UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA

O Problema de Sturm-Lioville e o seu papel na Mecânica Quântica

Autor: Luís Fernando Salvino

Orientador: Dr. Silas Luiz de Carvalho

Belo Horizonte - MG
2016

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Assim como muitas outras áreas da física, a Mecânica Quântica é matematicamente fundamentada. Nesta área, um dos objetos fundamentais é a Equação de Schrödinger, que nada mais é que uma equação diferencial que descreve como um determinado estado quântico de um sistema físico evolui com o tempo, ou seja, descreve a evolução temporal do estado de uma determinada partícula. A Equação de Schrödinger é dada por

$$H\psi(t) = i\hbar\frac{d}{dt}\psi(t)$$

onde i é a unidade imaginária, $\hbar$ é a constante de Planck dividida por 2π, $\psi(t)$ é a função de onda, e o Hamiltoniano H é um operador auto-adjunto correspondente à energia total do sistema; mais precisamente, $H = -\Delta + V$, onde Δ é o Laplaciano e V é um operador de multiplicação chamado de Potencial. Assim como a força na segunda Lei de Newton, o Hamiltoniano não é definido pela equação e deve ser determinado pelas propriedades físicas do sistema.

Sendo o Hamiltoniano um operador definido auto-adjunto, temos que seus autovalores são reais e portanto os possíveis valores de energia assumidos pelo sistema também o são. Precisamente, buscamos determinar as soluções da equação de autovalores $H\psi = E\psi$, em que $E \in \mathbb{R}$. Como qualquer outro operador auto-adjunto, o espectro do Hamiltoniano pode ser decomposto através de suas medidas espectrais.

Como o Hamiltoniano unidimensional age como um operador diferencial, determinar as soluções da equação de autovalores acima equivale a se discutir o chamado problema de Sturm-Lioville, que pode ser tanto regular (ou seja, deve-se resolver uma equação diferencial com valores de contorno num certo intervalo $[a, b]$) quanto singular (nesse trabalho específico, consideraremos o problema de se resolver uma equação diferencial com valores de contorno na semirreta positiva). Veremos como esse problema está intimamente relacionado com a caracterização do espectro de um operador diferencial.

No capítulo 2 trataremos dos seguintes assuntos: a definição de operador diferencial e seu adjunto, o operador diferencial auto-adjunto e o problema de Sturm-Lioville, a conexão feita entre o problema de Sturm-Lioville e o Hamiltoniano, a caracterização do espectro do operador de Sturm-Lioville no caso regular, as propriedades de completude do espaço L^2 e o problema não-homogêneo de valores de contorno.

Já no capítulo 3, serão tratados os seguintes temas: o problema de Sturm-Lioville e a caracterização do seu espectro no caso singular, os casos ponto-limite e círculo-limite e os resultados de completude e expansão no caso ponto-limite.

O último capítulo apresenta considerações finais, onde discutiremos novamente o que foi pré-estabelecido aqui na introdução e o que foi contruído no decorrer dos capítulos 2 e 3.

Capítulo 2

Problema de Autovalor de Operador Auto-Adjunto em um intervalo finito

2.1 Introdução

A solução de um problema de valor de contorno para uma equação diferencial linear pode, por vezes, se reduzir a solução de uma equação diferencial ordinária contendo um parâmetro e certas condições de contorno. Um simples exemplo dessa situação é o problema de se determinar as soluções de

$$\begin{aligned} Lx = -x'' = lx \\ x(0) = x(1) = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

no intervalo $0 \leq t \leq 1$. Afim de que (2.1) admita solução não-trivial, devemos assumir que $\operatorname{sen} l^{1/2} = 0$, e portanto $l = \pi^2 k^2$, com $k = 1, 2, ...$. Tais valores de l são chamados Autovalores associados a (2.1). Consequentemente, as soluções são

$$\chi_k(t) = \sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi t \quad (k = 1, 2, ...) \tag{2.2}$$

as chamadas Autofunções.

Os principais resultados relativos aos problemas do tipo (2.1) são válidos em $L^2(0, 1)$, o espaço vetorial das funções f em $0 \leq t \leq 1$ a valores complexos, que são Lebesgue mensuráveis e tais que $\int_0^1 |f(t)|^2 \, dt < \infty$.

Necessitamos da seguinte definição:

Definição 2.1.1. *Sejam $f, g \in L^2(0,1)$. O produto interno de f por g é dado por $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f\overline{g}\ dt$ e a norma induzida por tal produto interno é $||f|| = \langle f, f\rangle^{1/2}$. Se $\langle f, g\rangle = 0$, então f e g são ditos ortogonais.*

2.2 Problema de Autovalor de um Operador Auto-Adjunto

Seja L o operador diferencial de ordem n dado por

$$Lx = p_0x^{(n)} + p_1x^{(n-1)} + ... + p_nx$$

em que p_j, $0 \leq j \leq n$, são funções à valores complexos de classe $C^{(n-j)}$ no intervalo fechado $a \leq t \leq b$ e $p_0 \neq 0$ em $[a, b]$.

O adjunto do operador diferencial L é definido por M e satisfaz

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, Mv\rangle$$

$\forall\ u, v \in C^n$ em $[a, b]$.

Seja

$$U_jx = \sum_{k=1}^{n}(M_{jk}x^{(k-1)}(a) + N_{jk}x^{(k-1)}(b)) \qquad (j = 1, ..., n)$$

onde M_{jk} e N_{jk} são constantes. Denote a relação $U_jx = 0, j = 1, ...n$, por $Ux = 0$. O problema

$$\pi: \quad Lx = lx, \quad Ux = 0$$

é chamado Problema de Autovalor e é dito Auto-Adjunto se

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle \tag{2.3}$$

$\forall\ u, v \in C^n$ em $[a, b]$ que satisfaz as condições de contorno

$$Uu = Uv = 0.$$

Podemos definir formalmente o operador adjunto de L, como sendo

$$Mx = (-1)^n(\overline{a_0}x)^n + (-1)^{n-1}(\overline{a_1}x)^{(n-1)} + ... + \overline{a_n}x.$$

Definição 2.2.1. *Dizemos que um operador diferencial L de ordem n é formalmente auto-adjunto se L = M.*

Por simplicidade, trabalhemos com operadores de 2ª ordem tais como

$$Ly = a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y \tag{2.4}$$
$$My = (a_0 y)'' - (a_1 y)' + a_2 y, \tag{2.5}$$

com M sendo o operador adjunto de L.

Vale destacar que os resultados que apresentaremos para operadores de 2ª ordem se seguem de forma análoga para operadores de ordem n.

O primeiro resultado que envolve operadores diferenciais e seus adjuntos é:

Teorema 2.2.2 (Identidade de Lagrange)**.** *Se L e M são operadores diferenciais adjuntos de segunda ordem, então existe uma função $Q(x, y, y', z, z')$ tal que*

$$zLy - yMz = \tfrac{d}{dx} Q(x, y, y', z, z').$$

Demonstração. Usando-se (2.4) e (2.5), temos

$$zLy - yMz = za_0y'' + za_1y' + za_2y - (y(a_0z)'' - y(a_1z)' + ya_2z) =$$
$$za_0y'' + za_1y' + za_2y - y(a_0z)'' + y(a_1z)' - ya_2z = za_0y'' + za_1y' - y(a_0z)'' + y(a_1z)'.$$

Agora, usando-se a regra do produto para diferenciação, chegamos a

$$zLy - yMz = \frac{d}{dx}[a_0y'z - y(a_0z)' + y(a_1z)].$$

□

Corolário 2.2.3. *Se L e M são operadores adjuntos de segunda ordem, então*

$$\int_{x_1}^{x_2} (xLy - yMx)\ dx = [a_0x'y - x(a_0y)' + x(a_1y)]_{x_1}^{x_2}.$$

Demonstração. O resultado é consequência imediata do Teorema 2.2.2. □

Estudemos o caso particular do operador de 2ª ordem escrito na forma

$$Ly = \frac{d}{dx}[p(x)y'] + q(x)y, \tag{2.6}$$

com $p(x), q(x)$ funções de x.

Teorema 2.2.4. *Um operador L de 2^a ordem é Auto-Adjunto se, e somente se, é da forma $Ly = \frac{d}{dx}[p(x)y'] + q(x)y$ onde $p(x)$ é diferenciável.*

Demonstração. ($\leftarrow$) Se expandirmos L, obtemos

$$Ly = p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y.$$

De acordo com (2.5), o operador adjunto M de L é

$$My = (p(x)y)'' - (p'(x)y)' + q(x)y,$$

e se usando a regra do produto para diferenciação, obtemos

$$My = (p'(x)y + p(x)y')' - p''(x)y - p'(x)y' + q(x)y = p''(x)y + p'(x)y' + p'(x)y' + p(x)y'' - p''(x)y - p'(x)y' + q(x)y = p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y,$$

ou seja,

$$Ly = My \to L = M.$$

($\rightarrow$) Se $M = L$, então

$$Ly = a_0y'' + a_1y' + a_2y = (a_0y)'' - (a_1y)' + a_2y = My,$$

ou seja,

$$a_0{}' = a_1 = p'(x).$$

□

Assim, temos de acordo com o Teorema 2.2.2, para expressões da forma (2.6), a seguinte igualdade

$$zLy - yLz = zp(x)y'' + zp'(x)y' + zq(x)y - yp(x)z'' - yp'(x)z' - yq(x)z = zp(x)y'' + zp'(x)y' - yp(x)z'' - yp'(x)z',$$

e se usando a regra do produto para diferenciação obtemos

$$zLy - yLz = \frac{d}{dx}[p(x)(y'z - yz')]. \tag{2.7}$$

2.3 O Problema de valor de contorno Auto-Adjunto de Sturm-Lioville

Nesta seção, ainda consideraremos operadores da forma (2.6), mas com

$$q(x) = Q(x) + \lambda R(x),$$

em $a \leq x \leq b$.

Nessas condições, buscamos as soluções da equação linear homogênea associada, que assume a forma

$$\frac{d}{dx}[P(x)y'] + [Q(x) + \lambda R(x)]y = 0, \tag{2.8}$$

com $P(x)$ diferenciável e $Q(x), R(x)$ contínuas em $[a, b]$. Sujeitas as seguintes condições de contorno lineares:

$$\begin{aligned} a_{11}y(x_1) + a_{12}y'(x_1) &= 0 \\ a_{21}y(x_2) + a_{22}y'(x_2) &= 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

O problema de resolver equações da forma (2.8) com as condições de contorno acima é chamado problema de valor de contorno Auto-Adjunto ou problema de Sturm-Lioville.

- Chamamos a atenção que se $p(x) = -1$ no operador definido em (2.6), obtemos o Hamiltoniano unidimensional $L = -\Delta + q$.

O próximo resultado, é consequência imediata do Corolário 2.2.2 para funções que satisfazem as condições de contorno (2.9):

Teorema 2.3.1 (Lema de Green)**.** *Se $y(x)$ e $z(x)$ são funções duas vezes deriváveis e que satisfazem as condições de contorno (2.9), então para todo operador Auto-Adjunto L, vale*

$$\textstyle\int_{x_1}^{x_2} (zLy - yLz)dx = 0.$$

Demonstração. Por (2.7), temos que

$$zLy - yLz = \frac{d}{dx}[P(y'z - yz')].$$

Integrando-se de x_1 até x_2, obtemos

$$\int_{x_1}^{x_2} (zLy - yLz)\ dx = [P(y'z - yz')]_{x_1}^{x_2}.$$

Observemos que (2.9) nos fornece três possibilidades: a primeira é que se $a_{12}, a_{22} \neq 0$ então

$$\left(\frac{y'}{y}\right)_{x=x_1} = -\frac{a_{11}}{a_{12}}, \quad \left(\frac{y'}{y}\right)_{x=x_2} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}$$

e da mesma forma, obtemos

$$\left(\frac{z'}{z}\right)_{x=x_1} = -\frac{a_{11}}{a_{12}}, \quad \left(\frac{z'}{z}\right)_{x=x_2} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}.$$

Reescrevendo

$$[P(y'z - yz')]_{x_1}^{x_2} = \left[Pyz\left(\frac{y'}{y} - \frac{z'}{z}\right)\right]_{x_1}^{x_2},$$

ao substituirmos as informações encontradas no desenvolvimento feito acima temos que a parte direita da integral se anula;

A segunda possibilidade é que se a_{12} e a_{22} são ambos nulos então $a_{11}, a_{21} \neq 0$, pois caso contrário teríamos solução trivial. Dessa forma, $y(x_1)$ e $y(x_2)$ são ambos nulos e consequentemente $z(x_1)$ e $z(x_2)$ também o são. Se substituirmos essas informações em $[P(y'z - yz')]_{x_1}^{x_2}$, temos que a integral se anula;

E a terceira possibilidade é que ou $a_{12} = 0$ ou $a_{22} = 0$. Sem perca de generalidade suponhamos que $a_{12} = 0$. Se combinarmos o que foi feito nas duas possibilidades anteriores obteremos que a integral se anula, donde se segue o resultado. $\square$

Nessas condições, dada a equação diferencial homogênea, podemos encontrar condições de contorno que nos forneçam um operador Auto-Adjunto, via o Teorema 2.3.1. Vejamos um exemplo que evidencia esse fato. Sejam

$$y'' + \mu y = 0, \qquad y(0) - ay(1) = 0, \; y'(0) - y'(1) = 0.$$

Obtemos, usando-se (2.7), que

$$[P(x)(y'z - yz')]_0^1,$$

e como $P(x) = 1$ no nosso exemplo, temos

$$[P(x)(y'z - yz')]_0^1 = [(y'z - yz')]_0^1 = \\ y'(1)z(1) - y(1)z'(1) - y'(0)z(0) + y(0)z'(0).$$

Como, pelas condições de contorno, $y'(0) = y'(1)$, $y(0) = ay(1)$, $z'(0) = z'(1)$ e $z(0) = az(1)$, efetuando-se as devidas substituições obtemos

$$[P(x)(y'z - yz')]_0^1 = (1 - a)(y'(1)z(1) - y(1)z'(1)),$$

que se anula se, e somente se, $a = 1$.

Concluímos que para um problema de condições de contorno (2.9), o operador L é Auto-Adjunto se, e somente se,

$$\int_{x_1}^{x_2}(zLy - yLz)dx = 0,$$

para duas funções y e z que satisfaçam as condições de contorno (2.9).

2.4 Ortogonalidade de Autofunções

Reescrevendo-se a equação (2.8) com a abreviação $Ly = \frac{d}{dx}[P(x)y'] + Q(x)y$, obtemos

$$Ly + \lambda R(x)y = 0,$$

com $R(x) > 0$ e L sendo um operador diferencial Auto-Adjunto.

Sejam λ_i, λ_k dois autovalores distintos de (2.8) e (2.9) e y_i, y_k suas correspondentes autofunções. Então, as equações

$$Ly_i + \lambda_i R(x)y_i = 0 \tag{2.10}$$
$$Ly_k + \lambda_k R(x)y_k = 0 \tag{2.11}$$

e as condições de contorno

$$a_{11}y_v(x_1) + a_{12}y_v'(x_1) = 0 \tag{2.12}$$
$$a_{21}y_v(x_2) + a_{22}y_v'(x_2) = 0, \tag{2.13}$$

com $v = i, k$, são satisfeitas. Se multiplicarmos (2.11) por y_k, (2.10) por y_i, e subtrairmos (2.10) de (2.9), obtemos:

$$y_kLy_i - y_iLy_k + (\lambda_i - \lambda_k)R(x)y_iy_k = 0. \tag{2.14}$$

Usando-se (2.7), temos que

$$y_kLy_i - y_iLy_k = \frac{d}{dx}[P(x)(y_i'y_k - y_iy_k')],$$

em seguida, integrando-se (2.14) de x_1 até x_2 e se usando o Lema de Green, temos

$$(\lambda_i - \lambda_k)\int_{x_1}^{x_2} R(x)y_i y_k\, dx = -[P(x)(y_i' y_k - y_i y_k')]_{x_1}^{x_2} = 0,$$

pois L é auto-adjunto. Logo

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x)y_i y_k\, dx = 0,\ i \neq k, \tag{2.15}$$

assumindo-se que $\lambda_i \neq \lambda_k$. Isso nos sugere o seguinte resultado:

Teorema 2.4.1. *Sejam y_i, y_k duas autofunções distintas do problema de Sturm-Lioville (2.8), (2.9). Então*

$$\{\sqrt{R(x)}y_i(x), \sqrt{R(x)}y_k(x)\}$$

são ortogonais no intervalo $x_1 \leq x \leq x_2$.

Demonstração. Segue-se de (2.16) e da definição de ortogonalidade. □

Teorema 2.4.2. *Seja π um problema de autovalor. Então, os autovalores são reais e as autofunções correspondentes a autovalores distintos são ortogonais.*

Demonstração. Sejam λ autovalor de π e y uma respectiva autofunção. Então, como $Ly = \lambda y$, e por π ser auto-adjunto, temos

$$\langle Ly, y\rangle = \langle y, Ly\rangle \to \lambda\langle y, y\rangle = \overline{\lambda}\langle y, y\rangle \to (\lambda - \overline{\lambda})\langle y, y\rangle = 0.$$

Como $\langle y, y\rangle > 0$, segue-se que $\lambda = \overline{\lambda}$, ou seja, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se λ_1 e λ_2 são autovalores distintos com autofunções y_1 e y_2, respectivamente, então

$$0 = \langle Ly_1, y_2\rangle - \langle y_1, Ly_2\rangle = (\lambda_1 - \lambda_2)\langle y_1, y_2\rangle$$

e como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, segue-se que $\langle y_1, y_2\rangle = 0$, ou seja, y_1, y_2 são ortogonais. □

2.5 Número e distribuição dos Autovalores do Problema de valor de contorno de Sturm-Lioville

No problema (2.1), observamos que o número de autovalores daquele exemplo era infinito. A pergunta que fica é o que podemos afirmar sobre o espectro de um operador de Sturm-Lioville da forma (2.8), (2.9). Uma caracterização interessante se dá no seguinte resultado:

Teorema 2.5.1. *Seja $P(x)$ diferenciável, $Q(x)$ e $R(x)$ contínuas, com $P(x) > 0, R(x) > 0$ e $Q(x)$ limitada inferiormente em $a \leq x \leq b$. Então, existem infinitos autovalores $\lambda_1 < \lambda_2 < ...$ para o problema de de Sturm-Lioville (2.8), (2.9) de solução não-trivial. Se $y(x, \lambda_k)$ é solução correspondente ao k-ésimo autovalor λ_k, então $y(x, \lambda_k)$ tem mais um zero em $x_1 \leq x \leq x_2$ do que $y(x, \lambda_{k-1})$, que é solução correspondente ao (k-1)-ésimo autovalor λ_{k-1} e $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$.*

Necessitamos da seguinte construção para a demonstração desse teorema. Seja

$$z(x) = p(x)y'$$

em (2.8). Dessa forma, teremos um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem da seguinte forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{p(x)}z$$
$$\frac{dz}{dx} = -q(x)y.$$

Usando a mudança de coordenadas polares, podemos escrever o seguinte:

$$y = r(x)\cos\phi(x) \tag{2.16}$$
$$z = r(x)\,\mathrm{sen}\,\phi(x). \tag{2.17}$$

Logo, nosso sistema de equações diferenciais pode ser reescrito assim

$$r'\cos\phi - r\phi'\,\mathrm{sen}\,\phi = \frac{1}{p}r\,\mathrm{sen}\,\phi,$$
$$r'\,\mathrm{sen}\,\phi - r\phi'\cos\phi = -qr\cos\phi.$$

Escrevendo as equações acima em função de r' e ϕ' temos

$$\frac{d\phi}{dx} = -\left(\frac{1}{p(x)}\mathrm{sen}^2\,\phi + q(x)\cos^2\phi\right) \tag{2.18}$$
$$\frac{dr}{dx} = \left(\frac{1}{p(x)} - q(x)\right)r\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi. \tag{2.19}$$

Se $\phi(x)$ é solução de (2.18), então por (2.16), $\phi(x) + k\pi$ também será solução de (2.18), o que nos sugere o seguinte resultado:

Teorema 2.5.2. *A solução $y(x)$ de (2.8) tem um zero em $x = x_1$ se, e somente se, $\phi(x_1) = (\pi/2) + k\pi$.*

Demonstração. Se $\phi(x_1) = \pi/2 + k\pi$, segue-se de (2.16) que $y(x_1) = 0$. Assumamos agora que $y(x_1) = 0$, logo de (2.16) temos que

$$r(x_1)\cos\phi(x_1) = 0$$

A solução da equação diferencial (2.19) nos fornece que $r(x_1) \neq 0$ para $x_1 \in [a,b]$, logo $\cos\phi(x_1) = 0$ e portanto $\phi(x_1) = \pi/2 + k\pi$. □

Enunciemos alguns resultados que nos darão suporte para a demonstração do Teorema 2.5.1. As demonstrações de tais resultados podem ser encontradas em [1]:

Teorema 2.5.3. *Seja $\phi(x,\lambda)$ uma ϕ-curva correspondente a solução $y(x,\lambda)$ de (2.8) que satisfaz a primeira condição de contorno de (2.9) em x_1, para algum λ. Sobre essas condições, afirmamos no Teorema 2.5.1 que $\phi(x_2,\lambda)$ é monótona decrescente em λ, isto é:*

$$\phi(x_2,\lambda_1) > \phi(x_2,\lambda_2) \quad \textit{se } \lambda_1 < \lambda_2.$$

Teorema 2.5.4. *Seja $\phi(x,\lambda)$ uma ϕ-curva correspondente a solução $y(x,\lambda)$ de (2.8) que satisfaz a primeira condição de contorno de (2.9) em x_1 para algum λ. Então*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\phi(x_2,\lambda) = -\infty.$$

Demonstração do Teorema 2.5.1. Seja $y(x,\lambda)$ solução de (2.8) que satisfaz a primeira condição de contorno de (2.9) em x_1, e assumamos que $y(x,\lambda)$ é contínua em λ. Escolhamos um λ_0 tal que $Q(x) + \lambda_0 R(x) > 0$. A ϕ-curva, $\phi(x,\lambda_0)$, de solução $y(x,\lambda_0)$ que satisfaz a primeira condição de contorno de (2.9) irá interceptar a linha $x = x_2$ em algum ponto ϕ_0. Se $\phi_0 = \beta$, então $\phi(x_2,\lambda_0) = \beta$, isto é, $y(x,\lambda_0)$ satisfaz a segunda condição de contorno de (2.9). Consequentemente, $\lambda = \lambda_0$ é o primeiro autovalor.

Se $\phi_0 \neq \beta$, assumimos sem perda de generalidade que $\beta - \pi \leq \phi_0 < \beta$. Para um certo $\lambda = \lambda_1 > \lambda_0$, $\phi(x_2,\lambda_1)$ será monótona decrescente, pelo Teorema 2.5.2, e contínua até $\lambda = \lambda_1$, com $\phi(x_2,\lambda_1) = \beta - \pi$. Então, λ_1 é o primeiro autovalor. Usando o mesmo processo para um certo $\lambda > \lambda_1$, digamos $\lambda = \lambda_2$, com $\phi(x_2,\lambda_2) = \beta - 2\pi$, teremos que λ_2 é o segundo autovalor, e assim por diante. O argumento acima se aplica indefinidamente, pois $\lim_{\lambda\to\infty}\phi(x_2,\lambda) = -\infty$, pelo Teorema 2.5.3, e $\phi(x_2,\lambda)$ é contínua em λ. Assim, obtemos sucessivos valores λ_k tais que

$$\phi(x_2,\lambda_k) = \beta - k\pi.$$

Além disso, observemos que $\phi(x_2, \lambda_k) = \beta - k\pi$ e $\phi(x_2, \lambda_{k-1}) = \beta - (k-1)\pi$. Segue-se que a curva $\phi(x, \lambda_k)$ intercepta $\pi/2$, para $x_1 \leq x \leq x_2$, mais uma vez do que $\phi(x, \lambda_{k-1})$. Consequentemente, $y(x, \lambda_k)$ tem mais de um zero em $x_1 \leq x \leq x_2$ do que $y(x, \lambda_{k-1})$.

Ainda temos que provar que $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$. Suponhamos que $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = a < \infty$. Então $\forall\ \epsilon > 0, \exists\ N_\epsilon$ tal que se

$$n > N_\epsilon \to |\lambda_k - a| < \epsilon.$$

Mas como toda sequência convergente é de Cauchy, então para $n, m > N_\epsilon$ temos

$$|\lambda_n - \lambda_m| < \epsilon.$$

Mais ainda, como $\phi(x_2, \lambda)$ é contínua em λ, temos que $\forall\ \epsilon_1 > 0, \exists\ \delta_{\epsilon_1} > 0$ tal que se

$$|\lambda_n - \lambda_m| < \delta_{\epsilon_1} \to |\phi(x_2, \lambda_n) - \phi(x_2, \lambda_m)| < \epsilon_1.$$

Tome $\epsilon_1 = \pi$ e escolha $\epsilon = \delta_{\epsilon_1}$. Então

$$|\phi(x_2, \lambda_n) - \phi(x_2, \lambda_m)| < \pi,$$

no entanto, $\phi(x_2, \lambda_n) = \beta - n\pi$ e $\phi(x_2, \lambda_m) = \beta - m\pi$, logo

$$|\phi(x_2, \lambda_n) - \phi(x_2, \lambda_m)| = |\beta - n\pi - (\beta - m\pi)| = |\pi(m-n)| \geq \pi,$$

uma contradição. $\square$

A resposta que obtemos é que ao se considerar um operador, nas condições do problema de Sturm-Lioville (2.8), (2.9), temos que o espectro desse operador será discreto. Podemos ainda afirmar que o Problema de Sturm-Lioville não possui solução em geral, mas existem infinitos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ...$, de tal forma que o problema possui solução não-trivial. Essas soluções, que chamamos de autofunções, tem a propriedade de que cada uma tem um zero a mais no intervalo determinado pelas condições de contorno do que a próxima menor, ou melhor, a solução correspondente ao próximo menor autovalor.

2.6 Expansão de Fourier em termos de Autofunções e a Completude do Espaço L^2

Seja $\{y_1(x), y_2(x), y_3(x), ...\}$ um conjunto enumerável de autofunções do problema de Sturm-Lioville do tipo (2.8), (2.9). De acordo com o Teorema 2.4.1, temos

$$\langle \sqrt{R(x)}y_i(x), \sqrt{R(x)}y_k(x) \ \rangle = 0 \quad i \neq k. \tag{2.20}$$

Se cada y_k é solução do problema de valor de contorno linear homogêneo, então $c_k y_k$ também é solução, em que

$$c_k = \langle \sqrt{R(x)}y_k(x), \sqrt{R(x)}y_k(x) \ \rangle^{-\frac{1}{2}}$$

de modo que o sistema $\{c_k R(x) y_k\} = \{R(x)\overline{y}_k\}$ é ortornormal, ou seja,

$$\langle \sqrt{R(x)}\overline{y}_k, \sqrt{R(x)}\overline{y}_k \ \rangle = 1.$$

Seja $f \in L^2(x_1, x_2)$. É possível, para cada $x \in [x_1, x_2]$, escrevermos

$$f(x) = a_1\overline{y}_1(x) + a_2\overline{y}_2(x) + a_3\overline{y}_3(x) + ... = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\overline{y}_k(x) \tag{2.21}$$

onde cada a_k é obtido multiplicando-se (2.21) por $R(x)\overline{y}_k(x)$ e se integrando o resultado termo a termo no intervalo $x_1 \leq x \leq x_2$. Portanto, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos

$$a_k = \langle f(x), R(x)\overline{y}_k(x) \rangle. \tag{2.22}$$

Definição 2.6.1. *Dizemos que $f(x)$ com $x_1 \leq x \leq x_2$ é seccionalmente contínua se o intervalo $[x_1, x_2]$ pode ser subdividido em um número finito de intervalos nos quais a função $f(x)$ é contínua e possui limites finitos à direita e à esquerda.*

Definição 2.6.2. *Dizemos que um sistema ortogonal $\{\phi_k\}$ é completo em L^2, com $x_1 \leq x \leq x_2$, se $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ N_\epsilon \in \mathbb{N}$ e $C_1, ..., C_n$ tais que se $n > N_\epsilon$, temos*

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} C_k\phi_k(x) \right]^2 dx < \epsilon \tag{2.23}$$

onde os C_k são obtidos usando (2.22).

Por conveniência, assumimos que o sistema $\{\phi_k\}$ é ortonormal, ou seja,

$$|\phi_k|^2 = \langle \phi_k, \phi_k \rangle = \int_{x_1}^{x^2} \phi_k^2 \ dx = 1 \quad e \quad \langle \phi_i, \phi_k \rangle = 0 \quad se \quad i \neq k.$$

Teorema 2.6.3. *Se $f \in L^2(a, b)$ e $\{\phi_k\}$ é uma sequência ortonormal do problema (2.8), (2.9), então a série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\langle f, \phi_k \rangle|^2$$

é convergente, e vale a chamada Desigualdade de Bessel

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \leq ||f||^2.$$

Demonstração. Para um certo $m \geq 0$ temos

$$0 \leq ||f - \sum_{k=1}^{m} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k||^2 = \Big\langle f - \langle f, \phi_1 \rangle \phi_1 - \ldots - \langle f, \phi_m \rangle \phi_m, \\ f - \langle f, \phi_1 \rangle \phi_1 - \ldots - \langle f, \phi_m \rangle \phi_m \Big\rangle.$$

Usando-se as propriedades do produto interno e a ortonomalidade das auto-funções ϕ, obtemos

$$0 \leq ||f||^2 - \sum_{k=1}^{m} |\langle f, \phi_k \rangle|^2.$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^{m} |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \leq ||f||^2,$$

e se tomando o limite de $m \to \infty$ provamos que a série é convergente, por ser limitada superiormente por $||f||^2$, bem como a Desigualdade de Bessel. □

O número $\langle f, \phi_k \rangle$ é chamado o k-ésimo coeficiente de Fourier de f com respeito ao conjunto ortonormal $\{\phi_k\}$. Note que o coeficiente de Fourier coincide com (2.22).

Enunciemos o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [2]. Tal resultado nos dará suporte para a demonstração do Teorema de Completude, um resultado central da teoria que virá em seguida.

Teorema 2.6.4. *Seja $f \in C^n$ (em $[a, b]$) satisfazendo a condição de contorno (2.9). Então, em $[a, b]$,*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k$$

onde a série converge uniformemente neste intervalo.

Teorema 2.6.5. *Se $f \in L^2(a,b)$, então*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k,$$

onde a igualdade tem o seguinte significado:

$$\lim_{m\to\infty} ||f - \sum_{k=0}^{m} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k|| = 0.$$

Como consequência, temos a identidade de Parseval,

$$||f||^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\langle f, \phi_k \rangle|^2, \tag{2.24}$$

dita a relação de completude.

Demonstração. Assumimos que o conjunto de funções de classe C^n em $[a,b]$ que satisfaz as condições de contorno do problema de Sturm-Lioville é denso no espaço $L^2(a,b)$, ou seja, $\forall\ \epsilon_1 > 0$, existe $\overline{f}$ satisfazendo

$$||f - \overline{f}|| < \epsilon_1 = \frac{\epsilon}{3}. \tag{2.25}$$

Assim, para cada $m > 0$,

$$||f - \sum_{k=0}^{m} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k|| = ||f - \overline{f} + \overline{f} - \sum_{k=0}^{m} \langle \overline{f}, \phi_k \rangle \phi_k + \sum_{k=0}^{m} \langle \overline{f}, \phi_k \rangle \phi_k - \sum_{k=0}^{m} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k|| \leq$$

$$||f - \overline{f}|| + ||\overline{f} - \sum_{k=0}^{m} \langle \overline{f}, \phi_k \rangle \phi_k|| + ||\sum_{k=0}^{m} \langle (\overline{f} - f), \phi_k \rangle \phi_k||. \tag{2.26}$$

Usando-se a ortonomalidade de $\{\phi_k\}$, podemos reescrever a última parcela da soma acima assim

$$\left(\sum_{k=0}^{m} |\langle (\overline{f} - f), \phi_k \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo usando-se a Desigualdade de Bessel, obtemos

$$\left(\sum_{k=0}^{m} |\langle (\overline{f} - f), \phi_k \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq ||\overline{f} - f|| < \epsilon_1 = \frac{\epsilon}{3}. \tag{2.27}$$

Segue-se do Teorema (2.6.4), a existência de um inteiro M, que depende de ϵ_2, tal que para $m > M$ temos

$$||\overline{f} - \sum_{k=0}^{m} \langle \overline{f}, \phi_k \rangle \phi_k|| < \epsilon_2 = \frac{\epsilon}{3}. \tag{2.28}$$

Por fim, combinando-se (2.25), (2.26), (2.27) e (2.28) temos para $m > M$ que

$$||f - \sum_{k=0}^{m} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k|| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

□

Definição 2.6.6. *Um sistema ortonormal $\{\phi_k\}$ é fechado em $x_1 \leq x \leq x_2$ se para uma função seccionalmente contínua $\psi(x)$ temos, $\forall$ k*

$$\langle \psi, \phi_k \rangle = \int_{x_1}^{x_2} \psi(x) \phi_k(x)\, dx = 0, \tag{2.29}$$

assim $\psi(x) = 0$ em $x_1 \leq x \leq x_2$, com a possível excessão de um número finito de pontos (ou um conjunto de medida nula).

Podemos provar que o conceito de completude e o de ser fechado são equivalentes. Para isso, assuma que $\{\phi_k\}$ é completo mas não é fechado, lembrando-se que para o sistema ser completo este deve satisfazer a identidade de Parseval (2.24). Então, existe uma função $\psi(x)$ que não é identicamente nula e seccionalmente contínua tal que, $\forall$ k,

$$\langle \psi, \phi_k \rangle = 0. \tag{2.30}$$

Como $\{\phi_k\}$ é completo, de (2.24) temos

$$|\psi|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle \psi, \phi_k \rangle|^2,$$

e de (2.30) vem que $|\psi|^2 = 0$, isto é, $\psi = 0$, donde se segue que $\{\phi_k\}$ é fechado, uma contradição.

2.7 O problema não-homogêneo de valores de contorno

O problema não-homogêneo consiste no sistema

$$Lx = lx + f, \quad Ux = 0; \tag{2.31}$$

Consideraremos $f \in C([x_1, x_2])$, e o caso particular discutido nas seções anteriores, a saber,

$$Ly = \frac{d}{dx}[p(x)y'] + q(x)y = -f(x) \tag{2.32}$$

$$a_{11}y(x_1) + a_{12}y'(x_1) = 0 \tag{2.33}$$

$$a_{21}y(x_2) + a_{22}y'(x_2) = 0.$$

Para tanto, tomaremos a função

$$y(x) = \int_{x_1}^{x_2} G(x,\xi)f(\xi)\ d\xi, \tag{2.34}$$

onde $G(x,\xi)$ na integral acima é chamada função de Green.

Suponhamos que (2.34) seja uma solução do problema (2.32), (2.33). Essa suposição nos fornecerá ideias construtivas para estabelecer a função de Green. Portanto, assuma que $G(x,\xi)$ existe e que (2.34) é solução de (2.32), e ao substituirmos (2.34) em (2.32), efetuando-se as devidas diferenciações, obtemos

$$\begin{aligned} y'(x) = \int_{x_1}^{x} \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x} f(\xi)\ d\xi + G(x, x-0)f(x) \\ + \int_{x}^{x_2} \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x} f(\xi)\ d\xi - G(x, x+0)f(x). \end{aligned}$$

Assumindo-se a continuidade de $G(x,\xi)$ em ξ, temos

$$G(x, x-0) = G(x, x+0);$$

assim,

$$y'(x) = \textstyle\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x} f(\xi)\ d\xi,$$

e consequentemente,

$$
\begin{aligned}
y''(x) = \int_{x_1}^{x} \frac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial x^2} f(\xi)\ d\xi + \frac{\partial G(x, x-0)}{\partial x} f(x) \\
+ \int_{x}^{x_2} \frac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial x^2} f(\xi)\ d\xi - \frac{\partial G(x, x+0)}{\partial x} f(x) = \\
\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial x^2} f(\xi)\ d\xi + f(x)\left[\frac{\partial G(x, x-0)}{\partial x} - \frac{\partial G(x, x+0)}{\partial x}\right].
\end{aligned}
$$

Por fim, fazendo-se a substituição em (2.32), obtemos

$$
\begin{aligned}
p(x)\left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial x^2} f(\xi)\ d\xi + f(x)\left[\frac{\partial G(x, x-0)}{\partial x} - \frac{\partial G(x, x+0)}{\partial x}\right]\right] \\
+ p'(x)\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x} f(\xi)\ d\xi + q(x)\int_{x_1}^{x_2} G(x,\xi) f(\xi)\ d\xi = \\
\int_{x_1}^{x_2} f(\xi)\left[p(x)\frac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial x^2} + p'(x)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x} + q(x)G(x,\xi)\right] d\xi \\
+ p(x)f(x)\left[\frac{\partial G(x, x-0)}{\partial x} - \frac{\partial G(x, x+0)}{\partial x}\right] = \\
\int_{x_1}^{x_2} f(\xi) LG(x,\xi)\ d\xi + p(x)f(x)\left[\frac{\partial G(x, x-0)}{\partial x} - \frac{\partial G(x, x+0)}{\partial x}\right] = -f(x).
\end{aligned}
$$

Temos, portanto, que se (2.34) é uma solução da equação diferencial (2.32) e se $G(x,\xi)$ satisfaz a equação homogêna correspondente a (2.32), então

$$LG(x,\xi) = 0$$

em toda parte, exceto em $x = \xi$, e neste ponto vale a relação

$$\frac{\partial G(x, x-0)}{\partial x} - \frac{\partial G(x, x+0)}{\partial x} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\Bigg|_{\xi = x-\epsilon}^{\xi = x+\epsilon} = -\frac{1}{p(x)}. \qquad (2.35)$$

As condições de contorno assumem a seguinte forma, tomando-se a solução (2.34):

$$
\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_2} f(\xi)[a_{11}G(x_1,\xi) + a_{12}\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}]\ d\xi = 0 \\
\int_{x_1}^{x_2} f(\xi)[a_{21}G(x_1,\xi) + a_{22}\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}]\ d\xi = 0,
\end{aligned}
$$

desde que $G(x,\xi)$ satisfaça as condições de contorno (2.33).

O seguinte resultado sintetiza o que foi demonstrado para a função de Green:

Teorema 2.7.1. *Se existir uma função $G(x,\xi)$ que possui derivada contínua em todo ponto, exceto em $x=\xi$, que satisfaz as condições de contorno (2.33), a equação homogênea $LG = 0$ em todo ponto, exceto em $x=\xi$ e (2.35), então $\int_{x_1}^{x_2} G(x,\xi)f(\xi)\, d\xi$ é solução de (2.32), (2.33).*

Discutamos um exemplo de utilização da função de Green para solucionar o seguinte problema não-homogêneo de condições de contorno. Sejam

$$y'' + y = 1, \tag{2.36}$$

e as condições de contorno

$$y(0) = 0 \tag{2.37}$$
$$y(\frac{\pi}{2}) = 0. \tag{2.38}$$

De acordo com o Teorema 2.7.1, a função de Green satisfaz

$$G'' + G = 0, \tag{2.39}$$

com $0 \leq x < \xi$ e $\xi < x \leq \frac{\pi}{2}$ e também a condição (2.35). Efetuando-se os devidos cálculos, a solução de (2.39) com $0 \leq x < \xi$ que satisfaz (2.37) é

$$y_0 = \operatorname{sen} x,$$

e a solução de (2.39) com $\xi < x \leq \frac{\pi}{2}$ que satisfaz (2.38) é

$$y_1 = \cos x.$$

Portanto, a função de Green assume a forma

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \operatorname{sen} x \ \phi(\xi), & \text{para} \quad 0 \leq x < \xi, \\ \cos x \ \varphi(\xi), & \text{para} \quad \xi < x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

As funções ϕ e φ tais que (2.35) vale são

$$\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\Bigg|_{x=\xi+0} - \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\Bigg|_{x=\xi-0} = -\operatorname{sen} x \ \phi(\xi) - \cos x \ \varphi(\xi) = -\frac{1}{p(\xi)} = -1,$$

Observemos que esta condição é satisfeita se, e somente se,

$$\phi(\xi) = \cos\xi = y_1(\xi),\ \varphi(\xi) = \operatorname{sen}\xi = y_0(\xi),$$

e assim a função de Green assume a forma

$$G(x,\xi) = \begin{cases} y_0(x)y_1(\xi) = \operatorname{sen} x \cos(\xi), & \text{para} \quad 0 \le x < \xi, \\ y_1(x)y_0(\xi) = \cos x \sin(\xi), & \text{para} \quad \xi < x \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Daí, obtemos a solução de (2.36), satisfazendo as condições de contorno (2.37) e (2.38), como

$$y(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,\xi) f(\xi)\ d\xi = -\cos x \int_0^x \operatorname{sen} \xi\ d\xi - \operatorname{sen} x \int_x^{\frac{\pi}{2}} \cos \xi\ d\xi = 1 - \cos x - \operatorname{sen} x$$

Teorema 2.7.2 (Existência da função de Green)**.** *A função de Green definida em (2.34) e que satisfaz as hipóteses do Teorema 2.7.1 existe se o problema associado de valor de contorno homogêneo possui solução trivial única.*

Demonstração. Seja

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

a solução geral da equação homogênea

$$Ly = 0,$$

onde L denota um operador diferencial auto-adjunto de 2ª ordem. Determinemos constantes c_1, c_2 tais que a primeira condição de contorno de (2.33)

$$a_{11} y(x_1) + a_{12} y'(x_1) = 0$$

seja satisfeita, e consequentemente

$$\overline{y}_1 = c_1^{(1)} y_1 + c_2^{(1)} y_2.$$

Determinemos também constantes c_1, c_2 tais que a segunda condição de contorno de (2.33),

$$a_{21} y(x_2) + a_{22} y'(x_2) = 0$$

seja satisfeita, e consequentemente

$$\overline{y}_2 = c_1^{(2)} y_1 + c_2^{(2)} y_2.$$

Temos, portanto, somente duas possibilidades: ou $\overline{y}_1 = \overline{y}_2$, ou $\overline{y}_1 \neq \overline{y}_2$.

No primeiro caso, $\overline{y}_1$ é solução não-trivial do problema associado de valor de contorno homogêneo, porém $\overline{y}_2$ é múltiplo escalar de $\overline{y}_1$ (o problema deles serem linearmente dependentes ficará explicíto logo abaixo). No segundo caso, a solução não trivial do problema homogêneo associado não existe, e assim podemos construir a seguinte função:

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\frac{\overline{y}_1(x)\overline{y}_2(\xi)}{\overline{y}_1(\xi)\overline{y}_2'(\xi)-\overline{y}_1'(\xi)\overline{y}_2(\xi)}, & \text{se} \quad x<\xi,\\ \frac{\overline{y}_1(\xi)\overline{y}_2(x}{\overline{y}_1(\xi)\overline{y}_2'(\xi)-\overline{y}_1'(\xi)\overline{y}_2(\xi)}, & \text{se} \quad \xi\leq x.\end{cases}$$

Obervemos que o denominador não se anula em nenhum caso, pois

$$W[\overline{y}_1,\overline{y}_2](\xi)=\begin{vmatrix}\overline{y}_1(\xi) & \overline{y}_1'(\xi)\\ \overline{y}_2(\xi) & \overline{y}_2'(\xi)\end{vmatrix}=\overline{y}_1(\xi)\overline{y}_2'(\xi)-\overline{y}_1'(\xi)\overline{y}_2(\xi),$$

e se assumindo $\overline{y}_1,\overline{y}_2$ lineramente independentes, temos $W[\overline{y}_1,\overline{y}_2]\neq 0$, onde $W[\overline{y}_1,\overline{y}_2]$ é o Wroskiano. Podemos, ainda provar que

$$p(\xi)[\overline{y}_1\overline{y}_2'-\overline{y}_1'\overline{y}_2]=c \ \ \text{(constante)}.$$

De fato, usando-se a equação (2.7), temos

$$\overline{y}_1L\overline{y}_2-\overline{y}_2L\overline{y}_1=\tfrac{d}{dx}[p(\overline{y}_1\overline{y}_2'-\overline{y}_1'\overline{y}_2)]$$

e como $\overline{y}_1,\overline{y}_2$ são soluções, segue-se que $L\overline{y}_1$ e $L\overline{y}_2$ se anulam. Logo, o membro esquerdo da equação acima se anula, e portanto

$$\tfrac{d}{dx}[p(\overline{y}_1\overline{y}_2'-\overline{y}_1'\overline{y}_2)]=0.$$

Consequentemente,

$$p(\overline{y}_1\overline{y}_2'-\overline{y}_1'\overline{y}_2)=c.$$

Resta-nos provar que a função $G(x,\xi)$ definida acima é a função de Green do problema não-homogêneo

$$Ly=-f(x),$$

com as condições de contorno (2.33).
Com efeito,

(1) $G(x,\xi)$ satisfaz $LG=0$ em $x_1\leq x<\xi$ e $\xi<x\leq x_2$, pois $\overline{y}_1,\overline{y}_2$ são soluções de $Ly=0$;

(2) $G(x,\xi)$ satisfaz as condições de contorno (2.33), uma vez que $\overline{y}_1$ e $\overline{y}_2$ satisfazem cada condição de contorno;

(3) $\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\Big|_{\xi=x-0}^{\xi=x+0}=-\frac{1}{c}(\overline{y}_2\overline{y}_1'-\overline{y}_1\overline{y}_2')=-\frac{1}{p(x)}$,
já que $p(x)(\overline{y}_1\overline{y}_2'-\overline{y}_1'\overline{y}_2)=c$.

Uma aplicação do Teorema 2.7.1 completa a demonstração. □

Capítulo 3

Problema Singular Auto-Adjunto de Valor de Contorno para Equações de Segunda Ordem

3.1 Introdução

Até então, sempre supusemos que o problema de Sturm Lioville (2.8), (2.9) era regular, ou seja, que P era diferenciável, Q e R contínuas e $R > 0$ em todos os pontos do intervalo $[a, b]$.

Neste capítulo, trataremos do problema de Sturm-Lioville singular, que pode ser vários tipos. Destacamos dois deles: no primeiro, temos uma determinada classe de problemas de valores de contorno para o operador diferencial (2.8) tal que as funções P, Q e R satisfazem as condições enunciadas no parágrafo acima, no intervalo $[a, b]$, mas pelo menos uma dessas funções deixa de satisfazer uma ou mais dessas condições em um (ou ambos) dos extremos do intervalo; no segundo, temos um operador diferencial definido em um intervalo ilimitado, por exemplo, $[a, \infty)$ e $(-\infty, \infty)$. Discutiremos nesse trabalho apenas a situação de um operador diferencial regular definido no intervalo $[a, \infty)$.

Iniciemos a discussão analisando o seguinte problema

$$-x'' = lx, \quad x(0) = 0$$

para $0 \leq t < \infty$. Para tanto consideraremos o caso-limite do problema no intervalo finito $0 \leq t \leq b$, com a condição

$$x(b) = 0.$$

Para tal problema regular, obtemos o seguinte sistema ortonormal de autofunções $\{\psi_k\}$:

$$\psi_k(t) = \left(\frac{2}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \frac{k\pi t}{b} \quad (k = 1, 2, 3, ...).$$

Qualquer função f que é contínua em $0 \leq t \leq c < b$ e se anula em $c \leq t$ satisfaz a seguinte relação de completude de Parseval:

$$\int_0^c |f(t)|^2 \, dt = \frac{2}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^c \operatorname{sen} \frac{k\pi t}{b} f(t) \, dt \right|^2.$$

Se escrevermos

$$g(s) = \int_0^c \operatorname{sen} st \; f(t) \, dt, \tag{3.1}$$

a relação de completude assume a forma

$$\int_0^c |f(t)|^2 \, dt = \frac{2}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \left| g\left(\frac{k\pi t}{b}\right) \right|^2. \tag{3.2}$$

Definamos uma função escada ρ_b de s não-decrescente que dê saltos de magnitude $2/b$ quando s passa por $k\pi/b$ ($k = 1, 2, ...$) e seja constante caso contrário.

Observemos que ρ_b é descontínua justamente onde estão os autovalores do problema regular e o mais interessante é que ao se tomar $b \to \infty$, teremos que $\rho_b(s) \to \frac{2s}{\pi}$ (ver demonstração do Teorema 3.3.1), ou seja, ao passarmos do intervalo finito $0 \leq t \leq b$ para o intervalo $0 \leq t < \infty$, a função que era descontínua nos autovalores do problema inicial se torna uma função contínua, monótona não-decrescente. E mais, podemos escrever o seguinte

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \int_0^{\infty} |g(s)|^2 \, d\rho_b(s) \tag{3.3}$$

e como feito acima, com $b \to \infty$, temos

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} |g(s)|^2 \, ds \tag{3.4}$$

a chamada Identidade de Plancherel.

O argumento heurístico anterior pode ser feito rigorosamente assumindo-se a convergência de $\rho_b(s) \to \frac{2s}{\pi}$ quando $b \to \infty$. A saber, suponha que $f(0) = 0$, e que f se anula para $c \leq t$, e que f possui primeira derivada contínua em $[0, c]$. Então, de (3.1) e se usando integração por partes, temos

$$|g(s)| = \left| -\frac{\cos st f(t)}{s}\Big|_0^c + \frac{1}{s}\int_0^c \cos st f'(t)\, dt \right| \leq$$
$$\frac{1}{s}\int_0^c |\cos st f'(t)|\, dt = \frac{1}{s}\int_0^c |f'(t)|\, dt = \frac{M}{s}$$

com M representando a integral. Para $1 \leq s$,

$$|g(s)|^2 \leq \frac{M^2}{s^2}, \tag{3.5}$$

e como g é contínua, temos para μ suficientemente grande

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^\mu |g(s)|^2\, d\rho_b(s) = \frac{2}{\pi}\int_0^\mu |g(s)|^2\, ds. \tag{3.6}$$

Para demonstrarmos (3.4) devemos analisar a integral no intervalo $\mu \leq s < \infty$. Usando-se (3.5) e (3.3) obtemos

$$\int_\mu^\infty |g(s)|^2\, d\rho_b(s) \leq M^2 \int_\mu^\infty s^{-2}\, d\rho_b(s) \leq \frac{4M^2}{\pi}\int_\mu^\infty s^{-2}\, ds = \frac{4M^2}{\pi\mu}. \tag{3.7}$$

Consequentemente,

$$\int_\mu^\infty |g(s)|^2\, d\rho_b(s) = \frac{2}{\pi}\int_\mu^\infty |g(s)|^2\, ds \leq \frac{4M^2}{\pi\mu}$$
$$\int_\mu^\infty |g(s)|^2\, ds \leq \frac{2M^2}{\mu},$$

e ao tomarmos $\mu \to \infty$, a parte direita da desigualdade acima tende a zero, o que encerra a demonstração.

3.2 Os casos Círculo-Limite e Ponto-Limite

Definição 3.2.1. *Se para um particular número complexo l_0 toda solução ϕ da equação diferencial $Lx = l_0 x$ satisfaz $\int_0^\infty |\phi|^2\, dt < \infty$ ($\phi \in L^2(0, \infty)$), então L é dito do tipo Círculo-Limite no infinito. Caso contrário, L é dito do tipo Ponto-Limite no infinito.*

Demonstremos a seguir que a classificação de L não depende da escolha particular de l_0:

Teorema 3.2.2. *Se toda solução de $Lx = l_0 x$ é de classe $L^2(0,\infty)$ para $l_0 \in \mathbb{C}$, então para todo outro $l \in \mathbb{C}$, toda solução de $Lx = lx$ é de classe $L^2(0,\infty)$.*

Demonstração. Sejam ϕ e ψ duas soluções l.i. e de classe $L^2(0,\infty)$ de $Lx = l_0 x$. Seja χ uma solução arbitrária de $Lx = lx$, equação esta que pode ser reescrita como

$$Lx = l_0 x + (l - l_0)x.$$

Usando-se a fórmula da variação das constantes, temos

$$\chi(t) = c_1\phi(t) + c_2\psi(t) + (l - l_0)\int_c^t (\phi(t)\psi(\xi) - \phi(\xi)\psi(t))\chi(\xi)\, d\xi \tag{3.8}$$

onde c_1, c_2 e c são constantes. Usando-se a notação

$$||\chi||_c = \left(\int_c^t |\chi|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.9}$$

existe $M > 0$ tal que $||\phi||_c \leq M$, $||\psi||_c \leq M$, para todo $c \leq t$, já que $\phi, \psi \in L^2(0,\infty)$. Então (3.8) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz nos fornecem

$$\left|\int_c^t (\phi(t)\psi(\xi) - \phi(\xi)\psi(t))\chi(\xi)\, d\xi\right| =$$

$$\left|\phi(t)\int_c^t \psi(\xi)\chi(\xi)\, d\xi \; - \; \psi(t)\int_c^t \phi(\xi)\chi(\xi)\, d\xi\right| \leq$$

$$M|\phi(t)|\left(\int_c^t |\chi(\xi)|\, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} + M|\psi(t)|\left(\int_c^t |\chi(\xi)|\, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} = M(|\phi(t)| + |\psi(t)|)||\chi||_c.$$

Logo, integrando-se (3.8) de c até t, tomando-se o módulo e usando-se a desigualdade de Minkowski, temos

$$||\chi||_c \leq (|c_1| + |c_2|)M + 2|l - l_0|M^2||\chi||_c\ .$$

Pode-se tomar c tão grande quanto se queira, de tal forma que $|l - l_0|M^2 \leq \frac{1}{4}$, donde segue-se que

$$||\chi||_c \leq (|c_1| + |c_2|)M + 2|l - l_0|M^2||\chi||_c \leq (|c_1| + |c_2|)M + \frac{1}{2}||\chi||_c\ ,$$

e assim

$$||\chi||_c \leq 2(|c_1| + |c_2|)M.$$

Basta observar que o lado direito da desigualdade acima independe de t, o que demonstra que $\chi \in L^2(0,\infty)$. $\square$

Definição 3.2.3. *Uma função de valores complexos, definida em uma região A, é dita analítica em A se admite derivada em cada ponto de A. Uma função que é analítica em todo plano é dita inteira. Uma função que é analítica na região A, exceto em seus polos, é dita meromorfa.*

No caso Ponto-Limite, a definição nos sugere que no máximo uma solução (a menos de múltiplos constantes) de $Lx = lx$ é de classe $L^2(0,\infty)$. Mostremos que nesse caso, existe uma única solução de $Lx = lx$ de classe $L^2(0,\infty)$ para qualquer l tal que $Im(l) \neq 0$. Ficará evidente também o porquê do uso da nomenclatura círculo-limite e ponto-limite. De fato, sejam ϕ e ψ duas soluções de $Lx = lx$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \phi(0,l) &= \operatorname{sen}\alpha \quad \psi(0,l) = \cos\alpha \\ p(0)\phi'(0,l) &= -\cos\alpha \quad p(0)\psi'(0,l) = \operatorname{sen}\alpha, \end{aligned}$$

com $0 \leq \alpha < \pi$. Claramente ϕ, ψ são soluções l.i. e além disso, o Lema de Green (Teorena 2.3.1) nos fornece $[\phi\overline{\psi}](t) = (\phi(t)\overline{\psi}'(t) - \psi(t)\overline{\phi}'(t)) = \operatorname{sen} t^2 + \cos t^2 = 1, \quad \forall t \geq 0$. Tais soluções ainda satisfazem a condição de contorno em $t = 0$, a saber

$$\begin{aligned} \cos\alpha\ \phi(0,l) + \operatorname{sen}\alpha\ p(0)\ \phi'(0,l) = 0 \\ \operatorname{sen}\alpha\ \psi(0,l) - \cos\alpha\ p(0)\ \psi'(0,l) = 0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

e toda solução χ de $Lx = lx$ é uma combinação linear de ϕ e ψ, ou seja, tem a forma

$$\chi = \phi + m\psi,$$

onde m é uma função que depende de l. Considere agora a seguinte condição de contorno real para o ponto $t = b$, com $0 < b < \infty$:

$$\cos\beta\ x(b) + \sin\beta\ p(b)\ x'(b) = 0 \quad (0 \leq \beta < \pi). \tag{3.11}$$

A pergunta que fazemos é qual deve ser a função m tal que a solução χ satisfaça a condição de contorno acima, ou seja,

$$\cos\beta\ \chi(b,l) + \operatorname{sen}\beta\ p(b,l)\ \chi'(b,l) = 0.$$

Assim,

$$\cos\beta(\phi(b,l)+m\psi(b,l))+\operatorname{sen}\beta\; p(b,l)(\phi'(b,l)+m\psi'(b,l))=0,$$

e portanto

$$m=-\frac{\operatorname{sen}\beta(\frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}\phi(b,l)+p(b)\phi'(b,l)}{\operatorname{sen}\beta(\frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}\psi(b,l)+p(b)\psi'(b,l))},$$

ou ainda,

$$m=-\frac{\cot\beta\phi(b,l)+p(b)\phi'(b,l))}{\cot\beta\psi(b,l)+p(b)\psi'(b,l)}.$$

Fica claro da identidade acima que m é uma função de l, b e β; $m=m(l,b,\beta)$. Como ϕ, ϕ', ψ e ψ' são funções inteiras de l, usando-se [4], segue-se que m é meromorfa em l. Se escrevermos $z=\cot\beta$ e se (l,b) são fixados, então reescrevemos a equação acima como

$$m=-\frac{Az+B}{Cz+D},$$

onde

$$\begin{aligned} A&=\phi(b,l) \quad & B&=p(b)\phi'(b,l)\\ C&=\psi(b,l) \quad & D&=p(b)\psi'(b,l). \end{aligned}$$

A medida que β percorre o intervalo $(0,\pi)$, z percorre a reta real. A função m é, portanto, uma Transformação de Möbius. As propriedades dessa transformação podem ser encontradas em [3], e a propriedade que usaremos é que a reta real do plano z tem como imagem o círculo C_b que está no plano m. Assim, χ satisfaz (3.11) se, e somente se, m se encontra em C_b. Fazendo-se os devidos cálculos, temos

$$z=-\frac{B+Dm}{A+Cm},$$

e a equação da imagem do eixo real, $Im(z)=0$, torna-se

$$(\overline{A}+\overline{C}\overline{m})(B+Dm)-(A+Cm)(\overline{B}+\overline{D}\overline{m})=0,$$

exatamente a equação para C_b. Temos ainda que o círculo C_b tem centro

$$m_b=\frac{A\overline{D}-B\overline{C}}{\overline{C}D-C\overline{D}}$$

e raio

$$r_b = \frac{|AD - BC|}{|\overline{C}D - C\overline{D}|}.$$

Podemos reescrever a equação de C_b, usando-se as definições de A, B, C e D, como

$$\begin{aligned}
&\overline{A}B + \overline{A}Dm + B\overline{C}\overline{m} + D\overline{C}\overline{m}m - A\overline{B} - A\overline{D}\overline{m} - C\overline{B}m - C\overline{D}\overline{m}m = \\
&p(b)(\overline{\phi(b,l)}\phi'(b,l) + \overline{\phi(b,l)}\psi'(b,l)m + \phi(b,l)\overline{\psi(b,l)}\overline{m} + \psi'(b,l)\overline{\psi(b,l)}\overline{m}m - \\
&\phi(b,l)\overline{\phi'(b,l)} - \phi(b,l)\overline{\psi'(b,l)}\overline{m} - \psi(b,l)\overline{\phi'(b,l)}m - \psi(b,l)\overline{\psi'(b,l)}\overline{m}m) = 0.
\end{aligned}$$

Como o membro esquerdo da segunda identidade acima é o Wronskiano de χ e χ avaliado em $t = b$, temos

$$W[\chi, \chi](b) = [\chi\chi](b) = 0.$$

Usando-se argumentos análogos ao anterior, obtemos as seguintes equações:

$$A\overline{D} - B\overline{C} = [\phi\psi](b)$$

$$\overline{C}D - C\overline{D} = -[\psi\psi](b)$$

$$AD - BC = [\phi\overline{\psi}](b) = 1.$$

Segue-se diretamente das identidades acima que

$$m_b = -\frac{[\phi\psi](b)}{[\psi\psi](b)} \quad r_b = \frac{1}{|[\psi\psi](b)|}. \tag{3.12}$$

Segue-se do Lema de Green que

$$[\psi\psi](b) - [\psi\psi](0) = \int_0^b \overline{\psi}L\psi - \psi\overline{L\psi}\ dt = 2iIm(l)\int_0^b |\psi|^2\ dt$$

e

$$[\chi\chi](b) = \int_0^b \overline{\chi}L\chi - \chi\overline{L\chi}\ dt + [\chi\chi](0) = 2iIm(l)\int_0^b |\chi|^2\ dt + [\chi\chi](0).$$

Observando-se que $[\chi\chi](b) = 0$ é a condição para que os pontos estejam em C_b e como $[\chi\chi](0) = -2iIm(m)$, temos

$$0 = [\chi\chi](b) = 2iIm(l)\int_0^b |\chi|^2\ dt + [\chi\chi](0),$$

donde se segue que,

$$\int_0^b |\chi|^2 \, dt = \frac{Im(m)}{Im(l)} \quad (Im(l) \neq 0), \tag{3.13}$$

que determina os pontos que estão em C_b. Por conseguinte, temos que

$$\int_0^b |\chi|^2 \, dt < \frac{Im(m)}{Im(l)} \quad (Im(l) \neq 0)$$

determina o interior de C_b.

A equação de r_b em (3.12) pode ser reescrita, para $Im(l) > 0$, como

$$r_b^{-1} = 2Im(l) \int_0^b |\psi|^2 \, dt. \tag{3.14}$$

Agora, seja $0 < a < b < \infty$. Então, se m está dentro de C_b, temos

$$\int_0^a |\psi|^2 \, dt < \int_0^b |\psi|^2 \, dt \leq \frac{Im(m)}{Im(l)}, \tag{3.15}$$

e portanto m está dentro de C_a. Isso significa que o círculo C_a contém C_b em seu interior se $a < b$. Logo, para um dado l ($Im(l) > 0$), e se tomando $b \to \infty$ o círculo C_b converge ou a um outro círculo C_∞, ou para um ponto m_∞. Se C_b converge a um círculo, então o raio $r_\infty = \lim r_b$ é positivo, e implica que $\psi \in L^2(0, \infty)$, por (3.15). Se y_∞ é um ponto em C_∞ então y_∞ está dentro de qualquer C_b para $b > 0$. Consequentemente,

$$\int_0^b |\phi + y_\infty \psi|^2 dt < \frac{Im(m_\infty)}{Im(l)},$$

e se tomando $b \to \infty$, vemos que $\phi + y_\infty \psi \in L^2(0, \infty)$. No caso $C_b \to C_\infty$, todas soluções são de classe $L^2(0, \infty)$ para $Im(l) \neq 0$, uma vez que ψ e $\phi + y_\infty \psi$ o são, e isso identifica o caso círculo-limite com existência do círculo C_∞.

O caso ponto-limite é identificado com a existência do ponto m_∞, nesse caso $C_b \to m_\infty$, o que resulta em $\lim r_b = 0$ e (3.14) implica que ψ não é de classe $L^2(0, \infty)$. Nessa situação, apenas uma solução (a menos de múltiplos constantes) é de classe $L^2(0, \infty)$ para $Im(l) \neq 0$.

No caso círculo-limite, m está em C_b se, e somente se, (3.13) ocorre. Logo, se $\chi = \phi(t, l) + m\psi(t, l)$, segue-se que m está em C_∞ se, e somente se,

$$Im(l) \int_0^\infty |\chi|^2 \, dt = Im(m).$$

E como $[\chi\chi](0) = -2iIm(m)$, segue-se que m está no círculo-limite se, e somente se, $[\chi\chi](\infty) = 0$. Todos esses resultados estão sintetizados no seguinte:

Teorema 3.2.4. *Se $Im(l) \neq 0$ e ϕ, ψ são soluções l.i. de $Lx = lx$ satisfazendo (3.10), então a solução $\chi = \phi + m\psi$ satisfaz a condição de contorno (3.11) se, e somente se, m encontra-se no círculo C_b em um plano complexo de equação*

$$[\chi\chi](b) = 0.$$

Quando $b \to \infty$ temos $C_b \to C_\infty$, um círculo-limite, ou $C_b \to m_\infty$, um ponto-limite. Toda solução de $Lx = lx$ é $L^2(0,\infty)$ no primeiro caso, e no segundo caso, para $Im(l) \neq 0$, exatamente uma solução l.i. é $L^2(0,\infty)$. Mais ainda, no caso círculo-limite, um ponto está no círculo $C_\infty(l)$ se, e somente se, $[\chi\chi](\infty) = 0$.

Uma condição suficiente para L ser do caso ponto-limite se segue abaixo (para mais informações sobre as ferramentas usadas na demonstração desse resultado, vide [4]).

Teorema 3.2.5. *No caso ponto-limite, m_∞ é uma função analítica de l para $Im(l) > 0$ e ainda $Im(m_\infty) > 0$ para $Im(l) > 0$. Mais, m_∞ tem zeros ou polos no eixo real, todos simples.*

Demonstração. De (3.12) e das definições de ϕ e ψ, segue-se que o centro e o raio do círculo C_1 são funções inteiras de l para $Im(l) > 0$. Suponha que C_b está no interior de C_1, para $b > 1$, e portanto se l está restrito a um subconjunto fechado e limitado Λ, então os pontos $m = m(l, b, \beta)$ em C_b são uniformemente limitados quando $b \to \infty$. As funções m $(m_b(l,\beta) = m(l,b,\beta))$, sendo meromorfas e limitadas em Λ, são analíticas também. Usando-se o teorema de Cauchy, as funções m_b constituem um conjunto equicontínuo de Λ, e m_b converge uniformemente para m_∞. Sendo o limite uniforme de funções analíticas, m_∞ também é analítica em Λ. Isso prova que se a função m_∞ tem zeros ou polos no eixo real, então eles são todos simples, e temos ainda que os polos possuem resíduo negativo, o que prova o resultado. $\square$

Teorema 3.2.6. *Sejam M uma função positiva diferenciável, k_1 e k_2 duas constantes positivas tais que para t suficientemente grande,*

$$-k_1 \leq q(t), \qquad \int_t^\infty (pM)^{-\frac{1}{2}}\, dt = \infty$$
$$|p^{\frac{1}{2}}(t)M'(t)M^{-\frac{3}{2}}(t)| \leq k_2. \tag{3.16}$$

Então, L está no caso ponto-limite.

Demonstração. Queremos provar que $Lx = 0$ não possui duas soluções l.i. de classe $L^2(0, \infty)$. Suponha que χ seja uma solução real de $Lx = 0$, e assuma que $\chi \in L^2(0, \infty)$. Logo, $L\chi = -(p\chi')' + q\chi \to (p\chi')' = q\chi$, e se segue para $c > 0$ que

$$\int_c^t \frac{(p\chi')'\chi}{M}\,dt = \int_c^t \frac{q}{M}\chi^2\,dt \geq -k_1 \int_c^t \chi^2\,dt.$$

Agora, usando-se o fato de que $\chi \in L^2(0, \infty)$ e se resolvendo por partes a primeira integral acima, existirá uma constante k_3 tal que

$$\frac{-p\chi'\chi}{M} + \int_c^t \frac{p(\chi')^2}{M}\,dt - \int_c^t \frac{p\chi'\chi M'}{M^2}\,dt < k_3. \tag{3.17}$$

Escreva

$$H(t) = \int_c^t \frac{p(\chi')^2}{M}\,dt,$$

e então, usando-se (3.16), a desigualdade de Schwarz nos fornece

$$\left|\int_c^t \frac{p\chi'\chi M'}{M^2}\,dt\right|^2 = \left|\int_c^t \frac{p^{\frac{1}{2}}M'M^{-\frac{3}{2}}p^{\frac{1}{2}}\chi'\chi}{M^{\frac{1}{2}}}\,dt\right|^2 \leq$$
$$\left(k_2\int_c^t \frac{p^{\frac{1}{2}}|\chi'\chi|}{M^{\frac{1}{2}}}\,dt\right)^2 \leq k_2^2 H(t)\int_c^t \chi^2\,dt.$$

Novamente, por $\chi \in L^2(0, \infty)$, existe uma constante k_4 tal que a equação (3.17) fica na forma

$$-\frac{p\chi\chi'}{M} + H - k_4 H^{\frac{1}{2}} < k_3.$$

Se quando $t \to \infty$ então $H(t) \to \infty$, a desigualdade acima, nos fornece, para t suficientemente grande, $\frac{p\chi\chi'}{M} > \frac{H}{2}$. Mas isso significa que χ e χ' devem ter o mesmo sinal para t suficientemente grande, o que contradiz o fato de que $\chi \in L^2(0, \infty)$. Provamos com isso que

$$\int_c^t \frac{p(\chi')^2}{M}\,dt < \infty \tag{3.18}$$

Suponhamos agora que $\phi, \psi \in L^2(0, \infty)$ são duas soluções l.i. de $Lx = 0$, isto é, L é do caso círculo-limite. Podemos assumir ainda que as soluções são reais e que

$$W[\phi\overline{\psi}] = p(\phi\psi' - \psi\phi') = 1.$$

Dividindo-se toda a equação por $(pM)^{\frac{1}{2}}$ com $p, M \neq 0$, pelas definições dessas funções obtemos

$$\phi\frac{p^{\frac{1}{2}}\psi'}{M^{\frac{1}{2}}} - \psi\frac{p^{\frac{1}{2}}\phi'}{M^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(pM)^{\frac{1}{2}}}.$$

Integrando-se a equação acima de c até ∞ e se usando (3.18) para as soluções ϕ e ψ, vemos que a hipótese de que $\int_t^\infty (pM)^{-\frac{1}{2}}\, dt = \infty$ falha. Concluímos que o caso círculo-limite não é válido nessa situação, o que prova o resultado. $\square$

No caso em que $M(t) = 1$ para $0 \leq t < \infty$, temos o seguinte resultado.

Corolário 3.2.7. *Se $q(t) \geq -k$, onde k é uma constante positiva, e*

$$\int_c^\infty p^{-\frac{1}{2}}\, dt = \infty,$$

então L é do caso ponto-limite.

No caso em que $p(t) = 1$, para operadores de segunda ordem de nosso interesse, o seguinte resultado se segue:

Corolário 3.2.8. *Se $p(t) = 1$ para $0 \leq t < \infty$ e $q(t) \geq -kt^2$ para um certo k constante, então L é do caso ponto-limite.*

3.3 A Completude e os Teoremas de Expansão do caso Ponto-Limite

Considere o seguinte problema para $0 \leq t \leq b < \infty$ e $0 \leq \alpha, \beta < \pi$:

$$\begin{aligned} Lx &= -(px')' + qx = lx \\ \operatorname{sen}\alpha\; x(0) - \cos\alpha\; p(0)x'(0) &= 0 \\ \cos\beta\; x(b) + \operatorname{sen}\beta\; p(b)x'(b) &= 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Este é um problema auto-adjunto de valor de contorno regular, e portanto existe uma sequência $\{\lambda_{bn}\}$, $n = 1, 2, ...,$ de autovalores reais e por conseguinte um conjunto ortonormal de autofunções $\{\theta_{bn}\}$. Sejam ϕ e ψ soluções de $Lx = lx$ satisfazendo as condições (3.10). Então ψ satisfaz a primeira condição de contorno acima e nenhuma outra solução de $Lx = lx$ l.i. com respeito a ψ, satisfaz esta condição. Portanto,

$$\theta_{bn}(t) = r_{bn}\psi(t, \lambda_{bn})$$

onde r_{bn} é constante e independente de t. A relação de completude de Parseval aplicada a toda função contínua com $0 \leq t < \infty$ e que se anula para $0 \leq t \leq c$, onde $0 < c < b$, nos fornece

$$\int_0^b |f(t)|^2 \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} |r_{bn}|^2 \left| \int_0^b f(t)\psi(t, \lambda_{bn}) \, dt \right|^2. \tag{3.20}$$

Defina

$$g(\lambda) = \int_0^\infty f(t)\psi(t, \lambda) \, dt,$$

e seja ρ_b uma função escada não-decrescente de λ, que possui saltos de magnitude $|r_{bn}|^2$ exatamente nos autovalores λ_{bn}, e é constante nos demais pontos. Assuma ainda que $\rho_b(\lambda + 0) = \rho_b(\lambda)$ e $\rho_b(0) = 0$. Então, a identidade de Parseval (3.20) pode ser reescrita como

$$\int_0^b |f(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2 \, d\rho_b(\lambda). \tag{3.21}$$

A função ρ_b é chamada Função Espectral para o problema (3.19).

A ideia fundamental por trás da generalização da equação (3.21), com $0 \leq t < \infty$, é provar que quando $b \to \infty$, a função ρ_b tende a uma função ρ monótona não-decrescente, que não é necessariamente uma função escada.

Se σ é qualquer função monótona não-decrescente em $-\infty < \lambda < \infty$, considere $L^2(\sigma)$ o conjunto de todas as funções h que são mensuráveis a respeito a medida de Lebesgue e tais que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)|^2 \, d\sigma(\lambda) < \infty.$$

Teorema 3.3.1. *Seja L do caso ponto-limite. Então,*
a) existe uma função monótona não-decrescente $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\rho(\lambda) - \rho(\mu) = \lim_{b \to \infty} (\rho_b(\lambda) - \rho_b(\mu)) \tag{3.22}$$

nos pontos de continuidade, λ e μ, de ρ;
b) se $f \in L^2(0, \infty)$ existe uma função $g \in L^2(\rho)$ tal que

$$\lim_{a \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| g(\lambda) - \int_0^a f(t)\psi(t, \lambda) \, dt \right|^2 d\rho(\lambda) = 0 \tag{3.23}$$

e

$$\int_0^\infty |f(t)|^2 \; dt = \int_{-\infty}^\infty |g(\lambda)|^2 \; d\rho(\lambda); \tag{3.24}$$

c) a integral

$$\int_{-\infty}^\infty g(\lambda)\psi(t,\lambda) \; d\rho(\lambda)$$

converge em $L^2(0,\infty)$ para f, isto é,

$$\lim_{(u,v)\to(-\infty,\infty)} \int_0^\infty \left| f(t) - \int_u^v g(\lambda)\psi(t,\lambda) \; d\rho(\lambda)\right|^2 \; dt = 0; \tag{3.25}$$

d) se m_∞, então

$$\rho(\lambda) - \rho(\mu) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_\mu^\lambda Im(m_\infty)(v+i\epsilon) \; dv \tag{3.26}$$

nos pontos de continuidade, λ e μ, de ρ, e inversamente

$$m_\infty(l) - m_\infty(l_0) = \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{\lambda - l} - \frac{1}{\lambda - l_0} \right) d\rho(\lambda) + c(l - l_0) \tag{3.27}$$

onde c é uma constante não negativa e $Im(l_0) \neq 0$.

A função ρ é chamada Função Espectral para o problema

$$Lx = lx, \quad \operatorname{sen}\alpha \; x(0) - \cos\alpha \; p(0)x'(0) = 0.$$

Enunciemos alguns resultados que nos darão suporte para a demonstração do Teorema 3.3.1. As demonstrações de tais resultados podem ser encontradas em [?] e [2], respectivamente.

Teorema 3.3.2. *Seja $\{h_n\}$, $n = 1, 2, ...,$ uma sequência de funções reais não-decrescente em $\mathbb{R}$, e H uma função não-negativa no mesmo intervalo. Se*

$$|h_n(\lambda)| \leq H(\lambda) \quad (n = 1, 2, ...),$$

então existem uma subsequência $\{h_{n_k}\}$ e uma função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não-decrescente tal que

$$|h(\lambda)| \leq H(\lambda)$$

e

$$\lim_{k\to\infty} h_{n_k}(\lambda) = h(\lambda).$$

Teorema 3.3.3. *Suponha que $\{h_n\}$ é uma sequência de funções não-decrescentes e uniformemente limitadas no intervalo (a, c), e assuma que*

$$\lim_{n\to\infty} h_n(\lambda) = h(\lambda), \quad \lambda \in (a, c).$$

Se f é qualquer função contínua em (a, c), então

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^c f(\lambda)\ dh_n(\lambda) = \int_a^c f(\lambda)\ dh(\lambda).$$

Demonstração do Teorema 3.3.1. (a) Seja m_b um ponto do círculo C_b, onde $Im(l) > 0$. Então, a igualdade de Parseval aplicada à solução $\chi_b = \phi + m_b\psi$ de $Lx = lx$ nos fornece

$$\int_0^b |\chi_b(t)|^2\ dt = \sum_{n=1}^{\infty} |r_{bn}|^2 \left| \int_0^b \chi_b(t)\psi(t, \lambda_{bn})\ dt \right|^2. \tag{3.28}$$

O Lema de Green aplicado a χ_b e ψ resulta em

$$(l - \lambda_{bn}) \int_0^b \chi_b(t)\psi(t, \lambda_{bn})\ dt = [\chi_b\psi_{bn}](b) - [\chi_b\psi_{bn}](0),$$

onde $\psi_{bn} = \psi(t, \lambda_{bn})$. É fácil ver que $[\chi_b\psi_{bn}](b) = 0$, uma vez que χ_b e ψ_{bn} satisfazem as condições de contorno em b, e que

$$\begin{aligned}[\chi_b\psi_{bn}](0) = p(0)(\chi(0)\overline{\psi_{bn}}'(0) - \chi'(0)\overline{\psi_{bn}}(0)) = \\ p(0)((\phi(0) + m\psi(0))\overline{\psi_{bn}}'(0) - (\phi(0) + m\psi(0))'\overline{\psi_{bn}}(0)) = 1,\end{aligned}$$

usando-se as definições de $\phi(0, l) = \operatorname{sen}\alpha$ e $\psi(0, l) = \cos\alpha$. Portanto, (3.28) implica em

$$\int_0^b |\chi_b(t)|^2\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_b(\lambda)}{|\lambda - l|^2},$$

levando-se em consideração a definição da função monótona ρ_b. Como m_b está em C_b, temos de (3.13) que

$$\int_0^b |\chi_b(t)|^2\ dt = \frac{Im(m_b(l))}{Im(l)}.$$

Segue-se, assim, a importante identidade

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_b(\lambda)}{|\lambda - l|^2} = \frac{Im(m_b(l))}{Im(l)} \quad (Im(l) > 0). \tag{3.29}$$

Tome $l = i$ na igualdade acima. Como C_b está em C_1 para $b > 1$, então existe uma constante k tal que $Im(m_b(i))$ é menor do que k para $b > 1$. Logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_b(\lambda)}{1+\lambda^2} < k. \tag{3.30}$$

Isto, juntamente com $\rho_b(0) = 0$, nos dá

$$|\rho_b(\lambda)| < k(1+\lambda^2).$$

Tomando-se a sequência $b_n \to \infty$, e se escolhendo β, tal que $0 \leq \beta < \pi$, para cada b_n, segue-se do Teorema 3.3.2 que existe uma subsequência $\{\rho_{b_n}\}$ da sequência $\{\rho_b\}$ que converge a uma função-limite ρ que é monótona não-decrescente e que satisfaz

$$|\rho(\lambda)| \leq k(1+\lambda^2).$$

(b) Seja f uma função com derivada segunda contínua em $0 \leq t < \infty$, que se anula em $t = 0$ e para t suficientemente grande. Então, aplicando-se (3.24) para Lf e para b suficientemente grande, temos

$$\int_0^{\infty} |Lf(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} Lf(t)\psi(t,\lambda) \, dt \right|^2 d\rho_b(\lambda), \tag{3.31}$$

com $g(\lambda) = \int_0^{\infty} Lf(t)\psi(t,\lambda) \, dt$, e portanto

$$\int_0^{\infty} |Lf(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2 \, d\rho_b(\lambda).$$

Para um certo $\mu > 0$, segue-se que

$$\int_{\Delta} |g(\lambda)|^2 \, d\rho_b(\lambda) \leq \mu^{-2} \int_{\Delta} |(Lf)(t)|^2 \, dt, \tag{3.32}$$

onde $\Delta = (-\infty, \infty)\backslash(-\mu, \mu]$. Podemos ainda reescrever a relação de completude para f como

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2 \, d\rho_b(\lambda) = \left(\int_{-\mu}^{\mu} + \int_{\Delta} \right) |g(\lambda)|^2 \, d\rho_b(\lambda).$$

Agora, fazendo $b \to \infty$, segue-se do item (a) que $\rho_b \to \rho$, e de (3.32) e do Teoreoma 3.3.3. que

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \left(\int_{-\mu}^{\mu} + \int_{\Delta} \right) |g(\lambda)|^2 \, d\rho(\lambda)$$

$$\left| \int_0^{\infty} |f(t)|^2 \, dt - \int_{-\mu}^{\mu} |g(\lambda)|^2 \, d\rho(\lambda) \right| =$$

$$\left| \int_{\Delta} |g(\lambda)|^2 \, d\rho(\lambda) \right| \leq \mu^{-2} \int_{\Delta} |(Lf)(t)|^2 \, dt$$

Tomando-se $\mu \to \infty$, o membro direito da desigualdade acima tende a zero, e pela igualdade de Parseval, obtemos

$$\int_0^\infty |f(t)|^2 \; dt = \int_{-\infty}^\infty |g(\lambda)|^2 \; d\rho(\lambda) \tag{3.33}$$

para qualquer f assim escolhida.

Suponha agora que $f \in L^2(0,\infty)$ é tal que se anula para $t = 0$ e para t suficientemente grande. Usando-se o fato de que o conjunto C^2 é denso em $L^2(0,\infty)$, existe um sequência de funções $f_n \in C^2(0,\infty)$, com derivadas de segunda ordem contínuas que anulam em $t = 0$ e para t suficientemente grande, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty |f_n - f|^2 \; = 0. \tag{3.34}$$

Aplicando-se (3.33) a $f_n - f_m$, temos

$$\int_0^\infty |f_n - f_m|^2 \; dt = \int_{-\infty}^\infty |g_n(\lambda) - g_m(\lambda)|^2 \; d\rho(\lambda), \tag{3.35}$$

onde

$$g_n(\lambda) = \int_0^\infty f_n(t)\psi(t,\lambda) \; dt. \tag{3.36}$$

Sendo o membro esquerdo de (3.35) um sequência de Cauchy, ao se tomar $n, m \to \infty$, segue-se que a sequência $\{g_n\}$ converge em $L^2(\rho)$, para $g \in L^2(\rho)$, uma vez que, tal espaço é completo. De (3.36), temos que a função contínua g é dada por

$$g(\lambda) = \int_0^\infty f(t)\psi(t,\lambda) \; dt.$$

Usando-se (3.33), obtemos

$$\int_0^\infty |f|^2 \; dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty |f_n|^2 \; dt = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^\infty |g_n|^2 \; dt = \int_{-\infty}^\infty |g|^2 \; dt,$$

o que demonstra a relação de Parseval para qualquer $f \in L^2(0,\infty)$ que se anula em $t = 0$ e para t suficientemente grande. Suponha agora que f é qualquer função de classe $L^2(0,\infty)$, e defina

$$f_a(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se} \quad 0 \le x \le a, \\ 0, & \text{se} \quad a \le t. \end{cases}$$

e ainda

$$g_a(\lambda) = \int_0^\infty f_a(t)\psi(t,\lambda)\ dt = \int_0^a f(t)\psi(t,\lambda)\ dt.$$

Pela definição acima e pelo item (a), temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_a(\lambda) - g_d(\lambda)|^2\ d\rho(\lambda) = \int_a^d |f(t)|^2\ dt \quad (a < d).$$

Como o conjunto $\{g_a\}$ converge (quando $a \to \infty$) em $L^2(\rho)$ para a função $g \in L^2(\rho)$, ao fazermos $a \to \infty$ em

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_a(\lambda)|^2\ d\rho(\lambda) = \int_0^a |f(t)|^2\ dt,$$

segue-se a equação de Parseval (3.24) para $f \in L^2(0,\infty)$.

(c) Queremos provar que $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\psi(t,\lambda)\ dt$ converge em $L^2(0,\infty)$. Para tanto, usemos que $\Delta = (\mu,\lambda]$ e

$$f_\Delta(t) = \int_\Delta g(\lambda)\psi(t,\lambda)\ d\rho(\lambda), \tag{3.37}$$

onde g é a função que aparece em (3.25). A relação (3.24) implica que, se $f_1, f_2 \in L^2(0,\infty)$ e g_1, g_2 são as tranformações correspondentes, então

$$\int_0^\infty f_1\overline{f}_2\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} g_1\overline{g}_2\ d\rho(\lambda). \tag{3.38}$$

Seja $P \in L^2(0,\infty)$ tal que P se anula em $t > a > 0$. De (3.37), segue-se que

$$\int_0^a f_\Delta(t)\overline{P}(t)\ dt = \int_0^a \left(\int_\Delta g(\lambda)\psi(t,\lambda)d\rho(\lambda)\right)\overline{P}(t)\ dt =$$
$$\int_\Delta g(\lambda)\left(\int_0^a \overline{P}(t)\psi(t,\lambda)\ dt\right) d\rho(\lambda) = \int_\Delta g(\lambda)\overline{Q}(\lambda)d\rho(\lambda),$$

onde $\overline{Q}(\lambda) = \int_0^a \overline{P}(t)\psi(t,\lambda)\ dt$. Em (3.38), para $f_1 = f, f_2 = P$, temos

$$\int_0^\infty f\overline{P}\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\overline{Q}(\lambda)\ d\rho(\lambda).$$

Seja $\Delta^c = (-\infty,\infty)\backslash\Delta$; assim,

$$\int_0^\infty f\overline{P}\ dt - \int_0^a f_\Delta\overline{P}\ dt = \int_0^\infty (f - f_\Delta)\overline{P}\ dt = \int_{\Delta^c} g(\lambda)\overline{Q}(\lambda)d\rho(\lambda),$$

e se usando a desigualdade de Schwarz, obtemos

$$\left| \int_0^\infty (f - f_\Delta)\overline{P}\ dt \right| \leq \int_{\Delta^c} |g(\lambda)|^2\ d\rho(\lambda) \int_{-\infty}^\infty |Q(\lambda)|^2\ d\rho(\lambda) =$$

$$\int_{\Delta^c} |g(\lambda)|^2\ d\rho(\lambda) \int_0^\infty |P|^2\ dt.$$

Aplicando-se a desigualdade acima a função P definida por

$$P(t) = \begin{cases} f(t) - f_\Delta(t), & \text{se} \quad 0 \leq t \leq a \\ 0, & \text{se} \quad a < t, \end{cases}$$

obtemos

$$\int_0^a |f - f_a|^2\ dt \leq \int_{\Delta^c} |g(\lambda)|^2\ d\rho(\lambda). \tag{3.39}$$

Observemos que o membro direito de (3.39) não depende de a, e podemos fazer $a \to \infty$. Se $\Delta \to (-\infty, \infty)$ então $\Delta^c \to 0$, e se usando a definição de f_Δ, chegamos ao resultado desejado.

(d) De (3.29), segue-se que, para qualquer l fixado com $Im(l) > 0$, existe uma constante k tal que, para $b > 1$ e todo $\mu > 0$

$$\int_{-\mu}^{\mu} \frac{d\rho_b(\lambda)}{|\lambda - l|^2} \leq k. \tag{3.40}$$

Fazendo-se $b \to \infty$ em (3.30), segue-se que $\rho_b \to \rho$. Uma vez que a desigualdade anterior é válida para todo μ, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{|\lambda - l|^2} < \infty. \tag{3.41}$$

Se $Im(l) \neq 0$, $Im(l_0) \neq 0$, por (3.29), temos que

$$\frac{Im(m_b(l))}{Im(l)} - \frac{Im(m_b(l_0))}{Im(l_0)} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{|\lambda - l|^2} - \frac{1}{|\lambda - l_0|^2} \right) d\rho_b(\lambda).$$

Segue-se que, se $b \to \infty$, por (3.41) obtemos

$$\frac{Im(m_\infty(l))}{Im(l)} - \frac{Im(m_\infty(l_0))}{Im(l_0)} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{|\lambda - l|^2} - \frac{1}{|\lambda - l_0|^2} \right) d\rho(\lambda).$$

Logo,

$$\frac{Im(m_\infty(l))}{Im(l)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d_\rho(\lambda)}{|\lambda - l|^2} + c \tag{3.42}$$

onde c é uma constante que independe de l, ainda com $Im(l) > 0$ (ou $Im(l) < 0$).

Pelo Teorema 3.2.5, temos que $Im_\infty(l)/Im(l) > 0$. Por (3.42), usando-se que $Re(l) = 0$, $Im(l) \to \infty$, segue-se que $0 \leq c$. Ainda, de (3.42), temos

$$Im(m_\infty(l) - m_\infty(l_0)) = Im\bigg(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda - l} - \frac{1}{\lambda - l_0}\right)d\rho(\lambda)\bigg) + c\, Im(l - l_0) \quad (3.43)$$

Assim, m_∞ é analítica em l para $Im(l) > 0$ (ou $Im(l) < 0$), e $Im(m_\infty)$ determina $Re(m_\infty)$ como uma constante aditiva. A parte imaginária da função analítica de l (para l_0 fixado, com $Im(l) \neq 0$), definido pelo membro direito de (3.27), é $Im(m_\infty(l) - m_\infty(l_0))$, em virtude de (3.43), o que evidencia a escolha de $m_\infty(l) - m_\infty(l_0)$ e demonstra (3.27).

Sejam λ, μ pontos de continuidade de ρ. Então, em (3.42), temos

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mu}^{\lambda} Im(m_\infty(v + i\epsilon))dv = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mu}^{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon\, d\rho(\sigma)}{(\sigma - v)^2 + \epsilon^2} dv = \\
&\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon\, d\rho(\sigma) \int_{\mu}^{\lambda} \frac{dv}{(\sigma - v)^2 + \epsilon^2} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon\, d\rho(\sigma) \left[\frac{1}{\epsilon}\tan^{-1}\left(\frac{\sigma - v}{\epsilon}\right)\right]\Bigg|_{\lambda}^{\mu} = \\
&\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\tan^{-1}\left(\frac{\lambda - \sigma}{\epsilon}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\mu - \sigma}{\epsilon}\right)\right] d\rho(\sigma) = \\
&\pi(\rho(\lambda) - \rho(\mu)),
\end{aligned}$$

o que nos fornece (3.26). Completamos assim, a demonstração desse teorema.
□

Considerações Finais

Como o Hamiltoniano é um operador diferencial auto-adjunto cujos domínio e ação são determinados pelas propriedades físicas de algum sistema proposto, é evidente a importância de se compreender as propriedades de tal objeto.

Mais que isso, esse trabalho mostra que podemos fazer a conexão entre um certo operador diferencial auto-adjunto de segunda ordem definido em um intervalo finito (caso regular) ou na semirreta positiva (caso singular), digamos o Hamiltoniano, com o chamado Problema de Sturm-Lioville. Verificamos ainda a enorme diferença entre estudar os Problemas de Sturm-Lioville nos casos regular e singular. Cada caso nos fornece propriedades espectrais de suma importância no entendimento dos operadores diferenciais auto-adjuntos.

Como nossa motivação é fazer estudos em Matemática com aplicação em Mecânica Quântica, esperamos que esse trabalho sirva de base para outros estudantes que venham a se interessar por tal tema. Foi feita a tentativa de facilitar a leitura do texto e o entendimento das demonstrações, de forma que o leitor consiga acompanhar a ideia das conexões explicítas no parágrafo acima e a matemática que foi usada para a construção desse texto.

Referências Bibliográficas

[1] SAGAN, Hans. *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics*. New York – London: John Wiley Sons Inc., 1963.

[2] CODDINGTON, Earl A.; LEVINSON, Norman. *Theory of Ordinary Differential Equations*. TMH edition, 1972.

[3] SOARES, Marcio G. *Cálculo de uma variável complexa*. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária, 2001.

[4] AHLFORS, Lars V. *Complex Analysis*. Third Edition, McGraw-Hill Inc., 1979.