Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

RESÍDUOS E CLASSES CARACTERÍSTICAS PARA FOLHEAÇÕES DO TIPO LOGARÍTMICAS

Diogo da Silva Machado

Tese apresentada como requisito à obtenção do título de Doutor junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMG.

Orientador: Maurício Corrêa

Belo Horizonte-MG
Janeiro de 2016

Cuida deste dia!
Ele é a vida, a própria essência da vida.
Em seu breve curso
Estão todas as verdades e realidades da tua existência:

A bênção do crescimento,
A glória da ação
O esplendor da realização.

Pois o dia de ontem não é senão um sonho.
E o amanhã somente uma visão
Mas o dia de hoje bem vivido
Transforma os dias de ontem
Num sonho de ventura.
E os dias de amanhã numa visão de esperança.
Cuide bem, pois, do dia de hoje!
Eis a saudação à alvorada!

(Saudação à Alvorada, Kalidasa)

Então Paulo levantou-se na reunião do Areópago e disse: "Atenienses!...
...o Deus que fez o mundo e tudo o que nele há é o Senhor dos céus e da terra...
...ele mesmo dá a todos a vida, o fôlego e as demais coisas.

Deus fez isso para que os homens o buscassem e talvez,
tateando, pusessem encotrá-lo, embora não esteja longe de cada um de nós.
'Pois nele vivemos, nos movemos e existimos',
como disseram alguns dos poetas de vocês:
'Também somos descendência dele'.

No passado Deus não levou em conta essa ignorância,
mas agora ordena que todos, em todo lugar, se arrependam.
Pois estabeleceu um dia em que há de julgar o mundo com justiça,
por meio do homem que designou [Jesus Cristo]".

(Discurso de S. Paulo em Atenas)

Agradecimentos

Sei que as palavras que passo a escrever agora não conseguirão expressar toda a gratidão que sinto nesta hora!

Gostaria de começar agradecendo ao Deus criador, pela dádiva de alcançar este momento em minha vida, quando alcanço a realização deste sonho, acalentado há tempos em meu coração!

Obrigado Senhor! Por sua mão poderosa que em dias tempestivos e difíceis me conduziram pela estrada daqueles que perseveram!
Obrigado Senhor! Por sua presença sábia que nos dias calmos e tranquilos não permitiram que eu cedesse, nem por um instante se quer!
Obrigado Senhor! Pois se hoje estou a entoar a canção daqueles que venceram é porque o Senhor mesmo quis que assim o fosse!

Quero agradecer ao Professor Maurício Corrêa, meu orientador. Pela oportunidade de trabalhar ao seu lado, como seu aluno de doutorado. Por ter acreditado em meu potencial e por ter proposto um problema de tese tão relevante. Por ter estado sempre disponível para discussão dos temas da tese e não ter medido esforços ao me orientar. Quero dizer que sob sua orientação, pude aprender muita matemática, e observando sua maneira de atuar, como docente e pesquisador, aprendi valiosíssimas lições que levarei para vida toda. Obrigado Maurício!

Gostaria de agradecer também ao Professor Marcio G. Soares. Pelo apoio sempre demonstrado. Em especial, pelo auxílio quando cheguei na UFMG para cursar o doutorado. Também agradeço pelas excelentes sugestões durante a pesquisa e elaboração da tese.

Agradeço aos demais membros da banca Marcos B. Jardim e José Omegar C. Andrade. Em especial à Gilcione N. Costa, cujas sugestões permitiram simplificar consideravelmente as contas ao longo do texto da tese.

Agradeço também aos professores Israel Vainsencher e Arturo Ulises Fernandez, pela ajuda concedida quando me mudei para a cidade de Belo Horizonte. Igualmente ao amigo Renato de Souza Bastos.

Também agradeço aos colegas da pós-graduação pela amizade. Fernando, Allan, Miguel, Gilberto e Aislan. Também Andréa e Kelly por exercerem um excelente trabalho na secretaria da Pós-graduação.

Finalmente, gostaria de agradecer aos lá de casa! Em primeiro lugar, ao meu amor, Edinéia Machado que desde o início de minha carreira sempre esteve ao meu lado. Sempre acreditou comigo nos meus sonhos. Pelos sábios conselhos. Pelo amor e carinho que sempre me deu. Por ser a futura mamãe de Amanda! Te amo! Obrigado por tudo! Agradeço aos meus pais, Juca e Lucila. Em especial as orações de minha mãe. Ao meu irmão Alex. Lembro também com muitas saudades e boas recordações de Celitinha que sempre cuidou bem de mim. Agradeço muitíssimo a Tio Jefinho, por um dia ter me apresentado a matemática. Agradeço ao meu amigo e irmão Fernando de Souza Bastos pela amizade e companheirismo. À tia Solange pelas orações. Também aos demais amigos e parentes de Marataízes-ES que estavam na torcida por mim! Obrigado!

Resumo

Na primeira parte desta tese consideramos o problema de fornecer versões do Teorema de índices de Baum-Bott para variedades complexas não-compactas do tipo $\tilde{X} = X \setminus D$, onde X é uma variedade complexa compacta e D é um divisor em X. Mostramos tais versões nos casos em que D tem singularidades do tipo cruzamentos normais ou quando D tem singularidades isoladas. Isso nos permite determinar quando uma hipersuperfície lisa, invariante por uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão um em $\mathbb{P}^n$, contém ou não todas as singularidades de $\mathcal{F}$. Além disso, podemos reobter a cota de Soares para o problema de Poincaré neste contexto. Na segunda parte, definimos o índice GSV para sistemas de Pfaff cuja variedade invariante tem codimensão igual ao posto do sistema. Enfim, mostramos que a não-negatividade de tal índice nos dá a obstrução para a solução do problema de Poincaré para sistemas de Pfaff.

Abstract

In the first part of this thesis we consider the problem of finding versions of Baum-Bott index theorem for non-compact complex manifolds of type $\tilde{X} = X \setminus D$, where X is a compact complex manifold and D is a divisor on X. We show such versions in the case where D has singularities normal crossing type or when D has isolated singularities. This allows us to determine when a smooth hypersurface, invariant under a one-dimensional foliation $\mathcal{F}$ in $\mathbb{P}^n$, contains or not all the singularities of $\mathcal{F}$. Moreover, we can recover Soares quota for the Poincaré problem in this context. In the second part, we define the GSV index for Pfaff systems whose invariant variety has codimension equal to its rank. Finally, we show that the non-negativity of this index gives us the obstruction to the Poincaré problem solution for Pfaff systems.

Sumário

Introdução

P. Baum e R. Bott [6] realizaram um trabalho pioneiro para a teoria de resíduos de singularidades de folheações holomorfas em variedades complexas. Mais precisamente provaram:

Teorema. *Se $\mathcal{F}$ é uma folheação holomorfa de dimensão um, com singularidades isoladas $\{x_1, \ldots, x_N\}$ sobre uma variedade complexa X, compacta, então*

$$\int_X c_n(T_X - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{i=1}^{N} \mu_{x_i}(\mathcal{F}), \qquad \textit{(fórmula Baum-Bott)}$$

onde $\mu_{x_i}(\mathcal{F})$ denota o número de Milnor de $\mathcal{F}$ em x_i e do lado esquerdo da igualdade aparece o número Top de Chern do fibrado virtual $T_X - T_{\mathcal{F}}$, sendo $T_{\mathcal{F}}$ o fibrado tangente de $\mathcal{F}$.

Neste contexto, surge naturalmente a seguinte pergunta:

"*Qual seria uma versão da fórmula Baum-Bott para o caso em que X é uma variedade complexa não-compacta?* "

Considerando variedades complexas não-compactas no sentido de Iitaka [28], isto é, variedades complexas que podem ser compactificadas com a adição de um divisor, obtivemos algumas respostas satisfatórias a esta pergunta. Este foi um dos nossos objetivos ao elaborarmos este trabalho.

Por outro lado, X. Gómez-Mont, J. Seade e A. Verjovsky introduziram em [23] o índice GSV de campos de vetores definidos sobre hipersuperfícies com singularidades isoladas. Este conceito generaliza o índice de Poincaré-Hopf (clássico), o qual é definido para campos de vetores em ambientes regulares. Uma questão natural é:

"*Como estender o conceito de índice GSV para campos de vetores definidos em contextos mais gerais?*"

Neste sentido, muitos autores obtiveram êxito em dar uma resposta satisfatória a esta pergunta. Por exemplo, J. Seade e T. Suwa em [38], definiram o índice GSV para campos de vetores em subvariedades analíticas do tipo interseção completa local, com singularidades isoladas. Posteriormente J.-P. Brasselet, J. Seade e T. Suwa em [7], estenderam a noção de índice GSV para campos de vetores definidos em certos tipos de subvariedades analíticas, com singularidades não-isoladas.

Baseado na abordagem feita por M. Brunella em [10], com respeito ao índice GSV de folheações holomorfas em superfícies complexas, obtivemos uma generalização do conceito de índice GSV para sistemas de Pfaff, tangentes à subvariedades analíticas do tipo interseção completa local.

As duas questões apresentadas acima, resumem bem os problemas tratados nesta tese. Em linhas gerais, a forma pela qual nós os tratamos será discorrida a seguir, neste texto introdutório.

Sejam X uma variedade complexa de dimensão n e D uma hipersuperfície analítica de X. A noção de feixe de 1-formas logarítmicas $\Omega^1_X(logD)$, bem como a de seu dual, o feixe de campos de vetores logarítmicos $T_X(-logD)$, já aparecem nos trabalhos de P. Deligne [19] e M. Katz [29], no caso em que D tem singularidades do tipo cruzamentos normais. K. Saito [37] desenvolveu uma teoria geral destes feixes para o caso em que D é uma hipersuperfície analítica singular e, possivelmente, não tendo singularidades do tipo cruzamentos normais. Neste seu trabalho, foram apresentadas algumas definições alternativas, bem como diversas propriedades destes feixes. É sabido que $\Omega^1_X(logD)$ é um feixe localmente livre se D é uma hipersuperfície analítica com singularidades do tipo cruzamentos normais.

Uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão um sobre X é dita logarítmica ao longo de D, quando D é invariante por $\mathcal{F}$. Em outras palavras: se $v \in T_X|_U$ define $\mathcal{F}$ no aberto U, então para todo ponto regular $x \in D_{reg} \cap U$, o vetor $v(x)$ é tangente à D.

Supondo agora que X é compacta e considerando a variedade complexa $\tilde{X}$, não-compacta, definida por $\tilde{X} = X \setminus D$. Obtivemos o seguinte resultado que generaliza a fórmula Baum-Bott.

Teorema. *Sejam $\tilde{X}, X$ e D como descritas acima e seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de dimensão um em X, com singularidades isoladas e logarítmica ao longo de D. Suponha que D seja lisa e que $\forall p \in Sing(\mathcal{F}) \cap D$, $Ind_{log\,D,p}(\mathcal{F}) = 0$, então*

$$\int_X c_n(T_X(-logD) - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap \tilde{X}} \mu_p(\mathcal{F}), \tag{1}$$

onde $Ind_{log\,D,p}(\mathcal{F})$ é o índice logarítmico de $\mathcal{F}$ em p e $Sing(\mathcal{F})$ é o conjunto singular de $\mathcal{F}$.

Neste teorema, supomos que a hipersuperfície analítica D, que compactifica a variedade complexa $\tilde{X}$, é lisa. Posteriormente, generalizamos este resultado para o caso em que D tenha singularidades do tipo cruzamentos normais. De fato, neste caso ao restringirmos a folheação $\mathcal{F}$ a uma das componentes irredutíveis de D, observamos que a restrição de cada uma das demais componentes irredutíveis é lisa e é invariante pela restrição de $\mathcal{F}$. Com isso, pudemos aplicar convenientemente o teorema acima e através de um argumento indutivo, sobre o número de componentes irredutíveis de D, obtivemos a generalização desejada.

Por outro lado, considerando esse teorema no contexto de folheações logarítmicas em $\mathbb{P}^n$, com singularidades não-degeneradas, obtivemos o resultado a seguir. Este fornece uma caracterização interessante de quando as singularidades da folheação ocorrem apenas na hipersuperfície analítica invariante. Conforme podemos ver, esta caracterização é dada em termos do grau da folheação e do grau da hipersuperfície analítica invariante. Além disso, o resultado nos dá uma fórmula que expressa o número de singularidades da folheação que ocorrem no complemento da hipersuperfície analítica invariante.

Teorema. *Em $\mathbb{P}^n$, sejam D uma hipersuperfície analítica lisa e $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de dimensão um, com singularidades isoladas e logarítmica ao longo de D. Suponha que as singularidades de $\mathcal{F}$ sejam não-degeneradas. Denotando por $\#Sing_{\mathbb{P}^n\backslash D}(\mathcal{F})$ o número de singularidades de $\mathcal{F}$ no complemento $\mathbb{P}^n\backslash D$, temos:*

(1) *Se n é ímpar, então:*

(a) $\#Sing_{\mathbb{P}^n\backslash D}(\mathcal{F}) > 0 \iff \deg(D) < \deg(\mathcal{F}) + 1$;

(b) $\#Sing_{\mathbb{P}^n\backslash D}(\mathcal{F}) = 0 \iff \deg(D) = \deg(\mathcal{F}) + 1$.

(2) *Se n é par, então:*

(a) $$\#Sing_{\mathbb{P}^n\backslash D}(\mathcal{F}) > 0 \iff \begin{cases} \deg(D) \neq \deg(\mathcal{F}) + 1 \\ ou \\ \deg(D) = \deg(\mathcal{F}) + 1, \ \ com \ \deg(\mathcal{F}) \neq 0 \end{cases}$$

(b) $\#Sing_{\mathbb{P}^n\backslash D}(\mathcal{F}) = 0 \iff \deg(D) = 1 \ e \ \deg(\mathcal{F}) = 0$.

(3) *Se $deg(D) = k$ e $deg(\mathcal{F}) = d$, então*

$$\#Sing_{\mathbb{P}^n\backslash D}(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (k-1)^i d^{n-i}.$$

Ainda em $\mathbb{P}^n$, sabemos que diversos autores, tais como, D. Cerveau & A. Lins Neto [15] e M. Carnicer [14], estudaram o problema de caracterizar hipersuperfícies que sejam invariantes por folheações holomorfas, o conhecido *problema de Poincaré*. Dentre estes, M. G. Soares [41], provou um belo teorema que fornece um limitante superior para o grau de uma hipersuperfície invariante, em termos do grau da folheação. Mostramos, como consequência do Teorema acima, que podemos reobter a cota encontrada por M. G. Soares [41].

Voltando para a questão da generalização do índice GSV de campos de vetores, observamos que em muitos trabalhos o índice GSV aparece com uma outra roupagem. Por exemplo, D. Lehmann, M. G. Soares e T. Suwa [31], introduziram o *índice virtual* que via teoria Chern-Weil pode ser interpretado como o índice GSV. Já X. Gómez-Mont [22] definiu o *índice homológico*, usando Álgebra Homológica, que também coincide com o índice GSV. Este também é o caso de M. Brunella que em [10] também tratou do índice GSV sob outra conotação. Neste, o índice GSV é definido como sendo a ordem de anulamento de uma certa função meromorfa, associada à uma curva invariante por uma folheação holomorfa. Isto foi feito em superfícies complexas, isto é, variedades complexas de dimensão 2.

Usando como modelo esta definição dada por M. Brunella, definimos o índice GSV de sistemas de Pfaff, tangentes à subvariedades analíticas do tipo interseção completa local. Para tal, usamos a decomposição dada por Aleksandrov [2] de p-formas logarítmicas.

Mostramos que a não-negatividade do índice GSV nos dá a obstrução para a solução do problema de Poincaré para sistemas de Pfaff.

Além disso, usando o tal conceito de índice GSV, mostramos que é possível recuperar um resultado devido a E. Esteves & J. Cruz [21] que fornece uma cota para o grau associado à uma subvariedade analítica, invariante por um sistema de Pfaff.

Agora, voltando a falar da nossa primeira questão, isto é, do problema de generalizar a fórmula Baum-Bott para variedades não-compactas, nós também consideramos o caso em que a hipersuperfície analítica D, que compactifica a variedade complexa $\tilde{X}$ e que é invariante pela folheação $\mathcal{F}$, tenha singularidades isoladas. Neste caso, o conceito de índice GSV desempenha um papel fundamental.

Com efeito, sabemos que uma subvariedade analítica V de X, de codimensão k, é do tipo interseção completa local (ou simplesmente ICL) quando o seu feixe de ideais $\mathcal{I}_V$, definido pelas funções holomorfas que se anulam em V, é localmente gerado por uma sequência regular de (exatamente) k germes. As relações de compatibilidade entre as sequências geradoras, definem sobre V os cociclos de transição de um fibrado vetorial $\hat{N}_V$, de posto k. Além disso, o fibrado virtual $T_X|_V - \hat{N}_V$, chamado de fibrado tangente virtual à V, coincide com T_V quando V é regular.

Dada uma subvariedade analítica V de X, de codimensão k, seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de dimensão um em X, com singularidades isoladas e logarítmica ao longo de V (isto é, V é invariante por $\mathcal{F}$). Se V é do tipo ICL e com singularidades isoladas, então para cada $p \in V$, o índice GSV de $\mathcal{F}$ em relação à V pode ser definido (ver T. Suwa [44]). Este é denotado por $GSV(\mathcal{F}, V, p)$. Além disso, no caso em que V é definida por uma seção global de um fibrado N (de posto k) sobre X, vale a seguinte expressão para o índice GSV (ver T. Suwa [44], Teorema 7.16)

$$\sum_{p \in V} GSV(\mathcal{F}, V, p) = \int_V c_{n-k}(T_X - N - T_{\mathcal{F}})|_V. \tag{2}$$

Este é o caso de uma hipersuperfície analítica D, a qual pode ser vista como o conjunto de zeros de uma seção do seu fibrado $[D]$. Neste caso, a relação (2) é dada por

$$\sum_{p \in D} GSV(\mathcal{F}, D, p) = \int_D c_{n-1}(T_X - [D] - T_{\mathcal{F}})|_D.$$

Por outro lado, para a prova da fórmula (1), onde assumimos que D é uma hipersuperfície analítica lisa, adiantamos que uma passagem fundamental foi a obtenção de uma expressão geral para a i-ésima classe de Chern $c_i(\Omega^1_X(logD))$. Isso foi possível, lançando mão da conhecida sequência exata de feixes sobre X

$$0 \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow \Omega^1_X(logD) \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0, \tag{3}$$

válida para este caso em que D é lisa.

Entretanto, sabemos que (ver I. Dolgachev [20]), se o conjunto singular da hipersuperfície analítica D (reduzida) tem codimensão ≥ 3, então a sequência (3) também é exata. Daí então, observamos que este é o caso quando a variedade complexa X tem dimensão ≥ 3 e a hipersuperfície analítica D tem apenas singularidades isoladas. Com isso, a partir da sequência exata (3), deduzimos uma expressão para as classes de Chern de $\Omega^1_X(logD)$ e obtivemos a seguinte generalização da fórmula Baum-Bott:

Teorema. *Sejam X uma variedade complexa, compacta, de dimensão n, D uma hipersuperfície analítica em X, reduzida, com singularidades isoladas e $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de dimensão um em X, com singularidades isoladas e logarítmica ao longo de D. Suponha que $\forall p \in Sing(\mathcal{F}) \cap D_{reg}, Ind_{log\,D,p}(\mathcal{F}) = 0$. Se $dim(X) \geq 3$, então*

$$\int_X c_n(T_X(-logD) - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap (X \setminus D_{reg})} \mu_p(\mathcal{F}) - \sum_{p \in Sing(D)} GSV(\mathcal{F}, D, p).$$

O Teorema Gauss-Bonnet (clássico), válido para variedades complexas M, compactas, estabelece uma fórmula que relaciona o número Top de Chern de M com sua característica de Euler (ver P. Griffths & J. Harris [24]),

$$\int_M c_n(T_M) \ = \ \chi(M). \qquad \textit{(fórmula clássica Gauss-Bonnet)}$$

No mesmo espírito da pergunta motivadora desta tese, surge naturalmente a seguinte questão:

“ Qual seria a versão do Teorema de Gauss-Bonnet para variedades não-compactas ?”

Para variedades não-compactas no sentido de Iitaka [28], existe na literatura a seguinte versão do Teorema de Gauss-Bonnet, para o caso em que D é uma hipersuperfície analítica com singularidades do tipo cruzamentos normais.

Teorema. *Seja $\tilde{X}$ uma variedade complexa (não-compacta) do tipo $\tilde{X} = X \setminus D$, onde X é uma variedade complexa, compacta, de dimensão n e D uma hipersuperfície analítica em X com singularidades do tipo cruzamentos normais. Então,*

$$\int_X c_n(T_X(-logD)) \ = \ \chi(\tilde{X}), \qquad \left(\begin{array}{c} \textit{fórmula Gauss-Bonett,} \\ \textit{variedades não-compactas} \end{array} \right)$$

onde a característica de Euler $\chi(\tilde{X})$ *é dada por*

$$\chi(\tilde{X}) := \sum_{i=1}^{n} dim_{\mathbb{C}} H_c^i(\tilde{X}, \mathbb{C}).$$

Este resultado foi proposto inicialmente por Iitaka e foi provado por Y. Norimatsu [34]. Posteriormente, R. Silvotti [40] apresentou uma outra demonstração deste teorema. P. Aluffi [3] também recuperou este resultado ao estudar as classes Chern-Schwartz-MacPherson.

Nesta tese, obtivemos a seguinte generalização do Teorema de Gauss-Bonnet. Consideramos uma variedade não-compacta do tipo $\tilde{X} = X \setminus D$, onde D é uma hipersuperfície analítica com singularidades isoladas.

Teorema. (Gauss-Bonnet Generalizado) *Seja* $\tilde{X}$ *uma variedade complexa do tipo* $\tilde{X} = X \setminus D$, *onde* X *é uma variedade complexa, compacta, de dimensão* n *e* D *uma hipersuperfície analítica em* X, *reduzida, com singularidades isoladas. Se* $n \geq 3$, *então*

$$\int_X c_n(T_X(-log D)) = \chi(\tilde{X}) + (-1)^{n-1} \sum_{p \in Sing(D)} \mu_p(D),$$

onde $\mu_p(D)$ *denota o número de Milnor de* D *em* p.

Capítulo 1

Preliminares

Nestas preliminares, vamos discorrer sobre alguns tópicos básicos que serão usados ao longo da tese. Apresentaremos definições, propriedades e também alguns resultados importantes, que nos serão úteis, e aos quais julgamos ser necessário citar preliminarmente. Também fixaremos algumas notações. As referências básicas para esta parte são: [2], [27], [32], [37], [8], [42] e [44].

1.1 Propriedades de Classes Características

Seja X uma variedade complexa de dimensão n e considere E e L fibrados vetoriais holomorfos sobre X, de posto r e 1, respectivamente. Usando o símbolo c_i para denotar a i-ésima classe de Chern, listamos a seguir algumas de suas propriedades:

$$c_i(E \otimes L) = \sum_{j=0}^{i} \binom{r-(i-j)}{j} c_{i-j}(E) c_1(L)^j, \qquad 1 \leq i \leq n \tag{1.1}$$

$$c_i(E^*) = (-1)^i c_i(E), \qquad 1 \leq i \leq n. \tag{1.2}$$

$$c_i(E - L) = \sum_{j=0}^{i} c_{i-j}(E) c_1(L^*)^j, \qquad 1 \leq i \leq r. \tag{1.3}$$

Vamos denotar por $\mathbb{P}^n$ o espaço projetivo complexo de dimensão n. O fibrado universal será denotado por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ e para cada $l \in \mathbb{N}$ vamos colocar

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^l = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\bigoplus^l}, \qquad \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\bigotimes^l}.$$

Das propriedades (1.1) e (1.2) da classe de Chern, temos que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$c_i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^l) = \binom{l}{i} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))^i, \qquad c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)) = l\, c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)). \tag{1.4}$$

Além disso, sabemos que (ver D. Huybrechts [27])

$$\int_{\mathbb{P}^n} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))^n = 1. \tag{1.5}$$

Agora, dado L um fibrado vetorial holomorfo de posto 1 sobre $\mathbb{P}^n$, o grau de L, denotado por $deg(L)$, é definido como o inteiro $r \in \mathbb{Z}$ para o qual $L \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r) \in Pic(\mathbb{P}^n)$.

1.2 Folheações Holomorfas Unidimensionais

Definição 1 *Seja X uma variedade complexa de dimensão n. Uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$ de dimensão um em X é uma seção holomorfa global do fibrado $T_X \otimes \mathcal{K}_{\mathcal{F}}$, onde $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$ é um fibrado vetorial holomorfo de posto 1 sobre X.*

A folheação $\mathcal{F}$ fica determinada por uma família de campos de vetores holomorfos

$$\{v_\alpha \in T_X|_{U_\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda},$$

satisfazendo

$$v_\alpha = \phi_{\alpha\beta}\, v_\beta \qquad \text{em} \qquad U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset,$$

onde cada $\phi_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta)^*$ é um cociclos de transição do fibrado $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$ e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ é uma cobertura aberta de X.

O fibrado $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$ é chamado *fibrado canônico* da folheação $\mathcal{F}$. O seu dual $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}^*$ é o *fibrado tangente* de $\mathcal{F}$ e será denotado por $T_{\mathcal{F}}$. O conjunto singular de $\mathcal{F}$, denotado por $Sing(\mathcal{F})$, é definido como sendo o conjunto de pontos $p \in X$ tais que $v_\alpha(p) = 0$, se $p \in U_\alpha$.

Seja D uma hipersuperfície analítica de X. O conjunto de pontos singulares de D será denotado por $Sing(D)$, ao passo que o seu complemento $D \setminus Sing(D)$, será denotado por D_{reg}. Usaremos a notação $[D] \in Pic(X)$ para o fibrado vetorial holomorfo de posto 1 sobre X definido por D.

Fixemos uma família de expressões locais de D, isto é, uma família de funções holomorfas

$$\{f_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda},$$

tal que

$$D \cap U_\alpha = \{x \in U_\alpha : f_\alpha(x) = 0\},$$

onde $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ é uma cobertura aberta de X. A folheação $\mathcal{F}$ é dita *logarítmica ao longo de D* se as seguintes condições equivalentes são satisfeitas:

(i) Para todo $x \in D_{reg}$, o vetor $v_\alpha(x)$ é tangente à D, $x \in U_\alpha$.

(ii) Para todo $x \in D$, a derivação do germe $(f_\alpha)_p$ por v_α pertence ao ideal gerado $\langle (f_\alpha)_x \rangle \mathcal{O}_{U_\alpha,x}$.

De maneira mais geral, dada uma subvariedade analítica V de X, dizemos que $\mathcal{F}$ é *logarítmica ao longo de* V quando os campos de vetores que definem localmente $\mathcal{F}$ são tangentes a parte regular de V, denotada por V_{reg}. Em outras palavras: para todo $\alpha \in \Lambda$, se $x \in V_{reg} \cap U_\alpha$, então o vetor $v_\alpha(x)$ é tangente à V_{reg}.

Neste caso, também dizemos que a folheação $\mathcal{F}$ é *tangente à subvariedade analítica* V ou então que a subvariedade analítica V é *invariante pela folheação* $\mathcal{F}$.

Quando $\mathcal{F}$ é logarítmica ao longo de V, $\mathcal{F}$ induz uma folheação holomorfa de posto 1 sobre V_{reg}. Esta folheação será denotada por $\mathcal{F}|_V$ e a chamaremos de *restrição de* $\mathcal{F}$ *à* V. Neste caso, $\mathcal{F}|_V$ é definida localmente pelas restrições à V_{reg} dos campos de vetores que definem localmente $\mathcal{F}$. Obviamente, o fibrado canônico da folheação $\mathcal{F}|_V$, $\mathcal{K}_{\mathcal{F}|_V}$, coincide com a restrição de $\mathcal{K}_\mathcal{F}$ à V_{reg}.

Folheações Holomorfas Unidimensionais em $\mathbb{P}^n$

Definição 2 *Um folheação holomorfa $\mathcal{F}$ de dimensão um e grau d em $\mathbb{P}^n$ é uma seção holomorfa global do fibrado $T_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-1)$.*

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de dimensão um e grau d em $\mathbb{P}^n$. Consideremos a família de campos de vetores holomorfos que define $\mathcal{F}$,

$$\{v_\alpha \in T_{\mathbb{P}^n}|_{U_\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}.$$

Se $\mathcal{F}$ possui apenas singularidades isoladas, então a soma dos números de Milnor de $\mathcal{F}$ corresponde ao número de singularidades de $\mathcal{F}$, contadas com multiplicidade, isto é,

$$\#Sing(\mathcal{F}) = \sum_{p\in Sing(\mathcal{F})} \mu_p(\mathcal{F}).$$

Dada D uma hipersuperfície analítica lisa de $\mathbb{P}^n$, se a folheação $\mathcal{F}$ é logarítmica ao longo de D, então o número de singularidades de $\mathcal{F}$ em D e o número de singularidades de $\mathcal{F}$ em $\mathbb{P}^n \setminus D$, contadas com multiplicidade, serão denotados, respectivamente, por

$$\#Sing_D(\mathcal{F}) \quad \text{e} \quad \#Sing_{\mathbb{P}^n\setminus D}(\mathcal{F}).$$

O grau de uma hipersuperfície D em $\mathbb{P}^n$ também é dada pelo inteiro k tal que $\mathcal{O}([D]) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k) \in Pic(\mathbb{P}^n)$. Quando necessário for, o grau de D e o grau de $\mathcal{F}$ serão denotados, respectivamente, por

$$deg(D) \quad \text{e} \quad deg(\mathcal{F}).$$

1.3 Interseção Completa Local

Seja X uma variedade complexa de dimensão n e considere V uma subvariedade analítica de X de codimensão k. V é dita do tipo *interseção completa local* (ou simplesmente: ICL) se existem uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de X tal que para cada $\alpha\in\Lambda$ existem k funções holomorfas $f_{\alpha,1},\ldots,f_{\alpha,k}\in\mathcal{O}(U_\alpha)$ tais que

$$V\cap U_\alpha=\{z\in U_\alpha : f_{\alpha,1}(z)=\ldots=f_{\alpha,k}(z)=0\}.$$

Para uma variedade analítica V do tipo ICL, existe um fibrado vetorial holomorfo $\hat{N}_V$ sobre V de posto k tal que

$$(\hat{N}_V)|_{V_{reg}}=N_{V_{reg}/X},$$

onde $N_{V_{reg}/X}=\dfrac{T_X|_{V_{reg}}}{T_{V_{reg}}}$ é o fibrado normal sobre V_{reg}. Quando não houver possibilidade de confusão, também chamaremos $\hat{N}_V$ de *fibrado normal de* V.

O fibrado virtual definido por $T_X|_V-\hat{N}_V$ é dito *fibrado virtual tangente de* V. Em particular, se V é regular, então $T_X|_V-\hat{N}_V$ coincide com T_V.

Agora, seja N um fibrado vetorial holomorfo sobre X de posto k e seja $\mathfrak{s}$ uma seção holomorfa de N. O conjunto de zeros de $\mathfrak{s}$, $Z(\mathfrak{s})$, é uma subvariedade analítica de X e será do tipo ICL quando tiver codimensão (pura) k e quando o feixe de ideais de funções holomorfas que se anulam sobre $Z(\mathfrak{s})$ for localmente gerado pelas componentes de $\mathfrak{s}$ (com respeito a algum frame local de N). Neste caso, $\hat{N}_{Z(\mathfrak{s})}=N|_{Z(\mathfrak{s})}$. Diremos que variedade analítica $V=Z(\mathfrak{s})$ é do tipo *interseção completa local definida por uma seção de um fibrado vetorial holomorfo.*

Exemplos de subvariedades analíticas deste tipo são as hipersuperfícies analíticas. Com efeito, dada uma hipersuperfície analítica D de X, não é difícil verificar que existe uma seção holomorfa do fibrado $N=[D]$ tal que o conjunto de zeros coincide com D. Neste caso, $\hat{N}_D=[D]|_D$.

Teorema 1 *(T. Suwa [44], Teorema 3.9) Sejam X uma variedade complexa de dimensão n e V uma subvariedade analítica de X, compacta, de codimensão k e com singularidades isoladas. Se V é do tipo interseção completa local definida por uma seção de um fibrado vetorial holomorfo N, então*

$$\int_V c_{n-k}(T_X-N)|_V \;=\; \chi(V) \;+\; (-1)^n\sum_{x\in Sing(V)}\mu_x(V),$$

onde $\mu_x(V)$ denota o número de Milnor de V em x.

Seja $V\subset\mathbb{P}^n$ uma interseção completa global de k hipersuperfícies analíticas, de graus $d_1,\ldots,d_k$. Neste caso, temos

$$\hat{N}_V = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_k)|_V$$

e

$$det(\hat{N}_V) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_1 + \cdots + d_k)|_V. \tag{1.6}$$

1.4 Formas Logarítmicas

O feixe de q-formas logarítmicas ao longo de uma hipersuperfície analítica D foi originalmente introduzido por P. Deligne [19], para o caso em que D tenha singularidades do tipo cruzamentos normais. Posteriormente, K. Saito [37] desenvolveu uma teoria geral destes feixes para o caso em que D é singular e, possivelmente, não tendo singularidades do tipo cruzamentos normais. Neste trabalho fundamental, K. Saito apresentou algumas definições alternativas, bem como diversas propriedades destes feixes.

Sejam X uma variedade complexa de dimensão n, ω uma q-forma meromorfa em X e D uma hipersuperfície analítica de X. Dado $x \in X$, seja $h_x = 0$ uma equação (reduzida) definindo D, localmente em x. Dizemos que ω é *logarítmica ao longo de D em x*, se $h_x\,\omega$ e $h_x\,d\omega$ são formas holomorfas. Denotando por $\Omega^q_{X,x}(logD)$ o conjunto de germes de q-formas logarítmicas ao longo de D em x, definimos *o feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos das q-formas logarítmicas ao longo de D* como sendo

$$\Omega^q_X(logD) := \bigcup_{x\in X} \Omega^q_{X,x}(logD).$$

Quando D tem singularidades do tipo cruzamentos normais, então o feixe de 1-formas logarítmicas ao longo de D, $\Omega^1_X(logD)$, é localmente livre. Além disso, neste caso, existe a seguinte sequência exata de feixes sobre X

$$0 \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow \Omega^1_X(logD) \xrightarrow{Res} \bigoplus_{i=1}^{N} \mathcal{O}_{D_i} \longrightarrow 0, \tag{1.7}$$

onde Res é o mapa de resíduos de Poincaré e D_i, $i \in \{1, \ldots N\}$, são as componentes irredutíveis de D, veja [37].

No caso em que D é uma hipersuperfície analítica reduzida com $Codim(Sing(D)) \geq 3$, existe a seguinte sequência exata de feixes sobre X (ver I. Dolgachev [20], Corolário 2.1)

$$0 \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow \Omega^1_X(logD) \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0. \tag{1.8}$$

Agora, dado $x \in X$, seja $v \in T_{X,x}$ um germe em x de campo de vetores holomorfo em X. Dizemos que v é *logarítmico ao longo de D em x*, se v satisfaz a seguinte condição: a derivação $v(h_x)$ de uma equação local para D em x pertence ao ideal $\langle h_x\rangle \mathcal{O}_{X,x}$. Denotemos por $T_{X,x}(-log\, D)$ o conjunto de germes de campos de vetores logarítmicos ao longo de D em x. O *feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos de campos de vetores logarítmicos ao longo de D* é definido por

$$T_X(-logD) := \bigcup_{x\in X} T_{X,x}(-logD).$$

Em $\mathbb{P}^n$, se D é uma hipersuperfície analítica lisa de grau $deg(D) = k$, então temos a seguinte sequência exata de feixes (ver E. Angeline [4], Teorema 4.3)

$$0 \longrightarrow T_{\mathbb{P}^n}(-logD) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k) \longrightarrow 0. \tag{1.9}$$

Propriedades e resultados sobre estes feixes podem ser encontrados em [37] e [20].

1.5 Índices e Classes Características

Sejam X uma variedade complexa de dimensão n e $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de dimensão um em X, com singularidades isoladas. Vamos considerar V uma subvariedade analítica de X, de codimensão k e do tipo interseção completa local definida por uma seção de um fibrado vetorial N sobre X. Assumindo que $\mathcal{F}$ seja logarítmica ao longo de V e que V tenha singularidades isoladas, vamos denotar por $Sing(\mathcal{F}, V)$ o conjunto $[Sing(\mathcal{F}) \cap V] \cup Sing(V)$. Para cada $x \in Sing(\mathcal{F}, V)$, seja v o campo de vetores holomorfo que define $\mathcal{F}$ numa vizinhança U de x. Seguindo T. Suwa [44], vamos definir o *índice GSV de $\mathcal{F}$ em x, relativo à V*, denotado por $GSV(\mathcal{F}, V, x)$, como sendo o GSV no ponto x do campo v restrito à V, isto é,

$$GSV(\mathcal{F}, V, x) := GSV(v|_{V\cap U}, x).$$

O $GSV(\mathcal{F}, V, x)$ está bem definido (ver T. Suwa [44], Corolário 7.15) e, além disso, vale o seguinte resultado.

Teorema 2 *(T. Suwa [44], Teorema 7.16) Sejam X, $\mathcal{F}$ e V como acima. Suponha que V é compacta e $Sing(\mathcal{F}, V)$ finito. Então*

$$\sum_{x\in Sing(\mathcal{F},V)} GSV(\mathcal{F}, V, x) = \int_V c_{n-k}(T_X - N - T_{\mathcal{F}})|_V.$$

As referências para a definição do índice GSV de um campo de vetores holomorfo são [8] e [44].

1.6 Sistemas de Pfaff

Definição 3 *Um sistema de Pfaff de posto p sobre X é uma seção $\omega \in H^0(X, \Omega^p_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N})$, não-trivial, onde $\mathcal{N}$ é um fibrado holomorfo de posto 1 sobre X.*

Dado um sistema de Pfaff ω sobre X de posto p, não é difícil ver que ω é determinado pelos seguintes dados:

(a) $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ uma cobertura aberta de X;

(b) $\{\omega_\alpha : \omega_\alpha \in \Omega^p_{U_\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ uma família de p-formas holomorfas satisfazendo

$$\omega_{\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta}} = (h_{\alpha\beta})\omega_{\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}} \qquad \text{em} \qquad U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset,$$

onde $h_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta)^*$ são os cociclos que definem o fibrado $\mathcal{N}$. A p-forma ω_α é dita *uma representação local de ω em U_α*.

Definição 4 *Uma subvariedade analítica V de X é dita invariante por um sistema de Pfaff ω se para todo $\alpha \in \Lambda$*

$$i^*\omega_\alpha \equiv 0,$$

onde $i : V_{reg} \hookrightarrow X$ é a inclusão da parte regular de V em X.

O conjunto singular de ω, $Sing(\omega)$, é por definição o conjunto formado pelos pontos de X para os quais ω se anula.

Sejam ω um sistema de Pfaff sobre X como acima e V uma subvariedade analítica de X de codimensão k e do tipo ICL. Suponhamos que para cada $\alpha \in \Lambda$

$$V \cap U_\alpha = \{z \in U_\alpha : f_{\alpha,1}(z) = \ldots = f_{\alpha,k}(z) = 0\},$$

onde $f_{\alpha,1}, \ldots, f_{\alpha,k} \in \mathcal{O}(U_\alpha)$. Se V é invariante por ω, então para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ existem $(p+1)$-formas holomorfas $\theta^\alpha_{i1}, \ldots, \theta^\alpha_{ik} \in \Omega^{p+1}_{U_\alpha}$, tais que

$$\omega_\alpha \wedge df_{\alpha,i} = f_{\alpha,1}\theta^\alpha_{i1} + \ldots + f_{\alpha,k}\theta^\alpha_{ik}. \tag{1.10}$$

1.7 Sistemas de Pfaff em $\mathbb{P}^n$

Em $\mathbb{P}^n$, considere o fibrado em retas $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l) \in Pic(\mathbb{P}^n)$, $l \in \mathbb{Z}$. Vamos convencionar a seguinte notação

$$\Omega^k_{\mathbb{P}^n}(l) := \Omega^k_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l).$$

Seja $\omega \in H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^k_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{N})$ um sistema de Pfaff de posto k, sobre $\mathbb{P}^n$. Como $\mathcal{N}$ é um fibrado em retas, existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathcal{N} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r) \in Pic(\mathbb{P}^n)$. Portanto, ω pode ser visto como uma seção do fibrado $\Omega^k_{\mathbb{P}^n}(r)$.

Fixando um subespaço linear genérico $\mathbb{H}$ de $\mathbb{P}^n$, tal que $\mathbb{H} \simeq \mathbb{P}^k \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, consideremos o pullback $i^*\omega \in H^0(\mathbb{H}, \Omega^k_{\mathbb{P}^k} \otimes \mathcal{N}|_{\mathbb{H}})$. O conjunto de zeros de $i^*\omega$, denotado por $Z(i^*\omega)$, constitui uma hipersuperfície analítica em $\mathbb{H}$, chamada de *conjunto de tangências* de ω em $\mathbb{H}$. O *grau* de ω, $deg(\omega)$, é definido como o grau da hipersuperfície $Z(i^*\omega)$.

Lema 1 *Seja $\omega \in H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^k_{\mathbb{P}^n}(r))$ um sistema de Pfaff de posto k sobre $\mathbb{P}^n$ e tal que $deg(\omega) = d$. Então, vale a seguinte relação*

$$d = -k - 1 + r.$$

Em particular, o fibrado $\mathcal{N}$ é isomorfo à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d+k+1)$ e ω é uma seção de $\Omega^k_{\mathbb{P}^n}(d+k+1)$.

Demonstração: A verificação deste lema é bem simples e bem conhecida. De fato, considerando o pullback $i^*\omega \in H^0(\mathbb{H}, \Omega^k_{\mathbb{P}^k} \otimes \mathcal{N}|_{\mathbb{H}})$ como acima, podemos observar que $i^*\omega$ é no fundo uma seção do fibrado $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(-k-1) \otimes \mathcal{N}|_H$, uma vez que $\Omega^k_{\mathbb{P}^k} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(-k-1)$. Dessa forma,

$$\mathcal{O}(Z(i^*\omega)) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(-k-1) \otimes \mathcal{N}|_{\mathbb{H}},$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} deg(\omega) &= deg(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(-k-1)) + deg(\mathcal{N}|_{\mathbb{H}}) \\ &= -k - 1 + deg(\mathcal{N}|_{\mathbb{H}}). \end{aligned}$$

Mas, como $\mathcal{N} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r)$, segue que $deg(\mathcal{N}|_{\mathbb{H}}) = r$ e, consequentemente,

$$d = -k - 1 + r,$$

como queríamos. □

1.8 Índice GSV em Superfícies

Nesta seção vamos apresentar a definição de índice GSV dado por M. Brunella em [10], além de alguns resultados apresentados neste seu trabalho.

Sejam M uma superfície complexa, isto é, uma variedade complexa de dimensão 2, e $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão 1 sobre M. Neste caso, como $dim(M) = 2$, $\mathcal{F}$ é definida pela seguinte coleção de dados:

(a) $\{U_\alpha\}_{\alpha\in L}$ uma cobertura aberta de M;

(b) $\{\omega_\alpha : \omega_\alpha \in \Omega^1_{U_\alpha}\}_{\alpha\in L}$ uma família de 1-formas holomorfas, integráveis, satisfazendo

$$\omega_{\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta}} = (h_{\alpha\beta})\omega_{\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}},$$

onde $h_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta)^*$ são os cociclos que definem o fibrado normal à folheação $\mathcal{N}_\mathcal{F}$.

Seja $C \subset M$ uma curva analítica compacta, possivelmente singular. A folheação $\mathcal{F}$ é dita *logarítmica ao longo de* C se

$$i^*\omega_\alpha \equiv 0, \qquad \forall\alpha \in \Lambda,$$

onde $i : C_{reg} \hookrightarrow M$ é a inclusão da parte regular de C em M.

No caso em que $\mathcal{F}$ é logarítmica ao longo da curva analítica C, M. Brunella definiu o índice GSV como segue: suponha que numa vizinhança U_α de um ponto $x \in C$ temos

$$C \cap U_\alpha = \{z \in U_\alpha : f(z) = 0\}.$$

Seja também ω_α a 1-forma holomorfa que define $\mathcal{F}$ em U_α. Como C é invariante por $\mathcal{F}$, existem funções holomorfas g e ξ definidas numa vizinhança de x, ambas não identicamente nulas nas componentes irredutíveis de C, tais que

$$g\,\frac{\omega_\alpha}{f} = \xi\,\frac{df}{f} + \eta, \tag{1.11}$$

com η sendo uma apropriada 1-forma holomorfa. Para ver mais detalhes sobre a existência da decomposição (1.11) veja por exemplo K. Saito [37].

K. Saito mostrou em [37] que a função meromorfa $\frac{\xi}{g}|_C$ não depende da escolha de g, ξ e η. Além disso, a menos de uma multiplicação por uma função holomorfa que nunca se anula, $\frac{\xi}{g}|_C$ também não depende da escolha de ω_α e f. Dessa forma, a ordem de anulamento de $\frac{\xi}{g}|_{C_i}$ em x, onde C_i é uma componente irredutível de C em x, só dependem de $\mathcal{F}, C$ e x.

Definição 5 *Sejam M, C, $\mathcal{F}$ e x conforme descritos acima. Definimos*

$$GSV(\mathcal{F}, C, x) = \sum_i Ord_x(\frac{\xi}{g}|_{C_i}),$$

onde $C_i \subset C$ são as componentes irredutíveis de C em x.

Proposição 1 *(M. Brunella [10]) Sejam M, C, $\mathcal{F}$ e x conforme descritos acima. Vale:*

(1) *Se $x \in C_{reg}$, então $GSV(\mathcal{F}, C, x)$ coincide com o índice de Poincaré-Hopf do campo de vetores holomorfo que define $\mathcal{F}$ numa vizinhança de x;*

(2) *Se $x \in C_{reg} \cap (M \setminus Sing(\mathcal{F}))$, então $GSV(\mathcal{F}, C, x) = 0$;*

(3) *Como a curva C é compacta, temos que a soma $\sum_{x \in C} GSV(\mathcal{F}, C, x)$ é finita. Além disso, vale a seguinte igualdade*

$$\sum_{x \in C} GSV(\mathcal{F}, C, x) = \mathcal{N}_{\mathcal{F}}\, C - C\, C\,.$$

Definição 6 *Sejam M, C e $\mathcal{F}$ conforme descritos acima. Definimos o índice GSV de $\mathcal{F}$ em C por*

$$GSV(\mathcal{F}, C) = \sum_{x \in C} GSV(\mathcal{F}, C, x).$$

1.9 Decomposição de Aleksandrov

Nesta seção iremos apresentar a decomposição de Aleksandrov [2] para p-formas meromorfas com pólos simples ao longo de um divisor. Esta decomposição generaliza a decomposição dada em (1.11) e será usada nesta tese na definição do índice GSV que daremos no Capítulo 3.

Sejam X uma variedade complexa de dimensão n e D uma hipersuperfície analítica (reduzida) sobre X. Vamos denotar por $\Omega^q_X(D)$ o $\mathcal{O}_X$-módulo de q-formas meromorfas com pólos simples ao longo de D. Obviamente, vale as seguintes inclusões

$$\Omega^q_X \subset \Omega^q_X(logD) \subset \Omega^q_X(D).$$

Consideremos uma decomposição de D (não necessariamente em componentes irredutíveis),

$$D = D_1 \cup \ldots \cup D_k,$$

tal que a subvariedade analítica $V = D_1 \cap \ldots \cap D_k$ tenha codimensão k e seja do tipo ICL. Além disso, vamos supor que numa vizinhança U_α de um ponto $x \in V$, valha

$$V \cap U_\alpha = \{z \in U_\alpha : f_{\alpha,1}(z) = \ldots = f_{\alpha,k}(z) = 0\},$$

com $f_{\alpha,1}, \ldots, f_{\alpha,k} \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ e para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$,

$$D_i \cap U_\alpha = \{z \in U_\alpha : f_{\alpha,i}(z) = 0\}.$$

Vamos assumir ainda que V seja um espaço reduzido. Com isso, temos que $df_{\alpha,1} \wedge \ldots \wedge df_{\alpha,k}$ é não-identicamente nula sobre cada componente irredutível de V.

Pondo

$$\hat{D}_i := D_1 \cup \ldots \cup D_{i-1} \cup D_{i+1} \cup \ldots \cup D_k,$$

denotemos por $\Omega^q_X(\hat{D}_i)$ o $\mathcal{O}_X$-módulo de q-formas meromorfas com pólos simples ao longo de $\hat{D}_i$.

Teorema 3 *(Aleksandrov [2], Teorema 1) Sejam X, D e V como descritos acima. Se $\omega_\alpha \in \Omega^q_{U_\alpha}(D)$ é uma q-forma meromorfa tal que*

$$df_{\alpha,j} \wedge \omega_\alpha \in \sum_{i=1}^{k} \Omega^{q+1}_{U_\alpha}(\hat{D}_i), \qquad j = 1, \ldots, k,$$

então, existe uma função holomorfa g_α, não identicamente nula sobre as componente irredutível de V, uma $(q-k)$-forma holomorfa $\xi_\alpha \in \Omega^{q-k}_{U_\alpha}$ e uma q-forma meromorfa $\eta_\alpha \in \sum_{i=1}^{k} \Omega^q_{U_\alpha}(\hat{D}_i)$ tais que vale a seguinte decomposição

$$g_\alpha\, \omega_\alpha = \frac{df_{\alpha,1}}{f_{\alpha,1}} \wedge \ldots \wedge \frac{df_{\alpha,k}}{f_{\alpha,k}} \wedge \xi_\alpha + \eta_\alpha. \tag{1.12}$$

Como a função g_α não é identicamente nula nas componentes irredutíveis de V, a restrição da forma meromorfa $\dfrac{\xi_\alpha}{g_\alpha}$ à subvariedade analítica V, $\dfrac{\xi_\alpha}{g_\alpha}|_V$, está bem definida. Esta restrição é chamada de *múltiplo resíduo* da q-forma meromorfa ω_α.

Proposição 2 *(Aleksandrov [2], Proposição 2) Nos termos do Teorema 3, o múltiplo resíduo da forma diferencial ω_α não depende da representação (1.12).*

Na decomposição (1.12), a função g_α pertence ao ideal (de $\mathcal{O}(U_\alpha)$) gerado pelos menores de ordem $k \times k$ da matriz jacobiana da aplicação

$$z \in U \longmapsto (f_{\alpha,1}(z), \ldots f_{\alpha,k}(z)) \in \mathbb{C}^k.$$

Em outras palavras, se para cada $I = (i_1, \ldots, i_k)$, $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$, denotarmos o menor de ordem $k \times k$ da matriz jacobiana $J(f_{\alpha,1}, \ldots f_{\alpha,k})$, correspondente ao multi-índice I, por

$$\Delta_I = det\left[\frac{\partial f_{\alpha,i}}{\partial z_{i_r}}\right], \quad 1 \leq i, r \leq k,$$

então a função g_α é do tipo

$$g_\alpha = \sum_{|I|=k} \lambda_I \, \Delta_I, \quad \text{com } \lambda_I \in \mathcal{O}(U_\alpha). \tag{1.13}$$

Além disso, se a q-forma meromorfa ω_α é representada em U_α por

$$\omega_\alpha = \frac{1}{f_{\alpha,1} \ldots f_{\alpha,k}} \sum_{|J|=q} a_J(z) \, dZ_J, \quad \text{com } a_J \in \mathcal{O}(U_\alpha) \ ,$$

então para todo menor Δ_I, vale

$$\Delta_I. \sum_{|J|=q} a_J \, dZ_J = df_{\alpha,1} \wedge \ldots \wedge df_{\alpha,k} \wedge \left(\sum_{|I'|=q-k} a_{(I,I')} \, dZ_{I'} \right) + (f_{\alpha,1} \ldots f_{\alpha,1}) \, \eta_\alpha. \tag{1.14}$$

Com isso, para o caso particular em que $q = k$, temos que $\xi_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ é dada por

$$\xi_\alpha = \sum_{|I|=k} \lambda_I \, a_I \, . \tag{1.15}$$

Capítulo 2

Fórmulas de Resíduos para Folheações Logarítmicas

Neste capítulo iremos abordar o problema de generalizar a fórmula Baum-Bott [6] para variedades não-compactas. Vamos considerar variedades complexas não-compactas no sentido de Iitaka [28], isto é, variedades complexas que são compactificadas com a adição de um divisor.

Na Seção 2.1 vamos considerar o caso em que a compactificação é dada por uma hipersuperfície lisa. Em seguida, na Seção 2.3 e na Seção 2.4, vamos generalizar essa situação para os casos em que a hipersuperfície compactificadora tenha singularidades do tipo cruzamentos normais ou tenha singularidades isoladas.

Ao longo deste capítulo apresentaremos algumas aplicações dos resultados obtidos. Na Seção 2.2, vamos considerar folheações logarítmicas em $\mathbb{P}^n$. Neste caso, apresentaremos uma interessante caracterização de quando as singularidades destas folheações ocorrem apenas na hipersuperfície invariante.

Na Seção 2.5 apresentaremos uma generalização do Teorema de Gauss-Bonnet [24].

2.1 Folheações logarítmicas ao longo de hipersuperfícies lisas

Nesta seção, nosso objetivo será demonstrar o Teorema 4 o qual generaliza a fórmula Baum-Bott [6] para variedades complexas não-compactas, no sentido de Iitaka [28].

Sejam X uma variedade complexa, compacta, de dimensão n, D uma hipersuperfície analítica lisa de X e $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de dimensão um sobre X, logarítmica ao longo de D e com singularidades isoladas.

Fixado $p \in X$, considere um campo de vetores holomorfo v que define a folheação $\mathcal{F}$ numa vizinhança U de p. Tomando o complexo logarítmico,

$$0 \longrightarrow \Omega^n_{X,p}(log\, D) \xrightarrow{i_v} \Omega^{n-1}_{X,p}(log\, D) \xrightarrow{i_v} \dots \xrightarrow{i_v} \Omega^1_{X,p}(log\, D) \xrightarrow{i_v} \mathcal{O}_{n,p},$$

temos a seguinte definição

Definição 7 *(Aleksandrov [1]) O índice logarítmico de $\mathcal{F}$ em p, com respeito à D, denotado por $Ind_{log\,D,p}(\mathcal{F})$, é definido da seguinte maneira*

$$Ind_{log\,D,p}(\mathcal{F}) := \sum_{i=0}^{n}(-1)^i dim H_i(\Omega^{\bullet}_{X,p}(log\,D), i_v).$$

Proposição 3 *(Aleksandrov [1], Proposição 1) Sejam X, D e $\mathcal{F}$ como descritos acima. Para cada $p \in Sing(\mathcal{F}) \cap D$, vale:*

$$Ind_{log\,D,p}(\mathcal{F}) = \mu_p(\mathcal{F}) - GSV(\mathcal{F}, D, p).$$

Em particular, se D é lisa em p, então vale

$$Ind_{log\,D,p}(\mathcal{F}) = \mu_p(\mathcal{F}) - \mu_p(\mathcal{F}|_D). \tag{2.1}$$

Observação 1 *Em algumas ocasiões, iremos supor que o índice logarítmico de $\mathcal{F}$ é zero nos pontos regulares de D. Esta hipótese ocorre, por exemplo, nos casos em que os pontos singulares de $\mathcal{F}$ são não-degenerados (que é uma hipótese genérica). Com efeito, se $p \in Sing(\mathcal{F}) \cap D_{reg}$ é uma singularidade não-degenerada de $\mathcal{F}$, então*

$$\mu_p(\mathcal{F}) = 1 = \mu_p(\mathcal{F}|_D).$$

Com isso, segue da igualdade (2.1) que

$$Ind_{log\,D,p}(\mathcal{F}) = 0.$$

Observamos ainda que se $p \in X \setminus Sing(\mathcal{F})$, então, segue diretamente da definição que

$$Ind_{log\,D,p}(\mathcal{F}) = 0.$$

Existe uma fórmula integral para calcular o índice logarítmico $Ind_{log\,D,p}(\mathcal{F})$. Com efeito, fixando uma expressão local de D em p

$$U \cap D = \{z \in U : f(z) = 0\},$$

como $\mathcal{F}$ é logarítmica ao longo de D, existe função holomorfa $h \in \mathcal{O}(U)$ tal que

$$v(f) = fh.$$

Suponhamos que o campo v seja dado em coordenadas locais por

$$v = (v_1, \ldots, v_n).$$

Proposição 4 *Nas condições descritas acima, vale*

$$Ind_{log\, D,p}(\mathcal{F}) = res_0 \begin{bmatrix} det(J(v_1,\ldots,v_n) - hI_n) \\ \\ v_1 \ \ldots \ v_n \end{bmatrix},$$

onde $J(v_1,\ldots,v_n)$ é a matriz jacobiana do mapa que define o campo v e I_n é a matriz identidade de ordem n.

Demonstração: Segue da Proposição 1 de Aleksandrov [1] e Proposição 1 de Klehn [30].

Teorema 4 *Sejam X uma variedade complexa, compacta, de dimensão n, D uma hipersuperfície analítica lisa de X e $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de dimensão um sobre X, logarítmica ao longo de D e com singularidades isoladas. Suponha que $\forall p \in Sing(\mathcal{F}) \cap D$, $Ind_{log\, D,p}(\mathcal{F}) = 0$. Então*

$$\int_X c_n(T_X(-logD) - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{p\in Sing(\mathcal{F})\cap(X-D)} \mu_p(\mathcal{F}).$$

Antes de proceder à prova deste teorema, vamos considerar alguns lemas técnicos que serão usados em sua demonstração.

Lema 2 *Sejam X uma variedade complexa de dimensão n e D uma hipersuperfície analítica lisa em X. Vale:*

$$c_i(\Omega^1_X(logD)) = \sum_{k=0}^{i} c_{i-k}(\Omega^1_X)c_1([D])^k, \qquad \forall i = 1,\ldots,n. \tag{2.2}$$

Demonstração: Pela sequência exata de feixes (1.7), temos

$$0 \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow \Omega^1_X(logD) \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0,$$

da qual podemos obter a seguinte expressão para a classe total de Chern de $\Omega^1_X(logD)$,

$$c(\Omega^1_X(logD)) = c(\Omega^1_X)c(\mathcal{O}_D).$$

Consequentemente,

$$c_i(\Omega^1_X(logD)) = \sum_{k=0}^{i} c_{i-k}(\Omega^1_X)c_i(\mathcal{O}_D). \tag{2.3}$$

Por outro lado, existe a seguinte sequência exata de feixes sobre X (ver D. Huybrechts [27])

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-D) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0,$$

donde, obtemos a seguinte expressão para a classe total de Chern

$$c(\mathcal{O}_X) = c(\mathcal{O}_D)c(\mathcal{O}(-D)).$$

Sendo $\mathcal{O}(-D) = [-D]$, segue que $c(\mathcal{O}(-D)) = c([-D]) = (1 + c_1([-D])$, e como $c(\mathcal{O}_X) = 1$, obtemos

$$1 = c(\mathcal{O}_D)(1 + c_1([-D]).$$

Por conseguinte, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$0 = c_i(\mathcal{O}_D) + c_{i-1}(\mathcal{O}_D)c_1([-D]).$$

Daí, deduzimos facilmente que

$$c_i(\mathcal{O}_D) = (-1)^i c_1([-D])^i = c_1([D])^i, \tag{2.4}$$

onde, na última igualdade usamos a propriedade (1.2) e o fato de $[-D]$ ser o dual de $[D]$. Agora, usando (2.4) em (2.3), obtemos a expressão (2.2) do lema. □

Lema 3 *Sejam X uma variedade complexa de dimensão n e D uma hipersuperfície analítica lisa de X. Vale:*

$$c_i(\Omega^1_X)|_D = c_i(T^*_D) - c_{i-1}(T^*_D)c_1([D])|_D, \qquad \forall i = 1, \dots, n-1. \tag{2.5}$$

Demonstração: Nós sabemos que o fibrado normal $N_{D/X}$ sobre D é definido como sendo o fibrado vetorial holomorfo de posto 1 dado pelo fibrado quociente (ver P. Griffths & J. Harris [24])

$$N_{D/X} = \frac{T_X|_D}{T_D}.$$

Em particular, temos que topologicamente vale a seguinte decomposição

$$T_X|_D = T_D \oplus N_{D/X}.$$

Pela *Fórmula da Adjunção* (ver P. Griffths & J. Harris [24]), o fibrado normal $N_{D/X}$ é isomorfo à restrição $[D]|_D$. Com isso,

$$T_X|_D = T_D \oplus [D]|_D.$$

Assim, para a classe total de Chern, vale

$$c(T_X)|_D = c(T_X|_D) = c(T_D)c([D]|_D) = c(T_D)c([D])|_D = c(T_D)(1 + c_1([D])|_D).$$

Portanto,

$$c_i(T_X)|_D = c_i(T_D) + c_{i-1}(T_D)c_1([D])|_D, \qquad \forall i = 1, \dots, n-1.$$

Aplicando a propriedade (1.2), obtemos a fórmula desejada

$$c_i(\Omega^1_X)|_D = c_i(T^*_D) - c_{i-1}(T^*_D)c_1([D])|_D, \qquad \forall i = 1, \dots, n-1.$$

□

Demonstração do Teorema 4

Pelo Teorema Baum-Bott [6], temos

$$\int_X c_n(T_X - T_{\mathcal{F}}) - \int_D c_{n-1}(T_D - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap X} \mu_p(\mathcal{F}) - \sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap D} \mu_p(\mathcal{F}|_D).$$

Mas, por hipótese,

$$\forall p \in Sing(\mathcal{F}) \cap D, Ind_{log\, D,p}(\mathcal{F}) = 0.$$

Daí, segue da igualdade (2.1) que

$$\sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap D} \mu_p(\mathcal{F}) - \sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap D} \mu_p(\mathcal{F}|_D) = 0.$$

Consequentemente,

$$\int_X c_n(T_X - T_{\mathcal{F}}) - \int_D c_{n-1}(T_D - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap (X \setminus D)} \mu_p(\mathcal{F}).$$

Com isso, para concluir a demonstração, basta mostrar que

$$\int_X c_n(T_X(-logD) - T_{\mathcal{F}}) = \int_X c_n(T_X - T_{\mathcal{F}}) - \int_D c_{n-1}(T_D - T_{\mathcal{F}}).$$

Com efeito, pondo $L = T^*_{\mathcal{F}}$, segue da propriedade (1.3) que

$$\int_X c_n(T_X(-logD) - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{j=0}^{n} \int_X c_{n-j}(T_X(-logD))c_1(L)^j.$$

Agora, sabendo que o dual de $T_X(-logD)$ é $\Omega^1_X(logD)$, podemos usar a propriedade (1.2) em cada uma das parcelas do somatório acima e obter:

$$\int_X c_n(T_X(-logD) - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \int_X c_{n-j}(\Omega^1_X(logD))c_1(L)^j.$$

Usando a expressão (2.2) do Lema 2 em cada $c_{n-j}(\Omega^1_X(logD))$ do somatório, obtemos

$$\int_X c_n(T_X(-logD) - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \int_X \left[\sum_{k=0}^{n-j} c_{n-j-k}(\Omega^1_X)c_1([D])^k\right] c_1(L)^j. \tag{2.6}$$

Podemos decompor esse somatório em duas partes. A primeira com os termos tendo $k \geq 1$ e a segunda com termos $k = 0$:

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \int_X \left[\sum_{k=0}^{n-j} c_{n-j-k}(\Omega^1_X)c_1([D])^k\right] c_1(L)^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j} \int_X \left[\sum_{k=1}^{n-j} c_{n-j-k}(\Omega^1_X)c_1([D])^k\right] c_1(L)^j + \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \int_X c_{n-j}(\Omega^1_X)c_1(L)^j.$$

O segundo somatório, no lado direito da igualdade, pode ser calculado. De fato, como o fibrado tangente de X, T_X, é o dual de Ω^1_X, podemos usar a propriedade (1.2) como segue:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \int_X c_{n-j}(\Omega^1_X)c_1(L)^j &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \int_X (-1)^{n-j} c_{n-j}(T_X)c_1(L)^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} \int_X c_{n-j}(T_X)c_1(L)^j.
\end{aligned}$$

Agora usando a propriedade (1.3) nesta última expressão, obtemos

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\int_X c_{n-j}(\Omega_X^1)c_1(L)^j = \int_X c_n(T_X - T_{\mathcal{F}}),$$

e assim, finalizamos o cálculo do segundo somatório.

Já o primeiro somatório pode ser calculado como segue. Em primeiro lugar, como $c_1([D])$ é o dual de Poincaré do ciclo definido por D, temos

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X\left[\sum_{k=1}^{n-j} c_{n-j-k}(\Omega_X^1)c_1([D])^k\right]c_1(L)^j \quad =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_D\left[\sum_{k=1}^{n-j} c_{n-j-k}(\Omega_X^1)c_1([D])^{k-1}\right]c_1(L)^j \quad =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_D\left[\sum_{k=1}^{n-j-1} c_{n-j-k}(\Omega_X^1)c_1([D])^{k-1} + c_1([D])^{n-j-1}\right]c_1(L)^j.$$

Agora, usando a expressão (2.5) do Lema 3 em cada $c_{n-j-k}(\Omega_X^1)$ neste somatório, obtemos

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_D\left[\sum_{k=1}^{n-j-1} c_{n-j-k}(\Omega_X^1)c_1([D])^{k-1} + c_1([D])^{n-j-1}\right]c_1(L)^j \quad =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_D\left\{\sum_{k=1}^{n-j-1}\left[c_{n-j-k}(T_D^*) - c_{n-j-k-1}(T_D^*)c_1([D])\right]c_1([D])^{k-1} + c_1([D])^{n-j-1}\right\}c_1(L)^j \quad =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_D\left[\sum_{k=1}^{n-j-1} c_{n-j-k}(T_D^*)c_1([D])^{k-1} - c_{n-j-k-1}(T_D^*)c_1([D])^{k} + c_1([D])^{n-j-1}\right]c_1(L)^j \quad =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_D\left[c_{n-j-1}(T_D^*) - c_1([D])^{n-j-1} + c_1([D])^{n-j-1}\right]c_1(L)^j \quad =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_D c_{n-j-1}(T_D^*)c_1(L)^j.$$

Portanto,

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X \left[\sum_{k=1}^{n-j} c_{n-j-k}(\Omega_X^1)c_1([D])^k\right] c_1(L)^j = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_D c_{n-j-1}(T_D^*)c_1(L)^j.$$

Mas, pela propriedade (1.2), $c_{n-j-1}(T_D^*) = (-1)^{n-j-1}c_{n-j-1}(T_D)$. Daí, segue que

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X \left[\sum_{k=1}^{n-j} c_{n-j-k}(\Omega_X^1)c_1([D])^k\right] c_1(L)^j &= -\sum_{j=0}^{n-1}\int_D c_{n-j-1}(T_D)c_1(L)^j = \\ &= -\int_D c_{n-1}(T_D - T_{\mathcal{F}}),\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a propriedade (1.3). Com isso, concluímos o cálculo do primeiro somatório. Assim, voltando para a igualdade (2.6) obtemos

$$\int_X c_n(T_X(-logD) - T_{\mathcal{F}}) = \int_X c_n(T_X - T_{\mathcal{F}}) - \int_D c_{n-1}(T_D - T_{\mathcal{F}}).$$

Portanto, o teorema está demonstrado.□

2.2 Aplicação: número de singularidades de folheações logarítmicas em $\mathbb{P}^n$

Nesta seção, nosso objetivo será demonstrar uma aplicação do Teorema 4. Vamos considerar folheações logarítmicas ao longo de uma hipersuperfície analítica de $\mathbb{P}^n$. Vamos supor que as singularidades da folheação sejam não-degeneradas. Apresentaremos condições necessárias e suficientes para que todas as singularidades de tais folheações ocorram na hipersuperfície analítica invariante. Estas condições serão dadas em termos do grau da folheação e do grau da hipersuperfície analítica invariante.

Também iremos recuperar a cota dada por M. G. Soares em [41], um conhecido resultado que fornece condições necessárias para que uma folheação seja logarítmica ao longo de uma hipersuperfície lisa em $\mathbb{P}^n$.

O lema a seguir tem por objetivo extrair algumas propriedades da soma

$$\sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n+1}{n-i-j}(-1)^j k^j\right](d-1)^i, \qquad k,d,n\in\mathbb{N}, \tag{2.7}$$

que serão usadas ao longo desta seção, em particular na prova do Teorema 5. Como veremos mais adiante, a soma (2.7) corresponde ao número de singularidades da folheação que ocorrem fora da hipersuperfície analítica invariante.

Lema 4 *Dados $k,d,n\in\mathbb{N}$, com $k\geq 1$, $d\geq 0$ e $n\geq 2$, seja*

$$f(k,d,n)=\sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n+1}{n-i-j}(-1)^j k^j\right](d-1)^i.$$

Valem as seguintes propriedades:

(1) *Se n é ímpar, então:*

- **(a)** $f(k,d,n)>0 \iff k<d+1$;
- **(b)** $f(k,d,n)=0 \iff k=d+1$;
- **(c)** $f(k,d,n)<0 \iff k>d+1$.

(2) *Se n é par, então $f(k,d,n)\geq 0$ e, além disso:*

- **(a)** $f(k,d,n)>0 \iff$ *($k\neq d+1$) ou ($k=d+1$, com $d\neq 0$);*
- **(b)** $f(k,d,n)=0 \iff k=1$ *e* $d=0$.

(3) *Se n é par, então vale:*

(a) $k > d+1,\ d > 1$ *e* $n > 2 \implies f(k,d,n) > d^n + d^{n-1} + \ldots + d + 1$;

(b) $k > d+1$ *e* $n = 2 \implies f(k,d,n) \geq d^n + d^{n-1} + \ldots + d + 1$.

(4) $f(k,d,n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (k-1)^i d^{n-i}$.

Demonstração: Seja $f(k,d,n) = \sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+1}{n-i-j} (-1)^j k^j \right] (d-1)^i$.
Desenvolvendo o somatório, temos:

$$\begin{aligned} f(k,d,n) = \binom{n+1}{n} - \binom{n+1}{n-1}k + \binom{n+1}{n-2}k^2 + \ldots + \binom{n+1}{0}k^n & + \\ + \binom{n+1}{n-1}(d-1) - \binom{n+1}{n-2}(d-1)k + \ldots - \binom{n+1}{0}(d-1)k^{n-1} & + \\ + \binom{n+1}{n-2}(d-1)^2 + \ldots + \binom{n+1}{0}(d-1)^2 k^{n-2} & + \\ \vdots \qquad & \\ + \binom{n+1}{0}(d-1)^n. & \end{aligned}$$

Pondo em evidência o fator comum das parcelas de cada coluna, podemos reescrever o somatório como

$$f(k,d,n) = \binom{n+1}{n} + \sum_{m=1}^{n} \left[\binom{n+1}{n-m} \left(\sum_{j=0}^{m} (-k)^{m-j} (d-1)^j \right) \right].$$

Supondo $k \neq 1$ ou $d \neq 0$ (o caso $k = 1$ e $d = 0$ é trivial), podemos usar a propriedade

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \neq b, \qquad a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

e deduzir que

$$\sum_{j=0}^{m} (-k)^{m-j} (d-1)^j = \frac{1}{-k-d+1} \left((-k)^{m+1} - (d-1)^{m+1} \right).$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} f(k,d,n) &= \binom{n+1}{n} + \sum_{m=1}^{n}\left[\binom{n+1}{n-m}\left(\frac{1}{-k-d+1}\left((-k)^{m+1}-(d-1)^{m+1}\right)\right)\right] \\ &= \binom{n+1}{n} + \frac{1}{-k-d+1}\left[\left(\sum_{m=1}^{n}\binom{n+1}{n-m}(-k)^{m+1}\right)-\left(\sum_{m=1}^{n}\binom{n+1}{n-m}(d-1)^{m+1}\right)\right]. \end{aligned}$$

Mas, como

$$\sum_{m=1}^{n}\binom{n+1}{n-m}(-k)^{m+1} = (1-k)^{n+1} - \binom{n+1}{n}(-k) - \binom{n+1}{n+1},$$

$$\sum_{m=1}^{n}\binom{n+1}{n-m}(d-1)^{m+1} = d^{n+1} - \binom{n+1}{n}(d-1) - \binom{n+1}{n+1}$$

e

$$\frac{1}{-k-d+1}\left[-\binom{n+1}{n}(-k)+\binom{n+1}{n}(d-1)\right] = -\binom{n+1}{n}$$

obtemos

$$f(k,d,n) = \frac{(1-k)^{n+1}-d^{n+1}}{-k-d+1}$$

ou, equivalentemente,

$$f(k,d,n) = \frac{d^{n+1}-(-1)^{n+1}(k-1)^{n+1}}{k+d-1}. \tag{2.8}$$

Usando a igualdade (2.8) vamos proceder com a prova de cada um dos itens do lema.

Item 1. Supondo n ímpar, temos $f(k,d,n) = \dfrac{d^{n+1}-(k-1)^{n+1}}{k+d-1}$. Assim,

$$\begin{aligned} f(k,d,n) > 0 &\iff d^{n+1}-(k-1)^{n+1} > 0 \\ &\iff d+1 > k. \end{aligned}$$

Portanto, o item (1.a) está provado.

Procedendo de maneira análoga podemos obter

$$f(k,d,n) = 0 \Longleftrightarrow k = d+1 \qquad e \qquad f(k,d,n) < 0 \Longleftrightarrow k > d+1.$$

Com isso, seguem os itens (1.b) e (1.c) do lema.

Item 2. Supondo n par, temos

$$f(k,d,n) = \frac{d^{n+1} + (k-1)^{n+1}}{k+d-1}.$$

Como na demonstração do Item 1, a prova neste caso segue diretamente do estudo do sinal do numerador da fração

$$\frac{d^{n+1} + (k-1)^{n+1}}{k+d-1}.$$

Item 4. Vamos considerar a soma $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i (k-1)^i d^{n-i}$. Temos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (k-1)^i d^{n-i} &= d^n \left[\sum_{i=0}^{n} (-1)^i (k-1)^i d^{-i} \right] \\ &= d^n \left[\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{(-1)(k-1)}{d} \right)^i \right]. \end{aligned}$$

Usando a propriedade

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \quad 1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a},$$

obtemos

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{(-1)(k-1)}{d} \right)^i = \frac{1 - \left(\frac{(-1)(k-1)}{d}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{(-1)(k-1)}{d}\right)}.$$

Daí,

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i (k-1)^i d^{n-i} = \frac{d^{n+1} + (k-1)^{n+1}}{k+d-1}.$$

Pela igualdade (2.8),

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(k-1)^i d^{n-i} \quad = \quad f(k,d,n),$$

como queríamos demonstrar.

Item (3.b). Se $n=2$, então usando a expressão dada pelo Item 4 para $f(k,d,n)$, temos

$$\begin{aligned} f(k,d,n)-\left[d^n+d^{n-1}+\ldots+d+1\right] &= k^2-kd-2k= \\ &= k(k-d-2). \end{aligned}$$

Como $k>d+1$, segue que $k-d-2\geq 0$. Donde

$$f(k,d,n)-\left[d^n+d^{n-1}+\ldots+d+1\right]\geq 0.$$

Portanto, o item (3.b) está provado.

Item (3.a). Também usaremos a expressão dada pelo Item 4 para $f(k,d,n)$. Com efeito, vamos colocar

$$G(k,d,n)=f(k,d,n)-(d^n+d^{n-1}+\ldots+d+1)$$

e provar que $G(k,d,n)>0$. De fato, vamos separar a prova em dois casos: $k=d+2$ e $k>d+2$.
Suponhamos $k=d+2$ temos

$$\begin{aligned} G(k,d,n) \;=\; & d^n \overbrace{- \;(d+1)d^{n-1}+(d+1)^2d^{n-2}}^{\gamma_2} - \ldots \overbrace{- \;(d+1)^{n-1}d+(d+1)^n}^{\gamma_n} - \\ & -d^n - (\;d^{n-1} + d^{n-2}\;) - \ldots - (\;d + 1\;), \end{aligned}$$

e, portanto, podemos escrever

$$G(k,d,n)=\gamma_2+\gamma_4+\ldots+\gamma_n,$$

onde

$$\gamma_t = (d+1)^t d^{n-t} - (d+1)^{t-1} d^{n-t+1} - (d^{n-t} + d^{n-t+1}), \qquad \forall t \in \{2, 4, \ldots, n\}.$$

Afirmamos que

$$\gamma_2 = 0 \qquad \text{e} \qquad \gamma_t > 0, \quad t \in \{4, \ldots, n\}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= (d+1)^2 d^{n-2} - (d+1) d^{n-1} - (d^{n-2} + d^{n-1}) \\
&= \left[(d+1) d^{n-1} + (d+1) d^{n-2}\right] - (d+1) d^{n-1} - (d^{n-2} + d^{n-1}) \\
&= (d+1) d^{n-2} - (d^{n-2} + d^{n-1}) \\
&= d^{n-1} + d^{n-2} - (d^{n-2} + d^{n-1}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, para $t \in \{4, \ldots, n\}$, temos

$$\begin{aligned}
\gamma_t &= (d+1)^t d^{n-t} - (d+1)^{t-1} d^{n-t+1} - (d^{n-t} + d^{n-t+1}) \\
&= [(d+1)^{t-1} d^{n-t+1} + (d+1)^{t-1} d^{n-t}] - (d+1)^{t-1} d^{n-t+1} - (d^{n-t} + d^{n-t+1}) \\
&= (d+1)^{t-1} d^{n-t} - (d^{n-t} + d^{n-t+1}) \\
&> (d+1) d^{n-t} - (d^{n-t} + d^{n-t+1}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como $n > 2$ e $t \in \{2, 4, \ldots, n\}$, existe pelo menos algum t tal que $\gamma_t > 0$. Portanto,

$$G(k, d, n) = \gamma_2 + \gamma_4 + \ldots + \gamma_n > 0.$$

Agora, suponha $k > d + 2$. Sabendo que n é par, vamos colocar $n = 2l$, $l \in \mathbb{N}$ e usar o princípio de indução finita sobre l para provar que $G(k, d, n) > 0$. De fato, para $l = 1$,

$$\begin{aligned} G(k,d,n) &= \sum_{i=0}^{2}(-1)^i(k-1)^i d^{2-i} - (d^2+d+1) \\ &= k^2 + (-2-d)k, \end{aligned}$$

que é maior que zero, uma vez que $k > d+2$. Agora, suponhamos, por hipótese de indução, que para $l = N$, $N > 1$,

$$G(k,d,2N) > 0.$$

Então, para $l = N+1$, temos

$$\begin{aligned} G(k,d,2(N+1)) &= f(k,d,2(N+1)) - (d^{2(N+1)} + d^{2(N+1)-1} + \ldots + d + 1) \\ &= \sum_{i=0}^{2N+2}[-1+(-1)^i(k-1)^i]d^{2N+2-i} \\ &= \sum_{i=0}^{2N}[-1+(-1)^i(k-1)^i]d^{2N+2-i} + \sum_{i=2N+1}^{2N+2}[-1+(-1)^i(k-1)^i]d^{2N+2-i} \\ &= d^2G(k,d,2N) + \sum_{i=2N+1}^{2N+2}[-1+(-1)^i(k-1)^i]d^{2N+2-i}. \end{aligned}$$

Mas, por hipótese de indução, $G(k,d,2N) > 0$, daí obtemos

$$\begin{aligned} G(k,d,2(N+1)) &\geq d^2 + \sum_{i=2N+1}^{2N+2}[-1+(-1)^i(k-1)^i]d^{2N+2-i} \\ &= d^2 - (d+1) - d(k-1)^{2N+1} + (k-1)^{2N+2}. \end{aligned}$$

Como $d > 1$, segue que $d^2 - (d+1) > 0$. Por outro lado, $k > d+2$ implica que $(k-1) > d$, donde $-d(k-1)^{2N+1} + (k-1)^{2N+2} > 0$. Dessa forma,

$$G(k,d,2(N+1)) > 0.$$

Portanto, pelo princípio de indução finita, $G(k,d,n) > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Em particular, para $n > 2$. Com isso, concluímos a prova do item (3.a). $\square$

Nosso objetivo agora é provar o Teorema 5. Este é o resultado principal desta seção e é uma aplicação do Teorema 4.

Teorema 5 *Em $\mathbb{P}^n$, sejam D uma hipersuperfície analítica lisa e $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de dimensão um, com singularidades isoladas e logarítmica ao longo de D. Suponha que as singularidades de $\mathcal{F}$ sejam não-degeneradas. Valem as seguintes propriedades:*

(1) *Se n é ímpar, então:*

(a) $\#Sing_{\mathbb{P}^n\setminus D}(\mathcal{F}) > 0 \iff \deg(D) < \deg(\mathcal{F}) + 1$;

(b) $\#Sing_{\mathbb{P}^n\setminus D}(\mathcal{F}) = 0 \iff \deg(D) = \deg(\mathcal{F}) + 1$.

(2) *Se n é par, então:*

(a) $\#Sing_{\mathbb{P}^n\setminus D}(\mathcal{F}) > 0 \iff \begin{cases} \deg(D) \neq \deg(\mathcal{F}) + 1 \\ ou \\ \deg(D) = \deg(\mathcal{F}) + 1, \ com \ \deg(\mathcal{F}) \neq 0 \end{cases}$;

(b) $\#Sing_{\mathbb{P}^n\setminus D}(\mathcal{F}) = 0 \iff \deg(D) = 1 \ e \ \deg(\mathcal{F}) = 0$.

(3) *Se $deg(D) = k$ e $deg(\mathcal{F}) = d$, então*

$$\#Sing_{\mathbb{P}^n\setminus D}(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(k-1)^i d^{n-i}.$$

Antes de proceder a prova deste teorema, vamos considerar alguns resultados preliminares.

Proposição 5 *Em $\mathbb{P}^n$, seja D uma hipersuperfície analítica lisa de grau $deg(D) = k$. Então*

$$c_l(T_{\mathbb{P}^n}(-logD)) = \left[\sum_{j=0}^{l}\binom{n+1}{l-j}(-1)^j k^j\right] c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))^l, \qquad \forall l = 1, \ldots, n.$$

Demonstração: A prova será feita usando o princípio de indução finita sobre l. Com efeito, considerando a sequência exata (1.9)

$$0 \longrightarrow T_{\mathbb{P}^n}(-logD) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k) \longrightarrow 0.$$

Daí obtemos

$$c_1(T_{\mathbb{P}^n}(-logD)) = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{n+1}) - c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)),$$

e usando (1.4), segue

$$\begin{aligned} c_1(T_{\mathbb{P}^n}(-logD)) &= \binom{n+1}{1} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) - kc_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \\ &= \left[\binom{n+1}{1} - k\right] c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \\ &= \left[\binom{n+1}{1} - \binom{n+1}{0}k\right] c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)). \end{aligned}$$

Assim, concluímos que a afirmação do lema é verdadeira para o caso $l = 1$. Agora, por hipótese de indução, suponhamos que para algum $l = N$, com $1 < N \leq n-1$, valha

$$c_N(T_{\mathbb{P}^n}(-logD)) = \left[\sum_{j=0}^{N} \binom{n+1}{N-j} (-1)^j k^j\right] c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))^N. \tag{2.9}$$

Usando a sequência exata (1.9), juntamente com (1.4) para calcular $c_{N+1}(T_{\mathbb{P}^n}(-logD))$, obtemos

$$c_{N+1}(T_{\mathbb{P}^n}(-logD)) = \binom{n+1}{N+1} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))^{N+1} - c_N(T_{\mathbb{P}^n}(-logD))(k\, c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))).$$

Agora, usando a hipótese de indução (2.9) nesta última expressão, obtemos

$$\begin{aligned} c_{N+1}(T_{\mathbb{P}^n}(-logD)) &= \\ = \binom{n+1}{N+1} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))^{N+1} - \left\{\left[\sum_{j=0}^{N} \binom{n+1}{N-j} (-1)^j k^j\right] c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))^N\right\} (k\, c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))) &= \\ = \left[\sum_{j=0}^{N+1} \binom{n+1}{N+1-j} (-1)^j k^j\right] c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))^{N+1}. \end{aligned}$$

Portanto, a afirmação do lema é verdadeira para $l = N+1$ e a prova segue pelo princípio de indução finita. □

Proposição 6 *Em $\mathbb{P}^n$, sejam D uma hipersuperfície analítica lisa de grau $deg(D) = k$ e $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de dimensão um e grau $deg(\mathcal{F}) = d$, com singularidades isoladas. Então*

$$\int_{\mathbb{P}^n} c_n(T_{\mathbb{P}^n}(-logD) - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+1}{n-i-j} (-1)^j k^j\right] (d-1)^i.$$

Demonstração: Usando a propriedade (1.3) obtemos

$$\int_{\mathbb{P}^n} c_n(T_{\mathbb{P}^n}(-logD) - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{i=0}^{n} \int_{\mathbb{P}^n} c_{n-i}(T_{\mathbb{P}^n}(-logD))c_1(T^*_{\mathcal{F}})^i.$$

Agora, usando a Proposição 5 em cada $c_{n-i}(T_{\mathbb{P}^n}(-logD))$, nas parcela do somatório acima, obtemos

$$\int_{\mathbb{P}^n} c_n(T_{\mathbb{P}^n}(-logD) - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+1}{n-i-j} (-1)^j k^j \right] \int_{\mathbb{P}^n} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))^{n-i} c_1(T^*_{\mathcal{F}})^i.$$

Por outro lado, o fibrado tangente $T_{\mathcal{F}}$ da folheação em $\mathbb{P}^n$ é tal que $T_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1-d)$. Portanto, obtemos $c_1(T^*_{\mathcal{F}}) = (d-1)c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$. Com isso,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{P}^n} c_n(T_{\mathbb{P}^n}(-logD) - T_{\mathcal{F}}) &= \sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+1}{n-i-j} (-1)^j k^j \right] (d-1)^i \int_{\mathbb{P}^n} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))^n \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+1}{n-i-j} (-1)^j k^j \right] (d-1)^i,
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a propriedade (1.5), isto é, $\displaystyle\int_{\mathbb{P}^n} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))^n = 1$. Assim concluímos a prova. □

Demonstração do Teorema 5

Pondo $deg(D) = k$ e $deg(\mathcal{F}) = d$, segue da Proposição 6 que

$$\int_{\mathbb{P}^n} c_n(T_{\mathbb{P}^n}(-logD) - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+1}{n-i-j} (-1)^j k^j \right] (d-1)^i.$$

Por hipótese, as singularidades de $\mathcal{F}$ são não-degeneradas. Em particular (Observação 1),

$$\forall p \in Sing(\mathcal{F}) \cap D, Ind_{log\, D,p}(\mathcal{F}) = 0.$$

Portanto, estamos nas hipóteses do Teorema 4. Logo,

$$\sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{P}^n \setminus D)} \mu_p(\mathcal{F}) = \int_{\mathbb{P}^n} c_n(T_{\mathbb{P}^n}(-logD) - T_{\mathcal{F}}).$$

Consequentemente,

$$\sum_{p\in Sing(\mathcal{F})\cap(\mathbb{P}^n\setminus D)} \mu_p(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n+1}{n-i-j}(-1)^j k^j\right](d-1)^i.$$

Por outro lado, também do fato de as singularidades de $\mathcal{F}$ serem não-degeneradas, temos

$$\#Sing_{\mathbb{P}^n\setminus D}(\mathcal{F}) = \sum_{p\in Sing(\mathcal{F})\cap(\mathbb{P}^n\setminus D)} \mu_p(\mathcal{F}).$$

Daí, chegamos a seguinte igualdade

$$\#Sing_{\mathbb{P}^n\setminus D}(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n+1}{n-i-j}(-1)^j k^j\right](d-1)^i. \tag{2.10}$$

Vejamos a prova de cada um dos itens separadamente.

Item 1. Da igualdade (2.10)

$$\#Sing_{\mathbb{P}^n\setminus D}(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n+1}{n-i-j}(-1)^j k^j\right](d-1)^i.$$

Como n é ímpar, segue dos itens (1.a) e (1.b) do Lema 4 que

$$\#Sing_{\mathbb{P}^n\setminus D}(\mathcal{F}) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad k < d+1 \qquad \text{e} \qquad \#Sing_{\mathbb{P}^n\setminus D}(\mathcal{F}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = d+1,$$

como queríamos demonstrar.

Item 2. Analogamente, da igualdade (2.10)

$$\#Sing_{\mathbb{P}^n\setminus D}(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n+1}{n-i-j}(-1)^j k^j\right](d-1)^i.$$

Como n é par, segue dos itens (2.a) e (2.b) do Lema 4 que

$$\#Sing_{\mathbb{P}^n\setminus D}(\mathcal{F}) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} k \neq d+1 \\ \text{ou} \\ k = d+1, \ \text{com } d \neq 0 \end{cases}$$

e

$$\#Sing_{\mathbb{P}^n\setminus D}(\mathcal{F}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k = 1 \text{ e } d = 0,$$

como queríamos demonstrar.

Item 3. Da igualdade (2.10)

$$\#Sing_{\mathbb{P}^n\backslash D}(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n+1}{n-i-j}(-1)^j k^j\right](d-1)^i.$$

Mas, pelo Item 4 do Lema 4

$$\sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n+1}{n-i-j}(-1)^j k^j\right](d-1)^i = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(k-1)^i d^{n-i}.$$

Portanto,

$$\#Sing_{\mathbb{P}^n\backslash D}(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(k-1)^i d^{n-i},$$

como queríamos. □

Exemplos otimais

Particularmente, os itens (1.b) e (2.b) do Teorema 5 caracterizam as situações em que todas as singularidades da folheação ocorrem na hipersuperfície invariante. Iremos apresentar alguns exemplos de folheações logarítmicas que são otimais neste sentido, isto é, folheações cujas singularidades ocorrem (todas) na hipersuperfície invariante.

Exemplo 1 *Seja X o campo de vetores dado em coordenadas homogêneas por*

$$\begin{aligned} X &= (-z_1^{k-1} - z_2^{k-1} - z_3^{k-1})\frac{\partial}{\partial z_0} + (z_0^{k-1} - z_2^{k-1} - z_3^{k-1})\frac{\partial}{\partial z_1} + \\ &\quad +(z_0^{k-1} + z_1^{k-1} - z_3^{k-1})\frac{\partial}{\partial z_2} + (z_0^{k-1} + z_1^{k-1} + z_2^{k-1})\frac{\partial}{\partial z_3}. \end{aligned}$$

Considerando a hipersuperfície $D = \{f = 0\}$ definida por $f = z_0^k + z_1^k + z_2^k + z_3^k$, podemos verificar facilmente que $X(f) \equiv 0$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
X(f) &= (-z_1^{k-1}-z_2^{k-1}-z_3^{k-1})\frac{\partial f}{\partial z_0}+(z_0^{k-1}-z_2^{k-1}-z_3^{k-1})\frac{\partial f}{\partial z_1}+\\
&\quad +(z_0^{k-1}+z_1^{k-1}-z_3^{k-1})\frac{\partial f}{\partial z_2}+(z_0^{k-1}+z_1^{k-1}+z_2^{k-1})\frac{\partial f}{\partial z_3}=\\
&= (-z_1^{k-1}-z_2^{k-1}-z_3^{k-1})(kz_0^{k-1})+(z_0^{k-1}-z_2^{k-1}-z_3^{k-1})(kz_1^{k-1})+\\
&\quad +(z_0^{k-1}+z_1^{k-1}-z_3^{k-1})(kz_2^{k-1})+(z_0^{k-1}+z_1^{k-1}+z_2^{k-1})(kz_3^{k-1})=\\
&= (-kz_0^{k-1}z_1^{k-1}-kz_0^{k-1}z_2^{k-1}-kz_0^{k-1}z_3^{k-1})+(kz_0^{k-1}z_1^{k-1}-kz_1^{k-1}z_2^{k-1}-kz_1^{k-1}z_3^{k-1})+\\
&\quad +(kz_0^{k-1}z_2^{k-1}+kz_1^{k-1}z_2^{k-1}-kz_2^{k-1}z_3^{k-1})+(kz_0^{k-1}z_3^{k-1}+kz_1^{k-1}z_3^{k-1}+kz_2^{k-1}z_3^{k-1})=\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, a folheação holomorfa $\mathcal{F}$ induzida pelo campo X, é logarítmica ao longo de D. Nosso objetivo é verificar que este é um exemplo otimal, isto é, todas as singularidades de $\mathcal{F}$ ocorrem na hipersuperfície analítica D.

O conjunto singular de $\mathcal{F}$ é dado por

$$Sing_{\mathbb{P}^3}(\mathcal{F})=\{z\in\mathbb{P}^3:(X\wedge R)(z)=0\},$$

onde $R=z_0\dfrac{\partial}{\partial z_0}+z_1\dfrac{\partial}{\partial z_1}+z_2\dfrac{\partial}{\partial z_2}+z_3\dfrac{\partial}{\partial z_3}$ *é o campo de vetores radial.*

Portanto, nosso objetivo será mostrar que

$$\{z\in\mathbb{P}^3:(X\wedge R)(z)=0\}\subset\{z\in\mathbb{P}^3:z_0^k+z_1^k+z_2^k+z_3^k=0\}.$$

Calcular o conjunto $\{z\in\mathbb{P}^3:(X\wedge R)(z)=0\}$ é o mesmo que calcular o conjunto de zeros dos menores de ordem 2×2 da matriz A dada por

$$A=\begin{bmatrix} -z_1^{k-1}-z_2^{k-1}-z_3^{k-1} & z_0^{k-1}-z_2^{k-1}-z_3^{k-1} & z_0^{k-1}+z_1^{k-1}-z_3^{k-1} & z_0^{k-1}+z_1^{k-1}+z_2^{k-1}\\ \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3\end{bmatrix}.$$

Em outras palavras, a condição $(X\wedge R)(z)=0$ é equivalente ao sistema de equações

$$\begin{cases} -z_0^k + z_0 z_2^{k-1} + z_0 z_3^{k-1} - z_1^k - z_1 z_2^{k-1} - z_1 z_3^{k-1} = 0 & (L_1) \\ -z_0^k - z_0 z_1^{k-1} + z_0 z_3^{k-1} - z_1^{k-1} z_2 - z_2^k - z_2 z_3^{k-1} = 0 & (L_2) \\ -z_0^k - z_0 z_1^{k-1} - z_0 z_2^{k-1} - z_1^{k-1} z_3 - z_2^{k-1} z_3 - z_3^k = 0 & (L_3) \\ -z_0^{k-1} z_1 + z_0^{k-1} z_2 - z_1^k + z_1 z_3^{k-1} - z_2^k - z_2 z_3^{k-1} = 0 & (L_4) \\ -z_0^{k-1} z_1 + z_0^{k-1} z_3 - z_1^k - z_1 z_2^{k-1} - z_2^{k-1} z_3 - z_3^k = 0 & (L_5) \\ -z_0^{k-1} z_2 + z_0^{k-1} z_3 - z_1^{k-1} z_2 + z_1^{k-1} z_3 - z_2^k - z_3^k = 0 & (L_6) \end{cases}$$

Efetuando as operações ($-L_1 + L_2 - L_3 - L_4 + L_5 - L_6$) com as linhas do sistema, obtemos

$$z_0^k + z_1^k + z_2^k + z_3^k = 0.$$

Portanto,

$$\{z \in \mathbb{P}^3 : (X \wedge R)(z) = 0\} \subset \{z \in \mathbb{P}^3 : z_0^k + z_1^k + z_2^k + z_3^k = 0\},$$

como queríamos. Em particular, concluímos que $\#Sing_{\mathbb{P}^n \setminus D}(\mathcal{F}) = 0$.

Observe que neste exemplo, temos $deg(D) = k$ e $deg(\mathcal{F}) = k - 1$. Como n é ímpar, estamos exatamente na situação do item (1.b) do Teorema 5 que também diz que

$$\#Sing_{\mathbb{P}^n \setminus D}(\mathcal{F}) = 0.$$

Exemplo 2 *Consideremos o campo de vetores holomorfo X dado em coordenadas homogêneas por $X = \dfrac{\partial}{\partial z_0}$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le n$, seja $D_i = \{f_i = 0\}$ a hipersuperfície analítica definida por $f_i = z_i$.*

É imediato a verificação de que $X(f_i) \equiv 0$. Portanto, a folheação holomorfa $\mathcal{F}$ definida pelo campo de vetores X é logarítmica ao longo de cada hipersuperfície analítica D_i. Verifiquemos que as singularidades $\mathcal{F}$ ocorrem na hipersuperfície analítica D_i, para todo i.

O conjunto singular de $\mathcal{F}$ é dado por

$$Sing_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{F}) = \{z \in \mathbb{P}^n : (X \wedge R)(z) = 0\},$$

onde $R(z) = z_0 \dfrac{\partial}{\partial z_0} + z_1 \dfrac{\partial}{\partial z_1} + \ldots + z_n \dfrac{\partial}{\partial z_n}$ é o campo de vetores radial.

Como

$$
\begin{aligned}
(X \wedge R)(z) &= \frac{\partial}{\partial z_0} \wedge \left(z_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \ldots + z_n \frac{\partial}{\partial z_n} \right) \\
&= -\left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_0} \wedge \frac{\partial}{\partial z_1} + \ldots + z_n \frac{\partial}{\partial z_0} \wedge \frac{\partial}{\partial z_n} \right),
\end{aligned}
$$

temos,

$$
\begin{aligned}
(X \wedge R)(z) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} z_1 &=& 0 \\ & \vdots & \\ z_n &=& 0 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \quad z = (z_0 : 0 : \ldots : 0).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
Sing_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{F}) = \{z = (1 : 0 : \ldots : 0)\} \subset D_i, \qquad \forall i = 1, \ldots, n.
$$

Neste exemplo, note que temos $deg(\mathcal{F}) = 0$ e $deg(D_i) = 1$, para todo i. Portanto, se considerarmos n par, estaremos no caso do item (2.b) do Teorema 5.

Aplicação ao problema de Poincaré

Em [36], H. Poincaré tratou a seguinte questão: "*no plano projetivo complexo, como caracterizar hipersuperfícies lisas que sejam invariantes por folheações holomorfas* ? ". Este problema ficou conhecido como *o problema de Poincaré* e foi estudado por diversos autores, tais como: D. Cerveau & A. Lins Neto [15] e M. Carnicer [14]. Muitos autores generalizaram este problema para outros contextos. Por exemplo, M. Corrêa JR., F. Brochero & A. M. Rodriguez [17], trataram o problema de Poincaré no contexto das *Orbifolds*, especificamente, em espaços projetivos complexos com pesos.

M. G. Soares [41], tratando do problema de Poincaré, provou um resultado que fornece uma cota superior para o grau da hipersuperfície invariante, em termos do grau da folheação. Este resultado é enunciado a seguir.

Teorema 6 *(M. G. Soares [41]) Em $\mathbb{P}^n$, sejam D uma hipersuperfície analítica lisa e $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de dimensão um, com singularidades isoladas e $deg(\mathcal{F}) > 1$. Suponha que as singularidades de $\mathcal{F}$ sejam não-degeneradas. Se $\mathcal{F}$ é logarítmica ao longo de D, então*

$$
deg(D) \leq deg(\mathcal{F}) + 1.
$$

Como uma aplicação do Teorema 5, vejamos uma maneira de recuperar este resultado. Com efeito, pondo $deg(D) = k$ e $deg(\mathcal{F}) = d$, segue do Teorema Baum-Bott [5], que (ver por exemplo M. G. Soares & R. S. Mol [42])

$$\#Sing(\mathcal{F}) = d^n + d^{n-1} + \ldots + d + 1. \tag{2.11}$$

Por outro lado, segue do item (3) do Teorema 5 que

$$\#Sing_{\mathbb{P}^n \setminus D}(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (k-1)^i d^{n-i}.$$

Vamos supor por absurdo que

$$k > d + 1.$$

Se n é ímpar, segue do item (1.c) do Lema 4 que

$$\#Sing_{\mathbb{P}^n \setminus D}(\mathcal{F}) < 0,$$

o que é uma contradição.

Agora, se n é par, vamos assumir que $n > 2$. Por hipótese, $d = deg(\mathcal{F}) > 1$, daí, segue do item (3.a) do Lema 4 que

$$\#Sing_{\mathbb{P}^n \setminus D}(\mathcal{F}) > d^n + d^{n-1} + \ldots + d + 1.$$

Usando (2.11) na desigualdade acima, obtemos

$$\#Sing_{\mathbb{P}^n \setminus D}(\mathcal{F}) > \#Sing(\mathcal{F}),$$

o que é um absurdo (uma vez que $\mathbb{P}^n \setminus D \subset \mathbb{P}^n$).

Para o caso particular $n = 2$, podemos usar que $\#Sing(\mathcal{F}) \cap D \neq \emptyset$ (veja por exemplo S. C. Coutinho & J. V. Pereira [18], Lema 5.2). Com efeito, deste fato obtemos que

$$\#Sing_D(\mathcal{F}) > 0,$$

e, consequentemente,

$$\#Sing_{\mathbb{P}^n \setminus D}(\mathcal{F}) < \#Sing(\mathcal{F}) = d^n + d^{n-1} + \ldots + d + 1.$$

Mas, em contradição com esta última desigualdade, o item (3.b) do Lema 4 diz que

$$\#Sing_{\mathbb{P}^n \setminus D}(\mathcal{F}) \geq d^n + d^{n-1} + \ldots + d + 1.$$

Assim temos um absurdo. Portanto, está provado que $k \leq d + 1$, como queríamos. $\square$

2.3 Folheações logarítmicas ao longo de hipersuperfícies com singularidades do tipo cruzamentos normais

Nesta seção, nosso objetivo será obter uma generalização do Teorema 4. Mostraremos que este resultado também é válido se considerarmos D uma hipersuperfície analítica com singularidades do tipo cruzamentos normais (ao invés de uma hipersuperfície lisa). Grosso modo, a idéia principal por trás da prova deste resultado vem do seguinte fato: se a hipersuperfície D possui singularidades do tipo cruzamentos normais, então ao fixarmos uma de suas componentes irredutíveis, D_N, a restrição à D_N de cada uma das demais componentes irredutíveis de D, não apenas constitui uma hipersuperfície lisa, como também trata-se de uma hipersuperfície analítica invariante pela folheação. Assim sendo, o Teorema 4 pode ser aplicado convenientemente no contexto destas interseções. Também usaremos o princípio de indução finita sobre o número de componentes irredutíveis da hipersuperfície D.

Ao longo desta seção vamos considerar X uma variedade complexa, compacta, de dimensão n e D uma hipersuperfície analítica em X. Assumiremos que D satisfaz as seguintes condições:

(H1) D tem singularidades do tipo cruzamentos normais;

(H2) $D = \bigcup_{j=1}^{N} D_j$ é a decomposição de D em componentes irredutíveis.

Note que como D tem singularidades do tipo cruzamentos normais, cada componente irredutível D_j, constitui uma hipersuperfície analítica lisa de X. Fixada uma das componente irredutíveis, digamos D_N, vamos considerar as restrições das demais componentes à D_N, isto é,

$$D_j|D_N := D_j \cap D_N \subset D_N, \quad j = 1, \dots, N-1.$$

Pelas hipóteses (H1) e (H2), cada conjunto $D_j|D_N$ (ou é vazio ou) constitui uma hipersuperfície analítica lisa em D_N. Vamos definir

$$\hat{D}_N := \bigcup_{j=1}^{N-1} D_j$$

e

$$\hat{D}_N|D_N := \bigcup_{j=1}^{N-1} D_j|D_N.$$

Note que $\hat{D}_N|D_N$ constitui uma hipersuperfície analítica de D_N com singularidades do tipo cruzamentos normais.

Antes de tratarmos propriamente do resultado principal iremos apresentar uma série de lemas que serão usados posteriormente na sua prova.

Ao longo desta seção, nós vamos denotar por $c_1([D_i])|_{D_N}$ a restrição à D_N da primeira classe de Chern do fibrado $[D_i]$ (para cada $i \in \{1, \dots, N\}$).

Lema 5 *Nas condições acima, valem as seguintes propriedades:*

(a) *Para cada* $i = 1, \ldots, n$,

$$c_i(\Omega^1_X(logD)) = \sum_{k=0}^{i} c_{i-k}(\Omega^1_X) \left(\sum_{j_1+\ldots+j_N=k} c_1([D_1])^{j_1} \ldots c_1([D_N])^{j_N} \right).$$

(b) *Para cada* $i = 1, \ldots, n-1$,

$$c_i(\Omega^1_{D_N}(log(\hat{D}_N|D_N))) = \sum_{k=0}^{i} c_{i-k}(\Omega^1_{D_N}) \left(\sum_{j_1+\ldots+j_{N-1}=k} c_1([D_1|D_N])^{j_1} \ldots c_1([D_{N-1}|D_N])^{j_{N-1}} \right).$$

Demonstração: Primeiro vamos efetuar a demonstração do item (a). A demonstração será feita nos mesmos moldes da demonstração do Lema 2. Com efeito, a sequência exata (1.7) diz que

$$0 \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow \Omega^1_X(logD) \xrightarrow{Res} \bigoplus_{i=1}^{N} \mathcal{O}_{D_i} \longrightarrow 0.$$

Obtemos assim, a expressão abaixo envolvendo as classes total de Chern de Ω^1_X , $\Omega^1_X(logD)$ e de $\bigoplus_{i=1}^{N} \mathcal{O}_{D_i}$

$$c(\Omega^1_X(logD)) = c(\Omega^1_X)c(\bigoplus_{i=1}^{N} \mathcal{O}_{D_i}).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} c_i(\Omega^1_X(logD)) &= \sum_{k=0}^{i} c_{i-k}(\Omega^1_X)c_k(\bigoplus_{i=1}^{N} \mathcal{O}_{D_i}) \\ &= \sum_{k=0}^{i} c_{i-k}(\Omega^1_X) \left(\sum_{j_1+\ldots+j_N=k} c_{j_1}(\mathcal{O}_{D_1}) \ldots c_{j_N}(\mathcal{O}_{D_N}) \right). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Repetindo para cada componente irredutível D_j o mesmo argumento usado para obtenção da expressão (2.4), na demonstração do Lema 2, deduzimos que

$$c_l(\mathcal{O}_{D_j}) = c_1([D_j])^l, \quad \forall l = 1, \ldots, n. \tag{2.13}$$

Agora, usando (2.13) em (2.12) obtemos

$$c_i(\Omega^1_X(logD)) = \sum_{k=0}^{i} c_{i-k}(\Omega^1_X)\left(\sum_{j_1+\ldots+j_N=k} c_1([D_1])^{j_1}\ldots c_1([D_N])^{j_N}\right).$$

e, portanto, está demonstrado o item (a).

Para demonstrar o item (b), basta usar o item (a) fazendo $X = D_N$ e $D_j = D_j|D_N$ (lembrando que em particular, D_N é uma variedade complexa de dimensão $n-1$ e $\hat{D}_N|D_N = \bigcup_{j=1}^{N-1} D_j|D_N$ é uma hipersuperfície analítica de D_N com singularidades do tipo cruzamentos normais).

□

Lema 6 *Nas condições acima, para cada $k = 1, \ldots, n$, seja*

$$\mathfrak{B}_k := \left(\sum_{\substack{j_1+\ldots+j_N=k \\ j_1+\ldots+j_{N-1}<k}} c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1}\ldots c_1([D_N])|_{D_N}^{j_N-1}\right).$$

Valem as seguintes propriedades:

(a) $\mathfrak{B}_{k+1} = (c_1([D_N])|_{D_N})\mathfrak{B}_k + \sum_{j_1+\ldots+j_{N-1}=k} c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1}\ldots c_1([D_{N-1}])|_{D_N}^{j_{N-1}}$;

(b) $\forall l = 1, \ldots, n,$

$$\sum_{k=1}^{l}(c_{l-k}(\Omega^1_X)|_{D_N})\mathfrak{B}_k = \sum_{k=0}^{l-1} c_{l-1-k}(T^*_{D_N})\left(\sum_{j_1+\ldots+j_{N-1}=k} c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1}\ldots c_1([D_{N-1}])|_{D_N}^{j_{N-1}}\right).$$

Demonstração: Vamos primeiro fazer a prova do item (a). Com efeito, por um lado temos

$$\begin{aligned}(c_1([D_N])|_{D_N})\mathfrak{B}_k &= (c_1([D_N])|_{D_N})\left(\sum_{\substack{j_1+\ldots+j_N=k \\ j_1+\ldots+j_{N-1}<k}} c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1}\ldots c_1([D_N])|_{D_N}^{j_N-1}\right) \\ &= \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_N=k \\ j_1+\ldots+j_{N-1}<k}} c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1}\ldots c_1([D_N])|_{D_N}^{j_N}.\end{aligned}$$

Daí, pondo $\tilde{j}_N - 1 = j_N$ neste último somatório, podemos reescrever $(c_1([D_N])|_{D_N})\mathfrak{B}_k$ como

$$(c_1([D_N])|_{D_N})\mathfrak{B}_k = \sum_{\substack{j_1+\ldots+\tilde{j}_N=k+1 \\ j_1+\ldots+j_{N-1}<k}} c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1} \ldots c_1([D_N])|_{D_N}^{\tilde{j}_N-1}. \tag{2.14}$$

Por outro lado, podemos efetuar uma adaptação no somatório

$$\sum_{j_1+\ldots+j_{N-1}=k} c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1} \ldots c_1([D_{N-1}])|_{D_N}^{j_{N-1}}$$

fazendo "aparecer" o fator $c_1([D_N])|_{D_N}$ em cada uma de suas parcela, como indicado abaixo

$$\sum_{j_1+\ldots+j_{N-1}=k} c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1} \ldots c_1([D_{N-1}])|_{D_N}^{j_{N-1}} =$$

$$= \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_{N-1}=k \\ \tilde{j}_N=1}} c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1} \ldots c_1([D_{N-1}])|_{D_N}^{j_{N-1}} c_1([D_N])|_{D_N}^{\tilde{j}_N-1}.$$

Agora, a condição

$$\begin{cases} j_1+\ldots+j_{N-1}=k \\ \tilde{j}_N=1 \end{cases}$$

que aparece neste último somatório pode ser reescrita como

$$\begin{cases} j_1+\ldots+j_{N-1}+\tilde{j}_N=k+1 \\ j_1+\ldots+j_{N-1}=k \end{cases} .$$

Com isso, obtemos

$$\sum_{j_1+\ldots+j_{N-1}=k} c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1} \ldots c_1([D_{N-1}])|_{D_N}^{j_{N-1}} =$$

$$= \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_{N-1}+\tilde{j}_N=k+1 \\ j_1+\ldots+j_{N-1}=k}} c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1} \ldots c_1([D_{N-1}])|_{D_N}^{j_{N-1}} c_1([D_N])|_{D_N}^{\tilde{j}_N-1}. \tag{2.15}$$

Assim, usando (2.14) e (2.15), obtemos

$$
\begin{aligned}
(c_1([D_N])|_{D_N})\mathfrak{B}_k + \sum_{j_1+\ldots+j_{N-1}=k} c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1}\ldots c_1([D_{N-1}])|_{D_N}^{j_{N-1}} &= \\
= \sum_{\substack{j_1+\ldots+\tilde{j}_N=k+1 \\ j_1+\ldots+j_{N-1}<k}} c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1}\ldots c_1([D_N])|_{D_N}^{\tilde{j}_N-1} &+ \\
+ \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_{N-1}+\tilde{j}_N=k+1 \\ j_1+\ldots+j_{N-1}=k}} c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1}\ldots c_1([D_{N-1}])|_{D_N}^{j_{N-1}} c_1([D_N])|_{D_N}^{\tilde{j}_N-1} &= \\
= \left(\sum_{\substack{j_1+\ldots+\tilde{j}_N=k+1 \\ j_1+\ldots+j_{N-1}<k+1}} c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1}\ldots c_1([D_N])|_{D_N}^{\tilde{j}_N-1} \right) &= \\
&= \mathfrak{B}_{k+1}.
\end{aligned}
$$

Com isso, a prova do item (a) está concluída.

Vamos agora proceder com a prova do item (b). Com efeito, seja $l \in \{1, \ldots, n\}$, fixado. Temos

$$
\sum_{k=1}^{l}(c_{l-k}(\Omega_X^1)|_{D_N})\mathfrak{B}_k = (c_{l-1}(\Omega_X^1)|_{D_N})\mathfrak{B}_1 + \sum_{k=2}^{l-1}(c_{l-k}(\Omega_X^1)|_{D_N})\mathfrak{B}_k + \mathfrak{B}_l.
$$

Como D_N é uma hipersuperfície lisa em X, segue do Lema 3 que

$$
c_{l-k}(\Omega_X^1)|_{D_N} = c_{l-k}(T^*_{D_N}) - c_{l-k-1}(T^*_{D_N})c_1([D_N])|_{D_N}, \qquad \forall k = 1, \ldots, l-1. \tag{2.16}
$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^{l}(c_{l-k}(\Omega_X^1)|_{D_N})\mathfrak{B}_k =$$

$$= (c_{l-1}(\Omega_X^1)|_{D_N})\mathfrak{B}_1 + \sum_{k=2}^{l-1}[c_{l-k}(T_{D_N}^*) - c_{l-k-1}(T_{D_N}^*)c_1([D_N])|_{D_N}]\mathfrak{B}_k + \mathfrak{B}_l =$$

$$= (c_{l-1}(\Omega_X^1)|_{D_N})\mathfrak{B}_1 + \sum_{k=2}^{l-1}(c_{l-k}(T_{D_N}^*))\mathfrak{B}_k - \sum_{k=2}^{l-1}(c_{l-k-1}(T_{D_N}^*)c_1([D_N])|_{D_N})\mathfrak{B}_k + \mathfrak{B}_l.$$

Agora, usando a expressão do item (a) deduzimos que

$$\sum_{k=2}^{l-1}(c_{l-k}(T_{D_N}^*))\mathfrak{B}_k =$$

$$\sum_{k=2}^{l-1}(c_{l-k}(T_{D_N}^*)c_1([D_N])|_{D_N})\mathfrak{B}_{k-1} + \sum_{k=2}^{l-1}(c_{l-k}(T_{D_N}^*))\left(\sum_{j_1+\ldots+j_{N-1}=k-1} c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1}\ldots c_1([D_{N-1}])|_{D_N}^{j_{N-1}}\right).$$

Assim, obtemos

$$\sum_{k=1}^{l}(c_{l-k}(\Omega_X^1)|_{D_N})\mathfrak{B}_k =$$

$$(c_{l-1}(\Omega_X^1)|_{D_N})\mathfrak{B}_1 + \sum_{k=2}^{l-1}\big((c_{l-k}(T_{D_N}^*)c_1([D_N])|_{D_N})\mathfrak{B}_{k-1} - (c_{l-k-1}(T_{D_N}^*)c_1([D_N])|_{D_N})\mathfrak{B}_k\big) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{l-1}(c_{l-k}(T_{D_N}^*))\left(\sum_{j_1+\ldots+j_{N-1}=k-1} c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1}\ldots c_1([D_{N-1}])|_{D_N}^{j_{N-1}}\right) + \mathfrak{B}_l.$$

Note que o primeiro somatório do lado direito desta última igualdade é uma soma alternada. Cancelando os termos de parcelas consecutivas, obtemos

$$\sum_{k=1}^{l}(c_{l-k}(\Omega_X^1)|_{D_N})(\mathfrak{B}_k) =$$

$$= (c_{l-1}(\Omega_X^1)|_{D_N})\mathfrak{B}_1 + c_{l-2}(T_{D_N}^*)c_1([D_N])|_{D_N})\mathfrak{B}_1 - c_0(T_{D_N}^*)c_1([D_N])|_{D_N}\mathfrak{B}_{l-1} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{l-1}(c_{l-k}(T_{D_N}^*))\left(\sum_{j_1+\ldots+j_{N-1}=k-1} c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1}\ldots c_1([D_{N-1}])|_{D_N}^{j_{N-1}}\right) + \mathfrak{B}_l.$$

Por (2.16),

$$c_{l-1}(\Omega_X^1)|_{D_N} = c_{l-1}(T_{D_N}^*) - c_{l-2}(T_{D_N}^*)c_1([D_N])|_{D_N},$$

daí obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{l}(c_{l-k}(\Omega_X^1)|_{D_N})\mathfrak{B}_k &= (c_{l-1}(T_{D_N}^*))\mathfrak{B}_1 - (c_1([D_N])|_{D_N})\mathfrak{B}_{l-1} + \\ &+ \sum_{k=2}^{l-1}(c_{l-k}(T_{D_N}^*))\left(\sum_{j_1+\ldots+j_{N-1}=k-1} c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1}\ldots c_1([D_{N-1}])|_{D_N}^{j_{N-1}}\right) + \mathfrak{B}_l.\end{aligned}$$

Pelo item (a),

$$\mathfrak{B}_l - (c_1([D_N])|_{D_N})\mathfrak{B}_{l-1} = \sum_{j_1+\ldots+j_{N-1}=l-1} c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1}\ldots c_1([D_{N-1}])|_{D_N}^{j_{N-1}},$$

com isso,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{l}(c_{l-k}(\Omega_X^1)|_{D_N})\mathfrak{B}_k &= (c_{l-1}(T_{D_N}^*))\mathfrak{B}_1 + \left(\sum_{j_1+\ldots+j_{N-1}=l-1} c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1}\ldots c_1([D_{N-1}])|_{D_N}^{j_{N-1}}\right) + \\ &+ \sum_{k=2}^{l-1}(c_{l-k}(T_{D_N}^*))\left(\sum_{j_1+\ldots+j_{N-1}=k-1} c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1}\ldots c_1([D_{N-1}])|_{D_N}^{j_{N-1}}\right).\end{aligned}$$

Pondo $k = \hat{k} + 1$ no segundo somatório do lado direito da última igualdade, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{l}(c_{l-k}(\Omega_X^1)|_{D_N})\mathfrak{B}_k &= (c_{l-1}(T_{D_N}^*))\mathfrak{B}_1 + \left(\sum_{j_1+\ldots+j_{N-1}=l-1} c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1}\ldots c_1([D_{N-1}])|_{D_N}^{j_{N-1}}\right) + \\ &+ \sum_{\hat{k}=1}^{l-2}(c_{l-1-\hat{k}}(T_{D_N}^*))\left(\sum_{j_1+\ldots+j_{N-1}=\hat{k}} c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1}\ldots c_1([D_{N-1}])|_{D_N}^{j_{N-1}}\right).\end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{k=1}^{l}(c_{l-k}(\Omega_X^1)|_{D_N})\mathfrak{B}_k =$$

$$= (c_{l-1}(T_{D_N}^*))\mathfrak{B}_1 + \sum_{\hat{k}=1}^{l-1}(c_{l-1-\hat{k}}(T_{D_N}^*))\left(\sum_{j_1+\ldots+j_{N-1}=\hat{k}} c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1}\ldots c_1([D_{N-1}])|_{D_N}^{j_{N-1}}\right).$$

Como

$$\mathfrak{B}_1 = \left(\sum_{\substack{j_1+\ldots+j_N=1\\ j_1+\ldots+j_{N-1}<1}} c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1}\ldots c_1([D_N])|_{D_N}^{j_N-1}\right) = 1,$$

segue que

$$\sum_{k=1}^{l}(c_{l-k}(\Omega_X^1)|_{D_N})\mathfrak{B}_k =$$

$$= c_{l-1}(T_{D_N}^*) + \sum_{\hat{k}=1}^{l-1}(c_{l-1-\hat{k}}(T_{D_N}^*))\left(\sum_{j_1+\ldots+j_{N-1}=\hat{k}} c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1}\ldots c_1([D_{N-1}])|_{D_N}^{j_{N-1}}\right) =$$

$$= \sum_{\hat{k}=0}^{l-1}(c_{l-1-\hat{k}}(T_{D_N}^*))\left(\sum_{j_1+\ldots+j_{N-1}=\hat{k}} c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1}\ldots c_1([D_{N-1}])|_{D_N}^{j_{N-1}}\right).$$

Portanto, está demonstrado o item (b). $\square$

Proposição 7 *Nas condições acima, se L é um fibrado vetorial holomorfo de posto 1 sobre X, então*

$$\int_X c_n(T_X(-logD)\otimes L) \;=\; \int_X c_n(T_X(-log(\hat{D}_N)\otimes L) - \int_{D_N} c_{n-1}(T_{D_N}(-log(\hat{D}_N|D_N)\otimes L|_{D_N}).$$

Demonstração: Usando as propriedades (1.1) e (1.2), obtemos

$$\int_X c_n(T_X(-logD)\otimes L) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\int_X c_{n-j}(\Omega_X^1(logD))c_1(L)^j. \tag{2.17}$$

Agora, em cada $c_{n-j}(\Omega_X^1(logD))$ do somatório acima, podemos usar o item (a) do Lema 5 e assim obter

$$\int_X c_n(T_X(-logD)\otimes L) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\int_X \left[\sum_{k=0}^{n-j} c_{n-j-k}(\Omega_X^1)\left(\sum_{j_1+\ldots+j_N=k} c_1([D_1])^{j_1}\ldots c_1([D_N])^{j_N}\right)\right] c_1(L)^j.$$

Decompondo este somatório acima em duas partes (uma com os termos em que $k\geq 1$ e outra com os termos em que $k=0$), obtemos :

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\int_X \left[\sum_{k=0}^{n-j} c_{n-j-k}(\Omega_X^1)\left(\sum_{j_1+\ldots+j_N=k} c_1([D_1])^{j_1}\ldots c_1([D_N])^{j_N}\right)\right] c_1(L)^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X \left[\sum_{k=1}^{n-j} c_{n-j-k}(\Omega_X^1)\left(\sum_{j_1+\ldots+j_N=k} c_1([D_1])^{j_1}\ldots c_1([D_N])^{j_N}\right)\right] c_1(L)^j +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\int_X c_{n-j}(\Omega_X^1)c_1(L)^j.$$

Calculando o segundo somatório do lado direito da igualdade, temos

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\int_X c_{n-j}(\Omega_X^1)c_1(L)^j &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\int_X (-1)^{n-j}c_{n-j}(T_X)c_1(L)^j \\ &= \sum_{j=0}^{n}\int_X c_{n-j}(T_X)c_1(L)^j,\end{aligned}$$

onde usamos novamente a propriedade (1.2) da classe de Chern. Agora, usando a propriedade (1.1), chegamos à

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\int_X c_{n-j}(\Omega_X^1)c_1(L)^j = \int_X c_n(T_X\otimes L),$$

e assim, finalizamos o cálculo do segundo somatório.

Já o primeiro somatório pode ser calculado como segue. Em primeiro lugar, vamos decompô-lo em dois novos somatórios, conforme indicado abaixo

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X\left[\sum_{k=1}^{n-j}c_{n-j-k}(\Omega_X^1)\left(\sum_{j_1+\ldots+j_N=k}c_1([D_1])^{j_1}\ldots c_1([D_N])^{j_N}\right)\right]c_1(L)^j =$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X\left[\sum_{k=1}^{n-j}c_{n-j-k}(\Omega_X^1)\left(\sum_{\substack{j_1+\ldots+j_N=k\\ j_1+\ldots+j_{N-1}<k}}c_1([D_1])^{j_1}\ldots c_1([D_N])^{j_N}\right)\right]c_1(L)^j +$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X\left[\sum_{k=1}^{n-j}c_{n-j-k}(\Omega_X^1)\left(\sum_{j_1+\ldots+j_{N-1}=k}c_1([D_1])^{j_1}\ldots c_1([D_{N-1}])^{j_{N-1}}\right)\right]c_1(L)^j.$$

Isso é possível usando a igualdade (trivial) abaixo

$$\sum_{j_1+\ldots+j_{N-1}+j_N=k}c_1([D_1])^{j_1}\ldots c_1([D_{N-1}])^{j_{N-1}}c_1([D_N])^{j_N} =$$

$$\sum_{\substack{j_1+\ldots+j_{N-1}+j_N=k\\ j_1+\ldots+j_{N-1}<k}}c_1([D_1])^{j_1}\ldots c_1([D_N])^{j_N} + \sum_{j_1+\ldots+j_{N-1}=k}c_1([D_1])^{j_1}\ldots c_1([D_{N-1}])^{j_{N-1}}.$$

Equivalentemente, podemos denotar a decomposição obtida como

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X\left[\sum_{k=1}^{n-j}c_{n-j-k}(\Omega_X^1)\left(\sum_{j_1+\ldots+j_N=k}c_1([D_1])^{j_1}\ldots c_1([D_N])^{j_N}\right)\right]c_1(L)^j=\Delta_1+\Delta_2,$$

onde

$$\Delta_1=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X\left[\sum_{k=1}^{n-j}c_{n-j-k}(\Omega_X^1)\left(\sum_{\substack{j_1+\ldots+j_N=k\\ j_1+\ldots+j_{N-1}<k}}c_1([D_1])^{j_1}\ldots c_1([D_N])^{j_N}\right)\right]c_1(L)^j$$

e

$$\Delta_2=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X\left[\sum_{k=1}^{n-j}c_{n-j-k}(\Omega_X^1)\left(\sum_{j_1+\ldots+j_{N-1}=k}c_1([D_1])^{j_1}\ldots c_1([D_{N-1}])^{j_{N-1}}\right)\right]c_1(L)^j.$$

<u>Calculando Δ_1</u>: Usando que $c_1([D_N])$ é o dual de Poincaré do ciclo determinado por D_N, obtemos

$$\Delta_1=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_{D_N}\left[\sum_{k=1}^{n-j}c_{n-j-k}(\Omega_X^1)|_{D_N}\left(\sum_{\substack{j_1+\ldots+j_N=k\\ j_1+\ldots+j_{N-1}<k}}c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1}\ldots c_1([D_N])|_{D_N}^{j_N-1}\right)\right]c_1(L)|_{D_N}^j.$$

Agora, para cada $k=1,\ldots,n$, sendo

$$\mathfrak{B}_k=\left(\sum_{\substack{j_1+\ldots+j_N=k\\ j_1+\ldots+j_{N-1}<k}}c_1([D_1])|_{D_N}^{j_1}\ldots c_1([D_N])|_{D_N}^{j_N-1}\right),$$

obtemos

$$\Delta_1 \;=\; \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_{D_N}\left[\sum_{k=1}^{n-j}(c_{n-j-k}(\Omega_X^1)|_{D_N})\mathfrak{B}_k\right]c_1(L)|_{D_N}^j.$$

Usando o item (b) do Lema 6, temos

$$\Delta_1 =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_{D_N}\left[\sum_{k=0}^{n-j-1} c_{n-j-1-k}(T^*_{D_N})\left(\sum_{j_1+\ldots+j_{N-1}=k} c_1([D_1])|^{j_1}_{D_N}\ldots c_1([D_{N-1}])|^{j_{N-1}}_{D_N}\right)\right]c_1(L)|^j_{D_N}.$$

Como T_{D_N} é o dual de $\Omega^1_{D_N}$, podemos escrever

$$\Delta_1 =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_{D_N}\left[\sum_{k=0}^{n-j-1} c_{n-j-1-k}(\Omega^1_{D_N})\left(\sum_{j_1+\ldots+j_{N-1}=k} c_1([D_1])|^{j_1}_{D_N}\ldots c_1([D_{N-1}])|^{j_{N-1}}_{D_N}\right)\right]c_1(L)|^j_{D_N}.$$

Usando o item (b) do Lema 5, temos

$$\Delta_1 = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_{D_N}\left[c_{n-j-1}(\Omega^1_{D_N}(log(\hat{D}_N|D_N)))\right]c_1(L)|^j_{D_N}.$$

Como $T_{D_N}(log(\hat{D}_N|D_N)$ é o dual de $\Omega^1_{D_N}(log(\hat{D}_N|D_N)$, temos

$$\Delta_1 = -\sum_{j=0}^{n-1}\int_{D_N}\left[c_{n-j-1}(T_{D_N}(log(\hat{D}_N|D_N))\right]c_1(L)|^j_{D_N}.$$

Usando a propriedade (1.1) da classe de Chern, obtemos

$$\Delta_1 = -\int_{D_N} c_{n-1}(T_{D_N}(log(\hat{D}_N|D_N)\otimes L|_{D_N}),$$

e assim chegamos ao fim do cálculo de Δ_1.
Calculando Δ_2: Somando e subtraindo $c_{n-j}(\Omega^1_X)$ em cada parcela do somatório Δ_2, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X \left[\sum_{k=0}^{n-j} c_{n-j-k}(\Omega_X^1)\left(\sum_{j_1+\ldots+j_{N-1}=k} c_1([D_1])^{j_1}\ldots c_1([D_{N-1}])^{j_{N-1}}\right) - c_{n-j}(\Omega_X^1)\right] c_1(L)^j = \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X \left[\sum_{k=0}^{n-j} c_{n-j-k}(\Omega_X^1)\left(\sum_{j_1+\ldots+j_{N-1}=k} c_1([D_1])^{j_1}\ldots c_1([D_{N-1}])^{j_{N-1}}\right)\right] c_1(L)^j - \\
&- \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X c_{n-j}(\Omega_X^1)c_1(L)^j.
\end{aligned}$$

O segundo somatório que aparece no lado direito da última igualdade é facilmente calculado. De fato, usando a propriedade (1.2) da classe de Chern, obtemos

$$\begin{aligned}
-\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X c_{n-j}(\Omega_X^1)c_1(L)^j &= -\sum_{j=0}^{n-1}\int_X c_{n-j}(T_X)c_1(L)^j = \\
&= -\int_X c_n(T_X\otimes L).
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a propriedade (1.1).

Já o primeiro somatório pode ser calculado como segue. Como $\hat{D}_N = \bigcup_{j=1}^{N-1} D_j$ é também uma hipersuperfície analítica em X com singularidades do tipo cruzamentos normais, podemos usar o item (a) do Lema 5 para obtermos

$$c_i(\Omega_X^1(log(\hat{D}_N))=\sum_{k=0}^{i} c_{i-k}(\Omega_X^1)\left(\sum_{j_1+\ldots+j_{N-1}=k} c_1([D_1])^{j_1}\ldots c_1([D_{N-1}])^{j_{N-1}}\right), \quad 1\le i\le n.$$

Daí,

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X\left[\sum_{k=0}^{n-j}c_{n-j-k}(\Omega_X^1)\left(\sum_{j_1+\ldots+j_{N-1}=k}c_1([D_1])^{j_1}\ldots c_1([D_{N-1}])^{j_{N-1}}\right)\right]c_1(L)^j \quad =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X c_{n-j}(\Omega_X^1(log(\hat{D}_N)))c_1(L)^j \quad =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}\int_X c_{n-j}(T_X(-log(\hat{D}_N)))c_1(L)^j \quad =$$

$$= \int_X c_n(T_X(-log(\hat{D}_N))\otimes L),$$

onde nas duas últimas igualdades usamos, respectivamente, as propriedades (1.2) e (1.1) da classe de Chern.

Dessa forma, chegamos ao fim do cálculo de Δ_2 obtendo

$$\Delta_2 = \int_X c_n(T_X(-log(\hat{D}_N))\otimes L) - \int_X c_n(T_X\otimes L).$$

Agora, voltando para a expressão inicial, temos

$$\int_X c_n(T_X(-logD)\otimes L) \quad = \quad \Delta_1 + \Delta_2 + \int_X c_n(T_X\otimes L).$$

Ou seja,

$$\int_X c_n(T_X(-log\, D)\otimes L) \quad = \quad \int_X c_n(T_X(-log\,\hat{D}_N)\otimes L) - \int_{D_N} c_{n-1}(T_{D_N}(-log(\hat{D}_N|_{D_N})\otimes L|_{D_N})),$$

como queríamos demonstrar. $\square$

A seguir vamos apresentar o teorema principal desta seção. Este resultado é uma versão do Teorema 4 para o caso em que a hipersuperfície invariante D tenha singularidades do tipo cruzamentos normais. Para sua demonstração, além dos resultados que apresentamos preliminarmente nesta seção, usaremos o principio de indução finita sobre o número de componentes irredutíveis de D.

Teorema 7 *Sejam X uma variedade complexa, compacta, de dimensão n, D uma hipersuperfície analítica em X com singularidades do tipo cruzamentos normais e $\mathcal{F}$ uma folheação de dimensão um em X, logarítmica ao longo de D e com singularidades isoladas. Suponha que as singularidades de $\mathcal{F}$ sejam não-degeneradas. Então,*

$$\int_X c_n(T_X(-logD) - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap (X \setminus D)} \mu_p(\mathcal{F}). \tag{2.18}$$

Demonstração: Vamos usar o princípio de indução finita sobre o número de componentes irredutíveis de D. Com efeito, se D possui apenas uma componente irredutível, então D é lisa. Como por hipótese as singularidades de $\mathcal{F}$ são não-degeneradas, temos em particular que (Observação 1),

$$\forall p \in Sing(\mathcal{F}) \cap D, Ind_{log\,D,p}(\mathcal{F}) = 0.$$

Portanto, estamos nas hipóteses do Teorema 4. Logo, o teorema é verdadeiro para este caso.

Como hipótese de indução, suponhamos que para toda hipersuperfície analítica em X, satisfazendo as condições do enunciado do teorema e tendo $N-1$ componentes irredutíveis, valha a fórmula (2.18).

Seja D uma hipersuperfície analítica em X, com N componentes irredutíveis, satisfazendo as hipóteses do teorema. Vamos provar que a fórmula (2.18) é verdadeira para D.

Sabemos que $\hat{D}_N$ constitui uma hipersuperfície analítica de X, com singularidades do tipo cruzamentos normais e tendo exatamente $N-1$ componentes irredutíveis. Além disso, $\mathcal{F}$ é logarítmica ao longo de $\hat{D}_N$. Dessa forma, podemos usar a hipótese de indução e obter

$$\sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap (X \setminus \hat{D}_N)} \mu_p(\mathcal{F}) = \int_X c_n(T_X(-log\hat{D}_N) - T_{\mathcal{F}}). \tag{2.19}$$

Por outro lado, $\hat{D}_N|D_N$ constitui uma hipersuperfície analítica de D_N com singularidades do tipo cruzamentos normais, tendo também $N-1$ componentes irredutíveis. Além disso, $\mathcal{F}|_{D_N}$ é logarítmica ao longo de $\hat{D}_N|D_N$. Dessa forma, também podemos invocar a hipótese de indução e obter

$$\sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap [D_N \setminus (\hat{D}_N|D_N)]} \mu_p(\mathcal{F}) = \int_{D_N} c_{n-1}(T_{D_N}(-log(\hat{D}_N|D_N)) - T_{\mathcal{F}}|_{D_N}). \tag{2.20}$$

Note que neste caso, o fibrado tangente $T_{\mathcal{F}|_{D_N}}$ da folheação $\mathcal{F}|_{D_N}$ em D_N é exatamente a restrição à D_N do fibrado tangente de $\mathcal{F}$.

Como vale a seguinte igualdade de conjuntos

$$X \setminus D = (X \setminus \hat{D}_N) \setminus [D_N \setminus (\hat{D}_N \cap D_N)],$$

obtemos

$$\sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap (X \setminus D)} \mu_p(\mathcal{F}) = \sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap (X \setminus \hat{D}_N)} \mu_p(\mathcal{F}) - \sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap [D_N \setminus (\hat{D}_N | D_N)]} \mu_p(\mathcal{F}).$$

Daí usando (2.19) e (2.20), obtemos

$$\sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap (X \setminus D)} \mu_p(\mathcal{F}) = \int_X c_n(T_X(-log\, \hat{D}_N) - T_{\mathcal{F}}) - \int_{D_N} c_{n-1}(T_X(-log\,(\hat{D}_N | D_N)) - T_{\mathcal{F}}|_{D_N}). \quad (2.21)$$

Mas, fazendo $L = T^*_{\mathcal{F}}$ na Proposição 7 e usando as propriedades (1.1) e (1.3), obtemos

$$\int_X c_n(T_X(-logD) - T_{\mathcal{F}}) = \int_X c_n(T_X(-log\, \hat{D}_N) - T_{\mathcal{F}}) - \int_{D_N} c_{n-1}(T_{D_N}(-log\,(\hat{D}_N | D_N)) - T_{\mathcal{F}}|_{D_N}).$$

Voltando para a igualdade (2.21), obtemos

$$\int_X c_n(T_X(-logD) - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap (X \setminus D)} \mu_p(\mathcal{F}).$$

Dessa forma, pelo princípio de indução finita o teorema está provado. □

2.4 Folheações logarítmicas ao longo de hipersuperfícies com singularidades isoladas

Nesta seção, vamos continuar tratando do problema de generalizar a fórmula Baum-Bott [6]. Vamos considerar agora, variedades complexas não-compactas no sentido de Iitaka [28], cuja compactificação seja dada por uma hipersuperfície analítica com singularidades isoladas. Nosso objetivo será provar o Teorema 8 que é o resultado principal da seção.

Teorema 8 *Sejam X uma variedade complexa, compacta, de dimensão n, D uma hipersuperfície analítica em X, reduzida, com singularidades isoladas e $\mathcal{F}$ uma folheação em X de dimensão um, com singularidades isoladas e logarítmica ao longo de D. Suponha que $\forall p \in Sing(\mathcal{F}) \cap D_{reg}, Ind_{log\, D,p}(\mathcal{F}) = 0$. Se $dim(X) \geq 3$, então*

$$\int_X c_n(T_X(-logD) - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap (X \setminus D_{reg})} \mu_p(\mathcal{F}) - \sum_{p \in Sing(D)} GSV(\mathcal{F}, D, p).$$

Antes de proceder a prova deste teorema, vamos considerar alguns resultados preliminares.

Lema 7 *Sejam X uma variedade complexa de dimensão n e D uma hipersuperfície analítica em X, reduzida. Se o conjunto singular de D tem codimensão ≥ 3 em X, então*

$$c_i(\Omega_X^1(logD)) = \sum_{k=0}^{i} c_{i-k}(\Omega_X^1) c_1([D])^k, \quad \forall i \leq n. \tag{2.22}$$

Demonstração: Sendo D reduzida e com conjunto singular de codimensão ≥ 3 em X, temos a sequência exata (1.8)

$$0 \longrightarrow \Omega_X^1 \longrightarrow \Omega_X^1(logD) \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0.$$

Com isso, obtemos

$$c_i(\Omega_X^1(logD)) = \sum_{k=0}^{i} c_{i-k}(\Omega_X^1) c_i(\mathcal{O}_D), \quad \forall i \leq n. \tag{2.23}$$

Por outro lado, sabemos também que existe a sequência exata (ver D. Huybrechts [27])

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-D) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0,$$

donde podemos deduzir que

$$c_i(\mathcal{O}_D) = c_1([D])^i, \quad \forall i \leq n. \tag{2.24}$$

Usando (2.24) em (2.23), temos

$$c_i(\Omega^1_X(logD)) = \sum_{k=0}^{i} c_{i-k}(\Omega^1_X)c_1([D])^k, \quad \forall i \leq n,$$

como queríamos demonstrar. □

Teorema 9 *Sejam X uma variedade complexa de dimensão n e D uma hipersuperfície analítica em X, reduzida. Se o conjunto singular de D possui codimensão ≥ 3 em X, então para todo fibrado vetorial holomorfo L de posto 1 sobre X, vale*

$$\int_X c_n(T_X(-logD) - L) = \int_X c_n(T_X - L) - \int_D c_{n-1}(T_X - [D] - L).$$

Demonstração: Usando a propriedade (1.3) para classe de Chern de fibrados virtuais, obtemos

$$\int_X c_n(T_X(-logD) - L) = \sum_{j=0}^{n} \int_X c_{n-j}(T_X(-logD))c_1(L^*)^j.$$

Como o dual de $T_X(-logD)$ é $\Omega^1_X(logD)$, segue que

$$\int_X c_n(T_X(-logD) - L) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \int_X c_{n-j}(\Omega^1_X(logD))c_1(L^*)^j.$$

Agora, sendo D uma hipersuperfície analítica em X, reduzida e com conjunto singular de codimensão ≥ 3, podemos usar a expressão (2.22) do Lema 7 em cada $c_{n-j}(\Omega^1_X(logD))$ do somatório. Com efeito, temos

$$\int_X c_n(T_X(-logD) - L) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \int_X \left[\sum_{k=0}^{n-j} c_{n-j-k}(\Omega^1_X)c_1([D])^k \right] c_1(L^*)^j. \tag{2.25}$$

Podemos decompor esse somatório em duas parte. A primeira com os termos tendo $k \geq 1$ e a segunda com os termos $k = 0$:

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\int_X\left[\sum_{k=0}^{n-j}c_{n-j-k}(\Omega_X^1)c_1([D])^k\right]c_1(L^*)^j =$$
$$=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X\left[\sum_{k=1}^{n-j}c_{n-j-k}(\Omega_X^1)c_1([D])^k\right]c_1(L^*)^j+\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\int_X c_{n-j}(\Omega_X^1)c_1(L^*)^j.$$

O segundo somatório, no lado direito da igualdade, pode ser calculado. De fato, usando que T_X é o dual do fibrado Ω_X^1, obtemos:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\int_X c_{n-j}(\Omega_X^1)c_1(L^*)^j &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\int_X(-1)^{n-j}c_{n-j}(T_X)c_1(L^*)^j\\ &= \sum_{j=0}^{n}\int_X c_{n-j}(T_X)c_1(L^*)^j.\end{aligned}$$

Assim, pela propriedade (1.3) para classe de Chern de fibrados virtuais, concluímos que

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\int_X c_{n-j}(\Omega_X^1)c_1(L^*)^j=\int_X c_n(T_X-L).$$

Já o primeiro somatório pode ser calculado como segue. Sendo $c_1([D])$ o dual de Poincaré do ciclo definido por D, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X\left[\sum_{k=1}^{n-j}c_{n-j-k}(\Omega_X^1)c_1([D])^k\right]c_1(L^*)^j &= \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_D\left[\sum_{k=1}^{n-j}c_{n-j-k}(\Omega_X^1)c_1([D])^{k-1}\right]c_1(L^*)^j =\\ &= -\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j-1}\int_D\left[\sum_{k=1}^{n-j}c_{n-j-k}(\Omega_X^1)c_1([D])^{k-1}\right]c_1(L^*)^j =\\ &= -\sum_{j=0}^{n-1}\int_D\left[\sum_{k=1}^{n-j}(-1)^{n-j-1}c_{n-j-k}(\Omega_X^1)c_1([D])^{k-1}\right]c_1(L^*)^j.\end{aligned}$$

Com isso, podemos escrever

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X\left[\sum_{k=1}^{n-j}c_{n-j-k}(\Omega_X^1)c_1([D])^k\right]c_1(L^*)^j=-\sum_{j=0}^{n-1}\int_D\left[\sum_{k=1}^{n-j}(-1)^{n-j-k}c_{n-j-k}(\Omega_X^1)(-1)^{k-1}c_1([D])^{k-1}\right]c_1(L^*)^j.$$

Usando que T_X é o dual do fibrado Ω^1_X,

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X\left[\sum_{k=1}^{n-j}c_{n-j-k}(\Omega^1_X)c_1([D])^k\right]c_1(L^*)^j = -\sum_{j=0}^{n-1}\int_D\left[\sum_{k=1}^{n-j}c_{n-j-k}(T_X)(-1)^{k-1}c_1([D])^{k-1}\right]c_1(L^*)^j.$$

Pela propriedade (1.2) da classe de Chern do dual de um fibrado, temos que

$$\forall k, 1\leq k\leq n-j,\quad (-1)^{k-1}c_1([D])^{k-1}=c_1([D]^*)^{k-1}.$$

Com isso, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X\left[\sum_{k=1}^{n-j}c_{n-j-k}(\Omega^1_X)c_1([D])^k\right]c_1(L^*)^j &= -\sum_{j=0}^{n-1}\int_D\left[\sum_{k=1}^{n-j}c_{n-j-k}(T_X)c_1([D]^*)^{k-1}\right]c_1(L^*)^j = \\ &= -\int_D\sum_{j=0}^{n-1}\left[\sum_{k=1}^{n-j}c_{n-j-k}(T_X)c_1([D]^*)^{k-1}\right]c_1(L^*)^j.\end{aligned}$$

Efetuando a mudança de parâmetro, do parâmetro k para o parâmetro $t+1$, obtemos

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X\left[\sum_{k=1}^{n-j}c_{n-j-k}(\Omega^1_X)c_1([D])^k\right]c_1(L^*)^j = -\int_D\sum_{j=0}^{n-1}\left[\sum_{t=0}^{n-1-j}c_{n-1-j-t}(T_X)c_1([D]^*)^t\right]c_1(L^*)^j.$$

Daí, usando a propriedade (1.3) para classe de Chern de fibrados virtuais,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X\left[\sum_{k=1}^{n-j}c_{n-j-k}(\Omega^1_X)c_1([D])^k\right]c_1(L^*)^j &= -\int_D\sum_{j=0}^{n-1}\left[c_{n-1-j}(T_X-[D])\right]c_1(L^*)^j = \\ &= -\int_D c_{n-1}(T_X-[D]-L).\end{aligned}$$

Assim, voltando para a igualdade (2.25) obtemos

$$\int_X c_n(T_X(-logD)-L)=\int_X c_n(T_X-L)-\int_D c_{n-1}(T_X-[D]-L).$$

Portanto, o lema está demonstrado.□

Demonstração do Teorema 8

Pelo Teorema Baum-Bott [6],

$$\sum_{p\in Sing(\mathcal{F})} \mu_p(\mathcal{F}) = \int_X c_n(T_X - T_{\mathcal{F}}). \tag{2.26}$$

Por outro lado, sendo D uma hipersuperfície analítica de X, temos que D é uma subvariedade analítica do tipo ICL definida por uma seção do fibrado vetorial $[D]$. Como $\mathcal{F}$ é uma folheação holomorfa de dimensão um em X, com singularidades isoladas e logarítmica ao longo de D, segue do Teorema 2 que

$$\sum_{p\in Sing(\mathcal{F},D)} GSV(\mathcal{F}, D, p) = \int_D c_{n-1}(T_X - [D] - T_{\mathcal{F}}). \tag{2.27}$$

Agora, por hipótese, $dim(X) \geq 3$ e as singularidades de D são isoladas. Portanto, em particular, a codimensão do conjunto singular de D é ≥ 3. Podemos então, considerar o Teorema 9 com $L = T_{\mathcal{F}}$. Com efeito, obtemos

$$\int_X c_n(T_X(-logD) - T_{\mathcal{F}}) \;\; = \;\; \int_X c_n(T_X - T_{\mathcal{F}}) - \int_D c_{n-1}(T_X - [D] - T_{\mathcal{F}}). \tag{2.28}$$

Daí, usando as expressões (2.26) e (2.27) em (2.28) temos

$$\int_X c_n(T_X(-logD) - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{p\in Sing(\mathcal{F})} \mu_p(\mathcal{F}) - \sum_{p\in Sing(\mathcal{F},D)} GSV(\mathcal{F}, D, p).$$

Agora, como $Sing(\mathcal{F})$ e $Sing(\mathcal{F}, D)$ podem ser decompostos em

$$Sing(\mathcal{F}) = [Sing(\mathcal{F}) \cap (X \setminus D_{reg})] \cup (Sing(\mathcal{F}) \cap D_{reg})$$

e

$$Sing(\mathcal{F}, D) = (Sing(\mathcal{F}) \cap D_{reg}) \cup Sing(D),$$

e ambas as decomposições são disjuntas, podemos escrever

$$\sum_{p\in Sing(\mathcal{F})} \mu_p(\mathcal{F}) = \sum_{p\in Sing(\mathcal{F})\cap(X\setminus D_{reg})} \mu_p(\mathcal{F}) + \sum_{p\in Sing(\mathcal{F})\cap D_{reg}} \mu_p(\mathcal{F})$$

e

$$\sum_{p\in Sing(\mathcal{F},D)} GSV(\mathcal{F}, D, p) = \sum_{p\in Sing(\mathcal{F})\cap D_{reg}} GSV(\mathcal{F}, D, p) + \sum_{p\in Sing(D)} GSV(\mathcal{F}, D, p).$$

Mas, por hipótese

$$\forall p \in Sing(\mathcal{F}) \cap D_{reg}, Ind_{log\,D,p}(\mathcal{F}) = 0.$$

Daí, pela Proposição 3, obtemos que para todo $p \in D_{reg}$, $GSV(\mathcal{F}, D, p) = \mu_p(\mathcal{F})$. Logo,

$$\int_X c_n(T_X(-logD) - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap (X \setminus D_{reg})} \mu_p(\mathcal{F}) - \sum_{p \in Sing(D)} GSV(\mathcal{F}, D, p),$$

como queríamos provar. $\square$

2.5 Aplicação: Teorema do tipo Gauss-Bonnet

Nesta seção, nosso objetivo será apresentar uma generalização do Teorema de Gauss-Bonnet, como uma aplicação do Teorema 9.

O Teorema de Gauss-Bonnet (clássico), válido para variedades complexas M, compactas, estabelece uma fórmula que relaciona o número Top de Chern de M com sua característica de Euler (ver P. Griffths & J. Harris [24]),

$$\int_M c_n(M) \;=\; \chi(M). \qquad \textit{(fórmula clássica Gauss-Bonnet)}$$

No mesmo espírito da pergunta motivadora desta Tese, surge naturalmente aqui a seguinte questão:

“ Qual seria a versão do Teorema de Gauss-Bonnet para variedades não-compactas ?”

Para variedades não-compactas no sentido de Iitaka [28], isto é, variedades complexas $\tilde{X}$ que podem ser compactificadas com a adição de um divisor D, existe na literatura a seguinte versão do Teorema de Gauss-Bonnet, para o caso em que D tenha singularidades do tipo cruzamentos normais.

Teorema 10 *Seja $\tilde{X}$ uma variedade complexa (não-compacta) do tipo $\tilde{X} = X \setminus D$, onde X é uma variedade complexa, compacta, de dimensão n e D uma hipersuperfície analítica em X com singularidades do tipo cruzamentos normais. Então,*

$$\int_X c_n(T_X(-logD)) \;=\; \chi(\tilde{X}), \qquad \left(\begin{array}{c} \textit{fórmula Gauss-Bonett,} \\ \textit{variedades não-compactas} \end{array} \right)$$

onde a característica de Euler $\chi(\tilde{X})$ é dada por

$$\chi(\tilde{X}) = \sum_{i=1}^{n} dim_{\mathbb{C}} H^i_c(\tilde{X}, \mathbb{C}).$$

Este resultado foi proposto inicialmente por Iitaka e foi provado por Y. Norimatsu [34]. Posteriormente, R. Silvotti [40] também o demonstrou. P. Aluffi [3] também recuperou este resultado ao estudar as classes Chern-Schwartz-MacPherson.

A seguir, provaremos uma versão do Teorema de Gauss-Bonnet, para variedades não compactas, no sentido de Iitaka. Neste caso, vamos considerar D uma hipersuperfície analítica com singularidades isoladas. Usaremos o Teorema 9.

Teorema 11 *(Gauss-Bonnet Generalizado) Seja $\tilde{X}$ uma variedade complexa do tipo $\tilde{X} = X \setminus D$, onde X é uma variedade complexa, compacta, de dimensão n e D uma hipersuperfície analítica em X, reduzida, com singularidades isoladas. Se $n \geq 3$, então*

$$\int_X c_n(T_X(-logD)) = \chi(\tilde{X}) + (-1)^{n-1} \sum_{p\in Sing(D)} \mu_p(D),$$

onde $\mu_p(D)$ denota o número de Milnor de D em p.

Demonstração: Vamos assumir que $n \geq 3$. Como as singularidades de D são isoladas, temos que o conjunto singular de D tem codimensão ≥ 3 em X. Daí, considerando o Teorema 9 com L sendo o fibrado holomorfo trivial de posto 1 sobre X, obtemos

$$\int_X c_n(T_X(-logD)) = \int_X c_n(T_X) - \int_D c_{n-1}(T_X - [D]). \tag{2.29}$$

Sendo X uma variedade complexa, compacta, segue do Teorema de Gauss-Bonnet (clássico),

$$\int_X c_n(T_X) = \chi(X). \tag{2.30}$$

Por outro lado, sendo D uma hipersuperfície analítica em X, temos que se trata de uma subvariedade analítica do tipo ICL, definida por uma seção do fibrado vetorial $[D]$. Além disso, como X é compacta, segue que D é compacta. Portanto, estamos nas hipóteses do Teorema 1. Daí,

$$\int_D c_{n-1}(T_X - [D]) = \chi(D) + (-1)^n \sum_{p\in Sing(D)} \mu_p(D). \tag{2.31}$$

Usando as expressões (2.30) e (2.31) em (2.29), temos

$$\begin{aligned}\int_X c_n(T_X(-logD)) &= \chi(X) - \chi(D) - (-1)^n \sum_{p\in Sing(D)} \mu_p(D) \\ &= \chi(X) - \chi(D) + (-1)^{n-1} \sum_{p\in Sing(D)} \mu_p(D).\end{aligned}$$

Sendo $\chi(X \setminus D) = \chi(X) - \chi(D)$, obtemos

$$\int_X c_n(T_X(-logD)) = \chi(\tilde{X}) + (-1)^{n-1} \sum_{p\in Sing(D)} \mu_p(D)),$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Capítulo 3

Índice GSV para sistemas de Pfaff

O índice GSV foi introduzido por X. Gómez-Mont, J. Seade e A. Verjovsky [23]. Este conceito generaliza o índice de Poincaré-Hopf de campos de vetores definidos em ambientes regulares. Inicialmente, o índice GSV foi definido para campos de vetores sobre hipersuperfícies com singularidades isoladas. Posteriormente J.-P. Brasselet, J. Seade e T. Suwa [38], o estenderam para campos de vetores sobre subvariedades analíticas do tipo ICL, com singularidades isoladas.

Uma questão natural é: "*como definir o índice GSV em contextos mais gerais?*". Neste sentido, J.-P. Brasselet, J. Seade e T. Suwa [7] estenderam a noção de índice GSV para campos de vetores sobre certos tipos de subvariedades analíticas do tipo ICL, com singularidades não-isoladas. Neste caso, assume-se que a subvariedade analítica admite uma estratificação de Whitney satisfazendo a *ω-condição de Thom.* Sabe-se que hipersuperfícies analíticas sempre satisfazem esta hipótese (ver [35] ou [9]), mas, subvariedades analíticas, em geral, não (veja mais detalhes em [8]).

Em diversas ocasiões, o índice GSV aparece com outras conotações. D. Lehmann, M. G. Soares e T. Suwa [31], introduziram o *índice virtual* que via teoria Chern-Weil pode ser interpretado como o índice GSV. Já X. Gómez-Mont [22] definiu o *índice homológico*, usando Álgebra Homológica, que também coincide com o índice GSV (para mais detalhes ver Cap.5 e Cap.7 de [8]).

Outra situação, onde o índice GSV aparece definido sob outra conotação, é no trabalho de M. Brunella [10]. Neste caso, o índice GSV aparece como um certo índice associado à curvas invariantes por folheações holomorfas, no contexto de superfícies complexas.

No presente capítulo, tomando como modelo a definição dada por M. Brunella em [10], nosso objetivo será generalizar o conceito de índice GSV à subvariedades analíticas do tipo ICL, com singularidades não-isoladas e que sejam invariantes por um sistema de Pfaff. Vamos considerar variedades complexas de dimensão arbitrária.

Na Seção 3.1 veremos que a decomposição de Aleksandrov [2] pode ser adaptada no contexto de sistemas de Pfaff e subvariedades analíticas do tipo ICL. Isso será crucial na seção precedente.

Na Seção 3.2, vamos definir o índice GSV para sistemas de Pfaff. Na Seção 3.3, como aplicação do conceito de índice GSV, mostraremos que é possível recuperar um resultado devido a E. Esteves & J. Cruz [21] que fornece uma cota para o grau associado à uma subvariedade analítica, invariante por um sistema de Pfaff.

3.1 Decomposição de Aleksandrov e Sistemas de Pfaff

Sejam X uma variedade complexa de dimensão n e $\omega \in H^0(X, \Omega^p \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N})$ um sistema de Pfaff de posto p sobre X. Vamos fixar a seguinte representação para ω:

(a) $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ uma cobertura aberta de X;

(b) $\{\omega_\alpha : \omega_\alpha \in \Omega^p_{U_\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ uma família de p-formas holomorfas satisfazendo

$$\omega_{\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta}} = (h_{\alpha\beta})\omega_{\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}} \qquad \text{em} \qquad U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset,$$

onde $h_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta)^*$ são os cociclos que definem o fibrado $\mathcal{N}$.

Consideremos também V uma subvariedade analítica de X reduzida, de codimensão k e do tipo ICL.

Proposição 8 *Sejam X, ω e V nas condições descritas acima. Se V é invariante pelo sistema de Pfaff ω, então para toda representação local de ω, $\omega_\alpha = \omega|_{U_\alpha}$, com $\alpha \in \Lambda$ e toda expressão local de V em U_α*

$$V \cap U_\alpha = \{z \in U_\alpha : f_{\alpha,1}(z) = \ldots = f_{\alpha,k}(z) = 0\},$$

existe uma função holomorfa $g_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$, uma $(p-k)$-forma holomorfa $\xi_\alpha \in \Omega^{p-k}_{U_\alpha}$ e uma p-forma holomorfa $\eta_\alpha \in \Omega^p_{U_\alpha}$, tais que

$$g_\alpha\, \omega_\alpha = df_{\alpha,1} \wedge \ldots \wedge df_{\alpha,k} \wedge \xi_\alpha + \eta_\alpha. \tag{3.1}$$

Além disso, g_α não é identicamente nula sobre cada componente irredutível de V e η_α é dada por

$$\eta_\alpha = f_{\alpha,1}\, \eta_{\alpha,1} + \ldots + f_{\alpha,1}\, \eta_{\alpha,k},$$

onde cada $\eta_{\alpha,i} \in \Omega^p_{U_\alpha}$ é uma p-forma holomorfa.

Demonstração: Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, sejam

$$D_i = \{z \in U_\alpha : f_{\alpha,i}(z) = 0\}.$$

e

$$\hat{D}_i = D_1 \cup \ldots \cup D_{i-1} \cup D_{i+1} \cup \ldots \cup D_k.$$

Além disso, vamos considerar a notação $\Omega^p_{U_\alpha}(\hat{D}_i)$ para o $\mathcal{O}_{U_\alpha}$-módulo de q-formas meromorfas com pólos simples ao longo de $\hat{D}_i$.

Seja $f_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ a função holomorfa dada por $f_\alpha = f_{\alpha,1} \ldots f_{\alpha,k}$. Como V é invariante pelo sistema de Pfaff ω, segue da expressão (1.10) que para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, existem $(p+1)$-formas diferenciais $\theta^\alpha_{i1}, \ldots, \theta^\alpha_{ik} \in \Omega^{p+1}_{U_\alpha}$, tais que

$$\omega_\alpha \wedge df_{\alpha,i} = f_{\alpha,1}\theta^\alpha_{i1} + \ldots + f_{\alpha,k}\theta^\alpha_{ik}.$$

Com isso, deduzimos facilmente que

$$df_{\alpha,j} \wedge \frac{\omega_\alpha}{f_\alpha} \in \sum_{i=1}^{k} \Omega^p_{U_\alpha}(\hat{D}_i), \qquad j = 1, \ldots, k.$$

Portanto, a p-forma meromorfa $\dfrac{\omega_\alpha}{f_\alpha}$ cumpre com as hipóteses do Teorema 3. Donde segue a decomposição (3.1) como queríamos. $\square$

A decomposição (3.1) obtida acima será chamada de *expressão de Aleksandrov em* U_α.

3.2 O índice GSV para sistemas de Pfaff

Nesta seção, nosso objetivo será definir o índice GSV para sistemas de Pfaff.

Como na seção anterior, vamos considerar $\omega \in H^0(X, \Omega^p \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N})$ um sistema de Pfaff de posto p sobre uma variedade complexa X de dimensão n. Também iremos considerar V uma subvariedade analítica de X reduzida, de codimensão k, do tipo ICL, e invariante por ω. Vamos assumir que $Sing(V)$ e $Sing(\omega)$ sejam tais que $Sing(\omega, V) = (Sing(\omega) \cap V) \cup Sing(V)$ tenha codimensão 1 em V. Também vamos supor que o posto de ω coincide com a codimensão de V, isto é, $p = k$.

Usaremos as componentes irredutíveis de $Sing(\omega, V) = \bigcup_i S_i$ para definirmos o índice GSV. Com efeito, fixada uma componente irredutível S_i, tomemos uma representação local de ω, $\omega_\alpha = \omega|_{U_\alpha}$, num aberto U_α, tal que $U_\alpha \cap S_i \neq \emptyset$. Suponhamos que ω_α seja dada por

$$\omega_\alpha = \sum_{|I|=k} a_I(z) dZ_I.$$

Consideremos também uma expressão local de V em U_α, dada por

$$V \cap U_\alpha = \{z \in U_\alpha : f_{\alpha,1}(z) = \ldots = f_{\alpha,k}(z) = 0\}.$$

Fixemos uma expressão de Aleksandrov em U_α,

$$g_\alpha \, \omega_\alpha = (df_{\alpha,1} \wedge \ldots \wedge df_{\alpha,k}) \, \xi_\alpha + \eta_\alpha, \tag{3.2}$$

onde $\eta_\alpha = f_{\alpha,1} \, \eta_{\alpha,1} + \ldots + f_{\alpha,k} \, \eta_{\alpha,k}$, com $\eta_{\alpha,i} \in \Omega^k_{U_\alpha}$ e, além disso, ξ_α sendo uma função holomorfa (pois $p = k$).

Definição 8 *Definimos*

$$GSV(\omega, V, S_i) := Ord_{S_i} \left(\frac{\xi_\alpha}{g_\alpha}|_V \right).$$

Teorema 12 *$GSV(\omega, V, S_i)$ só depende de ω, V e S_i. Além disso, vale*

$$\sum_i GSV(\omega, V, S_i)[S_i] = c_1([\mathcal{N} \otimes \det(\hat{N}_V)^{-1}])|_V \frown [V] \in H_{2n-2k-2}(V; \mathbb{C}). \tag{3.3}$$

Demonstração: Primeiro notemos que $GSV(\omega, V, S_i)$ não depende da decomposição de Aleksandrov escolhida. Com efeito, dada outra decomposição

$$\tilde{g}_\alpha\, \omega_\alpha = (df_{\alpha,1} \wedge \ldots \wedge df_{\alpha,k})\, \tilde{\xi}_\alpha + \tilde{\eta}_\alpha,$$

segue da Proposição 2 que

$$\frac{\xi_\alpha}{g_\alpha}|_V = \frac{\tilde{\xi}_\alpha}{\tilde{g}_\alpha}|_V.$$

Logo,

$$Ord_{S_i}(\frac{\xi_\alpha}{g_\alpha}|_V) = Ord_{S_i}(\frac{\tilde{\xi}_\alpha}{\tilde{g}_\alpha}|_V),$$

como queríamos.

Agora, vejamos que $GSV(\omega, V, S_i)$ não depende da representação local ω_α de ω e nem da expressão local de V

$$V \cap U_\alpha = \{z \in U_\alpha : f_{\alpha,1}(z) = \ldots = f_{\alpha,k}(z) = 0\}.$$

De fato, se considerarmos outra representação local de ω, $\omega_\beta = \omega|_\beta$, tal que $U_\beta \cap S_i \neq \emptyset$ e outra expressão local de V

$$V \cap U_\beta = \{z \in U_\beta : f_{\beta,1}(z) = \ldots = f_{\beta,k}(z) = 0\},$$

obtemos a expressão de Aleksandrov

$$g_\beta\, \omega_\beta = (df_{\beta,1} \wedge \ldots \wedge df_{\beta,k})\, \xi_\beta + \eta_\beta. \tag{3.4}$$

Como S_i é conexo em V, podemos supor que $U_\alpha \cap U_\beta \cap S_i \neq \emptyset$. Segue da expressão (3.2) que em $U_\alpha \cap V$

$$g_\alpha\, \omega_\alpha|_V = (df_{\alpha,1} \wedge \ldots \wedge df_{\alpha,k})\, \xi_\alpha|_V.$$

Como em $U_\alpha \cap U_\beta$, vale

$$\omega_\alpha = (h_{\alpha\beta})\, \omega_\beta,$$

e

$$(df_{\alpha,1} \wedge \ldots \wedge df_{\alpha,k})|_V = m_{\alpha\beta}\,(df_{\beta,1} \wedge \ldots \wedge df_{\beta,k})\,|_V,$$

onde $m_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}_V(U_\alpha \cap U_\beta)^*$ é o cociclo do fibrado $\det(\hat{N}_V)$, temos

$$g_\alpha\,(h_{\alpha\beta}\,\omega_\beta)|_V = [m_{\alpha\beta}\,(df_{\beta,1} \wedge \ldots \wedge df_{\beta,k}]\,\xi_\alpha|_V. \tag{3.5}$$

Por outro lado, da expressão (3.4), obtemos que em $U_\beta \cap V$,

$$g_\beta\,\omega_\beta|_V = (df_{\beta,1} \wedge \ldots \wedge df_{\beta,k})\,\xi_\beta|_V,$$

donde

$$\omega_{\beta|_V} = (df_{\beta,1} \wedge \ldots \wedge df_{\beta,k})\,\frac{\xi_\beta}{g_\beta}|_V. \tag{3.6}$$

Usando (3.6) em (3.5), obtemos que em $U_\alpha \cap U_\beta \cap V$

$$g_\alpha \left\{ h_{\alpha\beta} \left[(df_{\beta,1} \wedge \ldots \wedge df_{\beta,k})\,\frac{\xi_\beta}{g_\beta}|_V \right] \right\} = [m_{\alpha\beta}\,(df_{\beta,1} \wedge \ldots \wedge df_{\beta,k})]\,\xi_\alpha|_V,$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\xi_\alpha}{g_\alpha}\,(df_{\beta,1} \wedge \ldots \wedge df_{\beta,k})\,|_V = h_{\alpha\beta}\,(m_{\alpha\beta})^{-1}\,\frac{\xi_\beta}{g_\beta}\,(df_{\beta,1} \wedge \ldots \wedge df_{\beta,k})\,|_V,$$

Daí,

$$\frac{\xi_\alpha}{g_\alpha}\,(df_{\beta,1} \wedge \ldots \wedge df_{\beta,k})\,|_{V\setminus Sing(V)} = h_{\alpha\beta}\,(m_{\alpha\beta})^{-1}\,\frac{\xi_\beta}{g_\beta}\,(df_{\beta,1} \wedge \ldots \wedge df_{\beta,k})_{V\setminus Sing(V)}\,.$$

Donde

$$\frac{\xi_\alpha}{g_\alpha}|_{V\setminus Sing(V)} = h_{\alpha\beta}\,(m_{\alpha\beta})^{-1}\,\frac{\xi_\beta}{g_\beta}|_{V\setminus Sing(V)}.$$

Como $Sing(V)$ não contém nenhum aberto de V, pois tem codimensão 1 em V, segue que

$$\frac{\xi_\alpha}{g_\alpha}|_V = h_{\alpha\beta}\,(m_{\alpha\beta})^{-1}\,\frac{\xi_\beta}{g_\beta}|_V. \tag{3.7}$$

Agora, como $h_{\alpha\beta}$ e $m_{\alpha\beta}$ são funções holomorfas que nunca se anulam, segue que

$$Ord_{S_i}\left(\frac{\xi_\alpha}{g_\alpha}|_V\right) = Ord_{S_i}\left(\frac{\xi_\beta}{g_\beta}|_V\right),$$

como queríamos demonstrar.

Agora, vejamos a prova da igualdade (3.3) do teorema. Com efeito, consideremos o isomorfismo determinado pela dualidade de Poincaré

$$P_V : H^2(V;\mathbb{C}) \longrightarrow H_{2n-2k-2}(V;\mathbb{C}).$$

Para cada $[\omega] \in H^2(V;\mathbb{C})$, temos

$$P_V([\omega]) = [\omega] \frown [V].$$

Em particular, para $c_1([\mathcal{N} \otimes \det(\hat{N}_V)^{-1}])|_V \in H^2(V;\mathbb{C})$, vale

$$P_V(c_1([\mathcal{N} \otimes \det(\hat{N}_V)^{-1}])|_V) = c_1([\mathcal{N} \otimes \det(\hat{N}_V)^{-1}])|_V \frown [V]. \tag{3.8}$$

Por outro lado, podemos notar da expressão (3.7) que a família de funções meromorfas $\frac{\xi_\alpha}{g_\alpha}|_V$, obtidas de cada expressão de Aleksandrov, define uma seção meromorfa $\mathfrak{s}$ do fibrado holomorfo em retas $[\mathcal{N} \otimes \det(\hat{N}_V)^{-1}]|_V$. Portanto, associado à seção $\mathfrak{s}$ temos o divisor

$$(\mathfrak{s})_0 = \sum_i GSV(\omega, V, S_i)(S_i),$$

tal que

$$\mathcal{O}((\mathfrak{s})_0) \cong [\mathcal{N} \otimes \det(\hat{N}_V)^{-1}]|_V.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
c_1([\mathcal{N} \otimes \det(\hat{N}_V)^{-1}])|_V &= c_1(\mathcal{O}((\mathfrak{s})_0)) \\
&= c_1\left(\mathcal{O}\left(\sum_i GSV(\omega, V, S_i)(S_i)\right)\right) \\
&= \sum_i GSV(\omega, V, S_i) P_V^{-1}([S_i]),
\end{aligned}$$

onde cada $P_V^{-1}([S_i])$ é o dual do ciclo $[S_i] \in H_{2n-2k-2}(V;\mathbb{C})$, determinado por S_i. Consequentemente,

$$\begin{aligned} P_V(c_1([\mathcal{N} \otimes \det(\hat{N}_V)^{-1}])|_V) &= P_V\left(\sum_i GSV(\omega, V, S_i) P_V^{-1}([S_i])\right) \\ &= \sum_i GSV(\omega, V, S_i)[S_i]. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Usando (3.9) na igualdade (3.8), obtemos

$$\sum_i GSV(\omega, V, S_i)[S_i] = c_1([\mathcal{N} \otimes \det(\hat{N}_V)^{-1}])|_V \frown [V],$$

como queríamos demonstrar. □

O próximo teorema nos fornece uma maneira alternativa de calcular o índice GSV.

Teorema 13 *Sejam ω, V e S_i como acima. Para cada multi-índice I, com $\mid I \mid= k$, vale*

$$GSV(\omega, V, S_i) = Ord_{S_i}(a_I\,|_V) - Ord_{S_i}(\Delta_I\,|_V).$$

onde Δ_I é o menor de ordem $k \times k$ da matriz jacobiana $J(f_{\alpha,1}, \ldots, f_{\alpha,k})$, correspondente ao multi-índice I.

Demonstração: Pela expressão (1.14)

$$(\Delta_I . \sum_{|J|=k} a_J\, dZ_J)|_V = [(df_{\alpha,1} \wedge \ldots \wedge df_{\alpha,k})\, a_I]|_V.$$

Como

$$df_{\alpha,1} \wedge \ldots \wedge df_{\alpha,k} = \sum_{|J|=k} \Delta_J\, dZ_J,$$

segue que, para cada J, com $\mid J \mid= k$,

$$(\Delta_I\, a_J)|_V = (\Delta_J\, a_I)|_V. \tag{3.10}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
GSV(\omega, V, S_i) &= Ord_{S_i}(\frac{\xi_\alpha}{g_\alpha}|_V) \\
&= Ord_{S_i}(\frac{\xi_\alpha}{g_\alpha}|_V) + Ord_{S_i}(\Delta_I|_V) - Ord_{S_i}(\Delta_I|_V) \\
&= Ord_{S_i}(\frac{\xi_\alpha\,\Delta_I}{g_\alpha}|_V) - Ord_{S_i}(\Delta_I|_V).
\end{aligned}$$

Mas, por (1.15)

$$\xi_\alpha = \sum_{|J|=k} \lambda_J\, a_J.$$

Logo, usando (3.10) obtemos

$$\begin{aligned}
\xi_\alpha\,\Delta_I|_V &= \sum_{|J|=k} \lambda_J\,(a_J\,\Delta_I)|_V \\
&= \sum_{|J|=k} \lambda_J\,(\Delta_J\,a_I)|_V \\
&= (\sum_{|J|=k} \lambda_J\,\Delta_J)\,a_I|_V \\
&= g_\alpha\,a_I|_V,
\end{aligned}$$

onde, na última igualdade usamos (1.13).

Dessa forma,

$$Ord_{S_i}\left(\frac{\xi_\alpha\,\Delta_I}{g_\alpha}|_V\right) = Ord_{S_i}\,(a_I\,|_V)\,,$$

e, portanto, segue a igualdade

$$GSV(\omega, V, S_i) = Ord_{S_i}(a_I\,|_V) - Ord_{S_i}(\Delta_I\,|_V).$$

□

Corolário 1 *Sejam ω, V e S_i como acima. Se $S_i \cap Sing(V) = \emptyset$, então $GSV(\omega, V, S_i) \geq 0$.*

Demonstração: Pelo Teorema 13, para todo multi-índice I, com $\mid I \mid = k$, vale

$$GSV(\omega, V, S_i) = Ord_{S_i}(a_I\,|_V) - Ord_{S_i}(\Delta_I\,|_V). \tag{3.11}$$

Consideremos $h_i \in \mathcal{O}_V(U_\alpha) = \dfrac{\mathcal{O}_X(U_\alpha)}{\mathcal{I}_V(U_\alpha)}$ uma função que define localmente S_i em U_α, ou seja,

$$(U_\alpha \cap V) \cap S_i = \{z \in U_\alpha \cap V : h_i(z) = 0\}.$$

Se $GSV(\omega, V, S_i) < 0$, então de (3.11) temos, em particular, que para cada multi-índice I, com $\mid I \mid = k$,

$$Ord_{S_i}(\Delta_I\,|_V) = \delta_I > 0.$$

Logo, podemos escrever

$$\Delta_I|_V = h_i^{\delta_I}\,\mu_I|_V,$$

para alguma função $\mu_I \in \mathcal{O}_V(U_\alpha)$.

Com isso, temos que para cada multi-índice I, com $\mid I \mid = k$, vale a seguinte inclusão

$$\{z \in U_\alpha \cap V : h_i(z) = 0\} \subset \{z \in U_\alpha \cap V : \Delta_I(z) = 0\}.$$

Portanto, concluímos que

$$(U_\alpha \cap V) \cap S_i = \{z \in U_\alpha \cap V : h_i(z) = 0\} \subset \bigcap_{|I|=k} \{z \in U_\alpha \cap V : \Delta_I(z) = 0\} = U_\alpha \cap Sing(V).$$

Em particular, obtemos $S_i \cap Sing(V) \neq \emptyset$. Assim, acabamos de efetuar a prova da contra-positiva da afirmação do corolário. $\square$

Corolário 2 *Sejam ω, V e S_i como acima. Se V é regular, então*

$$GSV(\omega, V, S_i) > 0, \;\; \forall S_i.$$

Demonstração: Se V é regular, então existe algum menor Δ_I de ordem $k \times k$ (da matriz jacobiana $J(f_{\alpha,1}, \ldots, f_{\alpha,k})$) que nunca se anula. Portanto,

$$Ord_{S_i}(\Delta_I|_V) = 0. \tag{3.12}$$

Por outro lado, como $Sing(V) = \emptyset$, temos

$$\forall S_i, S_i \cap Sing(V) = \emptyset.$$

Logo,

$$\forall S_i, S_i \subset (Sing(\omega) \cap V).$$

Portanto, para cada S_i vale

$$\forall I,\ Ord_{S_i}(a_I|_V) > 0. \tag{3.13}$$

Agora, pelo Teorema 13, para cada S_i,

$$GSV(\omega, V, S_i) = Ord_{S_i}(a_I\,|_V) - Ord_{S_i}(\Delta_I\,|_V).$$

Assim, usando (3.12) e (3.13), obtemos

$$GSV(\omega, V, S_i) > 0,\ \ \forall S_i,$$

como queríamos. □

3.3 Aplicação: GSV e o problema de Poincaré para sistemas de Pfaff em $\mathbb{P}^n$

Finalizando este capítulo, iremos considerar o índice GSV no contexto de sistemas de Pfaff em $\mathbb{P}^n$. Nosso objetivo será demonstrar o Teorema 14 e o Corolário 3.

Com estes resultados, fica demonstrado que a não-negatividade do índice GSV nos dá a obstrução para a solução do problema de Poincaré para sistemas de Pfaff.

Em $\mathbb{P}^n$, seja $\omega \in H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^k_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{N})$ um sistema de Pfaff de posto k e grau $deg(\omega) = d$ e seja V uma subvariedade analítica de codimensão k, dada pela interseção completa global de k hipersuperfícies analíticas, de graus $d_1, \ldots, d_k$. Vamos assumir que o subconjunto $Sing(\omega, V) = (Sing(\omega) \cap V) \cup Sing(V)$ tenha codimensão 1 em V e seja $Sing(\omega, V) = \bigcup_i S_i$ a sua decomposição em componentes irredutíveis.

Teorema 14 *Sejam ω, V e S como descritos acima. Se V é invariante por ω, então*

$$\sum_i GSV(\omega, V, S_i)\, deg(S_i) \;=\; [d+k+1-(d_1+\ldots+d_k)]\cdot(d_1\cdot\ldots\cdot d_k). \qquad (3.14)$$

Demonstração: Pelo Lema 1, sabemos que

$$\mathcal{N} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d+k+1).$$

Pela expressão (1.6), temos

$$det(\hat{N}_V) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_1+\cdots+d_k)|_V.$$

Pelo Teorema 12, vale

$$\sum_i GSV(\omega, V, S_i)[S_i] = c_1([\mathcal{N}\otimes \det(\hat{N}_V)^{-1}])|_V \frown [V].$$

Portanto,

$$\sum_i GSV(\omega, V, S_i) deg(S_i) \;=\; deg\left(c_1([\mathcal{N}\otimes \det(\hat{N}_V)^{-1}])|_V \frown [V]\right).$$

Mas, como

$$[V] = d_1\cdot\ldots\cdot d_k\ c_1(\mathcal{O}(1))^k$$

e

$$deg([\mathcal{N}\otimes \det(N_{V|X})^{-1}]|_V) = deg(\mathcal{N}) - deg(det(\hat{N}_V)) = (d+k+1)-(d_1+\ldots+d_k),$$

temos

$$\sum_i GSV(\omega, V, S_i) deg(S_i) \;=\; [d+k+1-(d_1+\ldots+d_k)]\cdot(d_1\cdot\ldots\cdot d_k),$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Corolário 3 *(E. Esteves & J. Cruz [21]) Sejam ω, V e S como descritos acima e suponhamos que V seja regular. Uma condição necessária para que V seja invariante por ω é*

$$d_1 + \ldots + d_k \leq d + k.$$

Demonstração: Sendo V regular, segue do Corolário 2 que

$$\forall S_i,\ GSV(\omega, V, S_i) > 0.$$

Portanto, da igualdade (3.14), obtemos

$$0 < \sum_i GSV(\omega, V, S_i) deg(S_i) \quad = \quad [d + k + 1 - (d_1 + \ldots + d_k)] \cdot (d_1 \ldots d_k).$$

Como $d_1 \ldots d_k > 0$, obtemos

$$d_1 + \ldots + d_k < d + k + 1.$$

como queríamos demonstrar. □

Referências Bibliográficas

[1] A. G. Aleksandrov, *The index of vector fields and logarithmic differential forms*, Funct. Anal. Appl. 39 (4) (2005) 245-255.

[2] A. G. Aleksandrov, *Multidimensional residue theory and the logarithmic De Rham Complex*, Journal of Singularities, Volume 5, p. 1-18, 2012.

[3] P. Aluffi, *Chern classes for singular hypersurfaces*, Trans. Am. Math. Soc. 351 (1999), no. 10, 3989-4026.

[4] E. Angelini, *Logarithmic bundles of hypersurface arrangements in* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, arXiv:math/1304.5709v3, 2014.

[5] P. Baum & R. Bott, *On the zeros of meromorphic vector fields, Essay on Topology and Related Topics*, Spring-Verlag, New York, 1970, 29-47.

[6] P. Baum & R. Bott, *Singularities of Holomorphic Foliations*, J. Differential Geom, 7 (1972), 279-342.

[7] J.-P. Brasselet, J. Seade and T. Suwa, *An explicit cycle representing the Fulton-Johnson class*, Singularités Franco-Japonaises, Sémin. Congr., 10, Soc. Math. France, Paris, p. 21-38, 2005.

[8] J.-P. Brasselet, J. Seade & T. Suwa, *Vector Fields on Singular Varieties*, Lecture Notes in Mathematics, Spring, 2009.

[9] J. Briançon, P. Maisonobe & M. Merle, *Localisation de systèmes différentiels, stratifications de Whitney et condition de Thom*, Invent. Math. 117 (1994), 531-550.

[10] M. Brunella, *Birational Geometry of Foliations*, Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro, 2010.

[11] M. Brunella, *Some remarks on indices of holomorphic fields*, Publicacions Matemàtiques, Vol 41, p. 527-544, 1997.

[12] M. Brunella & L. G. Mendes, *Bounding the Degree of Solutions to Pfaff Equations*, Publicacions Matemàtiques, Vol 44, p. 593-604, 2000.

[13] C. Camacho & A. Lins Neto *Teoria Geométrica das Folheações*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[14] M. M. Carnicer, *The Poincaré problem in the non-dicritical case*, Annals of Mathematics, 140, (1994), 289-294.

[15] D. Cerveau & A. Lins Neto *Holomorphic Foliations in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ having an invariant algebraic curve*, Annales de l'lnstitut Fourier, 41, 4 (1991), 883-904.

[16] E. M. Chirka, *Complex analytic sets*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1989.

[17] M. Corrêa JR, F. Brochero & A. M. Rodriguez, *Poincaré problem for weighted projective foliations*, 2014 (Artigo submetido. arxiv-1406.4160).

[18] S. C. Coutinho & J. V. Pereira *On the density of algebraic foliations without algebraic invariant sets*, Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik, v. 594, p. 117-136, 2006.

[19] P. Deligne, *Equations differentielles à points singulier réguliers*, Lecture Notes in Mathematics, 163, Springer-Verlag, 1970.

[20] I. Dolgachev, *Logarithmic sheaves attached to arrangements of hyperplanes*, J. Math. Kyoto Univ. 47 (2007), n. 1, 35-64.

[21] E. Esteves & J. Cruz, *Regularity of subschemes invariant under Pfaff fields on projective spaces.* Commentarii Mathematici Helvetici v. 86, p. 947-965, 2011.

[22] X. Gómez-Mont, *An algebraic formula for the index of a vector field on a hypersurface with an isolated singularity*, J. Algebraic Geom. 7 (1998), 731-752.

[23] X. Gómez-Mont, J. Seade & A. Verjovsky, *The index of a holomorphic flow with an isolated singularity*, Math. Ann. 291 (1991), 737-751.

[24] P. Griffths & J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, John Wiley & Sons, New York, 1978.

[25] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag Graduate Texts in Mathematics 52, 1977.

[26] F. Hirzebruch, *Topological methods in algebraic geometry*, Spring-Verlag, New York, 1966.

[27] D. Huybrechts, *Complex Geometry An Introduction*, Universitext, Springer, 2004.

[28] S. Iitaka, *Logarithmic forms of algebraic varieties*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA 23 (1976), 525-544.

[29] N. M. Katz, *The regularity theorem in algebraic geometry*, Actes Congres Intern. Math., 1970, t.1, 437-443.

[30] O. Klehn, *On the index of a vector field tangent to a hypersurface with non-isolated zero in the embedding space*, Math. Nachr. 260 (2003), 48-57.

[31] D. Lehmann, M. Soares & T. Suwa, *On the index of a holomorphic vector field tangent to a singular variety*, Bol. Soc. Bras. Mat. 26 (1995), pp. 183-199.

[32] D. Lehmann & T. Suwa, *Residues of Holomorphic Vector Fields Relative to Singular Invariant Subvarieties*, J. Differential Geometry, Vol. 42, No. 1, July, 1995.

[33] A. Lins Neto, *Algebraic solutions of polynomial differential equations and foliations in dimension two*, in "Holomorphic Dynamics", Springer, Lecture Notes 1345, p. 192-232, 1988.

[34] Y. Norimatsu, *Kodaira Vanishing Theorem and Chern Classes for ∂-Manifolds*, Proc. Japan Acad., 54, Ser. A. (1978), 107-108.

[35] A. Parusiński, *Limits of tangent spaces to fibers and the w_f condition*, Duke Math. Jounal 72 (1993), 99-108.

[36] H. Poincaré, *Sur l'integration algébrique des equations différentielles du premier ordre et du premier degré*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 5, (1891), 161-191.

[37] K. Saito, *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 27(2), p. 265-291, 1980.

[38] J. Seade and T. Suwa, *A residue formula for the index of a holomorphic flow*, Math. Ann. 304 (1996), 621-634.

[39] M. Sebastiani *Introdução à Geometria Analítica Complexa*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2004.

[40] R. Silvotti, *On a conjecture of Varchenko*, Invent. Math. 126 (1996), no. 2, 235-248.

[41] M. G. Soares, *The Poincaré problem for hypersurfaces invariant by onedimensional foliations*, Inventiones Mathematicae, Alemanha, v. 128, p. 495-500, 1997.

[42] M. G. Soares & R.S. Mol, *Índices de Campos Holomorfos e Aplicações*, 23^o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 2001.

[43] T. Suwa, *Indices of holomorphic vector fields relative to invariant curves on surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 123 , p. 2989-2997, 1995.

[44] T. Suwa, *Indices of vector fields and residues of singular holomorphic foliations*, Actualités Mathématiques, Hermann Éditeurs des Sciences et des Arts, 1998.

[45] T. Suwa, *GSV-Indices as Residues*, Jornal of Singularities, Volume 9 (2014), 206-218.