

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**BILHARES COM OBSTÁCULOS**

Reginaldo Braz Batista

**Belo Horizonte**

**2015**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

## BILHARES COM OBSTÁCULOS

Reginaldo Braz Batista

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Matemática.

**Orientador:** Mário Jorge Dias Carneiro  
**Co-Orientadora:** Sylvie Oliffson Kamphorst

**Belo Horizonte**  
**2015**

Para Felipe, Miguel, Rafael, Pedro, Yasmin, Julia,  
Kalev, Stella e todos os outros que quiserem vir.

---

## Agradecimentos

---

Agradeço:

- aos professores Mario Jorge e Sylvie pela orientação e por todo o suporte.
- à banca examinadora deste trabalho.
- aos professores e funcionários do DM/UFMG.
- aos colegas do DM/UFJF.
- a todos os colegas de graduação, mestrado e doutorado.
- a Luciana, Viviana e Ivana.
- a minha família.

.

---

## Abstract

---

We consider planar focusing billiards on annular tables constructed by adding a circular obstacle of center  $p$  and radius  $r$  in the interior of a region bounded by a convex curve  $\gamma$ . Parameterized families of billiards are obtained by fixing the pair  $(\gamma, p)$  and by taking the radius  $r$  as a parameter. We show that for a generically choice of  $(\gamma, p)$  and for  $r$  small enough, the map induced by the return of trajectories to the obstacle admits uniformly hyperbolic sets in neighborhoods of periodic orbits whose corresponding trajectories have perpendicular collisions with the obstacle. Generic conditions for the existence of such orbits are given and the geometry of the corresponding hyperbolic sets is described. In the case that the external boundary  $\gamma$  is a unitary circle and the center of obstacle has distance  $0 < \delta < 1$  from the center of  $\gamma$ , we consider a two parameter  $(\delta, r)$  family of billiards to obtain hyperbolic sets  $\Lambda_{\delta, r}$  which are  $\epsilon$ -dense in phase space with  $\epsilon \rightarrow 0$  as  $(\delta, r) \rightarrow (1, 0)$ . We also show the existence of parameters, arbitrarily close to  $(1, 0)$ , such that the corresponding billiard admits homoclinic tangences and linear elliptic periodic orbits with are  $\epsilon$  dense in phase space.

---

## Resumo

---

Estudamos bilhares planos em mesas anulares construídas pelo acréscimo de um obstáculo circular de centro  $p$  e raio  $r$  no interior da região limitada por uma curva convexa  $\gamma$ . Fixando  $(\gamma, p)$  obtemos famílias a um parâmetro de bilhares ao variar o raio  $r$ . Consideramos a família de sistemas induzidos pela dinâmica de retorno ao obstáculo. Para uma escolha genérica de  $(\gamma, p)$  e  $r$  pequeno o suficiente construímos famílias de conjuntos hiperbólicos. Se  $\gamma$  é um círculo de raio unitário e o centro do obstáculo dista  $0 < \delta < 1$  do centro de  $\gamma$  obtemos uma família de bilhares a dois parâmetros  $(\delta, r)$ . Para estas famílias construímos conjuntos hiperbólicos  $\Lambda_{\delta, r}$  que são  $\epsilon$ -densos no espaço de fase com  $\epsilon \rightarrow 0$  quando  $(\delta, r) \rightarrow (1, 0)$ . Também mostramos a existência de subconjuntos no espaço de parâmetros, acumulando  $(1, 0)$ , tais que os correspondentes bilhares admitem pontos de tangência homoclínica e pontos periódicos elípticos de órbitas  $\epsilon(\delta, r)$ -densas no espaço de fase.

---

## Conteúdo

---

Abstract . . . . .	vi
Resumo . . . . .	vii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Resultados . . . . .	3
<b>2 Preliminares</b>	<b>11</b>
2.1 Propriedades da aplicação de Bilhar . . . . .	11
2.2 Projetivização da derivada . . . . .	15
2.3 Hiperbolicidade via campo de cones . . . . .	18
2.4 Dinâmica Simbólica . . . . .	20
<b>3 Conjuntos Hiperbólicos em torno de pontos normais</b>	<b>21</b>
3.1 Preliminares . . . . .	21

---

3.2	Retângulos . . . . .	23
3.3	Campos de cones . . . . .	33
3.4	Dinâmica de retângulos . . . . .	41
3.5	Construção de conjuntos hiperbólicos . . . . .	51
3.6	Variedades Invariantes . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Existência de pontos periódicos normais</b>	<b>63</b>
4.1	Bilhares convexos genéricos . . . . .	63
4.2	Critério de existência de pontos normais . . . . .	67
4.3	Prova do teorema $B$ . . . . .	72
4.4	Prova do corolário 1.3 . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Os bilhares de Saitô</b>	<b>77</b>
5.1	Preliminares . . . . .	78
5.2	Conjuntos hiperbólicos $\epsilon$ -densos . . . . .	86
5.3	Pontos periódicos normais tangentes . . . . .	91
5.4	Tangências Homoclínicas . . . . .	102
5.5	Pontos periódicos linearmente elípticos . . . . .	108
5.6	Prova da proposição 5.2 . . . . .	113



# CAPÍTULO 1

---

## Introdução

---

Um **bilhar no plano** é o sistema dinâmico que descreve o movimento retilíneo e uniforme de uma partícula no interior de uma região  $Q \subset \mathbb{R}^2$  (mesa) sujeita a colisões elásticas com o bordo  $\partial Q$  satisfazendo a lei de reflexão. As trajetórias da partícula são completamente descritas pelos sucessivos estados de **colisão** com o bordo  $\partial Q$  que por sua vez descritos por um ponto de impacto e a velocidade imediatamente após este impacto. Isto induz um sistema discreto, bidimensional e conservativo  $(T, M, \mu)$  em que  $M$  (**espaço de fase**) é o conjunto de todas as colisões,  $T : M \rightarrow M$  (**aplicação de bilhar**) é transformação associando colisões consecutivas e  $\mu$  é uma medida absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue e preservada por  $T$ . Birkhoff [1] introduziu bilhares como modelos para problemas da mecânica clássica e Sinai [2] como modelos para problemas da mecânica estatística. Bilhares apresentam dinâmicas variadas dependendo da geometria da mesa  $Q$ . Uma questão central, que surgiu a partir dos trabalhos de Sinai, é a de saber quais as condições sobre a geometria do bordo da mesa que induzem dinâmicas

---

hiperbólicas.

Um bilhar na mesa  $Q$  é dito **dispersivo** se todas as componentes de  $\partial Q$  são curvas côncavas e **focalizador** se  $\partial Q$  admite componentes convexas. Sinai [2] observou que uma família infinitesimal de trajetórias se dispersa quando refletida em uma curva côncava e, conseqüentemente, bilhares dispersivos são (não uniformemente) hiperbólicos, i.e o conjunto de pontos com expoentes de Lyapunov positivos (**região de Pesin**) tem medida total. Em contraste, famílias de trajetórias focalizam quando refletidas em uma curva convexa implicando que, tipicamente, a dinâmica de um bilhar focalizador é mista apresentando regiões de hiperbolicidade e regiões de não hiperbolicidade (ilhas elípticas e regiões de Lazutkin [22]). Bunimovich [16] apresentou os primeiros exemplos de bilhares focalizadores hiperbólicos (região de Pesin de medida total) observando que, após passar por um ponto de focalização, uma família de trajetórias refletidas em uma componente convexa volta a se dispersar, portanto, se as componentes convexas estão suficientemente distantes das demais componentes de  $\partial Q$  então a dinâmica é hiperbólica. Este argumento (mecanismo de desfocalização) é a técnica padrão usada na prova da hiperbolicidade de bilhares focalizadores. São conhecidos alguns poucos exemplos de bilhares focalizadores cuja hiperbolicidade não é provada via este argumento [17], [7].

Aqui, estudamos bilhares focalizadores cujas mesas são construídas pelo acréscimo de um obstáculo circular no interior da região limitada por uma curva fechada e convexa (bordo externo). Estes bilhares não satisfazem as hipóteses requeridas para a aplicação do mecanismo de desfocalização mas há evidências numéricas de que apresentam comportamento hiperbólico como ilustrado numericamente por Saitô et al [5] considerando a dinâmica em mesas construídas pelo acréscimo de um obstáculo circular no interior de um disco de raio unitário. Os resultados numéricos de Saitô sugerem que a região de Pesin destes bilhares tem medida positiva quando o obstáculo côncavo está muito próximo do bordo externo convexo, o que contrasta com o que dita o mecanismo de desfocalização.

---

Resultados de C.Foltin [3] e Y.Chen [4] mostram que, para uma escolha genérica do bordo externo convexo, o sistema apresenta entropia topológica positiva e tão grande quanto se queira bastando para isso diminuir o raio do obstáculo. Este resultado é obtido analisando a dinâmica em torno de uma classe especial de trajetórias periódicas que colidem perpendicularmente com o obstáculo. Prova-se em [3] e [4] que em torno de tais órbitas existem conjuntos invariantes restritos aos quais a aplicação de bilhar é conjugada a um shift. O número de símbolos deste shift corresponde ao número de pontos normais e cresce quando o raio do obstáculo vai a zero.

Estudamos famílias de bilhares em mesas com obstáculos considerando a evolução da dinâmica quando o raio do obstáculo tende a zero. Consideramos a dinâmica em torno das trajetórias periódicas estudadas em [3] e [4] provamos a hiperbolicidade da dinâmica restrita aos conjuntos invariantes construídos em torno destas trajetórias. Usamos este fato para dar uma descrição da complexidade da dinâmica dos bilhares considerados em [5]. Nossos resultados são formalmente apresentados na próxima seção.

## 1.1 Resultados

Seja  $\mathcal{D}$  o espaço das aplicações injetoras  $\gamma : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^2$  e derivada segunda não nula em todo ponto. A imagem  $\gamma$  é uma curva fechada convexa que limita uma região  $Q_\gamma \subset \mathbb{R}^2$ . Seja  $\mathcal{B} \subset \mathcal{D} \times \mathbb{R}^2$  definido por

$$\mathcal{B} := \{(\gamma, p) : \gamma \in \mathcal{D} \text{ e } p \in \text{int}Q_\gamma\} \quad (1.1)$$

Dado  $(\gamma, p) \in \mathcal{B}$  seja  $r_0 > 0$  menor que a distância entre  $\gamma$  e  $p$ . A cada tripla  $(\gamma, p, r)$  com  $r \in (0, r_0]$  correspondente uma mesa (convexa) com obstáculo que é a região anular  $Q_{\gamma,p,r}$  limitada por  $\gamma$  e um círculo  $\alpha$  de centro  $p$  e raio  $r$ . O espaço de fase do bilhar em uma mesa  $Q = Q_{\gamma,p,r}$  é a união  $M = M_\alpha \cup M_\gamma$  em que  $M_\gamma$  é o conjunto das colisões com a curva  $\gamma$ , isto é o conjunto dos pares  $(q, v)$  onde  $q$  é um ponto de impacto com  $\gamma$  e  $v$  a

---

velocidade imediatamente após este impacto. A componente  $M_\alpha$  é o conjunto das colisões com o obstáculo  $\alpha$ . A dinâmica é descrita por uma transformação  $T = T_{\gamma,p,r} : M \rightarrow M$ ,  $T(q_0, v_0) = (q_1, v_1)$  que associa estados de colisões consecutivos. A aplicação  $T$  induz uma transformação  $T_\alpha : M_\alpha \rightarrow M_\alpha$  que descreve a dinâmica de retorno ao obstáculo. Ambas,  $T$  e  $T_\alpha$ , são aplicações diferenciáveis a menos de um conjunto de singularidades de medida nula e suas propriedades são descritas detalhadamente na seção 2.1.

Fixando  $(\gamma, p) \in \mathcal{B}$  obtemos famílias a um parâmetro de aplicações  $T = T_r$  e  $T_\alpha = T_{\alpha,r}$  variando  $r$  no intervalo  $(0, r_0)$ . Estudaremos famílias deste tipo considerando a dependência genérica na escolha de  $(\gamma, p) \in \mathcal{B}$  e considerando a evolução da dinâmica quando  $r \rightarrow 0$ . Nosso foco é a dinâmica em torno da classe especial dos pontos periódicos definidos a seguir.

Seja  $R : M \rightarrow M$  a involução  $R(q, v) = (q, \bar{v})$  em que  $\bar{v}$  é a reflexão de  $v$  com respeito ao vetor normal  $n(q)$ . As aplicações  $T$  e  $T_\alpha$  são **reversíveis** com respeito a  $R$ , i.e  $\forall n \in \mathbb{Z}$  temos  $T^{-n} = R \circ T^n \circ R$  analogamente para  $T_\alpha$ . Note que  $R$  fixa colisões perpendiculares, i.e elementos  $(q, v) \in M$  tal que  $v = n(q)$ . Seja  $\ell_0 := \{(q, v) \in M_\alpha : v = n(q)\}$  a curvas de colisões perpendiculares com o obstáculo. Da reversibilidade de  $T$  temos que se  $z_0 \in \ell_0$  e  $z_n \in T^n(z_0) \in \ell_0$  então  $z_0$  é um ponto periódico de  $T$  com período divisor de  $2n$ .

**Definição 1.1.** Dizemos que  $x_0 \in \ell_0 \cap T_\alpha^{-1}(\ell_0)$  é um **ponto periódico normal de forma curta** **ponto normal**.

Trajetórias (normais) associadas a pontos normais ( figura 1.1) são caracterizadas por possuírem ao menos uma e no máximo duas colisões p com o obstáculo, todas perpendiculares. Entre estas colisões há um sequência de colisões com o o bordo externo. Estas trajetórias exibem continuações naturais quando, mantendo fixos o bordo externo e o centro do obstáculo, fazemos  $r \rightarrow 0$ . Precisamente, a **continuação** de um ponto normal  $x$  para uma aplicação  $T_{\alpha,r}$  é o ponto normal  $x'$  para uma aplicação  $T_{\alpha,r'}$  com  $r' < r$  tal que a trajetória correspondente a  $x'$  é uma extensão da trajetória correspondente a  $x$ . A trajetória  $P'_1$  na figura 1.1(b) é uma continuação da trajetória  $P_1$  na figura 1.1(a).

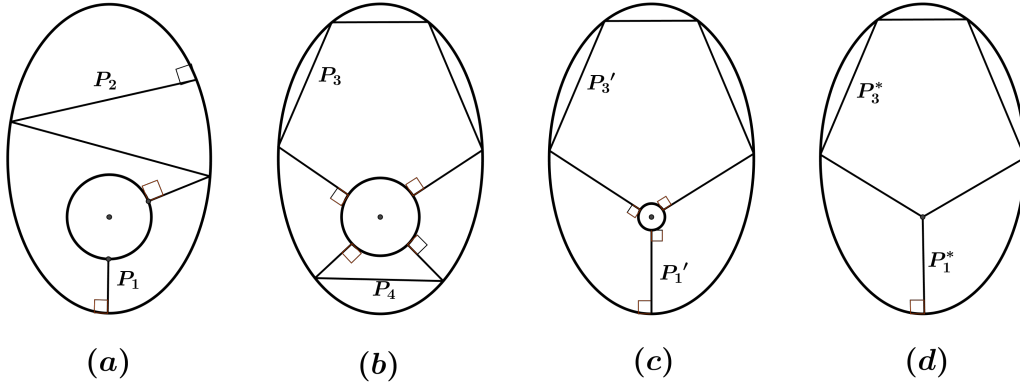


Figura 1.1: Trajetórias periódicas normais em uma família de mesas com obstáculos

Estudaremos a dinâmica em torno de pontos normais em famílias  $\{T_{\alpha,r}\}_{r \in (0,r_0]}$  obtidas fixando  $(\gamma, p)$  e variando  $r$ . Consideramos famílias deste tipo satisfazendo algumas condições.

**Definição 1.2.** Uma família  $\{T_{\alpha,r}\}_{r \in (0,r_0]}$  satisfaz a condição **P** se:

- Para cada  $r < r_0$ ,  $T_{\alpha,r}$  admite um conjunto finito  $X_r$  de pontos normais.
- Se  $r_1 < r_0$  então todo ponto de  $X_{r_1}$  é uma continuação de um ponto  $X_{r_0}$ .
- Todo  $x \in X_r$  é **transversal** i.e  $x$  é uma interseção transversal entre o segmento da curva  $\ell_0$  e um segmento de  $T_{\alpha,r}^{-1}(\ell_0)$ .
- Todo par  $x_1 = (q_0, v_0), x_2 = (q_2, v_2) \in X_r$  é **não alinhado**, i.e os pontos  $q_1$  e  $q_2$  não são antípodas em  $\alpha$ .

Seja  $\{T_{\alpha,r}\}_{r \in (0,r_0]}$  uma família satisfazendo **P**. Para cada  $r \in (0, r_0]$  o conjunto  $X_r$  de pontos normais está contido em um aberto  $U_r \subset M_\alpha$  restrito ao qual  $T_{\alpha,r}$  é diferenciável (ver seção 2.1). O teorema a seguir, provado no capítulo

---

3 diz respeito à dinâmica de  $T_{\alpha,r}$  restrita ao conjunto maximal invariante

$$\Lambda_r := \bigcap_{i \in Z} T_{\alpha}^i(\mathcal{U}_r)$$

**Teorema A.** *Se  $\{T_{\alpha,r}\}_{r \in (0,r_0]}$  satisfaz a propriedade  $P$  e  $r_0$  é suficientemente pequeno então, para todo  $r \in (0,r_0]$  o conjunto maximal invariante  $\Lambda_r \subset M_{\alpha}$  é uniformemente hiperbólico para  $T_{\alpha,r}$  e a restrição  $T_{\alpha,r} : \Lambda_r \rightarrow \Lambda_r$  é topologicamente conjugada ao shift no espaço das seqüências de  $m = \sharp X_r$  símbolos.*

A existência de subconjuntos invariantes em torno de pontos normais com dinâmica conjugada a um shift é um resultado conhecido provado em [3] e [4]. O teorema A mostra que, além disso, estes conjuntos são hiperbólicos. A hiperbolicidade destes conjuntos é obtida construindo campos de cones preservados pela aplicação  $T_{\alpha}$  em torno de pontos normais. Estes cones não são obtidos via mecanismo de desfocalização, como normalmente se faz, mas sim através de uma análise do comportamento assintótico da derivada da aplicação  $T_{\alpha,r}$  quando  $r \rightarrow 0$ .

A existência de famílias de bilhares satisfazendo as hipóteses do teorema A, ou seja, a propriedade  $P$  é tratada no capítulo 4. Embora não possamos garantir que qualquer família  $\{T_{\alpha,r}\}_{r \in (0,r_0]}$  satisfaça a propriedade  $P$ , temos o seguinte teorema.

**Teorema B.** *Seja  $(\gamma, p) \in \mathcal{B}$  tal que a família  $\{T_{\alpha,r}\}_{r \in (0,r_0]}$  associada não satisfaça  $P$ . Existe uma curva  $\tilde{\gamma} \in \mathcal{D}$  arbitrariamente próxima de  $\gamma$  na topologia  $C^2$  tal que a família  $\{\tilde{T}_{\alpha,r}\}_{r \in (0,r_0]}$  associada a  $(\tilde{\gamma}, p)$  satisfaz  $P$ . De fato, para cada  $N > 1$  existe uma cota  $r_N > 0$  tal que toda aplicação  $\tilde{T}_{\alpha,r}$  com  $r < r_N$  admite um conjunto conjunto  $X$  de  $N$  pontos normais transversais e dois a dois não alinhados.*

Combinando os teoremas A e B obtemos uma descrição da dinâmica genérica de bilhares em mesas com obstáculos. Precisamente, temos o seguinte corolário.

---

**Corolário 1.3.** Dado  $p \in \mathbb{R}^2$  seja  $\mathcal{D}_p \subset \mathcal{D}$  o subconjunto de todas as curvas convexas  $\gamma$  tais que  $p \in \text{int}Q_\gamma$ . Existe um conjunto  $\mathcal{D}'_p$  denso em  $\mathcal{D}_p$  tal que se  $\gamma \in \mathcal{D}'_p$  então existe  $r_0$  tal que toda aplicação  $T_{\alpha,r}$ , com  $r \in (0, r_0]$ , admite um conjunto uniformemente hiperbólico  $\Lambda_r$  tal que a restrição  $T_{\alpha,r} : \Lambda_r \rightarrow \Lambda_r$  é conjugada ao shift no no espaço das sequências simbólicas de  $m_r$  símbolos com  $m_r \rightarrow \infty$  quando  $r \rightarrow 0$ .

No capítulo 5 aplicamos resultados dos capítulos anteriores para a família a dois parâmetros de bilhares introduzidas por Saito [5]. O espaço de parâmetros desta família é:

$$\Omega := \{(\delta, r) : \delta + r < 1 \text{ e } r > 0\}$$

A cada  $(\delta, r) \in \Omega$  corresponde uma mesa  $Q_{\delta,r}$ ,  $\partial Q_{\delta,r} = \gamma \cup \alpha$  em que  $\gamma$  (o bordo externo) é um círculo de centro  $p_\gamma$  e raio unitário e  $\alpha$  (o obstáculo) é um círculo de raio  $r$  e centro  $p$  distando  $\delta$  de  $p_\gamma$ . No que se segue um **Bilhar de Saitô** é o sistema dinâmico que descreve a dinâmica de bilhar na mesa  $Q_{\delta,r}$ .

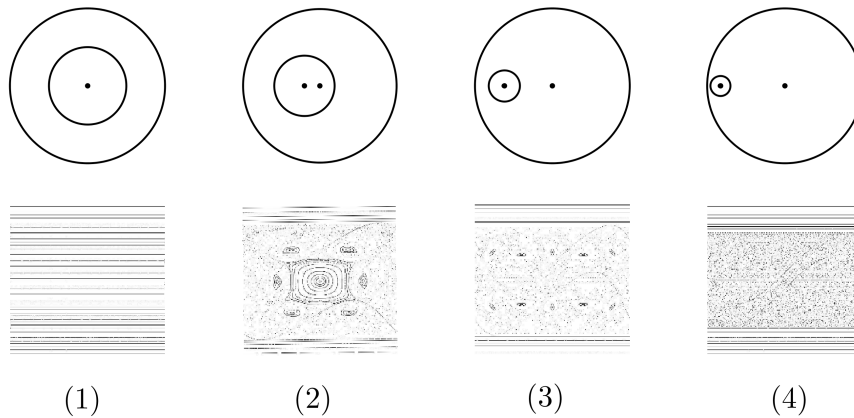


Figura 1.2: Retratos de fase da aplicação de primeiro retorno ao bordo externo para alguns parâmetros  $(\delta, r)$ .

Experimentos numéricos com a família de bilhares de Saitô (figura 1.2) sugerem uma transição contínua entre a integrabilidade quando  $\delta = 0$  (círculos concêntricos) (figura 1.2(1)) e a caoticidade quando  $(\delta, r) \approx (1, 0)$  (figura

---

1.2(4)). Tipicamente, a dinâmica é mista e ilhas elípticas são notadas quando  $\delta > 0$  assim como duas faixas de curvas invariantes correspondente ao conjunto de trajetórias que nunca se chocam com o obstáculo. Conjectura-se que região complementar às ilhas e entre as duas faixas de curvas invariantes se trata da região de Pesin. Um gradual desaparecimento das ilhas e crescente predomínio da "região de Pesin" é percebido quando  $(\delta, r) \rightarrow (0, 1)$ . Uma questão que surge naturalmente é a de saber se existe algum par de parâmetros  $(\delta, r) \in \Omega$  para o qual a região de Pesin do bilhar correspondente tem medida positiva. No intuito de responder afirmativamente a esta questão obtemos o seguinte:

**Teorema C.** *Existe um subconjunto  $\Omega_1 \subset \Omega$  de interior não vazio, contendo  $(1, 0)$  em seu fecho e tal que se  $(\delta, r) \in \Omega_1$  então a aplicação  $T_\alpha$  associada ao bilhar na mesa  $Q_{\delta, r}$  admite um conjunto uniformemente hiperbólico  $\Lambda_{\delta, r} \subset M_\alpha$  que é  $\epsilon(\delta, r)$ -denso em  $M_\alpha$  e tal que a restrição  $T_\alpha : \Lambda_{\delta, r} \rightarrow \Lambda_{\delta, r}$  é conjugada a um subshift no espaço de  $m(\delta, r)$  símbolos com  $\epsilon(\delta, r) \rightarrow 0$  e  $m(\delta, r) \rightarrow \infty$  quando  $(\delta, r) \rightarrow (1, 0)$*

Um conjunto  $C$  em um espaço métrico  $(M, d)$  é  $\epsilon$ -denso se para todo  $z \in M$  existe  $c \in C$  tal que  $d(z, c) < \epsilon$ . O teorema C corrobora o comportamento observado na figura 1.2(4) embora não permita estimar a medida da região de Pesin de bilhares  $\mathcal{B}_{\delta, r}$ , já que  $\mu(\Lambda_{\delta, r}) = 0$ . Os conjuntos hiperbólicos  $\Lambda_{\delta, r}$ , assim como aqueles referidos no teorema A, são obtidos via construção de campos de cones preservados por  $T_\alpha$ . Mas, para os bilhares de Saitô, podemos garantir a preservação destes cone para além da vizinhança de pontos normais. Precisamente, provamos a preservação destes cones em uma região  $H_{\delta, r} \subset M_\alpha$  com  $(\delta, r)$  satisfazendo  $\mu(H_{\delta, r}) \rightarrow \mu(M_\alpha)$  quando  $(\delta, r) \rightarrow (1, 0)$ .

Não podemos garantir a preservação de cones no complementar  $M_\alpha \setminus H_{\delta, r}$  e obtemos resultados que mostram que a dinâmica nesta região complementar é a fonte para todo comportamento não hiperbólico de um bilhar de Saitô. Estudando a dinâmica de retorno ao complementar de  $H_{\delta, r}$  obtemos os seguintes resultados:

**Teorema D.** *Existe um subconjunto  $\Omega'_1 \subset \Omega_1$ , contendo  $(1, 0)$  no seu fe-*

---



---

cho e tal que se  $(\delta, r) \in \Omega'_1$  então o bilhar  $\mathcal{B}_{\delta, r}$  admite um ponto periódico em  $\Lambda_{\delta, r}$  cujas variedades instável e estável possuem um ponto de tangência homoclínica.

**Teorema E.** *Existe um subconjunto  $\Omega''_1 \subset \Omega_1$ , contendo  $(1, 0)$  no seu fecho e tal que se  $(\delta, r) \in \Omega''_1$  então o bilhar  $\mathcal{B}_{\delta, r}$  admite um ponto periódico linearmente elíptico cuja órbita é um conjunto  $\epsilon(\delta, r)$ -denso em  $M_\alpha$*

Os teoremas acima são semelhantes a resultados conhecidos sobre a família de aplicações *Standard*, i.e a família a um parâmetro  $k \in [0, \infty)$  de difeomorfismos do toro  $\mathbb{T}^2$  dadas por:

$$f_k(x, y) = (-y + 2x + k \sin(2\pi x), x) \quad \text{mod } \mathbb{Z}^2$$

Sobre esta família sabe-se [6] da existência de conjuntos hiperbólicos  $\Lambda_k$  que são  $\epsilon(k)$  densos em  $\mathbb{T}^2$  e cuja restrição  $f_k : \Lambda_k \rightarrow \Lambda_k$  é topologicamente conjugada ao shift no espaço de  $m(k)$  símbolos, com  $\epsilon(k) \rightarrow 0$  e  $m(k) \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Além disso a dimensão de Hausdorff de  $\Lambda_k$  tende a 2 quando  $k \rightarrow \infty$ , existe  $k_0 > 0$  e um conjunto denso de parâmetros em  $[k_0, \infty)$  para os quais o sistema apresenta tangências homoclínicas e um conjunto residual para o qual  $\Lambda_k$  é acumulado por ilhas elípticas. Estes resultados sobre a família de aplicações *Standard* indicam os possíveis melhoramentos para os teoremas *C*, *D* e *E*: a dimensão de Hausdorff dos conjuntos  $\Lambda_{\delta, r}$ , a existência de ilhas de estabilidade associadas aos pontos linearmente elípticos referidos no teorema *E* e uma descrição mais precisa da topologia dos conjuntos  $\Omega'_1$  e  $\Omega''_1$  são questões a ser consideradas. Este paralelo também indica a dificuldade em dar uma resposta à questão sobre a região de Pesin de um bilhar de Saitô, uma vez que a mesma questão no contexto da família de aplicações *Standard* é um problema em aberto há muitos anos.

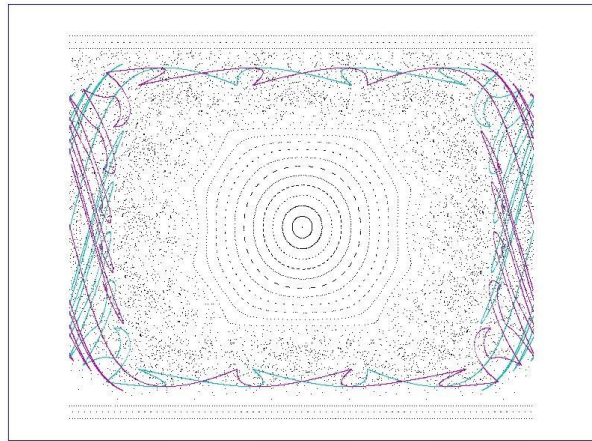


Figura 1.3: A complexidade da dinâmica em um bilhar de Saitô: variedades invariantes de um ponto periódico normal hiperbólico ao redor da ilha de um ponto periódico normal elíptico

## CAPÍTULO 2

---

### Preliminares

---

Neste capítulo, descreveremos mais detalhadamente a aplicação de bilhar em mesas com obstáculo. Também recordaremos algumas definições e conceitos necessários para futuros argumentos.

### 2.1 Propriedades da aplicação de Bilhar

Consideremos uma mesa  $Q = Q_{\gamma,p,r}$ ,  $\partial Q = \gamma \cup \alpha$ , o espaço de fase do bilhar correspondente é o conjunto  $M = M_\gamma \cup M_\alpha$  sendo:

$$M_\gamma := \{(q, v) \mid q \in \gamma, \|v\| = 1, \langle v, n(q) \rangle > 0\} \quad (2.1)$$

$$M_\alpha := \{(q, v) \mid q \in \alpha, \|v\| = 1, \langle v, n(q) \rangle \geq 0\} \quad (2.2)$$

onde  $\|\cdot\|$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  são respectivamente a norma e o produto interno usuais em  $\mathbb{R}^2$  e  $n(q)$  o vetor unitário normal a  $\partial Q$  no ponto  $q$  apontando para o interior

---

da mesa. Note que, como  $\partial Q$  é a união de curvas fechadas disjuntas, ambos,  $M_\alpha$  e  $M_\gamma$ , são, topologicamente, cilindros. O cilindro  $M_\alpha$  tem o bordo  $\partial M_\alpha$  dado pelo conjunto das colisões tangente a  $\alpha$ , i.e os pares  $(q, v)$  tais que  $q \in \alpha$  e  $v$  é tangente a  $\alpha$ . Ignoramos colisões de tangência com  $\gamma$ , portanto  $M_\alpha$  não tem bordo.

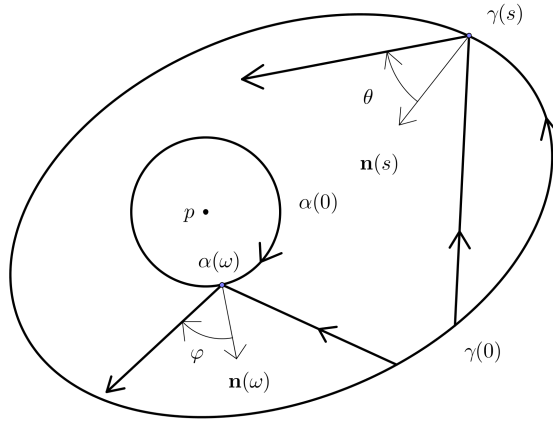


Figura 2.1:

Para introduzir coordenadas em  $M$  consideramos a curva  $\gamma \in \partial Q$  orientada no sentido anti-horário e parametrizada por comprimento de arco  $s \in [0, |\gamma|)$  ( $|\gamma|$  é o comprimento de  $\gamma$ ). Introduzimos coordenadas  $(s, \theta) \in [0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  para elementos  $(q, v) \in M_\gamma$  sendo  $q = \gamma(s)$  e  $\theta$  o ângulo entre  $v$  e  $n(q)$ . Consideramos o círculo  $\alpha \in \partial Q$  orientado no sentido horário e parametrizado por comprimento de arco  $\omega \in [0, 2\pi.r)$ . Introduzimos coordenadas  $(\omega, \varphi) \in [0, 2\pi.r) \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  para  $(q, v) \in M_\alpha$  em que  $q = \alpha(\omega)$  e  $\varphi$  é o ângulo entre  $v$  e  $n(q)$ .

Também podemos parametrizar a curva convexa  $\gamma$  pelo ângulo  $\psi(s) \in [0, 2\pi)$  entre  $\gamma'(s)$  e o vetor  $\mathbf{u} = (1, 0)$  e o círculo  $\alpha$  pelo ângulo  $\beta(\omega) \in [0, 2\pi)$  entre  $\alpha'(\omega)$  e  $\mathbf{u}$ . Com isso podemos adotar coordenadas alternativas  $(\psi, \theta) \in [0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  em  $M_\gamma$  e  $(\beta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  em  $M_\alpha$ . Adotaremos estas novas coordenadas, sempre que for útil eliminar a dependência em  $r$  do sistema de coordenadas o que ocorre quando usamos o parâmetro comprimento de arco  $\omega \in [0, 2\pi.r)$  do obstáculo  $\alpha$ .

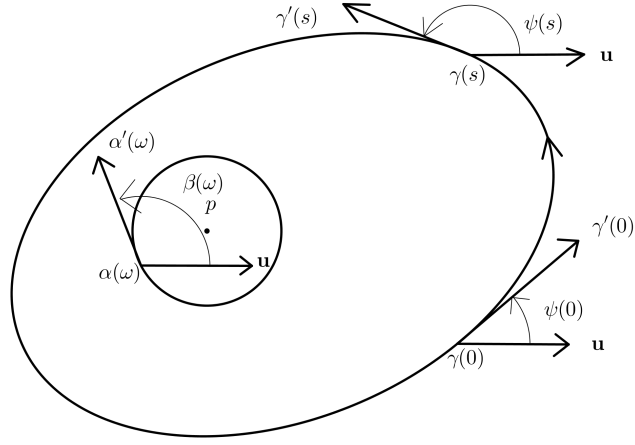


Figura 2.2:

A aplicação de bilhar na mesa  $Q = Q_{\gamma,p,r}$  é a transformação

$$T = T_{\gamma,p,r} : M \rightarrow M \quad T(q_0, v_0) = (q_1, v_1) \quad (2.3)$$

em que  $q_1 \in \partial Q$  é o primeiro ponto de impacto com o bordo de uma trajetória partindo de  $q_0$  com velocidade  $v_0$  e  $v_1$  a reflexão de  $v_0$  com relação à tangente do bordo no ponto  $q_1$ . Formalmente, se  $\tau_0 = \|q_1 - q_0\|$  então:

$$q_1 = q_0 + \tau_0 \cdot v_0 \quad e \quad v_1 = v_0 - 2 \langle v_0, n(q_1) \rangle \cdot n(q_1) \quad (2.4)$$

A diferenciabilidade de  $\partial Q$  implica que  $T$  está bem definida e é invertível. Cada órbita  $\{(q_i, v_i) = T(q_0, v_0) : i \in \mathbb{Z}\}$  corresponde a uma única **trajetória de bilhar** na mesa, i.e um caminho poligonal cujos vértices são os pontos de impacto  $q_i$  com  $i \in \mathbb{Z}$ . Seja  $L(z) = \{q + tv : t > 0\}$  o raio partindo de  $q \in \partial Q$  na direção de  $v$ . Se  $z = (q, v) \in T^{-1}(\partial M_\alpha)$  então  $L(z)$  tangencia a curva côncava  $\alpha$  donde todo  $z \in T^{-1}(\partial M_\alpha)$  (resp.  $z \in T(\partial M_\alpha)$ ) é um ponto de descontinuidade de  $T$  (resp.  $T^{-1}$ ). Por cada  $q \in \gamma$  passam exatamente duas retas tangenciando  $\alpha$ . Portanto,  $T^{-1}(\partial M_\alpha)$  é a união de dois gráficos em  $M_\gamma$  assim como  $T(\partial M_\alpha) = R \circ T^{-1}(\partial M_\alpha)$  como ilustrados na figura 2.3.

Sejam  $\mathcal{S}_{-1} = \partial M_\alpha \cup T^{-1}(\partial M_\alpha)$  e  $\mathcal{S}_1 := \partial M_\alpha \cup T(\partial M_\alpha)$ . A restrição  $T :$

---

$M \setminus \mathcal{S}_{-1} \rightarrow M \setminus \mathcal{S}_1$  é um difeomorfismo  $C^{k-1}$  se  $\partial Q$  é de classe  $C^k$  [13]

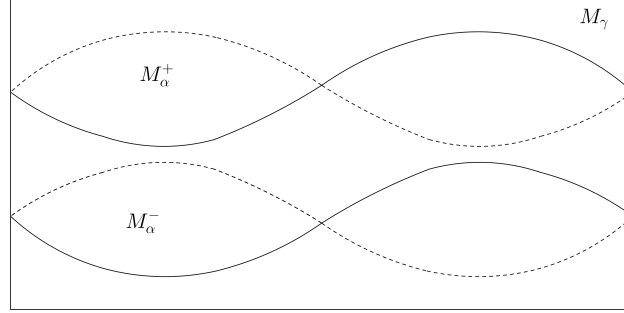


Figura 2.3:

A pré-imagem  $M_\alpha^- = T^{-1}(M_\alpha)$  é a região limitada pelas duas componentes de  $T^{-1}(\partial M_\alpha)$  e a imagem  $M_\alpha^+ = T(M_\alpha)$  a região limitada pelas duas componentes de  $T(\partial M_\alpha)$ . As restrições  $T : M_\alpha \rightarrow M_\alpha^+$  e  $T : M_\alpha^- \rightarrow M_\alpha$  são homeomorfismos e as restrições  $T : \text{int}M_\alpha \rightarrow \text{int}M_\alpha^+$  e  $T : \text{int}M_\alpha^- \rightarrow \text{int}M_\alpha$  difeomorfismos  $C^1$ .

As compostas  $T^n : M \rightarrow M$  e  $T^{-n} : M \rightarrow M$  são aplicações descontínuas respectivamente nos conjuntos  $\mathcal{S}_{-n} := \mathcal{S}_{-1} \cup T^{-1}(\mathcal{S}_{-1}) \cup \dots \cup T^{-n}(\mathcal{S}_{-1})$  e  $\mathcal{S}_n := \mathcal{S}_1 \cup T(\mathcal{S}_1) \cup \dots \cup T^n(\mathcal{S}_1)$ . Cada conjunto  $\mathcal{S}_n$  com  $n \in \mathbb{Z}$  é a união de uma quantidade finita de segmentos compactos de curvas de classe  $C^1$  [13].

Será útil considerar a aplicação de bilhar  $F = F_\gamma : M_\gamma \rightarrow M_\gamma$  que descreve a dinâmica na mesa convexa  $Q_\gamma$  (sem o obstáculo). Esta aplicação é um difeomorfismo de classe  $C^{k-1}$  de  $\gamma$  é de classe  $C^k$  e preserva a medida  $\mu$ .

Para definir a aplicação  $T_\alpha$  que descreve a dinâmica de retorno das trajetórias ao obstáculo, consideremos o subconjunto  $N^- \subset M_\alpha$  dos pontos  $z \in M_\alpha$  para os quais existe  $n \geq 0$  tal que  $T^n(z) \in M_\alpha$ . Seja  $n_\alpha : N^- \rightarrow \mathbb{N}$  definida por  $n_\alpha(z) := \min\{j > 0 : T^j(z) \in M_\alpha\}$ . O número  $n_\alpha(z)$  define o que chamaremos de tempo de retorno de  $z$  a  $M_0$ . A aplicação de primeiro retorno

---

ao obstáculo é definida por:

$$T_\alpha : N^- \rightarrow M_\alpha, \quad T_\alpha(z) = T^{n_\alpha(z)}(z). \quad (2.5)$$

no conjunto  $N^+ := T_\alpha(N^-)$  definimos a inversa

$$T_\alpha^{-1} : N^+ \rightarrow M_\alpha, \quad T_\alpha^{-1}(z) = T^{n_\alpha(z')}(z) \quad \text{onde } T_\alpha(z') = z. \quad (2.6)$$

Em algumas situações específicas pode-se mostrar que  $M_\alpha \setminus N^\pm \neq \emptyset$ , ou seja, nem toda trajetória partindo do obstáculo retorna a esta componente do bordo da mesa (ver observação 5.1). No entanto, como  $T$  preserva  $\mu$  e  $\mu(M_\alpha) > 0$ , segue do teorema da recorrência de Poincaré que  $\mu(M_\alpha \setminus N^\pm) = 0$ . Assim sendo, e para simplificar a notação, ignoraremos a diferença entre  $M_\alpha$  e  $N^\pm$  considerando  $T_\alpha$  e sua inversa como sendo aplicações de  $M_\alpha$  e  $M_\alpha$ .

Pela concavidade de  $\alpha$ , dada uma condição inicial  $z \in M_\alpha$  teremos, necessariamente,  $T(z) \in M_\gamma$ . Logo  $n_\alpha(z) \geq 2$  para todo  $z \in M_\alpha$ . Note que  $M_\alpha$  é decomposto em conjuntos  $M_\alpha^i := n_\alpha^{-1}(i)$  para  $i \geq 2$ . Se  $z \in M_\alpha^i$  então o segmento da órbita deste ponto por  $T$  até o primeiro retorno a  $M_\alpha$  é da forma  $\{z_0, z_1, \dots, z_{i-1}, z_i\}$  com  $\{z_1, \dots, z_{i-1}\} \subset M_\gamma$ . Segue disso que a restrição  $T_\alpha : M_\alpha^i \rightarrow M_\alpha$  admite a fatoração:

$$T_\alpha(z) = T \circ F^{i-2} \circ T(z) \quad (2.7)$$

## 2.2 Projetivização da derivada

Seguindo [8] descreveremos a ação da derivada  $D_z T$  da aplicação  $T$  em um ponto  $z \in M$  em termos de coordenadas projetivas no espaço tangente. Por simplicidade, denotaremos indistintamente por  $s$  o parâmetro comprimento de arco para  $\gamma$  e  $\alpha$  adotando coordenadas  $(s, \theta)$  em  $M = M_\gamma \cup M_\alpha$ .

Dado  $z_0 = (s_0, \theta_0) \in M \setminus \mathcal{S}_{-1}$  seja  $z_1 = (s_1, \theta_1) = T(z_0)$ . Seja  $\tau_0 = \|\zeta(s_1) - \zeta(s_0)\|$  onde  $\zeta \in \{\gamma, \alpha\}$ . A matriz da derivada de  $T(s, \theta)$  tem a seguinte

---

expressão [13]

$$D_{z_0}T = \begin{pmatrix} -\frac{\tau k_0}{\cos \theta_1} - \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta_1} & -\frac{\tau_0}{\cos \theta_1} \\ -\frac{k_1 \cdot \tau_0 \cdot k_0}{\cos \theta_1} - \frac{k_1 \cos \theta_0}{\cos \theta_1} - k_0 & -\frac{\tau_0 k_1}{\cos \theta_1} - 1 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Em que  $k_i = k(s)$  é a curvatura do bordo da mesa no ponto  $\zeta(s)$ . Como em [13] adotamos a seguinte definição de curvatura:  $k(s) = -\|\zeta''(s)\|$  se  $\zeta = \gamma$  e  $k(s) = \|\zeta''(s)\| = 1/r$  se  $\zeta = \alpha$ .

Sejam  $(u_1, u_2)$  as componentes de um vetor  $u$  no espaço tangente  $\mathbf{T}_z M_\gamma$  com respeito à base  $\{\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \theta}\}$ . A **inclinação** de  $u = (u_1, u_2) \in \mathbf{T}_z M$ , definida por  $\eta(u_0) = \frac{u_2}{u_1} \in \overline{\mathbb{R}}$  onde  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  é uma coordenada projetiva para o espaço  $\mathbb{P}(\mathbf{T}_z M)$  das retas passando pela origem  $\bar{0}$  em  $\mathbf{T}_z M \cong \mathbb{R}^2$ .

Se  $z_1 = T(z_0)$  e  $u_1 = D_{z_0}T \cdot u_0 \in \mathbf{T}_{z_1} M$  então, por 2.8, a inclinação  $\eta_1 = \eta(u_1)$  é dada por em função da inclinação  $\eta_0 = \eta(u_0)$  pela equação:

$$\eta_1 = k_1 + \frac{\cos \theta_1}{\tau_0 + \frac{\cos \theta_0}{k_0 + \eta_0}} \quad (2.9)$$

O termo  $\frac{\cos \theta_0}{k_0 + \eta_0}$  é um outra coordenada projetiva para  $\mathbb{P}(\mathbf{T}_z M)$  e tem um significado geométrico que descrevemos a seguir: todo vetor  $u_0 \in \mathbf{T}_{z_0} M$  não nulo é representado por uma curva diferenciável  $\lambda(\epsilon) = (s(\epsilon), \theta(\epsilon))$ ,  $|\epsilon| < \epsilon_0$ , tal que  $\lambda(0) = z_0$  e  $\lambda'(0) = u_0$ . A uma curva  $\lambda$  representando  $u_0 \in \mathbf{T}_{z_0} M$  associamos um feixe de retas em  $\mathbb{R}^2$ :

$$L_\lambda(\epsilon, t) = q(\epsilon) + t \cdot v(\epsilon) \quad (2.10)$$

onde  $q(\epsilon) = \zeta(s(\epsilon))$  e  $v(\epsilon)$  é o vetor unitário formando ângulo  $\theta(\epsilon)$  com o vetor normal  $\mathbf{n}(s_0)$ . Se  $v'(0) = \frac{dv}{d\epsilon}|_{=0} \neq (0, 0)$  então a **envoltória** do feixe  $L(\epsilon, t)$  é a curva:

$$E_\lambda(\epsilon) = q(\epsilon) + f(\epsilon) \cdot v(\epsilon) \quad (2.11)$$


---



---

tal que  $E'_\lambda(\epsilon)$  é paralelo a  $v(\epsilon)$  para todo  $\epsilon$ , i.e  $\langle E'(\epsilon), v'(\epsilon) \rangle = 0$  o que pode ser expresso por  $\langle q'(\epsilon) + f(\epsilon).v'(\epsilon), v'(\epsilon) \rangle = 0$  donde:

$$f(\epsilon) = -\frac{\langle q'(\epsilon), v'(\epsilon) \rangle}{\langle v'(\epsilon), v'(\epsilon) \rangle} \quad (2.12)$$

Se  $v'(0) \neq (0,0)$  dizemos então que  $L_\lambda(\epsilon, t)$  focaliza ao longo da reta  $L(0, t)$  no ponto( **de focalização**)  $q_0 = L(0, f_0)$  e tem **tempo de focalização**  $f_0 = f(0)$ . Dizemos que um feixe de retas focaliza para frente de  $f_0 > 0$  e para trás de  $f_0 < 0$ . Em aproximação linear, i.e  $\epsilon \approx 0$ , o ponto de focalização  $q_0$  é a interseção comum entre as retas  $L_\lambda(\epsilon, t)$ . Se  $v'(0) = (0,0)$  então, em aproximação linear,  $L_\lambda(\epsilon, t)$  consiste em uma família de retas paralelas, neste caso definimos  $q_0$  como um ponto no infinito e  $f_0 = \infty$ .

**Lema 2.1.** *Sejam  $z_0 = (s_0, \theta_0) \in M \setminus \mathcal{S}_1$ ,  $u_0 = (u_{0,1}, u_{0,2}) \in \mathbf{T}_{z_0}M$  um vetor não nulo e  $L_\lambda(\epsilon, t)$  um feixe de retas associado a  $u_0$ . O tempo de focalização de  $L_\lambda$  depende apenas de  $z_0$  e da inclinação de  $u_0$  sendo dado por  $f_0 = -\frac{\cos \theta_0}{k_0 + \eta_0}$  onde  $k_0 = k(s_0)$  e  $\eta_0 = \frac{u_{0,2}}{u_{0,1}}$ .*

**Prova:** Seja  $\mathbf{t}(s)$  é o vetor unitário tangente a  $\zeta$  no ponto  $\zeta(s)$  e  $\mathbf{n}(s)$  o vetor unitário normal a  $\mathbf{t}(s)$  apontando para o interior da mesa. Temos

$$\begin{aligned} v(\epsilon) &= \cos \theta . \mathbf{n}(s) + \sin \theta . \mathbf{t}(s) \\ v'(\epsilon) &= (-\theta' + k . s') \sin \theta . \mathbf{n} + (\theta' - k . s') \cos \theta . \mathbf{t} \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde  $s' = s'(\epsilon)$  e  $\theta' = \theta'(\epsilon)$ . Observando que  $s'(0) = u_{0,1}$ ,  $\theta'(0) = u_{0,2}$ ,  $q'(0) = \mathbf{t}.u_{0,1}$  e considerando 2.12 obtemos:

$$f_0 = -\frac{\langle \mathbf{t}.s', v' \rangle}{\langle v', v' \rangle} = -\frac{\cos \theta_0 . u_{0,1}}{k_0 . u_{0,1} + u_{2,0}} = -\frac{\cos \theta_0}{k_0 + \frac{u_{0,2}}{u_{0,1}}} = -\frac{\cos \theta_0}{k_0 + \eta_0} \quad (2.15)$$

□

A ação da derivada em termos de tempos de focalização é descrita no seguinte lema:

---

**Lema 2.2. (equação do espelho)** Seja  $z_0 = (s_0, \theta_0) \in M \setminus \mathcal{S}_{-1}$  e  $u_0 \in T_{z_0}M$ ,  $z_1 = (s_1, \theta_1) = T(z_0)$  e  $u_1 = D_{z_0}T.u_0 \in T_{z_1}M$ . O tempo de focalização  $f_1 = f(z_1, u_1)$  é dado em termos do tempo de focalização  $f_0 = f(z_0, u_0)$  da curvatura  $k_1 = k(s_1)$  e do comprimento  $\tau_0 = \|\zeta(s_1) - \zeta(s_0)\|$  segundo a equação

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{\tau_0 - f_0} = -\frac{2k_1}{\cos \theta_1} \quad (2.16)$$

**Prova:** Basta observar que se  $f_1 = -\frac{\cos \theta_1}{k_1 + \eta_1}$  e  $\eta_1 = k_1 + \frac{\cos \theta_1}{\tau_0 - f_0}$  então :

$$\frac{1}{f_1} = \frac{-k_1 - \eta_1}{\cos \theta_1} = -\frac{k_1}{\cos \theta_1} - \frac{k_1}{\cos \theta_1} - \frac{1}{\tau_0 - f_0} = -\frac{2k_1}{\cos \theta_1} - \frac{1}{\tau_0 - f_0}$$

□

Seja  $\beta(s)$  o ângulo entre  $\zeta'(s)$  e  $\mathbf{u}$  e consideremos em  $M$  as coordenadas  $(\beta, \theta)$ . Dado  $z_0 = (\beta_0, \theta_0) \in M \setminus \mathcal{S}_1$  e  $z_1 = (\beta_1, \theta_1) = T(z_0)$  a derivada  $D_{z_0}T$  expressa por:

$$D_{z_0}T = \begin{pmatrix} -\frac{k_1 \cdot \tau_0}{\cos \theta_1} - \frac{k_1 \cdot \cos \theta_0}{k_0 \cos \theta_1} & -\frac{k_1 \cdot \tau_0}{\cos \theta_1} \\ -\frac{k_1 \cdot \tau_0}{\cos \theta_1} - \frac{k_1 \cdot \cos \theta_0}{k_0 \cos \theta_1} - 1 & -\frac{k_1 \cdot \tau_0}{\cos \theta_1} - 1 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Dado  $u_0 \in T_{z_0}M$  o tempo de focalização de  $u_0$  e a inclinação do vetor  $u_1 = D_{z_0}T.u_0$  são dados respectivamente pelas fórmulas:

$$f_0 = -\frac{\cos \theta_0}{k_0(1 + \eta_0)} \quad e \quad \eta_1 = 1 + \frac{\cos \theta_1}{k_1(\tau_0 + f_0)} \quad (2.18)$$

## 2.3 Hiperbolicidade via campo de cones

Seja  $U$  aberto de uma variedade  $M$  de dimensão 2,  $f : U \rightarrow f(U)$  um difeomorfismo de classe  $C^1$  e  $\|\cdot\|$  um norma riemanniana em  $TM$ . Um conjunto fechado  $\Lambda \subset U$  invariante por  $f$  é um **conjunto uniformemente**

---

**hiperbólico** para  $f$  se existe uma decomposição  $\mathbf{T}_x M = E_x^u \oplus E_x^s$  para todo  $x \in \Lambda$ , invariante pela derivada  $D_x f$ , e uma constante  $\rho > 1$  tal que  $\|D_x f \cdot u\| \geq \rho \|u\|$  para todo  $u \in E_x^u$  e  $\|D_x f^{-1} \cdot u\| \geq \rho \|u\|$  para todo  $u \in E_x^s$ .

Um **cone** em um espaço vetorial  $V$  de dimensão 2 é um subconjunto  $C = \{a \cdot u_1 + b \cdot u_2 : ab \geq 0\}$  onde  $u_1$  e  $u_2$  são vetores linearmente independentes em  $V$ . O interior de um cone  $C$  e seu bordo são respectivamente:

$$\text{int}C : \{a \cdot u_1 + b \cdot u_2 : ab > 0\} \cup \bar{0} \quad e \quad \partial C = C \setminus \text{int}C$$

Um **campo de cones** em um aberto  $U$  de uma variedade bidimensional  $M$  é uma aplicação  $z \mapsto C(z)$  que a cada  $z \in U$  associa um cone  $C(z) \subset \mathbf{T}_z U$ . Se  $f : U \rightarrow U$  é uma aplicação diferenciável dizemos que o campo de cones  $z \mapsto C(z)$  definido em  $U$  é **preservado** por  $f$  se  $D_z f \cdot C(z) \subset C(f(z))$  para todo  $z \in U$  e **estritamente preservado** por  $f$  se  $D_z f \cdot C(z) \subset \text{int}C(f(z))$  para todo  $z \in U$ .

Construiremos os conjuntos hiperbólicos dos teoremas [A](#) e [D](#) usando o seguinte critério ( ver [\[11\]](#) corolário 6.4.8)

**Teorema 2.3.** *Seja  $f : U \rightarrow f(U) \subset M$  um difeomorfismo de classe  $C^1$  e  $\Lambda \subset U$  um compacto invariante por  $f$ . Se existem campos de cones  $z \mapsto C^u(z)$  e  $z \mapsto C^s(z)$  estritamente preservados por  $f$  e  $f^{-1}$  respectivamente uma constante  $\rho > 1$  tal que para todo  $z \in \Lambda$  temos  $\|D_z f \cdot u\| > \rho \|u\|$  se  $u \in C^u(z)$  e  $\|D_z f^{-1} \cdot u\| > \rho \|u\|$  então  $\Lambda$  é um conjunto hiperbólico para  $f$ .*

**Observação 2.4.** Note que se  $l(v)$  é uma coordenada projetiva para  $\mathbb{P}(V)$  então qualquer cone  $C$  pode ser descrito por  $C : \{u \in V : l(v) \in J\}$  onde  $J = [c, d] \subset \overline{\mathbb{R}}$  é um intervalo fechado. Com esta descrição temos  $\partial C = \{v \in V : l(v) = c \text{ ou } l(v) = d\}$ .

---

## 2.4 Dinâmica Simbólica

Seja  $\Sigma_m = \{b = \{\dots b_{-1}.b_0.b_1\dots\} : b_i \in \{1, \dots, m\} \text{ e } i \in \mathbb{Z}\}$  o conjunto das seqüências simbólicas bi-infinitas de  $m$  símbolos e seja  $d_m : \Sigma_m \times \Sigma_m \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$d_m(b, a) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{|b_i - a_i|}{2^{|i|}} \text{ onde } |i, j| \in \{0, 1\} \text{ e } |i, j| = 1 \Leftrightarrow i = j \quad (2.19)$$

O par  $(\Sigma_m, d_m)$  é um espaço métrico compacto [19]. Dada uma  $b \in \Sigma_m$  e  $n \geq 0$ , um cilindro simétrico de centro  $b$  e comprimento  $2n + 1$  é o conjunto:

$$C_{[b,n]} := \{b' \in \Sigma_m : b'_i = b_i \ \forall i \text{ tal que } |i| < n\} \quad (2.20)$$

Para cada  $n \geq 0$  existem exatamente  $m^{2n+1}$  subconjuntos de  $\Sigma_m$  e da definição de  $d_m$  segue que:

$$b' \in C_{[b,n]} \Leftrightarrow d_m(b', b) < \frac{1}{2^{n-1}} \quad (2.21)$$

O **shift** em  $\Sigma_m$  é o homeomorfismo  $\sigma : \Sigma_m \rightarrow \Sigma_m$  que a cada seqüência  $b$  associa a seqüência  $a = \sigma(b)$  tal que  $a_i = b_{i+1}$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ . Dizemos que um homeomorfismo  $F : E \rightarrow E$  é **topologicamente conjugado** a  $\sigma : \Sigma_m \rightarrow \Sigma_m$  se existe um homeomorfismo  $S : \Sigma_m \rightarrow E$  tal que  $F \circ S(b) = S \circ \sigma(b)$  para toda  $b \in \Sigma_m$ .

## CAPÍTULO 3

---

### Conjuntos Hiperbólicos em torno de pontos normais

---

Neste capítulo provaremos o teorema [A](#) construindo conjuntos hiperbólicos em torno de pontos normais associados a uma família de aplicações  $\{T_{\alpha,r}\}_{r \in (0,r_0]}$  satisfazendo a propriedade  $P$ .

#### 3.1 Preliminares

Durante todo este capítulo consideraremos uma família  $\{T_{\alpha,r}\}_{r \in (0,r_0]}$  satisfazendo a propriedade  $\mathbf{P}$ . Recordemos que isso significa que para todo  $r \in (0, r_0]$  o aplicação  $T_{\alpha,r}$  admite um conjunto  $X_r \subset M_\alpha$  de pontos normais transversais e não alinhados (ver definição [1.2](#)). Além disso, o conjunto  $X_r$  é invariante,  $T_{\alpha,r}(X_r) = X_r$  e, para todo  $r_1 < r_0$  os pontos de  $X_{r_1}$  são continuações dos pontos de  $X_{r_0}$ . Adotaremos coordenadas  $(\psi, \theta)$  em  $M_\gamma$  e  $(\beta, \varphi)$  em  $M_\alpha$  (como definidas em [2.1](#)). Com estas coordenadas temos que se  $x_1 = (\beta_1, 0) \in X_{r_1}$  é uma continuação de  $x_0 = (\beta_0, 0) \in X_{r_0}$  então  $\beta_1 = \beta_0$

---

como ilustrado na figura 3.1. Portanto, nestas coordenadas, o conjunto  $X_r$  independe de  $r$  e assim denotaremos  $X = X_r$ .

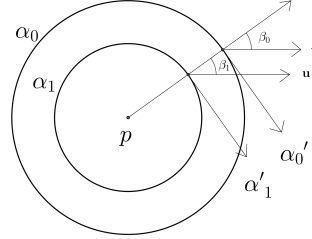


Figura 3.1:

Dado  $x \in X$ , seja  $U_{x,r}^-$  ( resp  $U_{x,r}^+$ ) o maior conjunto conexo em  $M_\alpha$  contendo  $x$  restrito ao qual  $T_{\alpha,r}$  ( resp.  $T_{\alpha,r}^{-1}$ ) é contínua. Como as trajetórias de pontos normais não tangenciam o obstáculo, temos que  $T_{\alpha,r}$  (resp  $T_{\alpha,r}^{-1}$ ) é um difeomorfismo na vizinhança de todo ponto normal. Segue disso que  $U_{x,r}^-$  ( resp.  $U_{x,r}^+$ ) tem interior,  $\text{int}U_{x,r}^-$  (resp.  $\text{int}U_{x,r}^+$ ), não vazio e o bordo  $\partial U_{x,r}^-$  (resp.  $\partial U_{x,r}^+$ ) é um subconjunto do conjunto de singularidades  $\mathcal{S}_{-n}$  (resp  $\mathcal{S}_{-n}$ ) onde  $n = n_\alpha(x)$  é o tempo de retorno de  $x$ . Note que se  $x \in X$  e  $\hat{x} = T_{\alpha,r}(x) \in X$  então, pela definição de  $U_{x,r}^\pm$ , temos que  $T_{\alpha,r}(U_{x,r}^-) = U_{\hat{x},r}^+$  e as restrições

$$T_{\alpha,r} : U_{x,r}^- \rightarrow U_{\hat{x},r}^+ \quad e \quad T_{\alpha,r} : \text{int}U_{x,r}^- \rightarrow \text{int}U_{\hat{x},r}^+$$

são respectivamente um homeomorfismo e um difeomorfismo de  $C^1$ . O maior aberto de  $M_\alpha$  contendo o conjunto  $X$  e restrito ao qual  $T_{\alpha,r}$  e (resp.  $T_{\alpha,r}^{-1}$ ) é diferenciável é denotado por:

$$\mathcal{U}_r^- = \bigcup_{x \in X_r} \text{int}U_{x,r}^- \quad \left( \text{resp. } \mathcal{U}_r^+ = \bigcup_{x \in X_r} \text{int}U_{x,r}^+ \right)$$

Cosideraremos a família de aplicações

$$T_{\alpha,r} : \mathcal{U}_r^- \rightarrow \mathcal{U}_r^+ \quad r \in (0, r_0] \quad (3.1)$$

---

objetivando provar que se  $r_0$  é suficientemente pequeno então o conjunto

$$\Lambda_r = \bigcap_{i \in Z} T_{\alpha,r}^i(\mathcal{U}_r^\pm)$$

é uniformemente hiperbólico para  $T_{\alpha,r}$ . Nossos argumentos estão organizados da seguinte forma: na seção 3.2 descrevemos a geometria dos conjuntos  $U_{x,r}^\pm$  mostrando que se  $r_0$  é suficientemente pequeno então estes conjuntos admitem um tipo de estrutura retangular quando  $r$  é suficientemente pequeno. Na seção 3.3 construímos campos de cones estritamente preservados por  $T_{\alpha,r}$  restrita a estes retângulos. Na seção 3.4 descrevemos a ação  $T_\alpha$  sobre uma coleção finita de retângulos e usamos esta descrição na seção 3.5 para a construir conjuntos hiperbólicos em torno de pontos normais. A geometria e a dependência em  $r$  das variedades invariantes associadas a estes conjuntos hiperbólicos são estudadas na seção 3.6

## 3.2 Retângulos

Nesta seção mostramos que se  $r_0$  (como em 3.1) é suficientemente pequeno então os conjuntos  $U_{x,r}^\pm$  admitem um tipo de estrutura retangular que definimos a seguir.

**Definição 3.1.** *Seja  $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  e  $\pi_2 : M_\alpha \rightarrow I$  a projeção na segunda coordenada, a cada  $x \in X$  associamos as as aplicações:*

$$G_- : U_{x,r}^- \rightarrow I \times I \quad G_-(z) = (\pi_2 \circ T_{\alpha,r}(z), \pi_2(z)) \quad (3.2)$$

$$G_+ : U_{x,r}^+ \rightarrow I \times I \quad G_+(z) = (\pi_2 \circ T_{\alpha,r}^{-1}(z), \pi_2(z)) \quad (3.3)$$

*Dizemos que um conjunto  $U_{x,r}^-$  ( resp.  $U_{x,r}^+$ ) é um **retângulo** se a aplicação  $G_-$  ( resp.  $G_+$ ) for um homeomorfismo e neste caso definimos o **bordo horizontal** de  $U_{x,r}^-$  (resp  $U_{x,r}^+$ ) por*

$$\partial_H U_{x,r}^- := G_-^{-1} \left( I \times \left\{ \pm \frac{\pi}{2} \right\} \right) \quad \left( \text{resp. } \partial_H U_{x,r}^+ := G_+^{-1} \left( I \times \left\{ \pm \frac{\pi}{2} \right\} \right) \right)$$

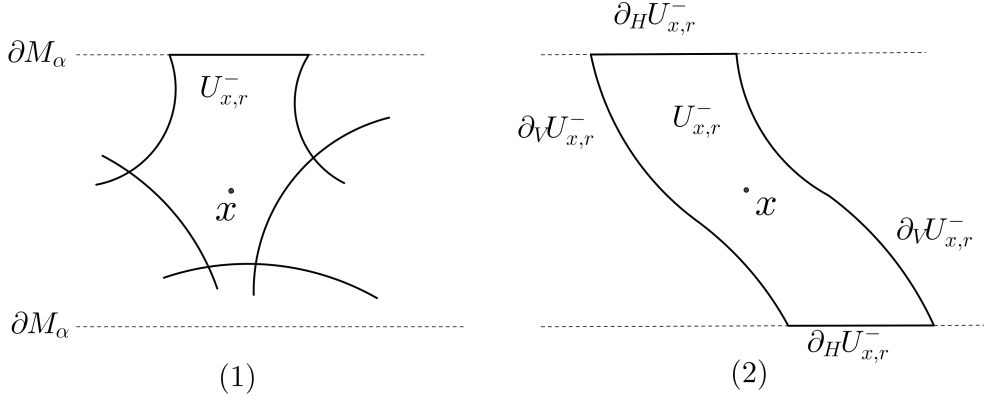


Figura 3.2: Em (1) um conjunto  $U_{x,r}^-$  que não é um retângulo e em (2) um conjunto  $U_{x,r}^-$  que é um retângulo

e o **bordo vertical** por:

$$\partial_V U_{x,r}^- := G_-^{-1} \left( \left\{ \pm \frac{\pi}{2} \right\} \times I \right) \quad \left( \text{resp.} \quad \partial_V U_{x,r}^+ := G_+^{-1} \left( \left\{ \pm \frac{\pi}{2} \right\} \times I \right) \right)$$

Para o que se segue será útil considerar certas curvas no espaço de fase. Recordemos que uma curva  $\lambda \subset M_\gamma$  (resp.  $M_\alpha$ ) é dita **rotacional** se for simples, fechada e homotopicamente não trivial em  $M_\gamma$  (resp.  $M_\alpha$ ). O conjunto  $M_\alpha$  é folheado pelas curvas rotacionais:

$$\ell_\varphi := \{z \in M_\alpha : \pi_2(z) = \varphi\} \quad \varphi \in I$$

A imagem  $M_{\alpha,r}^+ = T_r(M_\alpha)$  e a pré-imagem  $M_{\alpha,r}^- = T_r^{-1}(M_\alpha)$  são respectivamente folheadas pelas curvas

$$\ell_{\varphi,r}^+ = T_r(\ell_\varphi) \quad e \quad \ell_{\varphi,r}^- = T_r^{-1}(\ell_\varphi)$$

que são rotacionais em  $M_\gamma$  ( ver lema 3.3). O seguinte lema nos dá um critério para decidir se um conjunto  $U_{x,r}^\pm$  é um retângulo em termos das curvas  $\ell_{\varphi,r}^\pm$ .



---

**Lema 3.2.** *Se  $x \in X$  tem tempo de retorno  $n_\alpha(x) = n$  então os conjuntos  $U_{x,r}^-$  e  $U_{x,r}^+$  são retângulos se e só se para todo par  $(\varphi_1, \varphi_0) \in I \times I$  a curva  $T_r^{-n+2}(\ell_{\varphi_1,r}^-)$  intersecta a curva  $\ell_{\varphi_0,r}^+$  em um único ponto de  $T_r(U_{x,r}^-) \subset M_\gamma$ .*

**Prova:** Segue da definição de  $U_{x,r}^-$  que as aplicações  $T_r : U_{x,r}^- \rightarrow T_r(U_{x,r}^-)$  e  $G_- : U_{x,r}^- \rightarrow I \times I$  são contínuas. Portanto,  $G_- : U_{x,r}^- \rightarrow I \times I$  é um homeomorfismo se e só se  $G_- \circ T_r^{-1} : T(U_{x,r}^-) \rightarrow I \times I$  também o for. Considerando este fato observemos que para todo  $z \in T(U_{x,r}^-)$  temos:

$$\begin{aligned}
G_- \circ T_r^{-1}(z) = (\varphi_1, \varphi_0) &\Leftrightarrow \pi_2 \circ T_r^{n-1}(z) = \varphi_1 \quad e \quad \pi_2 \circ T_r^{-1}(z) = \varphi_0 \\
&\Leftrightarrow T_r^{n-1}(z) \in \ell_{\varphi_1}^- \quad e \quad T_r^{-1}(z) \in \ell_{\varphi_0}^+ \\
&\Leftrightarrow T_r^{n-2}(z) \in \ell_{\varphi_1,r}^- \quad e \quad z \in \ell_{\varphi_0,r}^+ \\
&\Leftrightarrow z \in T_r^{-n+2}(\ell_{\varphi_1,r}^-) \cap \ell_{\varphi_0,r}^+ \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Assim,  $G_- \circ T_r^{-1} : T_r(U_{x,r}^-) \rightarrow I \times I$  é uma bijeção contínua se e só se

$$\#\{\ell_{\varphi_0,r}^+ \cap T_r^{n-2}(\ell_{\varphi_1,r}^-) \cap T_r(U_{x,r}^-)\} = 1 \quad \forall (\varphi_1, \varphi_0) \in I \times I \tag{3.5}$$

Recordemos que toda bijeção contínua entre espaços métricos compactos é um homeomorfismo [20]. Logo, se a condição 3.5 é verificada então  $G_- \circ T_r^{-1}$  é um homeomorfismo e conseqüentemente o conjunto  $U_{x,r}^-$  é um retângulo. Por outro lado é claro que se  $U_{x,r}^-$  for um retângulo então 3.5 também é verificada. Para tratar dos conjunto  $U_{x,r}^+$  consideremos o homeomorfismo  $Y : I \times I \rightarrow I \times I$ ,  $Y(\varphi', \varphi'') = (\varphi'', \varphi')$ . Pelas definições de  $G_+$  e  $G_-$  temos:

$$G_+(z) = (\pi_2 \circ T_{\alpha,r}^{-1}(z), \pi_2(z)) = Y(\pi_2(z), \pi_2 \circ T_{\alpha,r}^{-1}(z)) = Y \circ T_{\alpha,r} \circ G_-(z)$$

donde  $U_{\hat{x},r}^+$  é retângulo se e só se  $U_{x,r}^-$  também o for o que conclui a prova.  $\square$

Propriedades das curvas  $\ell_{\varphi,r}^\pm$ , em especial sua dependência em  $r$ , são descritas nos dois lema a seguir.

**Lema 3.3.** *Para todo  $\varphi \in I$  existem funções  $\theta_{\varphi,r}^\pm : [0, 2\pi) \rightarrow I$  dependendo de  $r$  tais que*

$$\ell_{\varphi,r}^\pm = \text{Graf}(\theta_{\varphi,r}^\pm)$$

---

Existem funções  $\theta_p^\pm : [0, 2\pi) \rightarrow I$  dependendo apenas de  $\gamma$  e  $p$  tais que para todo  $r$

$$\ell_{0,r}^\pm = \ell_p^\pm = \text{Graf}(\theta_p^\pm)$$

**Prova:** Dado  $(\beta, \varphi) \in M_\alpha$  seja  $(\psi, \theta) = T_r(\beta, \varphi)$ . Pela expressão 2.17 para a derivada de  $T_r$  temos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \beta} = -\frac{k_1 \cdot \tau_0}{\cos \theta} - \frac{k_1 \cos \varphi}{k_0 \cdot \cos \theta} \quad e \quad \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = \frac{\partial \psi}{\partial \beta} - 1 \quad (3.6)$$

onde  $\tau = \|\alpha(\beta) - \gamma(\psi)\|$ ,  $k_0 = k(\beta_0)$ ,  $k_1 = k(\psi)$ . Note que  $\frac{\partial \psi}{\partial \beta} > 0$ , já que  $\tau_0 > 0$ ,  $\cos \varphi \geq 0$  e  $k_1 < 0$ . Portanto, fixado  $\varphi$  temos que  $\beta \mapsto \psi(\beta, \varphi)$  é um difeomorfismo e podemos reparametrizar  $\ell_{\varphi,r}^+$  como o gráfico de uma função  $\psi \mapsto \theta_{\varphi,r}^+(\psi)$ . Para todo  $\varphi$  temos  $R(\ell_\varphi) = \ell_{-\varphi}$  donde, por reversibilidade de  $T_r$ ,  $\ell_{\varphi,r}^- = R(\ell_{-\varphi,r}^+)$  e assim,  $\ell_\varphi^-$  é o gráfico da função  $\psi \mapsto \theta_{\varphi,r}^-(\psi) = -\theta_{-\varphi,r}^+(\psi)$ .

Dado  $\psi \in [0, 2\pi)$  seja  $\theta_p^-(\psi)$  o ângulo entre o vetor  $p - \gamma(\psi)$  e o vetor normal  $\mathbf{n}(\psi)$ . Para todo  $\psi \in [0, 2\pi)$  a reta  $L$  passando por  $\gamma(\psi)$  e formando ângulo  $\theta_p^-(\psi)$  com  $\mathbf{n}(\psi)$  intersecta perpendicularmente qualquer círculo  $\alpha$  centrado em  $p$ . Pela definição de  $T_r$  e  $\ell_0$  temos que  $T_r(\psi, \theta_p^-(\psi)) \in \ell_0$ , ou seja  $\ell_{0,r}^-$  é o gráfico da função  $\psi \mapsto \theta_p^-(\psi)$  que depende apenas de  $\gamma$  e  $p$ . Por reversibilidade,  $\ell_{0,r}^+$  é o gráfico de  $\psi \mapsto \theta_p^+(\psi) = -\theta_p^-(\psi)$ .  $\square$

**Lema 3.4.** *As famílias de funções  $\{\theta_{\varphi,r}^+\}_r$  e  $\{\theta_{\varphi,r}^-\}_r$  convergem na topologia  $C^1$  respectivamente para  $\theta_p^+$  e  $\theta_p^-$  quando  $r \rightarrow 0$*

**Prova:** Cada tripla  $(\psi, \varphi, r) \in [0, 2\pi) \times I \times (0, r_0)$  determina um único segmento de trajetória de bilhar,  $\Gamma(\psi, \varphi, r)$ , na mesa  $Q_{\gamma,p,r}$  que tem extremos nos pontos  $q = q(\psi, \varphi, r) \in \alpha$  e  $\gamma(\psi)$ , forma ângulo  $\varphi$  com o vetor normal no ponto  $q$  e cuja reflexão com respeito ao vetor  $\mathbf{n}(\psi)$  forma um ângulo  $\theta_\varphi^+(\psi)$  com  $\mathbf{n}(\psi)$ . Uma tripla  $(\psi, 0, r)$  determina um segmento de trajetória  $\Gamma(\psi, 0, r)$  de extremos  $q_0 = q(\psi, 0, r) \in \alpha$  e  $\gamma(\psi)$ , que forma ângulo  $\varphi = 0$  com a normal no ponto  $q_0$  e cuja reflexão com respeito ao vetor  $\mathbf{n}(\psi)$  forma

---

ângulo  $\theta_p^+(\psi)$  com com  $\mathbf{n}(\psi)$ . Na figura 3.3(1) ilustramos segmentos  $\Gamma(\psi, \varphi, r)$  e  $\Gamma(\psi, 0, r)$  para um par  $(\psi, \varphi)$  fixado.

Considerando a construção na figura 3.3(1) observamos que  $\Gamma(\psi, \varphi, r)$  está contida em um reta que tangencia um círculo de centro  $p$  e raio  $r \sin \varphi$  em um ponto  $q'$  e o ângulo  $\sigma = \sigma(\psi, \varphi, r)$  entre as reflexões de  $\Gamma(\psi, \varphi, r)$  e  $\Gamma(\psi, 0, r)$  satsifaz:

$$|\theta_\varphi^+(\psi) - \theta_p^+(\psi)| = |\sigma| = \left| \arcsin \left( \frac{r \sin \varphi}{\tau_p(\psi)} \right) \right| \quad (3.7)$$

onde  $\tau_p(\psi) = \|p - \gamma(\psi)\|$ . Denotando por  $\tau(\psi, \varphi, r)$  a distância entre  $q(\psi, \varphi, r)$  e  $\gamma(\psi)$  e observando que  $\|q(\psi, \varphi, r) - q'\| = r \cos \varphi$  obtemos:

$$\tau_p(\psi) - (\tau(\psi, \varphi, r) + r \cos \varphi) < r \sin \varphi \quad (3.8)$$

Considerando as expressões 3.6 para as derivadas  $\frac{\partial \psi}{\partial \beta}$  e  $\frac{\partial \theta}{\partial \beta}$  e observando que  $\tau_p(\psi) = \tau(\psi, 0, r) + r$  obtemos:

$$\frac{d\theta_{\varphi,r}^+(\psi)}{d\psi} = 1 + \frac{\cos \theta_\varphi^+(\psi)}{k(\psi)(\tau(\psi, \varphi, r) + r \cos \varphi)} \quad e \quad \frac{d\theta_p^+(\psi)}{d\psi} = 1 + \frac{\cos \theta_p^+(\psi)}{k(\psi)(\tau_p(\psi))} \quad (3.9)$$

Note que a função  $\psi \mapsto \tau_p(\psi) = \|\gamma(\psi) - p\|$  definida no compacto  $[0, 2\pi)$ , é contínua e estritamente positiva uma vez que  $p \notin \gamma$ . Sejam:

$$\tau_{min} := \min_{\psi \in [0, 2\pi)} \{\tau_p(\psi)\} \quad e \quad \epsilon(r) := \min \left\{ \arcsin \left( \frac{r}{\tau_{min}} \right), r \right\} \quad (3.10)$$

Segue de 3.7 e 3.8 que  $\forall (\psi, \varphi) \in [0, 2\pi)$

$$|\theta_{\varphi,r}^+(\psi) - \theta_p^+(\psi)| < \epsilon(r) \quad (3.11)$$

$$|\cos \theta_{\varphi,r}^+(\psi) - \cos \theta_p^+(\psi)| < \epsilon(r) \quad (3.12)$$

$$|\tau(\psi, \varphi, r) + r \cos \varphi - \tau_p(\psi)| < \epsilon(r) \quad (3.13)$$

onde 3.12 segue de 3.11 já que  $|\cos \theta_{\varphi,r}^+(\psi) - \cos \theta_p^+(\psi)| < |\theta_{\varphi,r}^+(\psi) - \theta_p^+(\psi)|$ . Por 3.11 temos que  $\{\theta_{\varphi,r}^+\}_r$  converge na topologia  $C^0$  para a função  $\psi \mapsto$

$\theta_p(\psi)$  uma vez que  $\lim_{r \rightarrow 0} \epsilon(r) = 0$ . Considerando 3.9 e denotando  $\tau_p = \tau_p(\psi)$ ,  $\tau' = \tau(\psi, \varphi, r) + r \cos \varphi$ ,  $k = k(\psi)$ ,  $\theta_p^+ = \theta_p^+(\psi)$  e  $\theta_{\varphi,r}^+ = \theta_{\varphi,r}^+(\psi)$  temos:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\theta_p^-}{d\psi}(\psi) - \frac{d\theta_{\varphi}^-}{d\psi}(\psi) \right| &= \left| \frac{\cos \theta_p^+}{k\tau_p} - \frac{\cos \theta_{\varphi}^+}{k\tau'} \right| \\ &\leq \left| \frac{\cos \theta_p^+}{k\tau_p} - \frac{\cos \theta_{\varphi}^+}{k\tau_p} \right| + \left| \frac{\cos \theta_{\varphi}^+}{k\tau_p} - \frac{\cos \theta_{\varphi}^+}{k\tau'} \right| \\ &< \frac{\epsilon(r)}{k\tau_p} + \frac{\epsilon(r)}{k\tau' \cdot \tau_p} < \epsilon(r) \left( \frac{\tau' + 1}{k\tau' \cdot \tau_p} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

O termo  $\frac{\tau'+1}{k\tau'\tau_p}$  é limitado já que as curvaturas  $k < 0$  e o os comprimentos  $\tau > 0$  e  $\tau' > 0$  são limitados. Como  $\lim_{r \rightarrow 0} \epsilon(r) = 0$  temos por 3.14 que  $\lim_{r \rightarrow 0} \left| \frac{d\theta_p^-}{d\psi}(\psi) - \frac{d\theta_{\varphi}^-}{d\psi}(\psi) \right| = 0$  donde  $\{\theta_{\varphi,r}^+\}_r$  converge na topologia  $C^1$  para a função  $\theta_p^+(\psi)$  quando  $r \rightarrow 0$ .  $\square$

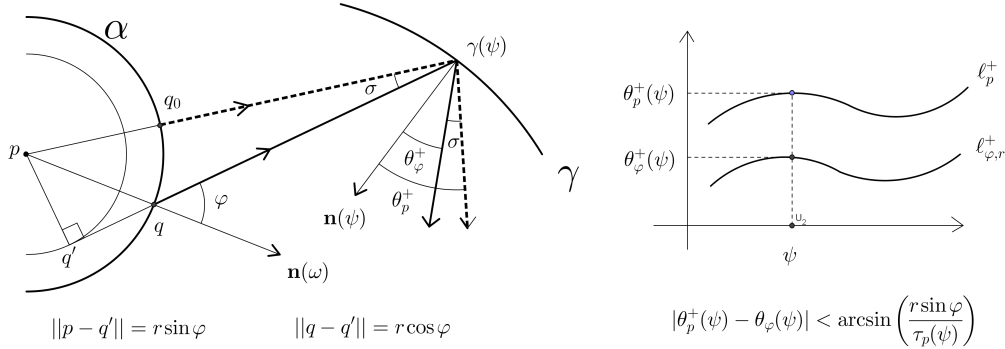


Figura 3.3:

No que se segue, dada uma família de conjuntos  $\{A_r\}_r \subset M_\gamma \cup M_\alpha$  escrevemos  $\lim_{r \rightarrow 0} A_r = B$  para indicar que  $\lim_{r \rightarrow 0} d_H(A, B) = 0$  onde  $d_H$  é a distância de Hausdorff. Segue do lema 3.4 que  $\lim_{r \rightarrow 0} \ell_{\varphi,r}^\pm = \ell_p^\pm$  e, como  $M_{\alpha,r}^\pm$  é folheado pelas curvas  $\ell_{\varphi,r}^\pm$ , temos  $\lim_{r \rightarrow 0} M_\alpha^\pm = \ell_p^\pm$ .

Exploraremos o comportamento assintótico  $\lim_{r \rightarrow 0} M_\alpha^\pm = \ell_p^\pm$  para provar a seguinte proposição.

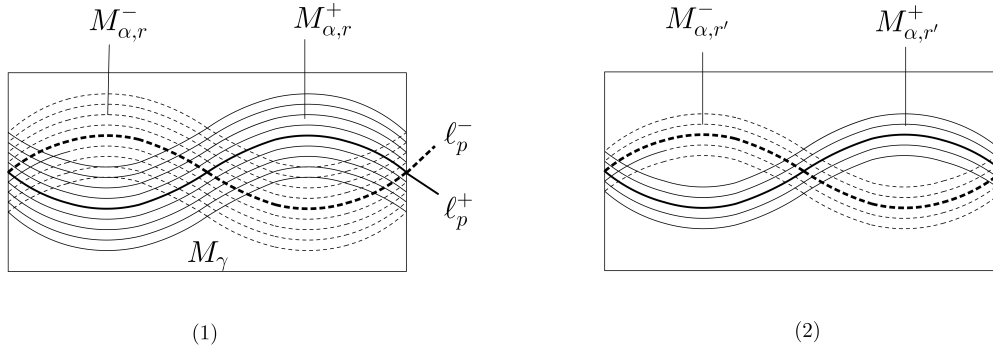


Figura 3.4: (1): conjuntos  $M_{\alpha,r}^{\pm}$  folheados pelas curvas  $\ell_{\varphi,r}^{\pm}$ . (2): conjuntos  $M_{\alpha,r'}^+$  e  $M_{\alpha,r'}^-$  para um valor  $r' < r$ .

**Proposição 3.5.** *Se  $\{T_{\alpha,r}\}_{r \in (0,r_0]}$  satisfaz  $\mathbf{P}$  e  $r_0$  é suficientemente pequeno então para todo  $x \in X$  os conjuntos  $U_{x,r}^{\pm}$  são retângulos.*

**Prova:** Consideremos um ponto normal transversal  $x \in X$  com tempo de retorno  $n_{\alpha}(x) = n$ , como  $x$  é interseção transversal entre um segmento de  $\ell_0$  e um segmento de  $T_{\alpha,r}^{-1}(\ell_0) = T_r^{-n}(\ell_0)$  temos que  $T_r(x)$  é uma interseção transversal entre segmentos das curvas  $\ell_p^+ = T_r(\ell_0)$  e  $T_r^{-n-1}(\ell_p^-) = T_{\alpha,r}^{-n}(\ell_0)$ . Pelo lema 3.3 existe  $r(x)$  tal que se  $r < r(x)$  então para todo par  $(\varphi_1, \varphi_0) \in I \times I$  a curva  $\ell_{\varphi_0,r}^+$  intersecta transversalmente a curva  $T_r^{-n-1}(\ell_{\varphi_1,r}^-)$  em um único ponto de uma vizinhança de  $T_r(x)$ . Assim, pelo lema 3.2, temos que se  $r < r(x)$  então  $U_{x,r}^-$  e  $U_{x,r}^+$  são retângulos. Definindo  $r_1 = \min\{r(x) : x \in X\}$  temos que se  $r < r_1$  então para todo  $x \in X$  os conjuntos  $U_{x,r}^-$  e  $U_{x,r}^+$  são um retângulos.  $\square$

Concluimos esta seção descrevendo a dependência em  $r$  das trajetórias de bilhar na mesa  $Q_{\gamma,p,r}$  associadas às órbitas de pontos nos conjuntos  $U_{x,r}^{\pm}$ . No que se segue, dado  $x \in X$  tal que  $n_{\alpha}(x) = n$ , denotamos por  $(\beta_{0,r}(z), \varphi_{0,r}(z))$  as coordenadas de um ponto  $z \in U_{x,r}^-$ , por  $(\beta_{n,r}(z), \varphi_{n,r}(z))$  as coordenadas de  $T_{\alpha,r}(z)$  e por  $(\psi_{i,r}(z), \theta_{i,r}(z))$  as coordenadas de  $T_r^i(z)$  para  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .

Denotamos por  $k_{i,r}(z)$  a curvatura do bordo da mesa e por  $\tau_{i,r}(z)$  a distância  $\|q_{i,r}(z) - q_{i+1,r}(z)\|$  onde  $q_{i,r}(z) = \gamma(\psi_{i,r}(z))$  é um ponto do bordo externo  $\gamma$  para  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  e  $q_i(z) = \alpha(\beta_{i,r}(z))$  um ponto do obstáculo para  $i \in \{0, n\}$ .

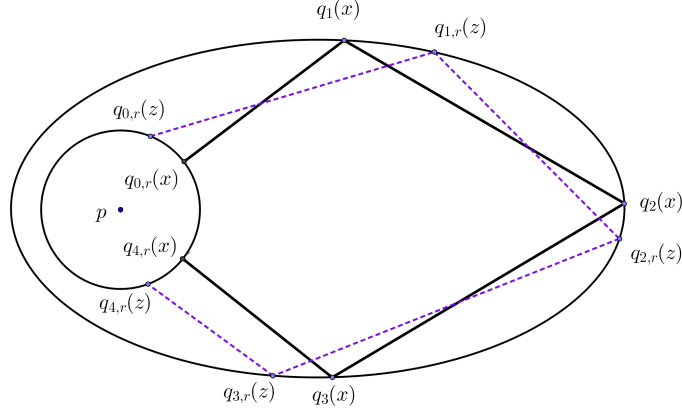


Figura 3.5: Comportamento assintótico de trajetórias de pontos  $z \in U_x^-$

Como as coordenadas dos pontos na órbita de  $x \in X$  independem de  $r$ , temos que  $(\psi_{i,r}(x), \theta_{i,r}(x))$  e  $k_{i,r}(x)$  para  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  assim como  $\tau_{i,r}(x)$  para  $i = \{1, \dots, n-2\}$  independem de  $r$ , portanto omitiremos o índice  $r$  nestas notações escrevendo  $(\psi_i(x), \theta_i(x))$ ,  $k_i(x)$  e  $\tau_i(x)$ . O segmento da trajetória de bilhar associada a  $z \in U_{x,r}^-$  (resp.  $x$ ) até o primeiro retorno ao obstáculo é um caminho poligonal  $\Gamma_r(z)$  (resp.  $\Gamma_r(x)$ ) na mesa  $Q_{\gamma,p,r}$  que identificaremos por seus vértices, ou seja:

$$\Gamma_r(z) = \{q_{0,r}(z), q_{1,r}(z), \dots, q_{n-1,r}(z), q_{n,r}(z)\} \quad (3.15)$$

$$\Gamma_r(x) = \{q_{0,r}(x), q_1(x), \dots, q_{n-1}(x), q_{n,r}(x)\} \quad (3.16)$$

Note que apenas os extremos de  $\Gamma_r(x)$  dependem de  $r$  e  $\Gamma_r(x)$  está contido na trajetória singular  $\Gamma_0(x) = \{p, q_1(x), \dots, q_{n-1}(x), p\}$  que o limite, quando  $r \rightarrow 0$ , dos caminhos  $\Gamma_r(x)$ . No que se segue denotaremos  $\tau_0^p(x) = \|p - q_1(x)\|$

---

e  $\tau_{n-1}^p(x) = \|p - q_{n-1}(x)\|$ . Será útil observar que:

$$\tau_0^p(x) = \tau_{0,r}(x) + r \quad e \quad \tau_{n-1}^p(x) = \tau_{n-1,r}(x) + r \quad (3.17)$$

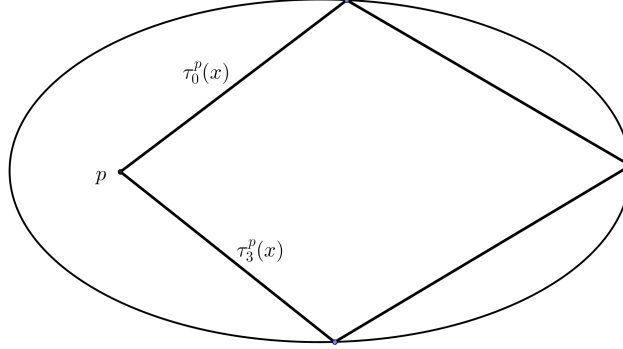


Figura 3.6:  $\Gamma_0(x)$

**Notação 3.6.** Dada uma família de funções  $A_r : U_{x,r}^- \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $r \in (0, r_1]$  e um  $a \in \mathbb{R}$  escreveremos  $A_r \asymp a$  para indicar a existência de uma função  $\epsilon : (0, r_1] \mapsto \mathbb{R}$  satisfazendo  $\lim_{r \rightarrow 0} \epsilon(r) = 0$  e tal que  $|A_r(z) - a| < \epsilon(r)$  para todo  $z \in U_{x,r}^-$ .

**Lema 3.7.** Seja  $x \in X$  com tempo de retorno  $n_\alpha(x) = n$  e considere as funções  $\psi_{i,r}, \theta_{i,r}, k_{i,r}, \tau_{i,r} : U_{x,r}^- \rightarrow \mathbb{R}$  como acima.

- (1)  $k_{i,1} \asymp k_i(x)$ ,  $\psi_{i,r} \asymp \psi_i(x)$  e  $\theta_{i,r} \asymp \theta_i(x)$  para todo  $i \in \{1, \dots, n-2\}$ .
- (2)  $\tau_{i,r} \asymp \tau_i(x)$  para todo  $i \in 1, \dots, n-2$
- (3)  $\tau_{i,r} \asymp \tau_i^p(x)$  para  $i \in \{0, n-1\}$  onde  $\tau_j^p(x) = \|p - q_j(x)\|$ ,  $i \in \{1, n-1\}$

**Prova:** (1) Se  $n_\alpha(x) = n$  então para todo  $z \in U_{x,r}^-$  temos  $T_{\alpha,r}(z) = T_r \circ F_\gamma^{n-2} \circ T_r(z)$  onde  $F_\gamma : M_\gamma \rightarrow M_\gamma$  é a aplicação de bilhar na mesa convexa  $Q_\gamma$ . Portanto, cada imagem  $T_r^i(U_{x,r}^-)$ ,  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  é a componente conexa do conjunto:

$$F_\gamma^{i-1}(M_{\alpha,r}^+) \cap F_\gamma^{n-2-i}(M_{\alpha,r}^-) \quad (3.18)$$


---

---

contendo o ponto

$$T_r^i(x) = (\psi_{i,r}(x), \theta_{i,r}(x)) \in F_\gamma^{i-1}(\ell_p^+) \cap F_\gamma^{n-2-i}(\ell_p^-) \quad (3.19)$$

Como  $F_\gamma$  é um difeomorfismo e  $\lim_{r \rightarrow 0} M_{\alpha,r}^\pm = \ell_p^\pm$  temos:  $\lim_{r \rightarrow 0} F_\gamma^{i-1}(M_{\alpha,r}^+) \cap F_\gamma^{n-2-i}(M_{\alpha,r}^-) = F_\gamma^{i-1}(\ell_p^+) \cap F_\gamma^{n-2-i}(\ell_p^-)$  donde:

$$\lim_{r \rightarrow 0} T_r^i(U_{x,r}^-) = (\psi_i(x), \theta_i(x)) \quad (3.20)$$

Logo, existe uma função  $\epsilon : [0, r_1) \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo  $\lim_{r \rightarrow 0} \epsilon(r) = 0$  e tal que para todo  $z \in U_{x,r}^-$  e todo  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ :

$$|\psi_{i,r}(z) - \psi_i(x)| < \epsilon(r) \quad e \quad |\theta_{i,r}(z) - \theta_i(x)| < \epsilon(r) \quad (3.21)$$

ou seja,  $\psi_i(z) \asymp \psi_i(x)$  e  $\theta_i(z) \asymp \theta_i(x)$  para todo  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .

(2) Se  $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua  $A_r \asymp a$  então  $B \circ A_r \asymp B(a)$ . Observando que  $k_{i,r}(z)$  é uma função contínua de  $\psi_{i,r}(z)$  temos  $k_{i,r} \asymp k_i(x)$  para todo  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  e observando que  $\tau_{i,r}(z)$  é uma função contínua de  $\psi_{i,r}(z)$  e  $\psi_{i+1,r}(z)$  temos  $\tau_{i,r} \asymp \tau_i(x)$  para todo  $i \in \{1, \dots, n-2\}$ .

(3) Observando que  $\tau_0(x) = \|q_{0,r}(x) - q_{1,r}(x)\| = r + \tau_p^0(x)$  temos para todo  $z \in U_{x,r}^-$

$$\begin{aligned} \tau_{0,r}(z) &= \|\alpha(\beta_{0,r}(z)) - \gamma(\psi_{1,r}(z))\| \\ &\leq \|\alpha(\beta_{0,r}(z)) - p\| + \|p - \gamma(\psi_1(x))\| + \|\gamma(\psi_1(x)) - \gamma(\psi_{1,r}(z))\| \\ &= r + \tau_p^0(x) + \|\gamma(\psi_1(x)) - \gamma(\psi_{1,r}(z))\| \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde

$$|\tau_{0,r}(z) - \tau_p^0(x)| \leq r + \|\gamma(\psi_1(x)) - \gamma(\psi_{1,r}(z))\| \quad (3.23)$$

Como  $\psi_{i,r} \asymp \psi_i(x)$  temos por 3.23 que  $\tau_{0,r} \asymp \tau_p^0(x)$ . De forma análoga prova-se que  $\tau_{n-1,r} \asymp \tau_{n-1}^p(x)$ .  $\square$



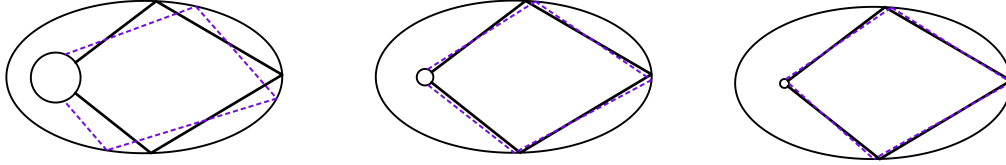


Figura 3.7:

Como consequência do lema acima temos que os segmentos de trajetória de bilhar  $\Gamma_r(z)$ ,  $z \in U_{x,r}^-$ , convergem, quando  $r \rightarrow 0$  para a trajetória singular  $\Gamma_0(x)$  como ilustrado na figura 3.7

### 3.3 Campos de cones

Nesta seção construiremos campos de cones estritamente preservados pelas aplicações  $T_{\alpha,r} : \mathcal{U}_r^- \rightarrow \mathcal{U}_r^+$ ,  $r \in (0, r_0]$  e suas inversas. Precisamente, considerando o campos de cones  $z \mapsto C^\pm(z)$ ,  $z \in \text{int}M_\alpha$  definidos por:

$$C^+(z) := \{u \in T_z M_\alpha \mid \eta(u) \in [0, +\infty]\} \quad (3.24)$$

$$C^-(z) := \{u \in T_z M_\alpha \mid \eta(u) \in [-\infty, 0]\}. \quad (3.25)$$

provaremos a seguinte proposição

**Proposição 3.8.** *Se  $\{T_{\alpha,r}\}_{0 \in (0, r_0]}$  satisfaz **P** e  $r_0$  é suficientemente pequeno então existem funções  $c_1, c_2, \rho : (0, r_0] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo:*

$$\lim_{r \rightarrow 0} c_i(r) = 1, \quad \rho(r) > 1 \quad e \quad \lim_{r \rightarrow 0} \rho(r) = \infty$$

---

e cones:

$$C^u(z) = \{u \in T_z M_\alpha : c_1(r) < \eta(u) < c_2(r)\} \subset \text{int}C^+(z) \quad (3.26)$$

$$C^s(z) = \{u \in T_z M_\alpha : -c_1(r) < \eta(u) < -c_2(r)\} \subset \text{int}C^-(z) \quad (3.27)$$

tais que se  $r < r_0$  então:

$$D_z T_{\alpha,r} \cdot C^+(z) \subset C^u(T_{\alpha,r}(z)) \subset \text{int}C^+(T_{\alpha,r}(z)) \quad \forall z \in \mathcal{U}_r^- \quad (3.28)$$

$$D_z T_{\alpha,r}^{-1} \cdot C^-(z) \subset C^s(T_{\alpha,r}^{-1}(z)) \subset \text{int}C^-(T_{\alpha,r}^{-1}(z)) \quad \forall z \in \mathcal{U}_r^+ \quad (3.29)$$

e

$$\|D_z T_{\alpha,r} \cdot u\| > \rho \cdot \|u\| \quad \forall z \in \mathcal{U}_r^- \text{ e } u \text{ tal } \eta(u) \in [0, c_2(r)] \quad (3.30)$$

$$\|D_z T_{\alpha,r}^{-1} \cdot u\| > \rho \cdot \|u\| \quad \forall z \in \mathcal{U}_r^+ \text{ e } u \text{ tal } \eta(u) \in [-c_2(r), 0] \quad (3.31)$$

onde  $\|(u_1, u_2)\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

No que se segue supomos, sem perda de generalidade, que todo ponto  $x \in X$  tenha tempo de retorno  $n_\alpha(x) = n$ . Denotamos:

$$N_{x,r}^+ = \{(z, u) : z \in U_{x,r}^- \text{ e } u \in C^+(z)\} \quad (3.32)$$

$$N_{x,r}^- = \{(z, u) : z \in U_{x,r}^+ \text{ e } u \in C^-(z)\} \quad (3.33)$$

e definimos famílias de funções:

$$\eta_{i,r} : N_{x,r}^+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ e } f_{i,r} : N_{x,r}^+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad r \in (0, r_0]$$

tais que  $\eta_{i,r}(z, u)$  e  $f_{i,r}(z, u)$  são respectivamente a inclinação e o tempo de focalização do vetor  $D_z T_r^i \cdot u$  para  $i \in \{0, \dots, n\}$  com  $(z, u) \in N_{x,r}^-$ . Das

---

fórmulas 2.18 e 2.16 segue que:

$$f_{0,r}(z, u) = \frac{r \cos \varphi_{0,r}(z)}{1 + \eta(u)} \quad (3.34)$$

$$\eta_{i+1,r}(u, z) = 1 + \frac{\cos \theta_{i+1,r}(z)}{k_{i+1,r}(z)(\tau_{i,r}(z) - f_{i,r}(z, u))}, \quad i \in \{1, \dots, n-1\} \quad (3.35)$$

$$f_{i+1,r}(z, u) = \frac{-1}{\frac{2k_{i+1,r}(z)}{\cos \theta_{i+1,r}(z)} + \frac{1}{\tau_{i,r}(z) - f_{i,r}(z, u)}} \quad i \in \{1, \dots, n-1\} \quad (3.36)$$

$$\eta_{n,r}(z, u) = 1 + \frac{r \cos \varphi_{n,r}(z)}{\tau_{n-1,r}(z) - f_{n-1,r}(z, u)} \quad (3.37)$$

onde  $k_{i,r}$ ,  $\theta_{i,r}$ ,  $\varphi_{i,r}$  e  $\tau_{i,r}$  são como definidas na seção anterior e usamos que  $k_{i,r}(z) = \frac{1}{r}$ ,  $i \in \{0, n\}$  para obter 3.34 e 3.37. Para provar a proposição 3.8 estudaremos o comportamento assintótico, quando  $r \rightarrow 0$ , das funções  $\eta_{i,r}$  e  $f_{i,r}$  tomando como referência os valores destas funções em  $(x, u^h) \in N_{x,r}^+$  onde  $u^h = (1, 0) \in T_x M_\alpha$ . Será útil observar o seguinte:

**Lema 3.9.** *Para todo  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  as inclinações  $\eta_{i,r}(x, u^h)$  e os tempos de focalização  $f_{i,r}(x, u^h)$  independem do parâmetro  $r$  e temos  $\tau_{n-1}^p(x) - f_{n-1,r}(x, u^h) \neq 0$ .*

**Prova:** Observando que  $\varphi_0(x) = 0$  e  $\eta(u^h) = 0$  temos  $f_{0,r}(x, u^h) = -r$ . Como  $\tau_{0,r}(x) = \tau_p(x) - r$  temos  $\tau_{0,r}(x) - f_{0,r}(x, u^h) = \tau_{0,p}(x)$  donde, por 3.36 e 3.35:

$$\eta_{1,r}(x, u^h) = 1 + \frac{\cos \theta_1(x)}{k_1(x) \cdot \tau_{0,p}(x)} \quad e \quad f_{1,r}(x, u^h) = \frac{-1}{\frac{2k_{1,r}(x)}{\cos \theta_{1,r}(x)} + \frac{1}{\tau_{0,p}(x)}} \quad (3.38)$$

portanto  $\eta_{1,r}(x, u^h)$  e  $f_{1,r}(x, u^h)$  independem de  $r$  e como ,para  $i \in \{2, \dots, n-1\}$ , temos  $\eta_{i,r}(x, u^h)$  e  $f_{i,r}(x, u^h)$  dados em termos de  $\eta_{1,r}(x, u^h)$ ,  $f_{1,r}(x, u^h)$ ,  $k_i(x)$  e  $\tau_i(x)$  temos também que  $\eta_{i,r}(x, u^h)$  e  $f_i(x, u^h)$  independem de  $r$ .

---

Observando que  $\varphi_n(x) = 0$  e  $\tau_{n-1,r}(x) = \tau_{n-1}^p(x) - r$  temos por 3.37:

$$\eta_n(x, u^h) = 1 + \frac{r}{\tau_{n-1}^p(x) - r - f_{n-1}(x, u^h)} \quad (3.39)$$

Como  $u^h \in \mathbf{T}_x M_\alpha$  é vetor tangente a  $\ell_0$  e  $T_{\alpha,r}(x)$  é uma interseção transversal entre  $\ell_0$  e  $T_{\alpha,r}(\ell_0)$  temos  $\eta_n(x, u^h) \neq 0$ . Assim, por 3.39, temos  $\tau_{n-1}^p(x) - f_{n-1}(x, u^h) \neq 0$ .  $\square$

**Lema 3.10.** *Para todo  $x \in X$  existe  $r_0(x) > 0$  e funções  $c_{x,1}, c_{x,2} : (0, r_0(x)] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo  $\lim_{r \rightarrow 0} c_{x,i}(r) = 1$  e tais que se  $r < r_0(x)$  então*

$$0 < c_{x,1}(r) < \eta_{n,r}(z, u) < c_{x,2}(r) \quad \forall (z, u) \in N_{x,r}^+ \quad (3.40)$$

Prova: Se  $(z, u) \in N_{x,r}^+$  então  $\eta(u) \in [0, \infty]$  donde  $f_{0,r}(z, u) \in [-r \cos \varphi_{0,r}(z), 0]$ . Segue disso que  $|f_{0,r}(z, u)| < r$  para todo  $(z, u) \in N_{x,r}^+$  donde  $f_{0,r} \asymp 0$ . Considerando isto e observando  $\tau_{0,r} \asymp \tau_0^p(x)$  (lema 3.7) obtemos:

$$\tau_{0,r} - f_{0,r} \asymp \tau_0^p(x) \quad (3.41)$$

considerando 3.36 e observando que  $k_{i,r} \asymp k_i(x)$  para  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  e  $\theta_{i,r} \asymp \theta_i$  para  $i \in \{1, \dots, n-2\}$  (lema 3.7) obtemos

$$f_{1,r} \asymp \frac{-1}{\frac{2k_1(x)}{\cos \theta_1(x)} + \frac{1}{\tau_0^p(x)}} = f_1(x, u^h) \quad (3.42)$$

Como  $f_{n-1,r}(z, u)$  depende continuamente de  $f_{1,r}(z, u), \theta_{i,r}(z), k_{i,r}(z)$  e  $\tau_{i,r}(z)$ , segue de 3.42 e do lema 3.7 que  $f_{n-1,r} \asymp f_{n-1}(x, u^h)$ . com este último fato e observando que , pelo lema 3.7, temos  $\tau_{n-1,r} \asymp \tau_{n-1}^p(x)$  obtemos:

$$\tau_{n-1,r} - f_{n-1,r} \asymp \tau_{n-1}^p(x) - f_{n-1}(x, u^h) \quad (3.43)$$

Do lema 3.9 segue que  $\tau_{n-1}^p(x) - f_{n-1}(x, u^h) \neq 0$ , portanto considerando 3.43

---

---

acima temos que existe  $r_0(x) > 0$  tal que se  $r < r_0(x)$  então

$$\tau_{n-1,r}(z) - f_{n-1,r}(z, u) \neq 0 \quad \forall (z, u) \in N_{x,r}$$

Para concluir definimos  $c_{x,i} : (0, r_0(x)] \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$c_{1,x}(r) = 1 - \frac{r}{d_x(r)} \quad e \quad c_{2,x}(r) := 1 + \frac{r}{d_x(r)} \quad (3.44)$$

onde

$$d_x(r) = \inf\{|\tau_{n-1,r}(z, u) - f_{n-1,r}(z, u)| : (z, u) \in N_{x,r}\}$$

Note que  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r}{d_x(r)} = 0$ , uma vez que, por 3.43, temos  $\lim_{r \rightarrow 0} d_r(x) \neq 0$ . Segue disso que  $\lim_{r \rightarrow 0} c_i(r) = 1$  para  $i \in \{1, 2\}$ . Portanto podemos redefinir  $r_0(x)$  de forma que se  $r < r_0(x)$  então  $0 < c_{x,1}(r) < c_{x,2}(r)$ . Pela expressão 3.37 para  $\eta_{n,r}(z, u)$  obtemos 3.40 o que conclui a prova.  $\square$

**Prova da proposição 3.8:** Seja  $\{T_{\alpha,r}\}_{0 \in (0, r_0]}$  satisfazendo **P** com  $r_0$  suficientemente de forma que  $r_0 < \min\{r_0(x) : x \in X\}$  sendo  $r_0(x)$  como definido no lema 3.10. Considerando as funções  $c_{i,x}(r)$  como definidas neste mesmo lema, definimos  $c_i : (0, r_0] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, 2\}$  por:

$$c_1(r) = \min\{c_{1,x}(r) : x \in X \text{ e } 0 < r < r_0\} \quad (3.45)$$

$$c_2(r) = \max\{c_{2,x}(r) : x \in X \text{ e } 0 < r < r_0\} \quad (3.46)$$

Como  $0 < c_{1,x}(r) < c_{2,x}(r) < \infty$  temos  $0 < c_1(r) < c_2(r) < \infty$ ,  $i = 1, 2$  e, pelo lema 3.10 temos que se  $r < r_0$  então:

$$0 < c_1(r) \leq \eta_n(z, u) \leq c_2(r) < \infty \quad \forall (z, u) \in \bigcup_{x \in X} N_{x,r}^+ \quad (3.47)$$

Pela definição de  $N_{x,r}^+$  e pela inequação acima temos que se  $r < r_0$  então:

$$D_z T_{\alpha,r}.C^+(z) \subset C^u(T_{\alpha,r}(z)) \subset \text{int}C^+(T_{\alpha,r}(z)) \quad \forall z \in \mathcal{U}_r^- \quad (3.48)$$

---

Da reversibilidade de  $T_{\alpha,r}$  segue também que se  $r < r_0$  então:

$$D_z T_{\alpha,r}^{-1} \cdot C^-(z) \subset C^s(T_{\alpha,r}^{-1}(z)) \subset \text{int}C^-(T_{\alpha,r}^{-1}(z)) \quad \forall z \in \mathcal{U}_r^+ \quad (3.49)$$

Fixando  $x \in X$ , seja  $(z, u_0) \in N_{x,r}$  e denotemos  $u_i = (u_i^{(1)}, u_i^{(2)}) = D_{z_0} T_r^i \cdot u_0$  para  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Pela expressão 2.8 para a derivada de  $T$  temos:

$$u_{i+1}^{(1)} = -\frac{k_{i+1,r}(z)}{\cos \theta_{i,r}(z)} \cdot \left( \tau_{i,r}(z)(u_i^{(1)} + u_i^{(2)}) + \frac{\cos \theta_{i,r}(z)}{k_{i,r}(z)} \cdot u_i^{(1)} \right) \quad (3.50)$$

Note que se  $u_i^{(1)} \neq 0$  então  $\|u_i\| = |u_i^{(1)}| \cdot \sqrt{1 + \eta_{i,r}^2}$  onde  $\eta_i = \eta_{i,r}(z, u_0)$ . Supondo  $r < r_0$  e  $\eta_0 = \frac{u_0^{(2)}}{u_0^{(1)}} \in [0, c_2(r)]$  temos  $\eta_n = \frac{u_n^{(2)}}{u_n^{(1)}} \in [c_1(r), c_2(r)]$  uma vez que  $D_z T_{\alpha,r} C^+(z) \subset C^u(T_{\alpha,r}(z))$ . Assim, temos  $u_i^{(1)} > 0$  para  $i \in \{0, n\}$  donde  $\|u_i\| = |u_i^{(1)}| \cdot \sqrt{1 + \eta^2}$ , para  $i \in \{0, n\}$ . Observando que  $u_0^{(1)} \cdot u_0^{(2)} \geq 0$  temos, pela expressão 3.50, que  $|u_1^{(1)}| \neq 0$  donde  $\|u_1\| = |u_1^{(1)}| \cdot \sqrt{1 + \eta_1^2}$ . Feitas estas observações podemos escrever:

$$\frac{\|D_z T_{\alpha,r} \cdot u_0\|}{\|u_0\|} = \frac{\|u_n\|}{\|u_0\|} = \frac{|u_1^{(1)}|}{|u_0^{(1)}|} \cdot \frac{|u_n^{(1)}|}{|u_1^{(1)}|} \frac{\sqrt{1 + \eta_n^2}}{\sqrt{1 + \eta_0^2}} \quad \forall (z, u) \in N_{x,r} \quad (3.51)$$

onde:

$$\frac{|u_1^{(1)}|}{|u_0^{(1)}|} = \frac{|k_{1,r}(z)|}{\cos \theta_{1,r}(z)} \cdot \left| \tau_{0,1}(z) \left( 1 + \frac{u_0^{(2)}}{u_0^{(1)}} \right) + r \cos \varphi_{0,r}(z) \right| \quad (3.52)$$

$$\frac{|u_n^{(1)}|}{|u_1^{(1)}|} = \frac{1}{r \cos \varphi_{n,r}(z)} \cdot \left| \tau_{n-1,r}(z) \cdot \left( \frac{u_{n-1}^{(1)}}{u_1^{(1)}} + \frac{u_{n-1}^{(2)}}{u_1^{(1)}} \right) + \frac{\cos \theta_{n-1,r}(z)}{k_{n-1,r}(z)} \cdot \frac{u_{n-1}^{(1)}}{u_1^{(1)}} \right| \quad (3.53)$$

Note que, como  $\eta_0 \in [0, c_2(r)]$ ,  $\eta_n \in [c_1(r), c_2(r)]$  e  $\lim_{r \rightarrow 0} c_i(r) = 1$  para  $i \in \{1, 2\}$ , temos:

$$\frac{\sqrt{1 + \eta_n^2}}{\sqrt{1 + \eta_0^2}} > \frac{\sqrt{1 + c_1^2(r)}}{\sqrt{1 + c_2^2(r)}} \quad e \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + c_1^2(r)}}{\sqrt{1 + c_2^2(r)}} = 1 \quad (3.54)$$


---

---

e como  $0 < \cos \theta_{1,r}(z) < 1$  e  $\eta_0 \geq 0$  segue de 3.52 que  $\frac{|u_1^{(1)}|}{|u_0^{(1)}|} > |k_{1,r}(z)| \cdot \tau_{0,r}(z)$ . Pelo lema 3.7 temos  $k_{1,r} \cdot \tau_{0,r} \asymp k_1(x) \cdot \tau_0^p(x)$ . Considerando este último fato e limite em 3.54 podemos supor  $r_0$  pequeno o suficiente de forma que se  $r < r_0$  então :

$$\frac{|u_1^{(1)}|}{|u_0^{(1)}|} \cdot \frac{\sqrt{1 + \eta_n^2}}{\sqrt{1 + \eta_0^2}} > \frac{1}{2} \cdot k_1(x) \tau_0^p(x) \quad \forall (z, u) \in \bigcup_{x \in X} N_{x,r} \text{ com } \eta(u) \in [0, c_2(r)] \quad (3.55)$$

Observemos agora que por 3.53 temos  $\frac{|u_n^{(1)}|}{|u_1^{(1)}|} > \frac{1}{r} \cdot \varrho_r(z, u)$  onde:

$$\varrho_r(z, u) = \left( \tau_{n-1,r}(z) \cdot \left( \frac{u_{n-1}^{(1)}}{u_1^{(1)}} + \frac{u_{n-1}^{(2)}}{u_1^{(1)}} \right) + \frac{\cos \theta_{n-1,r}(z)}{k_{n-1,r}(z)} \cdot \frac{u_{n-1}^{(2)}}{u_1^{(1)}} \right) \quad (3.56)$$

Para descrever o comportamento assintótico de  $g_r(z, u)$  observemos que:

$$\left( \frac{u_{n-1}^{(1)}}{u_1^{(1)}}, \frac{u_{n-1}^{(2)}}{u_1^{(1)}} \right) = \frac{1}{u_1^{(1)}} \cdot D_{z_1} T_r^{n-2} \cdot u_1 = D_{z_1} T_r^{n-2}(1, \eta_1) \quad (3.57)$$

e denotemos

$$D_{z_1} T_r^{n-2} = \begin{pmatrix} d_{1,1,r}(z) & d_{1,2,r}(z) \\ d_{2,1,r}(z) & d_{2,2,r}(z) \end{pmatrix}$$

Pela expressão 2.17 para a derivada de  $T_r$  temos que cada entrada  $d_{l,j,r}(z)$  é uma função contínua de  $\theta_{i,r}(z)$ ,  $\tau_{i,r}(z)$  e  $k_{1,r}(z)$  com  $i \in \{1, \dots, n-2\}$ . Assim, pelo lema 3.7 temos  $d_{l,j,r} \asymp d_{l,j}(x)$  para todo  $l$  e  $j$ . Observemos que a inclinação  $\eta_1 = \eta_{1,r}(z, u)$  do vetor  $u_1$  tem a seguinte expressão:

$$\eta_1 = \eta_{1,r}(z, u) = 1 + \frac{\cos \theta_{1,r}(z)}{k_{1,r}(z)(\tau_{0,r}(z) - f_{0,r}(z, u))}$$

Como  $\theta_{1,r} \asymp \theta_1(x)$ ,  $k_{1,r} \asymp k_1(x)$  e já mostramos que  $\tau_{0,r} - f_{0,r} \asymp \tau_0^p(x)$  temos:

$$\eta_1 \asymp 1 + \frac{\cos \theta_1(x)}{k_1(x) \cdot \tau_0^p(x)} = \eta_1(x, u^h) \quad (3.58)$$

Denotando  $v = (v^{(1)}, v^{(2)}) = D_{x_1} T_r^{n-2}(1, \eta_1(x, u^h))$  e considerando as ob-

servações acima obtemos:

$$\frac{u_{n-1}^{(1)}}{u_1^{(1)}} \asymp v^{(1)} \quad e \quad \frac{u_{n-1}^{(2)}}{u_1^{(1)}} \asymp v^{(2)} \quad (3.59)$$

Observando que  $\tau_{n-1,r} \asymp \tau_{n-1}^p(x)$ ,  $k_{n-1,r} \asymp k_{n-1}(x)$  e  $\theta_{n-1,r} \asymp \theta_{n-1}(x)$  obtemos:

$$\varrho_r \asymp \tau_{n-1}^p(x) \cdot (v^{(1)} + v^{(2)}) + \frac{\cos \theta_{n-1}(x)}{k_{n-1}(x)} \cdot v^{(1)} := \varrho(x) \quad (3.60)$$

Por 3.55 e 3.60 acima podemos supor  $r_0$  pequeno o suficiente de forma que:

$$\frac{|u_n^{(1)}|}{|u_1^{(1)}|} > \frac{1}{2} \frac{\varrho(x)}{r} \quad \forall (z, u) \in \bigcup_{x \in X} N_{x,r}^+ \text{ com } \eta(u) \in [0, c_2(r)] \quad (3.61)$$

Segue disso que:

$$\frac{\|D_z T_n\|}{\|u\|} > \frac{1}{4} \cdot \frac{\varrho(x) \tau_0^p(x) |k_1(x)|}{r} \quad \forall (z, u) \in \bigcup_{x \in X} N_{x,r}^+ \text{ com } \eta(u) \in [0, c_2(r)] \quad (3.62)$$

Note que  $k_1(x)$  e  $\tau_0^p(x)$  independem de  $r$  e são não nulos. Também temos  $\varrho(x) \neq 0$ , para provar isto observemos que  $v = (v^{(1)}, v^{(2)}) = D_{x_1} T^{n-2}(1, \eta_1(x, u^h))$  é não nulo assim caso  $v^{(1)} + v^{(2)} = 0$  devemos ter  $v^{(1)} \neq 0$  e neste caso

$$\varrho(x) = \frac{\cos \theta_{n-1}(x)}{k_{n-1}(x)} \cdot v^{(1)} \neq 0 \quad (3.63)$$

Se no entanto  $v^{(1)} + v^{(2)} \neq 0$  então denotando por  $f(v)$  o tempo de focalização de  $v$  temos

$$\begin{aligned} \varrho(x) = 0 &\Leftrightarrow \tau_{n-1}^p(x) + \frac{\cos \theta_{n-1}(x)}{k_{n-1}(x)} \cdot \frac{v^{(1)}}{v^{(1)} + v^{(2)}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \tau_{n-1}^p(x) + \frac{\cos \theta_{n-1}(x)}{k_{n-1}(x)} \cdot \frac{1}{1 + \eta(v)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \tau_{n-1}^p(x) - f(v) = 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

Como  $f(v) = f(x, u^h)$  e  $x$  é um ponto normal transversal temos pelo lema



---

3.9 que  $\tau_{n-1}^p(x) - f(v) \neq 0$ . Portanto, considerando 3.64 temos  $\varrho(x) \neq 0$  também quando  $v^{(1)} + v^{(2)} \neq 0$ . Assim,  $\varrho(x) \neq 0$  para todo  $x \in X$ . Para concluir a prova definimos  $\rho : (0, r_0] \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$\rho(r) := \frac{q}{r} \quad \text{onde} \quad q := \min \left\{ \frac{|k_1(x)| \cdot \tau_0^p \cdot \varrho(x)}{4} : x \in X \right\} \quad (3.65)$$

Note que  $q$  independe de  $r$  e é sempre não nulo donde  $\lim_{r \rightarrow 0} \rho(r) = \infty$ . Assim, podemos supor  $r_0$  suficientemente pequeno de forma que  $\rho(r) > 1$  para todo  $r < r_0$ . Note que por 3.51 temos:

$$\|D_z T_{\alpha,r} \cdot u\| > \rho(r) \|u\| \quad \forall (z, u) \bigcup_{x \in X} N_{x,r}^+ \quad \text{com} \quad \eta(u) \in [0, c_2(r)]$$

Da reversibilidade de  $T_\alpha$  segue também que:

$$\|D_z T_{\alpha,r}^{-1} \cdot u\| > \rho(r) \|u\| \quad \forall (z, u) \bigcup_{x \in X} N_{x,r}^- \quad \text{com} \quad \eta(u) \in [-c_2(r), 0]$$

□

Como consequência da proposição 3.8 e do teorema 2.3 obtemos o seguinte:

**Proposição 3.11.** *Se  $\{T_{\alpha,r}\}_{0 \in (0, r_0]}$  satisfaz **P** e  $r_0$  é suficientemente pequeno então todo  $\Lambda \subset \mathcal{U}_r^-$  compacto invariante por  $T_{\alpha,r}$  é um conjunto uniformemente hiperbólico para  $T_{\alpha,r}$ .*

## 3.4 Dinâmica de retângulos

Nesta seção descrevemos mais precisamente a dependência em  $r \in (0, r_0]$  dos conjuntos  $U_{x,r}^\pm$  e a ação de  $T_{\alpha,r}$  sobre estes conjuntos. No que se segue supomos  $r_0$  suficientemente pequeno de forma a valer a preservação dos cones definidos na seção anterior. Iniciamos com algumas definições.

Dado  $x \in X$ , recordemos que  $\hat{x} = T_{\alpha,r}(x) \in X$  e que a restrição  $T_{\alpha,r} U_{x,r}^- \rightarrow U_{\hat{x},r}^+$  é um homeomorfismo. Portanto  $T_{\alpha,r}(\partial U_{x,r}^-) = \partial U_{\hat{x},r}^+$ . Da definição

3.1, o bordo horizontal  $\partial_H U_{x,r}^-$ , assim como  $\partial_H U_{\hat{x},r}^+$ , é a união de duas curvas disjuntas contidas em componentes distintas de  $\partial M_\alpha$ . O bordo vertical  $\partial_V U_{x,r}^-$  a união de duas curvas distjuntas contidas em componentes distintas de  $T_{\alpha,r}^{-1}(\partial M_\alpha)$  enquanto  $\partial_V U_{\hat{x},r}^+$  é a união de duas curvas disjuntas contidas em componentes distintas de  $T_{\alpha,r}(\partial M_\alpha)$ . Assim sendo, temos:

$$T_{\alpha,r}(\partial_H U_{x,r}^-) = \partial_V U_{\hat{x},r}^+ \quad e \quad T_{\alpha,r}(\partial_V U_{x,r}^-) = \partial_H U_{\hat{x},r}^+ \quad (3.66)$$

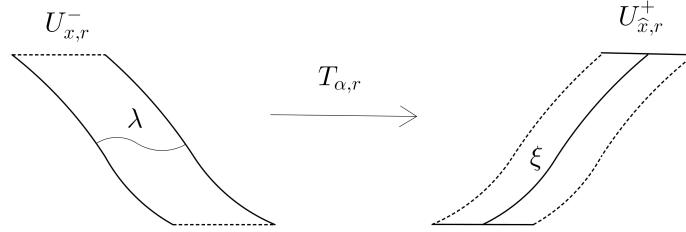


Figura 3.8: Uma curva horizontal  $\lambda \subset U_{x,r}^-$  e sua imagem  $\xi \subset U_{\hat{x},r}^+$ .

**Definição 3.12.** Uma curva  $\lambda \subset U_{x,r}^-$  (resp.  $\lambda \subset U_{x,r}^+$ ) é **horizontal** se tem extremos em componentes distintas de  $\partial_V U_x^-$  (resp  $\partial_V U_{x,r}^-$ ) e é **vertical** se tem extremos em componentes distintas de  $\partial_H U_{x,r}^-$  ( $\partial_V U_{x,r}^+$ ).

Segue de 3.66 que se  $\lambda \subset U_{x,r}^-$  é horizontal ( resp. vertical ) então  $T_{\alpha,r}(\lambda)$  é uma curva vertical ( resp horizontal) em  $U_{\hat{x},r}^+$  como ilustramos na figura 3.8

**Definição 3.13.** Se  $\lambda(t) = (\beta(t), \varphi(t)) \subset M_\alpha$ ,  $t \in [0, 1]$ , é uma curva diferenciável para todo  $0 < t < 1$ , denotamos seu comprimento por  $l(\lambda) = \int_0^1 \|\lambda'\| dt$  e dizemos que  $\lambda$  é **instável** se  $\lambda'(t) \in C^u(\lambda(t))$  ou **estável** se  $\lambda'(t) \in C^s(\lambda(t))$  para todo  $0 < t < 1$ .

Dado  $x \in X$ , a restrição  $T_{\alpha,r} : intU_{x,r}^- \rightarrow intU_{\hat{x},r}^+$  é um difeomorfismo que preserva estritamente os cones  $C^u$  expandindo vetores a uma taxa maior que

---

$\rho = \rho(r) > 1$ . Assim sendo, se  $\lambda(t) \subset U_{x,r}^-$ ,  $t \in [0, 1]$  é uma curva instável então  $D_{\lambda(t)}T_{\alpha,r} \cdot \lambda'(t) \subset C^u(T_{\alpha,r}(\lambda(t)))$  para todo  $0 < t < 1$  donde  $T_{\alpha,r}(\lambda)$  é uma curva instável em  $U_{\hat{x},r}^+$  tal que:

$$l(T_{\alpha,r}(\lambda)) > \rho \cdot l(\lambda)$$

A inversa  $T_{\alpha,r}^{-1} : \text{int}U_{\hat{x},r}^+ \rightarrow \text{int}U_{x,r}^-$  preserva estritamente os cones  $C^s$  também expandindo vetores a uma taxa maior que  $\rho$ . Se  $\xi \subset U_{\hat{x},r}^+$  é uma curva estável em  $U_{\hat{x},r}^+$  então  $T_{\alpha,r}^{-1}(\xi)$  é um curva estável em  $U_{x,r}^-$  tal que  $l(T_{\alpha,r}^{-1}(\xi)) > \rho \cdot l(\xi)$ .

Seja  $\mathcal{E}$  o conjunto das funções  $g : I \rightarrow [0, 2\pi)$  de classe  $C^1$  para todo  $\varphi \in \text{int}(I)$  e tais que

$$\frac{1}{c_2} \leq |g'(\varphi)| \leq \frac{1}{c_1} \quad \forall \varphi \in \text{int}(I)$$

onde  $c_i = c_i(r)$ ,  $i \in \{1, 2\}$  são como definidas na proposição 3.8. Se  $\lambda(t) = (\beta(t), \varphi(t))$ ,  $t \in [0, 1]$  é uma curva instável e vertical em um retângulo  $U_{x,r}^-$  então:

$$c_1 \leq \varphi'(t)/\beta'(t) \leq c_2 \quad \forall t \in (0, 1)$$

donde  $\lambda = \text{Graf}(g)$  para uma função  $g \in \mathcal{E}$  estritamente crescente. Analogamente, se  $\lambda$  é vertical e estável em um retângulo  $U_{x,r}^+$  então  $\lambda = \text{Graf}(g)$  para alguma função  $g \in \mathcal{E}$  estritamente decrescente.

**Definição 3.14.** *Um subconjunto  $U \subset U_{x,r}^-$  (resp.  $U \subset U_{x,r}^+$ ) é uma **faixa estável** ( resp. **instável**) se  $U$  é uma região limitada por duas curvas verticais disjuntas estáveis ( resp. instáveis). Toda faixa instável ou estável é uma região de  $M_\alpha$  da forma:*

$$U = \{(\beta, \varphi) : h(\varphi) \geq \beta \geq g(\varphi)\} \quad \text{com } h, g \in \mathcal{E} \quad (3.67)$$

Os bordos vertical e horizontal de uma faixa estável ou instável  $U$  como acima são respectivamente os conjuntos  $\partial_V U = \text{Graf}(g) \cup \text{Graf}(h)$  e  $\partial_H U = \partial U \cap \partial M_\alpha$  e a **largura** de  $U$  é o número:

$$L(U) := \sup_{\varphi \in I} \{|h(\varphi) - g(\varphi)|\} \quad (3.68)$$

---

**Lema 3.15.** Se  $\{T_{\alpha,r}\}_{r \in (0,r_0]}$  satisfaz **P** e  $r_0$  é suficientemente pequeno, então para todo  $x \in X$  temos que  $U_{x,r}^-$  (resp.  $U_{x,r}^+$ ) é uma faixa estável (resp. instável) e temos:

$$L(U_{x,r}^\pm) < c_0 \rho^{-1} \quad \text{onde} \quad c_0 = c_0(r) := \pi \sqrt{1 + c_1(r)^{-2}}$$

sendo  $\rho$  e  $c_1(r)$  como definimos na proposição 3.8.

**Prova:** Para todo  $a \in I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  o conjunto  $U_{x,r}^- \cap \{z \in M_\alpha : \pi_2(z) = a\}$  é uma curva  $\lambda_a(t) = (t, a)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , horizontal em  $U_{x,r}^-$ . Note que  $U_{x,r}^-$  é folheado pelas curvas  $\lambda_a$  e se  $a \in \text{int}(I)$  então  $\lambda_a \in \text{int}M_\alpha$  e  $\lambda'_a(t) \in \partial C^+(\lambda_a(t))$  para  $t_0 < t < t_1$ . Como estamos supondo a preservação:

$$D_z T_{\alpha,r} C^+(z) \subset C^u(T_{\alpha,r}(z)) \quad \forall z \in \text{int}U_{x,r}^-$$

temos que para todo  $a \in \text{int}(I)$  a imagem  $\xi_a = T_{\alpha,r}(\lambda_a)$  é uma curva instável vertical em  $U_{\hat{x},r}^+$ . Portanto  $\xi_a = \text{Graf}(g_a)$  para alguma  $g_a \in \mathcal{E}$ . Assim,  $U_{\hat{x},r}^+ \setminus \partial_V U_{\hat{x},r}^+$  é folheado pelas curvas instáveis  $\xi_a$ ,  $a \in \text{int}(I)$ .

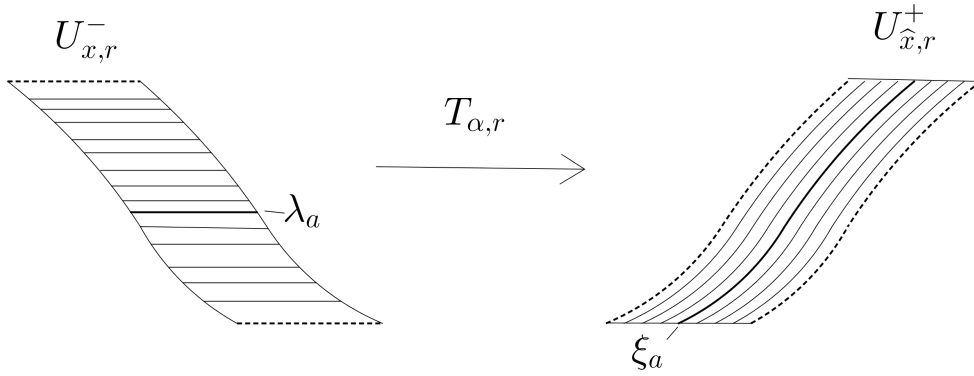


Figura 3.9:

Recordemos que  $\partial_V U_{\hat{x},r}^+$  é a união de duas curvas,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , contidas no conjunto de singularidades da aplicação de bilhar, portanto estas curvas são de classe  $C^1$  [13] e pelo exposto acima temos que ambas,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , são

---

acumuladas por gráficos de funções estritamente crescentes  $g_a \in \mathcal{E}$ . Assim, existem  $g_1, g_2 \in \mathcal{E}$  tais que  $\lambda_i = \text{Graf}(g_i)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , ou seja,  $U_{\hat{x}, r}^+$  é uma faixa instável. Por argumentos análogos e considerando a reversibilidade de  $T_{\alpha, r}$  provamos que  $U_{x, r}^-$  é uma faixa estável. Agora, observemos que, pela definição 3.68 de largura de uma faixa estável, temos :

$$L(U_{x, r}^-) = \sup_{a \in I} \{l(\lambda_a)\}$$

Como  $\xi_a = \text{Graf}(g_a)$  para uma função  $g_a \in \mathcal{E}$  temos:

$$l(\xi_a) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 + (g'_a(\varphi))^2} d\varphi < \pi \cdot \sqrt{1 + c_1(r)^{-2}} = c_0 \quad (3.69)$$

Como a curva instável  $\xi_a$  é imagem por  $T_{\alpha, r}$  da curva  $\lambda_a$  e  $D_z T_{\alpha, r}$  expande os vetores horizontais  $\lambda'_a(t)$  a uma taxa maior que  $\rho$  temos  $l(\xi_a) > \rho \cdot l(\lambda_a)$ . Segue deste fato e de 3.69 que  $l(\lambda_a) < c_0 \cdot \rho^{-1}$  donde  $L(U_{x, r}^-) = \sup_{a \in I} \{l(\lambda_a)\} < c_0 \cdot \rho^{-1}$ . De forma análoga mostra-se que  $L(U_x^+) < c_0 \cdot \rho^{-1}$ .  $\square$

Para descrever o comportamento assintótico, quando  $r \rightarrow 0$ , de um conjunto  $U_{x, r}^\pm$ , a cada  $x = (\beta_x, 0) \in X$  vamos associar as funções:

$$g_x^- \in \mathcal{E} \quad g_x^-(\varphi) = \beta_x - \varphi \quad (3.70)$$

$$g_x^+ \in \mathcal{E} \quad g_x^+(\varphi) = \beta_x + \varphi \quad (3.71)$$

Os gráfico  $G_x^\pm = \text{Graf}(g_x^\pm)$  é um segmento de reta passando por  $x$ , com extremos em  $\partial M_\alpha$  e de inclinação  $\pm 1$ . Dada  $g \in \mathcal{E}$  e  $\epsilon > 0$  definimos uma  $\epsilon - C^1$ -vizinhança de  $g$  por:

$$\mathcal{V}_\epsilon(g) = \{h \in \mathcal{E} : |g(\varphi) - h(\varphi)| < \epsilon \text{ e } |g'(\varphi) - h'(\varphi)| < \epsilon\}$$

**Lema 3.16.** *Se  $\{T_{\alpha, r}\}_{r \in (0, r_0]}$  satisfaz **P** então para todo  $\epsilon > 0$  e  $x \in X$  existe  $r(x, \epsilon)$  tal que se  $r < r(x, \epsilon)$  então toda curva vertical estável (resp instável*

---

)de  $U_{x,r}^-$  (resp.  $U_{x,r}^+$ ) é o gráfico de uma função  $g \in \mathcal{V}_\epsilon(g_x^-)$  (resp.  $g \in \mathcal{V}_\epsilon(g_x^+)$ ).

**Prova:** Se  $\lambda$  é uma curva estável e vertical qualquer em  $U_{x,r}^-$  então  $\lambda = \text{Graf}(h)$  para alguma função decrescente  $h \in \mathcal{E}$ . Sendo assim, temos

$$|h'(\varphi) - (g_x^-)'(\varphi)| < \left| \frac{1}{c_1(r)} - 1 \right| \quad \forall \varphi \in \text{int}(I) \quad (3.72)$$

Como  $h$  é decrescente, temos

$$h(\varphi) - h(0) < -\frac{1}{c_1(r)} \cdot \varphi \quad \forall \varphi \in I \quad (3.73)$$

e como  $L(U_{x,r}^-) < \frac{c_0}{\rho}$  temos:

$$|h_r(0) - \beta_x| = |h_r(0) - g_x^-(0)| < \frac{c_0}{\rho} \quad (3.74)$$

Assim :

$$\begin{aligned} |h(\varphi) - g_x^-(\varphi)| &= |h(\varphi) - h(0) + h(0) - \beta_x + \varphi| \\ &\leq |h(\varphi) - h(0) + \varphi| + |h(0) - \beta_x| \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{c_1(r)}\right) \cdot |\varphi| + \frac{c_0}{\rho} \quad \forall \varphi \in I \end{aligned} \quad (3.75)$$

Observando que  $\lim_{r \rightarrow 0} c_i(r) = 1$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , temos  $\lim_{r \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{c_1(r)}\right) = 0$  e como  $\lim_{r \rightarrow 0} \rho(r) = \infty$  temos

$$\lim_{r \rightarrow 0} c_0(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \pi \sqrt{1 + c_1^{-2}(r)} = 0 \quad (3.76)$$

Portanto, dado  $\epsilon > 0$  existe  $r(x, \epsilon)$  tal que se  $r < r(x, \epsilon)$  então:

$$|h(\varphi) - g_x^-(\varphi)| < \epsilon \quad e \quad |h'(\varphi) - (g_x^-)'(\varphi)| < \epsilon$$

ou seja  $\lambda = \text{Graf}(h)$  para  $h \in \mathcal{V}_\epsilon(g_x^-)$ . Por argumentos análogos prova-se o enunciado para curvas instáveis.  $\square$

---

Cada curva componente de  $\partial_V U_{x,r}^-$  (resp  $\partial_V U_{x,r}^+$ ) é vertical e estável (resp instável) logo, pelo lema 3.16, quando  $r \rightarrow 0$ , estas curvas convergem na topologia  $C^1$  para o gráficos  $G_x^-$  (resp  $G_x^+$ ). Portanto, para  $r \approx 0$ ,  $U_{x,r}^\pm$  está contido em um pequena vizinhança tubular de  $G_x^\pm$  e seus bordos verticais são, em aproximação linear, segmentos de reta. (Figura 3.10)

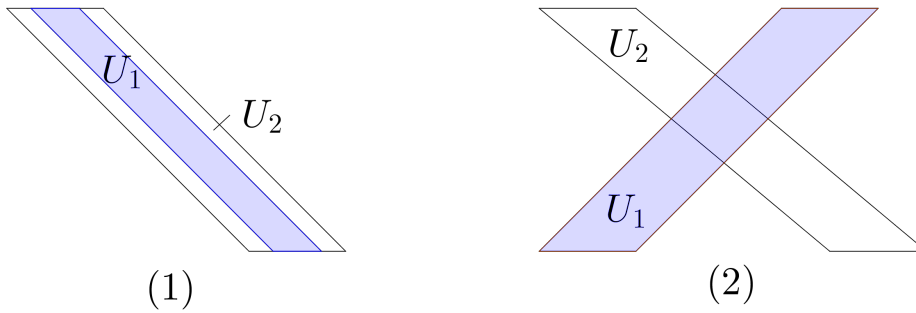


Figura 3.10: Na figura (1) uma faixa estável  $U_1$  está encaixada em uma faixa estável  $U_2$ . Na figura (2) uma faixa instável  $U_1$  atravessa uma faixa estável  $U_2$

No que se segue descrevemos a ação de  $T_{\alpha,r}$  sobre faixas instáveis e estáveis.

**Definição 3.17.** Dizemos que uma faixa estável (instável)  $U_1$  **atravessa** uma faixa instável (estável)  $U_2$  se cada curva do bordo vertical  $\partial_V U_1$  intersecta transversalmente e em um único ponto cada curva do bordo vertical  $\partial_V U_2$  (figura 3.10(2)).

**Definição 3.18.** Dizemos que uma faixa estável (instável)  $U_1$  está **encaixada** em uma faixa estável (instável)  $U_2$  se  $U_1 \subset U_2$  e  $\partial_V U_1 \cap \partial_V U_2 = \emptyset$  (figura 3.10(1)).

**Lema 3.19.** Se  $\{T_{\alpha,r}\}_{r \in (0,r_0]}$  satisfaz **P** e  $r_0$  é suficientemente pequeno então  $r \in (0,r_0]$  e todo par  $x, y \in X$  qualquer faixa instável  $U_1 \subset U_{x,r}^+$  atravessa qualquer faixa estável  $U_2 \subset U_{y,r}^-$ .

---

**Prova:** Se  $x = (\beta_x, 0), y = (\beta_y, 0) \in X$  então  $G_x^+$  intersecta transversalmente  $G_y^-$  em um único ponto  $z_{x,y} \in \text{int}M_\alpha$ , de fato, temos  $z = (\beta, \varphi) \in G_x^+ \cap G_y^-$  se e só se:

$$\beta_x + \varphi = g_x^+(\varphi) = g_y^-(\varphi) = \beta_y - \varphi \Leftrightarrow 2\varphi = \beta_y - \beta_x \pmod{2\pi} \quad (3.77)$$

Recordemos  $x$  e  $y$  são pontos normais não alinhados, ou seja  $\beta_x \neq -\beta_y$ . Segue disso que  $|\beta_y - \beta_x| < \pi$  donde existe um único  $-\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$  satisfazendo 3.77 e  $G_x$  intersecta  $G_y$  em um único ponto  $z_{x,y} = (g_x^-(\varphi_0), \varphi_0)$ . Observando que  $-\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$  temos  $z_{x,y} \in \text{int}M_\alpha$  e como  $(g_x^-)'(\varphi_0) = -1$  e  $(g_x^+)'(\varphi_0) = 1$  temos que  $z_{x,y}$  é um ponto de interseção transversal entre  $G_x^+$  e  $G_y^-$ .

Se  $U_1$  uma faixa instável qualquer de  $U_{x,r}^+$  então  $\partial_V U_1$  é a união de duas curvas,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , disjuntas, instáveis e verticais em  $U_{x,r}^-$ . Se  $U_2$  é uma faixa estável qualquer de  $U_{y,r}^-$  então  $\partial_V U_2$  é a união de duas curvas,  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , disjuntas, estáveis e verticais em  $U_{y,r}^+$ . Pelo lema 3.16, podemos restringir o parâmetro de  $r$  de forma que as curvas  $\lambda_i$  (resp  $\xi_i$ ),  $i \in \{1, 2\}$ , estejam tão próximas quanto se queira do gráficos  $G_x^+$  (resp.  $G_y^-$ ). Considerando este fato e observando que  $G_x^+$  intersecta transversalmente  $G_y^-$  temos que existe  $r(x, y)$  tal que se  $r < r(x, y)$  então cada  $\lambda_i$  intersecta transversalmente cada  $\xi_j$  em um único ponto, ou seja,  $U_1$  atravessa  $U_2$ . Definindo  $r_0 = \min\{r(x, y) : x, y \in X\}$  temos o enunciado para a família  $T_{\alpha,r}$   $\square$

**Observação 3.20.** Sejam  $x = (\beta_x, 0)$  e  $y = (\beta_y, 0)$  pontos normais transversais. Se  $x$  é não alinhado a  $y$  então  $U_{x,r}^+$  atravessa  $U_{y,r}^-$  e a interseção  $\Delta = U_{x,r}^+ \cap U_{y,r}^-$  é um compacto conexo de interior não vazio contido em  $\text{int}M_\alpha$ . Se  $x$  é alinhado a  $y$  então  $|\beta_y - \beta_x| = \pi$  donde  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  e  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  são as soluções de 3.77. Neste caso  $G_x^+$  e  $G_y^-$  se intersectam nos extremos contidos em  $\partial M_\alpha$  e a interseção  $\Delta$  possui duas componentes conexas cada qual intersectando uma componente distinta de  $\partial M_\alpha$  como iustrado na figura 3.11.

**Lema 3.21.** Se  $\{T_{\alpha,r}\}_{r \in (0, r_0]}$  satisfaz **P** e  $r_0$  é suficientemente pequeno então para todo  $r \in (0, r_0]$  todo par  $x, y \in X$  temos que:

(1) Se  $U_1$  é uma faixa estável encaixada em  $U_{y,r}^-$  então  $\Delta_1 = U_1 \cap U_{x,r}^+ \neq \emptyset$  e



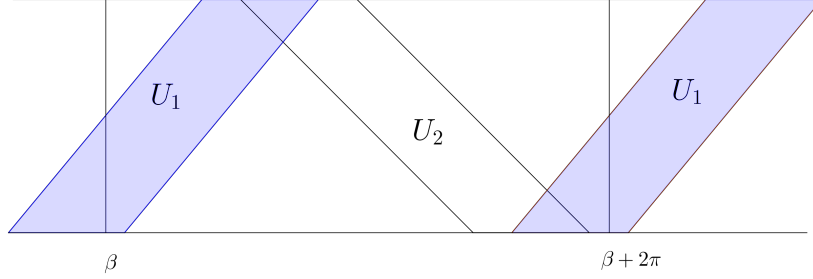


Figura 3.11: Uma faixa instável  $U_1$  que não atravessa uma faixa estável  $U_2$

a pré-imagem  $T_{\alpha,r}^{-1}(\Delta_1)$  é uma faixa estável encaixada em  $U_{x,r}^-$  satisfazendo:

$$L(T_{\alpha,r}^{-1}(\Delta_1)) < c_0 \cdot \rho^{-2} \quad e \quad \partial_V T_{\alpha,r}^{-1}(\Delta_1^-) \subset T_{\alpha,r}^{-1}(\partial_V U_{y,r}^-)$$

(2) Se  $U_2$  é uma faixa instável encaixada em  $U_{\hat{x},r}^+$  então  $\Delta_2 = U_2 \cap U_{y,r}^- \neq \emptyset$  e a imagem  $T_{\alpha,r}(\Delta_2)$  é uma faixa instável encaixada em  $U_{\hat{y},r}^+$  satisfazendo:

$$L(T_{\alpha,r}(\Delta_2)) < c_0 \cdot \rho^{-2} \quad e \quad \partial_V T_{\alpha,r}(\Delta_2) \subset T_{\alpha,r}(\partial_V U_{y,r}^-)$$

**Prova:** Pela reversibilidade de  $T_{\alpha,r}$  é suficiente dar a prova do item (1). Segue do lema lema 3.19 que se  $r_0$  é suficientemente então para todo par  $x, y \in X$  temos que  $U_{\hat{x},r}^+$  atravessa qualquer faixa estável  $U_1 \subset U_{y,r}^-$  donde a interseção  $\Delta_1 = U_1 \cap U_{\hat{x},r}^+ \subset \text{int}M_\alpha$  é um compacto conexo tal que  $\partial\Delta = \lambda_1^s \cup \lambda_2^s \cup \partial_V U_{\hat{x},r}^+$  sendo  $\lambda_1^s$  e  $\lambda_2^s$  duas curvas estáveis e disjuntas contidas em  $\partial_V U_1$  e horizontais em  $U_{\hat{x},r}^+$ , como ilustrado na figura 3.13.

Como  $\lambda_i^s$  é horizontal e estável em  $U_{\hat{x},r}^+$ , a pré-imagem  $T_{\alpha,r}^{-1}(\lambda_i^s)$  é vertical e estável em  $U_{x,r}^-$  e como  $\Delta_1 \subset \text{int}M_\alpha$  temos  $\lambda_i^s$  disjunta de  $\partial_H U_{\hat{x},r}^+ = T_{\alpha,r}(\partial_V U_{x,r}^-)$ . Portanto,  $T_{\alpha,r}^{-1}(\lambda_i^s) \cap \partial_V U_{x,r}^- = \emptyset$  e concluímos que  $T_{\alpha,r}^{-1}(\Delta_{1,r})$

é um faixa estável encaixada em  $U_{x,r}^-$ .

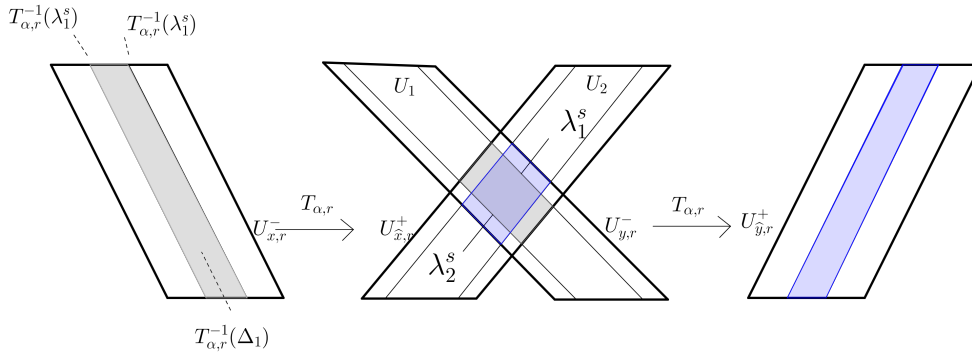


Figura 3.12:

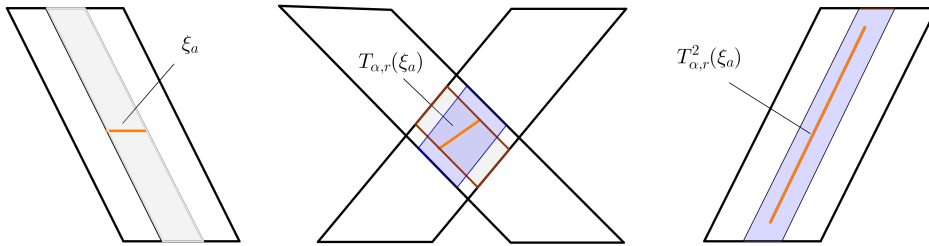


Figura 3.13:

Para todo  $a \in I$  o conjunto  $\xi_a := T_{\alpha,r}^{-1}(\Delta_1) \cap \{z \in M_\alpha : \pi_2(z) = a\}$  é uma curva horizontal na faixa estável  $T_{\alpha,r}^{-1}(\Delta_1, r)$ . Pelos mesmos argumentos usados na prova do lema 3.15 temos que  $T_{\alpha,r}(\xi_a)$  é uma curva instável em  $\Delta_1$  de comprimento  $l(T_{\alpha,r}(\xi_a)) > \rho \cdot l(\xi_a)$ . A imagem  $T_{\alpha,r}^2(\xi_a)$  é uma curva instável em  $U_{y,r}^+$  e novamente pelos argumentos na prova do lema 3.15 temos  $l(T_{\alpha,r}(\xi_a)) < c_0 \cdot \rho^{-1}$ . Assim,  $l(\xi_a) < c_0 \cdot \rho^{-2}$  donde  $L(T_{\alpha,r}^{-1}(\Delta_{1,r})) = \sup_{a \in I} \{l(\xi_a)\} < c_0 \cdot \rho^{-2}$ .  $\square$

---

### 3.5 Construção de conjuntos hiperbólicos

Nesta seção provaremos o teorema [A](#) construindo conjuntos hiperbólicos em torno do conjunto  $X = \{x_1, \dots, x_m\}$  de pontos normais associado a uma família  $\{T_{\alpha,r}\}_{r \in (0,r_0]}$  satisfazendo  $P$ . No que se segue supomos  $r_0$  pequeno o suficiente de forma a valer para esta família o enunciado no lema [3.21](#). Recordemos que  $(\Sigma_m, d_m)$  denota o espaço métrico das seqüências simbólicas de  $m$  símbolos e  $\sigma : \Sigma_m \rightarrow \Sigma_m$  o shift. Denotaremos:

$$U_i^- = U_{x_i,r}^- \quad e \quad U_i^+ = U_{\hat{x}_i,r}^+ \quad x_i \in X \quad (3.78)$$

e a cada par  $[b, n]$ ,  $b \in \Sigma_m$  e  $n \geq 0$ , associaremos os seguintes conjuntos:

$$U_{[b,n]}^- = \bigcap_{i=0}^n T_{\alpha,r}^{-i}(U_{b_i}^-) = \{z \in M_\alpha : T_{\alpha,r}^i(z) \in U_{b_i}^- \quad i \in \{0, 1, \dots, n\}\}$$

$$U_{[b,n]}^+ = \bigcap_{i=1}^n T_{\alpha,r}^i(U_{b_{-i}}^-) = \{z \in M_\alpha : T_{\alpha,r}^{-i}(z) \in U_{b_i}^- \quad i \in \{1, \dots, n\}\}$$

Nos lemas a seguir consideramos uma família  $\{T_{\alpha,r}\}_{r \in (0,r_0]}$  com as propriedades descritas acima.

**Lema 3.22.** *Para toda seqüência  $b \in \Sigma_m$  e  $n > 0$  temos:*

$$(1) \quad U_{[b,n+1]}^- = U_{b_0}^- \cap T_{\alpha,r}^{-1}(U_{[\sigma(b),n]}^-) \quad e \quad U_{[b,n+1]}^+ = T_{\alpha,r}(U_{[\sigma^{-1}(b),n]}^+) \cap U_{b_1}^+.$$

(2) *O conjunto  $U_{[b,n]}^-$  é uma faixa estável encaixada em  $U_{[b,n-1]}^-$  satisfazendo:*

$$L(U_{[b,n]}^-) < c_0 \cdot \rho^{-n-1} \quad e \quad \partial_V U_{[b,n]}^- \subset T_{\alpha,r}^{-n-1}(\partial M_\alpha)$$

(3) *O conjunto  $U_{[b,n]}^+$  é uma faixa estável encaixada em  $U_{[b,n-1]}^+$  satisfazendo:*

$$L(U_{[b,n]}^+) < c_0 \cdot \rho^{-n-1} \quad e \quad \partial_V U_{[b,n]}^+ \subset T_{\alpha,r}^{n+1}(\partial M_\alpha)$$

---

**Prova:** (1) Denotando  $a = \sigma(b)$  temos  $b_i = a_{i-1}$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$  donde:

$$U_{[b,n+1]}^- = U_{b_0}^- \cap \left( \bigcap_{i=1}^{n+1} T_\alpha^{-i}(U_{b_i}^-) \right) = U_{b_0}^- \cap T_\alpha^{-1} \left( \bigcap_{i=1}^{n+1} T_\alpha^{-i+1}(U_{a_{i-1}}^-) \right)$$

escrevendo  $j = i - 1$  temos:

$$U_{[b,n+1]}^- = U_{b_0}^- \cap T_\alpha^{-1} \left( \bigcap_{j=0}^n T_\alpha^{-j}(U_{a_j}^-) \right) = U_{b_0}^- \cap T_\alpha^{-1} (U_{[a,n]}^-) = U_{b_0}^- \cap T_\alpha^{-1} (U_{[\sigma(b),n]}^-)$$

De forma análoga obtem-se  $U_{[b,n+1]}^+ = T_{\alpha,r} (U_{[\sigma^{-1}(b),n]}^+) \cap U_{b_1}^+$ .

(2) Faremos a prova por indução em  $n$ . Observando que  $U_i^+ = T(U_i^-)$  temos:

$$U_{[b,1]}^- = U_{b_0}^- \cap T_{\alpha,r}^{-1}(U_{b_1}^-) = T_{\alpha,r}^{-1} (U_{b_0}^+ \cap U_{b_1}^-) \quad \forall b \in \Sigma_m \quad (3.79)$$

donde, pelo lema 3.21,  $U_{[b,1]}^-$  é uma faixa estável encaixada em  $U_{[b,0]}^- = U_{b_0}^-$ , de largura  $L(U_{[b,1]}^-) < c_0 \cdot \rho^{-2}$  e tal que:

$$\partial_V U_{[b,1]}^- \subset T_\alpha^{-1}(\partial_V U_{b_1}^-) \subset T_{\alpha,r}^{-2}(\partial M_\alpha)$$

Portanto a afirmação em (2) vale para o caso  $n = 1$ . Como hipótese de indução, supomos que exista  $n > 0$  tal que o afirmado em (2) valha para todo  $j \leq n$ . Pelo lema ?? temos:

$$U_{[b,n+1]}^- = T_{\alpha,r}^{-1} \left( U_{b_0}^+ \cap U_{[\sigma(b),n]}^- \right) \quad (3.80)$$

Note que, por hipótese de indução  $U_{[\sigma(b),n]}^- = U_{b_1}^- \cap \dots \cap T_\alpha^{-n}(U_{b_{n+1}}^-)$  é uma faixa estável encaixada em  $U_{b_1}^-$  com bordo vertical contido em  $T_{\alpha,r}^{-n-1}(\partial M_\alpha)$ . Pelo lema 3.19 a faixa instável  $U_{b_0}^+$  atravessa a  $U_{[\sigma(b),n]}^-$ , logo, pelo lema 3.21,  $U_{[b,n+1]}^-$  é uma faixa estável encaixada em  $U_{b_0}^-$  e com bordo vertical satisfazendo:

$$\partial_V U_{[b,n+1]}^- \subset T_{\alpha,r}^{-1}(\partial_V U_{[\sigma(b),n]}^-) \subset T_{\alpha,r}^{-n-1}(\partial M_\alpha)$$

Para concluir a prova observemos que para todo  $a \in I$  o conjunto  $\lambda_a := \{z :$

---

---

$\pi_2(z) = a\} \cap U_{[b,n+1]}^-$  é uma curva horizontal em  $U_{[b,n+1]}^-$ , ou seja, com extremos em componentes distintas de  $\partial_V U_{[b,n+1]}^- \subset T_{\alpha,r}^{-n-1}(\partial_V U_{b_{n+1}}^-)$ . Segue disso que  $T_{\alpha,r}^{n+1}(\lambda_a)$  é uma curva instável e horizontal em  $U_{b_{n+1}}^-$  tal que:

$$l(T_{\alpha,r}^{n+1}(\lambda_a)) > \rho^{n+1}l(\lambda_a)$$

Assim  $T_{\alpha}^{n+2}(\lambda_a)$  uma curva instável e vertical em  $U_{b_{n+2}}^+ = T_{\alpha}(U_{b_{n+1}}^-)$ . Portanto  $l(T_{\alpha}^{n+1}(\lambda_a)) < c_0 \cdot \rho$  donde

$$l(\lambda_a) < c_0 \cdot \rho^{n+1} \Rightarrow L(U_{[b,n+1]}^-) = \sup_{a \in I} \{l(\lambda_a)\} < c_0 \cdot \rho^{n+2}$$

(3) Segue por argumentos análogos aos usados na prova do item (3).  $\square$

Como consequência do lema acima temos:

**Lema 3.23.** *O conjunto  $\Lambda_r = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} T_{\alpha,r}^i(\mathcal{U}_r^- \cap \mathcal{U}_r^+)$  é uniformemente hiperbólico para  $T_{\alpha,r}$ ,  $r \in (0, r_0]$*

**Prova:** Seja:

$$\Delta_{[b,n]} = U_{[b,n]}^+ \cap U_{[b,n]}^- = \{z \in M_{\alpha} : T_{\alpha,r}^i(z) \in U_{b_i}^- \ i \in \{-n, \dots, n\}\}$$

Pelo lema 3.22, para todo  $n \geq 1$ ,  $U_{[b,n]}^+$  é uma faixa instável encaixada em  $U_{b_1}^+$  que atravessa a faixa estável  $U_{[b,n]}^-$  encaixada em  $U_{b_0}^-$ . Assim,  $\Delta_{[b,n]} \subset \text{int}U_{b_0}^- \cap \text{int}U_{b_1}^+$  é um compacto contido em  $\mathcal{U}_r^- \cap \mathcal{U}_r^+$  e podemos escrever:

$$\Lambda_r := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} T_{\alpha,r}^n(\mathcal{U}_r^- \cup \mathcal{U}_r^+) = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{b \in \Sigma_m} \Delta_{[b,n]} \quad (3.81)$$

Ainda pelo lema 3.22 temos  $U_{[b,n+1]}^{\pm} \subset U_{[b,n]}^{\pm}$  donde  $\{\Delta_{[b,n]}\}_{n \geq 0}$  é uma sequência de compactos encaixantes. Logo, para toda sequência  $b \in \Sigma_m$  temos:

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_{[b,n]} \neq \emptyset$$

Recordemos que um cilindro simétrico em  $\Sigma_m$  é o conjunto  $C_{[b,n]} : \{a \in$

---

---

$\Sigma_m : a_i = b_i \quad i \in \{-n, \dots, n\}$ . Note que existe exatamente  $m^{2n+1}$  cilindros simétricos distintos em  $\Sigma_m$ . Pela definição de  $\Delta_{[b,n]}$  temos  $a \in C_{[b,n]}$  se e só se  $\Delta_{[b,n]} = \Delta_{[a,n]}$ . Portanto, para cada  $n \geq 1$  existem exatamente  $m^{2n+1}$  subconjuntos como  $\Delta_{[b,n]}$  e assim

$$\left\{ \bigcup_{b \in \Sigma_m} \Delta_{[b,n]} \right\}_{n \geq 0}$$

é uma sequência de compactos encaixantes donde, por 3.81 o conjunto  $\Lambda_r$  é não vazio e compacto em  $\mathcal{U}_r^- \cap \mathcal{U}_r^+$  o que, pela proposição 3.11, implica que  $\Lambda_r$  é um conjunto uniformemente hiperbólico para  $T_{\alpha,r}$ .  $\square$

Seja  $\mathcal{E}^0$  o conjunto das funções contínuas  $g : I \rightarrow [0, 2\pi]$  tais que:

$$\frac{1}{c_2} |\varphi_1 - \varphi_0| < |g(\varphi_1) - g(\varphi_0)| < \frac{1}{c_1} |\varphi_1 - \varphi_0|$$

O conjunto  $\mathcal{E}$  definido na seção anterior é um subconjunto de  $\mathcal{E}^0$ . O conjunto  $\mathcal{E}^0$  munido da métrica induzida pela norma da máximo é um espaço métrico completo [20].

**Lema 3.24.** *Para toda sequência  $b \in \Sigma_m$  existe uma função estritamente decrescente  $g_b^- \in \mathcal{E}^0$  e uma função estritamente crescente  $g_b^+ \in \mathcal{E}^0$  tais que:*

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} U_{[b,n]}^- = \text{Graf}(g_b^-) \quad e \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} U_{[b,n]}^+ = \text{Graf}(g_b^+)$$

e a interseção  $\bigcap_{n \geq 0} \Delta_{[b,n]}$  é um único ponto de  $\Lambda_r$ .

**Prova:** Segue do lema 3.22 que para toda  $b \in \Sigma_m$  temos que  $\{U_{[b,n]}^-\}_n$  é uma sequência de compactos encaixantes portanto  $\bigcap_{n=0}^{\infty} U_{[b,n]}^- \neq \emptyset$ . Para todo  $n \geq 0$  temos

$$U_{[b,n]}^- = \{(\beta, \varphi) : g_n(\varphi) < \beta < h_n(\varphi)\}$$

sendo  $h_n, g_n \in \mathcal{E} \subset \mathcal{E}^0$  funções estritamente decrescentes. Já que  $L(U_{[b,n]}^-) <$

---

$c_0 \cdot \rho^{-n-1}$  temos

$$|h_n(\varphi) - g_n(\varphi)| < c_0 \cdot \rho^{-n-1} \quad \forall \varphi \in I \quad (3.82)$$

Logo,  $\{h_n, g_n\}_{n \geq 0} = \{h_1, g_1, h_2, g_2, \dots, h_n, g_n, \dots\}$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{E}^0$  convergindo para uma função estritamente decrescente  $g_b^- \in \mathcal{E}^0$ . Como  $U_{[b,n]}^-$  é a região de  $M_\alpha$  limitada pelas curvas  $Graf(g_n)$  e  $Graf(h_n)$  concluímos que  $\bigcap_{n=0}^{\infty} U_{[b,n]}^- = Graf(g_b^-)$ . Usando a reversibilidade de  $T_\alpha$  podemos provar que  $\bigcap_{n=0}^{\infty} U_{[b,n]}^+ = Graf(g_b^+)$  para uma função  $g_b^+ \in \mathcal{E}^0$  estritamente crescente. Observando que  $\bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_{[b,n]} = Graf(g_b^-) \cap Graf(g_b^+)$  e, temos que  $\Delta_{[b,n]}$  consiste em um único ponto de  $\Lambda_r$  uma vez que  $g_b^-$  ( $g_b^+$ ) é estritamente decrescente (crescente).  $\square$

**Prova do Teorema A** Seja  $\{T_{\alpha,r}\}_{0 \in (0,r_0]}$  uma família satisfazendo  $P$ . Segue do lema 3.23 que se  $r_0$  é pequeno o suficiente então para todo  $r \in (0, r_0]$  o conjunto  $\Lambda_r$  é hiperbólico para  $T_{\alpha,r} : \mathcal{U}_r^- \rightarrow \mathcal{U}_r^+$ . Logo, para provar o teorema A, resta mostrar que  $T_{\alpha,r} : \Lambda_r \rightarrow \Lambda_r$  é conjugada a  $\sigma : \Sigma_m \rightarrow \Sigma_m$ . Para tanto, definimos:

$$S_r : \Sigma_m \rightarrow \Lambda_r; \quad S_r(b) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_{[b,n]} = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} T_{\alpha,r}^{-i}(U_{b_i}^-) \quad (3.83)$$

Note que  $S_r$  está bem definida já que  $\bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_{[b,n]}$  é um único ponto de  $\Lambda_r$ . Se  $b, b' \in \Sigma_m$  são sequências distintas então existe  $i \in \mathbb{Z}$  tal que  $b'_i \neq b_i$  donde  $\Delta_{[b,n]} \neq \Delta_{[b',n]}$  para todo  $n \geq |i|$  e assim temos  $S_r(b) \neq S_r(b')$ . Portanto,  $S_r$  é injetora. Como  $\Lambda_r = \bigcup_{b \in \Sigma_m} (\bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_{[b,n]})$  temos  $S_r$  sobrejetora. Quanto à continuidade de  $S_r$  recordemos que  $b' \in C_{[b,n]}$  se e só se  $d_m(b, b') < \frac{1}{2^{n-1}}$  e que pela definição  $S_r$  temos:

$$S_r(C_{[b,n]}) \subset \Delta_{[b,n]} \quad \forall b \in \Sigma_m \quad e \quad \forall n \geq 0 \quad (3.84)$$

Assim, dado  $z = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_{[b,n]} = S_r(b)$  e  $\epsilon > 0$  existe  $n_0$  dependendo de  $\epsilon$  tal que  $\Delta_{[b,n]} \subset B(z, \epsilon)$  para todo  $n > n_0$ . Tomando  $n > n_0$  temos que se  $d_m(b, b') < \frac{1}{2^{n-1}}$  então  $S_r(b') \in B(z, \epsilon)$  donde  $S_r$  é contínua. Resumindo,  $S_r : (\Sigma_m, d_m) \rightarrow (\Lambda_r, d)$  é uma bijeção contínua entre os espaços métricos

---

compactos portanto  $S_r$  é um homeomorfismo. Para concluir, observemos que se  $a = \sigma(b)$  então  $a_{i-1} = b_i$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$  e temos:

$$T_{\alpha,r} \circ S_r(b) = T_{\alpha,r} \left( \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} T_{\alpha,r}^{-i}(U_{b_i}^-) \right) = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} T_{\alpha,r}^{-i+1}(U_{b_i}^-) = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} T_{\alpha,r}^{-j}(U_{a_j}^-) = S_r(a)$$

donde  $T_{\alpha,r} \circ S_r(b) = S_r \circ \sigma(b)$  para todo  $b \in \Sigma_m$ , ou seja  $T_{\alpha,r} : \Lambda_r \rightarrow \Lambda_r$  é topologicamente conjugada a  $\sigma : \Sigma_m \rightarrow \Sigma_m$ .  $\square$

**Observação 3.25.** A hipótese de não alinhamento entre os pontos do conjunto  $X = \{x_1, \dots, x_m\}$  garante que todo retângulo  $U_i^+$  atravessa todo retângulo  $U_j^-$  o que é crucial para a prova da conjugação de  $T_{\alpha,r} : \Lambda_{\delta,r} \rightarrow \Lambda_{\delta,r}$  com o shift  $\sigma : \Sigma_m \rightarrow \Sigma_m$ . Sem esta hipótese podemos obter um conjunto hiperbólico  $\Lambda'_r \subset \mathcal{U}_r^- \cup \mathcal{U}_r^+$  conjugado a uma restrição de  $\sigma$  a um compacto  $\Sigma'_m \subset \Sigma_m$ . Precisamente, suponhamos que nem todo par de pontos em  $X$  seja não alinhado, dados  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  denotemos  $i \sim j$  de para indicar que  $x_i$  é não alinhado a  $x_j$  e no conjunto  $\Sigma_m$  consideremos:

$$\Sigma'_m := \{b \in \Sigma_m : b_i \sim b_{i+1} \forall i \in \mathbb{Z}\}$$

o conjunto acima é compacto e invariante por  $\sigma$  [19]. O conjunto  $\Lambda'_r = \bigcap_{n>0} \bigcup_{b \in \Sigma'_m} \Delta[b, n]$  é um compacto invariante por  $T_{\alpha,r}$  portanto, pela proposição 3.11, é um conjunto hiperbólico para  $T_{\alpha,r}$ . Usando os mesmos argumentos da prova do teorema A provamos que a restrição  $T_{\alpha,r} : \Lambda'_r \rightarrow \Lambda'_r$  é conjugada a  $\sigma : \Sigma'_m \rightarrow \Sigma'_m$ .

## 3.6 Variedades Invariantes

Nesta seção descreveremos a geometria e a dependência em  $r \in (0, r_0]$  das variedades invariantes associadas a pontos em conjuntos hiperbólicos de uma família  $\{\Lambda_r\}_{r \in (0, r_0]} \subset M_\alpha$  como na seção anterior.

Fixando  $r \in (0, r_0]$  consideremos um conjunto  $\Lambda_r$  e a decomposição hiperbólica  $T_z M_\alpha = E^u(z) \oplus E^s(z)$ ,  $z \in \Lambda_r$ . Dado  $z \in \Lambda_r$  seja  $B(z, \epsilon)$  um bola



---

aberta centrada em  $z$  e de raio  $\epsilon$  suficientemente pequeno de forma que  $B(z, \epsilon) \subset \mathcal{U}_r^- \cap \mathcal{U}_r^+$ . As **variedades instável e estável locais** de tamanho  $\epsilon$  de um ponto  $z$  por  $T_{\alpha,r}$  são respectivamente os conjuntos:

$$\begin{aligned} W_\epsilon^u(z) &:= \{y \in B(z, \epsilon) : d(T_{\alpha,r}^{-n}(y), T_{\alpha,r}^{-n}(z)) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\} \\ W_\epsilon^s(z) &:= \{y \in B(z, \epsilon) : d(T_{\alpha,r}^n(y), T_{\alpha,r}^n(z)) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}. \end{aligned}$$

Segue do teorema variedade estável [11] que o conjunto  $W_\epsilon^s(z)$  ( resp.  $W_\epsilon^u(z)$ ) é uma curva de classe  $C^1$  contendo  $z$  e tangente a  $E^s(z)$  (resp.  $E^u(z)$ ). Pela preservação dos cones  $C^s$  por  $D_z T_{\alpha,r}^{-1}$  temos que  $W_\epsilon^s(z)$  é uma curva estável (como definimos na seção 3.4). De forma análoga  $W_\epsilon^u(z)$  é uma curva instável. As variedades **instável e estável globais** de  $z \in \Lambda_r$  por  $T_r$  respectivamente por:

$$\begin{aligned} W^u(z) &:= \{y \in M : d(T_r^n(y), T_r^n(z)) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\} \\ W^s(z) &:= \{y \in M : d(T_r^{-n}(y), T_r^{-n}(z)) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\} \end{aligned}$$

Pela descontinuidade de  $T_r$  os conjuntos  $W^u(z)$  e  $W^s(z)$  são a união enumerável segmentos compactos de curvas de classe  $C^1$  cujos extremos estão contidos nos conjuntos de singularidades  $\mathcal{S}_{+\infty} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{S}_n$  e  $\mathcal{S}_{-\infty} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{S}_{-n}$ . Denotaremos por  $W_\alpha^u(z)$  (resp.  $W_\alpha^s(z)$ ) a componente conexa de  $W^u(z) \cap M_\alpha$  (resp.  $W^s(z) \cap M_\alpha$ ) contendo o ponto  $z$ .

**Proposição 3.26.** *Se  $z_0 \in \Lambda_r$  é tal que  $S_r^{-1}(z_0) = b \in \Sigma_m$  então  $W_\alpha^s(z_0)$  é uma curva estável e vertical em  $U_{b_0}^-$  acumulada por curvas verticais estáveis contidas em  $\bigcup_{n \geq 0} T_{\alpha,r}^{-n}(\ell_0)$  e  $W_\alpha^u(z_0) = \bigcap_{i \geq 0} T_{\alpha,r}^i(U_{b_i}^-)$  é uma curva instável e vertical em  $U_{b_1}^+$  acumulada por curvas verticais instáveis contidas em  $\bigcup_{n \geq 0} T_{\alpha,r}^n(\ell_0)$ .*

**Prova:** Seja  $z_0 \in \Lambda_r$  e  $z_{-n} = T_{\alpha,r}^{-n}(z_0)$ ,  $n > 1$ . Se  $b \in \Sigma_m$  é tal que  $z_0 = S_r(b)$  então  $z_{-n} = S_r(a)$  onde  $a = \sigma^{-n}(b)$ . A variedade instável local  $W_\epsilon^u(z_{-n})$  é uma curva instável contida em  $U_{a_1}^+ \cap U_{a_0}^-$  e o ponto  $z_{-n}$  está contido na faixa estável  $U_{[a,n-1]}^- = \bigcap_{i=0}^n T_{\alpha,r}^{-i}(U_{a_i}^-)$ . Pelo lema 3.24, as curvas componentes de  $\partial_V U_{[a,n-1]}^-$  convergem, quando  $n \rightarrow 0$ , para uma curva vertical em  $U_{a_0}^-$  que é

gráfico de uma função  $g_b^- : I \rightarrow [0, 2\pi)$  estritamente decrescente. Portanto, existe  $n_0$  tal que se  $n > n_0$  então  $W_\epsilon^u(z_{-n}) \cap U_{[a,n-1]}^-$  é uma curva horizontal, ou seja interctando as duas componentes de  $\partial_V U_{[a,n-1]}^-$  como ilustrado na figura 3.14.

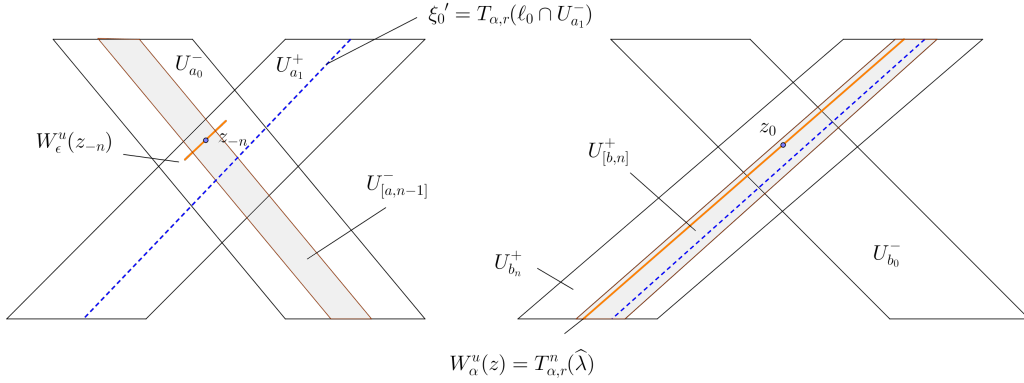


Figura 3.14:

Para todo  $n > 1$  temos  $T_{\alpha,r}^n(U_{[a,n-1]}^-) = U_{[b,n]}^+ = \bigcap_{i=1}^n T_{\alpha,r}^i(U_{b_{-i}})$ , de fato, como  $a = \sigma^{-n}(b)$  temos  $a_i = b_{i-n}$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$  e assim:

$$T_\alpha^n(U_{[a,n-1]}^-) = \bigcap_{i=0}^{n-1} T_{\alpha,r}^{-i+n}(U_{a_i}^-) = \bigcap_{i=0}^{n-1} T_{\alpha,r}^{-i+n}(U_{b_{i-n}}) = \bigcap_{j=1}^n T_{\alpha,r}^j(U_{b_{-j}}) = U_{[b,n]}^+$$

Pelo item (2) do lema 3.22, temos  $\partial_V U_{[a,n+1]}^- \subset T_{\alpha,r}^{-n}(\partial M_\alpha)$ , donde  $T_{\alpha,r}^n(\partial_V U_{[a,n]}^-) = \partial_H U_{[b,n]}^+$ . Recordando que para  $n > n_0$  a curva  $\lambda = W^u(z_{-n}) \cap U_{[a,n-1]}^-$  é horizontal instável em  $U_{[a,n+1]}^-$  concluimos que  $T_{\alpha,r}^n(\lambda) \subset W^u(z_0)$  é uma curva vertical instável em  $U_{[b,n]}^+ \subset U_{b_1}^+$ , ou seja a componente conexa de  $W^u(z_0) \cap M_\alpha$  contendo  $z_0$  é um curva vertical e instável em  $U_{b_1}^+$ .

Pelo exposto acima temos  $W_\alpha^u(z_0) = \bigcap_{i=n_0}^\infty U_{[b,n]}^-$ , para concluir que esta curva é acumulada por curvas instáveis e verticais em  $\bigcup_{n \geq 0} T_{\alpha,r}^n(\ell_0)$  observemos que a interseção  $U_{a_1}^- \cap \ell_0$  é uma curva horizontal em  $U_{a_1}^-$  e como já observamos anteriormente a imagem desta curva por  $T_{\alpha,r}$  é uma curva,  $\xi'_0$ , vertical instável em  $U_{a_1}^+$  como ilustrado na figura 3.14. Assim, para todo  $n > 1$ , a interseção

---

$\xi_0 = \xi'_0 \cap U_{[a,n-1]}^-$  é uma curva horizontal e instável em  $U_{[a,n-1]}^-$ . Usando os mesmos argumentos do parágrafo anterior concluímos que, para todo  $n > 1$ , a imagem  $\xi_n = T_{\alpha,r}^n(\xi_0)$  é uma curva vertical e instável em  $U_{[b,n]}^+$  e assim obtemos uma sequência  $\{\xi_n\}_{n>1}$  de curvas verticais e instáveis em  $\bigcup_{n \geq 0} T_{\alpha,r}^n(\ell_0)$  convergindo para  $W_\alpha^u(z_0)$ .  $\square$

No que se segue, a cada sequência  $b \in \Sigma_m$  associamos a família de pontos:

$$\{z_r\}_{r \in (0,r_0]} \quad S_r(b) = z_r \in \Lambda_r$$

Note que  $z_r \in U_{b_1}^+ \cap U_{b_0}^-$  se  $x, y \in X$  são os pontos normais tais que  $U_{x,r}^+ = U_{b_1}^+$  e  $U_{y,r}^- = U_{b_0}^-$ . Associamos á família  $\{z_r\}_r$  temos uma família de segmentos de variedades

$$\{W_\alpha^u(z_r)\}_{r \in (0,r_0]} \quad e \quad \{W_\alpha^s(z_r)\}_{r \in (0,r_0]}$$

Segue do lema 3.26 que cada  $W_\alpha^u(z_r)$  é uma curva instável e vertical em  $U_{x,r}^+$  donde, pelo lema 3.16, temos que  $\{W_\alpha^u(z_r)\}_{r \in (0,r_0]}$  converge na topologia  $C^1$  para o gráfico  $G_x^+$ . De forma análoga temos que  $\{W_\alpha^s(z_r)\}_{r \in (0,r_0]}$  que converge na topologia  $C^1$  para o gráfico  $G_y^-$ .

Na proposição a seguir descrevemos o comportamento assintótico, quando  $r \rightarrow 0$ , das curvas:

$$W_\gamma^u(z_r) = T_r(W_\alpha^u(z_r)) \subset M_{\alpha,r}^+ \quad e \quad W_\gamma^s(z_r) = T_r^{-1}(W_\alpha^s(z_r)) \subset M_{\alpha,r}^- \quad (3.85)$$

**Proposição 3.27.** *Seja  $x \in X$  e  $H \subset [0, 2\pi)$  um intervalo tal que:*

$$\pi_1 \circ F^{-1} \circ T(x) \notin J$$

*seja  $D = H \times I$ . Existe  $r'_1 < r_0$  dependendo de  $x$  e  $H$  tal que:*

- (1) *Se  $\{z_r\}_{r \in (0,r_0]}$  é uma família tal que  $S_r(b) = z_r$  para todo  $r$  e  $z_r \in U_{x,r}^+$  então a família  $\{W_\gamma^u(z_r) \cap D\}_{r \in (0,r'_1]}$  converge na topologia  $C^1$  para  $\ell_p^+ \cap D$*
- (2) *Se  $\{z_r\}_{r \in (0,r_0]}$  é uma família tal que  $S_r(b) = z_r$  para todo  $r$  e  $z_r \in U_{x,r}^-$  então a família  $\{W_\gamma^s(z_r) \cap D\}_{r \in (0,r'_1]}$  converge na topologia  $C^1$  para  $\ell_p^- \cap D$ .*

**Prova:** Por reversibilidade é suficiente provarmos o item (1) e como

$\{W_\alpha^u(z_r)\}_{r \in (0, r_0]}$  converge na topologia  $C^1$  para o gráfico  $G_x^+$ , é suficiente descrevermos o comportamento assintótico da família  $\{T_r(G_x)^+\}_{r \in (0, r_0]}$ .

Se  $x = (\beta_0, 0) \in X$  então  $G_x^+ = \{(\beta, \varphi) : \beta = \beta_0 + \varphi\}$ . Denotando  $(\psi_r(\varphi), \theta_r(\varphi)) = T_r(\beta_0 + \varphi, \varphi)$ , ilustramos na figura 3.15 segmentos de trajetórias determinadas pelas condições iniciais  $(\beta_0 + \varphi, \varphi)$  para alguns valores de  $\varphi$ . Na figura 3.15(2) as mesmas trajetórias prém considerando  $r' < r$ .

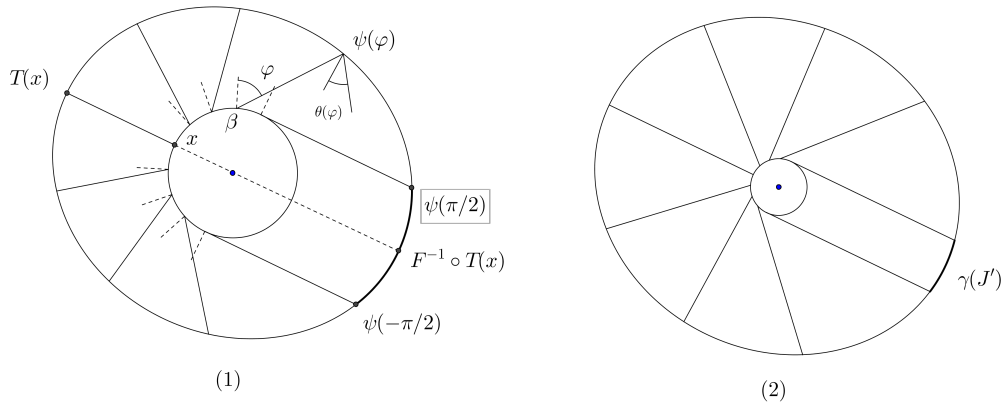


Figura 3.15:

Variando  $\varphi$  em  $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  temos que o ângulo  $\psi_r(\varphi)$  varre um intervalo fechado de  $J = J(x, r) \subset [0, 2\pi)$  de extremos  $\psi_r(-\pi/2)$  e  $\psi_r(\pi/2)$ . Denotando  $J' = J'(x, r) = [0, 2\pi) \setminus J$  temos que  $\gamma(J')$  é o arco de  $\gamma$  não atingido pelas trajetórias partindo das condições iniciais  $(\beta_0 - \varphi, \varphi)$ . Os extremos de  $\gamma(J')$  são os pontos de interseção com  $\gamma$  de duas retas paralelas tangentes a  $\alpha$  e que distam  $2r$  uma da outra. Portanto, o comprimento de  $J'$  tende a 0 quando  $r \rightarrow 0$ . Mais precisamente:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \psi_r(\pm\pi/2) = \psi(x) \quad \text{onde} \quad \psi(x) = \pi_1 \circ F^{-1} \circ T_r(x)$$

Como  $G_x^+$  é uma curva com extremos em componentes distintas de  $\partial M_\alpha$  temos que  $T_r(G_x^+)$  é uma curva com extremos em componentes distintas de  $M_{\alpha, r}^+$  (figura ??(1)). Seja  $\tau_r = \|\gamma(\psi_r) - \alpha(\beta_0 + \varphi)\|$  e  $k_r = k(\psi_r)$ . Segue da

expressão 2.17 que:

$$\frac{d\psi_r}{d\varphi}(\varphi) = -\frac{k_r}{\cos\theta_r}(2\tau_r + r \cos\varphi) \quad e \quad \frac{d\theta_r}{d\varphi}(z) = \frac{d\psi_r}{d\varphi}(\varphi) - 2 \quad (3.86)$$

Já que  $\frac{d\psi_r}{d\varphi}(z) > 0$ , a curva  $T_r(G_x^+)$  é o gráfico de uma função  $\Theta_r : J(x, r) \rightarrow I$ . Como os extremos do intervalo  $J(x, r)$  convergem para  $\psi(x)$  quando  $r \rightarrow 0$  temos que dado um intervalo  $H \subset [0, 2\pi)$  tal que  $\psi(x) \notin H$  existe  $r'$  tal que  $H \subset J(x, r)$  para todo  $r < r'$  e o gráfico  $T_r(G_x)$  intersecta das duas retas verticais do bordo da faixa  $D = H \times I \subset M_\gamma$ . Recordando que  $\lim_{r \rightarrow 0} M_{\alpha, r}^+ = \ell_p^+$  e considerando as observações acima temos que  $\lim_{r \rightarrow 0} T_r(G_x) \cap D = \ell_p^+ \cap D$ .

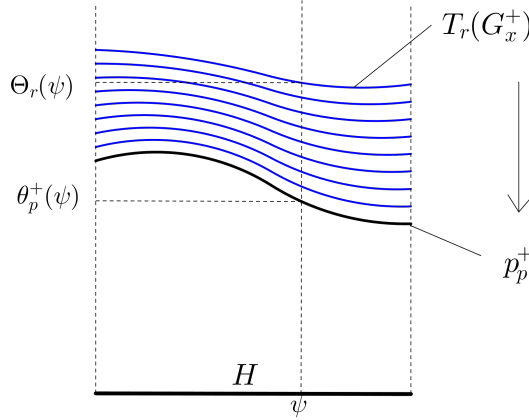


Figura 3.16:

Para ver que esta convergência dá na topologia  $C^1$ , observemos que pelas expressões temos:

$$\frac{d\Theta_r}{d\psi}(\psi) = 1 + \frac{2 \cos \Theta_r(\psi)}{k(\psi)(2\tau_r(\psi) + r \cos \varphi)} \quad (3.87)$$

Para todo  $\psi \in H$  temos  $\lim_{r \rightarrow 0} \Theta_r(\psi) = \theta_p^+(\psi)$  e como  $\tau_r(\psi) = \|\alpha(\varphi) - \gamma(\psi)\|$  sendo  $\alpha(\varphi)$  um ponto no obstáculo temos  $\lim_{r \rightarrow 0} \tau_r(\psi) = \tau_p(\psi) =$

---

$\|p - \gamma(\psi)\|$  e assim:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Theta_r}{d\psi}(\psi) = 1 + \frac{\cos \theta_p^+(\psi)}{k(\psi)\tau_p(\psi)} = \frac{d\theta_p^+}{d\psi}(\psi) \quad (3.88)$$

Portanto a família  $\{T_r(G_x^+) \cap D\}_{r \in (0, r']}$  converge na topologia  $C^1$  para  $\ell_p^+ \cap D$ .

□

**Observação 3.28.** Pela proposição 3.26, para todo  $z \in \Lambda_r \cap U_{x,r}^+$  existe uma sequência  $\{\xi_{n,r}\}_{n \geq 0}$  de curvas verticais e instáveis em  $\bigcup_{n > 0} T_{\alpha,r}^n(\ell_0)$  convergindo, quando  $n \rightarrow 0$ , para  $W_\alpha^u(z_r)$ . Fixando  $m$  temos pelo lema 3.16 que  $\{\xi_{m,r}\}_{r \in (0, r_0]}$  converge na topologia  $C^1$  para o gráfico  $G_x^+$ . Assim podemos substituir a família  $\{W_\alpha^u(z_r)\}_{r \in (0, r]}$  no enunciado da proposição 3.27 por uma família  $\{\xi_{m,r}\}_{r \in (0, r_0]}$  obtendo o mesmo resultado.

## CAPÍTULO 4

---

### Existência de pontos periódicos normais

---

Neste capítulo trataremos da existência genérica de pontos periódicos normais provando o teorema [B](#). Damos também a prova do corolário [1.3](#) que descreve a dinâmica genérica de bilhares com obstáculos.

#### 4.1 Bilhares convexos genéricos

Uma oval é uma curva simples, fechada, convexa e de classe  $C^2$ . Seja  $\mathcal{D}$  o conjunto das ovals  $\gamma : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizadas pelo ângulo  $\psi \in [0, 2\pi)$  entre o vetor tangente e um vetor fixo em  $\mathbb{R}^2$ . Este conjunto é um espaço de Baire [\[14\]](#) se munido da topologia induzida pela norma

$$\|\gamma\|_{C_2} = \max_{\psi \in [0, 2\pi)} \{\|\gamma(\psi)\|, \|\gamma'(\psi)\|, \|\gamma''(\psi)\|\}$$

---

Toda  $\gamma \in \mathcal{D}$  possui um fibrado normal  $(\gamma(\psi), \mathbf{n}(\psi))$  de classe  $C^1$  onde  $\mathbf{n}(\psi)$  é o vetor unitário normal  $\gamma'(\psi)$  apontando para o interior da região  $Q_\gamma$  limitada por  $\gamma$ . Dado  $\epsilon > 0$  e  $\gamma \in \mathcal{D}$  consideremos a seguinte vizinhança tubular

$$N_\epsilon(\gamma) := \{\gamma(\psi) + g.\mathbf{n}(\psi) \mid -\epsilon < g < \epsilon\} \subset \mathbb{R}^2$$

Dizemos que uma oval  $\zeta$  é  $\epsilon$ -próxima a uma oval  $\gamma$  se a imagem de  $\zeta$  pertence a  $N_\epsilon(\gamma)$  e a projeção canônica  $\zeta(\psi) \mapsto \gamma(\psi)$  é um difeomorfismo. Consideremos no espaço  $C^2([0, 2\pi), \mathbb{R})$  das funções  $g : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  a norma:

$$\|g\|_2 := \max_{\psi \in [0, 2\pi)} \{|g(\psi)|, |g'(\psi)|, |g''(\psi)|\}$$

Dizemos que uma oval  $\zeta$  é  $\epsilon$   $C^2$ -próxima de uma oval  $\gamma$  se  $\zeta(\psi) = \gamma(\psi) + g(\psi).\mathbf{n}(\psi) \in N_\epsilon(\gamma)$  para alguma  $g \in C^2([0, 2\pi), \mathbb{R})$  satisfazendo  $\|g\|_2 < \epsilon$ .

Recordemos que  $F_\gamma$  denota a aplicação de bilhar na mesa  $Q_\gamma$ . Dizemos que uma propriedade da dinâmica de uma aplicação de bilhar é **genérica** se vale para toda  $F_\gamma$  com  $\gamma$  contida em um aberto e denso de ovais em  $\mathcal{D}$ . O seguinte lema de perturbação, [23], será útil para nossos argumentos.

**Lema 4.1.** *Dada  $\gamma \in \mathcal{D}$  e  $\psi_0 \in [0, 2\pi)$  seja  $I \subset [0, 2\pi)$  um aberto contendo  $\psi_0$ . Existe uma família  $\{\zeta_\epsilon\}_{|\epsilon| < \epsilon_0}$  de ovais arbitrariamente próximas de  $\gamma$  tal que  $\zeta_0 = \gamma$  e para todo  $\epsilon$  a curva  $\zeta_\epsilon$  coincide com  $\gamma$  fora do arco  $\gamma(I)$  satisfazendo  $\zeta_\epsilon(\psi_0) = \gamma(\psi_0)$ ,  $\zeta'_\epsilon(\psi_0) = \gamma'(\psi_0)$  e*

$$k_\epsilon(\psi_0) = k(\psi_0)(1 + 2\epsilon.k(\psi_0))$$

onde  $k_\epsilon(\psi_0)$  e  $k(\psi_0)$  são respectivamente as curvaturas de  $\zeta_\epsilon$  e  $\gamma$  no ponto  $\psi_0$ .

**Prova:** Seja  $g_\epsilon : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $|\epsilon| < \epsilon_0$ , uma família de funções definidas por  $g_\epsilon(\psi) = \epsilon.h(\psi).(\psi - \psi_0)^2$ , onde  $h(\psi)$  é uma função  $C^\infty$  tal que  $h(\psi) = 1$  se  $|\psi - \psi_0| < \frac{L}{2}$  e  $h(\psi) = 0$  se  $|\psi - \psi_0| > L$  para algum  $L$  suficientemente pequeno de forma que  $h(\psi) = 0$  fora do intervalo  $I$ . Definimos a família de



---

curvas

$$\zeta_\epsilon(\psi) = \gamma(\psi) + g_\epsilon(\psi) \cdot \mathbf{n}(\psi) \quad |\epsilon| < \epsilon_0 \quad (4.1)$$

Pela definição de  $g_\epsilon$  e  $\zeta_\epsilon$  temos  $\zeta_\epsilon(\psi) = \gamma(\psi)$  para todo  $\psi \notin I$  e  $\zeta_\epsilon(\psi_0) = \gamma(\psi_0)$ . Observemos que:

$$\zeta'_\epsilon(\psi) = \gamma'(\psi) + g'_\epsilon \cdot \mathbf{n}(\psi) - g_\epsilon(\psi) \cdot \mathbf{t}(\psi) \quad (4.2)$$

$$\zeta''_\epsilon(\psi) = \gamma''(\psi) - 2g'_\epsilon(\psi) \mathbf{t}(\psi) + (g''_\epsilon(\psi) - g_\epsilon(\psi)) \cdot \mathbf{n}(\psi) \quad (4.3)$$

$$g'_\epsilon(\psi) = \epsilon \cdot h'(\psi)(\psi - \psi_0)^2 + 2\epsilon h(\psi)(\psi - \psi_0) \quad (4.4)$$

$$g''_\epsilon(\psi) = \epsilon \cdot h''(\psi)(\psi - \psi_0)^2 + 4\epsilon \cdot h'(\psi)(\psi - \psi_0) + 2\epsilon \cdot h(\psi) \quad (4.5)$$

Por 4.4 e 4.5 obtemos  $\|g_\epsilon\|_{C^2} < C \cdot \epsilon_0$  para alguma constante  $C$  dependendo de  $L$ . Segue disso que para  $\epsilon_0$  suficientemente pequeno temos que  $\zeta_\epsilon$  é uma oval para todo  $|\epsilon| < \epsilon_0$ . Por 5.27 e 4.3 obtemos:

$$\zeta'_\epsilon(\psi_0) = \gamma'(\psi_0) \quad e \quad \zeta''_\epsilon(\psi_0) = \gamma''(\psi_0) + 2\epsilon \cdot \mathbf{n}(\psi_0) \quad (4.6)$$

assim temos:

$$k_\epsilon(\psi_0) = \frac{(\zeta''_\epsilon(\psi_0) \wedge \zeta'_\epsilon(\psi_0))}{\|\zeta'_\epsilon(\psi_0)\|^3} = \frac{(\gamma''(\psi_0) \wedge \gamma'(\psi_0))}{\|\gamma'(\psi_0)\|^3} + 2 \cdot \epsilon \cdot \frac{(\mathbf{n}(\psi_0) \wedge \gamma'(\psi_0))}{\|\gamma'(\psi_0)\|^3} \quad (4.7)$$

Observando que  $k(\psi_0) \cdot \gamma'(\psi_0) = \mathbf{t}(\psi_0)$  temos  $\|\gamma'(\psi_0)\| = k(\psi_0)^{-1}$  e  $(\mathbf{n}(\psi_0) \wedge \gamma'(\psi_0)) = k(\psi_0)^{-1}$ , assim temos  $k_\epsilon(\psi_0) = k(\psi_0) + 2\epsilon k^2(\psi_0)$ .

□

O seguinte teorema é consequência de uma série de resultados sobre a dinâmica genérica em bilhares convexos obtidos em [14].

**Teorema 4.2.** *Existe um aberto e denso  $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$  tal que se  $\gamma \in \mathcal{D}'$  então a aplicação  $F_\gamma$  admite uma órbita de período 2 hiperbólica  $\mathcal{O}_\gamma = \{y_0, y_1\}$  tal que cada ramo da variedade estável  $W^s(y_i)$  de todo  $y_i \in \mathcal{O}_\gamma$  possui um ponto*

de interseção transversal com cada ramo da variedade instável  $W^u(y_j)$  de todo  $y_j \in \mathcal{O}_\gamma$ .

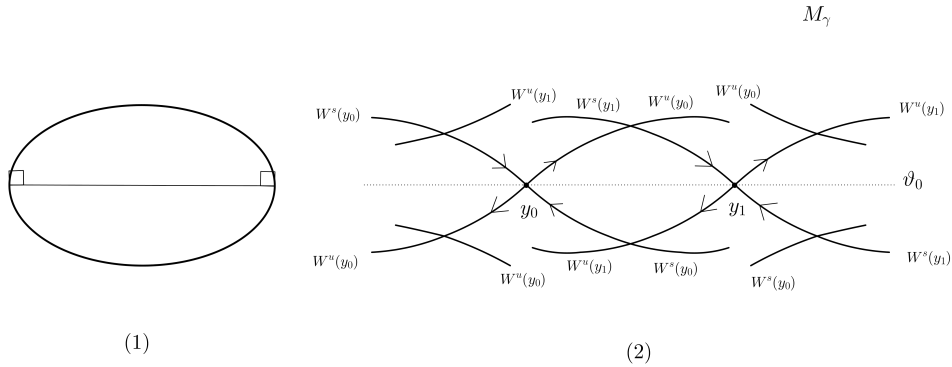


Figura 4.1:

A trajetória da órbita  $\mathcal{O}_\gamma = \{y_0, y_1\}$  hiperbólica associada a uma  $\gamma \in \mathcal{D}'$  corresponde ao maior diâmetro de  $\gamma$  como ilustrado na figura 4.1(1)). Como  $y_0$  e  $y_1$  são colisões perpendiculares temos  $\mathcal{O}_\gamma \subset \vartheta_0$  donde  $R(\mathcal{O}_\gamma) = \mathcal{O}_\gamma$ , ou seja,  $\mathcal{O}_\gamma$  é a órbita de um ponto peiródico simétrico. Ilustramos na figura 4.1(2) a estrutura genérica do conjunto:

$$W_\gamma = \bigcup_{i \in \{0,1\}} W^u(y_i) \cup W^s(y_i)$$

Note que, por reversibilidade, temos  $R(W^s(y_i)) = W^u(y_i)$  para  $i \in \{0, 1\}$  e se  $u = (u^{(1)}, u^{(2)}) \in T_{y_i}M_\gamma$  é um vetor tangente a  $W^u(y_i)$  então  $u' = (u^{(1)}, -u^{(2)}) = D_{y_i}R.u$  é tangente a  $W^s(y_i)$ . Os vetores  $u$  e  $u'$  são linearmente independentes portanto  $u^{(1)} \neq 0$  e  $u^{(2)} \neq 0$ . Assim, para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, a variedade instável local  $W_\epsilon^u(y_i)$ , é o gráfico de uma função  $\psi \mapsto \theta^u(\psi)$  e a variedade estável local  $W_\epsilon^s(y_i)$  é o gráfico de uma função  $s \mapsto \theta^s(\psi)$  com  $\theta^u(\psi) = -\theta^s(\psi)$ .

---

## 4.2 Critério de existência de pontos normais

O conjunto de pontos normais em um bilhar em uma mesa  $Q_{\gamma,p,r}$  é não vazio se e só se  $T_\alpha^{-1}(\ell_0) \cap \ell_0 \neq \emptyset$ . Mas, verificar a condição acima é pouco viável dada a descontinuidade de  $T_\alpha$ . No lema 4.3 contornamos este problema obtendo um critério mais conveniente para tratar a existência de pontos normais considerando a evolução pelo difeomorfismo  $F_\gamma : M_\gamma \rightarrow M_\gamma$  das curvas  $\ell_p^- = T^{-1}(\ell_0) \subset M_\gamma$  e  $\ell_p^+ = T(\ell_0) \subset M_\gamma$ . Recordando que para toda  $\gamma$  e  $p \in Q_\gamma$  a curva  $\ell_p^-$  é a curva dos pontos  $(\psi, \theta_p^-(\psi)) \in M_\gamma$  tais que a reta passando por  $\gamma(\psi)$  na direção dada por  $\theta_p^-(\psi)$  passa pelo ponto  $p$ . A curva  $\ell_p^+$  é o conjunto dos pontos  $(\psi, \theta_p^+(\psi)) \in M_\gamma$  tais que  $\theta_p^+(\psi) = -\theta_p^-(\psi)$  considerando isto e a construção da figura 4.2 temos:

$$\ell_p^+ = R(\ell_p^-) \quad e \quad F_\gamma(\ell_p^-) = \ell_p^+$$

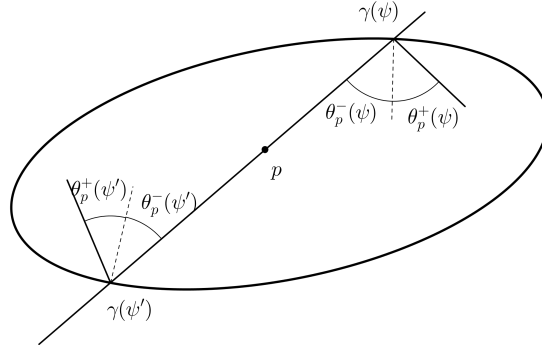


Figura 4.2:

**Lema 4.3.** *Seja  $\gamma$  uma oval e  $p \in \text{int}Q_\gamma$ . Se  $z_0 \in \ell_p^+ \cap F_\gamma^{-m}(\ell_p^-)$  para algum  $m \geq 0$  então existe  $r(z_0) > 0$  tal que se  $T$  é a aplicação de bilhar na mesa  $Q_{\gamma,p,r}$  com  $r < r(z_0)$  então  $x_0 = T^{-1}(z_0) \in M_\alpha$  é um ponto normal.*

**Prova:** Suponhamos a existência de um ponto  $z_0 \in \ell_p^+ \cap F_\gamma^{-n}(\ell_p^-)$  sendo  $n$  o menor inteiro positivo satisfazendo esta condição. Sejam  $z_i = (s_i, \theta_i) =$

$F_\gamma^i(z_0)$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $\Gamma$  a trajetória poligonal correspondente ao segmento de órbita  $\{z_{-1}, z_0, \dots, z_n, z_{n+1}\}$ . Uma possível configuração de  $\Gamma$  para o caso  $n = 3$  é ilustrada na figura 4.3(1).

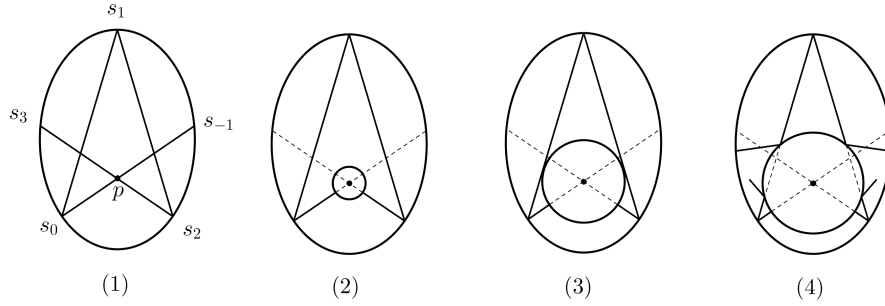


Figura 4.3: Construções para prova do lema 4.3

Seja  $\Gamma_i$  a aresta de  $\Gamma$  com extremos  $\gamma(s_i)$  e  $\gamma(s_{i+1})$ . Como  $F_\gamma(\ell_p^-) = \ell_p^+$  e  $z_0 \in \ell_p^+$  temos  $z_{-1} \in \ell_p^-$  donde  $p \in \Gamma_{-1}$ . Como  $z_n \in \ell_p^-$  temos  $p \in \Gamma_n$ . Para  $i = 1, \dots, n-1$  temos  $p \notin \Gamma_i$ . Definimos  $r(z_0) > 0$  como sendo a menor distância entre  $p$  e uma aresta  $G_i$  com  $i = 1, \dots, n-1$ . Se  $\alpha$  é qualquer círculo de centro  $p$  e raio  $r < r(z_0)$  então  $\alpha \cap \Gamma_i = \emptyset$  para  $i = 1, \dots, n-1$  e a trajetória  $\Gamma$  contém a trajetória de um ponto normal  $x_0 = T^{-1}(z_0)$  na mesa com obstáculo  $Q_{\gamma,p,r}$  com  $r < r(z_0)$ .  $\square$

Usando o critério do lema 4.3 e a descrição da dinâmica genérica de um bilhar convexo dada pelo teorema 4.2 provamos o seguinte lema que é um dos principais argumentos para a prova do teorema B.

**Lema 4.4.** *Dada  $\gamma \in \mathcal{D}'$  e  $p \in \text{int}Q_\gamma$  suponhamos que uma das curvas  $\ell_p^-$  ou  $\ell_p^+$  tenha um ponto de interseção transversal com algum ramo das variedades invariantes da órbita hiperbólica  $\mathcal{O}_\gamma = \{y_0, y_1\}$  associada à  $\gamma$ . Então, para todo  $N > 1$  existe  $r_N > 0$  tal que toda aplicação  $T_{\alpha,r}$  associada a  $(\gamma, p)$  e com  $r < r_N$  admite ao menos  $N$  pontos normais transversais dois a dois não*

---

*alinhados*

**Prova:** Dada  $\gamma \in \mathcal{D}'$  e  $p \in Q_\gamma$  seja  $z^+ \in M_\gamma$  seja uma interseção transversal entre  $\ell_p^+$  e  $W^s(y_0)$ , os demais casos são tratados de forma análoga. Por reversibilidade,  $z^- = R(z^+)$  é uma interseção transversal entre  $\ell_p^-$  e  $W^u(y_0)$ .

Seja  $B(y_0, \epsilon)$  uma bola aberta centrada em  $y_0$  de raio  $\epsilon$ . Como  $F_\gamma^2(y_0) = y_0$ ,  $z^+ \in W^s(y_0)$  e  $z^- \in W^u(y_0)$  existe um inteiro  $n_0 > 0$  tal que:

$$F_\gamma^{2n}(z^+) \in B(y_0, \epsilon) \quad e \quad F_\gamma^{-2n}(z^-) \in B(y_0, \epsilon) \quad \forall n > n_0 \quad (4.8)$$

Seja  $\lambda_n^+$  a componente conexa de  $F_\gamma^{2n}(\ell_p^+) \cap B(y_0, \epsilon)$  contendo  $F_\gamma^{2n}(z^+)$  e  $\lambda_n^-$  a componente conexa de  $F_\gamma^{-2n}(\ell_p^-) \cap B(y_0, \epsilon)$  contendo  $F_\gamma^{-2n}(z^-)$ . Pelo lema da inclinação [21], a sequência de curvas  $\{\lambda_n^+\}_{n \geq n_0}$  ( resp  $\{\lambda_n^-\}_{n \geq n_0}$ ) converge na topologia  $C^1$  para  $W^s(y_0, \epsilon)$  ( resp.  $W^u(y_0, \epsilon)$ ) quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto, existe  $n_1 \geq n_0$  tal que para todo  $n > n_1$  a curva  $\lambda_n^+$  intersecta transversalmente a curva  $\lambda_n^-$  em um único ponto  $z_n \in B(y_0, \epsilon)$ .

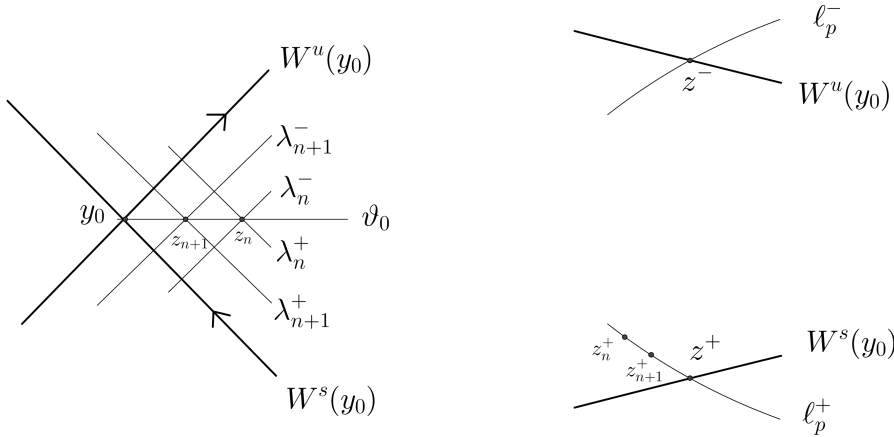


Figura 4.4:

Por reversibilidade de  $F_\gamma$  temos:

$$\lambda_n^- = R(\lambda_n^+) \Rightarrow z_n \in \lambda_n^+ \cap \lambda_n^- \in \vartheta_0$$

e, pela definição de  $\lambda_n^-$  e  $\lambda_n^+$ , o ponto  $z_n^+ = F_\gamma^{2n}(z_n)$  é uma uma interseção

---

---

transversal entre a curva  $\ell_p^+$  e a pré-imagem  $F_\gamma^{-4n}(\ell_p^-)$ .

Fixando um inteiro  $N > 0$  consideramos o conjunto  $Z_N = \{z_1^+, z_2^+, \dots, z_N^+\} \subset \ell_p^+$ . Segue do lema 4.3 que para cada  $z_j^+ \in Z_N$  existe  $r_j > 0$  tal que se  $T$  é a aplicação do bilhar na mesa  $Q_{\gamma,p,r}$  com  $r < r_j$  então o ponto  $x_j = (\beta_j, 0) = T^{-1}(z_j^+) \in M_\alpha$  é um ponto periódico normal. Como  $z_j^+$  é uma interseção transversal entre  $\ell_p^+$  e  $F_\gamma^{-4n}(\ell_p^-)$  temos que  $x_j$  é um interseção transversal entre  $\ell_0$  e  $T^{-4n-2}(\ell_0)$ . Logo,  $x_j$  é um ponto normal transversal.

Seja  $r_N := \min\{r_j : 1 \leq j \leq N\}$ . Se  $T$  é a aplicação de bilhar em uma mesa  $Q_{\gamma,p,r}$  com  $r < r_N$  então  $X_N = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \subset M_\alpha$  é um conjunto de  $N$  pontos normais transversais. Seja  $\ell_N$  um segmento de  $\ell_p^+$  contendo o ponto  $z_0$  e tal que:

$$\pi_1 \circ T^{-1}(\ell_N) \subset (-\pi + \beta_0, \beta_0 + \pi)$$

Diminuindo o raio  $\epsilon$  da bola  $B(y_0, \epsilon)$ , se necessário, podemos supor que  $Z_N \subset \ell_N$ . Neste caso, quaisquer dois pontos distintos  $x_i = (\beta_i, 0)$  e  $x_j = (\beta_j, 0)$  em  $X_N$  satisfazem  $\beta_j - \beta_i \neq \pi$  donde são não alinhados o que conclui a prova.  $\square$

Os dois lemas a seguir descrevem propriedades das curvas  $\ell_p^\pm$  e sua relação com o conjunto conjunto  $W_\gamma = \bigcup_{i \in \{0,1\}} W^u(y_i) \cup W^s(y_i)$ .

**Lema 4.5.** *Para toda oval  $\gamma \in \mathcal{D}$  e ponto  $p \in Q_\gamma$  temos que  $\ell_p^-$  e  $\ell_p^+$  se intersectam em ao menos dois pontos.*

**Prova:** Como  $\ell_p^+ = R(\ell_p^-)$  temos  $(\psi, \theta_p^-(\psi)) \in \ell_p^- \cap \ell_p^+ \Leftrightarrow \theta_p^-(\psi) = \theta_p^+(\psi) = 0$  donde  $\ell_p^- \cap \ell_p^+ \neq \emptyset$  se e só se  $\theta_p^-(\psi) = 0$  para algum  $\psi \in [0, 2\pi)$ . Para provar o enunciado consideremos a função:

$$\tau_p : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R} \quad \tau_p(\psi) = \|p - \gamma(\psi)\|$$

Como  $\gamma$  é de classe  $C^2$  e  $p \cap \gamma = \emptyset$  temos que  $\tau_p$  é de classe  $C^2$  e satisfaz:

$$2\tau_p(\psi)\tau_p'(\psi) = -2\langle \gamma'(\psi), p - \gamma(\psi) \rangle \implies \tau_p'(\psi) = -\frac{\langle \gamma'(\psi), p - \gamma(\psi) \rangle}{\|p - \gamma(\psi)\|} = -\cos \bar{\theta}(\psi)$$

---

onde  $\bar{\theta}(\psi)$  é o ângulo entre  $p - \gamma(\psi)$  e a tangente  $\gamma'(\psi)$ . Note que:

$$\bar{\theta}(\psi) = \pi/2 - \theta_p^-(\psi) \quad \Rightarrow \quad \tau_p'(\psi) = -\sin \theta_p^-(\psi)$$

Como  $[0, 2\pi)$  é compacto existem ao menos dois pontos, digamos  $\psi_1$  e  $\psi_2$  em  $[0, 2\pi)$ , tais que  $\tau_p'(\psi_i) = -\sin(\theta_p^-(\psi_i)) = 0$  donde  $\theta_p^-(\psi_i) = 0$ . Portanto  $\#\{\ell_p^- \cap \ell_p^+\} \geq 2$ .  $\square$

**Observação 4.6.** Se  $\gamma$  é um círculo de centro  $p$  então  $\tau_p : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\ell_p^- = \ell_p^+$ . Esta é a única configuração possível em que  $\ell_p^-$  e  $\ell_p^+$  coincidem, em todos os outros casos  $\ell_p^- \neq \ell_p^+$ .

**Observação 4.7.** O conjunto  $W_\gamma$  possui uma curva rotacional em  $M_\gamma$  obtida concatenando segmentos alternados de variedades instáveis e estáveis da órbita  $\mathcal{O}_\gamma$  como provado em [14]

**Lema 4.8.** Se  $\gamma \in \mathcal{D}'$  e  $p \in Q_\gamma$  então  $(\ell_p^- \cup \ell_p^+) \cap W_\gamma \neq \emptyset$ .

**Prova:** Como  $\gamma \in \mathcal{D}'$  temos que esta oval não é um círculo, já que a dinâmica do bilhar no círculo é integrável. Logo para todo  $p \in Q_\gamma$  a união  $\ell_p^- \cup \ell_p^+$  limita um compacto  $C_p \subset M_\gamma$  de interior não vazio. Cada componente do interior de  $C_p$  é um aberto homeomorfo a um disco como ilustrado na figura ??(2).

Consideremos a órbita hiperbólica  $\mathcal{O}_\gamma = \{y_0, y_1\}$  do bilhar  $\mathcal{B}_\gamma$ . Como  $W^u(y_i)$  intersecta transversalmente  $W^s(y_j)$  para todo par  $i, j \in \{0, 1\}$ , segue do lema da inclinação que podemos construir um aberto e conexo  $A(y_i)$  contendo o ponto  $y_i$ ,  $i \in \{0, 1\}$  cujo bordo é a união de quatro curvas contidas em  $W_\gamma = \bigcup_{i=0,1} W^u(y_i) \cup W^s(y_i)$  como ilustrado na figura ??(1).

Temos dois casos complementares:  $\mathcal{O}_\gamma \subset \text{int}C_p$  e  $\mathcal{O}_\gamma \cap \partial C_p \neq \emptyset$ . Se  $\mathcal{O}_\gamma \subset \text{int}C_p$  então  $W_\gamma \cap \partial C_p \neq \emptyset$ , de fato como observado acima o conjunto  $W_\gamma$  contem um curva rotacional em  $M_\gamma$  e como toda componente de  $\text{int}C_p$  é homotopicamente trivial temos que necessariamente  $W_\gamma \cap \partial C_p \neq \emptyset$ , ou seja,  $W_\gamma \cap (\ell_p^- \cup \ell_p^+) \neq \emptyset$ . Se, no entanto,  $\mathcal{O}_\gamma \cap \partial C_p \neq \emptyset$  então necessariamente

---

$y_i \in \ell_p^- \cap \ell_p^+$  e neste neste caso  $\ell_p^+ \cup \ell_p^- \cap A(y_i) \neq \emptyset$ . Observando que  $\ell_p^-$  e  $\ell_p^+$  são curvas rotacionias e  $A(y_i)$  é homeomorfo a um disco temos que necessariamente  $\ell_p^- \cup \ell_p^+$  intersecta  $\partial A(y_i) \subset W_\gamma \setminus \mathcal{O}_\gamma$  donde também obtemos  $W_\gamma \cap (\ell_p^- \cup \ell_p^+) \neq \emptyset$ .  $\square$

### 4.3 Prova do teorema *B*

O roteiro da prova do teorema *B* é o seguinte: tomamos uma oval  $\gamma \in \mathcal{D}$  e um ponto  $p \in Q_\gamma$ . Como  $\mathcal{D}'$  é aberto e denso em  $\mathcal{D}$ , existe uma oval  $\gamma_0 \in \mathcal{D}'$  arbitrariamente próxima de  $\gamma$  na topologia  $C^2$ . Pelo lema 4.8 sabemos que  $W_{\gamma_0} \cap (\ell_p^- \cup \ell_p^+) \neq \emptyset$ , se existe algum ponto de interseção trasnversal entre algum segmento de  $W_{\gamma_0}$  e algum segmento de  $\ell_p^- \cup \ell_p^+$  então o teorema segue do lema 4.4. Caso contrário tratamos o problema aplicando o seguinte lema:

**Lema 4.9.** *Se  $\gamma \in \mathcal{D}'$  e  $p \in Q_\gamma$  são tais que  $W_\gamma$  não itersecta transversalmente os segmentos de  $\ell_p^- \cup \ell_p^+$  então existe uma família de ovais  $\{\gamma_t\}_{|t|<t_0}$  arbitrariamente próxima de  $\gamma$  na topologia  $C^2$  e tal que  $\gamma_0 = \gamma$  e se  $W_{\gamma_t}$  denota a união das variedade de órbita hiperbólica  $\mathcal{O}_{\gamma_t}$  e  $\ell_{p,t}^-$  e  $\ell_{p,t}^+$  as curvas associadas a  $\gamma_t$  e  $p$  então existe um ponto de interseção transversal entre algum segmento de  $W_{\gamma_t}$  e algum segmento de  $\ell_{p,t}^+ \cup \ell_{p,t}^-$  para todo  $t \neq 0$ .*

Assim podemos obter uma oval  $\gamma_1 \in \mathcal{D}'$  arbitrariamente próxima de  $\gamma$  tal existe ao menos um ponto de interseção transversal entre  $W_{\gamma_1}$  e  $(\ell_{p,1}^- \cup \ell_{p,1}^+)$ . Neste caso a prova segue novamente aplicando o lema 4.4. Assim sendo, reduzimos a prova do teorema *B* à prova do lema 4.9.

**Prova do lema 4.9 :** Seja  $\gamma \in \mathcal{D}'$ ,  $\mathcal{O}_\gamma = \{y_0 = (\psi'_0, 0), y_1 = (\psi'_1, 0)\}$  a órbita hiperbólica associada e suponhamos  $z_0 = (\psi_0, \theta_0)$  seja um ponto de tangência entre  $W^u(y_0)$  e  $\ell_p^+$ , as demais possibilidades são tratadas de forma análoga. Seja  $z_{-i} = (\psi_{-i}, \theta_{-i}) = F_{\gamma_0}^{-i}(z_0)$ . Como  $z_0 \in W^u(y_0)$ , temos  $z_{-j} \rightarrow y_0$  quando  $j \rightarrow \infty$  e consequentemente  $\psi_{-j} \rightarrow \psi'_0$ .



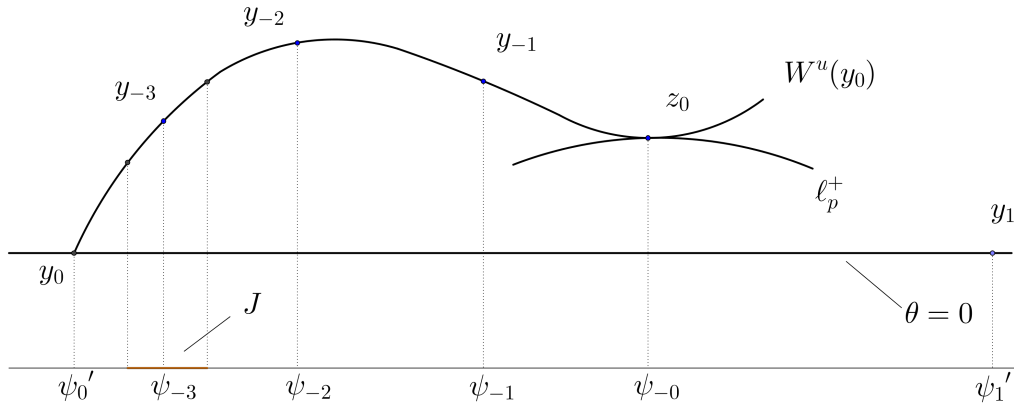


Figura 4.5:

Para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno a variedade instável local  $W_\epsilon^u(y_0)$  é um gráfico logo, existe  $j_0$  tal que se  $j > j_0$  então  $\psi_{-j+1} > \psi_{-j} > \psi'_0$  ou  $\psi_{-j+1} < \psi_{-j} < \psi'_0$  dependendo do ramo de  $W^u(y_0)$  ao qual pertence o ponto  $z_0$ . Vamos supor que  $\psi_{-j+1} > \psi_{-j} > \psi'_0$  para todo  $j > j_0$  como ilustrado na figura 4.6. Observando que  $\{\psi_0, \dots, \psi_{-j_0}\}$  é um conjunto finito temos que existe um  $n > j_0$  suficientemente grande de forma que  $\psi_{-n} \notin \{\psi_0, \dots, \psi_{-n+1}\}$  e como  $y_0 \neq y_1$  podemos supor este  $n$  satisfazendo também  $\psi_{-n} \notin \{\psi'_0, \psi'_1\}$ . Segue do exposto acima que existe um intervalo  $J \subset [0, 2\pi)$  contendo  $\psi_{-n}$  e tal que:

$$J \cap (\{\psi_0, \dots, \psi_{-n+1}\} \cup \{\psi'_0, \psi'_1\}) = \emptyset$$

Aplicando o lema 4.1 construímos uma família de ovals  $\{\gamma_t\}_{|t| < t_0}$  perturbando  $\gamma$  na direção da normal no arco  $\gamma_0(J)$  como no lema 4.1. Denotaremos por  $F_{\gamma_t}$  a aplicação de bilhar associada à curva  $\gamma_t$ . Pelas propriedades da família  $\{\gamma_t\}_{|t| < t_0}$  descritas no lema 4.1, para todo  $-t_0 < t < t_0$  e  $-n \leq i \leq 0$  temos  $\gamma_t(\psi_i) = \gamma_0(\psi_i)$  e  $\gamma'_t(\psi_i) = \gamma'_0(\psi_i)$ . Estes fatos implicam que o conjunto  $\{z_0, z_{-1}, \dots, z_{-n}\}$  é um segmento de órbita toda aplicação  $F_{\gamma_t}$ .

Também temos que, para todo  $t$ , as curvas  $\gamma$  e  $\gamma_t$  coincidem em arco contendo os pontos  $\gamma(\psi'_0)$  e  $\gamma(\psi'_1)$ , assim o conjunto  $\mathcal{O}_\gamma = \{y_0, y_1\}$  é um órbita hiperbólica para toda aplicação  $F_{\gamma_t}$ . Denotamos por  $W_t^u(y_0)$  a variedade

---

instável do ponto  $y_0$  por  $F_{\gamma_t}$ . Como  $\gamma_0 = \gamma$  temos  $W_0(y_0)^u = W^u(y_0)$ .

Seja  $\ell_{p,t}^+$  a curva associada ao ponto  $p$  e  $\gamma_t$ , como  $\psi_0 \notin J$  temos que para todo  $t$  as curvas  $\ell_{p,t}^+$  e  $\ell_p^+$  coincidem em um segmento contendo  $z_0$ .

Seja  $u(t) \in \mathbf{T}_{z_0} M_\gamma$  o vetor tangente a  $W_t^u(y_0)$  no ponto  $z_0$ . Como  $z_0$  é um ponto de tangência entre  $W^u(y_0)$  e  $\ell_p^+$  temos que  $u(0)$  é o vetor tangente a  $\ell_p^+$  no ponto  $z_0$ . Para concluir a prova é suficiente mostrar que  $u(0)$  e  $u(t)$  são linearmente independentes para todo  $t \neq 0$  já que se isso ocorre então  $W_t^u(y_0)$  intersecta transversalmente a curva  $\ell_p^+$  no ponto  $z_0$ .

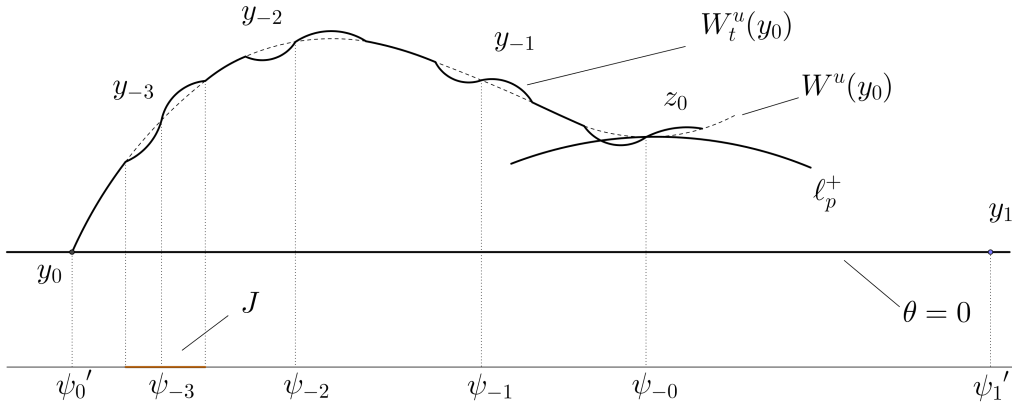


Figura 4.6:

Seja  $t \mapsto f(t)$  a função que a cada  $t \in (-t_0, t_0)$  associa o tempo de focalização de  $u(t)$ . Pela definição de tempo de focalização temos que se  $f(t) \neq f(0)$  então  $u(t)$  e  $u(0)$  são linearmente independentes. Pela equação do espelho temos que  $f(t)$  é dada por:

---


$$f(t) = \frac{1}{\frac{2k_0}{\cos \theta_0} - \tau_0 - \frac{1}{\frac{2k_{-1}}{\cos \theta_{-1}} - \tau_{-1} - \frac{1}{\frac{2k_{-n}(t)}{\cos \theta_{-n}} + \frac{1}{-\tau_{-n-1} + f_{-n-1}}}}}$$

onde curvaturas  $k_i$  é a curvatura de  $\gamma_t$  no ponto  $\gamma(\psi_i)$  e  $\tau_i = \|\gamma_t(\psi_{i+1}) - \gamma_t(\psi_i)\|$ . Para todo  $t$  e  $i \neq -n$  a curvatura  $k_i$  é a curvatura de  $\gamma_0$  no ponto  $\gamma_0(\psi_i)$ . Mas a curvatura de  $\gamma_t$  no ponto  $\gamma_t(\psi_{-n})$  é dada em termos da curvatura  $k_{-n}$  de  $\gamma_0$  no ponto  $\gamma_0(\psi_{-n})$  pela equação:

$$k_{-n}(t) = k_{-n}(0) + 2k_{-n}(0)^2.t$$

Segue da expressão para  $f(t)$  que  $f'(t) = Q(t)2(k_{-n}(t))^2 > 0$  sendo:

$$Q(t) = \left( \prod_{i=1}^{n-1} \left( \frac{2k_i}{\cos \theta_i} (\tau_{i-1} - f_{i-1})^{-2} \right)^{-2} \right) \times \frac{2}{\cos \theta_{-n}} \left( \frac{2k_t}{\cos \theta_{-n}} + \frac{1}{\tau_{-n-1} - f_{-n-1}} \right)^{-2}$$

sendo  $f_{i-1}$  o tempo de focalização do vetor  $D_{z_0} F_{\gamma_t}^{-i}.u(t)$ . Portanto,  $f(t)$  é estritamente crescente e temos  $f(t) \neq f(0)$  se  $t \neq 0$  donde segue o enunciado.  $\square$

## 4.4 Prova do corolário 1.3

Fixando  $p \in \mathbb{R}^2$  seja  $\mathcal{D}_p = \{\gamma \in \mathcal{D} : p \in Q_\gamma\}$ , note que se  $\gamma_0 \in \mathcal{D}_p$  então para ovais  $\gamma$  próximas de  $\gamma_0$  temos  $p \in Q_\gamma$ , logo  $\mathcal{D}_p$  é aberto em  $\mathcal{D}$ . Concluimos este capítulo provando o corolário 1.3 ou seja mostrando que para todo  $p \in \mathbb{R}^2$  existe um conjunto  $\mathcal{D}'_p$  denso em  $\mathcal{D}_p$  tal que para toda  $\gamma \in \mathcal{D}'_p$  existe  $r_\gamma$  tal que todo bilhar em uma mesa  $Q_{\gamma,p,r}$ , com  $r < r_\gamma$ , admite um conjunto  $\Lambda_r$  uniformemente hiperbólico para a aplicação de primeiro retorno  $T_{\alpha,r}$  tal que

---

a restrição  $T_{\alpha,r} : \Lambda_r \rightarrow \Lambda_r$  é conjugada ao shift no no espaço das sequências simbólicas de  $m(r)$  símbolos com  $m(r) \rightarrow \infty$  quando  $r \rightarrow 0$ .

**Prova do corolário 1.3:** Dado  $p \in \mathbb{R}^2$  temos, pelo teorema [B](#), que existe um conjunto  $\mathcal{D}'_p$  denso em  $\mathcal{D}_p$  tal que se  $\gamma \in \mathcal{D}'_p$  então existe um sequência  $\{r_m\}_{m \geq 2}$  como  $\lim_{r \rightarrow 0} r_m = 0$  tal que, para todo  $m$ , se  $r < r_m$  então o bilhar na mesa  $Q_{\gamma,p,r}$  admite um conjunto de  $m$  pontos normais transversais, dois a dois não alinhados. Definindo  $r_\gamma = r_0$  e  $m(r) = m$  se  $r_{m+1} < r < r_m$  temos  $\lim_{r \rightarrow 0} m(r) = \infty$  e, pelo teorema [A](#), todo bilhar em uma mesa  $Q_{\gamma,p,r}$ ,  $r < r_\gamma$  admite um conjunto  $\Lambda_r$  uniformemente hiperbólico para a aplicação de primeiro retorno  $T_{\alpha,r}$  e com dinâmica conjugada ao shift  $\sigma$  em  $\Sigma_{m(r)}$ .  $\square$

## CAPÍTULO 5

---

### Os bilhares de Saitô

---

Neste capítulo estudaremos a família a dois parâmetros de bilhares,  $\{\mathcal{B}_{\delta,r}\}_{(\delta,r)\in\Omega}$ , introduzida por Saitô [5]. Na seção 5.1 descrevemos a aplicação de bilhar definindo um conjunto  $H_{\delta,r} \subset M_\alpha$  restrita ao qual a aplicação de primeiro retorno ao obstáculo,  $T_\alpha$ , preserva campos de cones. Provamos o teorema *C* na seção 5.2 contruindo conjuntos  $\Lambda_{\delta,r} \subset H_{\delta,r}$  uniformemente hiperbólicos para  $T_\alpha$  e cuja densidade em  $M_\alpha$  aumenta quando  $(\delta,r) \rightarrow (1,0)$ . Na seção 5.3 provamos, para alguns parâmetros, a existência de pontos normais tangentes (não transversais) no complementar de  $H_{\delta,r}$  e descrevemos a bifurcação da dinâmica em torno destes pontos. Explorando a dinâmica em torno de pontos normais tangentes provamos na seção 5.4 o teorema *D* sobre a existência de tangências homoclínicas entre as variedades de pontos em  $\Lambda_{\delta,r}$ . Na seção 5.4, provamos o teorema *E* sobre a existência de pontos periódicos elípticos para os bilhares  $\mathcal{B}_{\delta,r}$ .

## 5.1 Preliminares

Seja  $\Omega = \{(\delta, r) : 0 \leq \delta < 1 \text{ e } 0 < r < 1\}$  e  $Q_{\delta, r}$  a região limitada por um círculo  $\gamma$  de raio unitário e centro  $p_\gamma$  e um círculo  $\alpha$  de raio  $r$  e centro  $p$  distando  $\delta$  de  $p_\gamma$ . Seja  $\gamma$  parametrizado por comprimento de arco  $s \in [0, 2\pi)$  e orientado no sentido anti-horário. Adotamos coordenadas  $(s, \theta)$  em  $M_\gamma$ . Seja  $\alpha$  orientado no sentido horário e adotamos coordenadas  $(\beta, \varphi)$  para a pontos  $(q, v) \in M_\alpha$  onde  $\beta$  o ângulo entre o vetor  $q - p$  e  $u = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$  medido no sentido horário (ver figura 5.1(2)).



Figura 5.1: Parametrizações do bordo externo e do obstáculo.

Seja  $T = T_{\delta, r} : M \rightarrow M$ , com  $M = M_\alpha \cup M_\gamma$ , a aplicação correspondente ao bilhar na mesa  $Q_{\delta, r}$ . Sejam  $M_\alpha^+ = T(M_\alpha)$  e  $M_\alpha^- = T^{-1}(M_\alpha)$ . A restrição  $T : M_\alpha^- \rightarrow M_\alpha$  é dada implicitamente pelas equações [5]

$$T(s, \theta) = (\beta, \varphi) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \theta + \delta \sin(\theta - s) = -r \sin \varphi \\ \beta - \varphi = \theta - s \\ |\sin \theta + \delta \sin(\theta - s)| \leq r \end{cases} \quad (5.1)$$

e a restrição  $T : M_\alpha \rightarrow M_\alpha^+$  é dada implicitamente pelas equações:

$$T(\beta, \varphi) = (s, \theta) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \theta + \delta \sin(\theta + s) = -r \sin \varphi \\ \beta + \varphi = -s - \theta \\ |\sin \theta + \delta \sin(\theta + s)| \leq r \end{cases} \quad (5.2)$$

As restrições  $T : \text{int}M_\alpha^- \rightarrow \text{int}M_\alpha$  e  $T : \text{int}M_\alpha \rightarrow \text{int}M_\alpha^+$  são difeomorfismos

---

$C^\infty$ . Em  $z = (s, \theta) \in \text{int}M_\alpha^-$  tal que  $T(z) = (\beta, \varphi)$  a derivada  $D_z T$  é dada pelas fórmulas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial s} &= -1 + \frac{\delta \cos(s - \theta)}{r \cos \varphi} & \frac{\partial \beta}{\partial \theta} &= 1 - \frac{\delta \cos(s - \theta)}{r \cos \varphi} - \frac{\cos \theta}{r \cos \varphi} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial s} &= \frac{\delta \cos(s - \theta)}{r \cos \varphi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= -\frac{\cos \theta}{r \cos \varphi} - \frac{\delta \cos(s - \theta)}{r \cos \varphi} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Em  $z = (\beta, \varphi) \in \text{int}M_\alpha$  tal que  $T(z) = (s, \theta)$  temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial \beta} &= -1 - \frac{\delta \cos(\theta + s)}{\cos \theta} & \frac{\partial s}{\partial \varphi} &= -1 - \frac{\delta \cos(\theta + s)}{\cos \theta} + \frac{r \cos \varphi}{\cos \theta} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \beta} &= \frac{\delta \cos(\theta + s)}{\cos \theta} & \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} &= \frac{\delta \cos(\theta + s)}{\cos \theta} - \frac{r \cos \varphi}{\cos \theta} \end{aligned} \quad (5.4)$$

A dinâmica das trajetórias que não colidem com o obstáculo é descrita pela aplicação  $F = M_\gamma \rightarrow M_\gamma$  do bilhar na mesa  $Q_\gamma$  que tem expressão

$$F(s_0, \theta_0) = (s_1, \theta_1) = (s_0 + \pi - 2\theta_0, \theta_0) \quad (5.5)$$

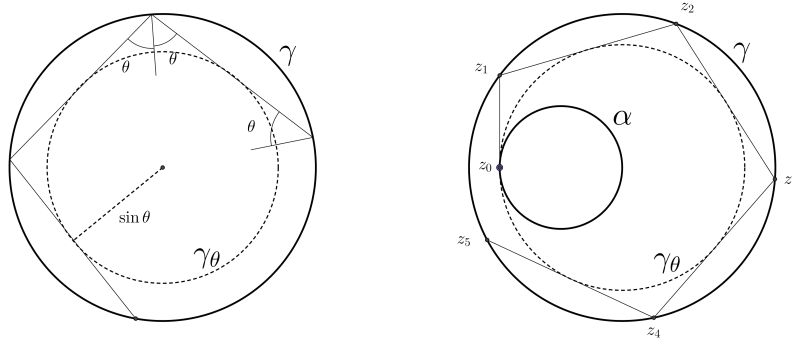


Figura 5.2:

Toda curva  $\vartheta_\theta := \{z \in M_\gamma : \pi_2(z) = \theta\}$  é invariante por  $F$  e restrita a cada  $\vartheta_\theta$  a aplicação  $F$  age como uma rotação no círculo por um ângulo  $\theta$  cuja dinâmica depende da racionalidade ou não do quociente  $\frac{\theta}{2\pi}$ . Se  $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  então todo ponto  $z \in \vartheta_\theta$  é periódico com período  $q$ . Se  $\frac{\theta}{2\pi}$  é irracional então todo ponto  $z \in \vartheta_\theta$  tem órbita densa em  $\vartheta_\theta$ . Para todo  $z = (s, \theta) \in M_\gamma$  a

---

trajetória de bilhar associada é uma poligonal cujas arestas tangenciam o círculo  $\gamma_\theta$  concêntrico a  $\gamma$  e de raio  $\sin \theta$  (figura 5.2).

**Observação 5.1.** Considere uma mesa  $Q_{\delta,r}$  em que o obstáculo  $\alpha$  tangencia internamente um círculo  $\gamma_\theta$  concêntrico a  $\gamma$  e de raio  $\sin \theta$  com  $\frac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$ . Seja  $z_0 = (q_0, v_0) \in M_\alpha$  em que  $q_0 = \alpha \cap \gamma_\theta$  e  $v_0$  é tangente a  $\alpha$ . A trajetória de bilhar,  $\Gamma$ , associada ao segmento  $\{z_0, z_1, z_2, \dots\}$ ,  $z_i = (q_i, v_i) = T^i(z_0)$  não possui outro ponto de colisão com  $\alpha$  além de  $q_0$ . De fato, se  $q_i \in \alpha$  para algum  $i > 0$  então, necessariamente,  $q_i = q_0$ , mas isso implicaria que  $v_i = v_0$ , já que  $\Gamma$  está contida no anel entre  $\alpha$  e  $\gamma_\theta$ . Consequentemente  $\Gamma$  seria uma trajetória periódica do bilhar no disco  $Q_\gamma$  tangenciando um círculo de raio  $\sin \theta$  com  $\frac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$  o que não é possível. Assim, temos que  $T^i(z_0) \notin M_\alpha$  para todo  $i > 0$ . Este exemplo ilustra que a função tempo de retorno ao obstáculo  $n_\alpha$  poder não estar definida em todo  $M_\alpha$  como observado durante a definição de  $T_\alpha$  na seção 2.1.

No que se segue descreveremos alguns subconjuntos no espaço de fase analisando sua dependência com relação aos parâmetros  $(\delta, r)$ . O objetivo é definir, para um subconjunto de parâmetros  $\Omega_0 \subset \Omega$ , uma região  $H_{\delta,r} \subset M_\alpha$  restrita a qual as aplicações  $T_\alpha$  e sua inversa preservam campos de cones análogos aos definidos no capítulo 3.

Observemos que, por 5.6 e 5.7, os conjuntos  $M_\alpha^-$  e  $M_\alpha^+$  são respectivamente folheados pelas curvas:

$$\ell_\varphi^- = \{(s, \theta) : \sin \theta + \delta \sin(\theta - s) = -r \sin \varphi\} \quad (5.6)$$

$$\ell_\varphi^+ = \{(s, \theta) : \sin \theta + \delta \sin(s + \theta) = -r \sin \varphi\} \quad (5.7)$$

Ainda por 5.6 e 5.7, existem funções  $\theta_\varphi^\pm : [0, 2\pi) \rightarrow I$ , dependendo de  $(\delta, r)$ , tais que  $\ell_\varphi^\pm = \text{Graf}(\theta_\varphi^\pm)$ . A função  $\theta_\varphi^+(s)$  tem um ponto de mínimo global e um ponto de máximo global dados respectivamente por:

$$s_{min}^+ = \frac{\pi}{2} + \arcsin(\delta + r \sin \varphi) \quad e \quad s_{max}^+ = -\frac{\pi}{2} - \arcsin(\delta - r \sin \varphi) \quad (5.8)$$



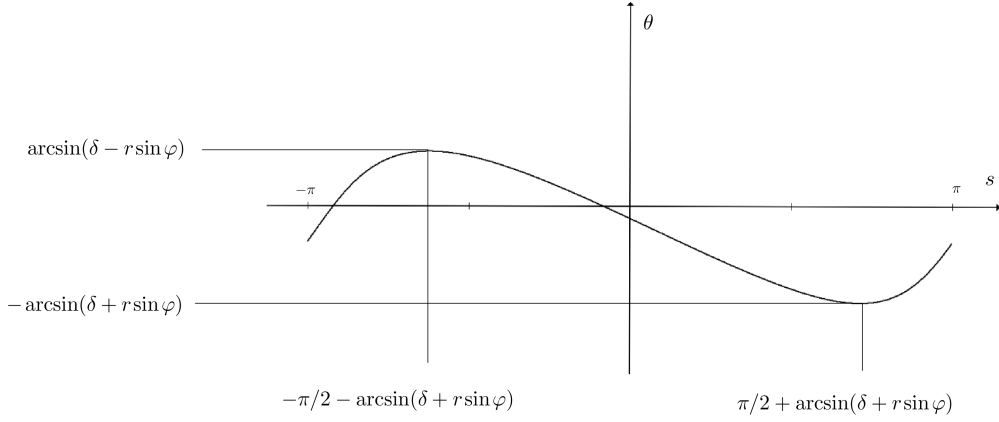


Figura 5.3: Uma curva  $\ell_\varphi^+$

e valores máximos e mínimos dados respectivamente por:

$$\theta_\varphi^+(s_{min}^+) = -\arcsin(\delta + r \sin \varphi) \quad e \quad \theta_\varphi^+(s_{max}^+) = \arcsin(\delta - r \sin \varphi) \quad (5.9)$$

Por reversibilidade, a curva  $\ell_\varphi^-$  é a refelexão da curva  $\ell_\varphi^+$  com respeito ao eixo horizontal  $\theta = 0$ . As curvas  $\ell_\delta^+ = T(\ell_0)$  e  $\ell_\delta^- = T^{-1}(\ell_0)$ <sup>1</sup>, dependem apenas do parâmetro  $\delta$  que localiza o centro  $p$  do obstáculo. Na figura 5.4 ilustramos algumas curvas da família  $\{\ell_\delta^+\}_{\delta \in [0,1]}$ . Recorde que, pelos lemas 3.3 e 3.4 na seção 3.2, fixado  $\delta$  temos que  $\ell_\varphi^- \rightarrow \ell_\delta^-$  e  $\ell_\varphi^+ \rightarrow \ell_\delta^+$  na topologia  $C^1$  quando  $r \rightarrow 0$ .

O conjunto  $M_\gamma$  das colisões com o bordo externo  $\gamma$  é folheado pelas curvas

$$\vartheta_\theta := \{z \in M_\gamma : \pi_2(z) = \theta\}, \quad \theta \in I$$

Pelas equações 5.2 temos que se  $|\theta| \leq \arcsin(\delta + r)$  então  $\vartheta_\theta \cap M_\alpha^+ \neq \emptyset$  e  $\vartheta_\theta \cap M_\alpha^- \neq \emptyset$ . Supondo então  $|\theta| \leq \arcsin(\delta + r)$  temos que os seguintes

---

<sup>1</sup>Note que estas são as curvas denotadas nos capítulos anteriores por  $\ell_p^+$  e  $\ell_p^-$  respectivamente

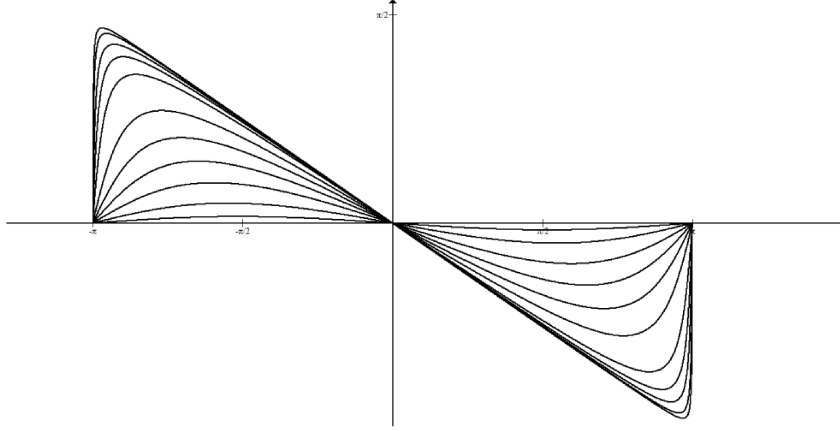


Figura 5.4: Família de curvas  $\ell_\delta^+$ : quando  $\delta \rightarrow 1$  as funções  $\theta_\delta^+$  convergem para a função descontínua  $\theta_1^+(s) = -\frac{1}{2} \cdot s$  se  $s \neq \pi$  e  $\theta_1^+(\pi) = 0$

subconjuntos de  $M_\alpha$  são não vazios:

$$\vartheta_\theta^- = T^{-1}(\vartheta_\theta \cap M_\alpha^+) = \{(\beta, \varphi) : \sin \theta - \delta \sin(\beta + \varphi) = -r \sin \varphi\} \quad (5.10)$$

$$\vartheta_\theta^+ = T(\vartheta_\theta \cap M_\alpha^-) = \{(\beta, \varphi) : \sin \theta + \delta \sin(\beta - \varphi) = -r \sin \varphi\} \quad (5.11)$$

Das equações 5.2 segue que se  $\theta$  satisfaz  $\arcsin(\delta - r) \leq |\theta| \leq \arcsin(\delta + r)$  então o conjunto  $\vartheta_\theta^\pm$  é uma única curva com extremos na mesma componente de  $\partial M_\alpha$ . Se  $|\theta| < \arcsin(\delta - r)$  e  $\delta < r$  então  $\vartheta_\theta^\pm$  é uma única curva fechada contida no interior de  $M_\alpha$  e se  $|\theta| < \arcsin(\delta - r)$  e  $\delta > r$  então  $\vartheta_\theta^\pm$  é a união de duas curvas com extremos em componentes distintas de  $\partial M_\alpha$ .

No conjunto  $M_\alpha$  das colisões com o obstáculo definimos os subconjuntos:

$$H_{\delta,r}^- = \{(\beta, \varphi) : -\delta^2 \leq \delta \sin(\beta + \varphi) + r \sin \varphi \leq \delta^2\} \quad (5.12)$$

$$H_{\delta,r}^+ = \{(\beta, \varphi) : -\delta^2 \leq \delta \sin(\beta - \varphi) + r \sin \varphi \leq \delta^2\} \quad (5.13)$$

$$H_{\delta,r} = H_{\delta,r}^- \cap H_{\delta,r}^+ = \{(\beta, \varphi) : -\delta^2 \leq \delta \sin(\beta \pm \varphi) + r \sin \varphi \leq \delta^2\} \quad (5.14)$$

Note que  $H_{\delta,r}^-$  é a união das curvas  $\vartheta_\theta^-$  com  $|\theta| \leq \arcsin(\delta^2)$ . Da definição 5.14 segue que se  $r < \delta - \delta^2$  então  $H_{\delta,r}^-$  é um compacto com duas compo-

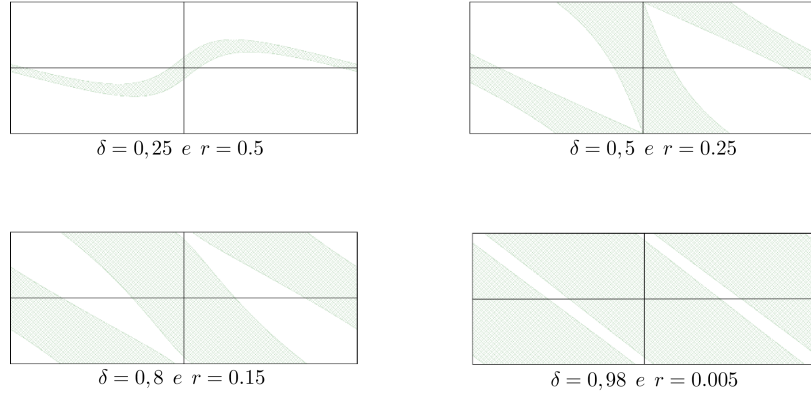


Figura 5.5: Conjuntos  $H_{\delta,r}^+$  para alguns parâmetros  $(\delta, r)$ . Os conjuntos  $H_{\delta,r}^-$  são dados pela reflexão de  $H_{\delta,r}^+$  com respeito ao eixo horizontal, ou seja  $R(H_{\delta,r}^-) = H_{\delta,r}^+$

nentes conexas contendo respectivamente os pontos  $z = (0, 0)$  e  $z = (\pi, 0)$ , o complementar  $M_\alpha \setminus H_{\delta,r}^-$  possui duas componentes conexas contendo respectivamente os pontos  $(\frac{\pi}{2}, 0)$  e  $(-\frac{\pi}{2}, 0)$  e o bordo  $\partial H_{\delta,r}^-$  é a união de segmentos de  $\partial M_\alpha$  e as seguintes curvas

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \left\{ (\beta, \varphi) : \beta = -\varphi + \pi + \arcsin \left( \delta + \frac{r}{\delta} \sin \varphi \right) \right\} \\
 \lambda_2 &= \left\{ (\beta, \varphi) : \beta = -\varphi - \arcsin \left( \delta + \frac{r}{\delta} \sin \varphi \right) \right\} \\
 \lambda_3 &= \left\{ (\beta, \varphi) : \beta = -\varphi + \arcsin \left( \delta - \frac{r}{\delta} \sin \varphi \right) \right\} \\
 \lambda_4 &= \left\{ (\beta, \varphi) : \beta = -\varphi + \pi - \arcsin \left( \delta - \frac{r}{\delta} \sin \varphi \right) \right\} \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

Note que quando  $(\delta, r) \rightarrow (1, 0)$ , as curvas  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  ( resp  $\lambda_3$  e  $\lambda_4$ ) convergem para a curva:

$$\xi_0 := \left\{ (\beta, \varphi) : \beta = -\varphi + \frac{\pi}{2} \right\} \quad \left( \text{resp. } \xi_1 := \left\{ (\beta, \varphi) : \beta = -\varphi - \frac{\pi}{2} \right\} \right)$$

consequentemente, a área do complementar de  $H_{\delta,r}^-$  tende a 0 quando  $(\delta, r) \rightarrow$

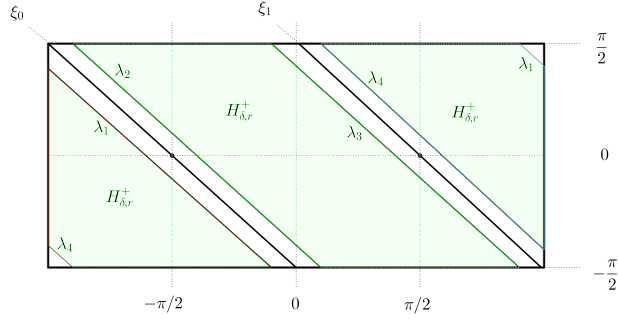


Figura 5.6:

(1, 0). Observe ainda que , pela definição 5.14, temos  $H_{\delta,r}^+ = R(H_{\delta,r}^-)$  e a interseção  $H_{\delta,r} = H_{\delta,r}^- \cap H_{\delta,r}^+$  que para  $r < \delta - \delta^2$  é a união de seis conjuntos compactos como ilustrado na figura 5.7.

Considerando as equações 5.2 e 5.1 temos:

$$T(H_{\delta,r}^-) = \{(s, \theta) \in M_\alpha^+ : |\sin \theta| \leq \delta^2\} \quad (5.16)$$

$$T^{-1}(H_{\delta,r}^+) = \{(s, \theta) \in M_\alpha^- : |\sin \theta| \leq \delta^2\} \quad (5.17)$$

e como  $F$  preserva a segunda coordenada e  $T_\alpha(z) = T \circ F^{n_\alpha(z)-2} \circ T(z)$  temos:

$$T_\alpha(H_{\delta,r}^-) = H_{\delta,r}^+$$

No restante do capítulo consideraremos os parâmetros  $(\delta, r)$  restritos ao conjunto:

$$\Omega_0 := \left\{ (\delta, r) \in \Omega : \delta \in [0.9, 1) \text{ e } r \in \left( 0, \frac{\delta - \delta^2}{10} \right] \right\}$$

As cotas na definição deste subconjunto são justificadas na seção 5.6 onde provamos a seguinte proposição que garante a preservação de cones por  $T_\alpha$  e  $T_\alpha^{-1}$  em  $H_{\delta,r}$  para  $(\delta, r) \in \Omega_0$ .

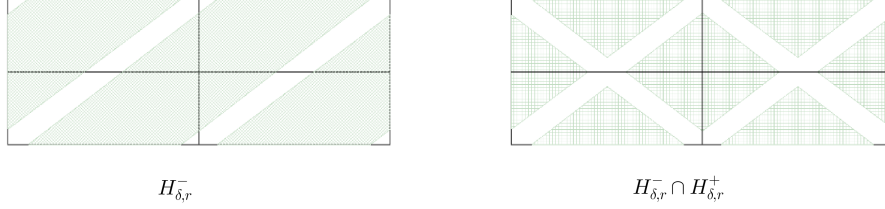


Figura 5.7:

**Proposição 5.2.** *Existem funções  $c_i : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$  e cones*

$$C^u(z) := \{u \in T_z M_\alpha : c_1(\delta, r) \leq \eta(u) \leq c_2(\delta, r)\} \subset C^+(z)$$

$$C^s(z) := \{u \in T_z M_\alpha : -c_2(\delta, r) \leq \eta(u) \leq -c_1(\delta, r)\} \subset C^-(z)$$

tais que se  $(\delta, r) \in \Omega_0$  então para todo  $z \in H_{\delta,r} \setminus (\mathcal{S}_- \cap \mathcal{S}_\infty)$  temos:

$$D_z T_\alpha . C^u(z) \subset C^+(T_\alpha(z)) \subset \text{int} C^u(T_\alpha(z))$$

$$D_z T^{-1} . C^u(z) \subset C^-(T_\alpha^{-1}(z)) \subset \text{int} C^s(T_\alpha^{-1}(z))$$

e se  $u \in C^u(z)$  (resp.  $u \in C^s(z)$ ) temos:

$$\frac{\|D_z T_\alpha u\|}{\|u\|} > \rho(r) > 1 \quad \left( \text{resp.} \quad \frac{\|D_z T_\alpha^{-1} u\|}{\|u\|} > \rho(r) > 1 \right)$$

com  $\lim_{r \rightarrow 0} \rho(r) = \infty$

Os cones  $C^u$  e  $C^s$  são análogos àqueles usados no capítulo 3 para provar o teorema A. A diferença aqui é que podemos garantir sua preservação para além da vizinhança de pontos normais.

---

## 5.2 Conjuntos hiperbólicos $\epsilon$ -densos

Nesta seção provaremos o teorema [C](#) mostrando a existência de um subconjunto  $\Omega_1$  de  $\Omega$  de interior não vazio, contendo  $(1, 0)$  em seu fecho e tal que se  $(\delta, r) \in \Omega_1$  então o bilhar  $\mathcal{B}_{\delta, r}$  admite um conjunto  $\Lambda_{\delta, r}$   $\epsilon(\delta, r)$ -denso em  $M_\alpha$ , uniformemente hiperbólico pela aplicação de primeiro retorno ao obstáculo  $T_\alpha$  e cuja restrição  $T_\alpha : \Lambda_{\delta, r} \rightarrow \Lambda_{\delta, r}$  é conjugada a um subshift no espaço das seqüências simbólicas de  $m(\delta, r)$  símbolos. Além disso  $\lim_{(\delta, r) \rightarrow (1, 0)} \epsilon(\delta, r) = 0$  e  $\lim_{(\delta, r) \rightarrow (1, 0)} m(\delta, r) = \infty$ . O conjunto  $\Omega_1$  é um subconjunto de  $\Omega_0$  como definido na seção anterior e os conjuntos hiperbólicos  $\Lambda_{\delta, r}$  são construídos em torno de pontos normais contidos em  $H_{\delta, r}$ . Portanto, iniciamos tratando da existência e transversalidade de pontos normais em  $H_{\delta, r}$  com  $(\delta, r) \in \Omega_0$ .

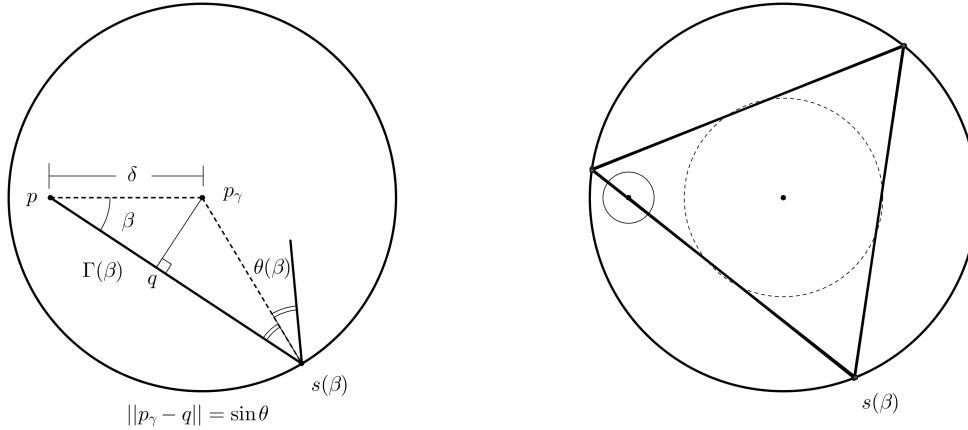


Figura 5.8:

**Lema 5.3.** *Para todo  $\delta$  existe um conjunto  $J_\delta$  denso em  $[0, 2\pi)$  tal que para todo  $\beta \in J_\delta$  existe  $r(\beta)$  tal que o ponto  $x = (\beta, 0) \in M_\alpha$  é um ponto normal para todo bilhar  $\mathcal{B}_{\delta, r}$  com  $r < r(\beta)$ .*

**Prova:** Considere a construção na figura [5.8](#): Fixando um  $\delta$  temos associado a cada  $\beta \in [0, 2\pi)$  um único segmento de reta  $\Gamma_\delta(\beta)$  que forma ângulo  $\beta$  com o vetor  $p - p_\gamma$  e cujos extremos são o centro  $p$  do obstáculo e um ponto do bordo externo  $\gamma$  parametrizado por  $s_\delta(\beta) \in [0, 2\pi)$ . Denotaremos por  $\theta_\delta(\beta)$  o

---

ângulo entre o vetor normal a  $\gamma$  no ponto  $\gamma(s(\beta))$  e a reflexão de  $\Gamma_\delta(\beta)$  com respeito a este vetor. Note que  $z_\delta(\beta) = (s_\delta(\beta), \theta_\delta(\beta))$  e é um ponto da curva  $\ell_\delta^+ \subset M_\gamma$  e temos:

$$\theta_\delta(\beta) = -\arcsin(\delta \sin \beta)$$

Denotando por  $I' = \{\theta \in I : \theta/\pi \in \mathbb{Q}\}$  o subconjunto dos ângulos  $\theta \in I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  múltiplos racionais de  $\pi$  definimos:

$$J_\delta := \{\beta \in [0, 2\pi) : \theta_\delta(\beta) \in I'\}$$

O conjunto  $I'$  é denso em  $I$  e função  $\beta \mapsto \theta_\delta(\beta)$  é contínua portanto,  $J_\delta$  é denso em  $[0, 2\pi)$  e se  $\beta \in J_\delta$  então  $\theta_\delta(\beta)$  é um múltiplo racional de  $\pi$  donde  $z_\delta(\beta)$  é um ponto periódico por  $F$ , logo existe  $n$  tal que  $F^n(z_\delta(\beta)) = (z_\delta(\beta))$ , e como  $F(\ell_\delta^-) = \ell_\delta^+$  temos que  $z_\delta(\beta) \in F^{-n+1}(\ell_\delta^-) \cap \ell_\delta^+$ . Segue então do lema 4.3 que existe  $r_\delta(\beta)$  tal que se  $r < r_\delta(\beta)$  então  $x = (\beta, 0)$  é um ponto normal do bilhar  $\mathcal{B}_{\delta,r}$ .  $\square$

**Lema 5.4.** *Se  $(\delta, r) \in \Omega_0$  então todo ponto normal em  $H_{\delta,r}$  é transversal.*

**Prova:** de fato se  $(\delta, r) \in \Omega_0$ ,  $x_0 \in H_{\delta,r}$  um ponto normal qualquer e  $u_0 \in \mathbf{T}_{x_0}M_\alpha$  é um vetor tangente a  $\ell_0$ , temos  $u_0 \in \partial C^+(x_0)$  donde, pela proposição 5.2,  $u_1 = D_{x_0}T.u_0 \in C^u(T_\alpha(x_0))$  é um vetor de inclinação positiva. Logo, a imagem  $T_\alpha(x_0)$  é um ponto de interseção transversal entre um segmento de  $\ell_0$  e um segmento de  $T_\alpha(\ell_0)$ , ou seja, o ponto normal  $x_0$  é transversal.  $\square$

Combinando os lemas 5.3 e 5.4 obtemos o seguinte:

**Proposição 5.5.** *Para todo  $\epsilon > 0$  existe uma constante  $\delta_\epsilon$  tal que para todo  $\delta \in [\delta_\epsilon, 1)$  existe  $r_\epsilon^0(\delta)$  tal que se  $r < r_\epsilon^0(\delta)$  então o bilhar  $\mathcal{B}_{\delta,r}$  admite um conjunto de  $m > \frac{4\pi}{\epsilon}$  pontos normais transversais*

$$X_\delta(\epsilon) = \{x_1 = (\beta_1, 0), \dots, x_m = (\beta_m, 0)\} \subset H_{\delta,r}$$

tal que  $|\beta_1 - \beta_m| < \frac{\epsilon}{2}$  e  $|\beta_i - \beta_{i+1}| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$ .

---

**Prova:** Recordando que  $H_{\delta,r} = \{(\beta, \varphi) : |\delta \sin(\beta \pm \varphi) + r \sin \varphi| \leq \delta^2\}$  temos:

$$x = (\beta, 0) \in H_{\delta,r} \Leftrightarrow \beta \in L_\delta := \{\beta \in [0, 2\pi) : |\sin \beta| \leq \delta\}$$

O complementar  $[0, 2\pi) \setminus L_\delta$  é união dos intervalos abertos

$$D_1 = (-\pi + \arcsin(\delta), -\arcsin(\delta)) \quad e \quad D_2 = (\arcsin(\delta), \pi - \arcsin(\delta))$$

Uma vez que  $\lim_{\delta \rightarrow 1} \arcsin(\delta) = \frac{\pi}{2}$  temos que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta_\epsilon > 0.9$  tal que se  $\delta > \delta_\epsilon$  então  $D_1$  e  $D_2$  tem comprimentos menores que  $\frac{\epsilon}{2}$ .

Fixando  $\epsilon > 0$  e  $\delta \in [\delta_\epsilon, 1)$  seja  $K_\delta = J_\delta \cap L_\delta$  onde  $J_\delta$  é como no lema 5.4. Uma vez que  $J_\delta$  é denso em  $[0, 2\pi)$  temos  $K_\delta$  denso em  $L_\delta$ . Considerando este fato e observando que  $[0, 2\pi) \setminus L_\delta$  é a união de intervalos de comprimento menor que  $\frac{\epsilon}{2}$  podemos escolher um conjunto

$$C_\delta := \{\beta_1, \dots, \beta_m\} \subset K_\delta \text{ tal que } |\beta_1 - \beta_m| < \frac{\epsilon}{2} \text{ e } |\beta_i - \beta_{i+1}| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

Note que as desigualdades acima implicam que  $m > \frac{4\pi}{\epsilon}$  uma vez que  $C_\delta \subset [0, 2\pi)$ . Pelo lema 5.3, para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$  existe  $r(\beta_i)$  tal que  $x_i = (\beta_i, 0)$  é ponto normal para todo  $\mathcal{B}_{\delta,r}$  com  $r < r_i$ . Portanto  $X_\delta(\epsilon) = \{x_1, \dots, x_m\}$  é um conjunto de pontos normais para todo bilhar  $\mathcal{B}_{\delta,r}$  com  $r < \inf_{\beta \in C_\delta} \{r(\beta)\}$ . Como  $C_\delta \subset L_\delta$  temos  $x_i \in H_{\delta,r}$ . Portanto, definindo:

$$r_\epsilon^0(\delta) = \min \left\{ \inf_{\beta \in C_\delta} \{r(\beta)\}, \frac{\delta - \delta^2}{10} \right\}$$

temos  $(\delta, r) \in \Omega_0$  para todo  $r < r_\epsilon^0(\delta)$  e, pelo lema 5.4,  $X_\delta(\epsilon)$  é um conjunto de pontos normais transversais para todo bilhar  $\mathcal{B}_{\delta,r}$  com  $r \leq r_\epsilon^0(\delta)$ .  $\square$

Não podemos garantir que os pontos normais de um conjunto  $X_\delta(\epsilon)$ , como construído acima, sejam dois a dois não alinhados. Considere como exemplo a trajetória na figura 5.8 cujo ponto normal correspondente é alinhado a sua própria imagem por  $T_\alpha$ . Para o que se segue será útil recordar a notação  $i \sim j$  que indica que  $x_i \in X_\delta(\epsilon)$  é não alinhado a  $x_j \in X_\delta(\epsilon)$  e considerar em



---

$\Sigma_m := \{1, \dots, m\}^{\mathbb{Z}}$  o subconjunto:

$$\Sigma_m^* = \{b \in \Sigma_m : b_i \sim b_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{Z}\} \quad (5.18)$$

**Proposição 5.6.** *Para todo  $\epsilon > 0$  e  $\delta \in [\delta_\epsilon, 1)$  existe  $r_\epsilon^1(\delta) \leq r_\epsilon^0(\delta)$  tal que todo bilhar  $\mathcal{B}_{\delta,r}$  com  $0 < r < r_\epsilon^1(\delta)$  admite um conjunto  $\Lambda_{\delta,r}$   $\epsilon$ -denso em  $M_\alpha$  uniformemente hiperbólico para  $T_\alpha$  e tal que a restrição  $T_\alpha : \Lambda_{\delta,r} \rightarrow \Lambda_{\delta,r}$  é conjugada a  $\sigma : \Sigma_m^* \rightarrow \Sigma_m^*$ .*

**Prova:** Fixando  $\delta \in [\delta_\epsilon, 1)$  consideremos a família a um parâmetro  $\{\mathcal{B}_{\delta,r}\}_{r < r_0}$  onde  $r_0 = r_\epsilon^0(\delta)$ . Todo bilhar nesta família admite um conjunto de pontos normais  $X_\delta(\epsilon)$  com as propriedades descritas na proposição 5.5. Todo  $x_i = (\beta_i, 0) \in X_\delta(\epsilon)$  é transversal portanto para  $r \leq r_0$  suficientemente pequeno temos que  $x_i$  está contido na interseção de um retângulo estável  $U_i^-$  com um retângulo instável  $U_j^+$ . Assim, pela observação 3.25, existe  $r_\epsilon^1(\delta)$  tal que se  $r < r_\epsilon^1(\delta)$  então existe um compacto

$$\Lambda_{\delta,r} \subset \bigcup \text{int} U_i^-$$

uniformemente hiperbólico para a aplicação  $T_{\alpha,r}$ . Além disso a existe um homeomorfismo  $S_{\delta,r} : \Sigma_m^* \rightarrow \Lambda_{\delta,r}$  tal que  $T_{\alpha,r} \circ S_{\delta,r}(b) = S_{\delta,r} \circ \sigma(b)$  para toda  $b \in \Sigma_m^*$ .

Podemos tomar  $r_\epsilon^1(\delta)$  pequeno o suficiente de forma que  $\Lambda_{\delta,r}$  seja  $\epsilon$ -denso em  $M_\alpha$ . Para provar isso recordemos que os retângulos  $U_i^\pm$  dependem do parâmetro  $r$  e temos:

$$\lim_{r \rightarrow 0} U_i^\pm = G_{x_i}^\pm = \text{Graf}(g_{x_i}^\pm) \quad g_{x_i}(\varphi) = \beta_i \pm \varphi, \quad \varphi \in I$$

Além disso, para todo par  $(i, j) \in \{1, \dots, m\}^2$ , tal que  $i \sim j$  temos que  $G_{x_i}^-$  intersecta  $G_{x_j}^+$  transversalmente e em um único ponto  $z_{i,j}$  do interior de  $M_\alpha$ , o retângulo  $U_i^+ = T(U_i^-)$  atravessa o retângulo  $U_j^-$  e a interseção  $\Delta_{[i,j]} = U_i^+ \cap U_j^-$  é um compacto conexo contido no interior de  $M_\alpha$ . Observando que  $\lim_{r \rightarrow 0} U_i^\pm = G_{x_i}^\pm$  temos  $\lim_{r \rightarrow 0} \Delta_{i,j} = z_{i,j}$  o que implica que podemos definir

---

$r_\epsilon^1(\delta)$  pequeno o suficiente de forma que se  $r < r_\epsilon^1(\delta)$  então todo conjunto  $\Delta_{[i,j]}$  com  $i \sim j$  está contido em um bola aberta de centro  $z_{i,j}$  e raio menor que  $\frac{\epsilon}{4}$ .

Observemos que  $\Delta_{[i,j]}$  com  $i \sim j$  intersecta o conjunto  $\Lambda_{\delta,r}$ , de fato  $\Delta_{[i,j]}$  contem todos os pontos  $z \in \Lambda_{\delta,r}$  codificados por sequências simbólicas  $b = \dots b_{-1}.b_0.b_1.b_2\dots$  tais que  $b_{-1} = i$  e  $b_0 = j$ . Tomando  $r < r_\epsilon^1(\delta)$  temos que todo ponto  $z_0 \in \Delta_{[i,j]} \cap \Lambda_{\delta,r}$  dista  $\frac{\epsilon}{4}$  de  $z_{i,j}$ , portanto para concluir a prova é suficiente provar que o conjunto  $Z_\delta = \{z_{ij}\}$  das interseções  $G_{x_i}^+ \cap G_{x_i}^-$  é  $\frac{3\epsilon}{4}$  denso em  $M_\alpha$ , de fato, neste caso teremos que para todo  $z \in M_\alpha$  existe  $z_{i,j} \in Z_\delta$  tal que  $d(z, z_{i,j}) < \frac{3\epsilon}{4}$  e  $y \in \Lambda_{\delta,r}$  tal que  $d(y, z_{i,j}) < \frac{\epsilon}{4}$ , ou seja para todo  $z \in M_\alpha$  existe  $y \in \Lambda_{\delta,r}$  tal que  $d(z, y) < \frac{\epsilon}{4} + \frac{3\epsilon}{4} = \epsilon$  o que mostra que  $\Lambda_{\delta,r}$  é  $\epsilon$ -denso em  $M_\alpha$ .

Pela definição das funções  $g_{x_i}^+$  e  $g_{x_j}^-$ , temos que  $z_{i,j} = G_i^+ \cap G_j^- = (\beta_{ij}, \varphi_{ij})$  sendo:

$$\beta_{ij} = \frac{\beta_i + \beta_j}{2} \quad e \quad \varphi_{ij} = \frac{\beta_i - \beta_j}{2} \quad (\text{mod } 2\pi) \quad (5.19)$$

Como  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\} = \pi_1(X_{\delta,r}(\epsilon))$  é um conjunto  $\frac{\epsilon}{2}$ -denso em  $[0, 2\pi)$ , para todo  $z = (\beta, \varphi) \in M_\alpha$  existe um par  $(i_0, j_0) \in \{1, \dots, m\}^2$  tal que:

$$|(\beta - \varphi) - \beta_{i_0}| < \frac{\epsilon}{4} \quad e \quad |(\beta + \varphi) - \beta_{j_0}| < \frac{\epsilon}{4} \quad (\text{mod } 2\pi) \quad (5.20)$$

donde

$$|\beta - \beta_{ij}| = \left| \beta - \left( \frac{\beta_{i_0} + \beta_{j_0}}{2} \right) \right| = \left| \frac{\beta - \beta_{i_0} - \varphi}{2} + \frac{\beta - \beta_{j_0} + \varphi}{2} \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad (5.21)$$

$$|\varphi - \varphi_{ij}| = \left| \varphi - \left( \frac{\beta_{i_0} - \beta_{j_0}}{2} \right) \right| = \left| \frac{\beta - \beta_{i_0} - \varphi}{2} + \frac{\beta - \beta_{j_0} + \varphi}{2} \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad (5.22)$$

e

$$d(z, z_{i,j}) = \left[ \left( \beta - \left( \frac{\beta_{i_0} + \beta_{j_0}}{2} \right) \right)^2 + \left( \varphi - \left( \frac{\beta_{i_0} - \beta_{j_0}}{2} \right) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} < \frac{\sqrt{2}\epsilon}{2} < \frac{3\epsilon}{4}$$

Portanto  $Z_\delta$  é um conjunto  $\frac{3\epsilon}{4}$ -denso em  $M_\alpha$  o que conclui a prova.  $\square$

---

---

**Provado Teorema C:** Dado  $\epsilon > 0$  sejam  $\delta_\epsilon$  como na proposição 5.5,  $r_\epsilon^1(\delta)$  como na proposição 5.6 e no espaço de parâmetros  $\Omega$  consideremos o conjunto:

$$\Omega_1(\epsilon) := \{(\delta, r) : \delta_\epsilon < \delta < 1 \text{ e } 0 < r < r_\epsilon^1(\delta)\}$$

Recordando que  $0 < r_\epsilon^1(\delta) < \frac{\delta - \delta^2}{10}$  temos  $\Omega_1(\epsilon)$  é um subconjunto de  $\Omega_0$  que tem interior não vazio e contem  $(1, 0)$  em seu fecho. Assim sendo, a união:

$$\Omega_1 := \bigcap_{\epsilon} \Omega_1(\epsilon) \subset \Omega_0$$

tem interior não vazio e contem  $(1, 0)$  em seu fecho. Denotando por  $m(\epsilon)$  é o número de pontos normais no conjunto  $X_\delta(\epsilon)$  associado ao bilhares  $\mathcal{B}_{\delta,r}$  com  $r < r_\epsilon^1(\delta)$  definimos em  $\Omega_1(\epsilon)$  as funções  $(\delta, r) \mapsto \epsilon(\delta, r)$  e  $(\delta, r) \mapsto m(\delta, r)$  por:

$$\epsilon(\delta, r) := \inf\{\epsilon : (\delta, r) \in \Omega_1(\epsilon)\} \quad (5.23)$$

$$m(\delta, r) := \sup\{m(\epsilon) : (\delta, r) \in \Omega_1(\epsilon)\} \quad (5.24)$$

Da definição de  $\delta_\epsilon$  temos que  $\epsilon \mapsto \delta_\epsilon$  é crescente donde  $\epsilon(\delta, r) > 0$  para todo  $(\delta, r)$  e  $\epsilon(\delta, r) \rightarrow 0$  quando  $(\delta, r) \rightarrow (1, 0)$ . Observando que  $m(\epsilon) > \frac{4\pi}{\epsilon}$  temos que  $m(\delta, r) \rightarrow \infty$  quando  $(\delta, r) \rightarrow (1, 0)$ . Para concluir a prova observemos que, pela proposição 5.6, todo bilhar  $\mathcal{B}_{\delta,r}$  com  $(\delta, r) \in \Omega_1$  admite um conjunto  $\Lambda_{\delta,r}$  uniformemente hiperbólico por  $T_\alpha$ , que é  $\epsilon(\delta, r)$ -denso em  $M_\alpha$  e cuja restrição  $T_\alpha : \Lambda_{\delta,r} \rightarrow \Lambda_{\delta,r}$  é conjugada a um subshift de  $m(\delta, r)$  símbolos.  $\square$

### 5.3 Pontos periódicos normais tangentes

Nesta seção mostramos a existência de um subconjunto  $\tilde{\Omega} \subset \Omega$  que tem  $(1, 0)$  como ponto de acumulação e tal que para todo  $(\delta, r) \in \tilde{\Omega}$  o ponto  $(-\pi/2, 0) \in M_\alpha$  é um ponto normal tangente (não transversal) para o bilhar  $\mathcal{B}_{\delta,r}$  (que descrece a dinâmica na mesa  $Q_{\delta,r}$ ). Também estudamos as bifurcações da dinâmica em torno de  $(-\pi/2, 0)$  ao variar o parâmetro  $\delta$ .

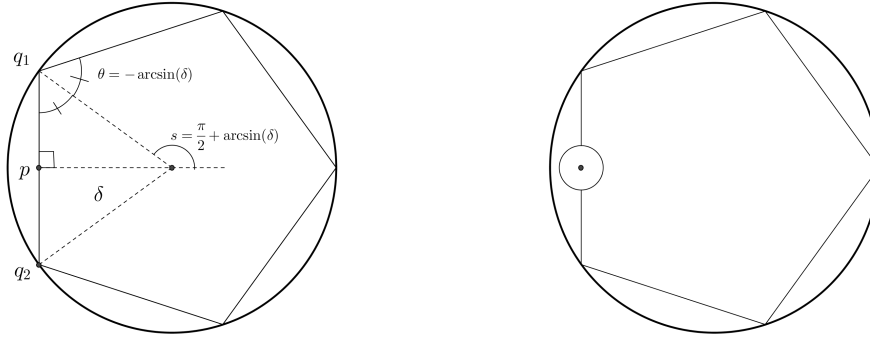


Figura 5.9:

**Proposição 5.7.** *Existe um subconjunto  $\tilde{\Omega} \subset \Omega$  contendo  $(1, 0)$  em seu fecho e tal que  $(\delta, r) \in \tilde{\Omega}$  então  $x_0 = (-\frac{\pi}{2}, 0) \in M_\alpha \setminus H_{\delta, r}$  é um ponto normal tangente do bilhar  $\mathcal{B}_{\delta, r}$ .*

**Prova:** Em uma mesa  $Q_{\delta, r}$  seja  $C_\delta$  a corda passando por  $p$  e perpendicular ao vetor  $p - p_\gamma$ . Os extremos de  $C_\delta$  são os pontos  $q_1$  e  $q_2$  de  $\gamma$  parametrizados respectivamente por  $\pi/2 + v(\delta)$  e  $-\pi/2 - v(\delta)$  onde  $v(\delta) = \arcsin(\delta)$  e a reflexão de  $C_\delta$  com respeito ao vetor normal  $\mathbf{n}(q_1)$  forma ângulo  $-v(\delta)$  com  $\mathbf{n}(q_1)$ -como ilustrado na figura 5.9(1) para o caso  $v(\delta) = \frac{3\pi}{10}$ .

Se  $v(\delta)$  é um múltiplo racional de  $\pi$ , i.e  $\frac{v(\delta)}{\pi} \in \mathbb{Q}$ , então  $C_\delta$  é uma aresta de uma trajetória periódica  $\Gamma_\delta$  do bilhar no círculo donde, pelos mesmos argumentos usados no lema 5.3, temos que existe  $\tilde{r}(\delta)$  tal que se  $r < \tilde{r}(\delta)$  então  $\Gamma_\delta$  contem a trajetória de um ponto normal do bilhar  $\mathcal{B}_{\delta, r}$ . Mais precisamente temos que se  $v(\delta)/\pi \in \mathbb{Q}$  então  $x_0 = (-\pi/2, 0)$  é um ponto normal para o bilhar  $\mathcal{B}_{\delta, r}$  com  $r < \tilde{r}(\delta)$  tal que  $T_\alpha(x_0) = \hat{x}_0 = (\pi/2, 0)$ . Definimos

$$\tilde{\Omega} := \left\{ (\delta, r) \in \Omega : \frac{v(\delta)}{\pi} \in \mathbb{Q} \text{ e } 0 < r < \tilde{r}(\delta) \right\}$$

Seja  $(\delta_0, r_0) \in \tilde{\Omega}$ , das equações 5.2 e 5.1 que definem respectivamente as

---

restrições  $T : M_\alpha \rightarrow M_\alpha^+$  e  $T : M_\alpha^- \rightarrow M_\alpha$  segue que:

$$T(x_0) = (\pi/2 + v(\delta_0), -v(\delta_0)) \in \ell_{\delta_0}^+ \quad e \quad T^{-1}(\hat{x}_0) = (-\pi/2 - v(\delta_0), -v(\delta_0)) \in \ell_{\delta_0}^-$$

Das propriedades das curvas  $\ell_\delta^\pm$  descritas na seção 5.1 temos que  $T(x_0)$  é um ponto de tangência entre  $\ell_{\delta_0}^+$  e  $\{\theta = -v(\delta_0)\}$  e  $T^{-1}(\hat{x}_0)$  é um ponto de tangência entre  $\ell_{\delta_0}^-$  e  $\{\theta = -v(\delta_0)\}$  como ilustrado na figura 5.11 para o caso  $v(\delta_0) = \frac{\pi}{6}$ . Note que se  $n_\alpha(x_0) = n$  então

$$T^{-1}(\hat{x}_0) = F^{n-2} \circ T(x_0)$$

Assim, como curva  $\{\theta = -v(\delta_0)\}$  é invariante por  $F$  temos que  $T(x_0)$  é um ponto de tangência entre  $\ell_{\delta_0}^+$  e  $F^{-n+2}(\ell_{\delta_0}^-)$  donde  $x_0$  é um ponto de tangência entre  $\ell_0$  e um segmento de  $T_\alpha^{-1}(\ell_0)$ , ou seja,  $x_0$  é um ponto normal tangente.

Pela continuidade de  $\delta \mapsto v(\delta) = \arcsin(\delta)$  e densidade do conjunto  $\mathbb{Q} \cap [0, 1)$  em  $[0, 1)$ , temos  $\{\delta : \frac{v(\delta)}{\pi} \in \mathbb{Q}\}$  denso em  $[0, 1)$ . Pela definição de  $\tilde{\Omega}$ , se  $(\delta_0, r_0) \in \tilde{Q}$  então  $(\delta_0, r) \in \tilde{\Omega}$  para todo  $r \in (0, r_0]$ . Logo, para todo  $\epsilon > 0$  temos  $\tilde{\Omega} \cap \Omega(\epsilon) \neq \emptyset$  onde  $\Omega_1(\epsilon)$  é como definido na seção anterior. Segue dessas observações que  $(1, 0)$  pertence ao fecho de  $\tilde{\Omega}$ .  $\square$

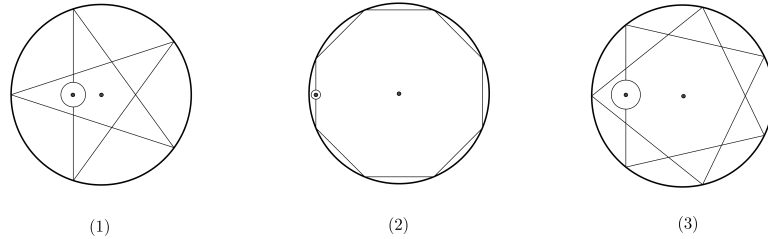


Figura 5.10: Trajetórias de pontos normais tangentes em bilhares  $\mathcal{B}_{\delta,r}$  com  $(\delta, r) \in \tilde{\Omega}$

Para ilustrar o que se segue, consideremos o caso particular de  $(\delta_0, r_0) \in \tilde{\Omega}$  onde  $\delta_0 = 0.5$ , ou seja  $v(\delta_0) = \frac{\pi}{6}$ . Neste caso  $x_0 = (-\frac{\pi}{2}, 0)$  é um ponto normal tangente do bilhar  $\mathcal{B}_{\delta_0, r_0}$  com tempo de retorno  $n_\alpha(x_0) = 4$ . Na figura 5.12

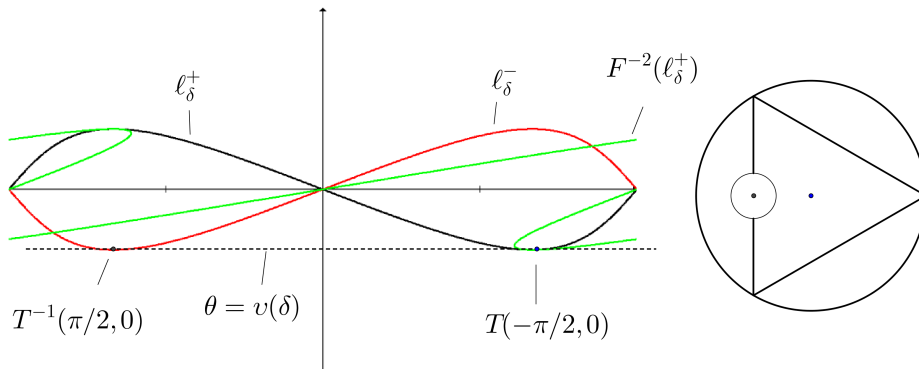


Figura 5.11:

ilustramos a trajetória do ponto normal  $x_0$  e as curvas  $\ell_{\delta_0}^{\pm}$  e  $F^{-2}(\ell_{\delta_0}^{\pm})$  em  $M_{\gamma}$ . Note que  $F^{-2}(\ell_{\delta_0}^{\pm})$  tangencia  $\ell_{\delta_0}^{\pm}$  no ponto  $T(x_0)$ . Variando  $\delta$  em um intervalo contendo  $\delta_0$  temos as situações descritas na figura 5.12. Se  $\delta_1 < \delta_0$  então a curva  $F^{-2}(\ell_{\delta_1}^{\pm})$  deixa de tangenciar  $\ell_{\delta_1}^{\pm}$  e intersecta transversalmente esta curva em um único ponto próximo a  $x_1$ , portanto o bilhar  $\mathcal{B}_{\delta_1, r}$  admite um ponto normal transversal próximo a  $x_0$ . Se  $\delta_1 > \delta_0$  curva  $F^{-2}(\ell_{\delta_1}^{\pm})$  deixa de tangenciar  $\ell_{\delta_1}^{\pm}$  e intersecta transversalmente  $\ell_{\delta_1}^{\pm}$  em exatamente três pontos próximos a  $x_1$ , logo o bilhar  $\mathcal{B}_{\delta_1, r}$  admite exatamente três pontos normais transversais próximos a  $x_0$ .

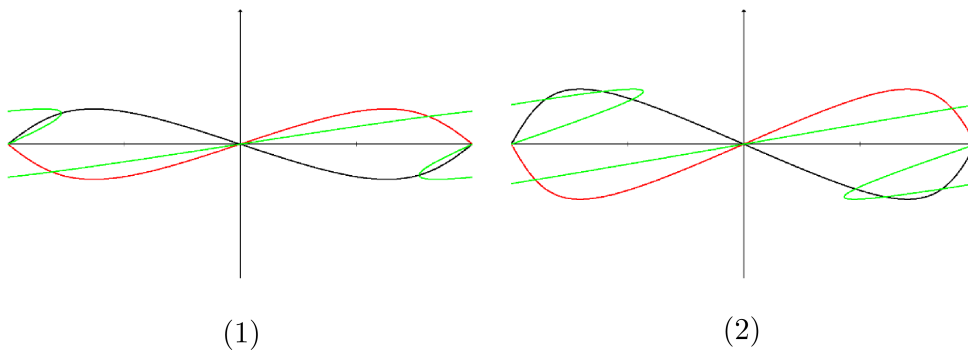


Figura 5.12:

---

A situação particular descrita acima ocorre em geral, isso é o que diz a seguinte proposição.

**Proposição 5.8.** *Para todo  $(\delta_0, r_0) \in \tilde{\Omega}$  existe um aberto  $V \subset M_\alpha$  contendo  $(-\pi/2, 0)$  e um aberto  $D \subset \Omega$  contendo  $(\delta_0, r_0)$  tais que se  $(\delta_1, r) \in D$  e  $\delta_1 < \delta_0$  então o bilhar  $\mathcal{B}_{\delta_1, r}$  admite um único ponto normal trasnversal em  $V$  se no entanto  $\delta_1 > \delta_0$  então  $\mathcal{B}_{\delta_1, r}$ ,  $r < r_0$  admite exatamente três pontos normais transversais em  $V$ .*

Para definir os conjuntos  $V$  e  $D$  referidos na proposição acima fixemos  $(\delta_0, r_0) \in \tilde{\Omega}$ , como a trajetória de  $x_0$  não tangencia o obstáculo temos que existe um aberto  $U \subset M_\alpha$  contendo  $x_0$  e restrita ao qual a aplicação  $T_\alpha$  é diferenciável e todo ponto  $z \in U$  tem tempo de retorno  $n(z) = n_\alpha(x_0) = n$ . O bordo  $\partial U$  é a união de segmentos das curvas componentes do conjunto do singularidades  $\partial\mathcal{S}_{\pm n} = \bigcup_{i=-n}^n T(\partial M_\alpha)$ . Mais precisamente, temos  $\partial U \subset T^{-1}(\partial M_\alpha^+) \cap T^{-n+2}(\partial M_\alpha^-)$  e recordando que

$$\partial M_\alpha^\pm = \{(s, \theta) \in M_\gamma : |\sin \theta + \delta \sin(s + \theta)| = r\}$$

temos que se  $(\delta, r)$  está suficientemente próximo de  $(\delta_0, r_0)$  então existe uma berto  $V \subset U$  contendo  $(-\pi/2, 0)$  e restrita ao qual a aplicação  $T_\alpha$  associada ao bilhar  $\mathcal{B}_{\delta, r}$  é diferenciável e todo ponto  $z \in V$  tem tempo de retorno  $n_\alpha(z) = n$ . Definimos então:

$$D = D(\delta_0, r_0) = (\delta_0 - \nu, \delta_0 + \nu) \times (0, r_0)$$

tomando  $\nu > 0$  suficientemente pequeno de forma que a aplicação  $T_\alpha$  associada a  $\mathcal{B}_{\delta, r}$ ,  $(\delta, r) \in D$  seja diferenciável em  $V$ . Um bilhar  $\mathcal{B}_{\delta, r}$ ,  $(\delta, r) \in D$  admite um ponto normal em  $V$  se e só se  $T_\alpha^{-1}(\ell_0) \cap \ell_0 \cap V \neq \emptyset$ .

Alternativamente, observando que  $T_\alpha(z) = T \circ F^{n-2} \circ T(z)$  para todo  $z \in V$ , temos que  $\mathcal{B}_{\delta, r}$  admite um ponto normal em  $V$  se e só se :

$$F_\gamma^{-n+2}(\ell_\delta^-) \cap \ell_\delta^+ \cap V^+ \neq \emptyset \quad \text{onde} \quad V^+ = T(V) \quad (5.25)$$

---

Recordemos que  $\ell_\delta^+ = T(\ell_0)$  e  $\ell_\delta^- = T^{-1}(\ell_0)$  são gráficos respectivamente de funções  $\theta_\delta^+(s)$  e  $\theta_\delta^-(s)$  definidas pelas equações:

$$\sin \theta_\delta^+(s) + \delta \cos(\theta_\delta^+(s) + s) = 0 \quad (5.26)$$

$$\sin \theta_\delta^-(s) + \delta \cos(\theta_\delta^-(s) - s) = 0 \quad (5.27)$$

Observando que  $F^k(s, \theta) = (s + k(\pi - 2\theta), \theta)$  e considerando 5.27 obtemos:

$$\begin{aligned} F_\gamma^{n-2}(s, \theta) \in \ell_\delta^- &\Leftrightarrow \sin \theta + \delta \sin(\theta - s - (n-2)(\pi - 2\theta)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin \theta + \delta \sin(-\theta - s + \pi - (n-1)(\pi - 2\theta)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin \theta + \delta \sin(\theta + s + (n-1)(\pi - 2\theta)) = 0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

Como  $(\delta_0, r_0) \in \tilde{\Omega}$  temos que  $F^{-n+2}(\ell_{\delta_0}^+)$  tangencia  $\ell_{\delta_0}^+$  no ponto  $(\pi/2 + v(\delta_0), -v(\delta_0))$  donde podemos tomar  $\nu > 0$  pequeno o suficiente de forma que para todo  $\delta \in (\delta_0 - \nu, \delta_0 + \nu)$  a curva  $F^{-n+2}(\ell_\delta^-) \cap V^+$  seja o gráfico de uma função  $\hat{\theta}_\delta : J \rightarrow I$  definida pela equação:

$$\sin \hat{\theta}_\delta(s) + \delta \sin(s + \hat{\theta}_\delta(s) + (n-1)(\pi - 2\hat{\theta}_\delta(s))) = 0 \quad (5.29)$$

com  $s$  variando em um intervalo aberto  $J \subset [0, \pi]$  contendo  $\pi/2 + v(\delta_0)$ .

No que se segue usaremos as seguintes notações:

$$L_\delta^+ = \text{Graf}(\theta_\delta^+), \quad \hat{L}_\delta = \text{Graf}(\hat{\theta}_\delta) \quad e \quad L_\delta^- = F^{n-2}(\hat{L}_\delta) \quad (5.30)$$

Na figura 5.13 ilustramos  $L_{\delta_0}^+, L_{\delta_0}^-, \hat{L}_{\delta_0}$ . Tomamos o comprimento do intervalo  $J$  pequeno o suficiente de forma que estas curvas estejam contidas na faixa  $[0, 2\pi) \times [-\frac{\pi}{2}, -\arcsin(\delta_0^2))$ . Tomamos  $\nu > 0$  pequeno o suficiente de forma que para todo  $\delta \in [\delta_0 - \nu, \delta_0 + \nu]$  as  $L_\delta^+, L_\delta^-, \hat{L}_\delta$  também estejam contidas nesta faixa. Os dois lemas a seguir descrevem propriedades das curvas  $L_\delta^+$  e  $\hat{L}_\delta$ .

**Lema 5.9.** *Para todo  $\delta \in [\delta_0 - \nu, \delta_0 + \nu]$  as funções  $\hat{\theta}_\delta(s)$  e  $\theta_\delta^+(s)$  tem pontos*



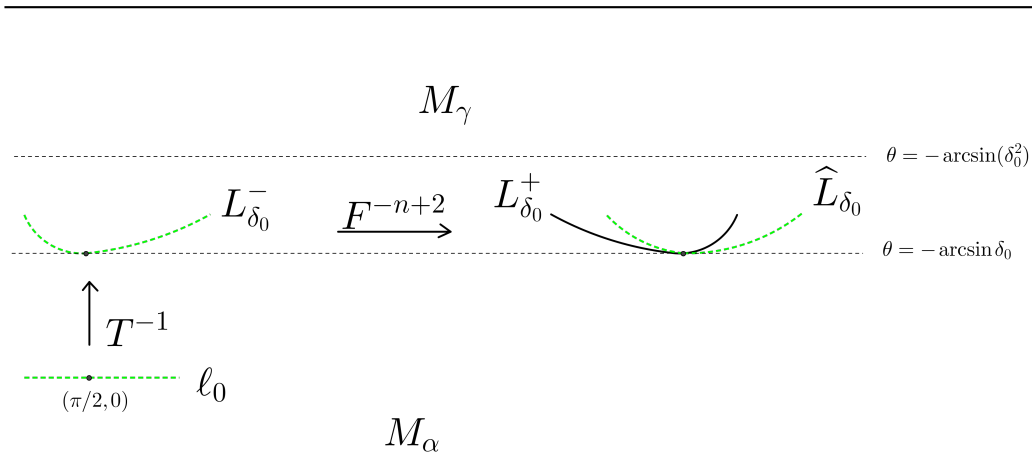


Figura 5.13:

de mínimo dados por respectivamente por:

$$\widehat{s}(\delta) = \frac{\pi}{2} + v(\delta) - (n-1)(\pi - 2v(\delta)) \quad e \quad s^+(\delta) = \frac{\pi}{2} + v(\delta)$$

**Prova:** Encurtaremos a notação escrevendo  $\zeta(\theta) = (n-1)(\pi - 2\theta)$ .  
Derivando com respeito a  $s$  as equações:

$$\sin \widehat{\theta}_\delta(s) + \delta \sin(s + \widehat{\theta}_\delta(s) + \zeta(\widehat{\theta}_\delta(s))) = 0 \quad (5.31)$$

$$\sin \theta_\delta^+(s) + \delta \cos(\theta_\delta^+(s) + s) = 0 \quad (5.32)$$

obtemos:

$$\cos \widehat{\theta}_\delta \cdot \frac{d\widehat{\theta}_\delta}{ds} + \delta \cos(s + \widehat{\theta}_\delta + \zeta(\widehat{\theta}_\delta)) \left( 1 + (3-2n) \frac{d\widehat{\theta}_\delta}{ds} \right) = 0 \quad (5.33)$$

$$\cos \theta_\delta^+ \cdot \frac{d\theta_\delta^+}{ds} + \delta \cos(s + \theta) \left( 1 + \frac{d\theta_\delta^+}{ds} \right) = 0 \quad (5.34)$$

---

como  $s \in J \subset [0, \pi]$  temos:

$$\frac{d\widehat{\theta}_\delta}{ds}(s) = 0 \Leftrightarrow \cos(s + \widehat{\theta}_\delta + \zeta(\widehat{\theta}_\delta)) = 0 \Leftrightarrow s + \widehat{\theta}_\delta + \zeta(\widehat{\theta}_\delta) = \frac{\pi}{2} \quad (5.35)$$

$$\frac{d\theta_\delta^+}{ds}(s) = 0 \Leftrightarrow \cos(s + \theta_\delta^+(s)) = 0 \Leftrightarrow s + \theta_\delta^+(s) = \frac{\pi}{2} \quad (5.36)$$

Substituindo  $s + \widehat{\theta}_\delta + \zeta(\widehat{\theta}_\delta) = \frac{\pi}{2}$  na equação 5.31 temos que  $\widehat{\theta}_\delta(s)$  tem ponto crítico

$$\widehat{s}(\delta) = \frac{\pi}{2} + v(\delta) - (n-1)(\pi - 2v(\delta)) \quad \text{com} \quad \widehat{\theta}_\delta(\widehat{s}) = -v(\delta) \quad (5.37)$$

Substituindo  $s + \theta_\delta^+ = \frac{\pi}{2}$  na equação 5.32 temos que  $\theta_\delta^+(s)$  tem ponto crítico

$$s^+(\delta) = \frac{\pi}{2} + v(\delta) \quad \text{com} \quad \theta_\delta^+(s^+) = -v(\delta) \quad (5.38)$$

Derivando as equação 5.33 e 5.34 com respeito a  $s$  obtemos:

$$\begin{aligned} -\sin \widehat{\theta}_\delta \left( \frac{d\widehat{\theta}_\delta}{ds} \right)^2 + \cos \widehat{\theta}_\delta \frac{d^2 \widehat{\theta}_\delta}{ds^2} - \delta \sin(s + \widehat{\theta}_\delta + \zeta) \left( 1 + (3-2n) \frac{d\widehat{\theta}_\delta}{ds} \right)^2 + \\ + \delta \cos(s + \theta_\delta^+ + \zeta) \left( (3-2n) \frac{d^2 \theta_\delta^+}{ds^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.39)$$

e

$$\begin{aligned} -\sin \theta_\delta^+ \left( \frac{d\theta_\delta^+}{ds} \right)^2 + \cos \theta_\delta^+ \frac{d^2 \theta_\delta^+}{ds^2} - \delta \sin(\theta_\delta^+ + s) \left( \frac{d\theta_\delta^+}{ds} + 1 \right)^2 + \\ + \delta \cos(\theta_\delta^+ + s) \frac{d^2 \theta_\delta^+}{ds^2} = 0 \end{aligned} \quad (5.40)$$

Considerando 5.39 e 5.40 acima e observando que

$$(\widehat{s} + \widehat{\theta}_\delta(\widehat{s}) + \zeta(\widehat{\theta}_\delta)) = (s^+ + \theta_\delta^+(s^+)) = \pi/2 \quad e \quad \frac{d\widehat{\theta}_\delta}{ds}(\widehat{s}) = \frac{d\theta_\delta^+}{ds}(s^+) = 0 \quad (5.41)$$

obtemos:

$$\sqrt{1-\delta^2} \cdot \frac{d^2\widehat{\theta}_\delta}{ds^2}(\widehat{s}) - \delta = 0 \Rightarrow \frac{d^2\widehat{\theta}_\delta}{ds^2}(\widehat{s}) = \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} > 0 \quad (5.42)$$

$$\sqrt{1-\delta^2} \cdot \frac{d^2\theta_\delta^+}{ds^2}(s^+) - \delta = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta_\delta^+}{ds^2}(s^+) = \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} > 0 \quad (5.43)$$

donde,  $\widehat{s}(\delta)$  é um ponto de mínimo para  $\widehat{\theta}_\delta(s)$  e  $s^+(\delta)$  é um ponto de mínimo para  $\theta_\delta^+(s)$ .  $\square$

**Lema 5.10.** *O ponto  $(s^+(\delta_0), -v(\delta_0))$  é uma tangência cúbica entre a curva  $L_{\delta_0}^+$  e a curva  $\widehat{L}_{\delta_0}$ .*

**Prova:** Segue do lema anterior que

$$\frac{d\theta_\delta^+}{ds}(s^+(\delta_0)) = \frac{d\widehat{\theta}_\delta}{ds}(\widehat{s}(\delta_0)) = 0 \quad e \quad \frac{d^2\theta_\delta^+}{ds^2}(s^+(\delta_0)) = \frac{d^2\widehat{\theta}_\delta}{ds^2}(\widehat{s}(\delta_0)) = \frac{\delta_0}{\sqrt{1-\delta_0^2}}$$

portanto, é suficiente mostrarmos que  $\frac{d^3\theta_\delta^+}{ds^3}(s^+(\delta_0)) \neq \frac{d^3\widehat{\theta}_\delta}{ds^3}(\widehat{s}(\delta_0))$ . Derivando a equação 5.39 com respeito a  $s$  obtemos:

$$\begin{aligned} & -\cos\widehat{\theta}_\delta \left( \frac{d\widehat{\theta}_\delta}{ds} \right)^3 - \sin\widehat{\theta}_\delta 2 \cdot \frac{d\widehat{\theta}_\delta}{ds} \cdot \left( \frac{d\widehat{\theta}_\delta}{ds} \right) - \sin\widehat{\theta}_\delta \frac{d\widehat{\theta}_\delta}{ds} \cdot \frac{d^2\widehat{\theta}_\delta}{ds^2} + \cos\widehat{\theta}_\delta \frac{d^3\widehat{\theta}_\delta}{ds^3} - \\ & -\delta \cos(s + \widehat{\theta}_\delta + \zeta) \left( 1 + (3-2n) \frac{d\theta_\delta^+}{ds} \right)^3 + \delta \cos(s + \widehat{\theta}_\delta + \zeta) \cdot \left( (3-2n) \frac{d^3\theta_\delta^+}{ds^3} \right) - \\ & -3\delta \sin(s + \widehat{\theta}_\delta + \zeta) \cdot \left( 1 + 3-2n \right) \frac{d\theta_\delta^+}{ds} \cdot \left( (3-2n) \frac{d^2\theta_\delta^+}{ds^2} \right) = (5.44) \end{aligned}$$

Derivando a equação 5.40 com respeito a  $s$  obtemos:

$$\begin{aligned} & -\cos\theta_\delta^+ \left( \frac{d\theta_\delta^+}{ds} \right)^3 - \sin\theta_\delta^+ 2 \cdot \frac{d\theta_\delta^+}{ds} \cdot \left( \frac{d\theta_\delta^+}{ds} \right) - \sin\theta_\delta^+ \frac{d\theta_\delta^+}{ds} \cdot \frac{d^2\theta_\delta^+}{ds^2} + \cos\theta_\delta^+ \frac{d^3\theta_\delta^+}{ds^3} \\ & -\delta \cos(s + \theta_\delta^+) \left( 1 + \frac{d\theta_\delta^+}{ds} \right)^3 - \delta \sin(s + \theta_\delta^+) 2 \cdot \left( 1 + \frac{d\theta_\delta^+}{ds} \right) \cdot \left( \frac{d^2\theta_\delta^+}{ds^2} \right) \\ & -\delta \sin(s + \theta_\delta^+) \cdot \left( 1 + \frac{d\theta_\delta^+}{ds} \right) \cdot \left( \frac{d^2\theta_\delta^+}{ds^2} \right) + \delta \cos(s + \theta_\delta^+) \cdot \left( \frac{d^3\theta_\delta^+}{ds^3} \right) = 0 \quad (5.45) \end{aligned}$$

---

Considerando as equações 5.45 e 5.45 acima e observando que:

$$(\widehat{s} + \widehat{\theta}_\delta(\widehat{s}) + \zeta(\widehat{\theta}_\delta)) = (s^+ + \theta_\delta^+(s^+) = \pi/2 \quad e \quad \frac{d\widehat{\theta}_\delta}{ds}(\widehat{s}) = \frac{d\theta_\delta^+}{ds}(s^+) = 0 \quad (5.46)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\delta^2} \cdot \frac{d^3\widehat{\theta}_\delta}{ds^3}(\widehat{\theta}_\delta) - \frac{3\delta^2}{\sqrt{1-\delta^2}} \cdot (3-2n) &\Rightarrow \frac{d^3\widehat{\theta}_\delta}{ds^3}(\widehat{s}) = \frac{3\delta^2(3-2n)}{1-\delta^2} \\ \sqrt{1-\delta^2} \cdot \frac{d^3\theta_\delta^+}{ds^3}(s^+) - \frac{3\delta^2}{\sqrt{1-\delta^2}} &= 0 \Rightarrow \frac{d^3\theta_\delta^+}{ds^3}(s^+) = \frac{3\delta^2}{1-\delta^2} \end{aligned}$$

donde  $\frac{d^3\theta_\delta^+}{ds^3}(s^+) \neq \frac{d^3\widehat{\theta}_\delta}{ds^3}(\widehat{s})$ .  $\square$

Estudando a dependência em  $\delta$  da posição relativa dos pontos de mínimo  $s^+(\delta)$  e  $\widehat{s}(\delta)$  provamos a seguir a proposição 5.8. Será útil reforçar que:

$$s^+(\delta) = \frac{\pi}{2} + v(\delta) \quad e \quad \widehat{s}(\delta) = \frac{\pi}{2} + v(\delta) - (n-1)(\pi + 2v(\delta)) \quad (5.47)$$

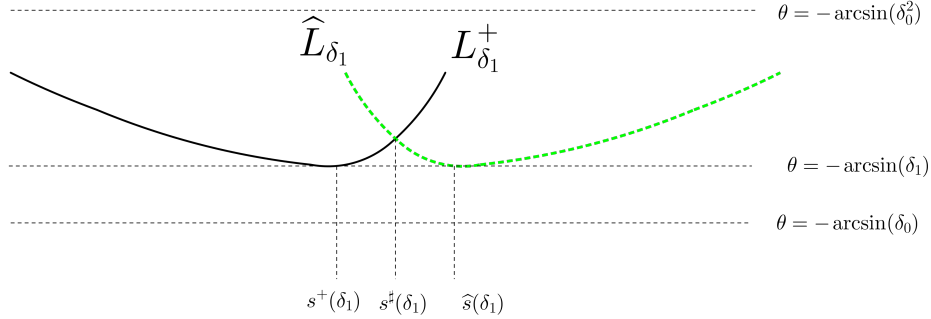
e como  $\widehat{s}(\delta_0) = s^+(\delta_0)$  temos  $(n-1)(\pi - 2v(\delta_0)) = 0$ . Observando que  $v(\delta) = \arcsin(\delta)$  é crescente no intervalo  $[0, 1]$  temos que  $\delta \mapsto (n-1)(\pi - 2v(\delta))$  é decrescente donde, por 5.47 acima, temos:

$$\widehat{s}(\delta_1) > s^+(\delta_1) \quad se \quad \delta_1 < \delta_0 \quad e \quad \widehat{s}(\delta_1) < s^+(\delta_1) \quad se \quad \delta_1 > \delta_0 \quad (5.48)$$

**Prova da proposição 5.8:** Seja  $(\delta_0, r_0) \in \widetilde{\Omega}$ ,  $V$  e  $D$  como acima e  $\mathcal{B}_{\delta_1, r}$  um bilhar como  $(\delta_1, r) \in D$ . Pela discussão anterior temos que  $\mathcal{B}_{\delta_1, r}$  admite um ponto normal em  $V$  se e só se  $L_{\delta_1}^+ \cap \widehat{L}_{\delta_1} \neq \emptyset$ . Como observado acima, se  $\delta_1 < \delta_0$  então  $s^+(\delta_1) < \widehat{s}(\delta_1)$  donde  $\theta_{\delta_1}^+(s)$  é crescente e  $\widehat{\theta}_\delta(s)$  é decrescente no intervalo  $[s^+(\delta_1), \widehat{s}(\delta_1)]$ . Portanto as curvas  $L_{\delta_1}^+$  e  $\widehat{L}_{\delta_1}$  se intersectam transversalmente em um único ponto  $x_1^\sharp = (s^\sharp, \theta_\delta^+(s^\sharp))$  com  $s^\sharp \in [s^+, \widehat{s}]$  ( figura 5.14). Consequentemente, o bilhar  $\mathcal{B}_{\delta_1, r}$  admite um único ponto normal transversal em  $V$ .

Se  $\delta_1 > \delta_0$  então  $\theta_{\delta_1}^+(s)$  é decrescente e  $\widehat{\theta}_\delta(s)$  é crescente no intervalo  $[\widehat{s}(\delta_1), s^+(\delta_1)]$

---



e."

Figura 5.14:

e as curvas  $L_{\delta_1}^+$  e  $\widehat{L}_{\delta_1}$  se intersectam transversalmente em um único ponto  $(s^*, \theta_{\delta_1}^+(s^*))$  com  $s^* = s^*(\delta_1) \in [\widehat{s}, s^+]$  (figura 5.15). Conseqüentemente, o bilhar  $\mathcal{B}_{\delta_1, r}$  admite um ponto normal transversal em  $V$ . Ainda supondo  $\delta_1 > \delta_0$  temos duas outras interseções entre  $L_{\delta_1}^+$  e  $\widehat{L}_{\delta_1}$  que ocorrem sobre a curva  $\{\theta = -\arcsin(\delta_0)\}$ . De fato das equações 5.26 que definem  $\theta_{\delta_1}^+(s)$  e das equações 5.29 que definiem  $\widehat{\theta}_{\delta_1}(s)$  temos  $\theta_{\delta_1}^+(s) = -\arcsin(\delta_0)$  ou  $\widehat{\theta}_{\delta_1}(s) = -\arcsin(\delta_0)$  se e só se  $s \in \{s'_1, s''_1\}$  sendo:

$$s'_1 = s'_1(\delta_1) = v(\delta_0) + \arcsin(\delta_0/\delta_1) \quad e \quad s''_1 = s''_1(\delta_1) = \pi + v(\delta_0) - \arcsin(\delta_0/\delta_1)$$

Protanto,  $L_{\delta_1}^+$  e  $\widehat{L}_{\delta_1}$  se intersectam nos pontos  $x'_1 = (s'_1, -v(\delta_0))$  e  $x''_1 = (s''_1, -v(\delta_0))$  e conseqüentemente o bilhar  $\mathcal{B}_{\delta_1, r}$  admite mais dois pontos normais em  $V$ . Para mostrar que estes pontos normais são transversais observemos que pela equação 5.33 temos:

$$\frac{d\theta_{\delta_1}^+}{ds}(s'_1) = \frac{-\sqrt{\delta_1 - \delta_0^2}}{\sqrt{1 - \delta_0^2} + \sqrt{\delta_1^2 - \delta_0^2}} \neq \frac{d\widehat{\theta}_{\delta_1}}{ds}(s'_1) = \frac{-\sqrt{\delta_1 - \delta_0^2}}{\sqrt{1 - \delta_0^2} + (3 - 2n)\sqrt{\delta_1^2 - \delta_0^2}}$$

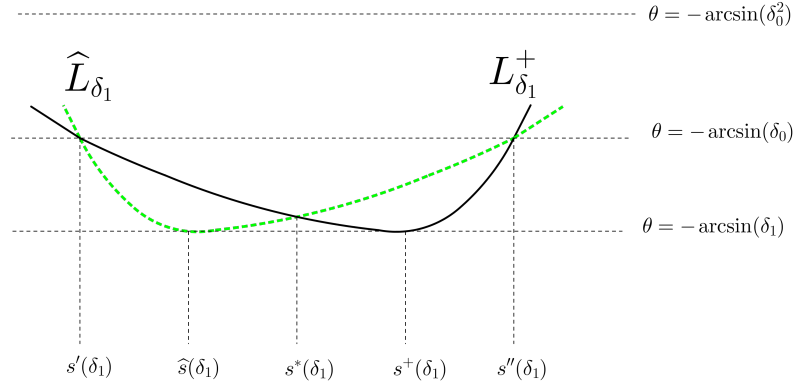


Figura 5.15:

$$\frac{d\theta_{\delta}^+}{ds}(s_1'') = \frac{\sqrt{\delta_1 - \delta_0^2}}{\sqrt{1 - \delta_0^2} - \sqrt{\delta_1^2 - \delta_0^2}} \neq \frac{d\widehat{\theta}_{\delta}}{ds}(s_1'') = \frac{\sqrt{\delta_1 - \delta_0^2}}{\sqrt{1 - \delta_0^2} + (3 - 2n)\sqrt{\delta_1^2 - \delta_0^2}}$$

donde  $x_1'$  e  $x_1''$  são interseções trasnversais ente  $L_{\delta_1}^+$  e  $\widehat{L}_{\delta_1}$ , ou seja,  $x_0'$  e  $x_0''$  são pontos normais trasnversais do bilhar  $\mathcal{B}_{\delta_1, r}$ .  $\square$

## 5.4 Tangências Homoclínicas

Nesta seção provamos o teorema [D](#), mostrando a existência de um subconjunto  $\Omega_1'$  no espaço de parâmetros  $\Omega$  contido em  $\Omega_1$ , contendo  $(1, 0)$  no seu fecho e tal que se  $(\delta, r) \in \Omega_1'$  então o bilhar  $\mathcal{B}_{\delta, r}$  admite um ponto periódico  $y \in \Lambda_{\delta, r}$  cujas as variedades instável e estável possuem um ponto de tangência homoclínica, ou seja, um ponto de tangência ente  $W^u(y)$  e  $W^s(y)$ . Iniciamos constuindo famílias de bilhares e de ponto periódicos satisfazendo algumas propriedades úteis aos nossos argumentos.

Pela prova da proposição [5.7](#), dado  $\epsilon > 0$  temos  $\Omega_1(\epsilon) \cap \Omega \neq \emptyset$ . Portanto,

---

podemos fixar um  $(\delta_0, r_0) \in \Omega_1(\epsilon) \cap \tilde{\Omega}$  e definir:

$$D' = [\delta_0, \delta_0 + \nu'] \times (0, r_0]$$

tomando  $\nu'$  suficientemente pequeno de forma que  $D' \subset \Omega_1(\epsilon)$  e  $D' \subset D$  onde  $D$  é como definido na seção anterior. A cada  $\delta$  fixado em  $[\delta_0, \delta_0 + \nu']$  corresponde uma família a um parâmetro de bilhares  $\{\mathcal{B}_{\delta,r}\}_{r \in (0,r_0]}$ . E como  $D' \subset \Omega_1(\epsilon)$ , todo bilhar  $\mathcal{B}_{\delta,r}$  com  $(\delta, r) \in D'$  admite um conjunto  $\Lambda_{\delta,r}$ ,  $\epsilon$ -denso em  $M_\alpha$ , uniformemente hiperbólicos para a aplicação  $T_{\alpha,r}$  e tal que a restrição  $T_{\alpha,r} : \Lambda_{\delta,r} \rightarrow \Lambda_{\delta,r}$  é conjugada a  $\sigma : \Sigma_m^* \rightarrow \Sigma_m^*$  para algum  $m$  fixo.

No que se segue consideraremos uma classe específica de pontos periódicos para a aplicação  $T_\alpha$  que inclui a classe dos pontos periódicos normais. Observe que, pela reversibilidade de  $T_\alpha$  se  $z \in \ell_0$  e  $T_\alpha^n(z) \in \ell_0$  para algum  $n \geq 1$  então  $z$  é um ponto periódico de  $T_\alpha$  com período divisor de  $n$ . No que se segue dizemos que um ponto periódico  $z \in \ell_0 \cap T_\alpha^{-n}(\ell_0)$  como acima é um **ponto periódico simétrico**.

Para construir uma família de pontos periódicos simétricos associada à uma família  $\{\mathcal{B}_{\delta,r}\}_{r \in (0,r_0]}$  iniciamos fixando uma palavra  $[b_0, \dots, b_n] \in \{1, \dots, m\}^2$  tal que  $b_j \sim b_{j+1}$  para todo  $j \in \{0, n-1\}$  e  $b_n = b_0$ . Supomos que  $[b_0, \dots, b_n]$  admita toda palavra de dois símbolos  $[i, j] \in \{1, \dots, m\}^2$  tal que  $i \sim j$ . Esta última restrição implica que se  $z \in \Lambda_{\delta,r}$  é um ponto codificado por uma sequência  $b \in \Sigma_m^*$  contendo a palavra  $[b_0, \dots, b_n]$  então a órbita:

$$\mathcal{O}_\alpha(z) = \{T_{\alpha,r}^i(z) : i \in \mathbb{Z}\}$$

é um conjunto  $\epsilon$ -denso em  $M_\alpha$ , de fato basta observar que, neste caso, para todo  $i, j$  tal que  $i \sim j$  existe  $k$  tal que  $T_{\alpha,r}^k(z) \in \Delta_{[i,j]} = U_i^+ \cap U_j^-$  assim, pelos argumentos utilizados na prova da proposição 5.6, podemos concluir que  $\mathcal{O}_\alpha(z)$  é um conjunto  $\epsilon$ -denso em  $M_\alpha$ .

A cada palavra  $[b_0, \dots, b_n]$  com as propriedades descritas acima temos associada uma coleção de retângulos estáveis  $U_{b_0}^-, \dots, U_{b_n}^-$  e uma coleção de

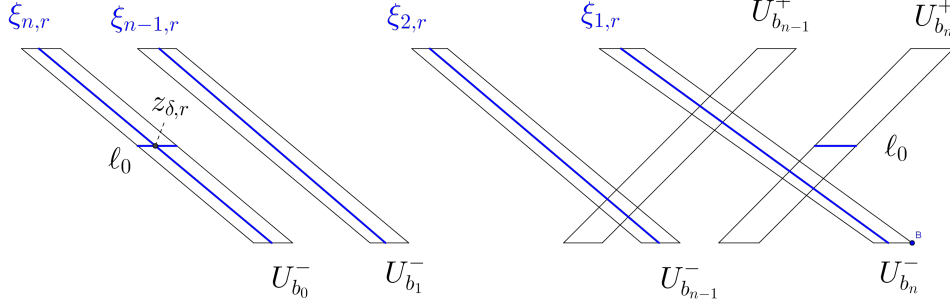


Figura 5.16:

retângulos instáveis  $U_{b_0}^+, \dots, U_{b_n}^+$ . Recordando que  $U_i^+ = T_{\alpha,r}(U_i^-)$  consideremos a ilustração na figura 5.16. A interseção  $\ell_0 \cap U_{b_n}^+$  é uma curva horizontal em  $U_{b_n}^+$ , portanto a pré-imagem  $\xi_{1,r} = T_{\alpha,r}^{-1}(\ell_0 \cap U_{b_n}^+)$  é uma curva vertical e estável em  $U_{b_n}^-$ . Como  $U_{b_{n-1}}^+$  atravessa  $U_{b_n}^-$  temos que  $\xi_{1,r} \cap U_{b_{n-1}}^+$  é uma curva horizontal estável de  $U_{b_{n-1}}^+$  contida na interseção  $U_{b_n}^- \cap U_{b_{n-1}}^+$ , logo  $\xi_{2,r} = T_{\alpha,r}^{-1}(\xi_{1,r} \cap U_{b_{n-1}}^+)$  é uma curva vertical e estável em  $U_{b_{n-1}}^-$ . Argumentando desta forma obtemos uma curva  $\xi_{n,r}$  vertical e estável no retângulo  $U_{b_0}^-$  que está contida em  $T_{\alpha,r}^{-n-1}(\ell_0)$ . A curva  $\xi_{n,r}$  intersesta transversalmente e em um único ponto a curva  $\ell_0 \cap U_{b_0}^-$ . Definimos

$$z_{\delta,r} = \xi_{n,r} \cap \ell_0$$

e obtemos assim uma família a um parâmetro de pontos periódicos simétricos  $\{z_{\delta,r}\}_{r \in (0,r_0]}$ . Note que para todo  $r \in (0,r_0]$  temos  $T_{\alpha,r}^i(z_{\delta,r}) \in U_{b_{i-1}}^+ \cap U_{b_i}^-$  portanto  $z_{\delta,r}$  é codificado por uma sequência  $b \in \Sigma_m^*$  cotendo a palavra  $[b_0, \dots, b_n]$ , donde  $\mathcal{O}_\alpha(z_{\delta,r})$  é um conjunto  $\epsilon$ -denso em  $M_\alpha$ .

Como  $D' \subset D$ , a cada  $\delta \in [\delta_0, \delta_0 + \nu']$  temos associadas as curvas  $\widehat{L}_\delta$  e  $L_\delta^\pm$  como estudadas na seção anterior. Na prova do teorema [D](#) e do teorema [E](#) usaremos o fato de que podemos aproximar a curva  $\widehat{L}_\delta$  por segmentos de variedades estáveis dos  $z_{\delta,r}$  ou por segmentos das pré-imagens das curvas  $\xi_{n,r}$ .



---

**Lema 5.11.** *Consideremos uma família de bilhares  $\{\mathcal{B}_{\delta,r}\}_{r \in (0,r_0]}$  e uma família de pontos periódicos  $\{z_{\delta,r}\}_{r \in (0,r_0]}$  como acima, existe  $r' \leq r_0$  e famílias de curvas*

$$\{\lambda_\delta(r)\}_{r \in (0,r']} \subset M_\gamma \quad e \quad \{\ell_\delta(r)\}_{r \in (0,r']} \subset M_\gamma$$

*ambas convergindo na topologia  $C^1$  para  $\widehat{L}_\delta$  e tais que cada  $\lambda_\delta(r)$  é um segmento da variedade estável de  $z_{\delta,r}$  e cada  $\ell_\delta(r)$  é um segmento de  $T^{-1}(\xi_{n,r})$  onde  $\xi_{n,r}$  é como definida acima.*

**Prova:** Seja  $x \in X_\delta(\epsilon)$  o ponto normal tal que  $z_{\delta,r} \in U_{x,r}^-$  para todo  $r \in (0, r_0]$ , decorre da proposição 3.27 e da observação 3.28 que se

$$\pi_1 \circ F^{-1} \circ T(x) \notin \pi_1(L_\delta^-) \tag{5.49}$$

então existe  $r' < r_0$  e famílias de curvas  $\{\bar{\lambda}(r)\}_{r \in (0,r']}$  e  $\{\xi(r)\}_{r \in (0,r']}$  ambas convergindo na topologia  $C^1$  para  $L_\delta^-$  e tal que cada  $\bar{\lambda}(r) \subset W^s(z_{\delta,r})$  e cada  $\bar{\ell}(r) \subset T^{-1}(\xi_{m,r})$ . Recordando que  $\widehat{L}_\delta = F^{-n+2}(L_\delta^-)$  para um  $n > 2$  definimos

$$\lambda_\delta(r) = F^{-n+2}(\bar{\lambda}(r)) \quad e \quad \ell_\delta(r) = F^{-n+2}(\bar{\ell}(r)) \quad \forall r \in (0, r']$$

e obtemos assim as famílias  $\{\lambda_\delta(r)\}_{r \in (0,r']}$  e  $\{\ell_\delta(r)\}_{r \in (0,r']}$  com as propriedades desejadas uma vez que  $F$  é um difeomorfismo. Para concluir a prova é suficiente mostrar que a condição 5.49 é satisfeita, quanto a isso observemos que o todo conjunto  $\Lambda_{\delta,r}$  está contido em  $H_{\delta,r}$  donde:

$$T(\Lambda_{\delta,r}) \subset T(H_{\delta,r}) \subset U = \{(s, \theta) \in M_\gamma : |\theta| \leq \arcsin(\delta^2)\}$$

A imagem  $T(x)$  é um ponto de  $\ell_\delta^+ \cap U$  e como  $F^{-1}(\ell_\delta^+) = \ell_\delta^-$  e  $F$  preserva a segunda coordenada, temos que  $F^{-1} \circ T(x)$  é um ponto de  $\ell_\delta^- \cap U$ . Como  $L_\delta^- \subset [0, 2\pi) \times [-\pi/2, -\arcsin(\delta^2))$  temos  $L_\delta^- \cap U = \emptyset$ . A curva  $\ell_\delta^-$  se projeta injetivamente sobre  $[0, 2\pi)$  e o segmento  $L_\delta^- \subset \ell_\delta^-$  está contido no complementar de  $U$  portanto temos que  $\pi_2 \circ F^{-1} \circ T_r(x) \notin \pi_1(L_\delta^-)$  o que conlui a prova.  $\square$

Considerando uma mudança de coordenadas que retifica a curva  $L_\delta^+$ , ilus-

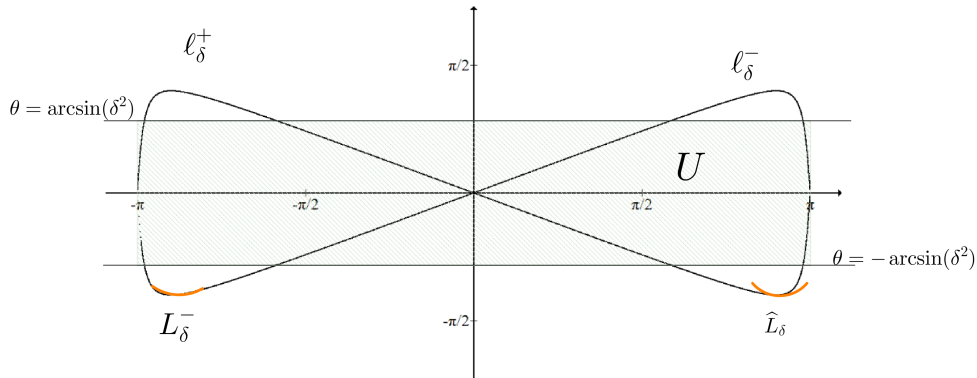


Figura 5.17:

tramos na figura 5.18 a família  $\{\lambda_\delta(r)\}_{r \in (0, r']}$  convergindo para a curva  $\widehat{L}_\delta$ . No caso  $\delta = \delta_0$ , ilustrado na figura (1), a curva  $\widehat{L}_{\delta_0}$  que tem um ponto de tangência cúbica com a curva  $L_{\delta_0}^+$ . No caso  $\delta > \delta_0$ , ilustrado na figura (2), a curva  $\widehat{L}_\delta$  intersesta  $L_\delta^+$  transversalmente em três pontos  $x_1', x_1^*$  e  $x_1''$ .

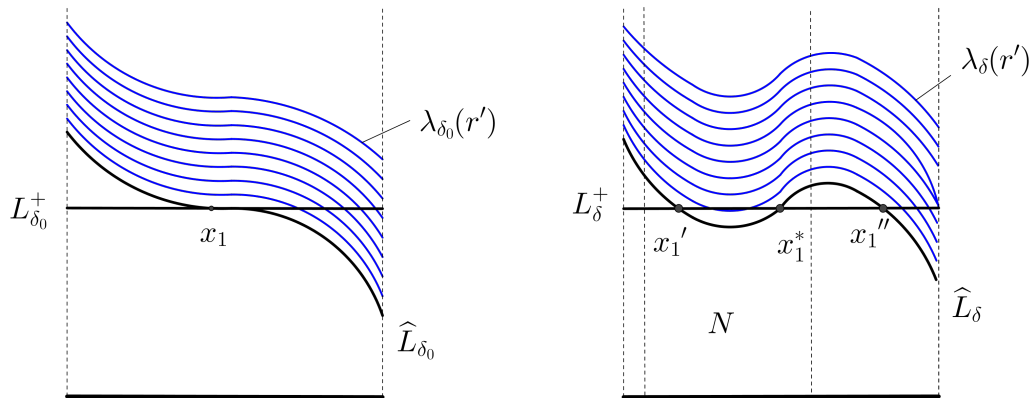


Figura 5.18:

**Proposição 5.12.** *Para todo  $\delta \in (\delta_0, \delta_0 + \nu']$  existe  $\bar{r}$  tal que o bilhar  $\mathcal{B}_{\delta, \bar{r}}$  admite um ponto de tangência homoclínica entre as variedades do ponto periódico simétrico do conjunto  $\Lambda_{\delta, \bar{r}}$ .*

---

**Prova:** Dado  $\delta \in (\delta_0, \delta_0 + \nu']$  consideramos  $\{\mathcal{B}_{\delta,r}\}_{r \in (0,r_0)}$ ,  $\{z_{\delta,r}\}_{r \in (0,r_0)}$  e  $\{\lambda_{\delta,r}\}_{r \in (0,r']}$  como no lema 5.11 e definimos

$$Y = \{r \in (0, r'] : \lambda_\delta(r) \cap N \cap L_\delta^+ = \emptyset\}$$

onde  $N$  é uma região retangular contendo os pontos  $x_1'$  e  $x_1^*$  de interseção entre  $L_\delta^+$  e  $\widehat{L}_\delta$  como ilustrado na figura 5.18. Como  $\lambda_\delta(r') \cap L_\delta^+ \cap N = \emptyset$  temos  $Y \neq \emptyset$ . Como  $\lambda_\delta(r)$  converge na topologia  $C^1$  para  $\widehat{L}_\delta$  quando  $r \rightarrow 0$  e  $\widehat{L}_\delta \cap L_\delta^+ \neq \emptyset$ , temos  $(0, r'] \setminus Y \neq \emptyset$ . No que se segue denotaremos:

$$\bar{r} = \sup\{Y\} \in (0, r_0^*) \quad \bar{\lambda} = \lambda_\delta(\bar{r}) \quad e \quad \bar{z} = z(\delta, \bar{r})$$

Temos  $\bar{\lambda} \cap L_\delta^+ \neq \emptyset$  e todo ponto na interseção  $\bar{\lambda} \cap L_\delta^+$  é um ponto de tangência entre  $\bar{\lambda}$  e  $L_\delta^+$ . De fato, se  $\lambda_\delta(r_0)$  não intersecta ou intersecta transversalmente  $L_{\delta_1}^+$  então existe um intervalo aberto  $I = (r_0 - \epsilon, r_0 + \epsilon)$  tal que para todo  $r \in I$  a curva  $\lambda_\delta(r)$  não intersecta ou intersecta transversalmente  $L_\delta^+$ .

Seja  $T$  a aplicação do bilhar  $\mathcal{B}_{\delta,\bar{r}}$ , recordando que  $T^{-1}(L_\delta^+) \subset \ell_0$  temos que  $T^{-1}(\bar{\lambda})$  é um segmento da variedade estável  $W^s(\bar{z})$  tangenciando  $\ell_0$  em um ponto  $\bar{y}$ . Por reversibilidade temos  $R(W^s(\bar{z})) = W^u(\bar{z})$  donde  $R \circ T^{-1}(\bar{z})$  é um segmento da variedade instável  $W^u(\bar{z})$  que tangencia  $\ell_0$  no ponto  $R \circ T^{-1}(\bar{y})$ . Como  $R$  deixa fixo todo ponto de  $\ell_0$  temos que  $R(\bar{y}) = \bar{y}$  é um ponto de tangência entre  $W^s(\bar{z})$  e  $W^u(\bar{z})$ , ou seja o bilhar  $\mathcal{B}_{\delta,\bar{r}}$  admite um ponto de tangência  $\bar{y}$  entre as variedades do ponto periódico simétrico  $\bar{z}$ .  $\square$

**Prova do teorema D:** Seja  $\{\epsilon_i\}_{i \geq 1}$  uma sequência tal que  $\lim_{i \rightarrow \infty} \epsilon_i = 0$ , Pela proposição 5.12, para todo  $i$  existe  $(\delta_i, r_i) \in \Omega_1(\epsilon_i)$  tal que o bilhar  $\mathcal{B}_{\delta_i, r_i}$  admite um ponto de tangência homoclínica entre as variedades de um ponto periódico simétrico  $z \in \Lambda_{\delta_i, r_i}$ . Definimos  $\Omega'_1 = \bigcup_{i \geq 1} (\delta_i, r_i)$  e para concluir que este conjunto tem as propriedades enunciadas no teorema D basta observar que, pela definição de  $\Omega_1(\epsilon)$ , temos que  $\lim_{i \rightarrow \infty} (\delta_i, r_i) = (1, 0)$  donde  $(1, 0)$  é ponto de acumulação  $\Omega'_1$ .  $\square$

---

## 5.5 Pontos periódicos linearmente elípticos

Seja  $x \in M \setminus \mathcal{S}_{\pm\infty}$  um ponto periódico de período  $n$ , pela expressão 2.8 para a derivada de  $T$  temos  $\det D_x T^n = 1$ . De acordo com o autovalores de  $\chi_1$  e  $\chi_2$  de  $D_x T^n : \mathbf{T}_x M \rightarrow \mathbf{T}_x M$  classificamos o ponto  $x$  como sendo *hiperbólico* se  $\chi_1$  e  $\chi_2$  são reais e  $|\chi_i| \neq 1$   $i \in \{1, 2\}$ , *parabólico* se  $\chi_1$  e  $\chi_2$  são reais e  $|\chi_i| = 1$ ,  $i \in \{1, 2\}$  e *elípticos* se  $\chi_1$  e  $\chi_2$  são complexos. Neste último caso a transformação linear  $D_x T^n : \mathbf{T}_x M \rightarrow \mathbf{T}_x M$  é uma rotação e todo círculo centrado na origem de  $\mathbf{T}_x M \cong \mathbb{R}^2$  é um conjunto invariante por  $D_x T^n$ . Sob certas hipóteses adicionais [15] a dinâmica de  $T^n$  em torno  $x$  reflete o comportamento de  $D_x T^n$  e  $x$  está contido em uma *ilha de estabilidade*, i.e um conjunto de interior não vazio  $U$  contendo  $x$ , invariante por  $T^n$  admitindo uma coleção de curvas fechadas invariantes por  $T^n$  limitando abertos contendo  $x$ .

Nesta seção estudamos a existência de pontos periódicos elípticos em bilhares de Saitô e provamos o teorema E mostrando que existe um subconjunto  $\Omega_1''$  no espaço de parâmetros  $\Omega$ , contido em  $\Omega_1$ , contendo  $(1, 0)$  no seu fecho e tal que se  $(\delta, r) \in \Omega_1''$  então o bilhar  $\mathcal{B}_{\delta, r}$  admite um ponto periódico linearmente elíptico  $z_e$  cuja órbita  $\mathcal{O}(z_e) = \{T_\alpha^i(z_e) : i \in \mathbb{Z}\}$  é um conjunto  $\epsilon(\delta, r)$ -denso em  $M_\alpha$  com  $\epsilon(\delta, r) \rightarrow 0$  quando  $(\delta, r) \rightarrow (1, 0)$ . Neste ponto do nosso estudo ainda não podemos garantir a existência de ilhas em torno destes pontos periódicos embora experimentos numéricos indiquem que elas existam. Iniciamos caracterizando convenientemente a estabilidade linear de pontos periódicos simétricos em bilhares com obstáculos.

**Lema 5.13.** *Seja  $x_0 \in M_\alpha \setminus \mathcal{S}_{-\infty}$  um um ponto periódico simétrico de um bilhar em uma mesa  $Q_{\gamma, p, r}$  com período  $2k$  por  $T_\alpha$ . Denotando  $D_{x_0} T_\alpha^k = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  temos que o ponto  $x_0$  é:*

- (1) *parabólico se  $ad = 0$  ou  $cb = 0$*
- (2) *elíptico se  $ad > 0 > bc$*
- (3) *hiperbólico se  $ad$  e  $cb$  são não nulos e de mesmo sinal.*

**Prova:** Seja  $U \subset M_\alpha$  um aberto contendo o ponto periódico  $x_0$  restrito ao qual  $T_\alpha^k$  é diferenciável. Por reversibilidade temos  $(R \circ T^k \circ R) \circ T^k|_{U_0} = id_{U_0}$ .

---

Denotando  $x_k = T_\alpha^k(x_0)$  e observando que  $R(x_k) = x_k$  obtemos:

$$D_{x_k}R \cdot D_{x_k}T_\alpha^k \cdot D_{x_k}R \cdot D_{x_0}T_\alpha^k = I_2 \Rightarrow DR \cdot D_{x_k}T_\alpha^k \cdot DR = [D_{x_0}T_\alpha^k]^{-1} \quad (5.50)$$

$$\Rightarrow D_{x_k}T_\alpha^k = DR \cdot [D_{x_0}T_\alpha^k]^{-1} \cdot DR \quad (5.51)$$

Como  $x_0, x_k \in \ell_0$  temos  $\varphi(x_0) = \varphi(x_k) = 0$  donde  $\det(D_{x_0}T_\alpha^k) = \frac{\cos \varphi(x_0)}{\cos \varphi(x_k)} = 1$ .

Como denotamos  $D_{x_0}T_\alpha^k = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  temos  $[D_{x_0}T_\alpha^k]^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$  e como

$DR = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  Por 5.51 temos:

$$D_{x_k}T_\alpha^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

donde

$$D_{x_0}T_\alpha^{2k} = D_{x_k}T_\alpha^k \cdot D_{x_0}T_\alpha^k = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.d + b.c & 2.b.d \\ 2.a.c & a.d + b.c \end{pmatrix} \quad (5.53)$$

Os autovalores de  $D_{x_0}T_\alpha^{2k}$  são soluções da equação  $\chi^2 - \text{tr}(D_{x_0}T_\alpha^{2k}) \cdot \chi + 1 = 0$ .

Assim,  $x_0$  é parabólico se  $|\text{tr}(D_{x_0}T_\alpha^{2k})| = 2$ , hiperbólico se  $|\text{tr}(D_{x_0}T_\alpha^{2k})| > 2$  e elíptico se  $|\text{tr}(D_{x_0}T_\alpha^{2k})| < 2$ . Observando que:  $\text{tr}(D_{x_0}T_\alpha^{2k}) = 2(a.d + b.c)$  e  $a.d - b.c = \det D_{x_0}T_\alpha^k = 1$  obtemos:

$$|\text{tr}(D_{x_0}T_\alpha^{2k})| \leq 2 \Leftrightarrow |a.d + b.c| \leq 1 = a.d - b.c \quad (5.54)$$

$$\Leftrightarrow -(a.d - b.c) \leq a.d + b.c \leq a.d - b.c \quad (5.55)$$

$$\Leftrightarrow a.d \geq 0 \geq b.c \quad (5.56)$$

donde  $x_0$  é parabólico se  $a.d = 0$  ou  $b.c = 0$ , elíptico se  $a.d > 0 > b.c$  e hiperbólico se  $ad \neq 0$  e  $bc \neq 0$  e têm o mesmo sinal.  $\square$

Tornaremos a considerar famílias  $\{\mathcal{B}_{\delta,r}\}_{r \in (0,r_0]}$  com  $\delta \in [\delta_0, \delta_0 + \nu']$  como na seção anterior mantendo as mesmas notações.

**Proposição 5.14.** *Para todo  $\delta \in (\delta_0, \delta_0 + \nu']$  existe  $r_e$  tal que o bilhar  $\mathcal{B}_{\delta,r_e}$  admite um ponto periódico simétrico linearmente elíptico  $z_e$  cuja órbita  $\mathcal{O}_\alpha(z_e)$  é um conjunto  $\epsilon$  denso em  $M_\alpha$ .*

---

---

**Prova:** Dado  $\delta \in (\delta_0, \delta_0 + \nu']$  sejam  $\{\mathcal{B}_{\delta,r}\}_{r \in (0,r_0]}$ ,  $\{z_{\delta,r}\}_{r \in (0,r_0]}$  e  $\{\ell_\delta(r)\}_{r \in (0,r']}$  como no lema 5.11. Por argumentos análogos aos usados na prova da proposição 5.12 temos que existe  $\bar{r} < r'$  tal que todo ponto de interseção entre  $\ell(\bar{r})$  e  $L_\delta^+$  é um ponto de tangência entre estas curvas. Denotaremos por  $\bar{x}$  o ponto da interseção  $\ell(\bar{r}) \cap L_\delta^+$  mais próximo do ponto  $x'_1 \in L_\delta^+ \cap \widehat{L}_\delta$ . Denotaremos por  $\bar{L}$  o segmento de  $L_\delta^+$  com extremos  $x'_1$  e  $\bar{x}$  e por  $K \subset (0, \bar{r}]$  o conjunto com a seguinte propriedade: se  $r_1 \in K$  então para todo  $r \in (0, r_1]$  a curva  $\ell(r)$  intersecta transversalmente o segmento  $\bar{L}$  em um único ponto  $x(r)$ .

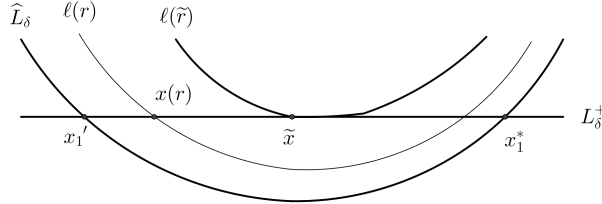


Figura 5.19:

Como  $\widehat{L}_\delta$  intersecta transversalmente  $L_\delta^+$  no ponto  $x'_1$  e a curva  $\ell(r)$  converge na topologia  $C^1$  para  $\widehat{L}_\delta$  quando  $r \rightarrow 0$  temos que  $K$  é não vazio. E como  $\ell(\bar{r})$  tangencia  $L_\delta^+$  no ponto  $\bar{x}$  temos que:

$$\tilde{r} = \sup\{K\} \leq \bar{r}$$

A curva  $\ell(\tilde{r})$  tangencia  $\bar{L}$ , de fato se  $\ell(\tilde{r}) \cap L_\delta^+ = \emptyset$  ou  $\ell(\tilde{r})$  intersecta transversalmente  $L_\delta^+$  então existe um intervalo aberto contendo  $\tilde{r}$  tal que para todo  $r$  neste intervalo a curva  $\ell(r)$  ou não intersecta  $L_\delta^+$  ou intersecta esta curva transversalmente em um único ponto o que contradiz  $\tilde{r} = \sup\{K\}$ . Denotaremos por  $\tilde{x}$  o ponto de  $\ell(\tilde{r}) \cap L_\delta^+$  mais próximo de  $x'_1$  e no que se segue consideramos a família

$$\{x(r)\}_{r \in (0, \tilde{r}]}$$

---

dada pelas interseções entre  $\ell(r)$  e o segmento  $\bar{L}$ . Denotamos por  $T = T_r$  a aplicação do bilhar e por  $T_\alpha = T_{\alpha,r}$  a aplicação de primeiro retorno ao obstáculo associadas a  $\mathcal{B}_{\delta,r}$  com  $0 < r < \tilde{r}$ . Denotamos

$$y(r) = T^{-1}(x(r))$$

Como  $\bar{L}$  é um segmento da curva  $T(\ell_0)$  temos que  $y(r)$  é um ponto de interseção entre  $\ell_0$  e  $T^{-1}(\ell(r))$ . Recordando que  $\ell(r) \subset T^{-1}(\xi_{n,r})$  onde  $\xi_{n,r}$  é um segmento do conjunto  $T_{\alpha,r}^{-n}(\ell_0)$  para algum  $n > 0$  fixo temos que:

$$\hat{y}(r) = T_\alpha^{n+1}(y(r))$$

é um ponto de  $T^{n+1}(\ell_0) \cap \ell_0$ . Portanto,  $y(r)$  é um ponto periódico simétrico para o bilhar  $\mathcal{B}_{\delta,r}$  e pela definição das curvas  $\xi_{n,r}$  na seção anterior temos também que a órbita  $\mathcal{O}_\alpha(y(r))$  é um conjunto  $\epsilon$ -denso em  $M_\alpha$  sendo  $T_\alpha^i(\hat{y}(r)) \in H_{\delta,r}$  para todo  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

Para concluir a prova é suficiente mostrar a existência de algum ponto  $y(r)$  elíptico. Para tratar da estabilidade dos pontos  $y(r)$ , no que se segue denotaremos

$$D_{\hat{y}(r)}T_{\alpha,r}^{n+1} = \begin{pmatrix} a(r) & b(r) \\ c(r) & d(r) \end{pmatrix}$$

e no espaço tangente de  $y(r)$  consideraremos os vetores:

$$\begin{aligned} v(r) &= (a(r), c(r)) = D_{\hat{y}(r)}T_\alpha^{n+1}(1, 0) \\ u(r) &= (b(r), d(r)) = D_{\hat{y}(r)}T_\alpha^{n+1}(0, 1) \end{aligned}$$

Note que  $v(r)$  e  $u(r)$  são os bordos do cone  $D_{\hat{y}(r)}T_\alpha^{n+1}.C^+(\hat{y}(r))$ . E como  $T_\alpha^i(\hat{y}(r)) \in H_{\delta,r}$  para todo  $i \in \{0, \dots, n\}$  temos pela proposição 5.2

$$D_{\hat{y}(r)}T_\alpha^i.C^+(\hat{y}(r)) \subset C^u(T_\alpha^i(\hat{y}(r))) \quad i \in \{0, \dots, n\}$$

Considerando estes fatos e recordando que:

$$C^u(z) = \{u \in \mathbf{T}_z M_\alpha : c_1(\delta, r) \leq \eta(u) \leq c_2(\delta, r)\}$$

com

$$\lim_{r \rightarrow 0} c_i(\delta, r) = 1 \quad \text{para } i \in \{1, 2\}$$

Temos que o ângulo entre os vetores  $u(r)$  e  $v(r)$  tende a 0 quando  $r \rightarrow 0$ .

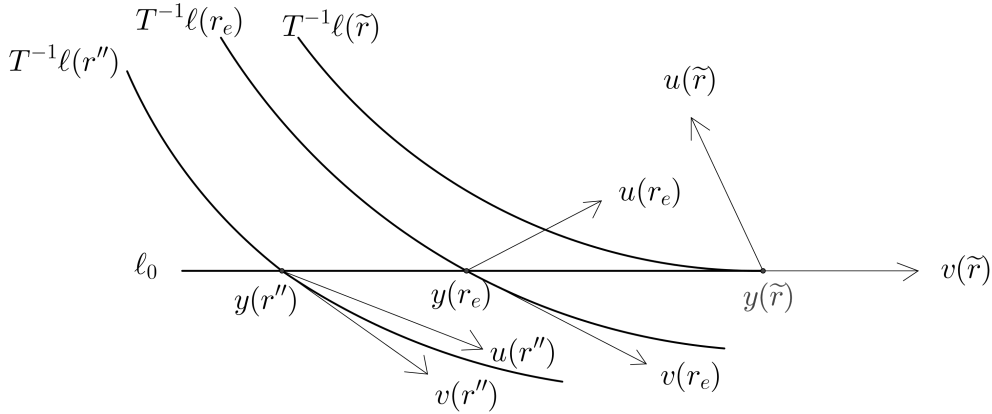


Figura 5.20:

Observando que  $x(\tilde{r})$  é uma tangência entre  $\ell(\tilde{r})$  e  $L_\delta$  temos que  $y(\tilde{r})$  é uma tangência entre  $T^{-1}(\ell(\tilde{r}))$  e  $\ell_0$ . Segue disso que as coordenadas do vetor  $v(\tilde{r})$  satisfazem  $c(\tilde{r}) = 0$  e  $a(\tilde{r}) \neq 0$ . No que se segue supomos, sem perda de generalidade, que  $a(\tilde{r}) > 0$  o que implica que a segunda coordenada do vetor  $u(\tilde{r})$  satisfaz  $d(\tilde{r}) > 0$  como ilustrado na figura 5.20

Para todo  $r < \tilde{r}$  o ponto  $y(r)$  é uma interseção transversal entre  $\ell_0$  e  $T^{-1}(\ell(r))$ . Neste caso o vetor  $v(r)$  tem coordenadas satisfazendo  $a(r) > 0$  e  $c(r) < 0$  para todo  $r < \tilde{r}$ . Como o ângulo entre  $u(r)$  e  $v(r)$  tende a 0 quando  $r \rightarrow 0$  existe  $r''$  tal que se  $r < r''$  então o vetor  $u(r)$  tem coordenadas satisfazendo  $b(r) > 0$  e  $d(r) < 0$ . Pela continuidade das funções  $r \mapsto b(r)$  e  $r \mapsto d(r)$  temos que existe  $r_e \in (r'', \tilde{r})$  tal que  $b(r_e) > 0$  e  $d(r_e) > 0$  e  $a(r_e) > 0$  e  $c(r_e) < 0$  como ilustrado na figura 5.20. Assim sendo temos  $a(r_e)d(r_e) > 0 > c(r_e).b(r_e)$  donde, pelo lema 5.13, o ponto  $y(r_e)$  é elíptico o que conclui a prova.  $\square$

**Prova do teorema E:** Seja  $\{\epsilon_i\}_{i \geq 1}$  uma sequência tal que  $\lim_{i \rightarrow \infty} \epsilon_i = 0$ . Pela proposição 5.19, para todo  $i$  existe  $(\delta_i, r_i) \in \Omega_1(\epsilon_i)$  tal que o bilhar  $\mathcal{B}_{\delta_i, r_i}$  admite um ponto linearmente elíptico cuja órbita por  $T_\alpha$  é um conjunto



---

$\epsilon_i$ -denso em  $M$ . Definimos  $\Omega_1'' = \bigcup_{i \geq 1} (\delta_i, r_i)$  e para concluir que este conjunto tem as propriedades enunciadas no teorema [E](#) basta observar que, pela definição de  $\Omega_1(\epsilon)$ , temos que  $(\delta_i, r_i) \rightarrow (1, 0)$  quando  $i \rightarrow \infty$  donde  $(1, 0)$  como ponto de acumulação  $\Omega_1''$ .  $\square$

## 5.6 Prova da proposição [5.2](#)

Se  $z_0 = (\beta_0, \varphi_0) \in M_\alpha \setminus \mathcal{S}_{\pm\infty}$  tem tempo de retorno  $n_\alpha(z_0) = n$  então o segmento da sua órbita até o primeiro retorno ao obstáculo é da forma:

$$\{z_0 = (\beta_0, \varphi_0), z_1 = (s_1, \theta), \dots, z_{n-1} = (s_{n-1}, \theta), z_n = (\beta_n, \varphi_n)\}$$

Dado um vetor  $u_0 = (u_0^{(1)}, u_0^{(2)}) \in T_{z_0}M_\alpha$  sejam  $u_i = (u_i^{(1)}, u_i^{(2)}) = D_{z_0}T^i.u_0$ , pelas equações [5.4](#) temos que  $u_1 = (u_1^{(1)}, u_1^{(2)}) = D_{z_0}T.u_0$  tem componentes:

$$u_1^{(1)} = -\left(1 + \frac{\delta \cos(\theta + s_1)}{\cos \theta}\right) \cdot (u_0^{(1)} + u_0^{(2)}) + \frac{r \cos \varphi_0}{\cos \theta} \cdot u_0^{(2)} \quad (5.57)$$

$$u_1^{(2)} = \left(\frac{\delta \cos(\theta + s_1)}{\cos \theta}\right) (u_0^{(1)} + u_0^{(2)}) - \frac{r \cos \varphi_0}{\cos \theta} \cdot u_0^{(2)} \quad (5.58)$$

A inclinação  $\eta(u_1)$  de  $u_1$  dada por:

$$\eta(u_1) = -1 + \left[\frac{\delta \cos(\theta + s_1)}{\cos \theta} - \frac{r \cos \varphi_0}{\cos \theta} Q_0\right]^{-1} \quad Q_0 = \left(\frac{u_0^{(2)}}{u_0^{(1)} + u_0^{(2)}}\right) \quad (5.59)$$

Recordando que  $T_\alpha(z_0) = T \circ F_\gamma^{n-2} \circ T(z_0)$  temos que o vetor  $u_{n-1} = D_{z_1}F_\gamma^{n-2}.u_1$  tem componentes:

$$u_{n-1}^{(1)} = u_1^{(1)} - 2(n-2) \cdot u_1^{(2)} \quad u_{n-1}^{(2)} = u_1^{(2)} \quad (5.60)$$

Das equações [5.3](#) segue que o vetor  $u_n = (u_n^{(1)}, u_n^{(2)}) = D_{z_0}T_\alpha.u_0$  tem compo-

nentes:

$$u_n^{(1)} = \left( -1 + \frac{\delta \cos(\theta - s_{n-1})}{r \cos \varphi_n} \right) \cdot (u_{n-1}^{(1)} - u_1^{(2)}) - \frac{\cos \theta}{r \cos \varphi_n} \cdot u_1^{(2)} \quad (5.61)$$

$$u_n^{(2)} = \left( \frac{\delta \cos(\theta - s_{n-1})}{r \cos \varphi_n} \right) (u_{n-1}^{(1)} - u_{n-1}^{(2)}) - \frac{\cos \theta}{r \cos \varphi_n} \cdot u_{n-1}^{(2)} \quad (5.62)$$

A inclinação  $\eta(u_n)$  de  $u_n$  dada por:

$$\eta(u_n) = 1 + \frac{r \cos \varphi_n}{\cos \theta} \left[ \frac{\delta \cos(\theta - s_{n-1})}{\cos \theta} - \frac{r \cos \varphi_n}{\cos \theta} \cdot Q_n \right]^{-1} \quad (5.63)$$

onde:

$$\begin{aligned} Q_{n-1} &= \frac{u_{n-1}^{(2)}}{u_{n-1}^{(1)} - u_{n-1}^{(2)}} = \frac{u_1^{(2)}}{u_1^{(1)} - 2(n-2) \cdot u_1^{(2)} - u_1^{(2)}} = \frac{1}{-2(n-2) + 1 - \frac{1}{\eta(u_1)}} \\ &= \frac{1}{-2(n-1) + \frac{1}{\frac{\delta \cos(\theta + s_1)}{\cos \theta} - \frac{r \cos \varphi_0}{\cos \theta} \cdot Q_0}} \end{aligned}$$

Recordemos que:

$$\Omega_0 : \left\{ (\delta, r) : \delta \in [0.9, 1) \text{ e } r \in \left( 0, \frac{\delta - \delta^2}{10} \right] \right\}$$

e que se  $(\delta, r) \in \Omega_0$  então  $H_{\delta, r}^- \subset M_\alpha$  é a região limitada por quatro curvas  $\lambda_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  com extremos em componentes distintas de  $\partial M_\alpha$ . A união destas curvas é a pré-imagem por  $T$  do conjunto  $\{|\theta| = \arcsin(\delta^2)\} \subset M_\gamma$  e o complementar  $M_\alpha \setminus H_{\delta, r}^-$  contem o conjunto  $\{(\beta, \varphi) : \beta + \varphi = \pm \frac{\pi}{2}\}$ .

Será útil recordar também que a restrição  $T : M_\alpha \rightarrow M_\alpha^+$  é dada por:

$$T(\beta, \varphi) = (s, \theta) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \theta + \delta \sin(s + \theta) = -r \sin \varphi \\ \beta + \varphi = s + \theta \end{cases} \quad (5.64)$$

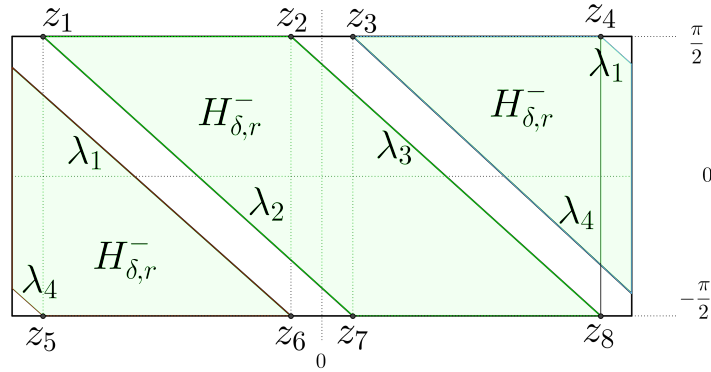


Figura 5.21:

e que a restrição  $T^{-1} : M_{\alpha}^{-} \rightarrow M_{\alpha}$  é dada por:

$$T(s, \theta) = (\beta, \varphi) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \theta + \delta \sin(\theta - s) = -r \sin \varphi \\ \beta + \varphi = s - \theta \end{cases} \quad (5.65)$$

**Lema 5.15.** Com as notações acima, se  $z_0 \in H_{\delta,r}$  e  $(\delta, r) \in \Omega_0$  então:

$$\left| \frac{\delta \cos(s_1 + \theta)}{\cos \theta} \right|, \left| \frac{\delta \cos(\theta - s_{n-1})}{\cos \theta} \right| \geq \left[ \frac{\delta^2 - (\delta - r)^2}{1 - \delta^4} \right]^{\frac{1}{2}}$$

**Prova:** Das equações 5.64 e 5.65 segue que  $\theta + s_1 = \beta_0 + \varphi_0$  e  $\theta - s_{n-1} = -\beta_n - \varphi_n$  donde:

$$\left| \frac{\delta \cos(s_1 + \theta)}{\cos \theta} \right| = \left| \frac{\cos(\beta_0 + \varphi_0)}{\cos \theta} \right| \quad e \quad \left| \frac{\delta \cos(\theta - s_{n-1})}{\cos \theta} \right| = \left| \frac{\cos(\beta_n + \varphi_n)}{\cos \theta} \right|$$

Portanto, para provar o enunciado obteremos  $\min |A(\beta, \varphi)|$  e  $\min |B(\beta, \varphi)|$  onde:

$$A : H_{\delta,r}^{-} \rightarrow \mathbb{R} \quad A(\beta, \varphi) = \frac{\delta \cos(\beta + \varphi)}{\cos \theta} \quad \text{onde } \theta = \pi_2 \circ T(\beta, \varphi)$$

---


$$B : H_{\delta,r}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad B(\beta, \varphi) = \frac{\delta \cos(\beta + \varphi)}{\cos \theta} \quad \text{onde } \theta = \pi_2 \circ T^{-1}(\beta, \varphi)$$

Recordando  $R(H_{\delta,r}^-) = H_{\delta,r}^+$  temos  $(\beta, \varphi) \in H_{\delta,r}^- \Leftrightarrow (\beta, -\varphi) \in H_{\delta,r}^+$ . Assim  $\min |A(\beta, \varphi)| = \min |B(\beta, \varphi)|$  e precisamos considerar apenas a função  $A$ . Observemos que para todo  $(\beta, \varphi) \in \text{int}H_{\delta,r}^-$  temos

$$\frac{\partial A}{\partial \beta}(\beta, \varphi) = \frac{\delta \sin(\beta + \varphi)}{\cos \theta} + \tan \theta \cdot (A(\beta, \varphi))^2 \quad (5.66)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \varphi}(\beta, \varphi) = \frac{\delta \sin(\beta + \varphi)}{\cos \theta} + \tan \theta \cdot (A(\beta, \varphi))^2 - \tan \theta \cdot A(\beta, \varphi) \cdot \frac{r \cos \varphi}{\cos \theta} \quad (5.67)$$

portanto

$$\frac{\partial A}{\partial \beta}(\beta, \varphi) = \frac{\partial A}{\partial \varphi}(\beta, \varphi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A(\beta, \varphi) \cdot \tan \theta \cdot \frac{r \cos \varphi}{\cos \theta} = 0 \quad (5.68)$$

Como  $H_{\delta,r}^- \cap \{(\beta, \varphi) : \beta + \varphi = \pm \frac{\pi}{2}\} = \emptyset$  temos  $A(\beta, \varphi) \neq 0 \quad \forall (\beta, \varphi) \in H_{\delta,r}^-$  donde  $A(\beta, \varphi) \cdot \tan \theta \cdot \frac{r \cos \varphi}{\cos \theta} = 0$  se e só se  $\theta = 0$ . Das equações 5.64 segue que  $\theta = 0$  se e só se  $(\beta, \varphi) \in \{(0, 0), (\pi, 0)\}$ . Assim, os únicos ponto críticos de  $A$  no interior de  $H_{\delta,r}^-$  são  $(0, 0)$  como  $A(0, 0) = \delta$  e  $(\pi, 0)$  com  $A(\pi, 0) = -\delta$ .

Das equações 5.64 segue que  $\delta \sin(\beta + \varphi) = -\sin \theta - r \sin \varphi$  donde :

$$|A(\beta, \varphi)| = \left[ \frac{\delta^2 - (\sin \theta + r \sin \varphi)^2}{1 - \sin^2 \theta} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.69)$$

Os oito vértices de  $H_{\delta,r}^-$  são pontos  $z_i = (\beta_i, \varphi_i)$  tais que  $\beta_i = \pm \frac{\pi}{2}$  e  $\theta = \pi_2 \circ T(z_i) = \arcsin(\delta^2)$ . Assim se  $i \in \{2, 3, 6, 7\}$  e  $j \in \{1, 4, 5, 8\}$  então:

$$|A(z_i)| = \left[ \frac{\delta^2 - (\delta^2 + r)^2}{1 - \delta^4} \right]^{\frac{1}{2}} < |A(z_j)| = \left[ \frac{\delta^2 - (\delta^2 - r)^2}{1 - \delta^4} \right]^{\frac{1}{2}} < \delta \quad (5.70)$$

Se  $(\beta, \varphi) \in \lambda_i \cap \text{int}M_\alpha$  então  $\sin \theta = \pm \delta^2$  donde, por 5.69, temos que a restrição de  $|A(\beta, \varphi)|$  ao conjunto  $\lambda_i \cap \text{int}M_\alpha$  é uma função  $A(\varphi)$  de  $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  cuja expressão e derivada são respectivamente

---


$$A(\varphi) = \left[ \frac{\delta^2 - (\delta^2 + r \sin \varphi)}{1 - \delta^4} \right]^{\frac{1}{2}} \quad e \quad A'(\varphi) = \pm \frac{(\delta^2 + r \sin \varphi) \cdot r \cos \varphi}{A(\varphi) \sqrt{1 - \delta^4}}$$

donde  $A(\varphi)$  tem um único ponto crítico  $\varphi'$  satisfazendo  $\delta^2 - r \sin(\varphi') = 0$  e:

$$|A(\varphi')| = \frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^4}} > \left[ \frac{\delta^2 - (\delta^2 + r)}{1 - \delta^4} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.71)$$

Agora, observemos que a restrição de  $|A(\beta, \varphi)|$  ao conjunto  $H_{\delta, r}^- \cap \partial M_\alpha$  e sua derivada são:

$$A(\beta) = \frac{\delta \sin \beta}{\cos \theta} \quad e \quad A'(\beta) = \frac{\delta \cos \beta}{\cos \theta} + \tan \theta (A(\beta))^2 \quad (5.72)$$

Mas, das equações 5.64 segue que se  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  então  $|\sin \theta + r \sin \varphi| = |\delta \cos(\beta)|$ . Assim, a restrição de  $|A(\beta, \varphi)|$  ao conjunto  $H_{\delta, r}^- \cap \partial M_\alpha$  e sua derivada também podem ser expressas por:

$$A(\beta) = \left[ \frac{\delta^2 - \delta^2 \cos^2 \beta}{(1 - (\delta \cos \beta + r)^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad e \quad A'(\beta) = \frac{\delta r}{A(\beta)} \left( \cos^2 \beta + \left( \frac{r^2 + \delta^2 - 1}{\delta r} \right) \cos \beta + 1 \right) \quad (5.73)$$

Considerando esta segunda expressão para  $A'(\beta)$ , denotando  $X = \cos \beta$  e  $g = \left( \frac{1 - \delta^2 - r^2}{2\delta r} \right)$  temos

$$A'(\beta) = \frac{\delta r}{A(\beta)} (X^2 - gX + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X^2 - gX + 1 = 0$$

Mas esta última equação tem raízes

$$X' = g - \sqrt{g^2 - 1} < 1 \quad e \quad X'' = g + \sqrt{g^2 - 1} > 1$$

donde o único ponto crítico de  $A(\beta)$  é dado por  $\beta' = \arccos(g - \sqrt{g^2 - 1})$ .

Para concluir a prova mostraremos que

$$A(\beta') = \left[ \frac{1 - \delta^2 - r^2}{1 - \delta^2 + r^2} \right]^{\frac{1}{2}} > \left[ \frac{\delta^2 - (\delta^2 + r)^2}{1 - \delta^4} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.74)$$

---

para tanto, observemos que por 5.72 temos

$$0 = A'(\beta') = \frac{\delta \cos \beta'}{\cos \theta} + \tan \theta A(\beta') \Rightarrow A(\beta') = -\frac{\delta \cos \beta'}{\sin \theta}$$

Observando que  $g - \sqrt{g^2 - 1} = \frac{1}{g + \sqrt{g^2 - 1}}$ , temos

$$\begin{aligned} (A(\beta'))^2 &= -\frac{\cos \beta'}{\sin \theta} = \frac{g - \sqrt{g^2 - 1}}{\delta r + \delta^2(g - \sqrt{g^2 - 1})} = \frac{1}{\delta r(g + \sqrt{g^2 - 1}) + \delta^2} \\ &= \frac{2}{1 - r^2 - \delta^2 + \sqrt{(1 - r^2 - \delta^2)^2 - 4r^2\delta^2}} \\ &> \frac{2}{1 + \delta^2 - r^2 + 1 - r^2 - \delta^2} \\ &= \frac{1}{1 - r^2} \end{aligned} \tag{5.75}$$

Segue disso que

$$\begin{aligned} (A(\beta'))^2 - \left( \frac{\delta^2 - (\delta^2 + r)^2}{1 - \delta^4} \right) &> \frac{1}{1 - r^2} - \left( \frac{\delta^2 - (\delta^2 + r)^2}{1 - \delta^4} \right) \\ &= \frac{1 - \delta^4 - (1 - r^2)(\delta^2 - (\delta^2 + r)^2)}{(1 - r^2)(1 - \delta^4)} \\ &= \frac{1 - \delta^2 + 2\delta^2 r(1 - r^3) + r^2\delta^2(\delta - \delta^2) + r^2(1 - r^2)}{(1 - r^2)(1 - \delta^4)} \\ &> 0 \end{aligned} \tag{5.76}$$

Portanto, vale a desigualdade 5.74. Considerando isso e ainda 5.70 e 5.71 e acima obtemos  $\min |A(\beta, \varphi)| = \left[ \frac{\delta^2 - (\delta^2 + r)^2}{1 - \delta^4} \right]^{\frac{1}{2}}$  o que conclui a prova.

□

**Lema 5.16.** *Com as notações acima, se  $z_0 \in H_{\delta, r}$  e  $(\delta, r) \in \Omega_0$  e  $u_0 \in C^+(z_0)$*

---

---

então:

$$\left| \frac{\delta \cos(\theta + s_1)}{\cos \theta} - \frac{r \cos \varphi_0}{\cos \theta} \cdot Q_0 \right| > \frac{1}{2} \quad e \quad \left| \frac{\delta \cos(\theta - s_{n-1})}{\cos \theta} - \frac{r \cos \varphi_n}{\cos \theta} \cdot Q_n \right| > \frac{1}{2}$$

**Prova:** A função

$$a : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R} \quad a(\delta, r) := \left[ \frac{\delta^2 - (\delta^2 + r)^2}{1 - \delta^4} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{r}{\sqrt{1 - \delta^4}}$$

é crescente em  $\delta$  e decrescente em  $r$ , de fato:

$$\frac{\partial a}{\partial \delta} = \frac{\delta(1 - 2r) + 2\delta^3(1 - (\delta^2 + r)^2) + 2\delta^5}{\sqrt{1 - \delta^4}\delta^2 - (\delta^2 + r)^2} > 0 \quad (5.77)$$

$$\frac{\partial a}{\partial r} = -\frac{1 + \delta^2 + r}{\sqrt{\delta^2 - (\delta^2 + r)^2}} \sqrt{1 - \delta^4} < 0 \quad (5.78)$$

Assim, denotando  $\delta^* = 0.9$  e  $r_0 = \frac{\delta^* - (\delta^*)^2}{10}$  obtemos:

$$a(\delta, r) \geq a(\delta^*, r^*) > 0.61 > \frac{3}{5} \quad \forall (\delta, r) \in \Omega_0 \quad (5.79)$$

Se  $u_0 \in C^+(z_0)$  então:

$$Q_0 = \frac{u_0^{(2)}}{u_0^{(1)} + u_0^{(2)}} \in [0, 1] \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{r \cos \varphi_0}{\cos \theta} \cdot Q_0 \right| < \frac{r}{\sqrt{1 - \delta^4}}$$

e assim, pelo lema 5.15 e por 5.79 temos:

$$\left| \frac{\cos(\theta + s_1)}{\cos \theta} - \frac{r \cos \varphi_0}{\cos \theta} \cdot Q_0 \right| > a(\delta, r) > \frac{1}{2} \quad (5.80)$$

Quanto à segunda estimativa observemos que:

$$Q_{n-1} = \frac{1}{-2(n-1) + \frac{1}{\frac{\delta \cos(\theta + s_1)}{\cos \theta} - \frac{r \cos \varphi_0}{\cos \theta} \cdot Q_0}} \quad (5.81)$$

---

considerando 5.80 e observando que  $a(\delta, r) > \frac{3}{5}$  obtemos:

$$|Q_n| < \frac{1}{2 - \frac{1}{a(\delta, r)}} < \frac{1}{2 - \frac{1}{3}} = 3 \Rightarrow \left| \frac{r \cos \varphi_n}{\cos \theta} \cdot Q_{n-1} \right| < \frac{3r}{\sqrt{1 - \delta^4}} \quad (5.82)$$

logo,

$$\left| \frac{\delta \cos(\theta - s_{n-1})}{\cos \theta} - \frac{r \cos \varphi_n}{\cos \theta} \cdot Q_{n-1} \right| > a(\delta, r) - \frac{2r}{\sqrt{1 - \delta^4}} > \frac{1}{2} \quad (5.83)$$

□

**Prova da proposição 5.2:** Sejam  $c_i : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, 2\}$  funções definidas por

$$c_1(\delta, r) = 1 - \frac{2r}{\sqrt{1 - \delta^4}} \quad e \quad c_2(\delta, r) = 1 + \frac{2r}{\sqrt{1 - \delta^4}}$$

Como  $r < \frac{\delta - \delta^2}{10}$  para todo  $(\delta, r) \in \Omega_0$  temos:

$$\frac{2r}{\sqrt{1 - \delta^4}} < \frac{1 - \delta^2}{5\sqrt{(1 - \delta^2)(1 + \delta^2)}} = \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{5\sqrt{1 + \delta^2}} < \frac{1}{5}$$

portando  $0 < \frac{3}{5} < c_1 < 1 < c_2 < \frac{7}{5} < 2$  e os cones:

$$\begin{aligned} C^u(z) &:= \{u \in T_z M_\alpha : c_1(\delta, r) \leq \eta(u) \leq c_2(\delta, r)\} \\ C^s(z) &:= \{u \in T_z M_\alpha : -c_2(\delta, r) \leq \eta(u) \leq -c_1(\delta, r)\} \end{aligned}$$

satisfazem  $C^u(z) \subset \text{int}C^+(z)$  e  $C^s(z) \subset \text{int}C^-(z)$ .

Seja  $(\delta, r) \in \Omega_0$ ,  $z_0 \in (H_{\delta, r}) \setminus \mathcal{S}_{\pm\infty}$  um ponto com tempo de retorno  $n_\alpha(z_0) = n$  e  $u_0 \in C^+(z_0)$ , segue do lema 5.16 que

$$\left| \frac{r \cos \varphi_n}{\cos \theta} \right| \cdot \left| \frac{\delta \cos(\theta - s_{n-1})}{\cos \theta} - \frac{r \cos \varphi_n}{\cos \theta} \cdot Q_n \right|^{-1} < \frac{2r}{\sqrt{1 - \delta^4}} \quad (5.84)$$



---

donde, considerando a definição de  $c_1(\delta, r)$  e  $c_2(\delta, r)$  e recordando que:

$$\eta(u_n) = 1 + \frac{r \cos \varphi_n}{\cos \theta} \left[ \frac{\delta \cos(\theta - s_{n-1})}{\cos \theta} - \frac{r \cos \varphi_n}{\cos \theta} \cdot Q_n \right]^{-1} \quad (5.85)$$

temos  $c_1(\delta, r) \leq \eta(u_n) \leq c_2(\delta, r)$ . Logo:

$$D_{z_0} T_\alpha \cdot C^+(z_0) \subset C^u(T_\alpha(z_0)) \Rightarrow D_{z_0} T_\alpha \cdot C^u(z_0) \subset \text{int} C^u(T_\alpha(z_0))$$

Usando a reversibilidade de  $T_\alpha$  obtemos de forma análoga:

$$D_{z_0} T_\alpha^{-1} \cdot C^-(z_0) \subset C^s(T_\alpha^{-1}(z_0)) \Rightarrow D_{z_0} T_\alpha^{-1} \cdot C^s(z_0) \subset \text{int} C^s(T_\alpha^{-1}(z_0))$$

Segue do exposto acima que se  $u_0 = (u_0^{(1)}, u_0^{(2)}) \in C^u(z_0)$  então  $u_n = (u_n^{(1)}, u_n^{(2)}) = D_{z_0} T_\alpha \cdot u_0 \in C^u(T_\alpha(z_0))$ . Logo,  $u_n^{(1)} \neq 0$ ,  $u_n^{(2)} \neq 0$  e pela expressão 5.58 para as coordenadas de  $u_1 = D_{z_0} T \cdot u_0$  também temos  $u_1^{(2)} \neq 0$ . Assim sendo podemos escrever:

$$\frac{\|D_{z_0} T_\alpha \cdot u_0\|}{\|u_0\|} = \frac{|u_1^{(2)}|}{|u_0^{(1)}|} \cdot \frac{|u_n^{(1)}|}{|u_1^{(2)}|} \cdot \frac{\sqrt{1 + \eta(u_n)^2}}{\sqrt{1 + \eta(u_0)^2}} \quad (5.86)$$

Considerando as expressões 5.58 para as coordenadas do vetor  $u_1$  e observando que  $\eta(u_0) \in [c_1, c_2] \subset [\frac{3}{5}, \frac{7}{5}]$  obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{|u_1^{(2)}|}{|u_0^{(1)}|} &= \left| \left( \frac{\delta \cos(\theta + s_1)}{\cos \theta} \right) (1 + \eta(u_0)) - \frac{r \cos \varphi_0}{\cos \theta} \eta(u_0) \right| \\ &> \eta(u_0) \left| \left( \frac{\delta \cos(\theta + s_1)}{\cos \theta} \right) - \frac{r \cos \varphi_0}{\cos \theta} \right| > \frac{c_1}{2} > \frac{3}{10} \end{aligned} \quad (5.87)$$

Considerando as expressões 5.62 para as coordenadas do vetor  $u_n$  e observando

---

que  $|\frac{r \cos \varphi_n}{\cos \theta} Q_n| < \frac{3r}{\sqrt{1-\delta^2}}$  e  $r < \frac{\delta-\delta^2}{10}$  obtemos:

$$\frac{|u_n^{(1)}|}{|u_1^{(2)}|} = \left| \left( -1 + \frac{\delta \cos(\theta - s_{n-1})}{r \cos \varphi_n} \right) \frac{1}{Q_n} - \frac{\cos \theta}{r \cos \varphi_n} \right| \quad (5.88)$$

$$= \left| \frac{\cos \theta}{Q_n \cdot r \cos \varphi_n} \right| \cdot \left| \left( \frac{\delta \cos(\theta - s_{n-1})}{\cos \theta} - \frac{r \cos \varphi_n}{\cos \theta} \right) - \frac{r \cos \varphi_n}{\cos \theta} Q_n \right| \quad (5.89)$$

$$> \frac{\sqrt{1-\delta^4}}{6r} > \frac{10\sqrt{(1-\delta^2)(1+\delta^2)}}{6\sqrt{r}\sqrt{\delta-\delta^2}} > \frac{5}{3\sqrt{r}} \quad (5.90)$$

Observando que  $\eta(u_0), \eta(u_n) \in [c_1, c_2] \subset [\frac{3}{5}, \frac{7}{5}]$  temos

$$\frac{\sqrt{1+\eta(u_n)^2}}{\sqrt{1+\eta(u_0)^2}} > \frac{\sqrt{1+c_1^2}}{\sqrt{1+c_2^2}} > \frac{1}{2} \quad (5.91)$$

e assim,

$$\frac{\|D_{z_0} T_\alpha \cdot u_0\|}{\|u_0\|} = \frac{|u_1^{(2)}|}{|u_0^{(1)}|} \cdot \frac{|u_n^{(1)}|}{|u_1^{(2)}|} \cdot \frac{\sqrt{1+\eta(u_n)^2}}{\sqrt{1+\eta(u_0)^2}} > \frac{1}{4\sqrt{r}} > 1$$

Definimos  $\rho(r) := \frac{1}{4\sqrt{r}}$  temos  $\frac{\|D_{z_0} T_\alpha \cdot u_0\|}{\|u_0\|} > \rho(r)$  para todo  $u_0 \in C^u(z_0)$  com  $z_0 \in H_{\delta,r}$ . De forma análoga e usando a reversibilidade da aplicação  $T_\alpha$  obtemos que  $\frac{\|D_{z_0} T_\alpha^{-1} \cdot u_0\|}{\|u_0\|} > \rho(r)$  para todo  $u_0 \in C^s(z_0)$  com  $z_0 \in H_{\delta,r}$ .  $\square$

---

## Bibliografía

---

- [1] Birkhoff, G. D. , Dynamical Systems, Providence, R. I.: A. M. S. Colloquium Publications, 1966, (Original ed. 1927,) (Citado na página 1.)
- [2] Sinai, Y., Dynamical systems with elastic reflections. Ergodic properties of dispersing billiards , Uspehi Mat. Nauk, vol. 25, no. 2 (152), pp. 141-192, 1970. (Citado na página 1 and 2.)
- [3] Foltin, C. : Billiards with positive topological entropy, Nonlinearity 15, 2053, 2002. (Citado na página 3 and 6.)
- [4] Chen, Y. C : On topological entropy of billiard tables with small inner scatterers, Advances in Mathematics , vol. 224, no. 2, pp. 432-460, 2010 (Citado na página 3 and 6.)
- [5] Saito N, Hirooka H, Ford J, Vivaldi F and Walker : Numerical Study of billiard motion in an annulus bounded by non-concentric circles, Physica 5D, 273-286, 1982. (Citado na página 2, 3, 7, 77, and 78.)

- 
- [6] Duarte, P. Plenty of elliptic islands for the standard family of area preserving maps, *A. I. Henri Poincare*, vol 11, no 4, pp 359-409 (1994) (Citado na página [9](#).)
- [7] Bussolari, L., Lenci, M. Hyperbolic billiards with nearly flat focusing boundaries. *I. Phys. D*, 237(18), 2272-2281 (Citado na página [2](#).)
- [8] Wojtkowski, M. : Principles for the design of billiards with nonvanishing Lyapunov exponents *Commun. Math. Phys.* 105 391-414, 1986. (Citado na página [15](#).)
- [9] Wojtkowski, M. : Invariant families of cones and Lyapunov exponents, *Ergod. The. Dynam. Sys.* 5, 1985. (Not cited.)
- [10] S. Aubry and G. Abramovici. Chaotic trajectories in the standard map, the concept of anti-integrability. *Physica D*, 43:199-219, 1990. (Not cited.)
- [11] Katok, A., Haselblatt, B.: Introduction to the modern theory of dynamical systems. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, 54, Cambridge U. Press, Cambridge, 1995. (Citado na página [19](#) and [57](#).)
- [12] Katok, A. Strelcyn. J.M: Invariant manifolds, entropy and billiards; smooth maps with singularities, *Lect. Notes in Math.*, 1222, Springer-Verlag, 1986. (Not cited.)
- [13] Chernov, N., Markarian, R.: Chaotic billiards, *Mathematical Surveys and Monographs*, 127, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006. (Citado na página [14](#), [16](#), and [44](#).)
- [14] Dias Carneiro, M. J., Oliffson Kamphorst, S., Pinto de Carvalho, S., Periodic orbits of generic oval billiards, *Nonlinearity*, 20, 2453-2462, 2007. (Citado na página [63](#), [65](#), and [71](#).)
- [15] Dias Carneiro, M. J., Oliffson Kamphorst, S., Pinto de Carvalho, S., Elliptic Islands in strictly Convex Billiards, *Erg. Th. Dyn. Sys*, 23/3, 799-812, 2003. (Citado na página [108](#).)
-

- 
- [16] Bunimovich, L. A., On ergodic properties of certain billiards, *Funct. Anal. Appl.* , 8, 254-255, 1974 (Citado na página 2.)
- [17] Bunimovich, L. A, Del Magno, G. Track billiards. *Commun. Math. Phys*, 288(2), 699-713,1999 (Citado na página 2.)
- [18] Bunimovich, L. A, Mushrooms and other billiards with divides phase space, *Chaos* 11, p 802, 2001 (Not cited.)
- [19] Lind, D. , Marcus,B., An itroduciton to symbolic dynamics and coding, Cambridge university Press, 1999 (Citado na página 20 and 56.)
- [20] Munkres, J., *Topology* , Prentice-Hall, 2000 (Citado na página 25 and 54.)
- [21] Palis,J. Takens,F. : *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*, Cambridge Stud. Adv. Math., 35, Cambridge Univ. Press, 1993. (Citado na página 69.)
- [22] Lazutkin, V.F.: On the existence of caustics for the billiard ball problem in a convex domain. *Math. USSR,Izvestija*, t. 7, 1973,p 185-214. (Citado na página 2.)
- [23] Donnay,V.: Using integrability to produce chaos: billiards with positive entropy, *Comm. Math. Phys.* 141 (1991), 225-257. (Citado na página 64.)