um grupo abeliano livre sobre C.

O *grau* de um divisor $D \in \mathrm{Div}(C)$ é

$$\deg(D) := \sum_{P \in C} n_P$$

Existe em $\mathrm{Div}(C)$ uma ordem parcial natural, i.e., se $D = \sum_{P \in C} n_P\, P$ e $D' = \sum_{P \in C} n'_P\, P$ então

$$D \geq D' \text{ se } n_P \geq n'_P \text{ para todo } P \in C$$

Se denotamos

$$0 := \sum_{P \in C} 0 \cdot P$$

então dizemos que D é *efetivo* se $D \geq 0$.

Como C é suave, para todo $P \in C$ está bem definida uma valorização

$$\begin{array}{rccc} v_P : & k(C)^* & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & f = t_P^n u & \longmapsto & v_P(f) = n \end{array}$$

onde t_P é um parámetro local em P e u uma unidade no anel local $\mathcal{O}_P$.

Para todo $f \in k(C)^*$ definimos então o *divisor de* f como

$$\operatorname{div}(f) := \sum_{P \in C} v_P(f) \cdot P$$

Definimos também o *divisor de zeros* e o *divisor de polos* de f, respectivamente, por

$$\operatorname{div}_0(f) = \sum_{v_P(f)>0} v_P(f) \cdot P$$

$$\operatorname{div}_\infty(f) = \sum_{v_P(f)<0} v_P(f) \cdot P$$

Das definições anteriores segue que

$$\operatorname{div}(f) = \operatorname{div}_0(f) - \operatorname{div}_\infty(f)$$

Definição 1.1.2. *Seja* $D \in \operatorname{Div}(C)$. *Definimos*

$$L(D) := \{f \in k(C) \,|\, D + \operatorname{div}(f) \geq 0\}$$

Temos que $L(D)$ é um espaço vetorial sobre k, cuja dimensão será denotada por $\ell(D)$.

Seja $\lambda \in \Omega_{k(C)/k}$ uma diferencial e seja $P \in C$. Definimos a valorização de λ em P da seguinte maneira: se t é um parâmetro local de P e a diferencial se escreve como $\lambda = f dt$ com $f \in k(C)$, diremos que $v_P(\lambda) := v_P(f)$

Definição 1.1.3. Um divisor de C é dito *canônico* se for da forma

$$K = \operatorname{div}(\lambda) := \sum_{P \in C} v_P(\lambda) \cdot P$$

para algum $\lambda \in \Omega_{k(C)/k}$.

Teorema 1.1.4 (Riemann-Roch). *Seja K um divisor canônico de C, então*

$$\ell(D) = \deg(D) + 1 - g + \ell(K - D)$$

para todo $D \in \mathrm{Div}(C)$.

Teorema 1.1.5. *Seja $D \in \mathrm{Div}(C)$ e K divisor canônico. Se $\deg(D) \geq 2g-1$, então $\ell(K - D) = 0$, em particular,*

$$\ell(D) = \deg(D) + 1 - g.$$

1.2 Feixes Coerentes de Ideais Fracionários

Se C não é suave, dada uma função $f \in k(C)$, note que $\mathrm{div}(f)$ não está bem definido, pois não existe valorização nos pontos singulares. Mesmo assim podemos adaptar a teoria anterior da seguinte forma: quem farão o papel de divisores de Weil são os feixes definidos abaixo.

Definição 1.2.1. Diremos que $\mathcal{F}$ é um *feixe de ideais fracionários* em C se for coerente e para todo $P \in C$, o stalk $\mathcal{F}_P$ é um $\mathcal{O}_P$-ideal fracionário de $k(C)$, o que equivale a dizer que:

(i) Para todo $P \in C$ vale:

  (a) $\mathcal{F}_P \subset k(C)$

  (b) existe $f_P \in k(C)$ tal que $f_P \cdot \mathcal{F}_P$ é um ideal de $\mathcal{O}_P$

(ii) $\mathcal{F}_P = \mathcal{O}_P$ para quase todo $P \in C$

Denotaremos por $\mathrm{Frac}(C)$ a subcategoria de $\mathrm{Coh}(C)$ correspondente aos feixes de ideais fracionários de C.

Suponha que C é suave. Então podemos ver $D = \sum_{P \in C} n_P \cdot P \in \mathrm{Div}(C)$ como o feixe $\mathcal{F} \in \mathrm{Frac}(C)$ tal que $\mathcal{F}_P = t_P^{-n_P} \cdot \mathcal{O}_P$ para todo $P \in C$. Mais genericamente, se C não é necessariamente suave, dada uma soma formal $D = n_1 \cdot P_1 + \ldots + n_s \cdot P_s$ onde os P_i são pontos suaves de C, podemos definir o feixe $\mathcal{O}_C(D) \in \mathrm{Frac}(C)$ por

$$\mathcal{O}_C(D)_Q = \begin{cases} t_Q^{-n_i}\mathcal{O}_Q & \text{se } Q = P_i \\ \mathcal{O}_Q & \text{se } Q \neq P_i \text{ para } 1 \leq i \leq s \end{cases}$$

O *grau* é definido da seguinte forma. Se $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{Frac}(C)$ são tais que $\mathcal{G}$ é um subfeixe de $\mathcal{F}$, então

$$\deg(\mathcal{F}) - \deg(\mathcal{G}) := \sum_{P \in C} \dim_k(\mathcal{F}_P/\mathcal{G}_P)$$

e definimos também que $\deg(\mathcal{O}) = 0$.

Para $\mathcal{F} \in \text{Frac}(C)$, o conjunto que faz o papel de "$L(D)$"é o espaço vetorial de suas seções globais, i.e.,

$$H^0(\mathcal{F}) = H^0(C, \mathcal{F}) = \Gamma(C, \mathcal{F}) := \{f \in k(C) \mid f \in \mathcal{F}_P \text{ para todo } P \in C\}$$

e sua dimensão será denotada por $h^0(\mathcal{F})$.

Agora definiremos o equivalente do divisor canônico no caso singular. Quem fará este papel é o feixe dualizante ω_C, definido como em [H, p. 241]. No caso específico de curvas, há uma analogia com a construção feita na Definição 1.1.3, que corresponde ao resultado abaixo, cuja prova se deduz de [EHKS].

Definição 1.2.2. Para cada $\lambda \in \Omega_{k(C)/k}$, defina $\omega_\lambda \in \text{Frac}(C)$, tal que para todo $P \in C$, o stalk $\omega_{\lambda,P}$ é o maior entre os $\mathcal{O}_P$-ideais fracionais F em $k(C)$ tal que $\sum_{\overline{P}|P} \text{Res}_{\overline{P}}(f\lambda) = 0$ para todo $f \in F$. Note que se P é suave, então temos simplesmente que $\omega_{\lambda,P} = t_P^{-v_P(\lambda)} \cdot \mathcal{O}_P$. Além disso, temos que o feixe dualizante $\omega_C = \omega = \omega_\lambda \cdot \lambda$ para todo $\lambda \in \Omega_{k(C)/k}$. Em particular, $\omega \cong \omega_\lambda$ e $h^0(\omega) = h^0(\omega_\lambda)$ para todo $\lambda \in \Omega_{k(C)/k}$

Agora daremos um exemplo de como se calcula ω_C.

Exemplo 1.2.3. Seja C o fecho projetivo de $\text{Spec}\, k[t^3, t^4, t^5]$. A curva C tem somente um ponto singular, digamos P, que corresponde a $t = 0$ se C é dada parametricamente; também temos $\mathcal{O}_P = k[t^3, t^4, t^5]_{(t^3,t^4,t^5)}$ onde a notação se refere à localização. A normalização é $\overline{C} = \mathbb{P}^1$, tomada como o fecho projetivo de $\text{Spec}\, k[t]$ e assim $k(C) = k(\overline{C}) = k(t)$. Existe somente um ponto $\overline{P} \in \overline{C}$ sobre P e temos $\overline{\mathcal{O}}_P = \mathcal{O}_{\overline{P}} = k[t]_{(t)}$. Assim o gênero de C é $g = \overline{g} + \dim(\overline{\mathcal{O}}_P/\mathcal{O}_P) = 0+2 = 2$ onde $\overline{g}$ é o gênero de $\overline{C}$. Para computar ω_C, podemos escolher qualquer diferencial. Tome, por exemplo, $\lambda = dt/t^3$. Pelo dito acima, $\omega_C \cong \omega_\lambda$ e $\omega_{\lambda,P}$ é o maior entre os $\mathcal{O}_P$-ideais fracionais F em $k(t)$ tal que $\text{Res}_{\overline{P}}(f\lambda) = 0$ para cada $f \in F$. Afirmamos que $\omega_{\lambda,P} = \mathcal{O}_P + t\mathcal{O}_P$. De fato, $t^2 \notin \omega_{\lambda,P}$ pois $\text{Res}_{\overline{P}}(t^2\lambda) = \text{Res}_{\overline{P}}(dt/t) = 1$; e se $t^2 \notin \omega_{\lambda,P}$ o mesmo temos para todo t^{-n} com $n \geq 1$ pois $\omega_{\lambda,P}$ é um $\mathcal{O}_P$-módulo e $t^n \in \mathcal{O}_P$ para todo $n \geq 3$. Portanto $\omega_{\lambda,P} \subset \mathcal{O}_P + t\mathcal{O}_P$. A inclusão contrária é imediata pois $\text{Res}_{\overline{P}}(f\lambda) = 0$ para todo $f \in \mathcal{O}_P + t\mathcal{O}_P$ Para calcular $H^0(\omega_\lambda)$ precisamos calcular os stalks de ω_λ nos pontos não singulares de C. Para um ponto

$Q \in C$ dado parametricamente por $t = c \neq 0$ temos que $t - c$ é o parâmetro local; escrevemos $\lambda = dt/t^3 = d(t-c)/t^3$ e como $1/t^3$ é uma unidade em $\mathcal{O}_Q$ temos que $v_Q(\lambda) = 0$ e portanto $\omega_{\lambda,Q} = \mathcal{O}_Q$. Finalmente, no ponto P_∞ no infinito, o parâmetro local é t^{-1} assim podemos escrever $\lambda = -t^{-1}d(t^{-1})$ e podemos verificar que $\omega_{\lambda,P_\infty} = t\mathcal{O}_{P_\infty}$. Portanto, analisando todos os stalks, vemos que $H^0(\omega_\lambda) = \langle 1, t \rangle$ e, como era esperado, $h^0(\omega) = 2 = g$.

Para enunciarmos a versão de feixes do Teorema de Riemann-Roch, falta interpretar a "diferença" entre dois feixes. Quem faz este papel é o feixe de homomorfismos. Dados $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Frac}(C)$ considere o feixe $\mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ cujos stalks são

$$\mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathcal{F})_P = \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_P, \mathcal{F}_P) = (\mathcal{F}_P : \mathcal{G}_P) = \{f \in k(C) \mid f\mathcal{G}_P \subset \mathcal{F}_P\}$$

Então mostra-se que, para todo $\lambda \in \Omega_{k(C)/k}$ e $\mathcal{F} \in \mathrm{Frac}(C)$, temos

$$h^0(\mathcal{F}) = \deg(\mathcal{F}) + 1 - g + h^0(\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \omega_\lambda))$$

Agora usaremos a dualidade de Serre:

$$H^0(\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \omega_\lambda)) \cdot \lambda = H^0(\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \omega_C)) = \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \omega_C) \cong H^1(\mathcal{F})^\vee$$

Em particular,

$$h^0(\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \omega_\lambda)) = h^0(\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \omega_C)) = h^1(\mathcal{F})$$

E assim temos

Teorema 1.2.4 (Riemann-Roch)**.** *Vale a relação*

$$h^0(\mathcal{F}) = \deg(\mathcal{F}) + 1 - g + h^1(\mathcal{F})$$

para todo $\mathcal{F} \in \mathrm{Frac}(C)$.

Dado um feixe $\mathcal{F}$ em um esquema de dimensão n, lembramos que sua *característica de Euler* é

$$\chi(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i h^i(\mathcal{F})$$

assim o teorema de Riemann-Roch resulta equivalente a

$$deg(\mathcal{F}) + 1 - g = \chi(\mathcal{F})$$

Por outro lado, lembramos que $h^0(\mathcal{O}_C) = 1$ e $h^1(\mathcal{O}_C) = g$. Logo

$$deg(\mathcal{F}) = \chi(\mathcal{F}) - \chi(\mathcal{O}_C)$$

que é como as vezes se costuma definir o grau de um feixe. Note que

$$\begin{aligned} H^0(\omega_C) &= \{f \in k(C) \mid f \in \omega_{C,P} \text{ para todo } P \in C\} \\ &= \{f \in k(C) \mid f\mathcal{O}_P \subset \omega_{C,P} \text{ para todo } P \in C\} \\ &= \{f \in k(C) \mid f \in (\omega_{C,P} : \mathcal{O}_P) \text{ para todo } P \in C\} \\ &= H^0(\mathcal{H}om(\mathcal{O}_C, \omega_C)) \\ &= H^1(\mathcal{O}_C)^\vee \end{aligned}$$

e portanto $h^0(\omega_C) = h^1(\mathcal{O}_C) = g$

Definição 1.2.5. *Um ponto $P \in C$ é dito* Gorenstein *se $\omega_{C,P}$ é um $\mathcal{O}_P$-módulo livre. Uma curva C é dita* Gorenstein *se todos os seus pontos o forem.*

Por fim, terminamos com o seguinte resultado

Teorema 1.2.6. *Seja $\mathcal{F} \in \mathrm{Frac}(C)$. Se $\deg(\mathcal{F}) \geq 2g - 1$, então $h^1(\mathcal{F}) = 0$, em particular,*

$$h^0(\mathcal{F}) = \deg(\mathcal{F}) + 1 - g$$

1.3 Semigrupos Numéricos

Um conjunto $\mathrm{S} \subset \mathbb{N}$ é dito um *semigrupo numérico* se:

(i) $0 \in \mathrm{S}$;

(ii) se $a, b \in \mathrm{S}$ então $a + b \in \mathrm{S}$;

(iii) $|\mathbb{N} - \mathrm{S}| < \infty$.

Escrveremos

$$\mathrm{S} = \{n_0, n_1, \ldots, n_i, \ldots\}$$

onde $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots$.

O *gênero* de S é dado por

$$g = g(\mathrm{S}) := |\mathbb{N} - S|$$

Todo elemento de $\mathbb{N} - S$ é dito uma *lacuna* de S. Sejam então $l_1 < l_2 < \ldots < l_g$ as lacunas de S. Definimos o o *peso* de S por

$$w(\mathrm{S}) := \sum_{i=1}^{g} l_i - i$$

O *condutor* de S é o número

$$c = c(\mathrm{S}) := l_g + 1$$

S é *simétrico* se tem a propriedade que um inteiro positivo l é uma lacuna se e somente se $c-1-l$ é uma não-lacuna, i.e., $l_g = 2g-1$, ou, equivalentemente,

$$n_i = 2g - 1 - l_{g-i} \ (i = 0, ..., g-1)\,. \tag{1.1}$$

Usaremos a seguinte notação

$$\langle r_1, \ldots, r_s \rangle := \left\{ n_1 r_1 + \ldots + n_s r_s \;\middle|\; n_i \in \mathbb{N} \text{ para } i \in \{1, \ldots, s\} \right\}$$

Exemplo 1.3.1. O semigrupo $\mathrm{S} = \langle 2, 5 \rangle$ tem gênero $g(\mathrm{S}) = 2$.

Exemplo 1.3.2. O semigrupo $\mathrm{S} = \langle 6, 8, 9, 10, 11 \rangle$ é um semigrupo numérico, tem gênero $g(\mathrm{S}) = 7$, peso $w(\mathrm{S}) = 7$ e condutor $c(\mathrm{S}) = 14$. Também S é simétrico, pois $l_g = 2g - 1$.

1.4 Semigrupos de Weierstrass

Definição 1.4.1. Seja C uma curva suave e $P \in C$. O *semigrupo de Weierstrass* de P é definido por

$$\mathrm{S}_P := \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \mathrm{div}_\infty(f) = nP \text{ para algum } f \in k(C) \right\} \tag{1.2}$$

No caso em que C não é suave, precisamos adaptar esta definição. A idéia é reescreve-la em termos de feixes, de modos que possa se aplicar a ambos os casos, suave e singular, embora o ponto do qual calcularemos o semigrupo de Weierstrass será sempre regular.

O primeiro passo é reescrever (1.2). Note que

$$\mathrm{S}_P = \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \begin{matrix} f \in \mathcal{O}_Q \text{ if } Q \neq P \\ f \in t_P^{-n}\mathcal{O}_P \text{ and } f \notin t_P^{-n+1}\mathcal{O}_P \end{matrix} \text{para algum } f \in k(C) \right\}$$

Por outro lado, sabemos que

$$\mathcal{O}_C(nP)_Q = \begin{cases} t_Q^{-n}\mathcal{O}_Q & \text{se } Q = P \\ \mathcal{O}_Q & \text{se } Q \neq P \end{cases}$$

$$\mathcal{O}_C((n-1)P)_Q = \begin{cases} t_Q^{-(n-1)}\mathcal{O}_Q & \text{se } Q = P \\ \mathcal{O}_Q\,, & \text{se } Q \neq P \end{cases}$$

e portanto

$$\mathrm{S}_P = \{n \in \mathbb{N} \,|\, H^0(\mathcal{O}_C(n-1)P) \subsetneq H^0(\mathcal{O}_C(nP))\}$$

que é a definição mais utilizada atualmente.

Capítulo 2

Curvas Pontuadas com Semigrupo de Weierstrass Simétrico

Nesta seção estudaremos o assunto específico de nosso trabalho, e provaremos os teoremas centrais.

2.1 Curvas Pontuadas

Seja C uma curva Gorenstein de gênero g, e seja $P \in C$ um ponto suave. Consideramos a curva pontuada (C, P). Seja $\mathrm{S} = \mathrm{S_P}$ o semigrupo de Weierstrass de P. Ordene os elementos de S por

$$0 = n_0 < n_1 < \ldots < n_i < \ldots$$

e temos que para cada $n_i \in \mathrm{S}$ existe

$$x_{n_i} \in H^0(\mathcal{O}_C(n_iP)) \setminus H^0(\mathcal{O}_C((n_i - 1)P)$$

Segue que

$$H^0(\mathcal{O}_C(n_iP)) = kx_{n_0} \oplus kx_{n_1} \ldots \oplus kx_{n_i}$$

e, em particular, $h^0(\mathcal{O}_C(n_iP) = i + 1$.

Suporemos que S é simétrico, i.e., $l_g = 2g - 1$. Logo, temos que

$$n_{g-1} = 2g - 2$$

e $H^0(\mathcal{O}_C((2g - 2)P))$ é gerada pelas g funções $x_0, x_1, ..., x_{g-1}$. Portanto

$$h^0(\mathcal{O}_C((2g - 2)P)) = g$$

e como $\deg(\mathcal{O}_C((2g-2)P)) = 2g-2$ temos que $\mathcal{O}_C((2g-2)P)$ é isomorfo ao feixe dualizante.

Também vamos supor que $l_2 = 2$, ou de maneira equivalente, o ponto de Weierstrass P é não hiperelítico. Então

$$(x_0 : x_1 : \ldots : x_{g-1}) : C \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$$

é um isomorfismo sobre sua imagem, dito mergulho canônico. Logo C é uma curva de grau $2g-2$ em $\mathbb{P}^{g-1}$ e os inteiros $l_i - 1$, para $i \in \{1, ..., g\}$ são as ordens de contato da curva com os hiperplanos em $P = (0 : ... : 0 : 1)$. De fato, se consideramos o hiperplano correspondente a $X_{g-i} = 0$, com $i \in \{1, \ldots, g\}$, então a ordem de contato com P é

$$\begin{aligned}
\mathrm{ord}_P(X_{g-i}) &= v_P(x_{n_{g-i}}/x_{n_{g-1}}) \\
&= v_P(x_{n_{g-i}}) - v_P(x_{n_{g-1}}) \\
&= -n_{g-i} - (-(n_{g-1})) \\
&= n_{g-1} - n_{g-i} \\
&= (2g-1-l_{g-(g-1)}) - (2g-1-l_{g-(g-i)}) \\
&= l_i - l_1 \\
&= l_i - 1
\end{aligned}$$

onde, na quarta igualdade, usamos (1.1).

Recíprocamente, todo semigrupo numérico simétrico não hiperelíptico S é o semigrupo de Weierstrass de algum ponto (suave) de uma curva, possivelmente singular. De fato, considere a curva racional

$$C^0 := \left\{ (t^{n_0} s^{l_g - 1} : t^{n_1} s^{l_{g-1}-1} : ... : t^{n_{g-1}} s^{l_1 - 1}) \;\middle|\; (t : s) \in \mathbb{P}^1 \right\} \subset \mathbb{P}^{g-1}$$

Ela tem uma singularidade em $Q = (1 : 0 : \ldots : 0)$. E o semigrupo de Weierstrass do ponto $P = (0 : 0 : \ldots : 1)$, que é suave, é jusstamente $\mathrm{S} = \{n_0, n_1, n_2, \ldots\}$. A singularidade Q é dita *uniramificada*, pois só existe um ponto $\overline{Q}$ da normalização $\pi\overline{C} \to C^0$ talque $\pi(\overline{Q}) = Q$. Na verdade, neste caso, $\overline{C} = \mathbb{P}^1$, o morfismo de normalização é

$$\pi = (t^{n_0} s^{l_g - 1} : t^{n_1} s^{l_{g-1}-1} : ... : t^{n_{g-1}} s^{l_1 - 1})$$

e $\overline{Q} = (0 : 1)$. A multiplicidade de Q é n_1, seu grau de singularidade é g, que coincide com o gênero aritmético de C^0 (ver [S, p. 190]).

2.2 O Teorema de Max Noether

Para estudar as relações entre os geradores do ideal da curva canônica $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$, consideramos os espaços de seções globais $H^0(\mathcal{O}_C(r(2g-2)P))$. Doravante, diremos que o feixe $\mathcal{O}_C(r(2g-2)P)$ é *r-canônico*. Começamos com o seguinte resultado numérico. Para um semigrupo S, denote por

$$\mathrm{S}^\circ := \{n_0, \dots, n_{g-1}\}$$

e seja τ o maior inteiro tal que $n_\tau = \tau n_1$. Se S é simétrico, então todo elemento de

$$[2g, 4g-4] \cap \mathbb{N}$$

pode ser escrito como soma de 2 elementos de S° da seguinte forma

$$\begin{array}{rl} n_i + n_{g-j} & i \in \{1, \dots, \tau\},\ j \in \{1, \dots, n_1 - 1\} \\ n_i + n_{g-j} & i \in \{\tau+1, ..., g-1\},\ j \in \{1, \dots, n_i - n_{i-1}\} \\ n_{\tau+1} + l_{g-\tau-1} + kn_1 & k \in \{1, \dots, \tau - 1\} \end{array}$$

e pode-se verificar que constituem uma lista de números distintos.

Exemplo 2.2.1. Considere o seguinte semigrupo:

$$\mathrm{S} = \{0, 3, 6, 8, 9, 11, 12, 14, \rightarrow\}$$

Temos que $g = 7$, e

$$\mathrm{S}^\circ = \{n_0 = 0, n_1 = 3, n_2 = 6, n_3 = 8, n_4 = 9, n_5 = 11, n_6 = 12\}$$

Vemos neste semigrupo que $\tau = 2$. Como S é simétrico, então todo elemento de $[14, 24] \cap \mathbb{N}$ pode ser escrito como soma de dois elementos de S° da forma: para o primeiro caso, temos

$$\begin{array}{rcl} n_1 + n_6 & = & 15 \\ n_1 + n_5 & = & 14 \\ n_2 + n_6 & = & 18 \\ n_2 + n_5 & = & 17 \end{array}$$

para o segundo caso temos

$$\begin{array}{rcl} n_3 + n_6 & = & 20 \\ n_3 + n_5 & = & 19 \\ n_4 + n_6 & = & 21 \\ n_5 + n_6 & = & 23 \\ n_5 + n_5 & = & 22 \\ n_6 + n_6 & = & 24 \end{array}$$

E para o terceiro caso temos que

$$n_3 + l_4 + n_1 = 16$$

que constitui uma lista distinta.

Deduzimos então o seguinte resultado

Lema 2.2.2. *Seja τ o maior inteiro tal que $n_\tau = \tau n_1$. Então*

$$\begin{array}{rl} x_{n_j} & j \in \{0, \ldots, g-1\} \\ x_{n_i} x_{n_{g-j}} & i \in \{1, ..., \tau\},\ j \in \{1, \ldots, n_1 - 1\} \\ x_{n_i} x_{n_{g-j}} & i \in \{\tau+1, ..., g-1\},\ j \in \{1, \ldots, n_i - n_{i-1}\} \\ x_{n_{\tau+1}} x_{l_{g-\tau-1}+kn_1} & k \in \{1, \ldots, \tau - 1\} \end{array}$$

constituem uma base para $H^0(\mathcal{O}_C((4g-4)P))$

Demonstração. Temos que para cada $i, j \in \{0, \ldots, g-1\}$ vale que

$$v_P(x_{n_i} x_{n_j}) = -(n_i + n_j) \geq -(2n_{g-1}) = -(4g-4)$$

e $x_{n_i} x_{n_j} \in \mathcal{O}_Q$ se $Q \neq P$; logo $x_i x_j \in H^0(\mathcal{O}_C((4g-4)P))$. Mais ainda, os $x_{n_1} x_{n_j}$ que aparecem na lista do enunciado do lema, são linearmente pois possuem valorizações diferentes pelo que foi visto no resultado de semigrupos acima. Pelo mesmo resultado, esta lista contem

$$(4g-4) - 2g + 1 = 2g - 3$$

elementos. Unindo-os a $x_{n_0}, \ldots, x_{n_{g-1}}$ encontramos $3g-3$ elementos linearmente independentes em $H^0(\mathcal{O}_C((4g-4)P))$. Por outro lado, como

$$\deg(\mathcal{O}_C((4g-4)P)) = 4g - 4 > 2g - 2$$

segue que $h^1(\mathcal{O}_C(4g-4)P)) = 0$. Logo, por Riemann-Roch,

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{O}_C(4g-4)P) &= \deg(\mathcal{O}_C((4g-4)P)) + 1 - g \\ &= 4g - 4 + 1 - g = 3g - 3 \end{aligned}$$

e portanto os elementos da lista formam uma base de $H^0(\mathcal{O}_C((4g-4)P))$. $\square$

Para cada $s \in [0, 4g-4] \cap \mathrm{S}$ enumeramos as partições de s como soma de dois elementos em S° da seguinte forma

$$s = a_{si} + b_{si} \qquad a_{si} \leq b_{si} \quad i \in \{0, \ldots, v_s\}$$

e abreviadamente

$$a_s := a_{s0} \qquad b_s := b_{s0}$$

Se $a_s < a_{s1} < ... < a_{sv_s}$ então $\{a_s + b_s\}_{s\in[0,4g-4]\cap \mathrm{S}}$ coincide com a lista que exibimos acima. No entanto, nem sempre usaremos esta suposição. Agora mostraremos que, para todo $r \geq 3$, qualquer elemento de

$$[4g-3, r(2g-2)] \cap \mathbb{N}$$

pode ser escrito como uma soma de r elementos de S° da seguinte forma

$$\begin{array}{rl} a_s + b_s + in_{g-1} & i \in \{0, \ldots, r-2\},\ s \in \{2g, \ldots, 4g-4\} \\ n_1 + (2g-n_1) + n_{g-2} + in_{g-1} & i \in \{0, ..., r-3\} \end{array}$$

De fato, temos que $4g-3 = n_1+(2g-n_1)+(2g-3)$. Para os números restantes, aplicamos indução em r escrevendo para $n \in ((r-1)(2g-2), r(2g-2)] \cap \mathbb{N}$ da seguinte forma

$$n = (n-2g+2) + (2g-2)$$

Temos que $2g-2 \in \mathrm{S}^\circ$, e, por indução, $n-2g+2$ se escreve como soma de $r-1$ elementos de S°.

Lema 2.2.3. *Para cada inteiro $r \geq 3$, temos que*

$$\begin{array}{rl} x_{n_j} & j \in \{0, \ldots, g-1) \\ x_{a_s}x_{b_s}x^i_{n_{g-1}} & i \in \{0, \ldots, r-2\}\ s \in \{2g, \ldots, 4g-4\} \\ x_{n_1}x_{2g-n_1}x_{n_{g-2}}x^i_{n_{g-1}} & i \in \{= 0, \ldots, r-3\} \end{array}$$

constituem uma base para $H^0(\mathcal{O}_C(r(2g-2)P))$

Demonstração. A demonstração é semelhante à do Lema 2.2.2 usando a análise numérica que foi feita acima. □

Denote agora o anel de polinômios em g variaáveis por

$$k[X_{n_0}, X_{n_1}, ..., X_{n_{g-1}}]$$

Repare que aqui estamos usando algo diferente do usual: em vez de indexar as variáveis de forma habitual, i.e., por X_i com $i \in \{0, 1, \ldots, g-1\}$, as estamos indexando pelos elementos de S° o que não faz diferença mas nos será útil adiante.

Seja $I(C) \subset k[X_{n_0}, X_{n_1}, \ldots, X_{n_{g-1}}]$ o ideal da curva $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$, i.e.

$$I = \bigoplus_{r=2}^{\infty} I_r(C)$$

onde $I_r(C)$ é o espaço vetorial dos polinômios homogêneos de grau r que se anulam em todos os pontos de C. Note que $r \geq 2$, ou seja, C não está contida em nenhum hiperplano de $\mathbb{P}^{g-1}$, ou, o que équivalente, C é uma curva *não-degenerada.*

Com o que já vimos até aqui, pode-se obter uma prova alternativa, numérica, e construtiva do famoso Teorema de Max Noether (que foi provado em 1880 para curvas suaves) no caso em que a curva é Gorenstein.

Teorema 2.2.4 (**Max Noether**). *Seja C uma curva integral e completa Gorenstein, definida sobre um corpo algebricamente fechado e seja ω o seu feixa dualizante. Então os homomorfismos naturais*

$$\mathrm{Sym}^r H^0(\omega) \longrightarrow H^0(\omega^{\otimes r})$$

são sobrejetores para todo $r \geq 1$.

Demonstração. Pelo Lema 2.2.3 temos que, para todo $r \geq 1$ o homomorfismo dos polinômios homogêneos de grau r nas secões globais do feixe r-canônico

$$k[X_{n_0}, X_{n_1}, ..., X_{n_{g-1}}]_r \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_C(r(2g-2)P))$$

induzido pelas substituições $X_{n_i} \mapsto x_{n_i}$, é sobrejetor para cada r. Então é só recordar que, como vimos no começo deste capítulo, temos que

$$\omega \cong \mathcal{O}_C((2g-2)P)$$

Por outro lado, $\mathcal{O}_C((2g-2)P)^{\otimes r} = \mathcal{O}_C(r(2g-2)P)$. E, por fim, o homomorfismo natural

$$\mathrm{Sym}^r H^0(\mathcal{O}_C((2g-2)P)) \longrightarrow k[X_{n_0}, X_{n_1}, ..., X_{n_{g-1}}]_r$$

induzido por $x_{n_i} \mapsto X_{n_i}$ é claramente sobrejetor para cada $r \geq 1$. $\square$

Como $I_r(C)$ é justamente o kernel da aplicação acima podemos usar Riemann-Roch para calcular a sua dimensão. De fato, lembrando que $h^1(\mathcal{O}_C(r(2g-2)P)) = 0$ se $r \geq 2$ pois $\deg(\mathcal{O}_C(r(2g-2))) = r(2g-2) > 2g-2$, temos

$$\begin{aligned}
\dim I_r(C) &= \dim(k[X_{n_0}, X_{n_1}, ..., X_{n_{g-1}}]_r) - h^0(\mathcal{O}_C(r(2g-2)P) \\
&= \binom{r+g-1}{r} - (r(2g-2)+1-g) \\
&= \binom{r+g-1}{r} - (2r-1)(g-1)
\end{aligned}$$

Segue que a dimensão do espaço das hiperquádricas de $\mathbb{P}^{g-1}$ que contêm C é

$$\dim I_2(C) = \frac{(g-2)(g-3)}{2}$$

2.3 Construindo as Equações

Por simplicidade, chamaremos um monômio de $k[X_{n_0}, X_{n_1}, \ldots, X_{n_{g-1}}]$ de

$$m(X) := X_{n_0}^{i_0} X_{n_1}^{i_1} \ldots X_{n_{g-1}}^{i_{g-1}}$$

e $m_n(X)$ é simplesmente um monômio qualquer indexado por um $n \in \mathbb{N}$.

Diremos que o *peso* de um monômio de $k[X_{n_0}, X_{n_1}, \ldots, X_{n_{g-1}}]$ é

$$w(m(X)) := i_0 n_0 + i_1 n_1 + \ldots + i_{n_{g-1}} n_{g-1}$$

Para cada inteiro $r \geq 2$, defina o k-espaço vetorial

$$\Lambda_r = \left\langle m_n(X) \;\middle|\; \begin{array}{c} w(m_n(X)) = n \in \mathrm{S} \cap [0, r(2g-2)] \\ w(m_i(X)) \neq w(m_j(X)) \text{ se } i \neq j \end{array} \right\rangle$$

Do que foi dito acima, concluimos que

$$k[X_{n_0}, X_{n_1}, ..., X_{n_{g-1}}]_r = \Lambda_r \bigoplus I_r(\mathcal{C})$$

para cada $r \geq 2$.

Se $s \in \mathrm{S} \cap [0, 4g-4]$ e $i \in \{1, ..., v_s\}$ temos que $x_{a_{si}} x_{b_{si}} \in H^0(\mathcal{O}_C(sP))$ e podemos escrever

$$x_{a_{si}} x_{b_{si}} = \sum_{n \in \mathrm{S} \cap [0,s]} c_{sin}\, x_{a_n} x_{b_n}$$

onde os coeficientes c_{sin} são constantes univocamente determinadas, dependentes das não-lacunas $n \leq s$ e da partição i de s. Multiplicando as funções $x_{n_1}, ..., x_{n_{g-1}}$ por constantes podemos assumir que $c_{sis} = 1$.

Logo, os polinômios

$$F_{si} := X_{a_{si}} X_{b_{si}} - X_{a_s} X_{b_s} - \sum_{n \in \mathrm{S} \cap [0, s-1]} c_{sin}\, X_{a_n} X_{b_n}$$

se anulam em todos os pontos de C. Eles são linearmente independentes, sua quantidade, digamos h, é igual a todas as somas que podemos fazer entre dois elementos de S^0 (que corresponde a todos os índices duplos si) menos o número de elementos de $\mathrm{S} \cap [0, 4g-4]$ (que corresponde aos índices duplos $s0$). Isto nos dá:

$$\begin{aligned} h &= \left(\binom{g}{2} + g \right) - (3g-3) \\ &= \binom{g+1}{2} - (3g-3) \\ &= \frac{(g-2)(g-3)}{2} \end{aligned}$$

e portanto formam uma base de $I_2(C)$.

Definimos também o *peso* de cada coeficiente por

$$w(c_{sin}) := s - n$$

Então, vendo F_{si} como um polinômio nas variáveis X_n e também nos coeficientes c_{sin}, ele vira um polinômio quase-homogêneo de peso s.

Para que $I(C)$ seja gerado por $I_2(C)$ vamos supor que

$$n_1 \geq 4 \quad \text{e} \quad \mathrm{S} \neq \langle 4, 5 \rangle$$

Com esta suposição, por [O, Teo 1.7] podemos assumir que

$$(a_{s1}, b_{s1}) = (n_i, 2g-2) \text{ para } s = n_i + 2g - 2 \text{ e } i \in \{0, \ldots, g-3\}$$

e por[S, Prp. 1.7] podemos assumir que b_s é a maior não-lacuna menor que $n_i + l_{g-i-1}$.

Como vimos acima, $C \subset V(F_{n_i+2g-2,1})$ com $i \in \{0, \ldots, g-3\}$, que a intersecta transversalmente em P. Logo, em uma vizinhança de P, a curva C é a interseção dessas $g-2$ hiperquádricas. Como C é integral, é determinada por essas $g-2$ hiperquádricas e, em particular, elas determinam as restantes $(g-2)(g-5)/2$ formas quadraticas da base de $I_2(\mathcal{C})$.

No que se segue, daremos uma prova algoriitmica de $I(C)$ é gerado pelas formas F_{si}. Começamos com o caso monomial, i.e., $C = C^0$.

Lema 2.3.1. *Temos que $I(C^0)$ é gerado pelos binômios*

$$F_{si}^0 := X_{a_{si}} X_{bsi} - X_{a_s} X_{b_s}$$

Demonstração. Seja I^0 o ideal gerado pelos F_{si}^0. Como $I(C^0)$ é homogêneo e quase-homogêneo, basta mostrar que se um polinômio homogêneo e quase-homogêneo pertence a $I(C^0)$ então pertence a I^0, i.e., a soma de seus coeficientes é zero.

Podemos assumir que $a_s < as1 < \ldots < a_{sv_s}$ para cada s. Ordenamos os monomios $\Pi_{k=0}^{g-1} X_{n_k}^{i_k}$ de acordo com a ordem lexicográfica dos vetores

$$\left(\sum i_k, \ \sum n_k i_k \ - i_0, \ -i_{g-1}, \ \ldots, \ -i_1 \right)$$

e aumentamos a base $\{F_{si}^0\}$ de I^0 a uma base de Grobner, adicionando certas somas de binômios cúbicos $\pm X_n F_{si}^{(0)}$ do mesmo peso (ver [S, pp. 198-198]).

Se F é homogêneo de grau r, escrevemo-lo, via algoritmo da divisão, como

$$F = \sum_{si} G_{si} F_{si}^0 + R$$

onde $R \in \Lambda_r$ e G_{si} é homogênea de grau $r-2$.

Se F é quase-homogêneo de peso w, então G_{si} é quase-homogêneo de peso $w-s$ e R é o único monômio em Λ_r de peso w cujo coeficiente é igual a soma dos coeficientes de F. Logo, se $F \in I(C^0)$ então $R = 0$ e $F \in I^0$. $\square$

2.4 O Lema das Syzygies

Lema 2.4.1 (Syzygy). *Para cada* $F^0_{s'i'} \neq F^0_{n_i+2g-2,1}$ *com* $i \in \{0, \dots, g-3\}$ *podemos escever*

$$X_{2g-2}F^0_{s'i'} + \sum_{\substack{n \in \mathrm{S} \cap [0,2g-1] \\ n+s=2g-2+s'}} \varepsilon^{s'i'}_{nsi} X_n F^0_{si} = 0$$

com $\varepsilon^{s'i'}_{nsi} \in \{-1, 0, 1\}$.

Demonstração. Tomando $F := F^0_{s'i'}$ ou $F := -F^0_{s'i'}$ podemos escrever

$$F = X_q X_r - X_m X_n$$

com $q, r, m, n \in \mathrm{S}$ satisfazendo $q + r = m + n$ e $m < q \leq r < n < 2g-2$, pois $b_{s1} = 2g-2$ se $s = n_i + 2g - 2$.

Caso 1 Se $n+1$ é uma lacuna, então $k := 2g - 2 - n + r \in \mathrm{S}$ e portanto

$$X_{2g-2}F + X_n(X_m X_{2g-2} - X_q X_k) - X_q(X_r X_{2g-2} - X_n X_k) = 0$$

onde os binômios dentro dos parênteses podem ser escritos como $F^0_{si} - F^0_{sj}$, F^0_{si} ou $-F^0_{sj}$.

Caso 2 Se $q+1$ é uma lacuna, $k := 2g - 2 - q + m \in \mathrm{S}$ e obtemos a mesma forma anterior trocando n por g e r por m.

Caso 3 E se $n+1, q+1 \in \mathrm{S}$ então temos

$$X_{2g-2}F + X_m(X_n X_{2g-2} - X_{n+1}X_{2g-3}) - X_{2g-3}(X_{q+1}X_r - X_m X_{n+1}) - X_r(X_q X_{2g-2} - X_{q+1}X_{2g-3}) = 0$$

e segue o resultado $\square$

Exemplo 2.4.2. Consideremos o semigrupo dado no 1.3.2. As lacunas de S são $l_1 = 1, l_2 = 2, l_3 = 3, l_4 = 4, l_5 = 5, l_6 = 7$ e $l_7 = 13$. Também temos que

$$\mathrm{S}^0 = \{\mathrm{n}_0 = 0, \mathrm{n}_1 = 6, \mathrm{n}_2 = 8, \mathrm{n}_3 = 9, \mathrm{n}_4 = 10, \mathrm{n}_5 = 11, \mathrm{n}_6 = 12\}.$$

Agora escreveremos $s \in [0, 4g-4] \cap \mathrm{S}$ como soma de dois elementos de S:

$$
\begin{aligned}
0 &= 0+0\\
6 &= 0+6\\
8 &= 0+8\\
9 &= 0+9\\
10 &= 0+10\\
11 &= 0+11\\
12 &= 0+12 = 6+6\\
14 &= 6+8\\
15 &= 6+9\\
16 &= 6+10 = 8+8\\
17 &= 6+11 = 8+9\\
18 &= 6+12 = 8+10 = 9+9\\
19 &= 8+11 = 9+10\\
20 &= 8+12 = 9+11 = 10+10\\
21 &= 9+12 = 10+11\\
22 &= 10+12 = 11+11\\
23 &= 11+12\\
24 &= 12+12
\end{aligned}
$$

Agora vamos escrever os geradores de $I(C^0)$:

$$
\begin{aligned}
F^0_{12,1} &= X_6^2 - X_0X_{12}\\
F^0_{16,1} &= X_8^2 - X_6X_{10}\\
F^0_{17,1} &= X_8X_9 - X_6X_{11}\\
F^0_{18,1} &= X_8X_{10} - X_6X_{12}\\
F^0_{18,2} &= X_9^2 - X_6X_{12}\\
F^0_{19,1} &= X_9X_{10} - X_8X_{11}\\
F^0_{20,1} &= X_9X_{11} - X_8X_{12}\\
F^0_{20,2} &= X_{10}^2 - X_8X_{12}\\
F^0_{21,1} &= X_{10}X_{11} - X_9X_{12}\\
F^0_{22,1} &= X_{11}^2 - X_{10}X_{12}
\end{aligned}
$$

Para poder aplicar o Lema 2.4.1, trabalharemos unicamente com $F^0_{16,1}, F^0_{17,1}, F^0_{18,2}, F^0_{19,1}, F^0_{20,2}$. Observemos que para $F^0_{16,1}$ estamos no Caso 3 dado na prova do Lema 2.4.1, logo temos

$$X_{12}F^0_{16,1} - X_6F^0_{22,1} - X_{11}F^0_{17,1} + X_8F^0_{20,1} = 0\,.$$

Para $F^0_{17,1}$ também estamos no Caso 3, logo temos

$$X_{12}F^0_{17,1} - X_{11}F^0_{18,2} + X_9F^0_{20,1} = 0\,.$$

Para $F^0_{18,2}$ temos que $n = 2g-2$, o que contradiz o fato de que $n < 2g-2$ na prova do lema, então neste caso procedemos da seguinte maneira: consideramos $\widehat{F}^0_{18,2} := F^0_{18,2} - F^0_{18,1}$ e vemos em qual dos casos ele se encontra. Neste caso $\widehat{F}^0_{18,2} = X_9^2 - X_8X_{10}$, então pertence ao Caso 3. Logo

$$X_{12}(\widehat{F}^0_{18,2}) + X_8(X_{10}X_{12} - X_{11}^2) - X_{11}(X_{10}X_9 - X_8X_{11}) - X_9(X_9X_{12} - X_{10}X_{11}) = 0$$

Logo

$$X_{12}(\widehat{F}^0_{18,2}) - X_8F^0_{22,1} - X_{11}F^0_{19,1} + X_9F^0_{21,1} = 0$$

Para $F^0_{19,1}$ estamos no Caso 3, logo temos

$$X_{12}F^0_{19,1} - X_{11}F^0_{20,2} + X_{10}F^0_{21,1} = 0\,.$$

Finalmente, para $F^0_{20,2}$ estamos na mesma situação que em $F^0_{18,2}$, logo temos

$$X_{12}(\widehat{F}^0_{20,2}) + X_{11}F^0_{21,1} - X_{10}F^0_{22,1} = 0$$

A partir de agora, inverteremos o raciocínio, ou seja, dado um semigrupo simétrico S de gênero g com $n_1 \geq 4$ e $S \neq \langle 4,5 \rangle$, e dadas as formas quadráticas

$$F_{si} = F^0_{si} - {\sum_{n=0}^{s-1}}' c_{sin} X_{a_n} X_{b_n}$$

procuraremos condições sobre as constantes c_{sin} tal que $V(F_{si})$ seja uma curva integral canônica Gorenstein.

Lema 2.4.3. *Seja I o ideal gerado pelas formas quadráticas F_{si}. Então*

$$k[X_{n_0}, X_{n_1}, ..., X_{n_{g-1}}]_r = I_r + \Lambda_r$$

para $r \geq 2$

Demonstração. Seja F um polinômio não homogêneo de grau r e peso w. Seja G sua componente quase-homogênea de peso w, e seja R o único monômio em Λ_r de peso w cujo coeficiente seja igual a soma dos coeficientes de G. Então $G - R \in I(C^0)$, e logo pelo Lema 2.3.1 existe uma partição tal que

$$G - R = \sum_{si} G_{si} F^{(0)}_{si}\,.$$

Substituindo cada G_{si} por sua componente homogênea de grau $r-2$, podemos assumir que G_{si} é homogêneo de grau $r-2$ e quase-homogêneo de peso $w-s$. Assim $F-\sum G_{si}F_{si}-R$ é homogêneo de grau r e $w(F)\leq w-1$. O resultado segue então por indução em w. $\square$

Substituindo no Lema Syzygy os binômios $F^0_{s'i'}$ e F^0_{si} obtemos para cada $s'i'$ uma combinação linear de monômios cúbicos cujos pesos são menores que $s'+2g-2$, os quais pelo Lema 2.4.3 admitem uma descomposição

$$X_{2g-2}F_{s'i'}+\sum_{\substack{n\in\mathrm{S}\cap[0,2g-1]\\ n+s=2g-2+s'}}\varepsilon^{s'i'}_{nsi}\,X_nF_{si}=\sum_{\substack{n\in\mathrm{S}\cap[0,2g-2]\\ n+s<2g-2+s'}}\eta^{s'i'}_{nsi}\,X_nF_{si}+R_{s'i'}$$

onde $R_{s'i'}$ é uma combinação linear de monômios cúbicos de pesos diferentes e menores que $s'+2g-2$. Logo, se $\varrho_{s'i'm}$ é o coeficiente do monômio de $R_{s'i'}$ de peso m temos que

$$R_{s'i'}(t^{n_0},t^{n_1},...,t^{n_{g-1}})=\sum_{m\in\mathrm{S}\cap[0,s'+2g-3]}\varrho_{s'i'm}t^m$$

Por construção, os coeficientes $\varrho_{s'i'm}$ e $\eta^{s'i'}_{nsi}$ são polinômios quase-homogêneos nas constantes c_{sin} e têm pesos $s'+2g-2-m$ e $s'+2g-2-n-s$ respectivamente.

2.5 Os Teoremas Centrais

Nesta seção provamos os dois teoremas centrais.

Teorema 2.5.1. *As formas quadráticas F_{si} definem uma curva integral canônica Gorenstein em $\mathbb{P}^{g-1}$ se e somente se os coeficientes c_{sin} satisfazem as equações quase-homogêneas*

$$\varrho_{s'i'm}=0$$

Mais ainda, o ponto $P=(0:\cdots:0:1)$ é um ponto suave da curva canônica com semigrupo de Weierstrass S.

Demonstração. Suponha que as formas quadraticas F_{si} definem uma curva integral canônica em $\mathbb{P}^{g-1}$. Como cada $R_{s'i'}$ pertence ao ideal I gerado pelas formas quadráticas F_{si}, segue que

$$R_{s'i'}(x_{n_0},x_{n_1},\cdots,x_{n_{g-1}})=0$$

Por outro lado, podemos escrever

$$R_{s'i'}(x_{n_0},\cdots,x_{n_{g-1}})=\sum_{m\,\in\,\mathrm{S}\,\cap\,[0,s'+2g-3]}\varrho_{s'i'm}\,z_{s'i'm}$$

onde cada $z_{s'i'm}$ é um monômio de peso m nas funções coordenadas projetivas $x_{n_0}, \cdots, x_{n_{g-1}}$, e portanto tem divisor de polo mP. Logo os coeficientes $\varrho_{s'i'm}$ são todos nulos.

Reciprocamente, suponha que os coeficientes c_{sin} satisfazem as equações

$$\varrho_{s'i'm} = 0$$

Então considere a variedade

$$V(\{F_{n_i+2g-2,1}\}_{i=0}^{g-3}) \subset \mathbb{P}^{g-1}$$

Ela é a interseção de $g-2$ hiperquádricas em $\mathbb{P}^{g-1}$. Elas se intersectam transversalmente em P, e determinam uma curva integral, digamos C, que contem P como ponto suave cuja reta tangente é a interseção dos seus hiperplanos tangentes $V(\{X_{n_i}\}_{i=0}^{g-3})$.

Considere agora $y_{n_0}, \ldots, y_{n_{g-1}}$, as funções coordenadas projetivas de C. Podemos tomar $y_{n_{g-1}} = 1$. Por (1.1) temos que

$$n_{g-1} - n_{g-2} = l_2 - l_1 = 2 - 1 = 1$$

pois $1, 2 \notin \mathrm{S}$. Segue que $t := y_{n_{g-2}}$ é um parâmetro local de C em P, e $y_{n_0}, \cdots, y_{n_{g-3}}$ são séries de potências em t da forma

$$y_{n_i} = t^{n_{g-1}-n_i} + \ldots$$

Por outro lado, fazendo $i = g - j$, com $j \in \{1, \ldots, g\}$ temos por (1.1) que

$$n_{g-1} - n_{g-j} = \ell_j - 1$$

Logo os g inteiros $l_i - 1$ com $i \in \{1, \ldots, g\}$ são as ordens de contato da curva $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$ com os hiperplanos. Em particular, C não está contida em nenhum deles.

Como por suposição os $R_{s'i'}$ são nulos, temos os syzygies

$$X_{2g-2}F_{s'i'} + \sum_{\substack{n \in \mathrm{S} \cap [0,2g-1] \\ n+s=2g-2+s'}} \varepsilon_{nsi}^{s'i'} X_n F_{si} - \sum_{\substack{n \in \mathrm{S} \cap [0,2g-2] \\ n+s<2g-2+s'}} \eta_{nsi}^{s'i'} X_n F_{si} = 0$$

Sabemos que $F_{n_i+2g-2,1}(y_{n_0}, \ldots, y_{n_{g-1}}) = 0$ para $i \in \{0, \ldots, g-3\}$. Logo, se trocamos $X_{n_0}, \cdots, X_{n_{g-1}}$ por $y_{n_0}, \cdots, y_{n_{g-1}}$ na equação acima obtemos um sistema de $(g-2)(g-5)/2$ equações lineares homogêneas nas incógnitas $F_{s'i'}(y_{n_0}, \cdots, y_{n_{g-1}})$ com coeficientes em $k[[t]]$. Dado que o n, s para $\varepsilon_{nsi}^{s'i'}$ satisfaz $n < 2g-2$ e $n + s = s' + 2g - 2$; e n, s para $\eta_{nsi}^{s'i'}$ satisfaz $n \leq 2g-2$ e $m + s < s' + 2g - 2$, concluímos que as entradas da diagonal da matriz do sistema tem termos constantes iguais a 1, enquanto o resto das entradas da matriz do sistema tem ordens positivas. Logo a matriz é inversível e segue que $F_{s'i'}(y_{n_0}, \cdots, y_{n_{g-1}}) = 0$ vale para todo $s'i'$. Isto mostra que $I := \langle F_{si} \rangle \subset I(C)$.

Pelo Lema 2.4.3 temos $\mathrm{codim}(I_r) \leq \dim(\Lambda_r)$ para todo $r \geq 2$. Por outro lado, como $I_r(C) \cap \Lambda_r = 0$, segue que $\dim(\Lambda_r) \leq \mathrm{codim}(I_r(C))$. Mas $I \subset I(C)$, donde $\mathrm{codim}(I_r(C)) \leq \mathrm{codim}(I_r)$. As três desigualdades acima nos levam a

$$\mathrm{codim}(I_r(C)) = \mathrm{codim}(I_r) = \dim(\Lambda_r) = (2g-2)r + 1 - g$$

onde a última igualdade segue da própria definição de Λ_r.

Portanto $I(C) = I$ e $C = V(\{F_{si}\})$. Mais ainda, o polinômio de Hilbert de C é

$$P_C(r) = (2g-2)r + 1 - g$$

Logo C tem grau $2g-2$, gênero aritmético igual á g, e, por construção, está contida em $\mathbb{P}^{g-1}$, o que é o bastante para concluir que C é uma curva canônica. $\square$

E agora provamos o resultado final

Teorema 2.5.2. *As classes de isomorfismo das curvas pontuadas integrais e completas Gorenstein com semigrupo de Weierstrass* S *estão em bijeção com as órbitas da ação de* $\mathbb{G}_m(k)$ *no quase-cone afim*

$$V := \left\{ p = (c_{sin})_{\substack{s \in \mathrm{S} \cap [0, 4g-4] \\ n \in \mathrm{S} \cap [0, s-1] \\ 1 \leq i \leq v_s}} \;\middle|\; \varrho_{s'i'm}(p) = 0 \right\}$$

definida em cada ponto por

$$(\ldots, c_{sin}, \ldots) \mapsto (\ldots, c^{s-n} c_{sin}, \ldots)$$

para cada $c \in \mathbb{G}_m(k)$

Demonstração. Pelo teorema anterior basta normalizar os coeficientes c_{sin} das F_{si}. Observamos que as funções x_n não são determinadas pelos divisores nP. Transformando

$$X_n \mapsto X_n + \sum_{m=0}^{n-1} d_{nm} X_m$$

onde os coeficientes d_{mn} são constantes, podemos normalizar $g(g-1)/2$ dos coeficientes c_{sin} para que sejam zero. Mais precisamente, para cada inteiro positivo w o número dos coeficientes c_{sin} de peso $s - n = w$ que podem ser normalizados é igual ao número de não-lacunas m tal que $m + w$ é uma não-lacuna menor ou igual a $2g - 2$ [S, Prp. 3.1].

Devido a estas normalizações, a única liberdade que nos resta é transformar x_{n_i} em $c^{n_i} x_{n_i}$ para $i \in \{0, \ldots, g-1\}$ com $c \in k^* = \mathbb{G}_m(k)$. $\square$

Bibliografia

[Bu] E.M. Bullock, *Subcanonical points on algebraic curves*, Trans. Amer. Math. Soc. 365 (2013), 99-122.

[CS] A. Contiero and K.-O. Stoehr. *Upper bounds for the dimension of moduli spaces of curves with symmetric Weierstrass semigroups*, J. Lond. Math. Soc., 88 (2013) 580–598.

[D] P. Deligne, *Intersections sur les surfaces régulières* (SGA 7, Exposé X), Lectures notes in Mathematics 340 (1973), 1-37, Springer-Verlag.

[EH] D. Eisenbud and J. Harris, *Existence, decomposition, and limits of certain Weierstrass points*, Invent. Math. 87 (1987), 495-515.

[EHKS] D. Eisenbud, J. Harris, J. Koh, M. Stillmann, *Determinantal Equations for Curves of High Degree*, American Journal of Mathematics 110 (1988) 513-539

[H] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer (1977).

[KZ] M. Kontsevich and A. Zorich, *Connected components of the moduli spaces of Abelian differentials with prescribed singularities*, Invent. Math. 153 (2003), 319-353.

[O] G. Oliveira, *Weierstrass semigroups and the canonical ideal of non-trigonal curves*, Manuscripta Math. 71 (1991), 431-450.

[S] K.-O. Stöhr, *On the moduli spaces of Gorenstein curves with symmetric Weierstrass semigroups*, J. reine angew. Math. 441 (1993), 189-213.