UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Instituto de Ciências Exatas - ICEX

A Irracionalidade e a Transcendência do número e

Guilherme Eleutério da Silva

Monografia apresentada ao Programa de Especialização para Professores de Matemática - ênfase em Cálculo como requisito parcial para obtenção do grau de Especialista.

Orientador

Prof. Dr. Helder Candido Rodrigues

2013

Dedico essa monografia aos meus amigos e a minha família.

Agradecimentos

Em primeiro lugar tenho que agradecer esta importante oportunidade de estar concluindomais esta etapa de minha vida.

Em seguida ao Professor Paulo Antônio Machado pelo incentivo, amizade e conselhos. Agradeço também a todo departamento de pós-graduação de matemática da Universidade Federal de Minas Gerais em especial meus orientadores Jorge Sabatucci e posteriormente Helder Candido Rodrigues que sempre estiveram presentes para me auxiliar e aos alunos do Curso Guilherme Freire, Natália Silva, Jéssica Guedes e Charles Amaral.

Obrigado também a minha família e amigos que me incentivaram e, é claro, aos meus alunos que sempre estiveram do meu lado me apoiando e incentivando ser um melhor professor sempre.

Não poderia deixar de citar aqui meu ex-aluno Ramon Gustavo que o acompanhei na OBMEP onde pude conviver com o grande mestre Wenderson Ferreira – o famoso W e os Tutinhas.

Resumo

Tudo é número! Como diria Pitágoras na antiguidade. Os números estão em nossa volta, como o ar que respiramos. Suas classificações em naturais, inteiros, primos, racionais, irracionais, reais, imaginários, algébricos e transcendentes. Vamos aprofundar nos conceitos do intrigante e belo número e demonstrando sua irracionalidade e sua transcendência.

Palavras-chave: Teoria de números, irracionalidade, transcendência, número e.

Sumário

1 – Introdução

Ao longo do curso de matemática seja na licenciatura ou no bacharelado, nos deparamos com vários teoremas, axiomas, conjecturas e uma infinidade de corolários. No entanto, dificilmente encontramos textos do cálculo embasados na história da matemática. Não quer dizer que um texto sobre a história da matemática e ou a história de o porquê deste ou daquele teorema facilite o estudo, mas pode fazer com que o aluno tenha um melhor aproveitamento nas disciplinas, pois, com isso ele vai saber como surgiu determinado assunto e para que ele serve.

> *"Existem vários motivos para isso, sendo que um deles o modo esotérico e seco com que o tema é ensinado. Temos a pretensão de sobrecarregar nossos estudantes com fórmulas, definições, teoremas e demonstrações, mas raramente mencionamos e evolução histórica desses fatos, deixando a impressão de que eles foram entregues à humanidade como os Dez Mandamentos, por alguma autoridade divina. A história da Matemática é uma boa maneira de corrigir essa impressão." (Maor, pág.14. 2008).*

Este fato também acontece com o número e, pois, aprendemos a utilizá-lo sem um embasamento teórico adequado, ou seja, sem ter um conhecimento de sua origem e de sua aplicação.

Nessa monografia pretende-se contribuir para o embasamento teórico e mostrar as demonstrações da irracionalidade e transcendência do número e, preenchendo as seguintes ideias existentes no livro texto *"Números Irracionais e transcendentes"* do professor Djairo Guedes de Figueiredo, possibilitando ao aluno da graduação um melhor aproveitamento nas disciplinas que se utilizam desse número.

Neste intuito, apresento, nesta introdução, um contexto histórico da descoberta do número e sua relação com o logaritmo natural na função exponencial e emprego no cálculo. No capítulo 01, apresento alguns pré-requisitos utilizados nas demonstrações da irracionalidade e transcendência do número e necessários para uma melhor compreensão do texto. Nos capítulos 02 e 03, baseando no livro-texto do professor Figueiredo, demonstrarei a irracionalidade e a transcendência do número e.

1.1 – **Contextos históricos do número** e

As origens da descoberta do número e segundo Maor (2008) não são tão claras, mas há indícios de que já era conhecido pelos matemáticos pelo menos meio século antes da invenção do cálculo. Uma explicação é de que teria aparecido primeiro ligado a uma fórmula para o cálculo de juros compostos. Alguém não se sabe quem ou como, deve ter notado que se um capital P é composto de n vezes por ano, durante t anos, a uma taxa anual de juros r e se permitirmos que n aumente sem limites, a soma do dinheiro S, obtida a partir da fórmula $S = P(1 + r/t)^{nt}$. O limite aproxima de 2,718 quando $P = 1$, $r = 1$ e $t = 1$. Fato que, provavelmente seja mais uma observação experimental do que uma dedução matemática, pois a noção formal de limite ainda não era conhecida.

1.2. Uso do número e no Logaritmo

John Napier (1550-1617), um lorde escocês, foi um homem muito culto e conhecedor das matemáticas da época. Envolveu-se na procura de um sistema que facilitasse a multiplicação de números. Esse trabalho estendeu-se por mais de vinte anos, antes de publicar seus resultados. Napier publicou sua obra em 1614 o *“Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio”* (Descrição da Maravilhosa Regra dos Logaritmos) que causou grande surpresa e entusiasmo, porque se tratava de técnicas simplificadoras de resolução de problemas de cálculo numérico, problemas estes relacionados com o desenvolvimento do comércio e do progresso da navegação e principalmente astronomia.

Para minimizar o uso das frações decimais, Napier fez o que fazemos hoje quando dividimos um quilometro em mil metros, ele dividiu a unidade num grande número de subunidades, considerando cada uma como uma nova unidade. Napier chegou perto de descobrir o número $1/e$ definido como limite de $(1 – 1/n)^n$ quando n tende ao infinito.A obra de Napier envolvia de forma não explícita o número que hoje se designa por ***e.*** Napier não se apercebeu da importância do Número e, somente um século depois, com o desenvolvimento do cálculo, é que se veio a reconhecer o papel relevante de tal número.

1.3. Uso do número *e* no cálculo

O matemático suíço Leonhard Euler (1707- 1783), foi um dos primeiros a estudar as propriedades desse número. A paixão de Euler pela matemática era tão forte que, em um único dia, escreveu vários trabalhos com uma matemática inovadora e engenhosa, levando-o a uma de suas maiores realizações que foi o desenvolvimento do método de algoritmos cuja finalidade era lidar com problemas aparentemente insolúveis. Suas conjeturas são ousadas, não hesitando em sugerir questões difíceis, sem apresentar, porém, indicações quanto ao meio de atacá-las.

De 1727 a 1783 Euler esteve ocupado aumentando os conhecimentos disponíveis em quase todos os ramos da matemática pura e aplicada, dos mais elementares aos mais avançados. Escrevia na linguagem e notação que usamos hoje, pois nenhum outro foi tão grandemente responsável pela forma da matemática do nível universitário de hoje quanto Euler, o construidor de notações mais bem-sucedido em todos os tempos.

Em 1727 ele havia estado ocupado com experiências sobre disparo de canhões e numa exposição manuscrita de seus resultados, usava a letra e para representar a base do sistema de logaritmos naturais. Um século antes, no entanto, nenhuma notação padronizada para ele se tornou comum. Numa carta a Goldbach, em 1731 Euler novamente usou a letra e para "aquele número cujo logaritmo hiperbólico é igual a 1". Este apareceu impresso pela primeira vez na Mecânica de Euler de 1736, onde escreveu sobre o estudo da dinâmica e da comunicação dos movimentos nas colisões entre corpos quando o choque não é frontal. Essa notação, sugerida talvez pela primeira letra da palavra "exponencial", logo se tornou padrão.

> *Euler reuniu cálculo diferencial e método dos fluxos num só ramo mais geral da matemática que é a Análise, o estudo dos processos infinitos, surgindo assim sua principal obra em 1748, a "introdução à Análise infinita" baseando-se fundamentalmente em funções, tanto algébricas como transcendentes elementares como as trigonométricas, logarítmicas, trigonométrico-inversas e exponenciais. (Iezzi, pág.1. 1991.)*

Capítulo 01 – Pré-requisitos

Este capítulo destina-se a apresentar ao leitor os pré-requisitos matemáticos necessários para que o entendimento das demonstrações, feitas nessa monografia, seja melhor possível.

Denotaremos com o símbolo □ a conclusão de cada etapa parcial ou finalização de uma demonstração.

1.1- Série Geométrica

Uma série do tipo

$$S_n = \left(a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

Onde $a \neq 0$ e r é uma razão obtida dividindo o número sucessor pelo seu antecessor, é definida como uma série geométrica.

1) Se $r = 1$, temos:

$$S_n = \left(a + a + a + \cdots\right) = na$$

que tende a $+\infty$ ou $-\infty$.

Assim o limite

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty$$

não existe e esta série diverge.

2) Se $r \neq 1$, temos

$$\begin{cases} S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} \\ rSn = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \end{cases}$$

Subtraindo

$$S_n - rS_n = a - ar^n \Rightarrow Sn = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

Sabemos que, se $-1 < r < 1$, temos $r^n \to 0$ quando $n \to \infty$.

(a) O limite $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ será:

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{\mathrm{a}(1+\mathrm{r}^{\mathrm{n}})}{1-\mathrm{r}} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{\mathrm{a}+\mathrm{ar}^{\mathrm{n}}}{1-\mathrm{r}} =$$

$$= \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{\mathrm{a}}{1-\mathrm{r}} + \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{ar^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} \tag{1}$$

Concluímos que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ converge se, e somente se, $|r| < 1$ e nesse caso, a soma vale $\frac{a}{1-r}$.

(b) Analisando a equação (1) para o caso $r \leq -1$ ou $r > 1$, temos que a série

$$S_n = (a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots) = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

é divergente, pois o limite $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ não existe. Logo a série geométrica diverge.

□

1.2 - Teorema do valor médio

Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função real contínua definida em um intervalo fechado $[a,b]$. Suponha que a derivada $\frac{d}{dx}f$ exista para todo x no intervalo aberto (a,b). Então, existe θ com $0<\theta<1$ tal que:

$$f(b)-f(a)=(b-a)\frac{d}{dx}f(a+\theta(b-a)).$$

□

1.3 – Divisibilidade

Se $d_i, i=0,1,2,...,r$, são inteiros, tais que os d_i, para $i\geq 1$, são divisíveis por p, e d_0 não é divisível por p, então $\sum_{i=0}^{r} d_i$ não é divisível por p.

Demonstração

Seja

$$p/d_i \Rightarrow d_i = k_i p \;\; e \;\; p \, não \, divide \, d_0 \quad \forall \;\; 1\leq i\leq r.$$

Suponha, por absurdo, que $p/\sum_{i=0}^{r} d_i$.

Assim existe k tal que $\sum d_i = pk$, ou seja,

$$pk=\sum_{i=0}^{r} d_i = d_0 + k_1 p + k_2 p + \ldots + k_r p = d_0 + p(k_1+k_2+\ldots+k_r),$$

Portanto

$d_0 = p(k - k_1 - k_2 - k_3 - \cdots - k_r)$, o que é impossível, pois p *não divide* d_0.

Logo p *não divide* $\sum_{i=0}^{r} d_i$.

□

1.4 – Polinômios

Seja o polinômio

$$P(x) = (a - x)^p \cdot Q(x)$$

Então, a i-ésima derivade de $P(x)$ será:

$$P^{(i)}(a) = 0, \text{ se } i < p$$

Demonstração

$$P'(x) = -p(a - x)^{p-1} \cdot Q(x) + (a - x)^p \cdot Q'(x)$$

$$P''(x) = p(p-1)(a - x)^{p-2} \cdot Q(x) - 2p(a - x)^{p-1} \cdot Q'(x) + (a - x)^p \cdot Q''(x)$$

$$\vdots$$

$$P^{(i)}(x) = \frac{p!}{(p-i)!}(a - x)^{p-i} \cdot Q(x) + \cdots n \text{ termos com } (a - x)$$

Portanto,

$$P^{(i)}(a) = 0 \; ; \; se \; i < p$$

□

Capítulo 02 -A Irracionalidade do número e

Definimos números racionais como sendo os números que podem ser escritos na forma de uma razão $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$.Com base nesta definição, vamos demonstrar, por absurdo, que o número e é irracional. Para tanto, considera-se que o número e é um número racional e pode ser escrito na forma: $e = \frac{a}{b}$.

Sabemos que o número e pode ser escrito da seguinte maneira:

$$e = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Temos que:

$$e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \cdots + \frac{1}{b!}\right) = \frac{a}{b} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \cdots + \frac{1}{b!}\right)$$

Observamos que resta ainda uma infinidade de termos, ou seja:

$$\frac{a}{b} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \cdots + \frac{1}{b!}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{(b+1)!} + \frac{1}{(b+2)!} + \frac{1}{(b+3)!} \cdots\right) = \sum_{j=b+1}^{\infty} \frac{1}{j!}$$

O termo $\sum_{j=b+1}^{\infty} \frac{1}{j!}$ pode ser analisado da seguinte forma:

$$\sum_{j=b+1}^{\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{b!}\left(\frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)(b+3)} + \cdots\right) <$$

$$< \frac{1}{b!}\left(\frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^3} + \cdots\right) \qquad (1)$$

Observe que o termo $\left(\frac{1}{b+1}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^3}+\cdots\right)$ é uma série geométrica que converge para $\frac{a_1}{1-r}$, onde a_1 é o primeiro termo e r é a razão que, de acordo com o capítulo 01, será: $\frac{\frac{1}{b+1}}{1-\frac{1}{b+1}}=\frac{1}{b}$.

Substituindo este valor em (1), obtemos:

$$\sum_{j=b+1}^{\infty}\frac{1}{j!}=<\frac{1}{b!}\cdot\frac{1}{b}.$$

Donde,

$$0<\frac{a}{b}-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{b!}\right)<\frac{1}{b!}\cdot\frac{1}{b}.$$

E, multiplicando toda a expressão por $b!$, temos:

$$0<b!\left(\frac{a}{b}-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}-\cdots-\frac{1}{b!}\right)<\frac{1}{b}\ .$$

Analisando este resultado, observamos:

1) $b!\left(\frac{a}{b}-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}-\cdots-\frac{1}{b!}\right)$ é um numero inteiro, pois todos os denominadores da série,são cancelados ao serem multiplicados por $b!$.

2) $\frac{1}{b}$ é um número menor ou igual a 1, pois b é inteiro e diferente de zero.Estamos assim, afirmando que um número inteiro positivo é menor que 1, o que é absurdo.

Portanto o número e não pode escrito na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros, logo o número e não é racional e sim irracional. □

Capítulo 03 – A transcendência do número e.

Por definição um número transcendente é número real ou complexo que não seja a raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros. Com base nesta definição, vamos demonstrar, por absurdo, que o número e é transcendente, resolvendo os exercícios que o professor Figueiredo propõe em seu livro "Números irracionais e transcendentes".

Tal demonstração que faremos a seguir é baseada naquela que Hurwitz fez em 1893.

<u>Propriedade 3.1</u>

Seja um polinômio $P(x)$ de grau r. Definimos a seguinte função

$$F(x) = P(x) + P'(x) + P''(x) + P'''(x) + \ldots + P^{(r)}(x) \ ,$$

onde $P^{(i)}(x)$ representa a derivada de ordem i, é válida a expressão

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}F(x)\right) = -e^{-x}P(x).$$

Demonstração

Observe que temos uma derivada do produto e de acordo com o capítulo 01 item 1.2,

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}F(x)\right) = -e^{-x} \cdot F(x) + e^{-x} \cdot \frac{d}{dx}F(x) = -e^{-x}\left(F(x) - \frac{d}{dx}F(x)\right)$$

Desenvolvendo $\frac{d}{dx}F(x)$, temos:

$$\frac{d}{dx}F(x) = P'(x) + P''(x) + P'''(x) + \ldots + P^{(r)}(x) + P^{(r+1)}(x)$$

Assim,

$$\left(F(x)-\frac{d}{dx}F(x)\right)=\begin{bmatrix}\left(P(x)+P'(x)+P''(x)+P'''(x)+\cdots+P^{(r)}(x)\right)-\\ \left(P'(x)+P''(x)+P'''(x)+\cdots+P^{(r)}(x)+P^{(r+1)}(x)\right)\end{bmatrix}=P(x),$$

pois $P^{r+1}(x)\equiv 0$.

Logo:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}F(x)\right)=-e^{-x}P(x)$$

□

<u>Propriedade 3.2</u>

Dado um $k\in\mathbb{N}$, vale que

$$F(k)-e^{k}F(0)=-ke^{k(1-\theta_k)}P(k\theta_k)$$

para algum $0<\theta_k<1$.

Demonstração

Aplicando o teorema do valor médio, dado no capítulo 01 item 1.2,na função $f(x)=e^{-x}F(x)$, que é derivável em toda reta entre os pontos 0 e $k\in\mathbb{N}$ temos:

$$\frac{f(k)-f(0)}{k-0}=\frac{df}{dx}(\varphi),\ \varphi\in(0,k)$$

Ou seja,

$$\frac{e^{-k}F(k)-F(0)}{k-0}=-e^{-\varphi}P(\varphi)\Rightarrow e^{-k}F(k)-F(0)=-ke^{-\varphi}P(\varphi).$$

Multiplicando-se ambos os lados da equação por e^{k}, temos

$$e^k e^{-k}F(k)-e^kF(0)=-e^k k e^{-\varphi}P(\varphi)=-ke^{k-\varphi}P(\varphi).$$

Observe que o número φ pode ser escrito na forma $\varphi = k.\theta_k$, $\theta_k \in (0,1)$.

Assim,

$F(k)-e^kF(0)=-ke^{k(1-\theta_k)}P(k\theta_k)$ □

Definimos

$$\varepsilon_k \equiv F(k)-e^kF(0)=-ke^{k(1-\theta_k)}P(k\theta_k) \qquad (1)$$

E, supomos que o número e seja algébrico, isto é, que exista um polinômio $q(x)=c_nx^n+\cdots+c_1x+c_0$ de grau n, com coeficientes inteiros, $c_0 \neq 0$ e tal que $q(e)=0$.

Então,

$$q(e)=c_ne^n+\cdots+c_1e+c_0=0, \qquad (2)$$

e portanto,

$$c_ne^n+\cdots+c_1e=-c_0$$

<u>Propriedade 3.3</u>

Vale que: $c_0F(0)+c_1F(1)+\cdots+c_nF(n)=c_1\varepsilon_1+\cdots+c_n\varepsilon_n$ (3) para qualquer $P(x)$ de grau r.

Demonstração

Observe que da equação (1), obtemos:

$$\varepsilon_1 = -e^{1-\theta_1}P(\theta_1)$$

$$\varepsilon_2 = -2e^{2(1-\theta_2)}P(2\theta_2)$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon_n = -ne^{n(1-\theta_n)}P(n\theta_n) \tag{4}$$

Agora, explicitando $F(k)$ na equação (1) temos:

$$F(k) = -ke^{k(1-\theta_k)}P(k\theta_k) + e^k F(0).$$

Fazendo k variar de 1 a n, obtemos:

$$F(1) = -e^{(1-\theta_1)}p(\theta_1) + eF(0) \quad \Rightarrow \quad c_1F(1) = c_1\left(-e^{(1-\theta_1)}p(\theta_1)\right) + c_1(eF(0))$$

$$F(2) = -2e^{2(1-\theta_2)}p(2\theta_2) + e^2F(0) \quad \Rightarrow \quad c_2F(2) = c_2\left(-2e^{2(1-\theta_2)}p(2\theta_2)\right) + c_2\left(e^2F(0)\right)$$

$$F(n) = -ne^{n(1-\theta_n)}p(n\theta_n) + e^nF(0) \quad \Rightarrow \quad c_nF(n) = c_n\left(-ne^{n(1-\theta_n)}p(n\theta_n)\right) + c_n\left(e^nF(0)\right).$$

De (4) e das relações obtidas anteriormente, temos:

$$c_1F(1) + c_2F(2) + \cdots + c_nF(n) =$$

$$= c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + \cdots + c_n\varepsilon_n + \left(c_1e + c_2e^2 + \cdots + c_ne^n\right)F(0) \tag{5}$$

Substituindo o valor de (2) em (5) obtemos:

$$c_1F(1) + c_2F(2) + \cdots + c_nF(n) = c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + \cdots + c_n\varepsilon_n + (-c_0)F(0) \tag{6}$$

E, somando-se $(c_0)F(0)$ em ambos os lados de (6) temos:

$$c_0F(0) + c_1F(1) + \cdots + c_nF(n) = c_1\varepsilon_1 + \cdots + c_n\varepsilon_n \tag{7}$$

Com isso concluímos a demonstração da propriedade 3.3.

□

Agora, considere o polinômio $P(x)$ tal que:

$$P(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(1-x)^p \cdots (n-x)^p \tag{8}$$

Sendo p um número primo tal que $p > n$, $p > c_0$, onde n e c_0 são dados no item (2) da propriedade 3.3. A ideia agora é demonstrar que para tal polinômio $P(x)$, o lado esquerdo de (7) é um inteiro não divisível por p, enquanto o lado direito é menor que 1 em valor absoluto. Isso dará o absurdo.

<u>Propriedade 3.4</u>

Seja $Q(x)=\sum_{j=0}^{r} a_j x^j$ um polinômio com coeficientes inteiros, tal que $p < r$, então o produto $\frac{1}{(p-1)!}Q^{(i)}(x)$ para $i \geq p$, é um polinômio, com coeficientes inteiros, divisíveis por p.

Demonstração

Observe que

$$Q(x)=\sum_{j=0}^{r} a_j x^j$$

$$Q^{'}(x)=\sum_{j=1}^{r} j a_j x^{j-1} = \sum_{j=1}^{r} \frac{j!}{(j-1)!} a_j x^{j-1}$$

$$Q^{''}(x)=\sum_{j=2}^{r} j(j-1) a_j x^{j-2} = \sum_{j=2}^{r} \frac{j!}{(j-2)!} a_j x^{j-2}$$

Por indução finita mostra-se que a $i-ésima$ derivada de $Q(x)$ é:

$$Q^{(i)} = \sum_{j=i}^{r} \frac{j!}{(j-i)!} a_j x^{j-i} \text{ para } k \leq r \text{ e,}$$

$Q^{(k)}(x)=0,\ para\, k > r.(1)$

Mostraremos agora queo produto $\frac{1}{(p-1)!}Q^{(i)}(x)$ para $i \geq p$, é um polinômio, com coeficientes inteiros, divisíveis por p.

Assim,

$$\frac{1}{(p-1)!}\cdot\sum_{j=i}^{r}\frac{j!}{(j-i)!}a_j x^{j-i} = \sum_{j=i}^{r}\frac{j!}{(j-i)!\,i!}\cdot\frac{i!}{(p-1)!}a_j x^{j-i} =$$

$$= \sum\binom{j}{i}\frac{i(i-1)(i-2)\cdots p(p-1)!}{(p-1)!}a_j x^{j-i} \text{ , pois } i \geq p$$

Temos que o coeficiente éum número inteiro divisível por p.

□

<u>Propriedade 3.5</u>

Observe que o polinômio $P(x)=\frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(1-x)^p\cdots(n-x)^p$, dado em 3.3 equação (8), pode ser escrito na forma:

$$P(x)=\frac{(n!)^p}{(p-1)!}x^{p-1}+\frac{b_0}{(p-1)!}x^p+\cdots \tag{1}$$

Vale que:

(a) $P^{(i)}(k)=0; \quad k=1,2,\ldots,n; \quad i<p$

(b) $P^{(p-1)}(0)=(n!)^p$

(c) $P^{(i)}(0)=0; \quad i<p-1$

Demonstração

(a) e (c) seguem do item 1.4 do capítulo 01.

Para demonstrar (b) desenvolvemos o polinômio dado em (1)

$$(1-x)^p \cdot (2-x)^p \cdot (3-x)^p \cdot \ldots \cdot (n-x)^p =$$

$$= [(1-x)\cdot(2-x)\cdot(3-x)\cdot\ldots\cdot(n-x)]^p$$

Observe que temos n parcelas sendo multiplicadas termo a termo fornece:

$$\left[n! + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \cdots + \alpha_n x^n\right]^p =$$

$$= \left(n!^p + b_o x + b_1 x^2 + b_3 x^3 + \cdots + b_n x^{np}\right)$$

Substituindo o resultado encontrado em (3) na equação (1) temos:

$$P(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} \cdot \left(n!^p + b_o x + b_1 x^2 + b_2 x^3 + \cdots + b_n x^{np}\right) =$$

$$P(x) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!} x^{p-1} + \frac{b_o}{(p-1)!} x^p + \frac{b_1}{(p-1)!} x^{p+1} +$$

$$+ \frac{b_2}{(p-1)!} x^{p+2} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{(p-1)!} x^{p-1+np}$$

Portanto,

$$P^{(p-1)}(x) = \frac{n!}{(p-1)!}(p-1)! + \frac{b_0 x p!}{(p-1)!} + (parcelas\ com\ a\ variável\ x).$$

Logo:

$$P^{(p-1)}(0) = (n!)^p (p-1)! + \frac{b_0 \cdot 0 \cdot p!}{(p-1)!} + (\text{parcelas com a variável x} = 0) = (n!)^p$$

□

<u>Propriedade 3.6</u>

Seja $F(k)$ definido em 3.1, um inteiro divisível por p para $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. E,

$F(0)$ é inteiro não divisível por p .

Demonstração

Sendo $F(x) = P(x) + P'(x) + \ldots + P^{(i)}(x)$

$F(k) = P(k) + P'(k) + \ldots + P^{(i)}(k)$

Em virtude da propriedade 3.4 e da propriedade 3.5, item “a”, temos que $F(k), \quad k = (1,2,3\ldots,n)$ é divisível por p .

E que, $F(0) = P(0) + P'(0) + \cdots + P^{(i)}(0) = (n!)^p$ em virtude da propriedade 3.5, item “b”.

Como $p > n$ e p é primo, $(n!)^p$ não divide p .

Logo, $F(0)$ não é divisível por p .

$\square$

<u>Propriedade 3.7</u>

Dado que $0 < \theta_k < 1$, então vale

$$|\varepsilon_k| \leq \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}, \; para \;\; k \leq n$$

Demonstração

Observe que os ε_k definidos na propriedade 3.3, calculado para o polinômio P(x), definido na propriedade3.5, tem a forma:

$$\varepsilon_k = -ke^{k(1-\theta_k)} \frac{1}{(p-1)!} (k\theta_k)^{p-1} (1-k\theta_k)^p \ldots (n-k\theta_k)^p, \; 0 < \theta < 1$$

Assim,

$$|\varepsilon_k| = \left| -ke^{k(1-\theta_k)} \frac{1}{(p-1)!} (k\theta_k)^{p-1} (1-k\theta_k)^p \dots (n-k\theta_k)^p \right| =$$

$$\frac{1}{(p-1)!} |-k| \left| e^{k(1-\theta_k)} \right| \left| (k\theta_k)^{p-1} \right| \left| (1-k\theta_k)^p \right| \dots \left| (n-k\theta_k)^p \right| \leq$$

$$\frac{1}{(p-1)!} ne^{n(1-\theta_k)} |n\theta_k|^{p-1} |1-\theta_k|^p \dots |n-\theta_k|^p \leq$$

$$\frac{1}{(p-1)!} ne^n n^{p-1} = \frac{e^n n^p}{(p-1)!} \leq \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!} \ .$$

Logo:

$$|\varepsilon_k| \leq \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!} \text{, } para \ \ k \leq n$$

□

Propriedade 3.8

Se p for um número primo suficientemente grande, então: $|c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + \cdots + c_n\varepsilon_n| < 1$

Demonstração

$$|c_1\varepsilon_1 + \cdots + c_n\varepsilon_n| \leq |c_1\varepsilon_1| + \cdots + |c_n\varepsilon_n| \leq |c_1| \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!} + \cdots$$

$$\cdots + |c_n| \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!} = (|c_1| + \cdots + |c_n|) \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}$$

À medida que p cresce, o numerador é multiplicado por uma constante e o denominador é multiplicado por números cada vez maiores.

Logo, para p um número primo suficientemente grande o resultado será menor que 1, ou seja:

$$|c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + \cdots + c_n\varepsilon_n| \leq (|c_1| + \cdots + |c_n|) \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!} < 1$$

□

Teorema: O número e é transcendente.

Demonstração.

Supomos que o número e era algébrico, ou seja, existem coeficientes inteiros $c_0, c_1, \cdots, c_n$ $(com\ c_0 > 0)$, tais que $c_n e^n + \cdots + c_1 e + c_0 = 0$. Sabemos que $c_0 F(0) + \cdots + c_n F(n) = c_1\varepsilon_1 + \cdots + c_n\varepsilon_n$, pela propriedade 3.3. Pelos critérios de divisibilidade no item 3 do capítulo 01, segue-se que $c_0 F(0) + \cdots + c_n F(n)$ é um número inteiro não divisível por p.

Porém pela propriedade 3.8, temos que nessas mesmas condições $\left|c_1\varepsilon_1 + \cdots + c_n\varepsilon_n\right| < 1$, já que o único inteiro com módulo menor que 1 é zero, que é divisível por p, temos assim um absurdo.

Tal absurdo encontrado foi pelo fato de supor que e é um número algébrico. Assim o número e é transcendente como queríamos provar.

□

Capítulo 04 - Outros números Transcendentes

Determinar a transcendência de um número não é uma tarefa muito fácil como vimos no capítulo 03. De um modo geral os números são classificados como algébricos e transcendentes. Se um número real ou complexo satisfizer alguma equação da forma,

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$$

com coeficientes inteiros, dizemos que ele é um *número algébrico*. Se um número real não satisfizer nenhuma equação deste tipo dizemos que ele é um *número transcendente*.

Apresento a seguir, sem a preocupação nas demonstrações, alguns números transcendentes importantes e conhecidos, como sugestão de leitura futura.

1- O número π.

2- O número $2^{\sqrt{2}}$.

3- O número e^{π}.

4- O número $\log 2$.

5- Os números da forma $\alpha = 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}000001 + \cdots$, conhecidos como *números de Liouville*.

Uma curiosidade com o número $2^{\sqrt{2}}$ é que ele foi usado como exemplo específico, pelo grande matemático David Hilbert em 1900, quando apresentou uma famosa lista de vinte e três problemas que, a seu ver, eram os mais destacados problemas matemáticos ainda em aberto. Nesta famosa lista, especificamente, o sétimo problema de Hilbert consistia em decidir se α^{β} é algébrico ou transcendente, dado que α e β são números algébricos, sendo β irracional.

Em 1934, A. Geofond e, indepentemente, Th. Schneider provaram que, nesse caso, α^{β} é transcendente. Temos que $2^{\sqrt{2}}$ é um caso específico deste resultado geral.

Nos cursos de matemática de hoje, muitas vezes as demonstrações da transcendência desses números são propostos como exercícios de parte de algum capítulo e muitos alunos podem não se atentar para a importância histórica de tais demonstrações.

Ao escrever esta monografia, quis propor um pequeno texto escrito de uma forma acessível para todos os alunos que ingressarem num curso de matemática seja ele de bacharelado ou de licenciatura. Vou ficar com as palavras que o professor Djairo Figueiredo expressa de forma enfática em seu texto “um livro de matemática, e aqui vou estender aos artigos, monografias e teses, não devem ser lidos como um livro de romance, o leitor deve tentar desenvolver todas as passagens, exercícios e lacunas deixadas pelo autor”.

Referências

1. FIGUEIREDO, D.G. *Números irracionais e transcendentes. 3. edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.*

2. MAOR, ELI. e: *A história de um número. 4. edição. Rio de Janeiro/São Paulo: Editora Record, 2008.*

3. IEZZI. G. *Fundamentos de matemática elementar: logarítmos. 7. edição. Rio de Janeiro: editora Atual, 1991.*

4. NIVEN, I. M. N*úmeros Racionais e Irracionais. 1. Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.*