UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Tese de Doutorado

Teorema de Pappus, Representações de Schwartz e Representações Anosov

Viviane Pardini Valério

Orientador: Thierry Barbot Coorientador: Alberto Berly Sarmiento Vera

21 de março de 2016

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me permitir finalizar este trabalho, agradeço especialmente por ter me mantido no "caminho" inúmeras vezes que duvidei que daria certo. O que vou guardar de mais precioso desses quatro anos de doutorado são as amizades que fiz nesse "caminho".

Agradeço ao professor Alberto Sarmiento, meu coorientador, por ter me apresentado a teoria de sistemas dinâmicos Anosov, foi assim que tudo começou... Agradeço também pelos incontáveis encontros durante esses anos de doutorado. Conversamos sobre tantas coisas: desde matemática à vida no Peru e na França. Sarmiento, obrigada pelos ensinamentos matemáticos e pela amizade sincera.

Agradeço ao professor Mário Jorge Dias Carneiro pelas orientações acadêmicas e principalmente por uma longa conversa quando pensei em desistir do doutorado sanduíche na França. Seus conselhos foram muito valiosos. Segui todos à risca e deu certo.

Agradeço ao professor Thierry Barbot, meu orientador, por ter me recebido na Université d'Avignon, por ter me ensinado tantas coisas matemáticas legais e por ser sempre otimista e persistente. Quantas vezes perdemos a hora pensando no universo mágico das *Caixas Marcadas...* Foi muito divertido! Thierry, obrigada pelo ano maravilhoso que vivi em Avignon. Você tinha razão: hoje sou uma pessoa completamente diferente por essa experiência na França e realmente foi muito difícil dizer adeus. Obrigada pelas broncas e pelos elogios. Foi uma honra ter sido tua aluna.

Agradeço aos demais membros da banca, pela participação, leitura e sugestões que enriqueceram este trabalho: Carlos Maquera, Sérgio Fenley e Nikolai Goussevskii.

Agradeço aos professores e funcionários do Departamento de Matemática da UFMG pela formação matemática adquirida durante todos estes anos e pela amizade.

Agradeço ao Paulo Antônio, meu companheiro, por sempre acreditar em mim mais do que eu mesma. Você tinha razão: deu certo! Você é um ótimo assessor matemático e computacional em tempo integral. Você também descobriu o universo das *Caixas Marcadas*.

Agradeço a meus pais, irmãs, cunhados e sobrinhos pelas orações e por formarem o meu fã clube n^o 1 nesse doutorado. A torcida de vocês sempre me encheu de alegria e motivação para continuar em frente. Foi duro ficar longe de vocês um ano. Que bom que existe Skype!

Agradeço à Ana Beatriz, ao Eugênio, à Maria e ao Brother por sempre me apoiarem.

Agradeço aos amigos que fizeram parte dessa jornada. Aos amigos do Brasil, em especial do doutorado: Shirley pelas suas orações, Luiz, Gilberto, Carlos, Bulmer, Vítor, Divane, Fernando, Rafael... Vivemos grandes aventuras! Aos amigos de Avignon, que foram minha família durante um ano: Daiana, Paulo, Pedrinho, Marlice, Marta, Pascal, Joseana, Sílvia, Pedro, Pablo, Wladimir, Marilena, Luciana, Elvis (em memória), Leandro, Dayaleth, Anete, Cynthia, Juliana, Marthe, Diorela, Tik, Albina, Yonathan, Carlos Maquera, Philippe Michelon, Caroline Ramis, Moussa, Phuong, Chiara, Moslem Zamani... Quantas histórias... Quantos abraços apertados...

Finalmente agradeço à FAPEMIG e à CAPES pelo apoio financeiro.

A todos, o meu muito obrigada!

Resumo

No artigo "Pappus's Theorem and The Modular Group" de Richard Schwartz [SR], o clássico teorema de Pappus é visto como um sistema dinâmico definido num objeto chamado caixa marcada, que essencialmente é uma coleção de pontos e retas no plano projetivo. A dinâmica de Pappus no conjunto das caixas marcadas (CM) define naturalmente um grupo \mathfrak{G} isomorfo ao grupo $PSL(2,\mathbb{Z})$. As transformações projetivas e as dualidades juntas definem o grupo \mathcal{G} das simetrias projetivas que também age em CM. Schwartz mostra em [SR] que, dada uma caixa marcada [Θ], existe uma representação fiel $\rho_{\Theta} : PSL(2,\mathbb{Z}) \to \mathcal{G}$. Motivados pela construção de Schwartz, definimos uma família de representações Anosov $\rho_{\Theta}^{\lambda} : \Gamma_o \to \mathcal{G}$, onde $\lambda < 0$ e Γ_o é um subgrupo especial de índice 2 de $\Gamma \cong PSL(2,\mathbb{Z})$. Quando o parâmetro $\lambda \longrightarrow 0$ temos $\rho_{\Theta}^{\lambda} \longrightarrow \rho_{\Theta}$, representação de Schwartz que não é Anosov.

Palavras chaves: teorema de Pappus, grupo modular, grupo de simetrias projetivas, grafo de Farey, representação de Schwartz, grupo Gromov-hiperbólico, representações Anosov, métrica de Hilbert, norma Finsler.

Abstract

In the paper "Pappus's Theorem and The Modular Group" by Richard Schwartz [SR], the classical Pappus's theorem is seen as a dynamical system defined in an object called marked box, which is essentially a collection of points and lines in the projective plane. The dynamic of Pappus in the set of the marked boxes (CM) defines naturally a group \mathfrak{G} isomorphic to the group $PSL(2,\mathbb{Z})$. Projective transformations and dualities together define the group \mathcal{G} of projective symmetries which also acts on CM. Schwartz shows in [SR] that, given a marked box $[\Theta]$, there is a faithful representation $\rho_{\Theta} : PSL(2,\mathbb{Z}) \to \mathcal{G}$. Motivated by the construction of Schwartz, we define a family of Anosov representation $\rho_{\Theta}^{\lambda} : \Gamma_o \to \mathcal{G}$, where $\lambda < 0$ and Γ_o is a special subgroup of index 2 in $\Gamma \cong PSL(2,\mathbb{Z})$. When $\lambda \longrightarrow 0$ then $\rho_{\Theta}^{\lambda} \longrightarrow \rho_{\Theta}$, Schwartz representation that is not Anosov.

Keywords: Pappus's theorem, modular group, group of projective symmetries, Farey graph, Schwartz representation, Gromov-hyperbolic group, Anosov representations, Hilbert metric, Finsler norm.

Sumário

Agradecimentos Resumo Abstract Introdução								
					1	Pre	eliminares	5
						1.1	O plano projetivo e o plano projetivo dual	5
							1.1.1 Transformações e dualidades projetivas	8
	1.2	Variedade flag	10					
		1.2.1 Grupo \mathcal{G} das simetrias projetivas	11					
2	A d	linâmica do Teorema de Pappus através de caixas marcadas	16					
	2.1	Teorema de Pappus	16					
	2.2	Caixas marcadas	22					
		2.2.1 Convexidade em caixas marcadas	23					
		2.2.2 Interior convexo de caixas marcadas convexas	26					
	2.3	Grupo ${\cal G}$ das simetrias projetivas agindo em caixas marcadas	30					
	2.4	Transformações elementares de caixas marcadas	33					
		2.4.1 Grupo \mathfrak{G} das transformações elementares de caixas marcadas	35					
		2.4.2 O grupo \mathfrak{G} como o grupo modular	37					
	2.5	Grafo de Farey \mathcal{L}_o rotulado pela \mathfrak{G} -órbita de $[\Theta]$	40					
		2.5.1 Grafo de Farey \mathcal{L}_o	40					
		2.5.2 O 2-complexo simplicial associado ao grupo \mathfrak{G}	44					
		2.5.3 As ações dos grupos $\mathfrak{G} \in PSL(2,\mathbb{Z}) \in \mathfrak{L}_o$	47					
3	Rep	presentações de Schwartz	49					
	3.1	Representações de Schwartz $\rho_{\Theta} : PSL(2,\mathbb{Z}) \to \mathcal{G} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$	49					
	3.2	Lema da Profundidade	59					
	3.3	A aplicação Φ de Schwartz $PSL(2,\mathbb{Z})$ -equivariante $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	61					
4	Um	novo grupo e uma família de novas representações	63					
	4.1	Uma nova transformação σ_{λ} de caixas marcadas $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	63					
	4.2	Um novo grupo \mathfrak{G}^{λ} de transformações de caixas marcadas $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	71					

	4.3	O grupo Γ e seu subgrupo Γ_o de índice 2	72	
	4.4	Mais ações de grupos em \mathcal{L} e em CM	75	
	4.5	Uma família de novas representações $\rho_{\Theta}^{\lambda}: \Gamma_o \to \mathcal{H} \triangleleft \mathcal{G}$	76	
5	Nor	mas definidas pelas caixas marcadas	81	
	5.1	A métrica de Hilbert e a norma Finsler	82	
6	Rep	presentações Anosov	86	
	6.1	Grupos Gromov-hiperbólicos e seus bordos	87	
	6.2	Representações Anosov para grupos Gromov-hiperbólicos	90	
		6.2.1 Propriedades de representações Anosov	92	
	6.3	Uma família de representações Anosov	92	
		6.3.1 A aplicação Φ^{λ} com propriedade Γ_{o} -equivariante	93	
		6.3.2 As aplicações ν_+ e ν com propriedade Anosov	100	
		6.3.3 As representações de Schwartz não são Anosov	105	
	6.4	Trabalhos futuros	106	
A	Um	pouco mais sobre σ_{λ}	107	
Re	Referências Bibliográficas			

Introdução

Este trabalho de tese começou quando o professor Thierry Barbot me propôs estudar o artigo *"Pappus's Theorem and The Modular Group"* de Richard Schwartz [SR] (1994).

O objetivo inicial era enterder a semelhança entre as representações do grupo modular no grupo das simetrias projetivas ($\rho_{\Theta} : PSL(2,\mathbb{Z}) \to \mathcal{G}$), apresentadas no *teorema 2.4, p.194* de [SR], e as representações Anosov para grupos Gromov-hiperbólicos, conceito apresentado em [GW] (2012) e bem recentemente abordado em [GGKW] e [BCS] (2015).

Começamos por um clássico teorema de geometria projetiva atribuído a Pappus de Alexandria (290 d.C. - 350 d.C.), um dos últimos grandes matemáticos gregos da antiguidade. Esse teorema encontra-se na coletânea de seus trabalhos matemáticos conhecida como $\Sigma \Upsilon NA\Gamma \Omega \Gamma H$ (sinagoge, que significa coleção).



Figura 1 – **Teorema de Pappus:** Se os pontos a_1 , $a_2 e a_3$ são colineares e os pontos b_1 , $b_2 e b_3$ são colineares, então os pontos c_3 , $c_2 e c_1$ também são colineares.

Conforme dito por Schwartz, um pequeno toque faz o teorema de Pappus novo outra vez. E esse novo olhar é dado pelas iterações do próprio teorema que passa a ser visto como um sistema dinâmico. A grande "sacada" de Schwartz foi descrever essa dinâmica através de objetos batizados por ele de **caixas marcadas**, que essencialmente são coleções de pontos e retas no plano projetivo P(V). Quando o teorema é aplicado numa caixa marcada associada a uma configuração de Pappus, mais pontos e retas são produzidos. Portanto uma nova configuração de Pappus é criada e assim sucessivamente.

A dinâmica no mundo das caixas marcadas CM se dá pelas ações de dois grupos muito especiais: $\mathfrak{G} \in \mathcal{G}$.

O grupo \mathfrak{G} das transformações elementares de caixas marcadas é definido naturalmente pelas transformações (operações) τ_1 , τ_2 e *i* induzidas pelas iteradas do teorema de Pappus. Outra "sacada" de Schwartz foi perceber que \mathfrak{G} é isomorfo ao grupo modular $PSL(2,\mathbb{Z})$ e que, dada uma caixa marcada convexa [Θ], a \mathfrak{G} -órbita de [Θ] pode ser "codificada" por uma triangulação de Farey \mathcal{L}_o no plano hiperbólico \mathbb{H}^2 . Isso possibilita entender claramente como os elementos da \mathfrak{G} -órbita de [Θ] se encaixam (se aninham) vistos no plano projetivo P(V) ou vistos também no plano projetivo dual $P(V^*)$.

O grupo \mathcal{G} das simetrias projetivas é um subgrupo especial do grupo dos automorfismos da variedade flag $(Aut(\mathcal{F}))$. A ação de \mathcal{G} em CM se dá pelo fato que uma caixa marcada é uma coleção de flags, portanto é natural essa ação em CM.

Mergulhado nesse mundo das caixas marcadas, Schwartz mostra que, dada uma caixa marcada convexa $[\Theta]$, existe uma representação fiel $\rho_{\Theta} : PSL(2,\mathbb{Z}) \to \mathcal{G}$ tal que, $\forall m \in PSL(2,\mathbb{Z}) \in \forall$ $[\Psi] \in \mathfrak{G}$ -órbita de $[\Theta]$, vale $m[\Psi] = \rho_{\Theta}(m)[\Psi]$ (propriedade ρ_{Θ} -invariante).

O objetivo inicial desse trabalho era entender a semelhança entre as representações ρ_{Θ} : $PSL(2,\mathbb{Z}) \to \mathcal{G}$ de Schwartz e as representações Anosov para grupos Gromov-hiperbólicos

A teoria de representações Anosov foi introduzida por François Labourie em [LF] (2006) como uma ferramenta para estudar representações de Hitchin. Posteriormente essa teoria continuou sendo desenvolvida também por outros matemáticos: por Thierry Barbot em $[BT_1]$ (2010) e em $[BT_2]$ (2015), e por Olivier Guichard e Anna Wienhard em [GW] (2012) para grupos Gromovhiperbólicos. As representações Anosov têm desempenhado um papel central no desenvolvimento da teoria de Teichmüller como podemos ver em [BCS] (2015), artigo recente de Martin Bridgeman, Richard Canary e Andrés Sambarino. Nesse artigo [BCS], os espaços de Teichmüller são espaços de representações Anosov de um grupo Gromov-hiperbólico num grupo de Lie semi-simples.

Quanto ao objetivo inicial, verificamos que uma das propriedades de representações Anosov não é satisfeita pelas representações de Schwartz. Porém, tudo o que víamos na construção de Schwartz continuava nos sugerindo que estávamos próximos de representações Anosov; precisaríamos apenas modificar um pouco a construção original. E foi exatamente o que fizemos. Construímos um novo grupo \mathfrak{G}^{λ} de transformações de caixas marcadas, isomorfo a \mathfrak{G} , e tudo funcionou bem. Então o objetivo desse trabalho passou a ser a solução do seguinte problema que resolvemos nesta tese.

Problema de tese: Dada uma caixa marcada convexa $[\Theta]$, existe uma família de representações Anosov $\rho_{\Theta}^{\lambda} : \Gamma_o \to \mathcal{H} \cong PGL(3, \mathbb{R})$, onde $\lambda < 0$ e Γ_o é um subgrupo especial de índice 2 de $\Gamma \cong PSL(2, \mathbb{Z})$. Além disso, quando o parâmetro λ tende a zero, esse caminho (família) de representações Anosov ρ_{Θ}^{λ} é percorrido em direção à representação de Schwartz ρ_{Θ} que não é Anosov. A representação de Schwartz está na fronteira do domínio aberto $Rep_{An}(\Gamma_o, H)$ em $Rep(\Gamma_o, H)$.

O conteúdo deste trabalho é divido em seis capítulos e um pequeno apêndice no final.

No capítulo 1 apresentamos algumas definições e resultados elementares de geometria projetiva, que são usados nos capítulos posteriores. Nesse capítulo apresentamos com bastante detalhes o grupo \mathcal{G} das simetrias projetivas.

No capítulo 2 estudamos a dinâmica do Teorema de Pappus. Apresentamos a definição de caixas marcadas (CM) e o grupo \mathfrak{G} das transformações elementares de CM. Descrevemos também as ações de \mathfrak{G} em CM e as ações de $PSL(2,\mathbb{Z})$ e \mathfrak{G} na triangulação de Farey \mathcal{L}_o .

No capítulo 3 apresentamos o teorema de representação de Schwartz com uma nova demostração bem detalhada, diferente da original de Schwartz. Apresentamos também a aplicação Φ de Schwartz $PSL(2,\mathbb{Z})$ -equivariante.

No capítulo 4 definimos a nova transformação de caixas marcadas σ_{λ} que nos dá de presente um novo grupo \mathfrak{G}^{λ} cuja ação faz tudo funcionar bem para chegarmos a nossas representações Anosov. O único problema com que nos deparamos foi que os elementos de \mathfrak{G}^{λ} não comutam com as dualidades de \mathcal{G} agindo em CM. Neste capítulo também apresentamos o novo teorema de representações, semelhante ao teorema de representação de Schwartz, que garante a existência de uma família de representações $\rho_{\Theta}^{\lambda} : \Gamma_o \to \mathcal{H} \triangleleft \mathcal{G}$ com propriedade ρ_{Θ}^{λ} -invariante.

No capítulo 5 mostramos que, dado um ponto x no interior de uma dada caixa marcada convexa vista em P(V), podemos definir uma norma Finsler que chamaremos de norma de Hilbert em $T_x P(V)$, associada a essa caixa marcada. Iniciamos o capítulo 6 estudando grupos Gromov-hiperbólicos. Apresentamos a definição de representações Anosov para esses grupos e algumas propriedades. Em seguida verificamos que nossa família de representações, definida no capítulo 4, é de fato Anosov; usamos a norma Finsler, definida no capítulo 5, para garantir a propriedade Anosov de expansão e contração em nossas representações. No final desse capítulo mostramos que a representação de Schwartz não é Anosov.

Por fim, escrevemos um pequenos apêndice com o objetivo de apresentar um pouco mais ao leitor como chegamos na definição da transformação σ_{λ} com propriedades necessárias para a construção do nosso grupo \mathfrak{G}^{λ} .

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar algumas definições, notações e alguns resultados elementares que serão usados nos capítulos posteriores. De maneira especial, apresentaremos com bastantes detalhes o grupo das simetrias projetivas.

1.1 O plano projetivo e o plano projetivo dual

Seja V um espaço vetorial 3-dimensional sobre \mathbb{R} . Dois vetores $v \in \tilde{v}$ de V geram o mesmo subespaço 1-dimensional se existe um número real $\lambda \neq 0$ tal que $v = \lambda \tilde{v}$. Isto nos dá uma relação de equivalência ~ em $V \setminus \{0\}$:

$$v\sim \tilde{v} \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 \text{ tal que } v=\lambda \tilde{v}$$

Definição 1.1 O plano projetivo de V, que vamos denotar por P(V), é o conjunto das classes de equivalência dadas por \sim :

$$P(V) = (V \setminus \{0\}) / \sim$$

Ou seja, P(V) é o conjunto das retas em V passando pela origem.

Vamos denotar por [v] os elementos de P(V), sendo $v \in V$.

Definição 1.2 Seja V um espaço vetorial 3-dimensional sobre \mathbb{R} . O espaço vetorial dual de V, que vamos denotar por V^{*}, é definido como sendo o conjunto dos funcionais lineares em V:

 $V^* := \{v^* : V \to \mathbb{R} : v^* \ \acute{e} \ uma \ aplicação \ linear \}$

O plano projetivo dual de V, que denotamos por $P(V^*)$, é o plano projetivo de V^* .

Denotamos por $[v^*]$ os elementos de $P(V^*)$ sendo $v^* \in V^*$.

Definição 1.3 Uma reta projetiva (uma reta em P(V)) é o conjunto dos zeros de um funcional linear em V.

Podemos visualizar as retas projetivas como planos (espaços 2-dimensionais) em V passando pela origem. Assim, um elemento qualquer de $P(V^*)$ é uma reta de P(V). Logo, $P(V^*)$ é o espaço das retas de P(V) e, dualmente, P(V) é o espaço das retas de $P(V^*)$.

Sejam $p \in q$ pontos distintos de P(V); denotaremos por pq a reta projetiva que contém $p \in q$.

Analogamente, se $P \in Q$ são retas distintas em P(V), denotaremos por PQ, ou por $P \cap Q$, o ponto projetivo da interseção de $P \in Q$.

Neste trabalho trabalharemos com cartas afins de P(V). Recordamos então a definição de variedade diferenciável e a definição de carta afim de P(V).

Definição 1.4 Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto \mathcal{M} e uma família de aplicações injetivas $f_{\alpha}: U_{\alpha} \subset \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n$ de conjuntos abertos U_{α} de \mathcal{M} em \mathbb{R}^n tal que:

(1)

$$\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = \mathcal{M}$$

(2) para quaisquer α , β , com $U_{\alpha} \cap U_{\beta} = W \neq \emptyset$, o conjunto $f_{\alpha}(W)$ e $f_{\beta}(W)$ são conjuntos abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $f_{\beta} \circ f_{\alpha}^{-1}$ são diferenciáveis.

Um par (U_{α}, f_{α}) é uma **carta local** de \mathcal{M} . A família $\{(U_{\alpha}, f_{\alpha})\}$ satisfazendo (1) e (2) é um **atlas** de \mathcal{M} .

Na definição a seguir descrevemos como é a estrutura de variedade de P(V) que nos interessa.

Definição 1.5 Para cada reta projetiva L_{α} consideremos o aberto $U_{\alpha} = P(V) \setminus L_{\alpha}$ de P(V) e seja uma aplicação bijetiva $f_{\alpha} : U_{\alpha} \subset P(V) \to \mathbb{R}^2$ que satisfaz a definição de variedade diferenciável. Temos então um atlas $\{(U_{\alpha}, f_{\alpha})\}$ de P(V). Neste caso, cada par (U_{α}, f_{α}) é uma **carta afim** de P(V).

Observação 1.6 Muitas vezes, por abuso de linguagem, dizemos apenas que $U_{\alpha} = P(V) \setminus L_{\alpha}$ é uma carta afim de P(V) e dizemos também que a reta projetiva L_{α} é a reta no "infinito" com relação à carta afim U_{α} .

Os pontos distintos $p \in q$ de P(V) separam a reta projetiva pq em duas partes que chamamos de **segmentos**.

Seja t um ponto pertencente a pq diferente de $p \in q$. O segmento de pq que contém t será denotado por $\overline{pq_t}$.

Definição 1.7 Sejam a, b, c, d quatro pontos distintos de P(V). Dizemos que esses pontos estão em **posição geral** se são três a três não colineares, ou seja, se três a três não pertencem a uma mesma reta projetiva.

Sejam a, b, c, d pontos em posição geral em P(V). Esses quatro pontos, considerando a ordem a, b, c, d em que foram escritos, definem oito segmentos em P(V). Os pontos a e b separam a reta ab em dois segmentos, os pontos b e c separam a reta bc em dois segmentos, os pontos c e d separam a reta cd em dois segmentos e, da mesma forma, os pontos d e a separam a reta da em dois segmentos.

Definição 1.8 Um quadrilátero em P(V) de vértices a, b, c, d, nessa ordem, é uma reunião de quatro segmentos em P(V), sendo um segmento um dos dois segmentos que a e b separam a reta ab, outro segmento um dos dois que b e c separam a reta bc, outro segmento um dos dois que c e d separam a reta cd e o quarto segmento um dos dois que d e a separam a reta ad.

Observação 1.9 Segue dessa definição que quatro pontos em posição geral em P(V) definem 16 quadriláteros em P(V).

Seja v^* um funcional linear em V. Denotamos $\langle v^* | u \rangle = v^*(u), v^*$ avaliado em $u \in V$.

Definição 1.10 Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Uma função bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $V \times V \to \mathbb{R}$ simétrica ($\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$) e não degenerada ($\langle v, u \rangle = 0, v$ fixo e u qualquer $\Rightarrow v = 0$) é chamada **produto interno em** V.

A definição 1.10 equivale a escolher um automorfismo linear T em V tal que $T = T^*$.

Lema 1.11 Se V é um espaço vetorial com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então para todo funcional linear $f \in V^*$, existe um único vetor $v_f \in V$ tal que $f(u) = \langle u, v_f \rangle$.

Prova: Seja $J: V \to V^*$ definida por $v \mapsto J(v): V \to \mathbb{R}$ tal que $\langle J(v) | u \rangle = \langle u, v \rangle$. Observe que J é uma aplicação linear. Como $dim(V) = dim(V^*)$, basta verificar a injetividade de J para concluir que J é um isomorfismo linear entre V e V^* . Se J(v) = 0 para um dado $v \in V$, temos que $\langle J(v) | u \rangle = \langle u, v \rangle = 0$ para todo $u \in V$, então v = 0. Logo $ker(J) = \{0\}$ e portanto J é injetiva, como queríamos demonstrar. ■

O lema 1.11 nos diz que para cada produto interno em V existe um isomorfismo linear J entre V e V^* .

Observação 1.12 Os espaços vetoriais $V e (V^*)^* = V^{**}$ podem ser identificados através de um isomorfismo linear canônico $I : V \to V^{**}$ definido por $v \mapsto I(v) : V^* \to \mathbb{R}$, sendo o funcional linear I(v) dado por $\alpha \mapsto \langle I(v) | \alpha \rangle = \alpha(v)$.

1.1.1 Transformações e dualidades projetivas

Definição 1.13 Sejam V e W dois espaços vetoriais 3-dimensionais. Seja $T : V \to W$ um isomorfismo linear. Chamamos de **aplicação dual de** T o isomorfismo linear $T^* : W^* \to V^*$ induzido por T tal que $< T^*(w^*)|v> = < w^*|T(v)>$, com $w^* \in W^*$ e $v \in V$.

O isomorfismo linear $T: V \to W$ induz um isomorfismo projetivo $\tilde{T}: P(V) \to P(W)$. Da mesma forma, a aplicação dual $T^*: W^* \to V^*$ induz um isomorfismo projetivo $\tilde{T}^*: P(W^*) \to P(V^*)$.

Definição 1.14 Chamamos de **transformação projetiva** o automorfismo projetivo $\tilde{T} : P(V) \rightarrow P(V)$ induzido pelo automorfismo linear $T : V \rightarrow V$ tal que $\tilde{T}([v]) = [T(v)]$ para todo $[v] \in P(V)$.

O grupo dos isomorfismos lineares de V é isomorfo a $GL(V) \cong GL(3, \mathbb{R})$, o grupo das transformações projetivas de P(V) é isomorfo a $PGL(V) \cong PGL(3, \mathbb{R})$.

De maneira semelhante, sejam V e seu dual V^{*}. Seja $D: V \to V^*$ um isomorfismo linear.

Definição 1.15 Chamamos de **dualidade projetiva** o isomorfismo projetivo \tilde{D} : $P(V) \rightarrow P(V^*)$ induzido pelo isomorfismo linear $D : V \rightarrow V^*$ tal que $\tilde{D}([v]) = [D(v)]$ para todo $[v] \in P(V)$.

Definição 1.16 Uma polaridade projetiva é uma dualidade projetiva induzida por um produto interno euclidiano (definido positivo).

Consideremos o espaço vetorial V com uma base \mathcal{B} . Os pontos de P(V) podem ser representados em coordenadas nessa base por [x : y : z].

Lema 1.17 Sejam $p_i = [x_i : y_i : z_i]$, i = 1, 2, 3, 4, quatro pontos de P(V) em posição geral. Então existe uma única transformação projetiva que envia os pontos [1:0:0], [0:1:0], [0:0:1] e [1:1:1] nos pontos p_1 , p_2 , p_3 e p_4 , respectivamente.

Prova: Encontra-se na referência [PT] página 59.

Sejam quatro pontos a, b, c, d pertencentes a uma mesma reta projetiva L_{β} . Consideremos uma carta afim (U_{α}, f_{α}) de P(V) tal que $U_{\alpha} = P(V) \setminus L_{\alpha}$ e $L_{\alpha} \neq L_{\beta}$. Vamos denotar por $a_{\alpha} = f_{\alpha}(a), b_{\alpha} = f_{\alpha}(b), c_{\alpha} = f_{\alpha}(c)$ e $d_{\alpha} = f_{\alpha}(d)$ as imagens desses quatro pontos em \mathbb{R}^2 . Consideremos os segmentos de reta $\overline{a_{\alpha}c_{\alpha}}, \overline{b_{\alpha}c_{\alpha}}, \overline{b_{\alpha}d_{\alpha}}$ e seus respectivos comprimentos $|\overline{a_{\alpha}c_{\alpha}}|, |\overline{b_{\alpha}c_{\alpha}}|, |\overline{b_{\alpha}d_{\alpha}}|, |\overline{a_{\alpha}d_{\alpha}}|$ na métrica euclidiana de \mathbb{R}^2 .

Definição 1.18 A razão cruzada [a, b, c, d] dos pontos projetivos a, b, c, d, nessa ordem, é o valor dado por

$$[a, b, c, d] = \frac{|\overline{a_{\alpha}c_{\alpha}}|}{|\overline{b_{\alpha}c_{\alpha}}|} \cdot \frac{|\overline{b_{\alpha}d_{\alpha}}|}{|\overline{a_{\alpha}d_{\alpha}}|}.$$

Se um dos quatro pontos pertence à reta no "infinito" L_{α} , então os dois comprimentos que envolvem esse ponto são descartados na equação da razão cruzada.

Observação 1.19 As transformações projetivas preservam razão cruzada. Um resultado que decorre desse fato é o seguinte. Sejam quatro retas projetivas incidentes num feixe f cortadas por duas retas projetivas $L \ e \ L'$ como na figura a seguir. Sejam a, b, c, d os pontos de interseção de L com as retas passando por f. Sejam a', b', c', d' os pontos de interseção de L' com as retas passando por f. Existe uma transformação projetiva que manda os pontos a, b, c, d nos pontos a', b', c', d', respectivamente. Portanto as razões cruzadas $[a, b, c, d] \ e \ [a', b', c', d']$ são iguais.



Figura 1.1 – as razões cruzadas $[a, b, c, d] \in [a', b', c', d']$ são iguais

1.2 Variedade flag

Definição 1.20 Chamamos de variedade flag o conjunto dos pares $([u], [v^*])$ onde $[u] \in P(V)$ $e [v^*] \in P(V^*)$, com $\langle v^* | u \rangle = 0$. Denotamos essa variedade por \mathcal{F} . Um ponto de \mathcal{F} será chamado flag.

A variedade flag se identifica com o fibrado tangente projetivizado de P(V).

A imagem que podemos ter em mente de um flag é um par formado por um ponto de P(V)(uma reta de V) e por uma reta de P(V) (um plano de V) contendo este ponto (esta reta).

1.2.1 Grupo \mathcal{G} das simetrias projetivas

Nesta seção vamos apresentar um subgrupo especial do grupo dos automorfismos de \mathcal{F} chamado grupo das simetrias projetivas. Este grupo será definido através das transformações projetivas e dualidades de P(V).

Lembremos que na definição 1.20 de variedade flag temos que $([u], [v^*]) \in \mathcal{F}$ se $([u], [v^*]) \in P(V) \times P(V^*)$ e $\langle v^* | u \rangle = 0$.

• Sejam $T: V \to V$ um isomorfismo linear
e $\tilde{T}: P(V) \to P(V)$ a transformação projetiva induzida por T.

Consideremos o ponto

$$(\tilde{T}([u]), (\tilde{T}^{-1})^*([v^*])) \in P(V) \times P(V^*).$$

Se $([u],[v^*])\in\mathcal{F},$ pela condição dada na definição 1.13 de aplicação dual temos

$$<(T^{-1})^{*}(v^{*})|T(u)> = < v^{*}|T^{-1}(T(u))> = < v^{*}|u> = 0$$

Logo $(\tilde{T}([u]), (\tilde{T}^{-1})^*([v^*])) \in \mathcal{F}.$

Portanto podemos definir o automorfismo $\mathcal{T}: \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ dado por

$$\mathcal{T}(([u], [v^*])) = (\tilde{T}([u]), (\tilde{T}^{-1})^*([v^*])).$$
(1.1)

• Sejam $D: V \to V^*$ um isomorfismo linear e $\tilde{D}: P(V) \to P(V^*)$ a dualidade projetiva induzida por D.

Consideremos o ponto

$$(\tilde{I}^{-1}(\tilde{D}^{-1})^*([v^*]), \tilde{D}([u])) \in P(V) \times P(V^*),$$

onde $\tilde{I}^{-1}: P(V^{**}) \to P(V)$ é o isomorfismo projetivo induzido pelo inverso do isomorfismo linear canônico $I: V \to V^{**}$ que identifica os espaço V e V^{**} (veja observação 1.12).

Pela condição dada na definição 1.13, se $([u], [v^*]) \in \mathcal{F}$ temos

$$< D(u)|I^{-1}(D^{-1})^{*}(v^{*}) > = < (D^{-1})^{*}(v^{*})|D(u) >$$

 $= < v^{*}|D^{-1}D(u)) > = < v^{*}|u > = 0$

Logo $(\tilde{I}^{-1}(\tilde{D}^{-1})^*([v^*]), \tilde{D}([u])) \in \mathcal{F}.$

Portanto podemos definir o automorfismo $\mathcal{D}: \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ dado por

$$\mathcal{D}(([u], [v^*])) = (\tilde{I}^{-1}(\tilde{D}^{-1})^*([v^*]), \tilde{D}([u])).$$
(1.2)

Lema 1.21 Seja \mathcal{H} o conjunto dos automorfismos de \mathcal{F} definidos por transformações projetivas de P(V) como em (1.1). O conjunto \mathcal{H} é um subgrupo do grupo dos automorfismo de \mathcal{F} , $Aut(\mathcal{F})$.

Prova: Consideremos dois elementos de \mathcal{H}

$$\mathcal{T}_1(([u], [v^*])) = (\tilde{T}_1([u]), (\tilde{T}_1^{-1})^*([v^*])) \quad e \quad \mathcal{T}_2(([u], [v^*])) = (\tilde{T}_2([u]), (\tilde{T}_2^{-1})^*([v^*])).$$

É fácil ver que o automorfismo dado pela composição $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ é definido pela transformação projetiva $\tilde{T}_2 \tilde{T}_1 : P(V) \to P(V)$.

O elemento neutro de $\mathcal{H} \notin \mathcal{I}_d(([u], [v^*])) = (\tilde{I}_d([u]), (\tilde{I}_d^{-1})^*([v^*])) = (([u], [v^*]))$ definido pela transformação projetiva induzida pelo isomorfismo linear identidade de V em V.

Finalmente, dado

$$\mathcal{T}(([u], [v^*])) = (\tilde{T}([u]), (\tilde{T}^{-1})^*([v^*])) \in \mathcal{H}, \text{ temos que } \mathcal{T}^{-1}(([u], [v^*])) = (\tilde{T}^{-1}([u]), \tilde{T}^*([v^*])).$$

De fato,

$$\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(([u], [v^*])) = (\tilde{T}^{-1}\tilde{T}([u]), ((\tilde{T}^{-1}\tilde{T})^{-1})^*([v^*])) = (\tilde{I}_d([u]), (\tilde{I}_d^{-1})^*([v^*])) = (([u], [v^*])).$$

$$\ge \mathcal{T}\mathcal{T}^{-1}(([u], [v^*])) = (\tilde{T}\tilde{T}^{-1}([u]), ((\tilde{T}\tilde{T}^{-1})^{-1})^*([v^*])) = (\tilde{I}_d([u]), (\tilde{I}_d^{-1})^*([v^*])) = (([u], [v^*])).$$

Logo todo elemento de \mathcal{H} possui inverso em \mathcal{H} . Portanto o conjunto \mathcal{H} é um grupo.

Observação 1.22 O subgrupo \mathcal{H} é isomorfo a $PGL(V) \cong PGL(3, \mathbb{R})$.

Lema 1.23 Seja \mathcal{G} o conjunto formado pelos automorfismos de \mathcal{F} definidos pelas transformações projetivas de P(V) como em (1.1) e pelos automorfismos de \mathcal{F} definidos pelas dualidades de P(V) como em (1.2). O conjunto $\mathcal{G} \subset Aut(\mathcal{F})$ é fechado pela operação composição obedecendo as seguintes características: Denotemos por \mathcal{T} e \mathcal{T}_i automorfismos de \mathcal{F} definidos como em (1.1). Denotamos por \mathcal{D} e \mathcal{D}_i automorfismos de \mathcal{F} definidos como em (1.2), então

- (i) $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$ é um elemento de \mathcal{G} definido por transformação projetiva como em (1.1);
- (ii) $\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1$ é um elemento de \mathcal{G} definido por transformação projetiva como em (1.1);
- (iii) TD é um elemento de G definido por dualidades como em (1.2);
- (iv) \mathcal{DT} é um elemento de \mathcal{G} definido por dualidades como em (1.2).

Prova: (i) Segue do lema 1.21.

(ii) Sejam $\mathcal{D}_1 \in \mathcal{D}_2$ dois elementos de \mathcal{G} definidos por dualidades, ou seja,

$$\mathcal{D}_1(([u], [v^*])) = (\tilde{I}^{-1}(\tilde{D}_1^{-1})^*([v^*]), \tilde{D}_1([u])) \quad e \quad \mathcal{D}_2(([u], [v^*])) = (\tilde{I}^{-1}(\tilde{D}_2^{-1})^*([v^*]), \tilde{D}_2([u]))$$

Temos

$$\mathcal{D}_{2}\mathcal{D}_{1}(([u], [v^{*}])) = \mathcal{D}_{2}(\tilde{I}^{-1}(\tilde{D}_{1}^{-1})^{*}([v^{*}]), \tilde{D}_{1}([u])) = (\tilde{I}^{-1}(\tilde{D}_{2}^{-1})^{*}\tilde{D}_{1}([u]), \tilde{D}_{2}\tilde{I}^{-1}(\tilde{D}_{1}^{-1})^{*}([v^{*}])).$$
Portanto para verificar (1.1), devemos verificar que $((\tilde{I}^{-1}(\tilde{D}_{2}^{-1})^{*}\tilde{D}_{1})^{-1})^{*} = \tilde{D}_{2}\tilde{I}^{-1}(\tilde{D}_{1}^{-1})^{*}.$
De fato, $((\tilde{I}^{-1}(\tilde{D}_{2}^{-1})^{*}\tilde{D}_{1})^{-1})^{*} = ((\tilde{I}^{-1}(\tilde{I}\tilde{D}_{2}^{-1})\tilde{D}_{1})^{-1})^{*} = ((\tilde{D}_{2}^{-1}\tilde{D}_{1})^{-1})^{*} = (\tilde{D}_{1}^{-1}\tilde{D}_{2})^{*} = \tilde{D}_{2}^{*}(\tilde{D}_{1}^{-1})^{*} = \tilde{D}_{2}\tilde{I}^{-1}(\tilde{D}_{1}^{-1})^{*}, \text{ como queríamos.}$

(Nessa prova, usamos as relações
 $(\tilde{D}^{-1})^* = \tilde{I}\tilde{D}^{-1}$ e $\tilde{D}^* = \tilde{D}\tilde{I}^{-1}.)$

(*iii*) Sejam $\mathcal{T} \in \mathcal{D}$ dois elementos de \mathcal{G} , definidos por transformação projetiva e dualidade respectivamente, ou seja,

$$\mathcal{T}(([u], [v^*])) = (\tilde{T}([u]), (\tilde{T}^{-1})^*([v^*])) \quad e \quad \mathcal{D}(([u], [v^*])) = (\tilde{I}^{-1}(\tilde{D}^{-1})^*([v^*]), \tilde{D}([u]))$$

Temos

$$\mathcal{TD}(([u], [v^*])) = \mathcal{T}(\tilde{I}^{-1}(\tilde{D}^{-1})^*([v^*]), \tilde{D}([u])) = (\tilde{T}\tilde{I}^{-1}(\tilde{D}^{-1})^*([v^*]), (\tilde{T}^{-1})^*\tilde{D}([u])).$$

Portanto para verificar (1.2), devemos verificar que $\tilde{I}^{-1}(((\tilde{T}^{-1})^*\tilde{D})^{-1})^* = \tilde{T}\tilde{I}^{-1}(\tilde{D}^{-1})^*$.

De fato, $\tilde{I}^{-1}(((\tilde{T}^{-1})^*\tilde{D})^{-1})^* = \tilde{I}^{-1}(\tilde{D}^{-1}\tilde{T}^*)^* = \tilde{I}^{-1}\tilde{T}^{**}(\tilde{D}^{-1})^* = \tilde{T}\tilde{I}^{-1}(\tilde{D}^{-1})^*$, como queríamos verificar.

(Nessa prova, usamos a relação $\tilde{T}\tilde{I}^{-1}=\tilde{I}^{-1}\tilde{T}^{**}.)$

(iv) Sejam $\mathcal{T} \in \mathcal{D}$ como em (iii),

Temos

$$\mathcal{DT}(([u], [v^*])) = \mathcal{D}(\tilde{T}([u]), (\tilde{T}^{-1})^*([v^*])) = (\tilde{I}^{-1}(\tilde{D}^{-1})^*(\tilde{T}^{-1})^*([v^*]), \tilde{D}\tilde{T}([u]))$$
$$= (\tilde{I}^{-1}((\tilde{D}\tilde{T})^{-1})^*([v^*]), \tilde{D}\tilde{T}([u])), \text{ como queríamos verificar.} \blacksquare$$

Lema 1.24 *O conjunto* $\mathcal{G} \subset Aut(\mathcal{F})$ *é de fato um subgrupo de* $Aut(\mathcal{F})$ *.*

Prova: Pelo lema 1.23, composição de elementos de \mathcal{G} resulta em elementos de \mathcal{G} .

O elemento neutro de \mathcal{G} é $\mathcal{I}_d(([u], [v^*])) = (\tilde{I}_d([u]), (\tilde{I}_d^{-1})^*([v^*])) = (([u], [v^*]))$, como no lema 1.21. Novamente pelo lema 1.23, consideremos $g \in \mathcal{G}$. Se $g = \mathcal{T} \in \mathcal{H}$, escrevemos $\mathcal{T}(([u], [v^*])) = (\tilde{T}([u]), (\tilde{T}^{-1})^*([v^*]))$ e seu inverso é $\mathcal{T}^{-1}(([u], [v^*])) = (\tilde{T}^{-1}([u]), \tilde{T}^*([v^*]))$. Se $g = \mathcal{D} \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$, escrevemos $\mathcal{D}(([u], [v^*])) = (\tilde{I}^{-1}(\tilde{D}^{-1})^*([v^*]), \tilde{D}([u]))$ e o inverso de \mathcal{D} é o próprio \mathcal{D} , ou seja, $\mathcal{D}^{-1} = \mathcal{D}$ (\mathcal{D} é involução). Logo o conjunto \mathcal{G} é de fato um subgrupo de $Aut(\mathcal{F})$. ■

Definição 1.25 Chamamos o subgrupo \mathcal{G} do grupo $Aut(\mathcal{F})$ de grupo das simetrias projetivas .

Corolário 1.26 O subgrupo \mathcal{H} de \mathcal{G} possui índice 2.

Prova: Primeiramente vamos observar que $\forall h \in \mathcal{H}, \forall g \in \mathcal{G} \Rightarrow ghg^{-1} \in \mathcal{H}$. De fato, se $g \in \mathcal{H}$ temos $ghg^{-1} \in \mathcal{H}$ pelo lema 1.23 item (i). Agora se $g \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$ temos $ghg^{-1} \in \mathcal{H}$ pelo lema 1.23, itens (iii) e (ii). Logo \mathcal{H} é um subgrupo normal de \mathcal{G} . Portanto podemos definir o grupo quociente

$$\mathcal{G}/\mathcal{H} = \{g\mathcal{H} \mid g \in \mathcal{G}\}.$$

Sejam $g_1, g_2 \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$ tais que $g_1 \neq g_2$. Seja $h \in \mathcal{H}$; pelo lema 1.23, temos $g_2^{-1}g_1h \in \mathcal{H}$. Logo $g_1\mathcal{H} = g_2\mathcal{H}$. Daí o grupo quociente \mathcal{G}/\mathcal{H} possui apenas dois elementos,

$$\mathcal{G}/\mathcal{H} = \{\mathcal{H}, g\mathcal{H} \mid g \notin \mathcal{H}\} = \{\mathcal{H}, \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}\},$$

Portanto o índice de \mathcal{H} em \mathcal{G} é 2.

Corolário 1.27 O subgrupo \mathcal{G} de $Aut(\mathcal{F})$ é gerado por \mathcal{H} e uma polaridade projetiva.

Prova: Seja $g \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$ uma polaridade projetiva. Se $\mathcal{D} \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$ temos que $\mathcal{D} = g\mathcal{T}$ sendo $\mathcal{T} = g^{-1}\mathcal{D} \in \mathcal{H}$. Logo \mathcal{G} é gerado por $\mathcal{H} \in g$.

Capítulo 2

A dinâmica do Teorema de Pappus através de caixas marcadas

Neste capítulo vamos apresentar o clássico teorema de Pappus no plano projetivo P(V). Em seguida vamos estabelecer algumas ideias importantes a partir das quais vamos desenvolver este trabalho de tese.

Conforme dito por Schwartz em [SR], um pequeno toque faz o teorema de Pappus novo outra vez. E esse novo olhar será dado pelas iteradas do próprio teorema que será visto como um sistema dinâmico.

2.1 Teorema de Pappus

O teorema de Pappus afirma que dado um conjunto de pontos colineares a_1 , a_2 , a_3 , e um outro conjunto de pontos colineares b_1 , b_2 , b_3 , então os pontos de interseção c_3 , c_2 , c_1 dos pares de retas a_1b_2 e a_2b_1 , a_1b_3 e a_3b_1 , a_2b_3 e a_3b_2 , respectivamente, são colineares.



Figura 2.1 – teorema de Pappus em condições genéricas



Figura 2.2 – teorema de Pappus em condições degeneradas



Figura 2.3 – teorema de Pappus em condições degeneradas

Definição 2.1 Dizemos que o teorema de Pappus está em **condições genéricas** se a_1 , a_2 , a_3 são pontos distintos de uma reta L_a , assim como b_1 , b_2 , b_3 são pontos distintos de uma reta L_b , de forma que $a_i \notin L_b$ e $b_i \notin L_a$, para i = 1, 2, 3.

Caso contrário, o teorema de Pappus está em condições degeneradas.

Na figura 2.1 temos Pappus em condições genéricas, já nas figuras 2.2 e 2.3 temos Pappus em condições degeneradas. É óbvio que em condições degeneradas, o terorema de Pappus é imediato.

Definição 2.2 Dizemos que o conjunto (ordenado) de pontos $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$ é uma **configuração de Pappus** se o teorema de Pappus está em condições genéricas para estes pontos.

Como queremos condições de iterar o teorema de Pappus infinitas vezes para termos dinâmica, só nos importa o teorema de Pappus em condições genéricas. Então vamos a uma demonstração algébrica desse teorema.

Teorema 2.3 (Teorema de Pappus no plano projetivo P(V))

Seja a configuração de Pappus dada pelo conjunto de pontos projetivos $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$. Então os três pontos de interseção $c_3 = a_1b_2 \cap a_2b_1$, $c_2 = a_1b_3 \cap a_3b_1$ e $c_1 = a_2b_3 \cap a_3b_2$ são colineares em P(V).



Figura 2.4 – teorema de Pappus numa carta afim de P(V)

Prova: Observe que os pontos $b_1, b_2 \in L_b$ e $a_1, a_2 \in L_a$ estão em posição geral em P(V). Consideremos o espaço vetorial V com uma base \mathcal{B} , então pelo lema 1.17 existe uma transformação projetiva que manda os quatro pontos b_1, b_2, a_1, a_2 nos pontos de coordenadas [1 : 0 : 0],[0:1:0], [0:0:1], [1:1:1] na base \mathcal{B} , respectivamente. Vamos considerar então $b_1 = [1:0:0],$ $b_2 = [0:1:0], a_1 = [0:0:1]$ e $a_2 = [1:1:1].$

Considerando esses 4 pontos nessas coordenadas, temos que as retas projetivas L_b , a_1b_2 , L_a e a_2b_1 são respectivamente $\{z = 0\}$, $\{x = 0\}$, $\{x = y\}$ e $\{y = z\}$. Desta forma $a_1b_2 \cap a_2b_1 = c_3$ é dado por $\{x = 0\} \cap \{y = z\} = t(0, 1, 1) \Rightarrow c_3 = [0 : 1 : 1].$

Observe também que $b_3 \in L_b = \{z = 0\}$ e $b_3 \notin \{b_1, b_2\} \Rightarrow b_3 = [1 : \beta : 0]$ com $\beta \neq 0$. Da mesma forma, $a_3 \in L_a = \{x = y\}$ e $a_3 \notin \{a_1, a_2\} \Rightarrow a_3 = [1 : 1 : \alpha]$ com $\alpha \neq 1$.

Determinados a_3 e b_3 , temos que as retas projetivas a_3b_1 e a_1b_3 são $\{z = \alpha y\}$ e $\{y = \beta x\}$, respectivamente. Então o ponto $c_2 = a_1b_3 \cap a_3b_1$ é dado por $\{z = \alpha y\} \cap \{y = \beta x\} = t(1, \beta, \beta \alpha)$ $\Rightarrow c_2 = [1 : \beta : \beta \alpha].$

Para determinar c_1 observe que a reta projetiva a_3b_2 é dada por $\{z = \gamma x\}$ e a reta projetiva a_2b_3 é dada por $\{y - z = \beta(x - z)\}$. Logo $c_1 = a_2b_3 \cap a_3b_2$ é $c_1 = [1 : \beta + \alpha - \beta\alpha : \alpha]$.

Finalmente com os três pontos c_1 , $c_2 \in c_3$ em coordenadas [x : y : z], vamos verificar que o determinante da matriz cujas colunas são c_1 , $c_2 \in c_3$ é igual a zero.

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ \beta + \alpha - \beta \alpha & \beta & 1\\ \alpha & \beta \alpha & 1 \end{pmatrix} = \beta + \alpha - (\beta + \alpha - \beta \alpha + \beta \alpha) = 0.$$

Portanto os pontos c_1 , c_2 e c_3 são colineares em P(V).

Os pontos a_1 , a_2 , a_3 , b_1 , b_2 , b_3 , nas coordenadas apresentadas na demonstração desse teorema, serão usados na prova do lema do teorema de representação de Schwartz no próximo capítulo.

Vamos lembrar que queremos uma dinâmica determinada por infinitas iteradas do teorema de Pappus. Com esse propósito, é necessário e suficiente que os conjuntos de pontos $\{a_1, a_2, a_3, c_3, c_2, c_1\}$ e $\{c_3, c_2, c_1, b_1, b_2, b_3\}$ sejam duas novas configurações de Pappus.



Figura 2.5 – primeiras iteradas do teorema de Pappus

Consideremos novamente os 6 pontos projetivos $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ da configuração de



Figura 2.6 – segundas iteradas do teorema de Pappus

Pappus e os pontos das interseções c_1 , c_2 , c_3 escritos em coordenadas na base \mathcal{B} como na prova que apresentamos do teorema de Pappus.

$$a_{1} = [0:0:1], \qquad a_{2} = [1:1:1], \qquad a_{3} = [1:1:\alpha]$$

$$b_{1} = [1:0:0], \qquad b_{2} = [0:1:0], \qquad b_{3} = [1:\beta:0]$$

$$c_{1} = [1:\beta + \alpha - \beta\alpha:\alpha], \qquad c_{2} = [1:\beta:\beta\alpha] \qquad e \qquad c_{3} = [0:1:1].$$

Corolário 2.4 Se os pontos a_1 , a_2 , a_3 , b_1 , b_2 , b_3 , c_1 , c_2 , c_3 do teorema de Pappus estão escritos na base \mathcal{B} então $\beta \notin \{0,1\}$ e $\alpha \notin \{0,1\}$.

Prova:Na prova do teorema de Pappus já foi visto que $\alpha \neq 1$ e $\beta \neq 0.$

Por hipótese os pontos a_1 , a_2 , a_3 , b_1 , b_2 , b_3 são todos distintos, então $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ não ocorrem simultaneamente, caso contrário teríamos $a_3 = b_3$.

Agora se $\alpha = 0 \Rightarrow \beta \neq 1 \Rightarrow b_3 = c_1 = c_2$. Logo $b_3 = a_2b_3 \cap a_3b_2 \Rightarrow a_3 \in L_b \Rightarrow a_3 = L_a \cap L_b$, absurdo! E se $\beta = 1 \Rightarrow \alpha \neq 0 \Rightarrow a_3 = c_1 = c_2$. Logo $a_3 = a_2b_3 \cap a_3b_2 \Rightarrow b_3 \in L_a \Rightarrow b_3 = L_a \cap L_b$, absurdo! Portanto temos $\beta \notin \{0, 1\}$ e $\alpha \notin \{0, 1\}$.

Corolário 2.5 Os pontos projetivos c_1 , c_2 , c_3 do teorema de Pappus são pontos distintos.

Prova: Vamos considerar estes pontos escritos na base \mathcal{B} , então escrevemos

 $c_1 = [1 : \beta + \alpha - \beta \alpha : \alpha], \quad c_2 = [1 : \beta : \beta \alpha] \quad e \quad c_3 = [0 : 1 : 1].$

É imediato que $c_3 \notin \{c_1, c_2\}$. Agora se $c_1 = c_2 \Rightarrow \beta + \alpha - \beta \alpha = \beta$ e $\alpha = \beta \alpha \Rightarrow \alpha = 0$ ou $\beta = 1$, absurdo pelo corolário 2.4. Portanto c_1, c_2, c_3 são pontos distintos.

Corolário 2.6 Se o conjunto de pontos $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$ é uma configuração de Pappus, então os conjuntos $\{a_1, a_2, a_3, c_3, c_2, c_1\}$ e $\{c_3, c_2, c_1, b_1, b_2, b_3\}$ são duas novas configurações de Pappus.

Prova: Primeiramente vamos determinar a equação da reta projetiva L_c que contém os pontos c_1 , c_2 , c_3 . Consideremos os pontos c_2 e c_3 para determinar a equação de L_c . Agora basta calcular o determinante a seguir e igualá-lo a zero.

$$det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ y & \beta & 1 \\ z & \beta \alpha & 1 \end{pmatrix} = (\beta - \beta \alpha)x - y + z = 0$$

Temos então que $L_c = \{(\beta - \beta \alpha)x - y + z = 0\}$. Na prova do teorema de Pappus vimos que $L_b = \{z = 0\}$ e $L_a = \{x = y\}$. Observe que L_a , L_b e L_c são três retas distintas em P(V).

Finalmente, para provar o resultado desejado, basta verificar que $a_i \notin L_c$, $c_i \notin L_a$, $b_i \notin L_c$ e $c_i \notin L_b$, para i = 1, 2, 3. Mas isso decorre de verificações diretas pelos valores possíveis de $\beta \in \alpha$ encontrados no corolário 2.4.

Concluímos, enfim, que uma configuração de Pappus sempre nos presenteia com duas novas configurações de Pappus. Assim podemos fazer infinitas iteradas do teorema de Pappus, logo temos dinâmica.

2.2 Caixas marcadas

Nesta seção vamos considerar o teorema de Pappus como um sistema dinâmico definido num objeto que chamaremos de caixa marcada, que essencialmente é uma coleção de pontos e retas em P(V). Quando Pappus é aplicado numa caixa marcada, outras retas e outros pontos projetivos são gerados.

Definição 2.7 Uma caixa sobremarcada Θ é um par de sêxtuplas especiais. A primeira sêxtupla é formada por pontos distintos p, q, r, s, t, b de P(V) e a segunda sêxtupla é formada por retas distintas P, Q, R, S, T, B de P(V), com as relações de incidências apresentadas na figura 2.7, onde esboçamos Θ numa carta afim de P(V). Em particular,

$$T \cap B \notin \{p, q, r, s, t, b\}, S = bp, R = bq, P = ts, Q = tr, T = pq \ e \ B = rs$$

O top flag de Θ é o par (t,T). O bottom flag de Θ é o par (b,B). As retas distinguidas de Θ são T e B, e os pontos distinguidos top e bottom são t e b, respectivamente.

Uma caixa sobremarcada Θ , com essas configurações será denotada por $\Theta = ((p, q, r, s; t, b), (P, Q, R, S; T, B)).$



Figura 2.7 – caixa sobremarcada Θ numa carta afim de P(V)

Da mesma forma que esboçamos Θ numa carta afim de P(V) como na figura 2.7, podemos esboçar Θ numa carta afim de $P(V^*)$ como na figura 2.8.

Vamos denotar o conjunto das caixas sobremarcadas por CSM.

Consideremos a involução $j: CSM \to CSM$ dada por

 $((p, q, r, s; t, b), (P, Q, R, S; T, B)) \mapsto ((q, p, s, r; t, b), (Q, P, S, R; T, B)).$



Figura 2.8 – caixa sobremarcada Θ numa carta afim de $P(V^*)$

Definição 2.8 Uma caixa marcada é uma classe de equivalência de caixas sobremarcadas sob a involução j.

Seja Θ uma caixa sobremarcada. Denotamos por $[\Theta]$ a caixa marcada (classe de equivalência) de Θ por j. Uma caixa marcada possui apenas dois representantes de classe;

$$[\Theta] = [j(\Theta)] = \{\Theta, j(\Theta)\}.$$

Vamos denotar o conjunto das caixas marcadas por CM.

2.2.1 Convexidade em caixas marcadas

Definição 2.9 A caixa sobremarcada $\Theta = ((p, q, r, s; t, b), (P, Q, R, S; T, B))$ é dita convexa se as 4 condições a seguir são realizadas:

- 1. $p \ e \ q \ separam \ t \ e \ T \cap B$ na reta projetiva T;
- 2. $r \ e \ s \ separam \ b \ e \ T \cap B$ na reta projetiva B;
- 3. $P \in Q$ separam $T \in bt$ no feixe de retas em t;
- 4. $R \in S$ separam $B \in bt$ no feixe de retas em b.

Vê-se que as duas primeiras condições implicam as duas últimas e vice-versa.

A caixa sobremarcada na figura 2.9 não cumpre a primeira condição da definição acima, logo é uma caixa sobremarcada não convexa.



Figura 2.9 – caixa sobremarcada não convexa

É imediato observar que convexidade de caixas sobremarcadas é preservada pela relação de equivalência (involução j) que define caixas marcadas.

Definição 2.10 A caixa marcada $[\Theta]$ é **convexa** se as duas caixas sobremarcadas que a representam são convexas.

Numa caixa sobremarcada $\Theta = ((p, q, r, s; t, b), (P, Q, R, S; T, B))$ os pontos distintos p, t, q, s, b, rsão naturalmente identificados a uma configuração de Pappus na notação da figura 2.1.

$$a_1 = p, a_2 = t, a_3 = q \in b_1 = s, b_2 = b, b_3 = r$$

De fato, como nenhum dos pontos p, t, q, s, b, r é igual a $T \cap B$, então o conjunto de pontos $\{p, t, q, s, b, r\}$ satisfaz a definição 2.2 de configuração de Pappus.

Vamos considerar novamente o espaço vetorial V com a base \mathcal{B} como na prova do teorema de Pappus. Então os pontos a_1 , a_2 , a_3 , b_1 , b_2 b_3 da configuração de Pappus são escritos como se segue.

$$a_{1} = [0:0:1], \qquad a_{2} = [1:1:1], \qquad a_{3} = [1:1:\alpha]$$

$$b_{1} = [1:0:0], \qquad b_{2} = [0:1:0], \qquad b_{3} = [1:\beta:0]$$

$$c_{1} = [1:\beta + \alpha - \beta\alpha:\alpha], \qquad c_{2} = [1:\beta:\beta\alpha] \qquad e \qquad c_{3} = [0:1:1].$$

Vimos na seção anterior que $\beta \notin \{0,1\}$ e $\alpha \notin \{0,1\}$. Vimos também que sempre podemos iterar o teorema de Pappus. Agora queremos um pouco mais: desejamos uma configuração de

Pappus associada a uma caixa marcada convexa. Como convexidade é preservada pela relação de equivalência que define caixas marcadas, enunciamos o resultado a seguir para caixas marcadas e não sobremarcadas.

Lema 2.11 A caixa marcada $[\Theta]$, determinada pelos pontos a_i, b_i, c_i com as coordenadas acima, é convexa se, e somente se, $\beta > 1$, $0 < \alpha < 1$.

Prova: Iniciamos a prova lembrando que a reta L_a que contém os pontos a_1, a_2, a_3 , é dada por $\{x = y\}$ e a reta L_b que contém os pontos b_1, b_2, b_3 é dada por $\{z = 0\}$. Logo $L_a \cap L_b = [1:1:0]$.

Sejam $a_1 = [0:0:1], a_2 = [1:1:1], a_3 = [1:1:\alpha], L_a \cap L_b = [1:1:0]$ pertencentes a L_a . Observe na figura a seguir os pontos projetivos (retas em V) $a_1, a_2, L_a \cap L_b$ esboçados no plano $\{x = y\} = L_a$.



Figura 2.10 – $\{x = y\} = L_a$

É imediato que a primeira condição da definição 2.9 de convexidade é satisfeita se, e somente se, $0 < \alpha < 1$.

Sejam $b_1 = [1:0:0], b_2 = [0:1:0], b_3 = [1:\beta:0], L_a \cap L_b = [1:1:0]$ pertencentes a L_b . Observe na figura a seguir os pontos projetivos (retas em V) $b_1, b_2, L_a \cap L_b$ esboçados no plano $\{z=0\} = L_b$.



Figura 2.11 – $\{z = 0\} = L_b$

É imediato que a segunda condição da definição 2.9 de convexidade é satisfeita se, e somente se, $\beta > 1$. Portanto $[\Theta]$ é convexa $\Leftrightarrow \beta > 1$ e $0 < \alpha < 1$.

2.2.2 Interior convexo de caixas marcadas convexas

Tomemos uma caixa sobremarcada convexa

$$\Theta = ((p,q,r,s;t,b), (P,Q,R,S;T,B)).$$

Vimos no capítulo 1 que quatro pontos em posição geral definem 16 quadriláteros em P(V)(veja observação 1.9). Consideremos os 4 quadriláteros possíveis com vértices p, q, r, s e segmentos $\overline{pq_t}$ e $\overline{rs_b}$ que contém t e b, respectivamente.

Observe que desses 4 quadriláteros apenas um deles tem o segmento determinado por pe s, e o segmento determinado por q e r se cruzando num ponto que denominaremos de x. Chamaremos esse quadrilátero de K_4 . Outros dois desses quadriláteros são isotópicos a retas projetivas. Chamaremos esses quadriláteros de K_2 e K_3 . Por fim, existe um último quadrilátero que chamaremos de K_1 , que é uma curva simples e fechada em P(V). Representamos esses quatro quadriláteros na figura 2.12 a seguir.

Definição 2.12 Uma carta afim de P(V) é dita uma **carta afim boa** para o quadrilátero K_i se a imagem de K_i , nessa carta afim, está contida numa região limitada dessa carta e os segmentos não adjacentes de K_i não se cruzam nessa carta.

É imediato que o quadrilátero K_4 não possui carta afim boa.



Figura 2.12 – quadriláteros $K_1, K_2, K_3 \in K_4$

Observe na figura 2.12 que a imagem do quadrilátero K_1 está numa carta afim boa. Na figura 2.13 esboçamos os 4 quadriláteros K_1 , K_2 , K_3 , K_4 numa carta afim que não é boa de P(V).

A existência de carta afim boa para K_1 é imediata. Os quadriláteros K_2 e K_3 são isotópicos a retas projetivas, então qualquer reta projetiva intercepta K_2 e K_3 . Logo não existe carta afim que contém K_2 e K_3 numa região limitada dessa carta. Portanto existem cartas afins boas apenas para o quadrilátero K_1 .

Observe que o quadrilátero K_1 é uma curva simples e fechada em qualquer carta afim boa para K_1 . Seja d uma carta afim boa para K_1 . O quadrilátero K_1 é isotopicamente equivalente ao bordo de um disco euclidiano em d. Desta forma, identificamos a região limitada por K_1 como a região homotopicamente equivalente ao interior de um disco euclidiano. Pela definição de caixa sobremarcada convexa, essa região limitada por K_1 é uma região convexa em d no sentido de



Figura 2.13 – quadriláteros $K_1, K_2, K_3 \in K_4$ em carta afim não boa

convexidade em \mathbb{R}^2 .

A região aberta convexa limitada por K_1 , ou seja, o interior convexo de K_1 na carta afim boa d, será denotada por $Int.Conv_d(K_1)$.

Lema 2.13 Dadas duas cartas afins boas d e d' para o quadrilátero K_1 , temos que Int. $Conv_d(K_1) = Int.Conv_{d'}(K_1)$ vistos em P(V).

Prova: Topologicamente podemos escrever o plano projetivo como a união disjunta

$$P(V) = A \cup M,$$

sendo A uma região de P(V) isotópica a um disco fechado euclidiano em \mathbb{R}^2 e M uma região aberta em P(V) contendo uma faixa de Möbius.

Vamos considerar K_1 , $Int.Conv_d(K_1)$, $Int.Conv'_d(K_1)$ vistos em P(V). Temos então que $P(V) \setminus K_1 = Int.Conv_d(K_1) \cup M$. Da mesma forma, $P(V) \setminus K_1 = Int.Conv_{d'}(K_1) \cup M$. Logo $Int.Conv_d(K_1) = Int.Conv_{d'}(K_1)$ em P(V). Portanto a região convexa limitada por K_1 em P(V) não depende da carta afim de P(V). Concluímos então que para toda caixa sobremarcada convexa existe o quadrilátero K_1 em P(V), como descrito acima, com interior convexo que denotamos apenas por $Int.Conv(K_1)$.

Definição 2.14 O interior convexo de uma caixa sobremarcada convexa $\Theta = ((p,q,r,s;t,b),(P,Q,R,S;T,B))$

é a região dada por $Int.Conv(K_1) em P(V)$.

Como a convexidade de caixas sobremarcadas e o quadrilátero K_1 são preservados pela relação de equivalência (involução j) que define caixas marcadas, podemos definir interior convexo de uma caixa marcada.

Definição 2.15 *O* interior convexo de uma caixa marcada convexa $[\Theta]$ é o interior convexo das duas caixas sobremarcadas que a representam como classe de equivalência. Vamos denotar o interior convexo de $[\Theta]$ por $[\stackrel{\circ}{\Theta}]$.



Figura 2.14 – interior convexo de $[\Theta]$

De maneira mais simples e direta, podemos pensar que dada uma caixa (sobre)marcada convexa $[\Theta] = [(p, q, r, s; t, b), (P, Q, R, S; T, B)]$ existe uma única carta afim $(U_{\alpha^*}, f_{\alpha^*})$ de P(V)que mapeia essa caixa marcada no quadrado unitário especial como na figura a seguir.

É imediato que o interior convexo desse quadrado unitário especial define um subconjunto convexo em P(V) que nada mais é que $[\overset{\circ}{\Theta}]$.



Figura 2.15 – caixa marcada $[\Theta]$ na imagem $f_{\alpha^*}(U_{\alpha^*})$

Definição 2.16 Dizemos que uma caixa marcada convexa $[\Theta]$ está contida no interior convexo de uma outra caixa marcada convexa $[\Psi]$ se o interior convexo de $[\Theta]$ está contido no interior convexo de $[\Psi]$, ou seja, se $[\stackrel{\circ}{\Theta}] \subset [\stackrel{\circ}{\Psi}]$.

2.3 Grupo \mathcal{G} das simetrias projetivas agindo em caixas marcadas

Definimos o grupo \mathcal{G} das simetrias projetivas em 1.25 como sendo um subgrupo especial do grupo $Aut(\mathcal{F})$, sendo \mathcal{F} a variedade flag definida em 1.20.

Podemos identificar numa caixa sobremarcada $\Theta = ((p, q, r, s; t, b), (P, Q, R, S; T, B))$ os pontos flags (t, T) (b, B), (p, S), (q, R), (r, Q), (s, P). Para cada um desses flags podemos aplicar um elemento de \mathcal{G} e teremos como imagem um novo flag.



Figura 2.16 – caixa sobremarcada Θ numa carta afim de P(V)

Sejam $\mathcal{A} \in \mathcal{H} \triangleleft \mathcal{G}$ e \tilde{A} a transformação projetiva que induz \mathcal{A} ; o subgrupo \mathcal{H} é introduzido no lema 1.21. Considerando os flags (t,T) (b,B), (p,S), (q,R), (r,Q), (s,P) de Θ , pela equação
(1.1) do capítulo 1, temos

$$\begin{split} \mathcal{A}((t,T)) &= (\tilde{A}(t), (\tilde{A}^{-1})^*(T)), \qquad \mathcal{A}((b,B)) = (\tilde{A}(b), (\tilde{A}^{-1})^*(B)), \\ \mathcal{A}((p,S)) &= (\tilde{A}(p), (\tilde{A}^{-1})^*(S)), \qquad \mathcal{A}((q,R)) = (\tilde{A}(q), (\tilde{A}^{-1})^*(R)), \\ \mathcal{A}((r,Q)) &= (\tilde{A}(r), (\tilde{A}^{-1})^*(Q)), \qquad \mathcal{A}((s,P)) = (\tilde{A}(s), (\tilde{A}^{-1})^*(P)). \end{split}$$

Definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Theta) &= ((\tilde{A}(p), \tilde{A}(q), \tilde{A}(r), \tilde{A}(s); \tilde{A}(t), \tilde{A}(b)), \\ &\quad ((\tilde{A}^{-1})^*(P), (\tilde{A}^{-1})^*(Q), (\tilde{A}^{-1})^*(R), (\tilde{A}^{-1})^*(S); (\tilde{A}^{-1})^*(T), (\tilde{A}^{-1})^*(B))). \end{aligned}$$

De maneira sintética denotamos $\mathcal{A}(\Theta) = ((\hat{p}, \hat{q}, \hat{r}, \hat{s}; \hat{t}, \hat{b}), (\hat{P}, \hat{Q}, \hat{R}, \hat{S}; \hat{T}, \hat{B})),$

sendo $\hat{x} = \tilde{A}(x)$ para $x \in \hat{x}$ pontos projetivos, e $\hat{X} = (\tilde{A}^{-1})^*(X)$ para $X \in \hat{X}$ retas projetivas.

É imediato que $\mathcal{A}(\Theta)$ é uma caixa sobremarcada, pois as incidências apresentadas na definição de caixas sobremarcadas são preservadas por \tilde{A} .

Sejam $\mathcal{D} \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ e \tilde{D} a dualidade que induz \mathcal{D} . Considerando os flags (t,T) (b,B), (p,S), (q,R), (r,Q), (s,P) de Θ , pela equação (1.2) do capítulo 1 temos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}((t,T)) &= (\tilde{I}^{-1}(\tilde{D}^{-1})^*(T), \tilde{D}(t)), \qquad \mathcal{D}((b,B)) &= (\tilde{I}^{-1}(\tilde{D}^{-1})^*(B), \tilde{D}(b)), \\ \mathcal{D}((p,S)) &= (\tilde{I}^{-1}(\tilde{D}^{-1})^*(S), \tilde{D}(p)), \qquad \mathcal{D}((q,R)) &= (\tilde{I}^{-1}(\tilde{D}^{-1})^*(R), \tilde{D}(q)), \\ \mathcal{D}((r,Q)) &= (\tilde{I}^{-1}(\tilde{D}^{-1})^*(Q), \tilde{D}(r)), \qquad \mathcal{D}((s,P)) &= (\tilde{I}^{-1}(\tilde{D}^{-1})^*(P), \tilde{D}(s)). \end{aligned}$$

Definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\Theta) &= ((\tilde{I}^{-1}(\tilde{D}^{-1})^*(P), \tilde{I}^{-1}\tilde{D}^{-1})^*(Q), \tilde{I}^{-1}(\tilde{D}^{-1})^*(S), \tilde{I}^{-1}\tilde{D}^{-1})^*(R); \tilde{I}^{-1}(\tilde{D}^{-1})^*(T), \tilde{I}^{-1}(\tilde{D}^{-1})^*(B)), \\ & (\tilde{D}(q), \tilde{D}(p), \tilde{D}(r), \tilde{D}(s); \tilde{D}(t), \tilde{D}(b))). \end{aligned}$$

De maneira sintética denotamos $\mathcal{D}(\Theta) = ((P^*, Q^*, S^*, R^*; T^*, B^*), (q^*, p^*, r^*, s^*; t^*, b^*)),$ sendo $X^* = \tilde{I}^{-1}(\tilde{D}^{-1})^*(X)$ para X reta projetiva e X^{*} ponto projetivo.; e $x^* = \tilde{D}(x)$ para x ponto projetivo e x^* reta projetiva. Temos também que $\mathcal{D}(\Theta)$ é uma caixa sobremarcada, pois dualidades preservam incidências no espaço dual.

Observação 2.17 (o "truque" de Schwartz) A ordem das entradas em $\mathcal{D}(\Theta)$ é fixada deliberadamente pensando no item 2 do lema 3.1 do teorema 3.2 de Schwartz, que será o assunto principal do próximo capítulo.

Observação 2.18 Sejam $\mathcal{T} \in \mathcal{H} \ e \ \mathcal{D} \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$. É imediato que $\mathcal{T}j(\Theta) = j\mathcal{T}(\Theta) \ e \ \mathcal{D}j(\Theta) = j\mathcal{D}(\Theta)$, onde $j : CSM \to CSM$ é a involução que define caixas marcadas. Logo um elemento do grupo \mathcal{G} aplicado num elemento de CM é bem definido e tem como imagem um elemento de CM.

Observação 2.19 É óbvio que o subgrupo \mathcal{H} de \mathcal{G} age em CSM e portanto age em CM. No entanto, dados dois elementos $\mathcal{D}_1 \in \mathcal{D}_2$ pertencentes a $\mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$, temos que $\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1(\Theta)) = j((\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1)(\Theta))$, sendo $j : CSM \to CSM$ a involução que define caixas marcadas. Portanto o grupo \mathcal{G} não age em CSM, porém \mathcal{G} age em CM.

2.4 Transformações elementares de caixas marcadas

Seja $\Theta = ((p, q, r, s; t, b), (P, Q, R, S; T, B)) \in CSM$. O teorema de Pappus nos fornece dois novos elementos de CSM a partir de Θ .

 $\tau_{1}(\Theta) = ((p,q,QR,PS;t,(qs)(pr)),(P,Q,qs,pr;T,(QR)(PS)))$

Figura 2.17 – permutação τ_1 de CSM e interior convexo de $\tau_1(\Theta)$



Figura 2.18 – permutação τ_2 de CSM e interior convexo de $\tau_2(\Theta)$

Existe também uma involução natural no conjunto das caixas convexas que nos fornece mais uma nova caixa.



Figura 2.19 – permutação i de CSM e interior convexo de $i(\Theta)$

As aplicações $i,\,\tau_1$ e τ_2 são permutações de elementos de CSM.

A permutação i é uma involução em CSM que inverte o top flag (t,T) com o bottom flag (b,B) de Θ .

Já foi mencionado que uma caixa sobremarcada é naturalmente identificada a uma configuração de Pappus. Com isso em mente, é óbvio que as permutações τ_1 e τ_2 "realizam" as iteradas do teorema de Pappus.

Observação 2.20 Se Θ é convexa, $i(\Theta)$, $\tau_1(\Theta)$ e $\tau_2(\Theta)$ são caixas sobremarcadas convexas.

Observação 2.21 É imediato que $ij(\Theta) = ji(\Theta)$, $\tau_1 j(\Theta) = j\tau_1(\Theta)$ e $\tau_2 j(\Theta) = j\tau_2(\Theta)$, sendo $j : CSM \to CSM$ a involução que define caixas marcadas. Logo as transformações $i, \tau_1 e \tau_2$ são permutações em CM também.

Vamos denotar o grupo das permutações dos elementos de CM por S(CM).

Observação 2.22 Se $[\Theta]$ é convexa, $\tau_1[\Theta] e \tau_2[\Theta]$ são duas novas caixas sobremarcadas com interiores convexos contidos no interior convexo de Θ , ou seja, $\tau_1[\Theta] \subsetneq [\Theta] = \tilde{\sigma}_2[\Theta] \subsetneq [\Theta]$. Portanto, o semigrupo \mathfrak{F} de S(CM) gerado por $\tau_1 e \tau_2$ é livre. Por outro lado, a caixa sobremarcada $i[\Theta]$ não possui interior convexo contido no interior convexo de $[\Theta]$; mais precisamente $i[\Theta] \cap [\Theta] = \emptyset$. Observe os interiores convexos dessas caixas marcadas nas três figuras 2.17, 2.18, 2.19 acima.

Definição 2.23 As permutações i, $\tau_1 e \tau_2 em CM$ são chamadas de **transformações ele**mentares de caixas marcadas.

2.4.1 Grupo & das transformações elementares de caixas marcadas

As transformações elementares de caixas marcadas i, $\tau_1 \in \tau_2$ podem ser aplicadas iterativamente nos elementos de CM. Temos assim o semigrupo \mathfrak{G} de S(CM) gerado por i, $\tau_1 \in \tau_2$.

Se a e b representam transformações elementares de caixas marcadas, usaremos a notação ab para dizer que primeiro se aplica b e depois a.

Lema 2.24 As relações seguintes são sempre válidas para elementos de CM.

 $i^2 = 1$ $\tau_1 i \tau_2 = i$, $\tau_2 i \tau_1 = i$, $\tau_1 i \tau_1 = \tau_2$, $\tau_2 i \tau_2 = \tau_1$

Prova: A primeira igualdade é direta. Vamos provar a segunda e a última igualdades. A terceira e a quarta são provadas de maneira análoga ao que faremos aqui.

Seja $\Theta = ((p, q, r, s; t, b), (P, Q, R, S; T, B)) \in CSM.$

Então temos $\tau_2(\Theta) = ((QR, PS, r, s; (qs)(pr), b), (pr, qs, S, R; (QR)(PS), B)).$

Logo $i\tau_2(\Theta) = ((s, r, PS, RQ; b, (pr)(qs)), (...)).$

Daí
$$\tau_1 i \tau_2(\Theta) = ((s, r, S(pr), R(qs); b, (s(PS))(r(RQ))), (...))$$
 e

 $\tau_2 i \tau_2(\Theta) = (((qs)R, (pr)S, PS, RQ; ((PS)s)((RQ)r), (pr)(qs)), (\ldots)).$

Observe que S(pr) = q, R(qs) = p e (s(PS))(r(RQ)) = t.

Então $\tau_1 i \tau_2(\Theta) = ((s, r, q, p; b, t), (...) = i(\Theta)$ e

 $\tau_2 i \tau_2(\Theta) = ((q, p, PS, RQ; t, (pr)(qs)), (...)) = j(\tau_1(\Theta)),$

sendo $j: CSM \to CSM$ a involução que define caixas marcadas.

Portanto para a caixa marcada $[\Theta]$ temos $\tau_1 i \tau_2 [\Theta] = i [\Theta]$ e $\tau_2 i \tau_2 [\Theta] = \tau_1 [\Theta]$, como queríamos provar. Essas relações do lema só valem em CM, elas não valem em CSM.

Corolário 2.25 O semigrupo \mathfrak{G} de S(CM) é um grupo.

Prova: As relações apresentadas no lema 2.24 implicam que $i^{-1} = i$, $\tau_1^{-1} = i\tau_2 i$ e $\tau_2^{-1} = i\tau_1 i$. Assim todos elementos gerados por i, $\tau_1 \in \tau_2$ têm inverso e portanto \mathfrak{G} é um subgrupo do grupo das permutações de elementos de CM. O grupo \mathfrak{G} é gerado, por exemplo, por $\zeta = i \in \eta = i\tau_1$ satisfazendo $\zeta^2 = 1 \in \eta^3 = 1$. ■

Definição 2.26 O subgrupo & é chamado de grupo das transformações elementares de caixas marcadas.

Observação 2.27 Vimos na demonstração do lema 2.24 que $\tau_2 i \tau_2(\Theta) = j(\tau_1(\Theta))$, onde $j : CSM \to CSM$ é a involução que define caixas marcadas. Portanto o grupo \mathfrak{G} não é um subgrupo das permutações de CSM, porém \mathfrak{G} é um subgrupo das permutações de CM. Assim podemos dizer que \mathfrak{G} age em CM.

Definição 2.28 Vamos denotar por $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta]$ a **órbita da caixa marcada** $[\Theta]$ pela ação do grupo \mathfrak{G} . Ou seja, $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta]$ é a \mathfrak{G} -órbita de $[\Theta]$.

Observação 2.29 Sejam $[\Theta]$ uma caixa marcada, $\mathcal{T} \in \mathcal{H}$ $e \mathcal{D} \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$. Temos que $i(\mathcal{T}([\Theta])) = \mathcal{T}(i([\Theta])), \tau_1(\mathcal{T}([\Theta])) = \mathcal{T}(\tau_1([\Theta])) e \tau_2(\mathcal{T}([\Theta])) = \mathcal{T}(\tau_2([\Theta]));$ $i(\mathcal{D}([\Theta])) = \mathcal{D}(i([\Theta])), \tau_1(\mathcal{D}([\Theta])) = \mathcal{D}(\tau_1([\Theta])) e \tau_2(\mathcal{D}([\Theta])) = \mathcal{D}(\tau_2([\Theta])).$

Portanto a ação do grupo \mathfrak{G} em CM e ação do grupo \mathcal{G} em CM comutam entre si.

2.4.2 O grupo & como o grupo modular

Nesta seção vamos verificar que o grupo \mathfrak{G} das transformações elementares de caixas marcadas é isomorfo ao grupo modular.

Definição 2.30 Sejam os grupos cíclicos abstratos

$$A = <\alpha \mid \alpha^2 = 1 > \qquad e \qquad B = <\sigma \mid \sigma^3 = 1 >.$$

O grupo modular M é o produto livre A * B.

$$M = A * B = <\alpha, \sigma \mid \alpha^2 = 1, \sigma^3 = 1 >.$$

Observação 2.31 O grupo modular M é isomorfo a $PSL(2,\mathbb{Z})$ que é isomorfo a $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$. Veja referência [HP], página 29.

Lema 2.32 *O* grupo \mathfrak{G} age livremente em $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta]$.

Prova: Pelas relações entre i, $\tau_1 \in \tau_2$ apresentadas no lema 2.24, qualquer $g \in \mathfrak{G}$ possui uma das 4 representações em palavras com letras i, $\tau_1 \in \tau_2$

(1)
$$g = \tau_{j_1}...\tau_{j_k}$$
 (2) $g = i\tau_{j_1}...\tau_{j_k}$ (3) $g = \tau_{j_1}...\tau_{j_k}i$ (4) $g = i\tau_{j_1}...\tau_{j_k}i$,

sendo $j_l \in 1, 2$.

Ou seja, quando a letra i aparece nas palavras que representam os elementos de \mathfrak{G} , ela só aparece nos extremos das palavras.

Pela observação 2.22 temos $\tau_{j_l} \stackrel{\circ}{[}\Theta] \subsetneq \stackrel{\circ}{[}\Theta] \stackrel{\circ}{\subseteq} \stackrel{\circ}{[}\Theta] = \emptyset$.

Então para o caso (1), é óbvio que $\tau_{j_1}...\tau_{j_k}[\Theta] \subsetneq [\Theta]$. Logo $[\Theta] \neq \tau_{j_1}...\tau_{j_k}[\Theta]$. Portanto nenhum g do caso (1) fixa $[\Theta]$.

Para o caso (2), como $\tau_{j_1}...\tau_{j_k}[\Theta] \subsetneq [\overset{\circ}{\Theta}] \in i[\overset{\circ}{\Theta}] \cap [\overset{\circ}{\Theta}] = \emptyset$, é óbvio que $i[\Theta] \neq \tau_{j_1}...\tau_{j_k}[\Theta]$, logo $[\Theta] \neq i\tau_{j_1}...\tau_{j_k}[\Theta]$. Portanto nenhum g do caso (2) fixa $[\Theta]$.

Para o caso (3), observe que $\tau_j i \stackrel{\circ}{[}\Theta] \subsetneq i \stackrel{\circ}{[}\Theta]$. Logo $\tau_{j_1} \dots \stackrel{\circ}{\tau_{j_k}} i [\Theta] \subsetneq i \stackrel{\circ}{[}\Theta]$. Como $i \stackrel{\circ}{[}\Theta] \cap \stackrel{\circ}{[}\Theta] = \emptyset$, temos que $[\Theta] \neq \tau_{j_1} \dots \tau_{j_k} i [\Theta]$. Portanto nenhum elemento g do caso (3) fixa $[\Theta]$.

Para o caso (4), basta observar que $\tau_{j_1}...\tau_{j_k} i[\Theta] \subsetneq i[\Theta]$ o que implica que $i[\Theta] \neq \tau_{j_1}...\tau_{j_k} i[\Theta]$. Logo $[\Theta] \neq i\tau_{j_1}...\tau_{j_k} i[\Theta]$. Portanto nenhum elemento g do caso (4) fixa $[\Theta]$.

Concluímos que o único elemento que fixa $[\Theta]$ é o elemento trivial de \mathfrak{G} , desta forma \mathfrak{G} age livremente em $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta]$.

Vamos considerar os subgrupos cíclicos do grupo &

 $\mathfrak{G}_1 = \langle i | i^2 = 1 \rangle = \{1, i\}$ e $\mathfrak{G}_2 = \langle i\tau_1 | (i\tau_1)^3 = 1 \rangle = \{1, i\tau_1, i\tau_2\}.$

Lembremos que $i \in i\tau_1$ geram \mathfrak{G} .

Lema 2.33 O grupo \mathfrak{G} é isomorfo ao grupo modular M.

Prova: Vamos verificar que \mathfrak{G} é o produto livre de \mathfrak{G}_1 e \mathfrak{G}_2 . Para esse propósito usaremos o conhecido lema da mesa de tênis que vamos enunciar agora. A prova deste lema encontra-se na referência [HP], página 25.

Lema 2.34 (Lema da mesa de tênis)

Seja H um grupo que age num conjunto X e sejam Γ_1 e Γ_2 dois subgrupos de H. Seja Γ' o subgrupo de H gerado por esses dois subgrupos. Suponha que Γ_1 contém ao menos 2 elementos e Γ_2 contém ao menos 3 elementos. Suponha também que existem dois subconjuntos não vazios X_1 e X_2 de X, sendo $X_1 \nsubseteq X_2$ tais que

$$\gamma(X_2) \subset X_1 \text{ para todo } \gamma \in \Gamma_1, \gamma \neq 1$$

 $\gamma(X_1) \subset X_2 \text{ para todo } \gamma \in \Gamma_2, \gamma \neq 1$

Então Γ' é isomorfo ao produto livre $\Gamma_1 * \Gamma_2$.

Sejam $[\Theta]$ uma caixa marcada convexa e $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta]$ sua órbita por \mathfrak{G} .

No nosso caso, o conjunto X do lema será $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta]$. Os subgrupos $\Gamma_1 \in \Gamma_2$ serão os subgrupos de \mathfrak{G} definidos por $\mathfrak{G}_1 = \langle i : i^2 = 1 \rangle = \{1, i\}$ e $\mathfrak{G}_2 = \langle i\tau_1 : (i\tau_1)^3 = 1 \rangle = \{1, i\tau_1, i\tau_2\}$. Temos então $H = \Gamma' = \mathfrak{G}$. Do conjunto $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta]$, tomamos 2 subconjuntos $X_1 \in X_2$ descritos a seguir.

Para $n \neq 0$, seja Υ_n o conjunto de palavras de n letras, sendo apenas $\tau_1 \in \tau_2$ as letras de Υ_n . Por exemplo, $\Upsilon_2 = \{\tau_1 \tau_1, \tau_2 \tau_2, \tau_1 \tau_2, \tau_2 \tau_1\}.$ Seja Υ'_n o conjunto de palavras de n + 1 letras; esse conjunto é formado pelas palavras de Υ_n "adicionando" a letra *i* no início de cada palavra. Por exemplo, $\Upsilon'_2 = \{i\tau_1\tau_1, i\tau_2\tau_2, i\tau_1\tau_2, i\tau_2\tau_1\}.$

Os elementos de Υ_n e de Υ'_n representam composições de transformações elementares de caixas marcadas. Consideremos esses elementos aplicados na caixa marcada convexa $[\Theta]$.

Sejam $X_1 = \{[\Theta]\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \Upsilon_k([\Theta])$ e $X_2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Upsilon'_k([\Theta]).$

Seja $[\Theta]_1$ um elemento qualquer de X_1 diferente de $[\Theta]$, então a caixa $i[\Theta]_1$ é um elemento de X_2 ; por sinal, todos os elementos de X_2 são dessa forma. Como $[\Theta]$ é uma caixa marcada convexa, $[\Theta]_1$ também é uma caixa marcada convexa. Observe também que o interior convexo de $[\Theta]_1$ está contido no interior convexo de $[\Theta]$, mas o interior convexo de $i[\Theta]$ é disjunto do interior convexo de $[\Theta]_1$, usamos aqui o mesmo argumento da prova do lema 2.32. Então temos que $i[\Theta] \neq [\Theta]_1$ o que implica que $[\Theta] \neq i[\Theta]_1$. Logo $[\Theta] \nsubseteq X_2$, portanto $X_1 \nsubseteq X_2$.

Para $\mathfrak{G}_1 = \{1, i\}$ é imediato verificar que $\gamma(X_2) \subset X_1$ para todo $\gamma \in \mathfrak{G}_1, \gamma \neq 1$.

Para $\mathfrak{G}_2 = \{1, i\tau_1, i\tau_2\}$ devemos verificar que $i\tau_1(X_1) \subset X_2$ e $i\tau_2(X_1) \subset X_2$. Vamos analisar o caso $i\tau_1(X_1) \subset X_2$, o caso $i\tau_2(X_1) \subset X_2$ é análogo.

Por definição $X_1 = \{ [\Theta] \} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \Upsilon_k([\Theta]).$

Logo $\tau_1(X_1) = \{\tau_1([\Theta])\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \tau_1(\Upsilon_k([\Theta])) \subset X_1.$

Portanto $i\tau_1(X_1) = \{i\tau_1([\Theta])\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} i\tau_1(\Upsilon_k([\Theta])) \subset X_2$, como queríamos verificar.

Assim temos as condições do lema da mesa de tênis e portanto o grupo \mathfrak{G} é isomorfo ao grupo modular M. Ou seja,

$$M \cong PSL(2,\mathbb{Z}) \cong \mathfrak{G} = \langle i, \tau_1, \tau_2 \mid i^2 = 1, (i\tau_1)^3 = 1 \rangle \cong \mathfrak{G}_1 \ast \mathfrak{G}_2.$$

2.5 Grafo de Farey \mathcal{L}_o rotulado pela \mathfrak{G} -órbita de $[\Theta]$

2.5.1 Grafo de Farey \mathcal{L}_o

Definição 2.35 Dizemos que dois números racionais $\frac{p_1}{q_1} e \frac{p_2}{q_2}$ são **Farey relacionados** se $det \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} = p_1q_2 - p_2q_1 = \pm 1.$

Neste caso, escrevemos $\frac{p_1}{q_1} \sim \frac{p_2}{q_2}$. Por exemplo, $\frac{1}{3} \sim \frac{2}{7} \in \frac{2}{7} \sim \frac{7}{24}$.

Definição 2.36 Seja \mathbb{H}^2 o modelo do semiplano superior para o plano hiperbólico. Podemos definir um grafo orientado \mathcal{L}_o mergulhado em $\overline{\mathbb{H}^2}$ da seguinte maneira:

- os vértices do grafo \mathcal{L}_o são os pontos racionais em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, bordo ideal de \mathbb{H}^2 . O ponto ∞ é "contado" como um racional, ele é a fração ideal $\frac{1}{0}$.

- as arestas de \mathcal{L}_o são geodésicas orientadas que ligam dois racionais Farey relacionados.

Este grafo \mathcal{L}_o é chamado de grafo ou triangulação de Farey.

Os pontos $\infty = \frac{1}{0}, \frac{0}{1} \in \frac{1}{1}$ são vértices de um triângulo hiperbólico ideal de \mathbb{H}^2 , que denotaremos por Δ_0 , cujas arestas pertencem a \mathcal{L}_o .

Observação 2.37 O grupo $PSL(2,\mathbb{R})$ é isomorfo ao grupo $Isom(\mathbb{H}^2)$ das isometrias do plano hiperbólico no modelo do semiplano superior. E o subgrupo $PSL(2,\mathbb{Z})$ de $PSL(2,\mathbb{R})$ é isomorfo ao grupo modular M.

Lema 2.38 Seja $g \in PSL(2,\mathbb{Z})$. Dados dois racionais $r_1 \in r_2$, suponha que $r_1 \sim r_2$. Então $g(r_1) \sim g(r_2)$.

Prova: Sejam os racionais $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$ e $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$. Como $r_1 \sim r_2 \Rightarrow p_1q_2 - p_2q_1 = \pm 1$.

Se $g \in PSL(2, \mathbb{Z})$ podemos escrever $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ para certos $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ com ad - bc = 1.

Então temos
$$g(r_1) = g\left(\frac{p_1}{q_1}\right) = \frac{ap_1 + bq_1}{cp_1 + dq_1}$$
 e $g(r_2) = g\left(\frac{p_2}{q_2}\right) = \frac{ap_2 + bq_2}{cp_2 + dq_2}$

Logo

$$det \begin{pmatrix} ap_1 + bq_1 & ap_2 + bq_2 \\ cp_1 + dq_1 & cp_2 + dq_2 \end{pmatrix} = (ap_1 + bq_1)(cp_2 + dq_2) - (ap_2 + bq_2)(cp_1 + dq_1)$$
$$= ad(p_1q_2 - p_2q_1) + bc(q_1p_2 - q_2p_1) = (p_1q_2 - p_2q_1)(ad - bc) = \pm 1.$$

Portanto $g(r_1) \sim g(r_2)$.

Lema 2.39 O grupo $PSL(2,\mathbb{Z})$ age transitivamente nas arestas de \mathcal{L}_o .

Prova: Seja *e* uma aresta de \mathcal{L}_o , ligando $\frac{p_1}{q_1} \in \frac{p_2}{q_2}$. É fácil verificar que a matriz $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}^{-1}$

envia a aresta *e* na aresta que liga $0 = \frac{0}{1}$ e $\infty = \frac{1}{0}$. Vamos chamar essa aresta de extremos 0 e ∞ de *aresta favorita*. Então podemos sempre encontrar o elemento de $PSL(2,\mathbb{Z})$ que envia qualquer aresta na nossa aresta favorita. Uma vez que $PSL(2,\mathbb{Z})$ é um grupo, podemos encontrar um elemento de $PSL(2,\mathbb{Z})$ que envia uma aresta e_1 de \mathcal{L}_o em qualquer outra aresta e_2 . Logo $PSL(2,\mathbb{Z})$ age transitivamente nas arestas de \mathcal{L}_o .

Lema 2.40 Nenhuma aresta de \mathcal{L}_o cruza qualquer outra aresta de \mathcal{L}_o .

Prova: Bastar verificar que nenhuma aresta de \mathcal{L}_o cruza a aresta favorita.

Suponha por absurdo que exista uma aresta de \mathcal{L}_o cruzando a aresta favorita. Então os pontos extremos desta aresta são da forma $\frac{p_1}{q_1} \in \frac{-p_2}{q_2}$, onde p_1, q_1, p_2, q_2 são inteiros positivos.

Logo devemos ter $p_1q_2 + p_2q_1 = 1$. Mas essa soma nunca poderia dar 1 se p_1, q_1, p_2, q_2 são inteiros positivos, absurdo!

Observação 2.41 Um fato conhecido é que grupo $PSL(2,\mathbb{Z})$ é gerado pelas classes de equivalência das matrizes

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad e \qquad R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad de \ SL(2,\mathbb{Z})$$

Portanto $PSL(2, \mathbb{Z})$ é gerado pelas classes de equivalência das matrizes $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} e \qquad R = R_0 I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

Seja Δ_0 o triângulo ideal de vértices $\infty, 0, 1$ de \mathcal{L}_o . Então $PSL(2,\mathbb{Z})$ é gerado por

 I, rotação em ℍ² de ordem 2 com centro de rotação no "centro" da aresta geodésica [0,∞] de L_o.

• R, rotação em \mathbb{H}^2 de ordem 3 com centro de rotação no "centro" do triângulo Δ_0 de \mathcal{L}_o .

A órbita de Δ_0 pela ação de $PSL(2,\mathbb{Z})$ em $\overline{\mathbb{H}^2}$ é o grafo \mathcal{L}_o , que é o conjunto de arestas de uma triangulação (de Farey) de $\overline{\mathbb{H}^2}$ por triângulos ideais.

A figura a seguir mostra uma porção finita de \mathcal{L}_o em $\overline{\mathbb{H}^2}$. A semi-reta vertical à esquerda é a nossa aresta favorita. A semi-reta vertical no lado direito liga 1 a ∞ .



Figura 2.20 – grafo de Farey no modelo do semiplano superior \mathbb{H}^2

Podemos visualizar o grafo (triangulação) de Farey \mathcal{L}_o no modelo do disco de Poincaré Δ^2 para o plano hiperbólico na figura a seguir.



Figura 2.21 – grafo de Farey no modelo do disco de Poincaré Δ^2

Lema 2.42 O grupo $PSL(2,\mathbb{Z})$ age livremente nas arestas de \mathcal{L}_o .

Prova: Suponhamos que $g \in PSL(2, \mathbb{Z})$ fixa uma aresta orientada l de \mathcal{L}_o . Como os elementos de $PSL(2, \mathbb{Z})$ envia triângulos de \mathcal{L}_o em triângulos de \mathcal{L}_o , é obvio que g fixa os triângulos orientados de Farey Δ_{l_1} e Δ_{l_2} esboçados na figura a seguir.



Figura 2.22 – grafo de Farey no modelo do disco de Poincaré Δ^2

Consequentemente g fixa todos os triângulos de \mathcal{L}_o , donde g fixa todas as arestas de \mathcal{L}_o . Logo g é o elemento trivial de $PSL(2,\mathbb{Z})$. Portanto $PSL(2,\mathbb{Z})$ age livremente nas arestas de \mathcal{L}_o .

2.5.2 O 2-complexo simplicial associado ao grupo &

Seja H o complexo simplicial orientado de dimensão 2 tal que

• os 1-simplexos orientados são os elementos do grupo \mathfrak{G} ,

• os 2-simplexos orientados são determinados pelas triplas $(l, \kappa l, \kappa^2 l)$, sendo l um elemento qualquer de \mathfrak{G} , e $\kappa := i\tau_1 \in \mathfrak{G}$ um elemento de ordem 3.

Todo 1-simplexo não orientado de H é representado por dois elementos $l \in il$, e é adjacente a dois 2-simplexos $(l, \kappa l, \kappa^2 l) \in (il, \kappa il, \kappa^2 il)$. Temos que H é simplesmente conexo. Então segue que H pode ser identificado com o plano hiperbólico \mathbb{H}^2 equipado com a <u>triangulação de Farey</u> \mathcal{L}_o .

O que está acontecendo é que podemos rotular as geodésicas orientadas da triangulação de Farey \mathcal{L}_o pelos elementos do grupo \mathfrak{G} da seguinte forma:

- Translação à esquerda por i é a operação mudança de orientação da aresta (geodésica).
- Translação à esquerda por τ_1 "rotaciona" cada aresta no sentido anti-horário num clique sobre a cauda da aresta.

• Translação à esquerda por τ_2 "rotaciona" cada aresta no sentido horário num clique sobre a cabeça da aresta.



Figura 2.23 – os elementos de \mathfrak{G} agindo em \mathcal{L}_o

Observe que para todo $l \in \mathfrak{G}$ e todo $\tau \in \mathfrak{F}$ (semigrupo gerado por $\tau_1 \in \tau_2$)

• as geodésicas orientadas rotuladas por τl e $i\tau l$ estão no semiespaço hiperbólico à esquerda da geodésica orientada com rótulo l;

• enquanto que as geodésicas orientadas com rótulos $\tau i l$ e $i\tau i l$ estão no semiespaço hiperbólico à direita de l.

Uma vez fixada a caixa marcada convexa $[\Theta]$, pode-se também rotular as geodésicas de Farey por elementos da \mathfrak{G} -órbita de $[\Theta]$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta]$.

O \mathfrak{G} -rotulamento das geodésicas de Farey não é único; ele depende da escolha inicial de uma geodésica de Farey identificada ao 1-simplexo de H que corresponde ao elemento trivial de \mathfrak{G} .

Analogamente, o $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta]$ -rotulamento das geodésicas de Farey depende da escolha da geodésica que corresponde à caixa marcada inicial $[\Theta]$.

Observação 2.43 (Propriedade de aninhamento das caixas marcadas da \mathfrak{G} -órbita de $[\Theta]$ vistas em P(V)) Se l for o rótulo da aresta orientada (geodésica) que corresponde a $[\Theta]$, vamos denotar por $\Theta(l)$ essa caixa marcada e H_l o semiespaço hiperbólico à esquerda da aresta l. Para todo par de geodésicas de Farey l e l' temos que $H_{l'} \subset H_l$ se, e somente se, o interior convexo de $\Theta'(l')$ está no interior convexo de $\Theta(l)$.

Além disso, duas geodésicas $g \in g'$ têm a mesma calda (resp. cabeça) se, e somente se, as caixas marcadas correspondentes $\Theta(g) \in \Theta'(g')$ têm o mesmo top (resp. bottom).

Observação 2.44 Daqui em diante, vamos denotar por $[\psi]$ (letra minúscula) a geodésica de Farey em \mathcal{L}_o rotulada pela caixa marcada $[\Psi] \in \mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta]$.

Observação 2.45 Essa propriedade de rotular as geodésicas de \mathcal{L}_o pelas caixas marcadas da \mathfrak{G} órbita de $[\Theta]$ é puramente combinatorial. Podemos substituir a triangulação \mathcal{L}_o em \mathbb{H}^2 por outra laminação geodésica \mathcal{L} de \mathbb{H}^2 de modo que qualquer componente de $\mathbb{H}^2 \setminus \mathcal{L}$ seja limitada por três geodésicas de \mathcal{L} . Escolhemos \mathcal{L} de modo que as geodésicas não tenham pontos limites comuns em



Figura 2.24 – os elementos de \mathfrak{G} agindo em \mathcal{L}_o

 $\partial \mathbb{H}^2 \ e \ \mathcal{L} \ seja \ invariante \ por \ um \ subgrupo \ discreto \ \Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^2), \ sendo \ \Gamma \cong PSL(2,\mathbb{Z}) \ mas \ \Gamma$ cocompacto convexo. A definição de cocompacto convexo está a seguir.



Definição 2.46 Um envelope convexo de um conjunto de pontos Y de um espaço métrico X é o menor convexo de X que contém Y; denotamos esse convexo por $Hull_Y$. Um subgrupo cocompacto convexo do grupo $Isom(\mathbb{H}^2)$ é um subgrupo discreto Γ , com conjunto limite $\Lambda_{\Gamma} \subset$ $\partial \mathbb{H}^2$, tal que Γ age cocompactamente em $Hull_{\Lambda_{\Gamma}} \subset \mathbb{H}^2$, i.e., $\Gamma \setminus Hull_{\Lambda_{\Gamma}}$ é compacto.

2.5.3 As ações dos grupos $\mathfrak{G} \in PSL(2,\mathbb{Z}) \text{ em } \mathcal{L}_o$

Vimos na seção anterior que podemos expressar a estrutura de $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta]$ através do grafo de Farey \mathcal{L}_o em $\overline{\mathbb{H}^2}$. Descrevemos também a ação do grupo \mathfrak{G} em \mathcal{L}_o . Agora relacionaremos as ações de \mathfrak{G} e $PSL(2,\mathbb{Z})$ em \mathcal{L}_o .

Lema 2.47 As ações de \mathfrak{G} e $PSL(2,\mathbb{Z})$ em \mathcal{L}_o comutam entre si.

Prova: Vimos que os elementos $i \in i\tau_1$ geram o grupo \mathfrak{G} das transformações elementares de caixas marcadas. Então basta mostrar que para qualquer isometria hiperbólica $g \in PSL(2,\mathbb{Z})$ são válidas as igualdades

$$g(i([\psi])) = i(g([\psi]))$$
 e $g(i\tau_1([\psi])) = i\tau_1(g([\psi])),$

para qualquer $[\Psi] \in \mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta]$, ou seja, para qualquer $[\psi] \in \mathcal{L}_o$.

Sejam $[\psi] \in \mathcal{L}_o$ e $g[\psi]$ a imagem de $[\psi]$ por $g \in PSL(2,\mathbb{Z})$. Quando aplicamos i em $[\psi]$ e em $g[\psi]$ apenas a orientação de cada uma dessas arestas é invertida, invertendo calda (top) com cabeça (bottom) das arestas. E é óbvio que a aresta $i[\psi]$ é enviada por g em $i(g[\psi])$. Portanto vale a primeira igualdade $g(i([\psi])) = i(g([\psi]))$.

Para verificarmos a segunda igualdade, vamos observar a figura a seguir.



Figura 2.25 – os elementos de \mathfrak{G} agindo em \mathcal{L}_o

Quando aplicamos $i\tau_1$ em $[\psi]$ e em $g[\psi]$, primeiro τ_1 "rotaciona" no sentido anti-horário essas arestas sobre suas caldas (tops) até suas primeiras arestas à esquerda de \mathcal{L}_o , depois *i* inverte a orientação das arestas $\tau_1[\psi] \in \tau_1 g[\psi]$. Como g manda triângulo orientado em triângulo orientado do grafo \mathcal{L}_o , o triângulo $\Delta_{[\psi]}$ é mandado no triângulo $\Delta_{g[\psi]}$ como na figura. Logo a aresta $i\tau_1[\psi]$ de $\Delta_{[\psi]}$ é mandada por g na aresta $i\tau_1(g[\psi])$ de $\Delta_{g[\psi]}$. Portanto $g(i\tau_1([\psi])) = i\tau_1(g[\psi])$. Concluímos então que as ações do grupo $\mathfrak{G} \in PSL(2, \mathbb{Z})$ em \mathcal{L}_o comutam entre si.

Capítulo 3

Representações de Schwartz

Neste capítulo vamos demonstrar com detalhes o teorema de representação de Schwartz que se encontrar em [SR] (*Theorem 2.4*, página 194). Em seguida vamos enunciar o lema da profundidade que também se encontra em [SR] (*Depth Lemma*, página 197). E por fim, vamos apresentar a aplicação Φ de Schwartz $PSL(2, \mathbb{Z})$ -equivariante.

3.1 Representações de Schwartz $\rho_{\Theta} : PSL(2, \mathbb{Z}) \to \mathcal{G}$

Antes do teorema de representação de Schwartz, vamos apresentar um lema para esse teorema. Apresentaremos uma demonstração bem cuidadosa desse lema, diferente da demonstração do artigo original de Schwartz.

Lema 3.1 Seja $[\Theta]$ uma caixa marcada convexa qualquer, então

1. existe uma única **transformação projetiva** $\mathcal{A}_{\Theta} \in \mathcal{H}$ de ordem 3 tal que $[\Theta] \xrightarrow{\mathcal{A}_{\Theta}} i\tau_1[\Theta] \xrightarrow{\mathcal{A}_{\Theta}} (i\tau_1)^2[\Theta] \xrightarrow{\mathcal{A}_{\Theta}} [\Theta]$

(Lembre-se que $(i\tau_1)^2[\Theta] = i\tau_2[\Theta]$.)

2. existe uma única **polaridade** $\mathcal{D}_{\Theta} \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$, portanto de ordem 2, tal que $[\Theta] \xrightarrow{\mathcal{D}_{\Theta}} i[\Theta] \xrightarrow{\mathcal{D}_{\Theta}} [\Theta]$

Prova: (item 1): Seja $[\Theta] = [(p, q, r, s; t, b), (P, Q, R, S; T, B)]$ uma caixa marcada convexa qualquer. Os pontos distintos p, t, q, s, b, rsão naturalmente identificados a uma configuração de Pappus.

$$a_1 = p, a_2 = t, a_3 = q \in b_1 = s, b_2 = b, b_3 = r$$

Vamos considerar novamente o espaço vetorial V na base \mathcal{B} como na prova do teorema 2.2 de Pappus.

$$a_{1} = [0:0:1], \qquad a_{2} = [1:1:1], \qquad a_{3} = [1:1:\alpha],$$

$$b_{1} = [1:0:0], \qquad b_{2} = [0:1:0], \qquad b_{3} = [1:\beta:0],$$

$$c_{1} = [1:\beta + \alpha - \beta\alpha:\alpha], \qquad c_{2} = [1:\beta:\beta\alpha] \qquad e \qquad c_{3} = [0:1:1]$$
sendo $\beta > 1, 0 < \alpha < 1$.

Assim temos

$$[\Theta] = ((a_1, a_3, b_3, b_1; a_2, b_2), (...))$$
$$i\tau_1[\Theta] = ((c_1, c_3, a_3, a_1; c_2, a_2), (...))$$
$$(i\tau_1)^2[\Theta] = i\tau_2[\Theta] = ((b_1, b_3, c_3, c_1; b_2, c_2), (...))$$

Queremos mostrar

$$[\Theta] \xrightarrow{\mathcal{A}_{\Theta}} i\tau_1[\Theta] \xrightarrow{\mathcal{A}_{\Theta}} (i\tau_1)^2[\Theta] \xrightarrow{\mathcal{A}_{\Theta}} [\Theta]$$

Então devemos determinar a matriz A_{Θ} , de ordem 3, que satisfaz os três ciclos.

$$a_{1} \xrightarrow{A_{\Theta}} c_{1} \xrightarrow{A_{\Theta}} b_{1} \xrightarrow{A_{\Theta}} a_{1}$$
$$a_{2} \xrightarrow{A_{\Theta}} c_{2} \xrightarrow{A_{\Theta}} b_{2} \xrightarrow{A_{\Theta}} a_{2}$$
$$a_{3} \xrightarrow{A_{\Theta}} c_{3} \xrightarrow{A_{\Theta}} b_{3} \xrightarrow{A_{\Theta}} a_{3}$$

Vamos determinar a matriz A_{Θ} através das 4 implicações acima em azul.

(1) $b_1 \stackrel{A_{\Theta}}{\rightarrow} a_1$, (2) $b_2 \stackrel{A_{\Theta}}{\rightarrow} a_2$, (3) $a_1 \stackrel{A_{\Theta}}{\rightarrow} c_1$ e (4) $c_2 \stackrel{A_{\Theta}}{\rightarrow} b_2$.

Seja $A = (A_1 \ A_2 \ A_3)$, sendo A_1, A_2, A_3 as columas da matriz A_{Θ} .

Por (1) $b_1 \stackrel{A_{\Theta}}{\rightarrow} a_1$

$$A_{\Theta} \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\\mu \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0\\0\\A_2\\A_3 \end{pmatrix}$$

Por (2) $b_2 \xrightarrow{A_{\Theta}} a_2$ $A_{\Theta} \begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\\\lambda\\\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0&\lambda\\0&\lambda&A_3\\\mu&\lambda \end{pmatrix}$

Por (3) $a_1 \stackrel{A_{\Theta}}{\rightarrow} c_1$

$$A \begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\\beta + \alpha - \beta \alpha\\\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow A_{\Theta} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 1\\0 & \lambda & \beta + \alpha - \beta \alpha\\\mu & \lambda & \alpha \end{pmatrix}$$

Por (4)
$$c_2 \xrightarrow{A_{\Theta}} b_2$$

 $\begin{pmatrix} 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda & \beta + \alpha - \beta \alpha \\ \mu & \lambda & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \lambda = -\alpha \quad e \quad \mu = \beta \alpha (1 - \alpha).$
Portanto $A_{\Theta} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & -\alpha & \beta + \alpha - \beta \alpha \\ \beta \alpha (1 - \alpha) & -\alpha & \alpha \end{pmatrix}.$

Agora vamos verificar que as outras 5 implicações restantes também são válidas para a transformação projetiva A_{Θ} .

(5)
$$c_1 \xrightarrow{A_{\Theta}}$$
?

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & -\alpha & \beta + \alpha - \beta \alpha \\ \beta \alpha (1 - \alpha) & -\alpha & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta + \alpha - \beta \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = -\alpha^2 (1 - \beta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b_1,$$
portanto $c_1 \xrightarrow{A_{\Theta}} b_1.$
(6) $a_2 \xrightarrow{A_{\Theta}}$?

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & -\alpha & \beta + \alpha - \beta \alpha \\ \beta \alpha (1 - \alpha) & -\alpha & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 - \alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta \alpha \end{pmatrix} = c_2,$$
portanto $a_2 \xrightarrow{A_{\Theta}} c_2.$
(7) $c_3 \xrightarrow{A_{\Theta}}$?

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & -\alpha & \beta + \alpha - \beta \alpha \\ \beta \alpha (1 - \alpha) & -\alpha & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 - \alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = b_3,$$

portanto $c_3 \xrightarrow{A_{\Theta}} b_3$.

(8)
$$b_3 \xrightarrow{A_{\Theta}}?$$

 $\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & -\alpha & \beta + \alpha - \beta \alpha \\ \beta \alpha (1 - \alpha) & -\alpha & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = -\alpha \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = a_3,$

portanto $b_3 \xrightarrow{A_{\Theta}} a_3$.

(9)
$$a_3 \stackrel{A_{\Theta}}{\rightarrow} ?$$

 $\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & -\alpha & \beta + \alpha - \beta \alpha \\ \beta \alpha (1 - \alpha) & -\alpha & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = -\alpha (1 - \alpha)(1 - \beta) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c_3,$
portanto $a_3 \stackrel{A_{\Theta}}{\rightarrow} c_3.$

Podemos verificar diretamente que a transformação projetiva A_{Θ} é de ordem 3.

$$A_{\Theta}^{3} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & -\alpha & 1\\ 0 & -\alpha & \beta + \alpha - \beta \alpha\\ \beta \alpha (1-\alpha) & -\alpha & \alpha \end{array}\right)^{3} = \beta \alpha^{2} (1-\alpha)(1-\beta) \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = I_{d}.$$

Portanto existe uma simetria projetiva $\mathcal{A}_{\Theta} \in \mathcal{H}$ de ordem 3, induzida pela transformação projetiva \mathcal{A}_{Θ} , que satisfaz o ciclo

$$[\Theta] \stackrel{\mathcal{A}_{\Theta}}{\rightarrow} i\tau_1[\Theta] \stackrel{\mathcal{A}_{\Theta}}{\rightarrow} (i\tau_1)^2[\Theta] \stackrel{\mathcal{A}_{\Theta}}{\rightarrow} [\Theta]$$

Concluímos assim a prova do item 1.

(item 2): Seja $[\Theta] = [(p,q,r,s;t,b), (P,Q,R,S;T,B)]$ uma caixa marcada convexa qualquer.



Figura 3.1 – caixa marcada $[\Theta]$ numa carta afim de P(V)

Observe na figura acima que as relações de incidências entre pontos e retas numa caixa

marcada em P(V) implica nas relações de incidências entre retas e planos em V apresentadas na figura a seguir.



Figura 3.2 – relações de incidências dos elementos de $[\Theta]$ em V

Seja $\mathcal{B}' = \{T \cap B, \overrightarrow{t}, \overrightarrow{b}\}$ uma base para o espaço vetorial V, sendo $T \cap B, \overrightarrow{t}, \overrightarrow{b}$ três vetores diretores das retas $T \cap B, t \in b$, respectivamente.

Vamos definir um produto interno euclidiano $\langle , \rangle_V \text{ em } V$ que satisfaz $\langle T \stackrel{\longrightarrow}{\cap} B, \stackrel{\longrightarrow}{t} \rangle_V = 0, \qquad \langle T \stackrel{\longrightarrow}{\cap} B, \stackrel{\longrightarrow}{b} \rangle_V = 0, \qquad \langle \stackrel{\longrightarrow}{b}, \stackrel{\longrightarrow}{t} \rangle_V = 0 \quad \text{e também}$ $\langle T \stackrel{\longrightarrow}{\cap} B, T \stackrel{\longrightarrow}{\cap} B \rangle_V = \alpha_1, \qquad \langle \stackrel{\longrightarrow}{t}, \stackrel{\longrightarrow}{t} \rangle_V = \alpha_2, \qquad \langle \stackrel{\longrightarrow}{b}, \stackrel{\longrightarrow}{b} \rangle_V = \alpha_3,$

sendo α_1 , α_2 , α_3 números reais positivos que serão posteriormente determinados.

É imediato que, com esse produto interno euclidiano, os planos T e B são perpendiculares entre si, $T \perp B$.

Sejam as retas $s = P \cap B$ e $r = Q \cap B$. Consideremos os vetores diretores de s e r dados, respectivamente, por

$$\overrightarrow{s} = T \stackrel{\longrightarrow}{\cap} B + \beta_1 \stackrel{\longrightarrow}{b} \quad e \quad \overrightarrow{r} = T \stackrel{\longrightarrow}{\cap} B + \beta_2 \stackrel{\longrightarrow}{b}, \quad \text{sendo } \beta_1 > 0 e \beta_2 < 0.$$

Logo $\langle \overrightarrow{s}, \overrightarrow{r} \rangle_V = \alpha_1 + (\beta_1 \beta_2) \alpha_3$, sendo $\beta_1 \beta_2 < 0$. Então $\langle \overrightarrow{s}, \overrightarrow{r} \rangle_V = 0$ se, e somente se, $\alpha_3 = -\frac{\alpha_1}{\beta_1 \beta_2}$, o que é possível.

Da mesma forma, sejam as retas $p = S \cap T$ e $q = R \cap T$. Consideremos os vetores diretores

de $p \in q$ dados, respectivamente, por

$$\overrightarrow{p} = T \overrightarrow{\cap} B + \sigma_1 \overrightarrow{t} \qquad e \qquad \overrightarrow{q} = T \overrightarrow{\cap} B + \sigma_2 \overrightarrow{t}, \qquad \text{sendo } \sigma_1 < 0 \ e \ \sigma_2 > 0.$$

Logo $\langle \overrightarrow{p}, \overrightarrow{q} \rangle_V = \alpha_1 + (\sigma_1 \sigma_2) \alpha_2$, sendo $\sigma_1 \sigma_2 < 0$. Então $\langle \overrightarrow{p}, \overrightarrow{q} \rangle_V = 0$ se, e somente se, $\alpha_2 = -\frac{\alpha_1}{\sigma_1 \sigma_2}$, o que é possível.

Portanto tomando $\alpha_2 = -\frac{\alpha_1}{\sigma_1 \sigma_2}$ e $\alpha_3 = -\frac{\alpha_1}{\beta_1 \beta_2}$ definimos um produto interno \langle , \rangle_V tal que $T \perp B, P \perp Q, R \perp S.$

Na verdade temos

$$t \perp B, b \perp T, r \perp P, s \perp Q, p \perp R, q \perp S.$$

Lembremos que se D é uma dualidade projetiva, denotamos $x^* = D(x)$ para x ponto projetivo e x^* reta projetiva; além disso denotamos $X^* = I^{-1}(D^{-1})^*(X)$ para X reta projetiva e X^* ponto projetivo.

Induzimos uma polaridade pela perpendicularidade entre retas e planos passando pela origem de V. Se a reta x de V (ponto projetivo de P(V)) é perpendicular ao plano Y de V (reta projetiva de P(V)) então $D(x) = Y = x^*$.

Logo temos

$$t^* = B, b^* = T, r^* = P, s^* = Q, p^* = R e q^* = S.$$

Dualmente temos

$$T^* = b, \ B^* = t, \ R^* = p, \ S^* = q, \ P^* = r \ e \ Q^* = s$$

Seja D_{Θ} a polaridade induzida pelo produto interno euclidiano <, >_V em V que acabamos de definir.

Portanto o elemento $\mathcal{D}_{\Theta} \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$ induzido por D_{Θ} agindo em CM é $\mathcal{D}_{\Theta}[\Theta] = [(P^*, Q^*, S^*, R^*; T^*, B^*), (q^*, p^*, r^*, s^*; t^*, b^*)].$ = [(r, s, q, p; b, t), (S, R, P, Q; B, T)]."truque" de Schwartz!

-

A transformação elementar de caixas marcadas i é definida por

$$i[\Theta] = [(s, r, p, q; b, t), (R, S, Q, P; B, T)] = [(r, s, q, p; b, t), (S, R, P, Q; B, T)].$$

Comparando as entradas de $\mathcal{D}_{\Theta}[\Theta]$ e $i[\Theta]$, concluímos que $\mathcal{D}_{\Theta}[\Theta] = i[\Theta]$ como queríamos.

Portanto existe uma simetria projetiva $\mathcal{D}_{\Theta} \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$ de ordem 2, induzida por uma polaridade projetiva D_{Θ} , que satisfaz o ciclo

$$[\Theta] \stackrel{\mathcal{D}_{\Theta}}{\to} i[\Theta] \stackrel{\mathcal{D}_{\Theta}}{\to} [\Theta].$$

Concluímos então a prova do lema. \blacksquare

Teorema 3.2 (Teorema de representações de Schwartz)

Seja $[\Theta]$ uma caixa marcada convexa e seja $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta]$ sua \mathfrak{G} -órbita. Então existe uma representação fiel ρ_{Θ} do grupo modular $PSL(2,\mathbb{Z})$ agindo no grafo de Farey \mathcal{L}_o , sobre grupo \mathcal{G} das simetrias projetivas agindo em $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta] \subset CM$;

 $\rho_{\Theta}: PSL(2,\mathbb{Z}) \to \mathcal{G} \qquad homomorfismo \ injetivo,$ $tal \ que \ \forall \ m \in PSL(2,\mathbb{Z}) \ e \ \forall \ [\Psi] \in \mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta] \ vale \ m[\psi] = \rho_{\Theta}(m)[\Psi] \ (propriedade \ \rho_{\Theta}\text{-invariante})$

Observação 3.3 A igualdade acima = na verdade é um abuso, já que o primeiro membro dessa equação é um elemento de \mathcal{L}_o , enquanto que o segundo membro é um elemento de $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta]$.

Prova: Sejam $[\Theta]$ uma caixa marcada convexa e $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta]$ sua \mathfrak{G} -órbita.

Seja $\Delta_{[\theta]}$ o triângulo orientado em \mathcal{L}_o com arestas (geodésicas) $[\theta]$, $i\tau_1[\theta] \in i\tau_2[\theta]$.



Figura 3.3 – triângulo ideal com arestas $[\theta], i\tau_1[\theta] \in i\tau_2[\theta]$

Seja $R \in PSL(2,\mathbb{Z})$ a isometria em \mathbb{H}^2 , de ordem 3, tal que

$$R([\theta]) = i\tau_1[\theta]$$
$$R^2([\theta]) = R(i\tau_1[\theta]) = i\tau_2[\theta]$$
$$R^3([\theta]) = R(i\tau_2[\theta]) = [\theta]$$

Pelo item 1 do lema 3.1, existe $\mathcal{A}_{\Theta} \in \mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ tal que

$$\mathcal{A}_{\Theta}([\Theta]) = i\tau_1[\Theta]$$
$$\mathcal{A}_{\Theta}^2([\Theta]) = \mathcal{A}_{\Theta}(i\tau_1[\Theta]) = i\tau_2[\Theta]$$
$$\mathcal{A}_{\Theta}^3([\Theta]) = \mathcal{A}_{\Theta}(i\tau_2[\Theta]) = [\Theta]$$

Então temos

$$R([\theta]) = \mathcal{A}_{\Theta}([\Theta])$$
$$R(i\tau_1[\theta]) = \mathcal{A}_{\Theta}(i\tau_1[\Theta])$$
$$R(i\tau_2[\theta]) = \mathcal{A}_{\Theta}(i\tau_2[\Theta])$$

Seja $I \in PSL(2,\mathbb{Z})$ a isometria em \mathbb{H}^2 , de ordem 2, tal que

$$I([\theta]) = i[\theta]$$
$$I^{2}([\theta]) = I(i[\theta]) = [\theta]$$

Pelo item 2 do lema 3.1, existe $\mathcal{D}_{\Theta} \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ tal que

$$\mathcal{D}_{\Theta}([\Theta]) = i[\Theta]$$
$$\mathcal{D}_{\Theta}^{2}([\Theta]) = \mathcal{D}_{\Theta}(i[\Theta]) = [\Theta]$$

Então temos

$$I([\theta]) = \mathcal{D}_{\Theta}([\Theta])$$
$$I(i[\theta]) = \mathcal{D}_{\Theta}(i[\Theta])$$

As isometrias hiperbólicas $R \in I$ geram $PSL(2, \mathbb{Z})$.

Sejam os subgrupos de $PSL(2,\mathbb{Z})$ $M_1 = \langle I | I^2 = 1 \rangle$ e $M_2 = \langle R | R^3 = 1 \rangle$ tais que $PSL(2,\mathbb{Z}) = M_1 * M_2$.

Vamos considerar os homomorfismos de grupos

$$\rho_1: M_1 \to \mathcal{G}$$
 definido por $\rho_1(I) = \mathcal{D}_{\Theta},$
 $\rho_2: M_2 \to \mathcal{G}$ definido por $\rho_2(R) = \mathcal{A}_{\Theta}.$

Então existe um único homomorfismo $\rho_{\Theta}: PSL(2,\mathbb{Z}) \to \mathcal{G}$ tal que

$$\rho_{\Theta}(R) = \rho_2(R) = \mathcal{A}_{\Theta} \quad e \quad \rho_{\Theta}(I) = \rho_1(I) = \mathcal{D}_{\Theta}.$$

Logo

$$R[\theta] = \mathcal{A}_{\Theta}[\Theta] = \rho_{\Theta}(R)[\Theta] \quad \text{e} \quad I[\theta] = \mathcal{D}_{\Theta}[\Theta] = \rho_{\Theta}(I)[\Theta].$$

Precisamos verificar que para qualquer $[\Psi] \in \mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta]$

$$R[\psi] = \rho_{\Theta}(R)[\Psi]$$
 e $I[\psi] = \rho_{\Theta}(I)[\Psi].$

Seja $[\Psi]\in \mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta]$ então $[\Psi]=w[\Theta]$ para algum $w\in \mathfrak{G}.$ Logo

$$R[\psi] = R(w[\theta]) = w(R[\theta]) \text{ (as ações de $\mathfrak{G} \in PSL(2, \mathbb{Z}) \text{ em } \mathcal{L}_o \text{ comutam entre si})$
$$= w(\rho_{\Theta}(R)[\Theta]) = \rho_{\Theta}(R)(w[\Theta]) \text{ (as ações de } \mathfrak{G} \in \mathcal{G} \text{ em } CM \text{ comutam entre si})$$
$$= \rho_{\Theta}(R)[\Psi]$$
Portanto $R[\psi] = \rho_{\Theta}(R)[\Psi].$$$

Analogamente,

$$\begin{split} I[\psi] &= I(w[\theta]) = w(I[\theta]) \text{ (as ações de \mathfrak{G} e } PSL(2,\mathbb{Z}) \text{ em } \mathcal{L}_o \text{ comutam entre si}) \\ &= w(\rho_{\Theta}(I)[\Theta]) = \rho_{\Theta}(I)(w[\Theta]) \text{ (as ações de \mathfrak{G} e } \mathcal{G} \text{ em } CM \text{ comutam entre si}) \\ &= \rho_{\Theta}(I)[\Psi] \end{split}$$

Portanto $I[\psi] = \rho_{\Theta}(I)[\Psi].$

Finalmente vamos mostrar que

$$\forall m \in PSL(2,\mathbb{Z}) \in \forall [\Psi] \in \mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta] \text{ vale } m[\psi] = \rho_{\Theta}(m)[\Psi].$$

Seja $m \in PSL(2,\mathbb{Z})$ então $m = m_{j_1}m_{j_2}...m_{j_k}$, sendo $m_{j_i} = R$ ou I.

$$\rho(m)[\Psi] = \rho_{\Theta}(m_{j_1}m_{j_2}...m_{j_k})[\Psi] = \rho_{\Theta}(m_{j_1})(\rho_{\Theta}(m_{j_2})...\rho_{\Theta}(m_{j_k})[\Psi])$$

$$= m_{j_1}(\rho_{\Theta}(m_{j_2})...\rho_{\Theta}(m_{j_k}[\Psi]) = m_{j_1}(\rho_{\Theta}(m_{j_2})(...\rho_{\Theta}(m_{j_k})[\Psi]))$$

$$= m_{j_1}(m_{j_2}(...\rho_{\Theta}(m_{j_k})[\Psi])) = ... = m_{j_1}m_{j_2}...m_{j_k}[\psi]$$

$$= m[\psi].$$

Portanto $m[\psi] = \rho_{\Theta}(m)[\Psi]$, propriedade ρ_{Θ} -invariante.

O fato que $\rho_{\Theta} : PSL(2, \mathbb{Z}) \to G$ é uma representação fiel (homomorfismo injetivo) segue do fato que a ação de $PSL(2, \mathbb{Z})$ em \mathcal{L}_o é livre. Suponhamos por absurdo que ρ_{Θ} não seja injetiva, então existem $g_1, g_2 \in PSL(2, \mathbb{Z}), g_1 \neq g_2$, tais que $\rho_{\Theta}(g_1) = \rho_{\Theta}(g_2)$. Sabemos que para qualquer $[\Psi] \in \mathcal{O}_{\mathfrak{G}}([\Theta])$ temos $g_1[\psi] = \rho_{\Theta}(g_1)[\Psi]$ e $g_2[\psi] = \rho_{\Theta}(g_2)[\Psi]$. Logo $g_1[\psi] = g_2[\psi]$. Mas como a ação de $PSL(2, \mathbb{Z})$ em \mathcal{L}_o é livre, temos que $g_1 = g_2$, absurdo! \blacksquare

Definição 3.4 Chamaremos a representação $\rho_{\Theta} : PSL(2, \mathbb{Z}) \to \mathcal{G}$ de **representação de Schwartz**. Para cada caixa marcada convexa $[\Theta]$ em CM temos uma representação de Schwartz.

Corolário 3.5 Seja $[\Psi] \in \mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta]$ uma caixa marcada qualquer, então existe uma simetria projetiva (transformação projetiva) $\mathcal{T} \in \mathcal{H}$ tal que $\mathcal{T}^{k}([\Psi]) = \tau_{1}^{2k}[\Psi]$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Ou seja, a órbita de \mathcal{T} é a órbita infinita

$$[\Psi] \xrightarrow{\mathcal{T}} \tau_1^2([\Psi]) \xrightarrow{\mathcal{T}} \tau_1^4([\Psi]) \xrightarrow{\mathcal{T}} \dots$$

Prova: Pelo lema do teorema de representações de Schwartz existe uma transformação projetiva \mathcal{A} com ciclo

$$[\Psi] \xrightarrow{\mathcal{A}} i\tau_1[\Psi] \xrightarrow{\mathcal{A}} i\tau_2[\Psi] \xrightarrow{\mathcal{A}} [\Psi]$$

Da mesma forma, existe uma transformação projetiva \mathcal{A}' com ciclo

$$\tau_1[\Psi] \xrightarrow{\mathcal{A}'} i\tau_1(\tau_1[\Psi]) \xrightarrow{\mathcal{A}'} i\tau_2(\tau_1[\Psi]) \xrightarrow{\mathcal{A}'} \tau_1[\Psi]$$

Seja $\mathcal{T} = \mathcal{A}' \circ \mathcal{A}$, então temos

$$\mathcal{T}([\Psi]) = \mathcal{A}' \circ \mathcal{A}([\Psi]) = \mathcal{A}'(i\tau_1[\Psi]) = i \circ \mathcal{A}'(\tau_1[\Psi]) = i \circ i\tau_1^2[\Psi] = \tau_1^2[\Psi]. \text{ Logo } \mathcal{T}([\Psi]) = \tau_1^2[\Psi].$$

Agora $\mathcal{T}^2([\Psi]) = \mathcal{T} \circ \mathcal{T}([\Psi]) = \mathcal{T} \circ \tau_1^2[\Psi] = \tau_1^2 \circ \mathcal{T}([\Psi]) = \tau_1^2 \circ \tau_1^2[\Psi] = \tau_1^4[\Psi].$ Logo $\mathcal{T}^2([\Psi]) = \tau_1^4[\Psi].$

E assim, por indução, verifica-se que $\mathcal{T}^k([\Psi]) = \tau_1^{2k}[\Psi]$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Usamos novamente o fato que as ações de \mathfrak{G} e \mathcal{G} em CM comutam entre si.

3.2 Lema da Profundidade

Seja $[\Theta]$ uma caixa marcada convexa. Vamos considerar as geodésicas da triangulação de Farey \mathcal{L}_o , no modelo do disco de Poincaré Δ^2 , rotuladas pelos elementos das \mathfrak{G} -órbita de $[\Theta]$, que denotamos por $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta]$. Vamos "reposicionar" as arestas rotuladas $[\theta]$, $\tau_1[\theta] \in \tau_2[\theta]$ de maneira que o centro do triângulo ideal formado por essas arestas seja o centro do disco Δ^2 . Com essa reorganização de arestas, daremos definições relacionadas a posições dos elementos de $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta]$ com respeito a $[\Theta]$, $\tau_1[\Theta] \in \tau_2[\Theta]$.

Definição 3.6 Seja x um vértice de \mathcal{L}_o . Chamamos de **profundidade** de x o número mínimo de arestas de \mathcal{L}_o que são cruzadas por um caminho qualquer que liga o centro de Δ^2 ao vértice x.

A profundidade de x é realizada pelo segmento geodésico de extremidades x e centro de Δ^2 .

Definição 3.7 Seja l uma aresta de \mathcal{L}_o . A **profundidade máxima** da aresta l, que denotaremos por Mp(l), é o maior valor dentre as profundidades dos dois vértices de l. A **profundidade mínima** da aresta l, que denotaremos por mp(l), é o menor valor dentre as profundidades dos dois vértices de l.

Observação 3.8 Existe apenas um número finito de arestas de \mathcal{L}_o para cada $Mp \in \mathbb{N}$. Por outro lado, existe um número infinito de arestas para cada $mp \in \mathbb{N}$.



Figura 3.4 – o valor em cada vértice indica a profundidade do vértice

Observação 3.9 Vimos que as caixas marcadas de $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta]$ têm uma identificação especial com as arestas de \mathcal{L}_o . Podemos então transferir a noção de profundidade para as caixas marcadas de $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta]$. Seja $[\Psi] \in \mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta]$. Vamos usar a notação $Mp(\Psi)$ e $mp(\Psi)$ para denotar a profundidade máxima e mínima de $[\Psi]$, respectivamente.

Qualquer métrica no espaço vetorial V induz uma métrica no espaço projetivo P(V). Todas as medidas (distâncias e ângulos) em P(V) são feitas na métrica induzida por uma determinada métrica em V. Quando falamos de convexidade, estamos sempre nos referindo à noção de geométrica projetiva já apresentada neste texto.

Temos por hipótese que $[\Theta]$ é uma caixa marcada convexa. Dada uma caixa marcada qualquer $[\Psi] = [(p, q, r, s; t, b), (P, Q, R, S; T, B)]$

de $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta]$, é imediato que $[\Psi]$ também é uma caixa marcada convexa. Lembremos que denotamos por $[\Psi]$ o interior convexo de $[\Psi]$. Vamos denotar por ψ o quadrilátero menor de vértices $t, SP, b \in RQ$, nessa ordem, e por $\alpha(\Psi)$ o ângulo entre $qs \in pr$ mostrado na figura a seguir. Na métrica de P(V), denotamos por |X| o diâmetro do conjunto $X \subset P(V), |X| := \operatorname{diam}(X)$.



Lema 3.10 (Lema da profundidade)

Dados $[\Theta]$ uma caixa marcada convexa $e \epsilon > 0$. Então existe uma constante $N = N(\epsilon, [\Theta])$ que depende de ϵ e de $[\Theta]$ tal que para qualquer caixa marcada $[\Psi] \in \mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta]$

- (i) se $mp(\Psi) > N$ implica $| [\stackrel{\circ}{\Psi}] | < \epsilon;$
- (ii) se $Mp(\Psi) > N$ implica $| \stackrel{\circ}{\psi} | < \epsilon;$
- (iii) se $Mp(\Psi) > N$ implica $\alpha(\Psi) < \epsilon$.

Prova: Encontra-se na referência [SR] página 197. \blacksquare

Dado $\epsilon > 0$, o valor de $N = N(\epsilon, [\Theta])$ depende da métrica escolhida em V, mas esse lema é verdadeiro independente da métrica escolhida em V.

3.3 A aplicação Φ de Schwartz $PSL(2,\mathbb{Z})$ -equivariante

Seja $\mathcal{U} \subset \partial \mathbb{H}^2$ o conjunto dos vértices da triangulação de Farey \mathcal{L}_o rotulada pelos elementos de $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta]$. O conjunto \mathcal{U} é denso em $S^1 = \partial \mathbb{H}^2$.

A caixa marcada convexa $[\Theta]$ determina naturalmente uma aplicação $\varphi : \mathcal{U} \to P(V)$ da seguinte maneira: se $x \in \mathcal{U}$ então $\varphi(x)$ é o ponto distinguido comum a todas caixas marcadas em P(V) que rotulam as arestas em \mathcal{L}_o que emanam de x. A aplicação φ é injetiva. **Teorema 3.11** A aplicação φ se estende a uma aplicação contínua $\varphi_o : S^1(= \partial \mathbb{H}^2) \to P(V)$ que é um homeomorfismo sobre a sua imagem e também $PSL(2,\mathbb{Z})$ -equivariante, i.e., $\forall m \in PSL(2,\mathbb{Z})$ e $\forall x \in \partial \mathbb{H}^2$ tem-se $\varphi_o(mx) = \rho_{\Theta}(m)\varphi_o(x)$.

Prova: Seja ψ o quadrilátero menor de $[\Psi]$ como na figura 3.5. Vimos que a propriedade de aninhamento das arestas de \mathcal{L}_o reflete exatamente na propriedade de aninhamento dos interiores convexos das caixas de $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta]$. Seja $l_1, l_2, ...$ uma sequência qualquer de arestas de \mathcal{L}_o se aninhando, ou seja, $H_{l_{j+1}} \subset H_{l_j}$. Se $[\Psi_j]$ é a caixa marcada correspondente à aresta l_j então, pelo lema da profundidade, $|\hat{\psi}| \to 0$ quando $j \to \infty$. Assim podemos concluir que φ é uniformemente contínua. Dois resultados de análise que provam este teorema são:

(1) Sejam (X, d_1) e (Y, d_2) espaços métricos, Y completo. Seja $D \subset X$ denso em X e seja $f : D \subset X \to Y$ uma função uniformemente contínua, então f se estende continuamente a X, i.e., existe uma função $f_o : X \to Y$ contínua tal que $f_o \mid_D = f$.

(2) Sejam (X, d_1) e (Y, d_2) espaços métricos e $f : X \to Y$ contínua e bijetiva. Se (X, d_1) é compacto então f é um homeomorfismo.

Portanto, por (1) e (2), temos que φ se estende a uma aplicação contínua $\varphi_o : S^1 \to P(V)$ que é um homeomorfismo sobre sua imagem.

Segue da propriedade ρ_{Θ} -invariante do teorema de representação de Schwartz que φ_o é $PSL(2,\mathbb{Z})$ -equivariante. Então segue o resultado.

Vimos que a caixa marcada $[\Theta]$ define naturalmente uma função contínua $\varphi_o : \partial \mathbb{H}^2 \to P(V)$ que é $PSL(2,\mathbb{Z})$ -equivariante. Analogamente, podemos pensar nas caixas marcadas em $P(V^*)$ e repetir todo argumento apresentado nesta seção. Assim temos definida uma outra função contínua $\varphi_o^* : \partial \mathbb{H}^2 \to P(V^*)$ que também é $PSL(2,\mathbb{Z})$ -equivariante.

Combinando φ_o e φ_o^* temos bem definida a aplicação

$$\Phi := (\varphi_o, \varphi_o^*) : (\partial \mathbb{H}^2)^{(2)} \to \mathcal{F} \subset P(V) \times P(V^*)$$

onde $(\partial \mathbb{H}^2)^{(2)} = \partial \mathbb{H}^2 \times \partial \mathbb{H}^2 \setminus \{(x, x) \mid x \in \partial \mathbb{H}^2\}$, que evidentemente é $PSL(2, \mathbb{Z})$ -equivariante.

Capítulo 4

Um novo grupo e uma família de novas representações

Neste capítulo vamos definir um novo grupo \mathfrak{G}^{λ} de transformações de caixas marcadas que nos permitirá definir uma família de novas representações "semelhantes" à representação de Schwartz.

4.1 Uma nova transformação σ_{λ} de caixas marcadas

Nesta seção vamos definir a nova transformação de caixas marcadas σ_{λ} que nos presenteará com um novo grupo \mathfrak{G}^{λ} que age em CM. No apêndice A apresentamos ao leitor mais detalhes de como chegamos a σ_{λ} .

Seja $[\Theta] = [(p,q,r,s;t,b),(P,Q,R,S;T,B)] \in CM$ convexa.

Seja $(U_{[\Theta]}, f_{[\Theta]} : U_{[\Theta]} \to \mathbb{R}^2)$ uma carta afim de P(V) tal que

(1) $U_{[\Theta]}$ é a região complementar em P(V) da reta projetiva que contém os pontos projetivos $T \cap B \in v = ps \cap qr$.

(2) $f_{[\Theta]} : U_{[\Theta]} \to \mathbb{R}^2$ é a aplicação diferenciável bijetiva tal que $f_{[\Theta]}(p) = (-1, 1), f_{[\Theta]}(q) = (1, 1), f_{[\Theta]}(r) = (1, -1)$ e $f_{[\Theta]}(p) = (-1, -1)$ nas coordenadas que adotamos em \mathbb{R}^2 . Observe que o ponto $w = pr \cap qs$ é mandado por $f_{[\Theta]}$ na origem dos eixos coordenados de \mathbb{R}^2 .

As imagens dos pontos p, q, r, s por $f_{[\Theta]}$ são vértices de um quadrado em $f_{[\Theta]}(U_{[\Theta]})$ cujo interior

é a imagem de $[\stackrel{\circ}{\Theta}]$ por $f_{[\Theta]}$.



Figura 4.1 – caixa marcada $[\Theta]$ na imagem $f_{[\Theta]}(U_{[\Theta]})$

Em $f_{[\Theta]}(U_{[\Theta]})$, a imagem da caixa marcada $[\Theta]$ é escrita em coordenadas por $f_{[\Theta]}([\Theta]) = [((-1,1),(1,1),(1,-1),(-1,-1);(t_x,t_y),(b_x,b_y))(...)].$

Vamos chamar $f_{[\Theta]}([\Theta])$ de **caixa unitária especial** de $[\Theta]$.

Sejam $\lambda \in \mu$ números reais. Vamos definir uma nova transformação de caixas marcadas $\sigma_{(\lambda,\mu)}: CM \to CM$ através da transformação linear $\Sigma_{(\lambda,\mu)} \in f_{[\Theta]}(U_{[\Theta]})$ representada pela matriz $\Sigma_{(\lambda,\mu)} = \begin{pmatrix} e^{\lambda} & 0 \\ 0 & e^{\mu} \end{pmatrix}$ nas coordenadas que adotamos em $f_{[\Theta]}(U_{[\Theta]}) = \mathbb{R}^2$.

Temos

$$\Sigma_{(\lambda,\mu)}(f_{[\Theta]}([\Theta])) = [((-e^{\lambda}, e^{\mu}), (e^{\lambda}, e^{\mu}), (e^{\lambda}, -e^{\mu}), (-e^{\lambda}, -e^{\mu}); (t_x e^{\lambda}, t_y e^{\mu}), (b_x e^{\lambda}, b_y e^{\mu}))(\dots)].$$

Assim
$$\sigma_{(\lambda,\mu)}[\Theta] = f_{[\Theta]}^{-1} \circ \Sigma_{(\lambda,\mu)} \circ f_{[\Theta]}([\Theta]) = f_{[\Theta]}^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda} & 0\\ 0 & e^{\mu} \end{pmatrix} f_{[\Theta]}([\Theta]).$$

Para determinarmos a imagem de uma caixa marcada qualquer por $\sigma_{(\lambda,\mu)}$ primeiramente visualizamos essa caixa marcada como a caixa unitária especial e depois aplicamos a transformação linear $\Sigma_{(\lambda,\mu)}$ nessa caixa unitária especial.

Por simplicidade, vamos considerar qualquer caixa marcada como sendo o quadrilátero que define seu interior convexo.



Figura 4.2 – a caixa $\sigma_{(\lambda,\mu)}[\Theta]$ para $\lambda < 0 \ e \ \mu < 0$

Lema 4.1 A transformação de caixa marcada $\sigma_{(\lambda,\mu)} : CM \to CM$ comuta com os elementos de \mathcal{H} (transformações projetivas) mas não comuta com os elementos de $\mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$ (dualidades projetivas) agindo em CM.

Prova: Dada uma caixa marcada qualquer $[\Theta] = [(p, q, r, s; t, b), (P, Q, R, S; T, B)]$, vamos verificar as relações

(1) $\mathcal{T} \circ \sigma_{(\lambda,\mu)}[\Theta] = \sigma_{(\lambda,\mu)} \circ \mathcal{T}[\Theta]$ para todo $\mathcal{T} \in \mathcal{H}$,

(2) $\mathcal{D} \circ \sigma_{(\lambda,\mu)}[\Theta] \neq \sigma_{(\lambda,\mu)} \circ \mathcal{D}[\Theta]$ para todo $\mathcal{D} \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$.

Antes de verificarmos cada relação acima, devemos lembrar como os elementos de \mathcal{G} agem em CM (veja seção 2.3). Os elementos de \mathcal{H} (transformações projetivas) agem de maneira natural em CM, já os elementos de $\mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$ (dualidades) agem em CM levando em conta a "truque" de Schwartz (observação 2.17).

Para definir a imagem $\sigma_{(\lambda,\mu)}[\Theta]$ primeiro consideramos a carta afim $(U_{[\Theta]}, f_{[\theta]} : U_{[\Theta]} \to \mathbb{R}^2)$ de P(V), tal que $f_{[\Theta]}(p) = (-1, 1), f_{[\Theta]}(q) = (1, 1), f_{[\Theta]}(r) = (1, -1)$ e $f_{[\Theta]}(p) = (-1, -1)$ em $f_{[\Theta]}(U_{[\Theta]}) = \mathbb{R}^2$. Em seguida aplicamos a transformação linear $\Sigma_{(\lambda,\mu)}$ em cada entrada de $f_{[\Theta]}([\Theta])$ (caixa unitária especial) e por último aplicamos $f_{[\Theta]}^{-1}$.

Prova da relação (1)

O primeiro membro de (1) é igual a $\mathcal{T} \circ \sigma_{(\lambda,\mu)}[\Theta] = f_{[\Theta]}^{-1} \circ A_{[\Theta]} \circ \Sigma_{(\lambda,\mu)} \circ f_{[\Theta]}([\Theta])$, sendo $A_{[\Theta]}$ a transformação linear que representa \mathcal{T} em \mathbb{R}^2 .

O segundo membro de (1) é igual a $\sigma_{(\lambda,\mu)} \circ \mathcal{T}[\Theta] = f_{[\Theta]}^{-1} \circ g^{-1} \circ \Sigma_{(\lambda,\mu)} \circ g \circ A_{[\Theta]} \circ f_{[\Theta]}([\Theta])$, sendo g a transformação mudança de coordenadas em \mathbb{R}^2 que envia $A_{[\Theta]} \circ f_{[\Theta]}([\Theta])$ na caixa unitária especial $f_{[\Theta]}([\Theta])$. Note que $g = A_{[\Theta]}^{-1}$.

Logo
$$\sigma_{(\lambda,\mu)} \circ \mathcal{T}[\Theta] = f_{[\Theta]}^{-1} \circ A_{[\Theta]} \circ \Sigma_{(\lambda,\mu)} \circ f_{[\Theta]}([\Theta]) = \mathcal{T} \circ \sigma_{(\lambda,\mu)}[\Theta]$$
. Portanto provamos (1)

Prova da relação (2)

Primeiro vamos verificar que $\sigma_{(\lambda,\mu)}$ não comuta com um elemento particular $g_* \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$ agindo em CM. Como qualquer dualidade pode ser escrita como a composição de g_* e um elemento de \mathcal{H} (transformação projetiva), segue a relação (2) acima.

Seja
$$g_* \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$$
 tal que a dualidade $\tilde{g} : P(V) \to P(V^*)$ que induz g_* satisfaça
 $\tilde{g}(p) = R, \ \tilde{g}(q) = S, \ \tilde{g}(r) = P, \ \tilde{g}(s) = Q, \ \tilde{g}(t) = B \in \ \tilde{g}(b) = T.$

Então

$$g_*[\Theta] = g_*[(p,q,r,s;t,b), (P,Q,R,S;T,B)]$$
$$= [(P^*,Q^*,S^*,R^*;T^*,B^*), (q^*,p^*,r^*,s^*;t^*,b^*)] = [(r,s,q,p;b,t)(S,R,P,Q;B,T)]$$

A dualidade particular g_* é a mesma do item 2 do lema 3.1 do teorema de representações de Schwartz. Essa dualidade é aquela que age em $[\Theta]$ como a transformação de caixa marcada *i* age em $[\Theta]$.

Assim verificar que $g_* \circ \sigma_{(\lambda,\mu)}[\Theta] \neq \sigma_{(\lambda,\mu)} \circ g_*[\Theta]$ equivale a verificar que $i \circ \sigma_{(\lambda,\mu)}[\Theta] \neq \sigma_{(\lambda,\mu)} \circ i[\Theta]$.

Sejam as cartas afins $(U_{[\Theta]}, f_{[\theta]} : U_{[\Theta]} \to \mathbb{R}^2)$ e $(U_{i[\Theta]}, f_{i[\theta]} : U_{i[\Theta]} \to \mathbb{R}^2)$ de P(V). Vamos considerar o caso em que $\lambda < \mu < 0$.

Na figura 4.3 vamos esboçar $[\Theta], i[\Theta], \sigma_{(\lambda,\mu)}[\Theta] \in i\sigma_{(\lambda,\mu)}[\Theta]$ na carta afim $(U_{[\Theta]}, f_{[\theta]} : U_{[\Theta]} \to \mathbb{R}^2)$.

Na figura 4.4 vamos esboçar $[\Theta], i[\Theta] \in \sigma_{(\lambda,\mu)}i[\Theta]$ na carta afim $(U_{i[\Theta]}, f_{i[\theta]} : U_{i[\Theta]} \to \mathbb{R}^2)$.

Quando fazemos a mudança de carta afim $(U_{[\Theta]}, f_{[\theta]} : U_{[\Theta]} \to \mathbb{R}^2)$ para $(U_{i[\Theta]}, f_{i[\theta]} : U_{i[\Theta]} \to \mathbb{R}^2)$, o ponto $T \cap B$ permanece no ∞ , a origem dos eixos coordenados é trocada de $w = pr \cap qs$ para $v = ps \cap qr$ e no eixo vertical (eixo y) o ponto 1 é trocada pelo ponto -1.

Em $U_{i[\Theta]}$ a caixa $\sigma_{(\lambda,\mu)}i[\Theta]$ está contida no interior de $i[\Theta]$, já em $U_{[\Theta]}$ a caixa marcada $i\sigma_{(\lambda,\mu)}[\Theta]$


Figura 4.4 – carta afim $U_{i[\Theta]}$

não está contida no interior de $i[\Theta]$. Logo não é possível $i \circ \sigma_{(\lambda,\mu)}[\Theta] = \sigma_{(\lambda,\mu)} \circ i[\Theta]$, portanto não é possível $g_* \circ \sigma_{(\lambda,\mu)}[\Theta] = \sigma_{(\lambda,\mu)} \circ g_*[\Theta]$. Para os outros valores de λ e μ encontramos problemas semelhantes ao do caso $\lambda < \mu < 0$ que aqui consideramos.

Lema 4.2 Para $\sigma_{(\lambda,\mu)}: CM \to CM$ vale a igualdade

$$\sigma_{(\lambda',\mu')} \circ \sigma_{(\lambda,\mu)} = \sigma_{(\lambda'+\lambda,\mu'+\mu)}.$$

Prova: Sejam $p' = \Sigma_{(\lambda,\mu)} \circ f_{[\Theta]}(p) = (-e^{\lambda}, e^{\mu}), q' = \Sigma_{(\lambda,\mu)} \circ f_{[\Theta]}(q) = (e^{\lambda}, e^{\mu}),$ $r' = \Sigma_{(\lambda,\mu)} \circ f_{[\Theta]}(r) = (e^{\lambda}, -e^{\mu}) e s' = \Sigma_{(\lambda,\mu)} \circ f_{[\Theta]}(s) = (-e^{\lambda}, -e^{\mu}) e f_{[\Theta]}(U_{[\Theta]}) = \mathbb{R}^2.$

Quando fazemos a composição $\sigma_{(\lambda',\mu')} \circ \sigma_{(\lambda,\mu)}([\Theta])$, para aplicarmos $\sigma_{(\lambda',\mu')}$, os pontos p', q', r', s' devem ter coordenadas (-1, 1), (1, 1), (1, -1), (-1, -1), respectivamente. Então primeiro aplicamos a transformação de mudança de coordenadas $h = \begin{pmatrix} e^{-\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-\mu} \end{pmatrix}$ em $f_{[\Theta]}(U_{[\Theta]}) = \mathbb{R}^2$ e depois podemos aplicar $\Sigma_{(\lambda',\mu')}$. Portanto

$$\begin{split} &\sigma_{(\lambda',\mu')} \circ \sigma_{(\lambda,\mu)}([\Theta]) = f_{[\Theta]}^{-1} \circ h^{-1} \circ \Sigma_{(\lambda',\mu')} \circ h \circ \Sigma_{(\lambda,\mu)} \circ f_{[\Theta]}([\Theta])) \\ &= f_{[\Theta]}^{-1} \left(\begin{array}{cc} e^{\lambda} & 0 \\ 0 & e^{\mu} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} e^{\lambda'} & 0 \\ 0 & e^{\mu'} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} e^{-\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-\mu} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} e^{\lambda} & 0 \\ 0 & e^{\mu} \end{array} \right) f_{[\Theta]}([\Theta]) \\ &= f_{[\Theta]}^{-1} \left(\begin{array}{cc} e^{\lambda+\lambda'} & 0 \\ 0 & e^{\mu+\mu'} \end{array} \right) f_{[\Theta]}([\Theta]) \\ &= f_{[\Theta]}^{-1} \circ \Sigma_{(\lambda+\lambda',\mu+\mu')} \circ f_{[\Theta]}([\Theta]) = \sigma_{(\lambda'+\lambda,\mu'+\mu)}([\Theta]), \text{ como queríamos provar.} \end{split}$$

Lema 4.3 Sejam $[\Theta] = [(p,q,r,s;t,b), (P,Q,R,S;T,B)] \in CM \ e \ i : CM \rightarrow CM \ a \ transformação definida por <math>i[\Theta] = [(s,r,p,q;b,t), (R,S,Q,P;B,T)]$. Então vale a igualdade

$$i \circ \sigma_{(\lambda,\mu)} = \sigma_{(\lambda-\mu,-\mu)} \circ i.$$

Prova: Para verificar essa igualdade primeiramente vamos verificar outras duas igualdades.

(1)
$$i \circ \sigma_{(\lambda,0)} = \sigma_{(\lambda,0)} \circ i$$
 (2) $i \circ \sigma_{(0,-\mu)} = \sigma_{(-\mu,-\mu)} \circ i$

Prova da igualdade (1)

O leitor pode acompanhar a argumentação nas figuras 4.5 e 4.6 a seguir.



Figura 4.5 – carta afim $U_{[\Theta]}$

Em $U_{[\Theta]}$ traçamos as caixas marcadas $[\Theta]$, $i[\Theta]$, $\sigma_{(\lambda,0)}[\Theta]$ e $i\sigma_{(\lambda,0)}[\Theta]$. E em $U_{i[\Theta]}$ traçamos as caixas marcadas $[\Theta]$, $i[\Theta]$, $\sigma_{(\lambda,0)}i[\Theta]$ e $i\sigma_{(\lambda,0)}i[\Theta]$.

Os pontos p', q', r', s' definem a caixa marcada $\sigma_{(\lambda,0)}[\Theta]$ em $U_{[\Theta]}$, assim como a caixa marcada $i\sigma_{(\lambda,0)}[\Theta]$. Os pontos p' e q' pertencem à reta pq e os pontos r' e s' pertencem à reta rs.

Em $U_{[\Theta]}$, temos $p' = (-e^{\lambda}, 1), q' = (e^{\lambda}, 1), r' = (e^{\lambda}, -1)$ e $s' = (-e^{\lambda}, -1)$.



Figura 4.6 – carta afim $U_{i[\Theta]}$

Portanto vale (1).

Prova da igualdade (2)

Acompanhe a argumentação nas figuras 4.7 e 4.8 a seguir.



Figura 4.7 – carta afim $U_{[\Theta]}$

 $\operatorname{Em} U_{[\Theta]} \operatorname{traçamos} [\Theta], \, i[\Theta], \, \sigma_{(0,\mu)}[\Theta] \in i\sigma_{(0,\mu)}[\Theta]. \ \operatorname{Em} U_{i[\Theta]} \operatorname{traçamos} [\Theta], \, i[\Theta], \, \sigma_{(-\mu,-\mu)}i[\Theta] = i\sigma_{(-\mu,-\mu)}i[\Theta].$

Agora vamos denotar por p', q', r', s' os pontos que definem a caixa marcada $\sigma_{(0,\mu)}[\Theta]$ em $U_{[\Theta]}$, assim como a caixa marcada $i\sigma_{(0,\mu)}[\Theta]$.



Figura 4.8 – carta afim $U_{i[\Theta]}$

Em $U_{[\Theta]}$, as retas $p'q' \in s'r'$ são paralelas ao eixo horizontal (eixo x) se intersectando em $T \cap B$ no ∞ , assim como as retas $pq \in rs$. Da mesma forma, em $U_{i[\Theta]}$ essas retas $p'q' \in s'r'$ também são paralelas ao eixo horizontal se intersectando em $T \cap B$ no ∞ . O ponto $(0, e^{\mu})$ em $U_{[\Theta]}$ é o ponto $(0, -e^{-\mu})$ em $U_{i[\Theta]}$. Logo a reta $p'q' \notin y = -e^{-\mu}$ e a reta $s'r' \notin y = e^{-\mu}$ em $U_{i[\Theta]}$.

Os pontos r' e q' pertencem à reta qr e os pontos s' e p' pertencem à reta ps. Daí, em $U_{i[\Theta]}$, os pontos p', q', r', s' pertencem às retas diagonais do quadrado de lado $2e^{-\mu}$ de centro na origem v dos eixos coordenados. Os pontos p', q', r', s' são os vértices desse quadrado.

Logo em $U_{i[\Theta]}$ temos $p' = (e^{-\mu}, -e^{-\mu}), q' = (-e^{-\mu}, -e^{-\mu}), r' = (e^{-\mu}, e^{-\mu})$ e $s' = (-e^{-\mu}, e^{-\mu})$. Portanto vale (2).

Pelo lema 4.2 e pela igualdade (1) temos $i \circ \sigma_{(\lambda,\mu)} = i \circ \sigma_{(\lambda,0)} \circ \sigma_{(0,\mu)} = \sigma_{(\lambda,0)} \circ i \circ \sigma_{(0,\mu)}$.

Agora pela igualdade (2) e novamente pelo lema 4.2 temos

$$\sigma_{(\lambda,0)} \circ i \circ \sigma_{(0,\mu)} = \sigma_{(\lambda,0)} \circ \sigma_{(-\mu,-\mu)} \circ i = \sigma_{(\lambda-\mu,-\mu)} \circ i.$$

Portanto vale a igualdade $i \circ \sigma_{(\lambda,\mu)} = \sigma_{(\lambda-\mu,-\mu)} \circ i$, como queríamos provar.

Seja $\sigma_{(\lambda,\mu)}$ a nova transformação de caixas marcadas que definimos nesta seção. Consideremos o caso particular em que $\mu = 2\lambda$ na igualdade $i \circ \sigma_{(\lambda,\mu)} = \sigma_{(\lambda-\mu,-\mu)} \circ i$.

le $i\sigma_{(\lambda,2\lambda)} = \sigma_{(-\lambda,-2\lambda)}i$. A 4.2 vale $\sigma_{(-\lambda,-2\lambda)} = \sigma_{(\lambda,2\lambda)}^{-1}$.

Para simplificar nossa notação vamos definir a transformação de caixas marcadas

$$\sigma_{\lambda} := \sigma_{(\lambda, 2\lambda)} \,.$$

Então vale a seguinte relação fundamental

$$i\sigma_{\lambda} = \sigma_{\lambda}^{-1}i \,. \tag{4.1}$$

4.2 Um novo grupo \mathfrak{G}^{λ} de transformações de caixas marcadas

Na seção 2.4 foram definidas três transformações elementares de caixas marcadas: i, $\tau_1 \in \tau_2$.

Vimos no lema 2.24 que são válidas as relações

 $i^2 = 1$ $(i\tau_1)^3 = 1$ $\tau_1 i\tau_2 = i$, $\tau_2 i\tau_1 = i$, $\tau_1 i\tau_1 = \tau_2$, $\tau_2 i\tau_2 = \tau_1$.

Assim foi possível definir o grupo \mathfrak{G} das transformações elementares de caixas marcadas gerado por $i, \tau_1 \in \tau_2$. Usando o lema da mesa de tênis, verificamos que \mathfrak{G} é isomorfo ao grupo modular M.

$$\mathfrak{G} = \langle i, \tau_1, \tau_2; i^2 = 1, (i\tau_1)^3 = 1 \rangle \cong M \cong PSL(2, \mathbb{Z})$$

Agora vamos definir três novas transformações de caixas marcadas como se segue

$$i^{\lambda} := \sigma_{\lambda} i \qquad \qquad \tau_1^{\lambda} := \sigma_{\lambda} \tau_1 \qquad \qquad \tau_2^{\lambda} := \sigma_{\lambda} \tau_2$$

Lema 4.4 As relações seguintes são sempre válidas para elementos de CM.

$$(i^{\lambda})^2 = 1 \qquad (i^{\lambda}\tau_1^{\lambda})^3 = 1 \qquad \tau_1^{\lambda}i^{\lambda}\tau_2^{\lambda} = i^{\lambda}, \qquad \tau_2^{\lambda}i^{\lambda}\tau_1^{\lambda} = i^{\lambda}, \qquad \tau_1^{\lambda}i^{\lambda}\tau_1^{\lambda} = \tau_2^{\lambda}, \qquad \tau_2^{\lambda}i^{\lambda}\tau_2^{\lambda} = \tau_1^{\lambda}.$$

Prova: A verificação dessas relações é imediata pela relação fundamental $i\sigma_{\lambda} = \sigma_{\lambda}^{-1}i$ e pelas reações do lema 2.24. ■

Assim pelo lema 4.4 podemos definir um novo grupo \mathfrak{G}^{λ} de transformações de caixas marcadas gerado por i^{λ} , $\tau_1^{\lambda} \in \tau_2^{\lambda}$.

Vamos denotar por $O_{\mathfrak{G}^{\lambda}}[\Theta]$ a **órbita da caixa marcada** $[\Theta]$ pela ação do grupo \mathfrak{G}^{λ} . Ou seja, $O_{\mathfrak{G}^{\lambda}}[\Theta]$ é a \mathfrak{G}^{λ} -órbita de $[\Theta]$.

Lema 4.5 *O* grupo \mathfrak{G}^{λ} age livremente sobre $O_{\mathfrak{G}^{\lambda}}[\Theta]$.

Prova: Pelas relações entre i^{λ} , $\tau_1^{\lambda} \in \tau_2^{\lambda}$ apresentadas no lema 4.4, qualquer $g \in \mathfrak{G}^{\lambda}$ possui uma das quatro representações em palavras com letras i^{λ} , $\tau_1^{\lambda} \in \tau_2^{\lambda}$.

(1) $g = \tau_{j_1}^{\lambda} \dots \tau_{j_k}^{\lambda}$ (2) $g = i^{\lambda} \tau_{j_1}^{\lambda} \dots \tau_{j_k}^{\lambda}$ (3) $g = \tau_{j_1}^{\lambda} \dots \tau_{j_k}^{\lambda} i^{\lambda}$ (4) $g = i^{\lambda} \tau_{j_1}^{\lambda} \dots \tau_{j_k}^{\lambda} i^{\lambda}$

A demonstração deste lema segue pelos mesmos argumentos usados na prova do lema 2.32. O único elemento que fixa $[\Theta]$ é o elemento identidade de \mathfrak{G}^{λ} .

Lema 4.6 O grupo \mathfrak{G}^{λ} é isomorfo ao grupo modular $PSL(2,\mathbb{Z})$.

Prova: Os elementos i^{λ} e $i^{\lambda}\tau_{1}^{\lambda}$ geram \mathfrak{G}^{λ} . Então basta verificar que \mathfrak{G}^{λ} é o produto livre de $\mathfrak{G}_{1}^{\lambda} = \langle i^{\lambda} | (i^{\lambda})^{2} = 1 \rangle$ e $\mathfrak{G}_{2}^{\lambda} = \langle i^{\lambda}\tau_{1}^{\lambda} | (i^{\lambda}\tau_{1}^{\lambda})^{3} = 1 \rangle$. Para esse propósito usa-se o lema da mesa de tênis como no lema 4.6 e segue o resultado. ■

Concluímos então que os grupos $\mathfrak{G} \in \mathfrak{G}^{\lambda}$ são isomorfos ao grupo modular $PSL(2, \mathbb{Z})$, ou seja, $PSL(2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 \cong \mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}^{\lambda} = \langle i^{\lambda}, \tau_1^{\lambda}, \tau_2^{\lambda} \mid (i^{\lambda})^2 = 1, (i^{\lambda}\tau_1^{\lambda})^3 = 1 \rangle \cong \mathfrak{G}_1^{\lambda} * \mathfrak{G}_2^{\lambda}.$

4.3 O grupo Γ e seu subgrupo Γ_o de índice **2**

Conforme já mencionamos na seção 2.5.2, podemos substituir a triangulação de Farey \mathcal{L}_o em \mathbb{H}^2 por outra laminação geodésica \mathcal{L} de modo que qualquer componente de $\mathbb{H}^2 \setminus \mathcal{L}$ seja limitada por três geodésicas de \mathcal{L} . Escolhemos \mathcal{L} de modo que as geodésicas não tenham pontos limites comuns em $\partial \mathbb{H}^2$, ou seja, são ultra paralelas; e \mathcal{L} seja invariante por um subgrupo discreto $\Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^2)$, sendo $\Gamma \cong PSL(2,\mathbb{Z})$ mas Γ cocompacto convexo.



O grupo $PSL(2,\mathbb{Z})$ é gerado pelas classes de equivalência das matrizes

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad R = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad de SL(2, \mathbb{Z}),$$

(veja observação 2.41) e a triangulação de Farey \mathcal{L}_o é invariante por

$$PSL(2,\mathbb{Z}) = \langle I, R \mid I^2 = 1, R^3 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3.$$

Podemos pensar no grupo cocompacto Γ "construído" a partir de $PSL(2,\mathbb{Z})$: tomamos o gerador I de ordem 2 de $PSL(2,\mathbb{Z})$ e "alteramos adequadamente" o centro de rotação do gerador R de ordem 3 de $PSL(2,\mathbb{Z})$. Denotamos essa nova rotação de ordem 3 por $R_* \in PSL(2,\mathbb{R})$.

O grupo discreto Γ é o produto livre dessas duas isometrias $I \in R_*$, ou seja,

$$\Gamma = \langle I, R_* \mid I^2 = 1, R_*^3 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$$
, subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R}) \cong Isom(\mathbb{H}^2)$.

A laminação \mathcal{L} é a Γ -órbita da geodésica $[0,\infty]$ em \mathbb{H}^2 (veja observação 2.41).

Fixada a caixa marcada convexa $[\Theta]$, vamos considerar as geodésicas da laminação \mathcal{L} rotuladas pelas caixas da \mathfrak{G} -órbita de $[\Theta]$, da mesma forma que rotulamos as geodésicas de \mathcal{L}_o . Vamos considerar o triângulo orientado $\Delta_{[\theta]}$ de \mathcal{L} com arestas (geodésicas) rotuladas $[\theta]$, $i\tau_1[\theta]$ e $i\tau_2[\theta]$ como na figura a seguir; as geodésicas são todas ultra paralelas.



Figura 4.9 – triângulo orientado $\Delta_{[\theta]}$ da laminação \mathcal{L}

A isometria R_* de ordem 3 em \mathbb{H}^2 é tal que

$$R_*([\theta]) = i\tau_1[\theta]$$
$$R_*(i\tau_1[\theta]) = i\tau_2[\theta]$$
$$R_*(i\tau_2[\theta]) = [\theta]$$

A isometria $I\in PSL(2,\mathbb{Z})$ de ordem 2 em \mathbb{H}^2 é tal que

$$I([\theta]) = i[\theta]$$
$$I(i[\theta]) = [\theta]$$

O grupo que nos interessa para a nossa contrução é o grupo cocompacto Γ .

Observação 4.7 Vamos destacar o subgrupo especial $\Gamma_o = \langle R_*, IR_*I \rangle$ de Γ .

O subgrupo Γ_o é formado pelas palavras de letras I e R_* com um número par de letras I; é o subgrupo de Γ formado pelas isometrias que preservam orientação dos triângulos orientados da laminação \mathcal{L} em \mathbb{H}^2 . As únicas relações dos elementos de Γ_o são $R_*^3 = 1$ e $(IR_*I)^3 = 1$, então temos

$$\Gamma_o = \langle R_*, IR_*I \mid R_*^3 = 1, (IR_*I)^3 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3$$

O subgrupo Γ_o possui índice 2 em Γ.

Observação 4.8 São válidas as seguintes relações entre as geodésicas rotuladas da laminação \mathcal{L} :

$$IR_*I[\theta] = \tau_1 i[\theta],$$

$$(IR_*I)^2[\theta] = IR_*^2 I[\theta] = \tau_2 i[\theta],$$

$$(IR_*I)^3[\theta] = IR_*^3 I[\theta] = [\theta].$$



4.4 Mais ações de grupos em \mathcal{L} e em CM

Uma vez fixada uma caixa marcada $[\Theta]$, da mesma forma que rotulamos as geodésicas da triangulação de Farey \mathcal{L}_o por elementos da \mathfrak{G} -órbita de $[\Theta]$, podemos rotular as geodésicas da laminação \mathcal{L} por elementos da \mathfrak{G} -órbita de $[\Theta]$. E, exatamente da mesma forma, podemos rotular as geodésicas de \mathcal{L} por elementos da \mathfrak{G}^{λ} -órbita de $[\Theta]$.

O grupo Γ envia triângulos geodésicos orientados da laminação \mathcal{L} em triângulos geodésicos orientados de \mathcal{L} . Portanto, pelo mesmo argumento da prova do lema 2.47, concluímos que

as ações de \mathfrak{G}^{λ} e $\Gamma(\cong PSL(2,\mathbb{Z}))$ em \mathcal{L} comutam entre si.

Em particular,

as ações de \mathfrak{G}^{λ} e Γ_o em \mathcal{L} comutam entre si.

Agora, pelo lema 4.1, segue que

 $\sigma_{\lambda} \circ \mathcal{T} = \mathcal{T} \circ \sigma_{\lambda} \quad \text{para } \mathcal{T} \in \mathcal{H} \triangleleft \mathcal{G}, \text{ (transformações projetivas)},$ mas $\sigma_{\lambda} \circ \mathcal{D} \neq \mathcal{D} \circ \sigma_{\lambda} \quad \text{para } \mathcal{D} \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H} \text{ (dualidades)},$

para elementos de \mathcal{G} agindo em CM. Logo, para $\mathcal{T} \in \mathcal{H} \triangleleft \mathcal{G}$, temos

$$i^{\lambda} \circ \mathcal{T} = \mathcal{T} \circ i^{\lambda},$$

 $\tau_1^{\lambda} \circ \mathcal{T} = \mathcal{T} \circ \tau_1^{\lambda},$
 $\tau_2^{\lambda} \circ \mathcal{T} = \mathcal{T} \circ \tau_2^{\lambda},$

Portanto, as ações de \mathfrak{G}^{λ} e $\mathcal{H} \triangleleft \mathcal{G}$ em CM comutam entre si.

Observação 4.9 Os grupos $\mathfrak{G} \in \mathfrak{G}^{\lambda}$ são essencialmente iguais. Então podemos usar \mathfrak{G}^{λ} no lugar de \mathfrak{G} na construção apresentada por Schwartz. O único "problema" com essa nova construção usando \mathfrak{G}^{λ} é que os elementos de \mathfrak{G}^{λ} não comutam com as dualidades (os elementos de $\mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$) agindo em CM, mas apenas com as transformações projetivas (os elementos de $\mathcal{H} \cong PGL(V)$). Mas esse problema é facilmente contornado. Vamos definir uma nova representação em Γ_o , não em Γ . A nova representação $\rho_{\Theta}^{\lambda} : \Gamma_o \to \mathcal{H} \cong PGL(V)$ tem a propriedade ρ_{Θ}^{λ} -invariante desejada, como veremos na próxima seção.

4.5 Uma família de novas representações $\rho_{\Theta}^{\lambda} : \Gamma_o \to \mathcal{H} \triangleleft \mathcal{G}$

Dado $\lambda \neq 0$, vamos considerar o novo grupo \mathfrak{G}^{λ} de transformações de caixas marcadas.

Lema 4.10 Dada $[\Theta]$ uma caixa marcada convexa qualquer, então

1. existe uma única **transformação projetiva** $\mathcal{A}_{\Theta} \in \mathcal{H}$ de ordem 3 tal que $[\Theta] \xrightarrow{\mathcal{A}_{\Theta}} i^{\lambda} \tau_{1}^{\lambda} [\Theta] \xrightarrow{\mathcal{A}_{\Theta}} (i^{\lambda} \tau_{1}^{\lambda})^{2} [\Theta] \xrightarrow{\mathcal{A}_{\Theta}} [\Theta]$

(Lembre-se de que $(i^{\lambda}\tau_{1}^{\lambda})^{2}[\Theta] = i^{\lambda}\tau_{2}^{\lambda}[\Theta].$)

2. existe uma única **transformação projetiva** $\mathcal{A}'_{\Theta} \in \mathcal{H}$ de ordem 3 tal que $[\Theta] \xrightarrow{\mathcal{A}'_{\Theta}} \tau_1^{\lambda} i^{\lambda} [\Theta] \xrightarrow{\mathcal{A}'_{\Theta}} (\tau_1^{\lambda} i^{\lambda})^2 [\Theta] \xrightarrow{\mathcal{A}'_{\Theta}} [\Theta]$ Prova: (item 1): Primeiramente observamos que

 $i\tau_1[\Theta] = i^{\lambda}\tau_1^{\lambda}[\Theta]$ e $i\tau_2[\Theta] = i^{\lambda}\tau_2^{\lambda}[\Theta].$

De fato, $i^{\lambda}\tau_{1}^{\lambda}[\Theta] = \sigma_{\lambda}i\sigma_{\lambda}\tau_{1}[\Theta] = \sigma_{\lambda}\sigma_{\lambda}^{-1}i\tau_{1}[\Theta] = i\tau_{1}[\Theta]$. Analogamente, segue que $i\tau_{2}[\Theta] = i^{\lambda}\tau_{2}^{\lambda}[\Theta]$.

Vimos no lema 3.1 do teorema de representações de Schwartz que existe uma única transformação projetiva \mathcal{A}_{Θ} de ordem 3 tal que

$$[\Theta] \stackrel{\mathcal{A}_{\Theta}}{\to} i\tau_1[\Theta] \stackrel{\mathcal{A}_{\Theta}}{\to} (i\tau_1)^2[\Theta] \stackrel{\mathcal{A}_{\Theta}}{\to} [\Theta].$$

Portanto essa transformação projetiva \mathcal{A}_{Θ} de ordem 3 também verifica o ciclo

$$[\Theta] \stackrel{\mathcal{A}_{\Theta}}{\to} i^{\lambda} \tau_{1}^{\lambda} [\Theta] \stackrel{\mathcal{A}_{\Theta}}{\to} (i^{\lambda} \tau_{1}^{\lambda})^{2} [\Theta] \stackrel{\mathcal{A}_{\Theta}}{\to} [\Theta],$$

o que prova o item 1 do lema.

<u>(item 2)</u>: Pelo item 1, dada uma caixa marcada convexa qualquer $[\Psi]$, existe uma transformação projetiva \mathcal{A}_{Ψ} que verifica o ciclo

$$[\Psi] \stackrel{\mathcal{A}_{\Psi}}{\to} i^{\lambda} \tau_{1}^{\lambda} [\Psi] \stackrel{\mathcal{A}_{\Psi}}{\to} (i^{\lambda} \tau_{1}^{\lambda})^{2} [\Psi] \stackrel{\mathcal{A}_{\Psi}}{\to} [\Psi].$$

Se $[\Psi] = i^{\lambda}[\Theta]$, então existe uma transformação projetiva \mathcal{A}_{Θ}' de ordem 3 tal que $i^{\lambda}[\Theta] \xrightarrow{\mathcal{A}_{\Theta}'} i^{\lambda} \tau_1^{\lambda} (i^{\lambda}[\Theta]) \xrightarrow{\mathcal{A}_{\Theta}'} (i^{\lambda} \tau_1^{\lambda})^2 (i^{\lambda}[\Theta]) \xrightarrow{\mathcal{A}_{\Theta}'} i^{\lambda}[\Theta].$

Assim temos

 $\mathcal{A}'_{\Theta}(i^{\lambda}[\Theta]) = i^{\lambda}\tau_{1}^{\lambda}(i^{\lambda}[\Theta])$ (as ações de $\mathfrak{G}^{\lambda} \in \mathcal{H} \triangleleft \mathcal{G}$ em CM comutam entre si)

$$\Rightarrow i^{\lambda} \mathcal{A}_{\Theta}'([\Theta]) = i^{\lambda} \tau_{1}^{\lambda} (i^{\lambda}[\Theta])$$
$$\Rightarrow i^{\lambda} i^{\lambda} \mathcal{A}_{\Theta}'([\Theta]) = i^{\lambda} i^{\lambda} \tau_{1}^{\lambda} (i^{\lambda}[\Theta]) \qquad \Rightarrow \mathcal{A}_{\Theta}'([\Theta]) = \tau_{1}^{\lambda} i^{\lambda} [\Theta].$$

Temos também

$$\mathcal{A}_{\Theta}'(i^{\lambda}\tau_{1}i^{\lambda}[\Theta]) = i^{\lambda}\tau_{1}^{\lambda}i^{\lambda}\tau_{1}^{\lambda}i^{\lambda}[\Theta] \text{ (as ações de } \mathfrak{G}^{\lambda} e \mathcal{H} \triangleleft \mathcal{G} em CM \text{ comutam entre si})$$

$$\Rightarrow i^{\lambda}\mathcal{A}_{\Theta}'(\tau_{1}i^{\lambda}[\Theta]) = i^{\lambda}\tau_{1}^{\lambda}i^{\lambda}\tau_{1}^{\lambda}i^{\lambda}[\Theta]$$

$$\Rightarrow i^{\lambda}i^{\lambda}\mathcal{A}_{\Theta}'(\tau_{1}i^{\lambda}[\Theta]) = i^{\lambda}i^{\lambda}\tau_{1}^{\lambda}i^{\lambda}\tau_{1}^{\lambda}i^{\lambda}[\Theta] \qquad \Rightarrow \mathcal{A}_{\Theta}'(\tau_{1}i^{\lambda}[\Theta]) = \tau_{1}^{\lambda}i^{\lambda}\tau_{1}^{\lambda}i^{\lambda}[\Theta] = (\tau_{1}^{\lambda}i^{\lambda})^{2}[\Theta].$$

Analogamente, verificamos que $\mathcal{A}'_{\Theta}(\tau_1^{\lambda}i^{\lambda})^2[\Theta] = [\Theta].$

Portanto existe uma única transformação projetiva $\mathcal{A}'_{\Theta} \in \mathcal{H}$ de ordem 3 tal que $[\Theta] \xrightarrow{\mathcal{A}'_{\Theta}} \tau_1^{\lambda} i^{\lambda} [\Theta] \xrightarrow{\mathcal{A}'_{\Theta}} (\tau_1^{\lambda} i^{\lambda})^2 [\Theta] \xrightarrow{\mathcal{A}'_{\Theta}} [\Theta],$

assim provamos o lema. \blacksquare

Teorema 4.11 Seja $[\Theta]$ uma caixa marcada convexa e seja $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}^{\lambda}}[\Theta]$ sua \mathfrak{G}^{λ} -órbita. Então existe uma representação fiel ρ_{Θ}^{λ} do subgrupo Γ_o de Γ , agindo na laminação \mathcal{L} , sobre o subgrupo $\mathcal{H} \triangleleft \mathcal{G}$ agindo em $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}^{\lambda}}[\Theta] \subset CM$;

 $\rho_{\Theta}^{\lambda}: \Gamma_{o} \to \mathcal{H} \cong PGL(3, \mathbb{R}) \quad homomorfismo \ injetivo,$ tal que $\forall m \in \Gamma_{o} \ e \ \forall \ [\Psi] \in \mathcal{O}_{\mathfrak{G}^{\lambda}}[\Theta] \ vale \ m[\psi] = \rho_{\Theta}^{\lambda}(m)[\Psi] \ (propriedade \ \rho_{\Theta}^{\lambda}-invariante).$

Prova: Temos que a isometria R_* em \mathbb{H}^2 , de ordem 3, é tal que

$$R_*([\theta]) = i^{\lambda} \tau_1^{\lambda}[\theta]$$
$$R_*^2([\theta]) = R_*(i^{\lambda} \tau_1^{\lambda}[\theta]) = i^{\lambda} \tau_2^{\lambda}[\theta]$$
$$R_*^3([\theta]) = R_*(i^{\lambda} \tau_2^{\lambda}[\theta]) = [\theta]$$

Pelo item 1 do lema 4.10, existe $\mathcal{A}_{\Theta} \in \mathcal{H}$, transformação projetiva, tal que

$$\mathcal{A}_{\Theta}([\Theta]) = i^{\lambda} \tau_{1}^{\lambda}[\Theta]$$
$$\mathcal{A}_{\Theta}^{2}([\Theta]) = \mathcal{A}_{\Theta}(i^{\lambda} \tau_{1}^{\lambda}[\Theta]) = i^{\lambda} \tau_{2}^{\lambda}[\Theta]$$
$$\mathcal{A}_{\Theta}^{3}([\Theta]) = \mathcal{A}_{\Theta}(i^{\lambda} \tau_{2}^{\lambda}[\Theta]) = [\Theta]$$

Então vale

$$R_*([\theta]) = \mathcal{A}_{\Theta}([\Theta])$$
$$R_*(i^{\lambda}\tau_1^{\lambda}[\theta]) = \mathcal{A}_{\Theta}(i^{\lambda}\tau_1^{\lambda}[\Theta])$$
$$R_*(i^{\lambda}\tau_2^{\lambda}[\theta]) = \mathcal{A}_{\Theta}(i^{\lambda}\tau_2^{\lambda}[\Theta])$$

Temos que a isometria IR_*I em \mathbb{H}^2 , de ordem 3, é tal que

$$IR_*I[\theta] = \tau_1^{\lambda}i^{\lambda}[\theta],$$

$$(IR_*I)^2[\theta] = IR_*I(\tau_1^{\lambda}i^{\lambda}[\theta]) = IR_*^2I[\theta] = \tau_2^{\lambda}i^{\lambda}[\theta],$$

$$(IR_*I)^3[\theta] = IR_*I(\tau_2^{\lambda}i^{\lambda}[\theta]) = IR_*^3I[\theta] = [\theta].$$

Pelo item 2 do lema 4.10, existe $\mathcal{A}'_{\Theta} \in \mathcal{H}$, transformação projetiva, tal que

$$\mathcal{A}_{\Theta}'[\Theta] = \tau_1^{\lambda} i^{\lambda}[\Theta],$$
$$\mathcal{A}_{\Theta}'^{2}[\Theta] = \mathcal{A}_{\Theta}'(\tau_1^{\lambda} i^{\lambda}[\Theta]) = \tau_2^{\lambda} i^{\lambda}[\Theta],$$
$$\mathcal{A}_{\Theta}'^{3}[\Theta] = \mathcal{A}_{\Theta}'(\tau_2^{\lambda} i^{\lambda}[\Theta]) = [\Theta].$$

Então vale

$$IR_*I[\theta] = \mathcal{A}'_{\Theta}[\Theta]$$
$$IR_*I(\tau_1^{\lambda}i^{\lambda}[\theta]) = \mathcal{A}'_{\Theta}(\tau_1^{\lambda}i^{\lambda}[\Theta])$$
$$IR_*I(\tau_2^{\lambda}i^{\lambda}[\theta]) = \mathcal{A}'_{\Theta}(\tau_2^{\lambda}i^{\lambda}[\Theta])$$

As isometrias hiperbólicas $R_* \in IR_*I$ geram $\Gamma_o \cong \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3$.

Sejam os subgrupos $M'_1 = \langle R_* \mid R^3_* = 1 \rangle$ e $M'_2 = \langle IR_*I \mid (IR_*I)^3 = 1 \rangle$ de Γ_o tais que $\Gamma_o = M'_1 * M'_2$.

Vamos considerar os homomorfismos de grupos

$$\rho_1^{\lambda}: M_1' \to \mathcal{H} \text{ definido por } \rho_1^{\lambda}(R_*) = \mathcal{A}_{\Theta} \text{ (transformação projetiva),}$$

 $\rho_2^{\lambda}: M_2' \to \mathcal{H} \text{ definido por } \rho_2^{\lambda}(IR_*I) = \mathcal{A}_{\Theta}' \text{ (transformação projetiva).}$

Então existe um único homomorfismo $\rho_\Theta^\lambda: \Gamma_o \to \mathcal{H}$ tal que

$$\rho_{\Theta}^{\lambda}(R_*) = \rho_1^{\lambda}(R_*) = \mathcal{A}_{\Theta} \quad e \quad \rho_{\Theta}^{\lambda}(IR_*I) = \rho_2^{\lambda}(IR_*I) = \mathcal{A}_{\Theta}'.$$

Logo

$$R_*[\theta] = \mathcal{A}_{\Theta}[\Theta] = \rho_{\Theta}^{\lambda}(R_*)[\Theta] \quad e \quad IR_*I[\theta] = \mathcal{A}_{\Theta}'[\Theta] = \rho_{\Theta}^{\lambda}(IR_*I)[\Theta].$$

Precisamos verificar que para qualquer $[\Psi] \in \mathcal{O}_{\mathfrak{G}^{\lambda}}[\Theta]$

$$R_*[\psi] = \rho_{\Theta}^{\lambda}(R_*)[\Psi] \qquad \text{e} \qquad IR_*I[\psi] = \rho_{\Theta}^{\lambda}(IR_*I)[\Psi].$$

Seja $[\Psi] \in \mathcal{O}_{\mathfrak{G}^{\lambda}}[\Theta]$ então $[\Psi] = w[\Theta]$ para algum $w \in \mathfrak{G}^{\lambda}$. Logo

$$\begin{aligned} R_*[\psi] &= R_*(w[\theta]) = w(R_*[\theta]) \text{ (as ações de } \mathfrak{G}^{\lambda} \in \Gamma_o \text{ em } \mathcal{L} \text{ comutam entre si}) \\ &= w(\rho_{\Theta}^{\lambda}(R_*)[\Theta]) = \rho_{\Theta}^{\lambda}(R_*)(w[\Theta]) \text{ (as ações de } \mathfrak{G}^{\lambda} \in \mathcal{H} \text{ em } CM \text{ comutam entre si}) \\ &= \rho_{\Theta}^{\lambda}(R_*)[\Psi] \end{aligned}$$

Portanto $R_*[\psi] = \rho_{\Theta}^{\lambda}(R_*)[\Psi].$

Analogamente,

$$\begin{split} IR_*I[\psi] &= IR_*I(w[\theta]) = w(IR_*I[\theta]) \text{ (as ações de } \mathfrak{G}^{\lambda} \in \Gamma_o \text{ em } \mathcal{L} \text{ comutam entre si}) \\ &= w(\rho_{\Theta}^{\lambda}(IR_*I)[\Theta]) = \rho_{\Theta}^{\lambda}(IR_*I)(w[\Theta]) \text{ (as ações de } \mathfrak{G}^{\lambda} \in \mathcal{H} \text{ em } CM \text{ comutam entre si}) \\ &= \rho_{\Theta}^{\lambda}(IR_*I)[\Psi] \\ &\text{Portanto } IR_*I[\psi] = \rho_{\Theta}^{\lambda}(IR_*I)[\Psi]. \end{split}$$

Então temos que

$$\forall m \in \Gamma_o \in \forall [\Psi] \in \mathcal{O}_{\mathfrak{G}^{\lambda}}[\Theta] \text{ vale } m[\psi] = \rho_{\Theta}^{\lambda}(m)[\Psi].$$

O fato que $\rho_{\Theta}^{\lambda} : \Gamma_o \to \mathcal{H}$ é uma representação fiel (homomorfismo injetivo) segue do fato que a ação de Γ_o em \mathcal{L} é livre.

Capítulo 5

Normas definidas pelas caixas marcadas

O leitor deve estar se perguntando porque construímos uma família de novas representações usando o grupo \mathfrak{G}^{λ} ao invés do grupo \mathfrak{G} que comuta com as dualidades projetivas agindo em CM. Os elementos (caixas marcadas) da \mathfrak{G} -órbita de $[\Theta]$ são justapostos, já os elementos da \mathfrak{G}^{λ} -órbita de $[\Theta]$ não. Veja a figura a seguir. Então, para cada caixa marcada da \mathfrak{G}^{λ} -órbita de $[\Theta]$, podemos definir uma norma em $T_x P(V)$, onde x é um ponto no interior convexo de $[\Theta]$, permitindo que as nossas novas representações possuam a propriedade Anosov de expansão e contração. Para esse fim, usaremos uma métrica de Hilbert, ou melhor, uma norma Finsler.



Figura 5.1 – caixas marcadas em P(V)

5.1 A métrica de Hilbert e a norma Finsler

Seja D um aberto convexo próprio de P(V). O termo "próprio" significa que existe uma carta afim C de P(V) onde \overline{D} é um conjunto compacto.

Para $x \neq y \in D$, sejam a, b os pontos de interseção da reta xy com ∂D de modo que a, x, y, b estão nessa ordem em \overline{D} .



Figura 5.2 – $a, x, y, b \text{ em } \overline{D}$

Definição 5.1 A distância de Hilbert entre $x e y \notin dada pela função <math>d_D^h : D \times D \rightarrow [0, +\infty)$ definida por

$$d_D^h(x,y) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{|a-y| \cdot |b-x|}{|a-x| \cdot |b-y|}\right).$$

A razão entre parêntese é a razão cruzada [a, b, y, x] definida em 1.18 no capítulo 1. O valor $d_D^h(x, y)$ não depende da norma euclidiana $|\cdot|$ escolhida em \mathcal{C} . A função $d_D^h: D \times D \to [0, +\infty)$ é de fato uma métrica (veja [OP], página 7, teorema 4).

A métrica de Hilbert tem o bom gosto de vir de uma norma Finsler definida por uma fórmula muito simples, como veremos a seguir.

Sejam $x \in D$ e v um vetor no espaço tangente $T_x D$ de x. Sejam os pontos p^- e p^+ as interseções com ∂D da reta orientada em C passando por x e tendo v como vetor diretor.



Figura 5.3 – a reta que contém x e com vetor diretor v

Definição 5.2 A norma Finsler $F_D(x, .) : T_x D \to [0, +\infty)$ é definida por

$$F_D(x,v) = \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} d_D^h(x,x+tv) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{|x-p^-|} + \frac{1}{|x-p^+|} \right) |v|$$

 $sendo | \cdot |$ a norma euclidiana escolhida em C.

A norma que nos interessa é esta!

Definição 5.3 Seja D um aberto convexo próprio de P(V) e sejam $x \in D$ e $v \in T_xD$. Chamamos de **norma de Hilbert** de v, denotada por $||v||_D^h$, a norma definida pela norma Finsler acima.

$$||v||_D^h = F_D(x,v) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{|x-p^-|} + \frac{1}{|x-p^+|} \right) |v|$$

Observação 5.4 (*Propriedade do observador*) Consideremos dois segmentos (a, b) e(a', b')em P(V). Seja um ponto O fora das retas que contêm esses segmentos. Sejam $x, y \in (a, b)$ e $x', y' \in (a', b')$ tais que $O, x, x' \in O, y, y'$ são respectivamente colineares (veja a figura a seguir).



Figura 5.4 – propriedade do observador

Como transformações projetivas preservam razões cruzadas, segue que

$$d^{h}_{(a,b)}(x,y) = d^{h}_{(a',b')}(x',y')$$

Essa propriedade expressa a invariância da métrica de Hilbert por transformações projetivas. Portanto uma transformação projetiva entre dois abertos convexos próprios é uma isometria para a métrica de Hilbert.

Observação 5.5 (*Propriedade de dilatação da métrica de Hilbert*) Sejam $D_1 e D_2$ abertos convexos próprios de P(V) tais que $\overline{D_2} \subset D_1$.



Figura 5.5 – propriedade de dilatação

Pelas funções que definem a métrica e a norma de Hilbert temos

- 1. para todo $x, y \in D_2, x \neq y$, então $d_{D_2}^h(x, y) \ge C d_{D_1}^h(x, y)$,
- 2. para todo $x \in D_2$ $e v \in T_x D_1 = T_x D_2$, $ent \tilde{a} o ||v||_{D_2}^h \ge C ||v||_{D_1}^h$, onde C > 1.

Existe um fator mínimo de dilatação C > 1, de D_1 para D_2 , dado pela métrica de Hilbert $d_{D_2}^h$ em relação a métricas de Hilbert $d_{D_1}^h$. Com um certo abuso, vamos denotar apenas

 $d_{D_2}^h \ge C \ d_{D_1}^h \qquad e \qquad ||.||_{D_2}^h \ge C \ ||.||_{D_1}^h.$

Uma prova para este fato encontra-se na referência [OP], página 8, teorema 7 (Desigualdade de Birkhoff).

Observação 5.6 Seja $[\Theta]$ uma caixa marcada convexa. Naturalmente podemos identificar a caixa $[\Theta]$ com o quadrilátero convexo que determina o seu interior convexo. Assim $[\Theta]$ é um fechado, convexo, limitado e não vazio de P(V) (se pensarmos em $[\Theta]$ numa carta afim, $[\Theta]$ é um fechado, convexo, limitado e não vazio de \mathbb{R}^2). **O interior convexo de uma caixa marcada convexa é um aberto convexo próprio de** P(V)! Daí podemos definir naturalmente a métrica e a norma de Hilbert para o interior convexo de cada caixa marcada convexa de CM, ou seja, dada $[\Theta_j] \in CM$ convexa, temos a métrica d_j^h e a norma $||.||_j^h$ de Hilbert definidas nesse capítulo.

Capítulo 6

Representações Anosov

Nos últimos anos a noção de representações Anosov, desenvolvida por François Labourie, Thierry Barbot, Olivier Guichard e outros, surgiu como a noção central na descrição de certos componentes do espaço de representações de determinados grupos de tipo finito: inicialmente, para grupos de superfícies ([LF] 2006) e, mais recentemente, para grupos Gromov-hiperbólicos ([GW] 2012).

As representações Anosov foram introduzidas por François Labourie em [LF], onde é descrita a chamada "estrutura Anosov". A ideia básica é que tais representações codificam um tipo de estrutura dinâmica análoga à de um fluxo Anosov. Labourie mostra que as representações em componentes de Hitchin são Anosov e usa esse fato para estender resultados conhecidos sobre essas componentes. Já Olivier Guichard e Anna Wienhard em [GW] estendem a definição de estrutura Anosov em variedades para representações de grupos Gromov-hiperbólicos arbitrários e eles mostram que essa definição pode ser reformulada em termos de um par de "aplicações Anosov" do bordo do grupo Gromov-hiperbólico em certos espaços homogêneos compactos.

A teoria de representações Anosov tem desempenhado um papel central no desenvolvimento da Teoria de Teichmüller, como podemos ver em [BCS] (2015), artigo recente de Martin Bridgeman, Richard Canary e Andrés Sambarino. Nesse artigo, os espaços de Teichmüller são espaços de representações Anosov de um grupo Gromov-hiperbólico num grupo de Lie semi-simples.

Iniciaremos este capítulo falando sobre grupos Gromov-hiperbólicos e seus bordos.

6.1 Grupos Gromov-hiperbólicos e seus bordos

Esta seção tem como referência principal o artigo [KB] o qual por sua vez tem como referências [GM] e [GH]. Em [KB] Kapovich e Benakli fazem um levantamento dos resultados sobre grupos Gromov-hiperbólicos também conhecidos por word-hiperbólicos.

Definição 6.1 Um espaço métrico (X, d) é um **espaço métrico geodésico** se quaisquer dois pontos $x, y \in X$ podem ser ligados por um segmento geodésico [x, y] que é naturalmente um caminho parametrizado de x a y cujo comprimento é igual a d(x, y), distância de x a y.

Definição 6.2 Um espaço métrico geodésico (X, d) é δ -hiperbólico (sendo $\delta \geq 0$) se para qualquer triângulo com lados geodésicos em X, cada lado do triângulo está contido na δ -vizinhança da união dos dois outros lados. Isto é, se Δ é um triângulo geodésico de lados α, β, γ em X então para qualquer ponto $p \in \alpha$ existe $q \in \beta \cup \gamma$ com $d(p,q) \leq \delta$. Um espaço métrico geodésico é hiperbólico se ele for δ -hiperbólico para algum $\delta \geq 0$.

Por exemplo, o plano hiperbólico \mathbb{H}^2 é $log(\sqrt{2}+1)$ -hiperbólico.

Para enunciarmos a definição de um grupo Gromov-hiperbólico, primeiramente devemos falar sobre o **grafo de Cayley** $\Gamma(G, S)$ para um grupo G, onde S é um conjunto finito de geradores de G; e também falar sobre a **word-métrica**.

Dado o grupo G, seja $S = \{s_1, s_2, ..., s_m\}$ um conjunto finito de geradores de G. Construímos o grafo de Cayley $\Gamma(G, S)$ do grupo G com respeito a S da seguinte maneira:

(1) (vértices de $\Gamma(G, S)$) Marque um vértice para cada elemento do grupo G, gerador ou não.

(2) (arestas de $\Gamma(G, S)$) Seja $g \in G$. Para cada gerador s_j , ligue os vértices $g \in gs_j$ por uma aresta orientada (g, gs_j) de $g \equiv gs_j$. Para cada gerador s_j atribua uma cor c_j ; marque a aresta (g, gs_j) com essa cor c_j .

(3) Repita o passo 2 para cada elemento (vértice) $g \in G$, assim temos $\Gamma(G, S)$.

Sejam G um grupo e S um conjunto de geradores de G. Uma palavra sobre o conjunto S

é uma sequência finita $w = s_1 \cdots s_l$ cujas entradas s_1, \cdots, s_l são elementos de S. O inteiro l é o comprimento da palavra w. Usando a operação do grupo G, as entradas (letras) da palavra $w = s_1 \cdots s_l$ podem ser "multiplicadas" na ordem em que as letras aparecem, lembrando que as entradas são elementos de G. O resultado dessa multiplicação é um elemento \overline{w} no grupo G que é chamado valorização da palavra w. Um caso especial é a palavra vazia $w = \emptyset$, que tem comprimento zero e sua valorização é o elemento neutro de G.

Definição 6.3 Dado um elemento $g \in G$ sua **word-norma** ||g|| com respeito ao conjunto de geradores S é definido como sendo o menor comprimento de uma palavra w sob S cuja valorização \overline{w} é igual a g. Dados dois elementos $g, h \in G$, a distância $d_S(g, h)$ na **word-métrica** com respeito a S é definida como $||g^{-1}h||$.

A word-métrica tem uma definição equivalente formulada em termos mais geométricos usando o grafo de Cayley de G com respeito ao conjunto de geradores S. Para cada aresta do grafo de Cayley é atribuído o comprimento 1; a distância entre dois elementos g e h do grupo G é igual ao comprimento de um caminho mais curto no grafo de Cayley a partir do vértice g para o vértice h.

Definição 6.4 Um grupo finitamente gerado G é um grupo **Gromov-hiperbólico** se existe um conjunto finito S de geradores de G tal que o grafo de Cayley $\Gamma(G, S)$ é um espaço métrico geodésico hiperbólico com respeito à word-métrica d_S .

Acontece que se G é um grupo Gromov-hiperbólico, segue que para qualquer conjunto finito de geradores S de G, o grafo de Cayley correspondente é um espaço métrico geodésico hiperbólico, embora a constante de hiperbolicidade dependa da escolha de S.

Definição 6.5 A função $f : X \to Y$ de um espaço métrico (X, d_X) ao espaço métrico (Y, d_Y) é chamada uma **quasi-isometria** se existe C > 0 tal que:

(1) Para qualquer $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $d_Y(y, f(x)) \leq C$;

(2) Para qualquer
$$x, x' \in X$$
 temos

$$\frac{1}{C}d_X(x, x') - C \le d_Y(f(x), f(x')) \le Cd_X(x, x') + C.$$

Nesta situação X e Y são ditos quasi-isométricos.

Proposição 6.6 [CDP], [GH] Sejam X e Y espaços geodésicos próprios (isto é, bolas fechadas em X e em Y são compactas) e suponha que $f: X \to Y$ é uma quase-isometria. Então

(1) X é hiperbólico se, e somente se, Y é hiperbólico.

(2) A aplicação f se "estende" a um homeomorfismo canônico $\hat{f}: \partial X \to \partial Y$.

Definição 6.7 [CDP], [GH] Se G é um grupo Gromov-hiperbólico, então para algum (e portanto para qualquer) conjunto finito S de geradores de G, o grafo de Cayley é um espaço métrico $\Gamma(G, S)$ é um δ -hiperbólico com respeito à word-métrica d_S . Definimos o **bordo de G**, ∂G , como sendo $\partial \Gamma(G, s)$.

A mudança de um conjunto de geradores de G para outro conjunto de geradores induz uma quase-isometria de grafos de Cayley; logo o tipo topológico de ∂G não depende da escolha de S.

Definição 6.8 Dizemos que um grupo G age em um espaço geodésico X geometricamente, se a ação é isométrica, cocompacta (X/G é compacta) e propriamente descontinua, isto é, para qualquer compacto $K \subseteq X$ o conjunto

$$\{g \in G | K \cap g(K) \neq \emptyset\}$$
 é finito.

Pode-se mostrar que se G age em X geometricamente então X é próprio, e que um grupo finitamente gerado age geometricamente no seu próprio grafo de Cayley.

O resultado a seguir de J.Milnor, é uma ferramente importante para o cálculo de bordos de grupos Gromov-hiperbólicos:

Teorema 6.9 [CDP], [GH] Seja G um grupo agindo geometricamente no espaço métrico geodésico (X, d). Então o grupo G é finitamente gerado, o espaço X é próprio e para qualquer conjunto finito de geradores S de G e qualquer $x \in X$ a aplicação órbita

 $t_x: G \to X$ definida por $t_x: g \mapsto gx$

é uma quase-isometria entre (G, d_S) e X (onde d_S é a word-métrica em G associada a S).

Esse fato implica o seguinte teorema:

Teorema 6.10 ([GM], p.108) Um grupo G é Gromov-hiperbólico se, e somente se, G admite uma ação geométrica num espaço métrico hiperbólico (X, d). Além disso, nesse caso ∂G é homeomorfo ao conjunto limite $\Lambda_G \subset \partial X$.

Esse resultado nos fornece uma ferramenta valiosa para calcular bordos de muitos grupos Gromov-hiperbólicos.

Exemplo 1: Seja S_g uma superfície orientada fechada de gênero $g \ge 2$ e seja $G = \pi_1(S_g)$ seu grupo fundamental. Então G age geometricamente no plano hiperbólico \mathbb{H}^2 (recobrimento universal de S_g) e portanto o bordo ∂G é homeomorfo ao círculo S^1 (o bordo de \mathbb{H}^2 , $\partial \mathbb{H}^2$).

Exemplo 2: Seja G um grupo agindo isometricamente e discretamente em \mathbb{H}^2 de modo que a ação é cocompacta convexa (veja definição 2.46). Então G é um grupo Gromov-hiperbólico e ∂G é homeomorfo ao conjunto limite Λ_G de G em $\partial \mathbb{H}^2$; segue diretamente do teorema 6.10.

Exemplo 3: Seja H um subgrupo de índice finito em G. Então H é Gromov-hiperbólico se, e somente se, G é Gromov-hiperbólico, e nesse caso $\partial H = \partial G$.

6.2 Representações Anosov para grupos Gromov-hiperbólicos

A definição que vamos apresentar de representações Anosov encontra-se no texto Anosovrepresentations: basic definitions and properties [DS] de Spencer Dowdall. Esse texto é um breve resumo da apresentação de Dowdall no Workshop on Higher Teichmüller - Thurston Theory, em Northport, Maine - EUA, junho de 2013. As referências principais de [DS] são as referências básicas de Labourie [LF] e de Guichard e Wienhard [GW] para representações Anosov.

Dado $x \in P(V)$, seja $Q_x(V)$ o espaço das normas no espaço tangente $T_xP(V)$ de x. Analogamente, dado $X \in P(V^*)$, seja $Q_X(V^*)$ o espaço das normas no espaço tangente $T_XP(V^*)$ de X. Os espaços $Q_x(V)$ e $Q_X(V^*)$ são espaços de normas no sentido amplo: as normas podem ser Finsler, não necessariamente definidas por um produto interno em $T_x P(V)$ e em $T_X P(V^*)$, respectivamente.

Vamos denotar por Q(V) o fibrado de base P(V) com fibras $Q_x(V)$ em cada $x \in P(V)$.

$$Q(V) = \bigcup_{x \in P(V)} Q_x(V)$$

Analogamente denotamos por $Q(V^*)$ o fibrado de base $P(V^*)$ com fibras $Q_X(V^*)$ em cada $X \in P(V^*)$.

$$Q(V^*) = \bigcup_{X \in P(V^*)} Q_X(V^*)$$

Seja $\Omega(\phi^t)$ o conjunto não-errante do fluxo geodésico ϕ^t em $T^1(\Gamma \setminus \mathbb{H}^2)$, onde Γ é um grupo que age à esquerda em \mathbb{H}^2 .

Definição 6.11 Seja Γ um subgrupo cocompacto convexo de $PSL(2,\mathbb{R})$ com conjunto limite Λ_{Γ} .

Um homomorfismo $\rho: \Gamma \to H \cong PGL(3, \mathbb{R})$ é uma **representação Anosov** se existem

(i) uma aplicação Γ -equivariante

$$\Phi = (\varphi, \varphi^*) : \partial \Gamma^{(2)} \to \mathcal{F} \subset P(V) \times P(V^*)$$

onde $\partial \Gamma^{(2)} = \partial \Gamma \times \partial \Gamma \setminus \{(x, x) \mid x \in \partial \Gamma\}.$

- (ii) duas aplicações $\nu_+ : \Omega(\phi^t) \subset T^1(\Gamma \setminus \mathbb{H}^2) \to Q(V) \ e \ \nu_- : \Omega(\phi^t) \subset T^1(\Gamma \setminus \mathbb{H}^2) \to Q(V^*)$ tais que, para toda geodésica (não-errante) $c : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^2$ com extremidades $c_-, c_+ \in \Lambda_{\Gamma}$ se tenha que
 - para todo $v \in T_{\varphi(c_+)}P(V)$ a norma de v, dada por $\nu_+(c(t), c'(t))$, cresce exponencialmente com t;
 - para todo $v \in T_{\varphi^*(c_-)}P(V^*)$ a norma de v, dada por $\nu_-(c(t), c'(t))$, decresce exponencialmente com t.

Observação 6.12 O grupo Γ dessa definição é Gromov-hiperbólico e $\partial\Gamma$ é homeomorfo ao conjunto limite Λ_{Γ} ; veja o exemplo 2 acima.

6.2.1 Propriedades de representações Anosov

Em [DS], as propriedades conhecidas de representações Anosov $Rep_{An}(\Gamma, H)$ também são apresentadas. Destacamos as seguintes:

- 1. $Rep_{An}(\Gamma, H)$ formam um domínio aberto em $Rep(\Gamma, H)$;
- 2. as representações de $Rep_{An}(\Gamma, H)$ são discretas e fiéis (injetivas);
- 3. as aplicações $\varphi \in \varphi^*$ são contínuas e injetivas.

6.3 Uma família de representações Anosov

O objetivo principal deste trabalho é provar o seguinte teorema:

Teorema 6.13 Dada uma caixa marcada convexa $[\Theta]$, existe uma família, a um parâmetro λ $(\lambda < 0)$, de representações Anosov $\rho_{\Theta}^{\lambda} : \Gamma_o \to \mathcal{H} \cong PGL(3, \mathbb{R})$, onde Γ_o é um subgrupo especial de índice 2 de $\Gamma \cong PSL(2, \mathbb{Z})$. Além disso, quando o parâmetro λ tende a zero, esse caminho (família) de representações Anosov ρ_{Θ}^{λ} é percorrido em direção à representação de Schwartz ρ_{Θ} que não é Anosov. A representação de Schwartz está na fronteira do domínio aberto $Rep_{An}(\Gamma_o, H)$ em $Rep(\Gamma_o, H)$.

A família de representações que propomos definir, na verdade já foi definida no teorema 4.11 onde, dados $\lambda < 0$ e uma caixa marcada convexa [Θ], existe um homomorfismo injetivo

$$\rho_{\Theta}^{\lambda}: \Gamma_o \to \mathcal{H} \cong PGL(3, \mathbb{R})$$

definido por

$$\rho_{\Theta}^{\lambda}(R_*) = \mathcal{A}_{\Theta} \qquad e \qquad \rho_{\Theta}^{\lambda}(IR_*I) = \mathcal{A}_{\Theta}'$$

tal que $\forall m \in \Gamma_o$ e $\forall [\Psi] \in \mathcal{O}_{\mathfrak{G}^{\lambda}}[\Theta]$ vale $m[\psi] = \rho_{\Theta}^{\lambda}(m)[\Psi]$ (propriedade ρ_{Θ}^{λ} -invariante).

Então precisamos apenas verificar que existem

1. a aplicação $\Phi^{\lambda} = (\varphi_{\lambda}, \varphi_{\lambda}^{*}) : \Lambda_{\Gamma_{o}} \times \Lambda_{\Gamma_{o}} \to \mathcal{F} \subset P(V) \times P(V^{*})$ com propriedade Γ_{o} equivariante;

2. as aplicações $\nu_+ : \Omega(\phi^t) \subset T^1(\Gamma \setminus \mathbb{H}^2) \to Q(V)$ e $\nu_- : \Omega(\phi^t) \subset T^1(\Gamma \setminus \mathbb{H}^2) \to Q(V^*)$ que "carregam" a propriedade Anosov de expansão e contração.

6.3.1 A aplicação Φ^{λ} com propriedade Γ_{o} -equivariante

Para definir $\Phi^{\lambda} = (\varphi_{\lambda}, \varphi_{\lambda}^{*}) : \Lambda_{\Gamma_{o}} \to \mathcal{F} \subset P(V) \times P(V^{*})$, vamos definir separadamente $\varphi_{\lambda} : \Lambda_{\Gamma_{o}} \to P(V)$ e $\varphi_{\lambda}^{*} : \Lambda_{\Gamma_{o}} \to P(V^{*})$ com a propriedade Γ_{o} -equivariante.

Sejam a caixa marcada convexa $[\Theta]$ e sua \mathfrak{G}^{λ} -órbita. Vale lembrar que estamos denotando por $[\psi]$ (letra minúscula) a geodésica de Farey em \mathcal{L}_o rotulada pela caixa marcada $[\Psi] \in \mathcal{O}_{\mathfrak{G}}[\Theta]$.

Seja $\alpha \in \Lambda_{\Gamma_o}$. Seja c uma geodésica orientada não-errante do fluxo geodésico $\phi^t \text{ em } T^1(\Gamma \setminus \mathbb{H}^2)$, com cabeça (ponto final) α . Vamos considerar as geodésicas orientadas da laminação aberta \mathcal{L} , que são cortadas pela geodésica orientada c. As geodésicas de \mathcal{L} que nos interessam são apenas aquelas em que c está cortando **do lado direito para o lado esquerdo** dessas geodésicas, como ilustramos na figura a seguir.



Figura 6.1 – geodésica c com cabeça α

Essas geodésicas orientadas especias da laminação \mathcal{L} , rotuladas por certas caixas marcadas da \mathfrak{G}^{λ} -órbita de $[\Theta]$, definem uma sequência de caixas marcadas convexas encaixantes vistas em P(V); (veja observação 2.43):

$$\ldots \supset [\Theta_{-2}] \supset [\Theta_{-1}] \supset [\Theta_0] \supset [\Theta_1] \supset [\Theta_2] \supset [\Theta_3] \supset [\Theta_4] \supset \ldots \supset [\Theta_n] \supset \ldots \qquad \text{em $P(V)$}$$

Agora vamos considerar apenas a subsequência de índices pares dessa sequência especial de

caixas convexas encaixantes.

$$\dots \supset [\Theta_{-2}] \supset [\Theta_0] \supset [\Theta_2] \supset [\Theta_4] \supset \dots \supset [\Theta_{2n}] \supset \dots \quad \text{em } P(V)$$

O subgrupo $\Gamma_o = \langle R_*, IR_*I|R_*^3 = 1, (IR_*I)^3 = 1 \rangle$ de índice 2 em $\Gamma = \langle I, R_* | I^2 = 1, R_*^3 = 1 \rangle \cong PSL(2, \mathbb{Z})$ é o subgrupo de Γ que preserva orientação dos triângulos geodésicos da laminação \mathcal{L} . Fixemos o elemento $[\theta_0]$ de \mathcal{L} ; para qualquer outro elemento $[\theta_{2n}]$ da subsequência de índices pares de geodésicas rotuladas por caixas, existe um elemento de Γ_o que manda $[\theta_0]$ em $[\theta_{2n}]$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Por exemplo, $R_*IR_*^2I([\theta_0]) = [\theta_2] = \tau_2^\lambda \tau_1^\lambda[\theta_0]$, para $[\theta_2]$ determinada pela geodésica c apresentada na figura acima; mas não existe elemento de Γ_o que envia $[\theta_0]$ em $[\theta_1] = \tau_1^\lambda[\theta]$.

Pela representação $\rho_{\Theta}^{\lambda} : \Gamma_o \to \mathcal{H}$, apresentada no teorema 4.11, a imagem $\rho_{\Theta}^{\lambda}(\Gamma_o)$ está contida no grupo \mathcal{H} das transformações projetivas e vale a propriedade ρ_{Θ}^{λ} -invariante. Por exemplo, $\rho_{\Theta}^{\lambda}(R_*IR_*^2I) = \mathcal{A}_{\Theta}(\mathcal{A}_{\Theta}')^2 \in \mathcal{H}$ (veja lema 4.10). Então vale $R_*IR_*^2I([\theta_0]) = \mathcal{A}_{\Theta}(\mathcal{A}_{\Theta}')^2([\Theta_0])$.

Agora observemos que, fixada a caixa $[\Theta_0]$, temos quatro opções possíveis para $[\Theta_2]$. A escolha se dá pela geodésica não-errante c que define a sequência especial de caixas encaixantes. As possíveis caixas marcadas $[\Theta_2]$ são

$$\tau_1^{\lambda} \tau_1^{\lambda} [\Theta_0] \qquad \tau_2^{\lambda} \tau_1^{\lambda} [\Theta_0] \qquad \tau_1^{\lambda} \tau_2^{\lambda} [\Theta_0] \qquad \tau_2^{\lambda} \tau_2^{\lambda} [\Theta_0].$$

Assim temos quatro opções de transformações de caixas marcadas pertencentes \mathfrak{G}^{λ} , que enviam $[\Theta_0]$ nas possíveis $[\Theta_2]$. São elas

$$f_1 = \tau_1^{\lambda} \tau_1^{\lambda}$$
 $f_2 = \tau_2^{\lambda} \tau_1^{\lambda}$ $f_3 = \tau_1^{\lambda} \tau_2^{\lambda}$ $f_4 = \tau_2^{\lambda} \tau_2^{\lambda}$

Sabemos que $[\Theta]_0 \supset [\Theta]_2 = f_j[\Theta_0]$, para j = 1, 2, 3, 4. Então pela observação 5.5 (propriedade de dilatação da métrica de Hilbert), temos

- 1. para f_1 , existe um fator mínimo de dilatação $C_1 > 1$ tal que $d_2^h \ge C_1 d_0^h$;
- 2. para f_2 , existe um fator mínimo de dilatação $C_2 > 1$ tal que $d_2^h \ge C_2 d_0^h$;
- 3. para f_3 , existe um fator mínimo de dilatação $C_3 > 1$ tal que $d_2^h \ge C_3 d_0^h$;
- 4. para f_4 , existe um fator mínimo de dilatação $C_4 > 1$ tal que $d_2^h \ge C_4 d_0^h$.

Seja $C = \min\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$. Então para qualquer escolha possível de $[\Theta_2]$, o fator de dilatação da caixa $[\Theta_0]$ para a caixa $[\Theta_2]$ é pelo menos C > 1.

$$d_2^h \ge C d_0^h$$

Lema 6.14 Consideremos a subsequência de índices pares da sequência especial de caixas encaixantes definida acima. Temos que $[\Theta_{2n+2}] \subset [\overset{\circ}{\Theta_{2n}}]$. Então o fator mínimo de dilatação da métrica de Hilbert, da caixa $[\Theta_{2n}]$ para a caixa $[\Theta_{2n+2}]$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é pelo menos C > 1; o mesmo C definido logo acima.

Prova: Fixemos $n_o \in \mathbb{N}$.

Seja \mathcal{A} a transformação projetiva que envia $[\Theta_{2n_o}]$ em $[\Theta_0]$, $\mathcal{A}[\Theta_{2n_o}] = [\Theta_0]$.

Temos $[\Theta_{2n_o+2}] \subset [\Theta_{2n_o}]$, logo $\mathcal{A}[\Theta_{2n_o+2}] \subset \mathcal{A}[\Theta_{2n_o}] = [\Theta_0]$.

Seja f_j uma das quatro transformações de caixas marcadas de \mathfrak{G}^{λ} definidas acima. Seja $[\Psi] = \mathcal{A}[\Theta_{2n_o+2}] \subset [\Theta_0].$

Temos que $[\Theta_{2n_o+2}] = f_j[\Theta_{2n_o}]$

 $\Rightarrow \mathcal{A}[\Theta_{2n_o+2}] = \mathcal{A}f_j[\Theta_{2n_o}] \qquad (\text{as ações de } \mathcal{H} \in \mathfrak{G}^{\lambda} \text{ em } CM \text{ comutam entre si})$ $\Rightarrow \mathcal{A}[\Theta_{2n_o+2}] = f_j\mathcal{A}[\Theta_{2n_o}]$ $\Rightarrow \mathcal{A}[\Theta_{2n_o+2}] = f_j[\Theta_0]$ $\Rightarrow [\Psi] = f_j[\Theta_0] = [\Theta_2]$ $\Rightarrow [\Psi] = [\Theta_2] \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{A}[\Theta_{2n_o+2}] = [\Theta_2]$

Pela observação 5.4 (propriedade do observador), a transformação projetiva \mathcal{A} é uma isometria entre $[\Theta_{2n_o}]$ e $[\Theta_0]$, pois definimos $\mathcal{A}[\Theta_{2n_o}] = [\Theta_0]$. Acabamos de provamos que $\mathcal{A}[\Theta_{2n_o+2}] = [\Theta_2]$; logo \mathcal{A} também é uma isometria entre $[\Theta_{2n_o+2}]$ e $[\Theta_2]$. Para f_j , o fator mínimo de dilatação de $[\Theta_0]$ para $[\Theta_2]$ é $C_j > 1$, logo o fator mínimo de dilatação de $[\Theta_{2n_o}]$ para $[\Theta_{2n_o+2}]$ também é $C_j > 1$.

Portanto, para qualquer escolha possível de $[\Theta_{2n_o+2}]$, o fator mínimo de dilatação de $[\Theta_{2n_o}]$

para $[\Theta_{2n_o+2}]$ é pelo menos C > 1. Como fixamos arbitrariamente $n_o \in \mathbb{N}$, concluímos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, o fator mínimo de dilatação de $[\Theta_{2n}]$ para $[\Theta_{2n+2}]$ é pelo menos C > 1.

Pelo lema 6.14, vemos que vale

$$d_{2(n+1)}^h \ge C d_{2n}^h \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{d_{2(n+1)}^h \ge C^{n+1} d_0^h} \qquad \forall \ n \in \mathbb{N}$$

E também temos que, dados $y \in [\Theta_{2(n+1)}^{\circ}]$ e um vetor $v \in T_y[\Theta_{2(n+1)}^{\circ}] = T_y[\Theta_{2n}^{\circ}] = T_yP(V)$, vale

$$||v||_{2(n+1)}^h \ge C^{n+1} ||v||_0^h \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lema 6.15 Seja $\dots \supset [\Theta_{-2}] \supset [\Theta_{-1}] \supset [\Theta_0] \supset [\Theta_1] \supset [\Theta_2] \supset \dots \supset [\Theta_n] \supset \dots$

a sequência especial de caixas marcadas convexas encaixantes da \mathfrak{G}^{λ} -órbita de $[\Theta]$ em P(V), definida pela geodésica orientada não-errante c.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, a caixa $[\Theta_n]$ é um subconjunto convexo, fechado, limitado e não vazio de P(V) e $[\Theta_n] \supset [\Theta_{n+1}]$. Então $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\Theta_n] = \{k\}$, onde k é um ponto em P(V).

Prova: Seja $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} [\Theta_n]$. Temos que A é um convexo em P(V). Queremos provar que A é um único ponto de P(V).

Suponhamos que exitam $x, y \in A$, com $x \neq y$. Então existem $a, b \in \partial A$ (bordo de A) tais que $d^{h}_{(a,b)}(x,y) = d^{h}_{(a,b)}(x,y) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|a-y| \cdot |b-x|}{|a-x| \cdot |b-y|} \right)$ que é evidentemente um valor finito.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, sabemos que vale $d^h_{\alpha}(x,y) \ge d^h_{2n}(x,y)$.

Por outro lado, pelo lema 6.14 temos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale $d_{2n}^h(x,y) \geq C^n d_0^h$, com C > 1.

Logo $d^{h}_{A}(x,y) \geq C^{n} d^{h}_{0}(x,y)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto $d^h_{\stackrel{\circ}{A}}(x,y) \ \frac{1}{C^n} \ge d^h_0(x,y).$

Assim, quando $n \to \infty$, $d_0^h(x, y) \to 0 \Rightarrow x = y$, absurdo! Então o convexo $\stackrel{\circ}{A}$ possui apenas um ponto distinto em P(V), que chamaremos de k;

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} [\stackrel{\circ}{\Theta_n}] = \{k\}. \blacksquare$$

Por esse lema 6.15, podemos definir naturalmente a aplicação

$$\varphi_{\lambda} : \Lambda_{\Gamma_o} \to P(V) \quad \text{por} \quad \varphi_{\lambda}(\alpha) := \bigcap_{n=1}^{\infty} [\Theta_n] = k,$$

onde $\alpha \in \Lambda_{\Gamma_o} \subset \partial \mathbb{H}^2$ é a cabeça da geodésica orientada não-errante c que define a sequência de caixas encaixantes ($[\Theta_n]$) em P(V).

Para uma outra geodésica orientada não-errante $h \in \mathbb{H}^2$, diferente de c mas também com cabeça α , existe uma outra sequência de caixas marcadas encaixantes em P(V)

$$\ldots \supset [\Theta_{-2}]' \supset [\Theta_{-1}]' \supset [\Theta_0]' \supset [\Theta_1]' \supset [\Theta_2]' \supset \ldots \supset [\Theta_n]' \supset \ldots$$

É fácil ver que existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \ge n_o$, os elementos $[\Theta_n]$ e $[\Theta_n]'$ das sequências especiais de caixas encaixantes definidas pelas geodésicas $c \in h$, respectivamente, são iguais: $[\Theta_n] = [\Theta_n]'$.



Figura 6.2 – geodésica htambém com cabeça α

Logo existe um único ponto $k \in P(V)$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} [\overset{\circ}{\Theta_n}] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [\overset{\circ}{\Theta_n}]' = \{k\}$. Portanto a nossa aplicação $\varphi_{\lambda} : \Lambda_{\Gamma_o} \to P(V)$ está bem definida.

A propriedade Γ_o -equivariante da aplicação $\varphi_{\lambda} : \Lambda_{\Gamma_o} \to P(V)$ segue do fato que a representação $\rho_{\Theta}^{\lambda} : \Gamma_o \to \mathcal{H} \cong PGL(3, \mathbb{R})$ possui propriedade ρ_{Θ}^{λ} -invariante.

Agora vamos definir $\varphi_{\lambda}^* : \Lambda_{\Gamma_o} \to P(V^*)$, mas antes precisamos fazer uma observação importante.

Observação 6.16 (*Propriedade de aninhamento das caixas marcadas vistas em* $P(V^*)$)

Até o momento sempre consideramos uma caixa marcada

$$[\Theta] = ((p,q,r,s;t,b)(P,Q,R,S;T,B))$$

vista em P(V), nunca em $P(V^*)$. Então agora vamos considerar $[\Theta]$ em $P(V^*)$ e observar uma propriedade interessante sobre os elementos da \mathfrak{G} -órbita de $[\Theta]$ (\mathfrak{G}^{λ} -órbita de $[\Theta]$).

Para visualizar uma caixa marcada numa carta afim de $P(V^*)$ tomamos a segunda sêxtupla da caixa. Devemos lembrar que pontos de P(V) são retas em $P(V^*)$ e retas de P(V) são pontos em $P(V^*)$.

$$[\Theta] = ((p,q,r,s;t,b)(P,Q,R,S;T,B))$$

Na figura a seguir a caixa marcada convexa $[\Theta]$ está esboçada numa carta afim de $P(V^*)$. O interior convexo de $[\Theta]$ em $P(V^*)$ é a região hachurada em destaque.



Figura 6.3 – caixas $[\Theta], \tau_1[\Theta] \in \tau_2[\Theta] \text{ em } P(V^*)$

Nessa mesma figura esboçamos as caixas marcadas convexas

 $\tau_1[\Theta] = \left((p,q,QR,PS;t,(pr)(qs))(P,Q,qs,pr;T,(QR)(PS))\right) \ e^{-\frac{1}{2}} \left((p,q,QR)(PS)\right) \$

 $\tau_2[\Theta] = ((QR, PS, s, r; (pr)(qs), b)(pr, qs, S, R; (QR)(PS), B)).$

Note que a caixa $[\Theta]$ está contida no interior convexo de $\tau_1[\Theta]$ e de $\tau_2[\Theta]$ em $P(V^*)$, o contrário do que acontece com $[\Theta]$ em P(V). Portanto caixas marcadas vistas em $P(V^*)$ se encaixam (se aninham) "ao contrário" quando as mesmas são vistas em P(V).

Agora temos ferramentas suficientes para definir a aplicação $\varphi_{\lambda}^* : \Lambda_{\Gamma_o} \to P(V^*).$

Seja $\alpha \in \Lambda_{\Gamma_o}$. Seja c a mesma geodésica orientada em \mathbb{H}^2 com cabeça (ponto final) α que usamos para definir $\varphi_{\lambda} : \Lambda_{\Gamma_o} \to P(V)$. Novamente vamos considerar as geodésicas orientadas da laminação aberta \mathcal{L} , que são cortadas pela geodésica orientada c. Porém as geodésicas de \mathcal{L} que nos interessam agora são aquelas em que c está cortando **do lado esquerdo para o lado direito** dessas geodésicas (sentido ao contrário que consideramos para definir φ_{λ}), veja a figura 6.4. Então, pelas observações 2.43 (propriedade de aninhamento das caixas marcadas da \mathfrak{G} -órbita de $[\Theta]$ (\mathfrak{G}^{λ} -órbita de $[\Theta]$)) e 6.16 (propriedade de aninhamento das caixas marcadas vistas em $P(V^*)$), podemos definir uma nova sequência de caixas marcadas encaixantes em $P(V^*)$.

$$\dots \subset [\Theta_{-2}] \subset [\Theta_{-1}] \subset [\Theta_0] \subset [\Theta_1] \subset [\Theta_2] \subset \dots \subset [\Theta_n] \subset \dots$$

Pelo lema 6.15, existe um único ponto K em $P(V^*)$ (uma reta em P(V)) tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} [\Theta_n] = \{K\}$. Então é natural definir a aplicação

$$\varphi_{\lambda}^* : \Lambda_{\Gamma_o} \to P(V^*) \quad \text{por} \quad \varphi_{\lambda}^*(\alpha) := \bigcap_{n=1}^{\infty} [\Theta_n] = K,$$

onde $\alpha \in \Lambda_{\Gamma_o} \subset \partial \mathbb{H}^2$ é a cabeça da geodésica orientada não-errante c que define a sequência de caixas encaixantes ($[\Theta_n]$) em $P(V^*)$.

Se tomarmos outra geodésica orientada h com cabeça α , teremos outra sequência de caixas encaixantes em $P(V^*)$,

$$\dots \subset [\Theta_{-2}]' \subset [\Theta_{-1}]' \subset [\Theta_0]' \subset [\Theta_1]' \subset [\Theta_2]' \subset \dots \subset [\Theta_n]' \subset \dots,$$

também com $\bigcap_{n=1}^{\infty} [\overset{\circ}{\Theta_n}]' = \{K\}$, logo a aplicação $\varphi_{\lambda}^* : \Lambda_{\Gamma_o} \to P(V^*)$ está bem definida.



Figura 6.4 – geodésica htambém com cabeça α

A propriedade Γ_o -equivariante da nossa aplicação $\varphi_{\lambda}^* : \Lambda_{\Gamma_o} \to P(V^*)$ também segue do fato que a representação $\rho_{\Theta}^{\lambda} : \Gamma_o \to \mathcal{H} \cong PGL(3, \mathbb{R})$ possui propriedade ρ_{Θ}^{λ} -invariante.

Finalmente combinando φ_λ e φ^*_λ definimos a aplicação

$$\Phi^{\lambda} = (\varphi_{\lambda}, \varphi_{\lambda}^{*}) : \partial \Gamma \times \partial \Gamma \setminus \{(x, x) \mid x \in \partial \Gamma\} \to \mathcal{F} \subset P(V) \times P(V^{*})$$

com propriedade Γ_o -equivariante.

6.3.2 As aplicações ν_+ e ν_- com propriedade Anosov

No capítulo anterior, para cada caixa marcada convexa vista em P(V), definimos uma norma de Hilbert em P(V) através dessa caixa marcada (veja observação 5.6). Da mesma forma, podemos definir uma norma de Hilbert em $P(V^*)$ através dessa mesma caixa vista em $P(V^*)$, a caixa "dual".

Nessa seção usaremos a seguinte notação: dada uma caixa marcada convexa $[\Theta_j]$, sejam $y \in [\overset{\circ}{\Theta_j}]$ em P(V) e $v \in T_y P(V)$; a norma de Hilbert de v, definida em 5.3, será denotada por $||v||_i^h$.

Seja $c : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^2$ uma geodésica orientada (não-errante) com extremidades $c_-, c_+ \in \Lambda_{\Gamma}$. Consideremos as geodésicas orientadas da laminação aberta \mathcal{L} , que são cortadas pela geodésica orientada c. As geodésicas de \mathcal{L} que nos interessam são apenas aquelas em que c está cortando **do lado direito para o lado esquerdo** dessas geodésicas.



Figura 6.5 – a geodésica c e as geodésicas de \mathcal{L} que nos interessam

Do mesmo modo que descrevemos na seção anterior, essas geodésicas orientadas cortadas por c definem uma sequência de caixas marcadas encaixantes em P(V).

$$\dots \supset [\Theta_{-2}] \supset [\Theta_{-1}] \supset [\Theta_0] \supset [\Theta_1] \supset [\Theta_2] \supset [\Theta_3] \supset [\Theta_4] \supset \dots \supset [\Theta_n] \supset \dots$$

Novamente vamos considerar apenas a <u>subsequência de índices pares</u> dessa sequência de caixas convexas encaixantes em P(V).

$$\dots \supset [\Theta_{-2}] \supset [\Theta_0] \supset [\Theta_2] \supset [\Theta_4] \supset \dots \supset [\Theta_{2n}] \supset \dots$$

As geodésicas rotuladas pelas caixas dessa subsequência de índices pares intersectam a geodésica parametrizada $c : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^2$ nos pontos

...,

$$c(t_{-2}) = [\theta_{-2}] \cap c,$$

 $c(t_0) = [\theta_0] \cap c,$
 $c(t_2) = [\theta_2] \cap c,$
...,
 $c(t_{2n}) = [\theta_{2n}] \cap c,$
...,

sendo ..., $t_{-2}, t_0, t_2, ..., t_{2n}, ...$ uma sequência crescente (t_{2n}) em \mathbb{R} .

A geodésica c tem cabeça $c_+ \in \Lambda_{\Gamma_o}$. Na seção anterior definimos $\varphi_{\lambda}(c_+) = \bigcap_{n=1}^{\infty} [\Theta_n] \in P(V)$. Seja um vetor qualquer $v \in T_{\varphi_{\lambda}(c_+)}P(V)$. Pelo lema 6.14, a sequência de caixas encaixantes $([\Theta_{2n}])$ define uma sequência de normas $(||v||_{2n}^h)$ do vetor v com crescimento uniforme C > 1, $n \in \mathbb{N}$:

...

$$\begin{split} ||v||_{2}^{h} &\geq C ||v||_{0}^{h} \\ ||v||_{4}^{h} &\geq C ||v||_{2}^{h} \\ & \dots \\ ||v||_{2(n+1)}^{h} &\geq C ||v||_{2n}^{h} \\ & \dots \\ & \dots \end{split}$$

Logo $||v||_{2n}^h \ge C^n ||v||_0^h.$

Portanto quando $n \to \infty$, $||v||_n^h$ cresce exponencialmente tendendo a infinito.

Definiremos agora a aplicação $\nu_+ : \Omega(\phi^t) \to Q(V),$

$$(c(t), c'(t)) \mapsto ||.||_t$$

Seja $c : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^2 \subset \Omega(\phi^t)$ a geodésica orientada com cabeça c_+ . Para os pontos particulares ..., $c(t_{-2}), c(t_0), c(t_2), ..., c(t_{2n}), ...$ em \mathbb{H}^2 ,

definimos

$$\nu_+((c(t_{2n}), c'(t_{2n}))) = ||.||_{2n}^h \in Q_{\varphi_\lambda(c_+)}(V) \subset Q(V), \qquad (\#)$$

sendo $||.||_{2n}^h$ a norma de Hilbert induzida pela caixa marcada convexa $[\Theta_{2n}]$ vista em P(V).

Para um ponto $c(\tilde{t})$ do segmento geodésico $(c(t_{2j}), c(t_{2(j+1)}))$, sendo $t_{2j}, t_{2(j+1)}$ pertencentes à subsequência (t_{2n}) em \mathbb{R} e \tilde{t} pertencente ao intervalo $(t_{2j}, t_{2(j+1)})$, definimos $\nu_+((c(\tilde{t}), c'(\tilde{t})))$ a seguir.

- Considerando $\tilde{t} = 0$ para simplificar, então sempre existem $t_* \leq 0$ e $t_{**} \geq 0$ tais que
- 1. $c(t_*)$ é o ponto de interseção da geodésica c com a primeira geodésica c_* da laminação \mathcal{L} , que pertence à nossa subsequência especial de índices pares e que está no "tempo passado",
- 2. $c(t_{**})$ é o ponto de interseção da geodésica c com a primeira geodésica c_{**} da laminação \mathcal{L} , que pertence à nossa subsequência especial de índices pares e que está no "tempo futuro".

Para $j = \{*, **\}$, já definimos $\nu_+((c(t_j), c'(t_j))) = ||.||_j^h$ norma de Hilbert associada à geodésica orientada c_j de \mathcal{L} , definida em (#). Vamos denotar $\nu_+((c(t_j), c'(t_j)))$ apenas por ν_+^j .

Então definimos $\nu_+(c(0), c'(0)) = \frac{t_{**}}{t_{**} - t_*}\nu_+^* - \frac{t_*}{t_{**} - t_*}\nu_+^{**}.$

Desta forma, a aplicação $\nu_+ : \Omega(\phi^t) \to Q(V)$ possui a propriedade Anosov de expansão, ou seja, se $v \in T_{\varphi_\lambda(c_+)}P(V)$; a norma de v, calculada por $\nu_+((c(t), c'(t)))$, cresce exponencialmente com t, como é exigido na definição 6.11 de representação Anosov.

Finalmente vamos definir a aplicação ν_{-} : $\Omega(\phi^{t}) \rightarrow Q(V^{*})$. Para essa aplicação, dada a geodésica orientada $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^{2}$, de extremidades c_{-} e c_{+} , vamos considerar a geodésica -c (geodésica com mesmo traço de c, mas com orientação oposta a de c). A cabeça de -c é c_{-} .


Figura 6.6 – geodésica -c e as geodésicas de \mathcal{L} que nos interessam

Sejam as geodésicas orientadas da laminação aberta \mathcal{L} , que são cortadas pela geodésica orientada -c. As geodésicas de \mathcal{L} que nos interessam agora são apenas aquelas em que -c está cortando **do lado esquerdo para o lado direito** dessas geodésicas.

Essas geodésicas de \mathcal{L} cortadas por -c definem também uma sequência de caixas marcadas encaixantes (as mesmas caixas encaixantes para c que citamos para definir ν_+). Vistas em $P(V^*)$, essas caixas se encaixam na ordem contrária (veja novamente a observação 6.16).

$$\dots \subset [\Theta_{-n}] \subset \dots \subset [\Theta_{-4}] \subset [\Theta_{-3}] \subset [\Theta_{-2}] \subset [\Theta_{-1}] \subset [\Theta_0] \subset [\Theta_1] \subset [\Theta_2] \subset \dots$$

Novamente vamos considerar apenas a <u>subsequência de índices pares</u> dessa sequência de caixas convexas encaixantes em $P(V^*)$.

$$\ldots \subset [\Theta_{-n}] \subset \ldots \subset [\Theta_{-4}] \subset [\Theta_{-2}] \subset [\Theta_0] \subset [\Theta_2] \subset [\Theta_4] \subset \ldots \subset [\Theta_{2n}] \subset \ldots$$

As geodésicas rotuladas pelas caixas dessa subsequência de índices pares intersectam a geodésica parametrizada $-c : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^2$ nos pontos

$$-c(t_{2}) = [\theta_{2}] \cap -c,$$

$$-c(t_{0}) = [\theta_{0}] \cap -c,$$

$$-c(t_{-2}) = [\theta_{-2}] \cap -c,$$

...,

$$-c(t_{-2n}) = [\theta_{-2n}] \cap -c,$$

...,

sendo ..., $t_2, t_0, t_{-2}, ..., t_{-2n}, ...$ uma sequência crescente (t_{-2n}) em \mathbb{R} , quando $n \to \infty$.

Definimos $\varphi_{\lambda}^*(c_-) = \bigcap_{n=1}^{\infty} [\Theta_n] \in P(V^*)$. Seja um vetor qualquer $v \in T_{\varphi_{\lambda}^*(c_-)}P(V^*)$. Pensando nas caixas em $P(V^*)$ da mesma maneira que pensamos em P(V), a mesma sequência de caixas encaixantes ($[\Theta_{-n}]$), vistas em $P(V^*)$, define uma sequência de normas do vetor v com crescimento uniforme $S > 1, n \in \mathbb{N}$.

...

$$||v||_{-2}^{h} \ge S||v||_{0}^{h}$$

$$||v||_{-4}^{h} \ge S||v||_{-2}^{h}$$
...

$$||v||_{-2(n+1)}^{h} \ge S||v||_{-2n}^{h}$$
...

Logo $||v||_{-2n}^h \ge S^n ||v||_0^h.$

Portanto quando $n \to \infty$, $||v||_{-2n}^h$ cresce exponencialmente tendendo a infinito.

Do mesmo modo que definimos $\nu_+ : \Omega(\phi^t) \to Q(V)$, definimos $\nu_- : \Omega(\phi^t) \to Q(V^*)$.

Seja $-c: \mathbb{R} \to \mathbb{H}^2 \subset \Omega(\phi^t)$ a geodésica orientada com cabeça c_- . Para os pontos particulares

..., $c(t_2), c(t_0), c(t_{-2}), \dots, c(t_{-2n}), \dots$ em \mathbb{H}^2 ,

definimos

$$\nu_{-}((-c(t_{-2n}), -c'(t_{-2n}))) = ||.||_{-2n}^{h} \in Q_{\varphi_{\lambda}(c_{-})}(V) \subset Q(V^{*}),$$

sendo $||.||_{-2n}^h$ a norma de Hilbert induzida pela caixa marcada convexa $[\Theta_{-2n}]$ vista em $P(V^*)$.

Para um ponto $-c(\tilde{t})$ do segmento geodésico $(-c(t_{-2j}), -c(t_{-2(j+1)}))$, sendo $t_{-2j}, t_{-2(j+1)}$ pertencentes à subsequência (t_{-2n}) em \mathbb{R} e \tilde{t} pertencente ao intervalo $(t_{-2j}, t_{-2(j+1)})$, definimos $\nu_{-}((-c(\tilde{t}), -c'(\tilde{t})))$ da mesma maneira que fizemos para ν_{+} .

Desta forma, a aplicação $\nu_-: \Omega(\phi^t) \to Q(V^*)$ possui a propriedade Anosov de expansão, ou seja, se $v \in T_{\varphi_\lambda(c_-)}P(V^*)$; a norma de v, calculada por $\nu_-((-c(t), -c'(t)))$, cresce exponencialmente com t. Portanto a norma de v, calculada por $\nu_-((c(t), c'(t)))$, decresce exponencialmente com t, como é exigido na definição de representação Anosov. Concluímos então que, dada uma caixa marcada convex
a $[\Theta]$ e dado um $\lambda < 0,$ nossa representação

$$\rho_{\Theta}^{\lambda}: \Gamma_o \to \mathcal{H} \cong PGL(3, \mathbb{R}),$$

definida no teorema 4.11, é uma representação Anosov. Portanto temos uma família, a um parâmetro λ , de representações Anosov!

6.3.3 As representações de Schwartz não são Anosov

Dada uma caixa marcada convexa $[\Theta]$, existe uma representação de Schwartz

$$\rho_{\Theta}: PSL(2,\mathbb{Z}) \to \mathcal{G}$$

definida no teorema 3.2.

O grupo $PSL(2,\mathbb{Z})$ não é cocompacto convexo, então na tentativa de verificar que ρ_{Θ} é uma representação Anosov, consideramos ρ_{Θ} definida em Γ ($\cong PSL(2,\mathbb{Z})$) cocompacto convexo, ou melhor, em Γ_o também cocompacto convexo. Isso não muda em nada a essência da representação original de Schwartz.

Trocamos $PSL(2,\mathbb{Z})$ por Γ (na verdade trocamos por Γ_o). Consequentemente a aplicação $\varphi_o: \partial \mathbb{H}^2 \to P(V)$ de Schwartz, definida na secção 3.3, terá outro domínio de definição. A nova aplicação φ_o deve ser definida em $\partial \Gamma_o = \Lambda_{\Gamma_o}$ que é um Cantor. Essa nova φ_o , que chamaremos de φ , é a composição de uma aplicação sobrejetiva $s: \Lambda_{\Gamma_o} \to \partial \mathbb{H}^2$ com a aplicação original φ_o de Schwartz, mas a aplicação s não é injetiva, logo φ não é injetiva.



As extremidades de cada intervalo $\partial \mathbb{H}^2 \setminus \Lambda_{\Gamma_o}$ são aplicadas num mesmo ponto sob φ quando a laminação aberta \mathcal{L} tende à triangulação de Farey \mathcal{L}_o . Desta forma φ não é injetiva, falhando a propriedade (3) de representações Anosov. Portanto, dada uma caixa marcada convexa $[\Theta]$, os elementos da nossa família de representações Anosov forma um caminho de representações parametrizado por λ , para $\lambda < 0$, no domínio $Rep_{An}(\Gamma, H) \subset Rep(\Gamma, H)$. A medida que o parâmetro λ tende a zero, \mathfrak{G}^{λ} "tende" ao grupo \mathfrak{G} e nosso caminho de representações Anosov ρ_{Θ}^{λ} é percorrido em direção à representação de Schwartz ρ_{Θ} que não é Anosov. A representação de Schwartz está na fronteira do domínio aberto $Rep_{An}(\Gamma_o, H)$ em $Rep(\Gamma_o, H)$. Estamos considerando a representação de Schwartz restrita a um subgrupo de índice 2 de $PSL(2,\mathbb{Z})$, isomorfo a Γ_o . Assim provamos o teorema principal 6.13 desta tese.

6.4 Trabalhos futuros

A teoria de representações Anosov foi introduzida por François Labourie em Anosov Flows, Surface Groups and Curves in Projective Space ([LF], 2006). Nesse artigo é descrita a chamada "estrutura Anosov" para variedades Riemannianas fechadas com curvatura negativa. Em Anosov Representations: Domains of Discontinuity and Applications ([GW], 2012), Olivier Guichard e Anna Wienhard estendem a definição de representações Anosov, introduzida por Labourie, a representações $\rho : \Gamma \to G$ de um grupo Gromov-hiperbólico arbitrário Γ num grupo de Lie G.

Uma continuação possível para esse trabalho de tese seria desenvolver a noção de representações Anosov para representações de grupos fundamentais de 3-variedades fechadas que suportam fluxos Anosov \mathbb{R} -cobertos no grupo $SL(n,\mathbb{Z})$, para *n* suficientemente grande. Um desafio seria apresentar exemplos reais de uma tal representação no caso de fluxos Anosov \mathbb{R} -cobertos que não sejam fluxos geodésicos, tais como os fluxos construídos em *Anosov flows on new three manifolds* ([HT], 1980) de Handel-Thurston, ou mais geral em *Contact Anosov flows on hyperbolic 3-manifolds* ([FH], 2013) de Foulon-Hasselblatt.

Apêndice A

Um pouco mais sobre σ_{λ}

O objetivo deste apêndice é contar um pouco mais ao leitor como chegamos à transformação σ_{λ} .

Desde o início queríamos um novo grupo \mathfrak{G}^* de transformações de caixas marcadas, isomorfo ao grupo \mathfrak{G} , tal que, dada uma caixa marcada convexa $[\Theta]$, a \mathfrak{G}^* -órbita de $[\Theta]$ fosse formada por caixas convexas descoladas umas das outras, diferente do que acontece com os elementos da \mathfrak{G} -órbita de $[\Theta]$. Então pensamos em definir uma transformação σ que, composta com os geradores $i, \tau_1 \in \tau_2$ de \mathfrak{G} , originasse o grupo \mathfrak{G}^* esperado.

Inicialmente tentamos encontrar uma transformação projetiva que enviasse uma caixa marcada convexa inicial numa caixa marcada convexa contida no interior convexo da caixa inicial, mas de maneira que pudéssemos controlar essa "contração" por um parâmetro $\epsilon > 0$. Então pensamos em razões cruzadas de segmentos contidos no interior da caixa inicial.

Seja $[\Theta] = [(p,q,r,s;t,b), (P,Q,R,S;T,B)]$ uma caixa marcada convexa e seja o ponto projetivo $w = qs \cap pr = (qs)(pr) \in [\stackrel{\circ}{\Theta}].$

Para calcular razões cruzadas de segmentos contidos em $[\overset{\circ}{\Theta}]$, vamos considerar uma carta afim de P(V) que contém $[\overset{\circ}{\Theta}]$.



Figura A.1 – as caixa marcada $[\Theta]$ numa carta afim de P(V)

Consideremos os pontos $p, q, r, s, w \in P(V)$ e $\epsilon > 0$. Seja p_{ϵ} o ponto pertencente a reta pr que satisfaz a razão cruzada $[r, w, p_{\epsilon}, p] = \frac{|\overline{rp_{\epsilon}}|}{|\overline{p_{\epsilon}w}|} \cdot \frac{|\overline{wp}|}{|\overline{pr}|} = \frac{(1 + e^{-\epsilon})^2}{4e^{-\epsilon}}$, sendo $p_{\epsilon} \in \stackrel{\circ}{[\Theta]}$. Veja a figura a seguir.

Da mesma forma, seja s_{ϵ} o ponto pertencente a reta qs que satisfaz a razão cruzada $[q, w, s_{\epsilon}, s] = \frac{|\overline{qs_{\epsilon}}|}{|\overline{s_{\epsilon}w}|} \cdot \frac{|\overline{ws}|}{|\overline{sq}|} = \frac{(1+e^{-\epsilon})^2}{4e^{-\epsilon}}$, sendo $s_{\epsilon} \in [\overset{\circ}{\Theta}]$.



Figura A.2 – os pontos $p_{\epsilon}, q_{\epsilon}, r_{\epsilon}, s_{\epsilon}$

Vamos denotar por T_{ϵ} a reta que contém os pontos $p_{\epsilon} \in T \cap B$, e por B_{ϵ} a reta que contém os pontos $s_{\epsilon} \in T \cap B$. Sejam os pontos $q_{\epsilon} = T_{\epsilon} \cap qs$ e $r_{\epsilon} = B_{\epsilon} \cap pr$. Vamos denotar por W a reta que contém os pontos $T \cap B \in w$.

Pela observação 1.19, as razões cruzadas $[s, w, q_{\epsilon}, q] \in [p, w, r_{\epsilon}, r]$ também são iguais a $\frac{(1 + e^{-\epsilon})^2}{4e^{-\epsilon}}$.

Agora consideremos a reta tw. Seja o ponto $\tilde{b} = B \cap tw$ e seja $t_{\epsilon} \in tw$ o ponto que satisfaz a razão cruzada $[\tilde{b}, w, t_{\epsilon}, t] = \frac{(1 + e^{-\epsilon})^2}{4e^{-\epsilon}}$. Temos então que $t_{\epsilon} \in T_{\epsilon}$, portanto $p_{\epsilon}, t_{\epsilon}, q_{\epsilon} \in T_{\epsilon}$.



Figura A.3 – os pontos $t_{\epsilon}, b_{\epsilon}$

Da mesma forma, consideremos a reta bw. Seja o ponto $\tilde{t} = T \cap bw$ e seja $b_{\epsilon} \in bw$ o ponto que satisfaz a razão cruzada $[\tilde{t}, w, b_{\epsilon}, b] = \frac{(1 + e^{-\epsilon})^2}{4e^{-\epsilon}}$. Temos que $b_{\epsilon} \in T_{\epsilon}$, portanto $s_{\epsilon}, b_{\epsilon}, r_{\epsilon} \in B_{\epsilon}$.

Definimos então uma nova caixa marcada convexa $[\Theta_{\epsilon}] = [(p_{\epsilon}, q_{\epsilon}, r_{\epsilon}, s_{\epsilon}; t_{\epsilon}, b_{\epsilon}), (...)] \in CM$ que se relaciona com a caixa marcada $[\Theta] \in CM$ pela razão cruzada de valor $\frac{(1 + e^{-\epsilon})^2}{4e^{-\epsilon}}$.

Lema A.1 Seja $[\Theta] \in CM$, existe um único elemento (transformação projetiva) $\mathcal{A}_{\Theta_{\epsilon}} \in \mathcal{H} \triangleleft \mathcal{G}$ tal que $\mathcal{A}_{\Theta_{\epsilon}}[\Theta] = [\Theta_{\epsilon}]$.

Prova: Seja $[\Theta] = [(p,q,r,s;t,b), (P,Q,R,S;T,B)]$ uma caixa marcada convexa qualquer de CM. Os pontos p,q,r,s são pontos em posição geral em P(V). Da mesma forma os pontos $p_{\epsilon}, q_{\epsilon}, r_{\epsilon}, s_{\epsilon}$ também estão em posição geral. Pelo lema 1.17 existe uma única transformação projetiva $\tilde{A}_{\Theta_{\epsilon}}$ que envia p em p_{ϵ}, q em q_{ϵ}, r em r_{ϵ} e s em s_{ϵ} .

Note que $\tilde{A}_{\Theta_{\epsilon}}$ envia a reta T em T_{ϵ} e B em B_{ϵ} , portanto $\tilde{A}_{\Theta_{\epsilon}}$ fixa o ponto $T \cap B$. Note também que $\tilde{A}_{\Theta_{\epsilon}}$ fixa as retas pr e qs, logo $\tilde{A}_{\Theta_{\epsilon}}$ fixa o ponto $w = qs \cap pr$. Consideremos w e as quatro retas W, pr, tc, qs passando por w. As razões cruzadas $[T \cap B, p, t, q] \in [T \cap B, p_{\epsilon}, t_{\epsilon}, q_{\epsilon}]$ são iguais, pois $\tilde{A}_{\Theta_{\epsilon}}(T) = T_{\epsilon}$. E como $\tilde{A}_{\Theta_{\epsilon}}$ fixa $T \cap B$ e envia p em p_{ϵ} , q em q_{ϵ} , temos que $\tilde{A}_{\Theta_{\epsilon}}$ envia t em t_{ϵ} . Analogamente, $\tilde{A}_{\Theta_{\epsilon}}$ envia b em b_{ϵ} .

Portanto existe $\mathcal{A}_{\Theta_{\epsilon}} \in \mathcal{H}$, induzida pela transformação projetiva $A_{\Theta_{\epsilon}}$, que envia a caixa marcada $[\Theta]$ na caixa marcada $[\Theta_{\epsilon}]$.

O que acabamos de verificar é que, dado $\epsilon > 0$, para uma dada caixa $[\Theta]$ convexa, existe uma única $\mathcal{A}_{\Theta_{\epsilon}} \in \mathcal{H}$ que nos dá $[\Theta_{\epsilon}]$. Se tomarmos uma outra caixa $[\Psi]$ convexa, existe uma outra $\mathcal{A}_{\Psi_{\epsilon}} \in \mathcal{H}$ que nos dá $[\Psi_{\epsilon}]$. Porém inicialmente queríamos uma única transformação de caixas marcadas que fizesse essa "contração" controlada pelo parâmetro ϵ . Assim pensamos na transformação de caixa marcada $\sigma_{(\lambda,\mu)}$, definida em 4.1, que independe da caixa inicial.



Figura A.4 – caixa $\sigma_{(\lambda,\mu)}[\Theta]$, para $\lambda < 0 \in \mu < 0$



Dado $\epsilon > 0$ e dadas duas caixas convexas $[\Theta]$ e $[\Psi]$, temos

$$[\Theta_{\epsilon}] = \sigma_{(-\epsilon,-\epsilon)}[\Theta] \in [\Psi_{\epsilon}] = \sigma_{(-\epsilon,-\epsilon)}[\Psi].$$

Depois de definida a transformação $\sigma_{(\lambda,\mu)}$, fomos em busca de algumas propriedades dessa transformação para assim construímos o grupo \mathfrak{G}^* .

Verificamos que $\sigma_{(\lambda',\mu')} \circ \sigma_{(\lambda,\mu)} = \sigma_{(\lambda'+\lambda,\mu'+\mu)}$ o que implica $\sigma_{(-\lambda,-\mu)} = \sigma_{(\lambda,\mu)}^{-1}$. Em seguida tentamos verificar que $i \circ \sigma_{(\lambda,\mu)} = \sigma_{(-\lambda,-\mu)} \circ i$, ou melhor, $i \circ \sigma_{(\lambda,\mu)} = \sigma_{(\lambda,\mu)}^{-1} \circ i$, mas logo percebemos que essa igualdade era falsa para certos valores de $\lambda \in \mu$. Magicamente chegamos a igualdade

verdadeira $i \circ \sigma_{(\lambda,\mu)} = \sigma_{(\lambda-\mu,-\mu)} \circ i$. Tomamos $\mu = 2\lambda$ e chegamos à relação $i \circ \sigma_{(\lambda,2\lambda)} = \sigma_{(\lambda,2\lambda)}^{-1} \circ i$. Finalmente definimos $\sigma_{\lambda} := \sigma_{(\lambda,2\lambda)}$, para $\lambda < 0$, e obtivemos a igualdade $i \circ \sigma_{\lambda} = \sigma_{\lambda}^{-1} \circ i$ que nos presenteou com o grupo \mathfrak{G}^{λ} , como queríamos.

Referências Bibliográficas

- [AD] ASOVOV, Dmitri Victorovich. Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature. Proc. Steklov Inst. Math. AMS Translations (1969).
- [BCS] BRIDGEMAN, Martin; CANARY, Richard and SAMBARINO, Andrés. An introduction to pressure metrics on higher Teichmüller spaces. arXiv:1507.03894v1 (Submitted on 14 Jul 2015) (document), 6
- [BK] BUSEMANN, Herbert, KELLY, Paul J.. Projective Geometry and Projective Metrics Academic Press Inc., New York (1953).
- [*BT*₁] BARBOT, Thierry. *Three-dimensional Anosov flag manifolds*. Geometry and Topology 14 (2010) 153-191. (document)
- [BT₂] BARBOT, Thierry. Deformations of Fuchsian AdS representations are Quasi-Fuchsian.
 Journal of Differential Geometry 101 (2015), Issue 1, 1-46. (document)
- [CDP] COORNAERT, Michel; DELZANT, Thomas and PAPADOPOULOS, Athanase. Géométrie et théorie des groupes: les groupes hyperboliques de Gromov, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1441, Springer-Verlag, Berlin, 1990. 6.6, 6.7, 6.9
- [CR] CASSE, Rey. *Projective Geometry: An Introduction*. Oxford University Press Inc., New York (2006).
- [DS] DOWDALL, Spencer. Anosov-representations: basic definitions and properties. Notas para o Workshop on Higher Teichmüller theory Northport Maine. (junho-2013). 6.2, 6.2.1
- [FH] FOULON, Patrick and HASSELBLATT, Boris. Contact Anosov flows on hyperbolic 3manifolds. Geometry and Topology 17, No 2, 1225-1252 (2013) 6.4

- [GGKW] GUÉRITAUD, François; GUICHARD, Olivier; KASSEL, Fanny and WIENHARD, Anna. Anosov representations and proper actions. arXiv:1502.03811v3 (Submitted on 12 Feb 2015 (v1), last revised 8 Jun 2015 (this version, v3)) (document)
- [GH] GHYZ, Etienne and DE LA HARPE, Pierre (eds.). Sur les groupes hyperboliques d'après
 Mikhael Gromov, Birkhauser Boston Inc., Boston, MA, 1990. 6.1, 6.6, 6.7, 6.9
- [GM] GROMOV, Mikhael. Hyperbolic groups, Essays in group theory, Springer, New York, 1987, pp. 75- 263. 6.1, 6.10
- [GW] GUICHARD, Olivier and WIENHARD, Anna. Anosov Representations: Domains of Discontinuity and Applications. Invent. Math. Vol. 190 (2012), no. 2, 357-438.
 (document), 6, 6.2, 6.4
- [HA] HATCHER, Allen. Algebraic topology Cambridge University Press (2002).
- [HP] DE LA HARPE, Pierre. *Topics in geometric group theory*. Chicago lectures in mathematics (2000). 2.31, 2.4.2
- [HT] HANDEL, Michael and THURSTON, William P. Anosov flows on new three manifolds.Inventiones Mathematicae vol.59, no. 2, 95-103 (1980). 6.4
- [IP] INKANG, Kim and PAPADOPOULOS, Athanase. Convex real projective structures and Hilbert metrics. To appear in the Hanbook of Hilbert geometry (ed. A. Papadopoulos and M. Troyanov), European Math.. (2014).
- [JS] JAVALOYES, Miguel A., SÁNCHES, Miguel. On the definition and examples of Finsler metrics. arXiv:1111.5066v3 (Submitted on 22 Nov 2011 (v1), last revised 1 Oct 2012 (this version, v3))
- [KB] KAPOVICH, Ilya and BENAKLI Nadia. Boundaries of hyperbolic groups, Contemporary Mathematics, vol. 296, 2002, pp. 39-94. 6.1
- [LE] LIMA, Elon Lages. Espaços métricos. Projeto Euclides IMPA CNPq, Rio de Janeiro (1977).
- [LF] LABOURIE, François. Anosov Flows, Surface Groups and Curves in Projective Space.
 Inventiones Mathematicae vol. 165 no. 1, 51-114 (2006). (document), 6, 6.2, 6.4

- [ML] MARQUIS, Ludovic. (ed. PAPADOPOULOS, Athanase and TROYANOV, Marc.) Around groups in Hilbert Geometry. Handbook of Hilbert Geometry, 22, European Mathematical Society, 207-261 (2014). IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics
- [OP] ORENSTEIN, Paulo. A métrica de Hilbert e aplicações. Trabalho de iniciação científica.
 orientador: Jairo Bochi, Departamento de Matemática PUC-Rio, 26 de agosto (2006).
 5.1, 5.5
- [PS] PÉREZ, Santiago Manuel Pérez. La curva fractal de Pappus. Tesis en opción al título de licenciado en Matemáticas, Universidade Autónoma de Yucatán Facultad de Matemáticas, Yacatén - México (2012).
- [PT] PRASOLOV, V. V. and TIKHOMIROV, V. M. Translations of Mathematical Monographs, volume 200 - Geometry. American Mathematical Society (2001). 1.1.1
- [SR] SCHWARTZ, Richard. Pappus's theorem and the modular group. Inst. Hautes Études
 Sci. Publ. Math. No. 78 (1993), 187-206 (1994). (document), 2, 3, 3.2