Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas – ICEx
Departamento de Matemática

APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS À DINÂMICA POPULACIONAL DE MINAS GERAIS E DA REGIÃO METROPOLITANA DE BELO HORIZONTE

Marcos Antônio de Jesus

Belo Horizonte
2015

Marcos Antônio de Jesus

APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS À DINÂMICA POPULACIONAL DE MINAS GERAIS E DA REGIÃO METROPOLITANA DE BELO HORIZONTE

Monografia apresentada ao programa de pós– graduação em Matemática para Professores com Ênfase em Cálculo da Universidade Federal de Minas Gerais UFMG, como requisito parcial à obtenção do título de Especialista em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Reginaldo J. Santos

Belo Horizonte
2015

Dedicatória

A minha maravilhosa esposa Lucineide Ferreira Colen que sempre me apoiou durante essa jornada. Com muito carinho dedico a minha mãe Maria Bitencourt de Jesus que sempre esteve do meu lado e que sempre acreditou em mim.

Com muita alegria dedico a minha filha Sarah Sofia Colen Bitencourt de Jesus que me faz ter forças e esperanças a cada dia.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me concedido a oportunidade de concluir este trabalho. Ao meu irmão Carlos Alexandre com seu incentivo, ao Jorge Andrade sempre muito prestativo. Aos meus Pais mesmo com suas falhas fizeram de mim a pessoa que sou com caráter. Aos sobrinhos Vitor Augusto e Victor Hugo, que são fontes de alegria. Aos amigos que souberem compreender minha ausência nesse tempo. A Stephanie Raissa que sempre teve boa vontade em ajudar no ensino dos conteúdos. Ao Reginaldo J. Santos que esteve orientando no desenvolvimento deste trabalho. A todos que contribuíram diretamente e indiretamente para a minha formação.

Resumo

Este trabalho tem por objetivo mostrar algumas das aplicabilidades de Equações Diferenciais de Primeira Ordem, em especifico o Cálculo de Dinâmica Populacional. Foi abordado sucintamente a História das Equações Diferenciais e sua definição, bem como a relevância da Modelagem Matemática. Para essa Modelagem Matemática, foi utilizado um modelo matemático aplicado em dois exemplos práticos para prever a população de Minas Gerais e Região Metropolitana de Belo Horizonte como função do tempo. Os dados utilizados para fazer os cálculos foram retirados dos censos feitos pelo Instituto Brasileiro de Geografias e Estatística (IBGE) com início no 1950 até 2000. Após os cálculos foram feitas as comparações com os resultados encontrados pela última contagem feita pelo IBGE no ano de 2010 referente as duas regiões.

Palavras - chave: Modelagem Matemática; Equações Diferenciais de Primeira Ordem; Tempo; Dinâmica Populacional.

Abstract

This work aims to show some of the applicability of Differential Equations of First Order in the specific dynamics calculation Population. Briefly was approached history of Differential Equations and its definition as well as the relevance of Mathematical Modeling. For this mathematical modeling, we used a mathematical model applied to two practical examples to predict the population of Minas Gerais and the metropolitan region of Belo Horizonte as a function of time. The data used to make the calculations were taken from the census done by the Brazilian Institute of geographies and Statistics (IBGE) beginning in 1950 to 2000. After calculations were made comparisons with the findings of the last count made by IBGE in 2010 regarding the two regions.

Key - words: Mathematical Modeling; Differential Equations of the First Order; Time; Population dynamics.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Esta é uma pesquisa voltada para a Modelagem Matemática utilizando Equações Diferenciais. Descreverei sucintamente a História das Equações Diferenciais, falarei a definição e a sua importância, e será mostrado um pouco da aplicação desta teoria ao mundo real. Onde será anunciada a minha hipótese, a motivação, o objetivo, a justificativa e a conclusão referente ao assunto.

Será que realmente as Equações Diferenciais, podem ser usadas para prever a população futura de uma determinada cidade? No decorrer desse trabalho essa pergunta vai ser respondida.

O que mais me motivou a estudar à Modelagem Matemática fazendo uso das Equações Diferenciais foi quando estava iniciando os estudos deste conteúdo na graduação e pós-graduação, percebi que além do abstrato ela tem sido muito utilizada para explicar diversos fenômenos da nossa realidade. Espero que por meio desse breve estudo possa traduzir uma pequena fração desse processo que liga a Matemática à realidade e oferecer mais uma fonte de pesquisa que possa contribuir com os professores e estudantes no momento de ensino e aprendizagem.

O uso de Equações Diferenciais para modelar situações reais é algo muito presente em nosso mundo, e talvez possa passar despercebida aos olhos dos estudantes, por outro lado acredito que se o assunto estiver mais presente, poderá criar outras possibilidades de compreensão. Pois quando se fala em modelar com Equações Diferenciais abrimos uma gama de aplicações plausíveis de serem discutidas como, por exemplo, sua aplicação nas leis fundamentais da Física; no Crescimento Populacional; na Vibração de Molas; na Datação do carbono; nas Engenharias; na Medicina, etc. Isso é muito relevante uma vez que ela pode ser utilizada para equacionar e traduzir o comportamento desses diversos fenômenos. Acredito que entendê-los é muito interessante e relevante em situações que o homem precisa de reposta para suas perguntas. Dessa forma espero que ao abordar esse tema, ele possa auxiliar no entendimento de algumas ocorrências comuns do nosso cotidiano.

A ideia é criar oportunidades aos alunos, aos professores, aos pesquisadores dentre outros interessados pelo uso de Equações Diferenciais que pode ser um conteúdo abordado e aplicado em um fenômeno real. Às vezes pode-se pensar que essa Matemática está tão distante da nossa realidade, entretanto está presente com muita frequência em nossas vidas. Porém pode acontecer de não visualizarmos a sua utilização, talvez por falta da apresentação desse conteúdo ou por não entender os benefícios e recursos que essa ciência exata pode nos oferecer.

(Bassanezi, 2010, [1]) aponta que a Matemática não poder ser avaliada como relevante apenas em uma definição eventual ou porque depois ela poderá ser aplicada, sua relevância deve estar vinculada ao fato de ser agradável e interessante. Percebe-se pela leitura do texto que a matemática deve ser agradável e interessante e elas são condições essenciais para ocorrer a possibilidade de ensino e aprendizagem.

A justificativa para este trabalho é incentivar mais pesquisas na área de Modelagem Matemática em especifico com uso de Equações Diferenciais aplicadas em problemas da realidade. Mostrar também que além do aprendizado deste conteúdo e as aplicações em fenômenos da realidade, ela pode ser um recurso para pesquisadores das áreas de Modelagem Matemática que querem explicar um determinado problema e apresentar os resultados que podem ser relevantes para a Sociedade. O tema em estudo nesta pesquisa é a pergunta problema:

Como fazer a Modelagem Matemática usando Equação Diferencial aplicada em problemas da realidade prática?

Na esfera da Modelagem Matemática acredita-se que pode ser um momento que faz ligação entre o abstrato ao prático, porém investigar e entender fenômenos relacionados à realidade torna-se necessário o uso de um modelo matemático adequado e eficaz que consiga elucidar e traduzir essas informações com segurança e mais exatidão possível.

(Bassanezi, 2010, [1]) diz que:

> Uma serie de pontos podem ser levantados para destacar a relevância da modelagem matemática quando utilizada como instrumentos de pesquisa:
>
> - Pode estimular novas ideias e técnicas experimentais;
> - Pode dar informações em diferentes aspectos dos inicialmente previstos;
> - Pode ser um método para se fazer interpolações, extrapolações e previsões;
> - Pode sugerir prioridades de aplicações de recursos e pesquisas e eventuais tomadas de decisão;
> - Preencher lacunas onde existem falta de dados experimentais;
> - Pode servir como recurso para melhor entendimento da realidade
> - Pode servir de linguagem universal para compreender melhor o entendimento da realidade;
> - Pode servir de linguagem universal para compreensão e entrosamento entre pesquisadores de diversa área do conhecimento;

De acordo com (Bassanezi, 2010, [1]) a matemática aplicada moderna pode ser considerada como a arte de aplicar matemática a situações problemáticas, usando como processo comum a modelagem matemática.

Capítulo 2

Abordagem Histórica

A história da criação do Calculo Diferencial Integral esta intimamente vinculada aos dois matemáticos do século XVII ao inglês Isaac Newton (1642-1727) e ao alemão Goltfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). De um lado Newton na Inglaterra que partiu das definições de espaço e tempo, onde desenvolveu Método de Fluxões que foi escrito por volta do ano de 1671, porém publicado alguns anos após sua morte no ano de 1737.

Newton considerou que uma curva era o resultado de um movimento continuo de um ponto. Criando assim uma denominação para mudança de posição, chamada de fluente, e a taxa de variação do fluente em relação ao tempo denominou fluxão. A fluxão é conhecida hoje como a derivada função. De outro Lado em Paris na França, Leibniz desenvolveu o Calculus Differentialis, Calculus Summatorius e Calculus Integralis, responsável pela criação da notação para taxa de variação que são usadas até hoje para operacionalizar.

De acordo com (Courant, 2000, [2]) o calculo é fruto de um longo trabalho que foi evoluindo ao longo do tempo que não iniciou e nem terminou com os dois matemáticos Isaac Newton e Gottfriend Wilhelm Leibnz.

Mas ao longo da pesquisa percebe-se que eles foram matemáticos de extrema importância na evolução do cálculo. Naquela época Newton dedicou-se ao cálculo e aos princípios fundamentais de mecânica, ou seja, estava mais voltado para o ramo da Física, porém suas descobertas foram importantes para a base dos estudos de Equações Diferencias no século XVIII. Leibniz estava mais próximo da filosofia do que da Física e sua concepção de Cálculo era mais abstrata.

Capítulo 3

Modelagem Matemática Utilizando Equações Diferenciais

O Que significa Modelagem Matemática?

Nesse contexto Bassanezi (2010), [1] escreve que

> Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual.

Segundo Biembengut e Hein (2000), [3] Dizem que

> Modelagem Matemática é o processo que envolve a obtenção do modelo. Este, sob certa óptica, pode ser considerada um processo artístico, visto que, para elaborar um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição criativa para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também o senso lúdico para jogar com varias variáveis envolvidas.

Para Araujo (2007), [4] A Modelagem Matemática tem por objetivo a resolução de algum problema da realidade, por meio de teorias e conceitos matemáticos.

Diante desses pressupostos a Modelagem Matemática pode ser uma possibilidade de ensino e aprendizagem, tendo como objetivo elucidar e explicar algum fenômeno do cotidiano, bem como criar um momento de explorar a criatividade dos professores e alunos.

Capítulo 4

Equações Diferenciais

Equação Diferencial é uma equação em que as incógnitas são funções e a equação envolve derivadas destas funções. Numa equação diferencial em que a incógnita é uma função $y(x)$, x é a variável independente e y é variável dependente.

Exemplo:

$$\frac{dy}{dx} = y^3$$

Resolver uma Equação Diferencial significa encontrar uma função $y = y(x)$ que satisfaça a equação.

4.1 Classificação por tipo

Quanto ao tipo, as Equações diferenciais podem ser classificadas em Equaçoes Diferenciais Ordinárias e Equaçoes Diferenciais Parciais.

4.1.1 Equações Diferenciais Ordinárias

É aquela em que as funções incógnitas são funções de somente uma variável.

Exemplo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

4.1.2 Equações Diferenciais Parciais

É aquela em que as funções incógnitas são funções de mais de uma variável.

Exemplo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

4.2 Classificação por Ordem

Uma **Equação Diferencial Ordinária de ordem** n é uma equação da forma

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

onde F é uma função de valores reais de $n+2$ variáveis $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ e $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$.

A Ordem de uma Equação Diferencial é por definição a ordem da mais alta derivada que parece na equação. Por exemplo, a equação

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 7(\frac{dy}{dx})^3 - 5y = e^x$$

é de segunda ordem.

4.3 Classificação por Linearidade

As Equações Diferenciais podem ser classificadas em lineares e não lineares.

Equações Diferencial Linear é aquela em que as incógnitas e suas derivadas surgem de maneira linear em uma equação, ou seja, as incógnitas surgem em uma soma em que cada parcela é o produto de alguma derivada, com uma função que não depende das incógnitas. A forma geral da Equação Diferencial Linear de ordem n é:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = g(x), \quad \text{onde } a_0(x) \neq 0.$$

Uma Equação Diferencial é não linear, se não é linear.

Exemplo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y = 0$$

Capítulo 5

Aplicações em Dinâmica Populacional

5.1 Modelo de Malthus

De acordo com Almeida (2003), [5] Thomas Robert Malthus (1766-1834) era um economista britânico que publicou diversos trabalhos dentre eles o que mais se evidenciou foi Um Ensaio Sobre Princípio da População.

Malthus dizia que a taxa de crescimento de uma população $\frac{dy}{dt}$ é proporcional à população presente naquele instante $y(t)$. Ou seja, o modelo de crescimento populacional utilizado por Malthus é expresso da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ky, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Reescrevendo a equação linear

Classificada como Equação Parcial

$$\frac{dy}{dt} - ky = 0.$$

Determinando o fator integrante usando a função auxiliar abaixo:

$$\mu(t) = e^{\int -kdt} = e^{-kt}$$

multiplicando a equação

$$\frac{dy}{dt} - ky = 0$$

pela a função abaixo

$$\mu(t) = e^{-kt}$$

obtemos

$$\frac{dy}{dt}(e^{-ky}y) = 0$$

Integrando se ambos os membros iremos obter

$$e^{-kt}y(t) = c$$

ou

$$y(t) = ce^{kt}.$$

Substituindo-se

$$t = 0$$

e

$$y = y_0$$

obtemos

$$y_0 = ce^{k0} = c$$

Malthus falava que a população crescia mais que a produção de alimentos, e que a população crescia indefinidamente e a produção de alimentos era limitada. Mas o que podemos perceber que Malthus não levou em consideração a modernização da agricultura, como as técnicas de plantio, adubação do solo e inserção de equipamentos e maquinas industrializadas etc., que aumentaram significativamente a produção de alimentos.

Outro fator muito importante a ressaltar é que a população não pode crescer infinitamente num ambiente finito o que mostra a limitação do modelo de Malthus.

5.2 Modelo de Verhulst ou Logístico

De acordo com Almeida (2003), [5] Pierre François Verhulst (1804-1845) um belgo formado em Matemática foi o responsável pela criação do modelo logístico.

Esse modelo supõe que a taxa de crescimento é proporcional a população presente e a diferença entre à população presente e a população máxima sustentável y_M. A população como função do tempo, $y(t)$, é a solução do problema de valor inicial.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ky(y_M - y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Resolvendo, multiplicamos a equação diferencial por

$$\frac{1}{y(y_M - y)}$$

obtendo-se a equação separável

$$\frac{1}{y(y_M - y)} y' = k$$

Integrando-se em relação a t obtemos

$$\int \frac{1}{y(y_M - y)} y' dt = \int k dt + c_1$$

Substituindo-se $y' dt = dy$ obtemos

$$\int \frac{1}{y(y_M - y)} dy = \int k dt + c_1$$

Decompondo-se

$$\frac{1}{y(y_M - y)}$$

em frações parciais:

$$\frac{1}{y(y_M - y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y_M - y}$$

Multiplicando a equação acima por

$$y(y_M - y)$$

Obtemos

$$1 = A(y_M - y) + By$$

Substituindo $y = 0$ e $y = y_M$ obtemos

$$A = \frac{1}{y_M}$$

e

$$B = \frac{1}{y_M}$$

Assim,

$$\int \frac{1}{y(y_M - y)} dy = \left(\int \frac{1}{y_M} + \int \frac{1}{y_M - y} dy \right) = \frac{1}{y_M} (\ln |y| - \ln |y_M - y|)$$

Então, a solução da equação se dá implicitamente por

$$\ln |y| - \ln |y_M - y| = k y_M t.$$

Utilizando a propriedades do logaritmo.

$$\ln\left|\frac{y}{(y_M - y)}\right| = c_1 + ky_Mt$$

Aplicando a exponencial em ambos os membros e eliminando o valor absoluto obteremos

$$\frac{1}{y_M - y} = \pm e^{c_1} e^{y_M kt} = ce^{y_M kt}$$

Já que o c_1 é uma constante, logo $\pm e_1^c$ também é uma constante chamada de $c.$ Substituindo-se $t = t_0$ e $y = y_0$ na equação acima e obteremos

$$c = \frac{y_0}{y_M - y_0} e^{-y_M kt_0}.$$

Explicitando $y(t)$:

$$y = (y_M - y)ce^{y_M kt} \implies y(1 + ce^{y_M kt}) = y_M ce^{y_M kt}.$$

Então, a solução problema de valor inicial é

$$y(t) = \frac{cy_M e^{y_M kt}}{1 + ce^{y_M kt}} = \frac{\frac{y_0 y_M}{y_M - y_0} e^{y_M k(t-t_0)}}{1 + \left(\frac{y_o}{y_M - y_0}\right) e^{y_M k(t-t_0)}} = \frac{y_0 y_M e^{y_M k(t-t_0)}}{y_M - y_0 + y_0 e^{y_M k(t-t_0)}}$$

Dividindo-se o numerador e denominador por $e^{y_M k(t-t_0)}$ obtemos

$$y(t) = \frac{y_0 y_M}{y_0 + (y_M - y_0)e^{-y_M k(t-t_0)}}.$$

Observação:

$$\lim_{x \to 0} y(t) = y_M,$$

como seria esperado.

Capítulo 6

Usando o Modelo de Crescimento Logístico

6.1 Processo de Aquisição de Dados e Suporte para Desenvolvimento do Trabalho

Para a produção do material concreto desse trabalho foram feitas investigações no qual foi utilizado como instrumento as anotações em tabelas dos dados observados e coletados da fonte o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística IBGE. Foram utilizados livros de cálculos para consultar exercícios com uso de Equações Diferenciais Aplicadas a Dinâmica Populacional. Para efetuar os cálculos foram criadas formulas em planilhas de Excel, e os gráficos foram gerados no programa Maxima.

6.2 O Contexto de Desenvolvimento da Pesquisa

Esta é uma pesquisa de cunho bibliográfico, norteada pelo interesse no assunto Modelagem Matemática com uso de Equações Diferenciais Aplicadas à Dinâmica Populacional. A pesquisa foi dividida em quatro momentos: O primeiro momento foi a coleta e tabulação dos dados referentes aos sensos do IBGE das populações da Região Metropolitana de Belo Horizonte e de Minas Gerais com início no ano de 1950 até 2000. O segundo momento criou-se as planilhas no Excel com os dados do recenseamento das seis décadas, no qual foi feito os cálculos das aproximações das derivadas de $y'(t_i)$ pela diferença finita pela frente e pela diferença finita para trás e dessa forma foram encontrados os valores das retas $z = ay + b$, foi utilizado também o programa Maxima para obter os gráficos das retas e das curvas de crescimento logístico. O quarto momento ocorreu a aplicação do modelo logístico e interpretação dos dados.

6.3 Objeto Pesquisado

O objeto dessa pesquisa é o uso das Equações Diferenciais para fazer a previsão de quando a População de Minas Gerais e da Região Metropolitana de Belo Horizonte irá atingir o limite máximo de crescimento.

Vamos supor que a população de Minas Gerais e da Região Metropolitana de Belo Horizonte sigam o modelo de crescimento logístico, isto é que seja solução do problema de valor inicial.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ky(y_M - y), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{6.1}$$

em que k e a população máxima y_M são constantes a ser determinadas.

Vimos anteriormente que este problema tem como solução

$$y(t) = \frac{y_M}{1 + \left(\frac{y_M - y_0}{y_0}\right) e^{-y_M k(t-t_0)}}. \tag{6.2}$$

6.4 Crescimento da População de Minas Gerais

Na tabela abaixo estão representados os dados dos seis penúltimos recenseamentos realizados em Minas Gerais.

Ano	População
1950	$7,780$ milhões
1960	$9,660$ milhões
1970	$11,490$ milhões
1980	$13,380$ milhões
1991	$15,750$ milhões
2000	$17,890$ milhões

Vamos supor que a população de Minas Gerais siga o modelo de crescimento logístico, isto é que seja solução do problema de valor inicial (6.1).

Com base nos dados da tabela acima, vamos estimar mais adiante, o valor máximo da população, $y_M = 34,111$ milhões de habitantes e $k = 0,0007531 \cdot 10^{-10}$. Neste caso a população como função do tempo, $y(t)$, é a solução do problema de valor inicial

e é dada por

$$y(t) = \frac{34,111 \cdot 10^6}{1 + 0,907 \cdot e^{-0,0257(t-2000)}}.$$

6.4.1 Determinação dos Parâmetros

Podemos escrever o modelo logístico na forma

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = ay + b, \text{em que } a = -k \text{ e } b = ky_M.$$

Usando a tabela anterior, podemos aproximar a derivada $y'(t_i)$, para cada ano t_i em que foi realizado um recenseamento pela diferença finita para frente

$$\frac{dy}{dt}(t_i) \approx \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

ou pela diferença finita para trás

$$\frac{dy}{dt}(t_i) \approx \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}.$$

Para obter uma aproximação com mais acuidade vamos tomar a média aritmética das duas aproximações.

t_i	y_i	$g_i = \frac{1}{y_i}\frac{y_{i+1}-y_i}{t_{i+1}-t_i}$	$h_i = \frac{1}{y_i}\frac{y_i-y_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}$	$\frac{g_i+h_i}{2}$
1950	$7,780$ milhões	$0,0242$	-	
1960	$9,660$ milhões	$0,0189$	$0,0195$	$0,0192$
1970	$11,490$ milhões	$0,0164$	$0,0159$	$0,0162$
1980	$13,380$ milhões	$0,0161$	$0,0141$	$0,0152$
1991	$15,750$ milhões	$0,0151$	$0,0137$	$0,0144$
2000	$17,890$ milhões	-	$0,0133$	

Assim

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}(t_i) = ay(t_i) + b \approx \frac{g_i + h_i}{2} = z_i,$$

para $t_i = 1960, 1970, 1980, 1991$. Usando quadrados mínimos vamos encontrar os parâmetros a e b da melhor reta $z = ay + b$ que se ajusta ao conjunto de pontos

y_i	$\frac{g_i+h_i}{2} = z_i$
$9,660$ milhões	$0,0192$
$11,490$ milhões	$0,0162$
$13,380$ milhões	$0,0152$
$15,750$ milhões	$0,0144$

Resolvendo-se as equações obtemos $a = -0,0007531 \cdot 10^{-10}$, $b = 0,0257$. E assim temos que $k = -a = 0,0007531 \cdot 10^{-10}$ e $y_M = b/k = 34,111$ milhões.

Substituindo-se estes valores na solução da equação logística (6.2) e sendo $t_0 = 2000$, $y_0 = 17,890$ milhões obtemos

$$y(t) = \frac{34,111 \cdot 10^6}{1 + 0,0907 \cdot e^{-0,0257(t-2000)}}$$

6.4.2 Comparação com a População do Senso de 2010

No recenseamento realizado em 2010 a população medida pelo IBGE foi de $19,6$ milhões. Para $t = 2010$ temos

$$y(2010) = 20,05 \text{ milhões de habitantes.}$$

Um erro de $2,3$ %.

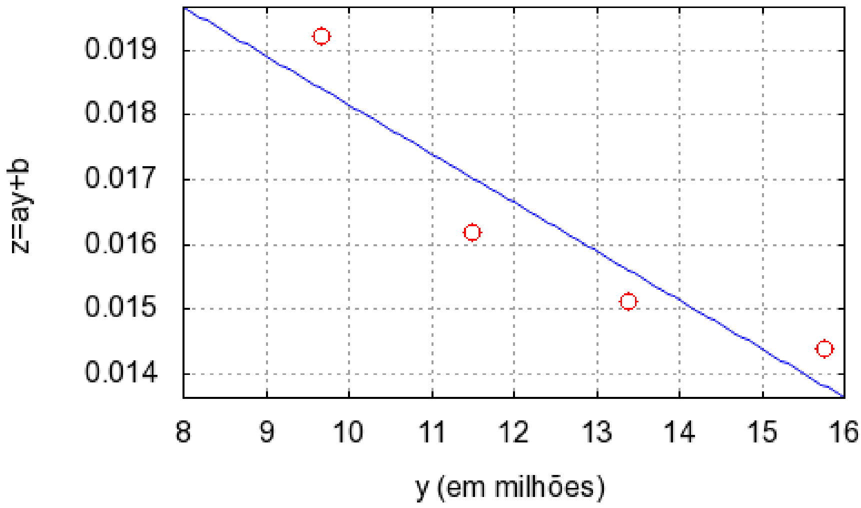

Figura 6.1: Ajustando-se os pontos à reta

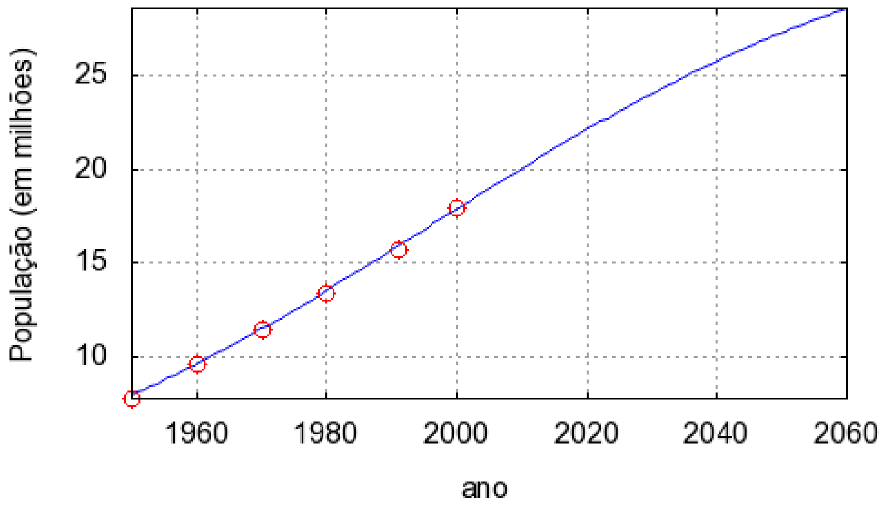

Figura 6.2: Curva Logística

6.4.3 Previsão de quando a População Atingirá 90 % e 99 % do Máximo

Seguindo o modelo logístico a população atingirá

90 % de 34,111 milhões = 30,7 milhões em 2081;

99 % de 34,111 milhões = 33,77 milhões em 2175.

6.5 Crescimento da População da Região Metropolitana de Belo Horizonte

Na década de 1950 a população entorno de Belo Horizonte era considerada rural.

Para o IBGE [6], essa mudança no perfil da região se deu com aparecimento das indústrias e na urbanização. Um clássico exemplo é o bairro Cidade Industrial na cidade de Contagem que até 1940 o IBGE a considerava como área rural.

Segundo o Observatório [7], em 1946 foi inaugurado o bairro Cidade Industrial em Contagem, cujas principais fábricas se instalaram em 1950. É importante ressaltar que nessa mesma época a cidade de Betim também iniciou suas atividades industriais. Em decorrência do crescimento industrial nessa região, essas áreas próximas a cidade de Belo Horizonte foram sendo urbanizadas e surgindo novos municípios.

Segundo o IBGE [6], as pessoas foram saindo das regiões mais distantes do Estado de Minas Gerais e povoando essa região em busca de emprego. Belo Horizonte vai crescendo e as pessoas também mudando para as cidades vizinhas.

Na década de 70 originou-se a Região Metropolitana de Belo Horizonte com 14 municípios e a partir do ano de 2002 ela é composta por 34 municípios, sendo eles: Baldim, Belo Horizonte, Betim, Brumadinho, Caeté, Capim Branco, Confins, Contagem, Esmeraldas, Florestal, Ibirité, Igarapé, Itaguara, Itatiaiuçu, Jaboticatubas, Juatuba, Lagoa Santa, Mário Campos, Mateus Leme, Matozinhos, Nova Lima, Nova União, Pedro Leopoldo, Raposos, Ribeirão das Neves, Rio Acima, Rio Manso, Sabará, Santa Luzia, São Joaquim de Bicas, São José da Lapa, Sarzedo, Taquaraçu de Minas, Vespasiano.

Na tabela abaixo estão representados os dados dos seis penúltimos recenseamentos realizados na Região Metropolitana de Belo Horizonte.

Ano	População
1950	$0,600$ milhões
1960	$1,010$ milhões
1970	$1,720$ milhões
1980	$2,680$ milhões
1991	$3,520$ milhões
2000	$4,360$ milhões

Vamos supor que a população da Região Metropolitana de Belo Horizonte siga o modelo de crescimento logístico, isto é que seja solução do problema de valor inicial (6.1).

Com base nos dados da tabela acima, vamos estimar mais adiante, o valor máximo da população, $y_M = 5,299$ milhões de habitantes e $k = 0,01306 \cdot 10^{-10}$. Neste caso a população como função do tempo, $y(t)$, é a solução do problema de valor inicial e é dada por

$$y(t) = \frac{5,299 \cdot 10^6}{1 + 0,02154 \cdot e^{-0,069(t-2000)}}.$$

6.5.1 Determinação dos Parâmetros

Podemos escrever o modelo logístico na forma

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = ay + b, \text{em que } a = -k \text{ e } b = ky_M.$$

Usando a tabela anterior, podemos aproximar a derivada $y'(t_i)$, para cada ano t_i em que foi realizado um recenseamento pela diferença finita para frente

$$\frac{dy}{dt}(t_i) \approx \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

ou pela diferença finita para trás

$$\frac{dy}{dt}(t_i) \approx \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}.$$

Para obter uma aproximação com mais acuidade vamos tomar a média aritmética das duas aproximações.

t_i	y_i	$g_i = \frac{1}{y_i}\frac{y_{i+1}-y_i}{t_{i+1}-t_i}$	$h_i = \frac{1}{y_i}\frac{y_i-y_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}$	$\frac{g_i+h_i}{2}$
1950	$0,600$ milhões	$0,0683$	-	
1960	$1,010$ milhões	$0,0703$	$0,0406$	$0,0554$
1970	$1,720$ milhões	$0,0558$	$0,0413$	$0,0485$
1980	$2,680$ milhões	$0,0285$	$0,0358$	$0,0322$
1991	$3,520$ milhões	$0,0265$	$0,0217$	$0,0241$
2000	$4,360$ milhões	-	$0,0214$	

Assim

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}(t_i) = ay(t_i) + b \approx \frac{g_i + h_i}{2} = z_i,$$

para $t_i = 1960, 1970, 1980, 1991$. Usando quadrados mínimos vamos encontrar os parâmetros a e b da melhor reta $z = ay + b$ que se ajusta ao conjunto de pontos

y_i	$\frac{g_i+h_i}{2} = z_i$
$1,010$ milhões	$0,0554$
$1,720$ milhões	$0,0485$
$2,680$ milhões	$0,0322$
$3,520$ milhões	$0,0241$

Resolvendo-se as equações obtemos $a = -0,01306 \cdot 10^{-10}$, $b = 0,0692$. E assim temos que $k = -a = 0,01306 \cdot 10^{-10}$ e $y_M = b/k = 5,299$ milhões.

Substituindo-se estes valores na solução da equação logística (6.2) e sendo $t_0 = 2000$, $y_0 = 4,360$ milhões obtemos

$$y(t) = \frac{5,299 \cdot 10^6}{1 + 0,02154 \cdot e^{-0,069(t-2000)}}$$

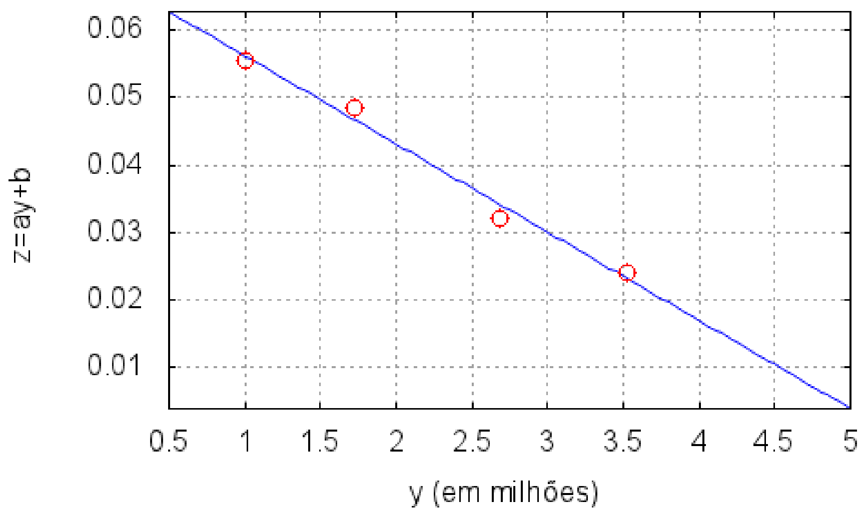

Figura 6.3: Ajustando-se os pontos à reta

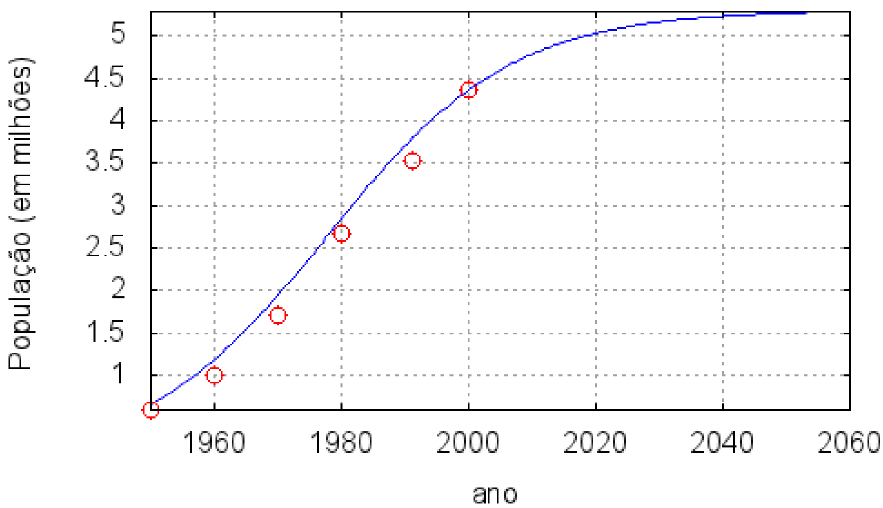

Figura 6.4: Curva Logística

6.5.2 Comparação com a População do Senso de 2010

No recenseamento realizado em 2010 a população medida pelo IBGE foi de $4,89$ milhões. Para $t = 2010$ temos

$$y(2010) = 5,299 \text{ milhões de habitantes.}$$

Um erro de $2,0$ %.

6.5.3 Previsão de quando a População Atingirá 99 % do Máximo

Seguindo o modelo logístico a população teremos o seguinte resultado

99 % de 5,299 milhões = 5,25 milhões em 2044.

Capítulo 7

Conclusão

Uma das propostas desta monografia foi fazer o uso de Equações Diferenciais Aplicada e um fenômeno real, em específico o Cálculo de Dinâmica Populacional. Nesse caso foi utilizado Modelo de Verhulst ou Logístico para prever a população da Região Metropolitana de Belo Horizonte e de Minas Gerais. Percebe-se que para desenvolver um trabalho desta característica foi necessário entender o que é Equação diferencial e Modelagem Matemática.

Para desenvolver essa pesquisa foi utilizado por opção duas ferramentas, a primeira ferramenta é o programa Excel no qual foi feito os cálculos quadrados mínimos e encontrado os parâmetros e a segunda ferramenta é o programa Maxima usado para construir os gráficos. Paralelamente é respondida a pergunta no início do trabalho, as Equações Diferenciais podem ser usadas para prever a população futura de uma determinada cidade. Embora os valores não sejam idênticos aos obtidos pelo IBGE no senso de 2010, os resultados encontrados foram bem próximos aos da realidade e são levados em considerações. Ao analisar as curvas nos gráficos que representam a população da Região Metropolitana de Belo Horizonte e a população de Minas Gerais é possível perceber que a população da Região Metropolitana de Belo Horizonte está crescendo numa velocidade menor do que a população de Minas Gerais irá levar mais tempo para atingir o valor máximo.

Em virtude do que foi mencionado nessa monografia acredito que ela é um exemplo de como os Governantes, Entidades Privadas e a População poderá usar como recurso a Modelagem Matemática para se prepararem e organizarem em relação ao crescimento populacional, principalmente nos aspectos ligados ao planejamento no sistema rodoviário de transportes de cargas, transporte de pessoas, saúde, lazer, educação, transito, empregos, economia etc. Espero também que ela seja mais uma fonte de pesquisa no ensino e aprendizado envolvendo alunos, professores entre outros interessados pelo assunto.

Referências Bibliográficas

[1] BASSANEZI, R. C. *Ensino aprendizagem com modelagem matemática uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2002.

[2] COURANT, R. *O que é matemática?* RJ: Ciências Moderna, 2000.

[3] BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo: Contexto, 2000.

[4] BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. *Modelagem matemática na educação matemática brasileira: pesquisas e práticas educacionais*. Recife: Biblioteca do Educador Matemático, 2007.

[5] DE ALMEIDA, I. A. *Aplicação dos modelos de Malthus e Verhulst de dinâmica populacional a população do brasil*, 2003. Monografia de Especialização em Matemática.

[6] IBGE. *Página web do ibge*. http://www.ibge.gov.br/home.

[7] DE CIêNCIA E TECNOLOGIA, I. N. *Observatório das matropóles*. http://www.observatoriodasmetropoles.ufrj.br.

[8] SANTOS, R. J. *Introdução às equações diferenciais ordinárias*. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2014.

[9] BOYCE, W. E.; DiPrima, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 9a.. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2010.

[10] ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações diferenciais*. 3a. ed. São Paulo: Makron Books, 2001.

[11] BOYER, C. B. *História da matemática*. São Paulo: Edgard Blucher LDTA, 1974.

[12] FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B.; BUSS, M. *Cálculo a função limite derivação integração*. São Paulo: Makron Books, 1992.

[13] STEWART, J. *Cálculo*. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[14] ANTON, H. *Cálculo um novo horizonte*. Porto Alegre RS: Bookman, 2000.