

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

---

**Campos de Vetores Tangentes a Folheações  
Holomorfas de Codimensão Um**

Danúbia Junca Cuzzuol

Orientador: Rogério Santos Mol

Tese apresentada como requisito à obtenção do título de Doutor junto ao Programa de  
Pós-Graduação em Matemática da UFMG

Abril de 2016

---



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**Campos de Vetores Tangentes a Folheações  
Holomorfas de Codimensão Um**

**Danúbia Junca Cuzzuol**

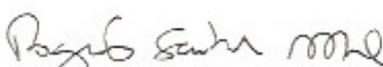
Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em  
Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais,  
como parte dos requisitos para obtenção do Título de  
Doutor em Matemática.

Orientação: Rogério Santos Mol

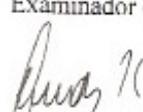
Belo Horizonte  
08 de abril de 2016

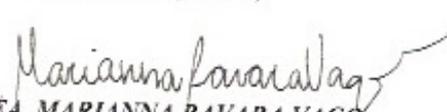
ATA DA SEPTUAGÉSIMA QUINTA DEFESA DE TESE DA ALUNA DANÚBIA JUNCA CUZZUOL, REGULARMENTE MATRICULADA NO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA, DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS, DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, REALIZADA NO DIA 08 DE ABRIL DE 2016.

Aos oito dias do mês de abril de 2016, às 10h00, na sala 3060, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para julgar a defesa de tese da aluna **Danúbia Junca Cuzzuol**, intitulada: "*Campos de vetores tangentes a folheações holomorfas de codimensão um*", requisito final para obtenção do Grau de doutor em Matemática. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Rogério Santos Mol, após dar conhecimento aos presentes o teor das normas regulamentares do trabalho final, passou a palavra à aluna para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa da aluna. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se sem a presença da aluna e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: a aluna foi considerada aprovada, por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente à aluna pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 08 de abril de 2016.

  
**PROF. ROGÉRIO SANTOS MOL**  
 Orientador (UFMG)

  
**PROF. MÁRCIO GOMES SOARES**  
 Examinador (UFMG)

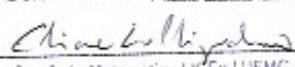
  
**PROF. GILCIONE NONATO COSTA**  
 Examinador (UFMG)

  
**PROF. MARIANNA RAVARA VAGO**  
 Examinadora (UFSC)

  
**PROF. JAVIER RIBÓN HERGUEDAS**  
 Examinador (UFF)

CONFERE COM O ORIGINAL!

Belo Horizonte, 08/04/16

  
 Dep. de Matemática / ICEx / UFMG

Eliane Kelli Gaudêncio  
 Assistente em Administração  
 PPG em Matemática - ICEx/UFMG  
 NOME: 1666902

*Ao Gilberto, Felipe e  
Maria Eduarda.*

---

# Agradecimentos

Antes de tudo, quero agradecer a Deus, por ter abençoado todos os dias da minha vida, por iluminar meu caminho e me dar forças para seguir sempre em frente.

Agradeço ao professor Rogério Santos Mol, a oportunidade de tê-lo como orientador. Tenho muito orgulho de citá-lo como um dos responsáveis pela minha formação profissional. Agradeço pela confiança, conselhos e paciência.

Agradeço a professora Nuria Corral pela recepção tão calorosa em Santander. Por proporcionar uma experiência acadêmica ímpar em minha formação. Por trabalhar comigo e orientar meus estudos enquanto estive na Espanha. Agradeço também a Universidad de Cantabria por me acolher e dar suporte aos meus estudos.

Ao professor Felipe Cano pelas conversas, explicações e sugestões de trabalhos.

Agradeço aos professores Márcio Gomes Soares, Gilcione Nonato Costa, Marianna Ravara Vago e Javier Ribón Herguedas por participarem da banca. Obrigado pela leitura minuciosa, pelas sugestões, pelos comentários e questionamentos.

Aos professores do Departamento de Matemática por todos os ensinamentos transmitidos e pela contribuição no meu processo de aprendizado. E também ao Miguel Fernandez Duque pela colaboração.

Aos meus amigos do Doutorado, por terem tornado o dia a dia na pós-graduação tão prazeroso. Foi extremamente enriquecedor conhecer e conviver com cada um de vocês. E, de maneira especial, a amiga Jane Lage Bretas, exemplo de inteligência, simplicidade, bondade e caráter. Muito obrigada.

Tia Mirinha não poderia me esquecer de você. Sempre de portas abertas para me abrigar quando precisava ficar em Belo Horizonte.

Aos demais amigos que sempre ficaram torcendo pelo meu sucesso.

As meninas da secretaria, Andréa e Kelli, muito obrigada.

Aos meus pais e ao meu irmão, por acreditarem em mim.

À Capes pelo financiamento no Programa de Doutorado Sanduíche no Exterior.

Em especial ao meu marido Gilberto Duarte Cuzzuol que sempre esteve ao meu lado, incondicionalmente, nos momentos mais difíceis, que não foram raros nestes últimos anos, fazendo-me acreditar que chegaria ao final desta etapa. Sou grata por cada gesto de carinho, cada sorriso e por me mostrar que somos uma FAMÍLIA. Por ser um pai sempre presente na vida da nossa filha Maria Eduarda.

# Resumo

---

Dizemos que um germe de campo de vetores  $X$  em  $(\mathbb{C}^n, 0)$  é tangente a uma folheação holomorfa definida pelo germe de 1-forma integrável  $\omega$  se  $i_X\omega = 0$ . Esse trabalho objetiva estudar algumas propriedades geométricas advindas dessa configuração.

Observamos, em primeiro lugar, que o conjunto singular de  $\omega$  é sempre invariante por  $X$ . Assim, se o conjunto singular de  $\omega$  contém uma curva,  $X$  possui uma separatriz. Em 1992, X. Gómez-Mont e I. Luengo apresentaram uma família de campos de vetores em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  sem separatrizes. Mostraremos nesse trabalho que os campos de vetores nesta família não são tangentes a folheações. Mostramos ainda que se um campo de vetores  $X$  tangente a uma folheação possuir, em alguma dessingularização, uma singularidade no domínio de Poincaré, então  $X$  possui separatriz.

Um germe de campo de vetores  $X$  em  $(\mathbb{C}^n, 0)$  é dito *Poincaré fortemente não ressonante* se a parte linear de  $X$  estiver no domínio de Poincaré com autovalores fortemente não ressonantes — ou seja, sem relações lineares não triviais com coeficientes inteiros. Uma folheação  $\mathcal{G}$  de codimensão um é do tipo *hiperbólico complexo* se para todo mapa  $i : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ , holomorfo e transversal a  $\mathcal{G}$ , a folheação bidimensional  $i^*\mathcal{G}$  é do tipo curva generalizada — ou seja, não possui selas-nó na dessingularização. Consideramos  $\mathcal{F}$  um germe de folheação de dimensão um em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  com singularidade isolada em  $0 \in \mathbb{C}^3$ , possuindo uma dessingularização por blow-ups pontuais não dicríticos e tal que todas as suas singularidades são do tipo Poincaré fortemente não ressonantes. Se uma folheação  $\mathcal{G}$  de codimensão um é invariante por uma  $\mathcal{F}$  de dimensão um com essas características, então  $\mathcal{G}$  é uma folheação hiperbólica complexa.

Por fim, consideramos um germe de campo de vetores holomorfo  $X$  em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  tangente a três folheações independentes. Mostramos que  $X$  é tangente a um feixe linear de folheações e, portanto, a infinitas folheações. Como consequência, o campo de vetores  $X$  possui superfícies invariantes.

**Palavras-Chave:** Integral primeira holomorfa, folheação hiperbólica complexa,

separatriz, variedade invariante, dessingularização, feixe linear de folheações.

# Abstract

---

We say that a germ of vector field  $X$  in  $(\mathbb{C}^n, 0)$  is tangent to a holomorphic foliation defined by a germ of integrable 1-form  $\omega$  if  $i_X\omega = 0$ . In this thesis we aim to study some geometric properties arising from this setting.

We first observe that the singular set of  $\omega$  is invariant by  $X$ . Thus, if the singular set of  $\omega$  contains a curve, then  $X$  has a separatrix. In 1992, X. Gómez-Mont and I. Luengo presented a family of vector fields in  $(\mathbb{C}^3, 0)$  without separatrices. We prove that vector fields in this family are not tangent to foliations. Besides, we prove that if a vector field  $X$  tangent to a foliation has, in some desingularization, a singularity in the Poincaré domain, then  $X$  has a separatrix.

A germ of vector field in  $(\mathbb{C}^n, 0)$  is said to be *strongly non-resonant Poincaré* if the linear part of  $X$  is in the Poincaré domain with strongly non-resonant eigenvalues — that is, without non-trivial linear relations with integer coefficients. A foliation  $\mathcal{G}$  of codimension one is *complex hyperbolic* if for every map  $i : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ , holomorphic and transversal to  $\mathcal{G}$ , the two-dimensional foliation  $i^*\mathcal{G}$  is of generalized curve type — that is, there are no saddle-nodes in its desingularization. Let  $\mathcal{F}$  be a germ of one dimensional foliation in  $(\mathbb{C}^3, 0)$  with isolated singularity at  $0 \in \mathbb{C}^3$ , having a desingularization by non-dicritical punctual blow-ups such that all singularities are of strongly non-resonant Poincaré type. If a foliation  $\mathcal{G}$  of codimension one is invariant by  $\mathcal{F}$  with such characteristics, then  $\mathcal{G}$  is a complex hyperbolic foliation.

Finally, we consider a germ of holomorphic vector field  $X$  in  $(\mathbb{C}^3, 0)$  tangent to three independent foliations. We prove that  $X$  is tangent to a linear pencil of foliations and, therefore, to infinitely many foliations. As a consequence, the vector field  $X$  has invariant surfaces.

**Keywords:** Holomorphic first integral, complex hyperbolic foliation, separatrix, invariant variety, desingularization, linear pencil of foliations.



# Sumário

---

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 PRELIMINARES</b>	<b>7</b>
1.1 NOÇÕES BÁSICAS . . . . .	7
1.2 CAMPOS DE VETORES TANGENTES A FOLHEAÇÕES . . . . .	13
1.3 BLOW-UP OU EXPLOSÃO EM $0 \in \mathbb{C}^2$ . . . . .	16
1.4 BLOW-UP OU EXPLOSÃO DE $0 \in \mathbb{C}^3$ . . . . .	19
1.4.1 BLOW-UP PUNTUAL . . . . .	19
1.4.2 BLOW-UP MONOIDAL . . . . .	23
1.5 CAMPOS DE VETORES TANGENTES A FOLHEAÇÕES E DESSINGULARIZAÇÃO . . . . .	25
<b>2 INTEGRAIS PRIMEIRAS DE CAMPOS DE VETORES EM <math>(\mathbb{C}^3, 0)</math></b>	<b>29</b>
2.1 EXEMPLO DE CAMPO DE VETORES HOLOMORFO SEM SEPARATRIZ	29
2.2 EXEMPLO DE CAMPO DE VETORES HOLOMORFO EM $(\mathbb{C}^3, 0)$ NÃO TANGENTE A UMA FOLHEAÇÃO . . . . .	36
2.3 CAMPOS DE VETORES NO DOMÍNIO DE POINCARÉ . . . . .	40
<b>3 FORMAS DIFERENCIAIS INVARIANTES POR CAMPOS VETORIAIS</b>	<b>47</b>
3.1 SINGULARIDADES SIMPLES EM $\mathbb{C}^3$ DE TIPOS DIMENSIONAIS DOIS E TRÊS . . . . .	47
3.1.1 SINGULARIDADES SIMPLES DE TIPO DIMENSIONAL DOIS EM $(\mathbb{C}^3, 0)$ . . . . .	55
3.1.2 SINGULARIDADES SIMPLES DE TIPO DIMENSIONAL TRÊS EM $(\mathbb{C}^3, 0)$ . . . . .	55
3.2 FOLHEAÇÕES DE CODIMENSÃO UM INVARIANTES POR CAMPOS DE VETORES NO DOMÍNIO DE POINCARÉ . . . . .	60

3.2.1	FOLHEAÇÕES DE TIPO DIMENSIONAL DOIS . . . . .	60
3.2.2	FOLHEAÇÕES DE TIPO DIMENSIONAL TRÊS . . . . .	61
3.3	SINGULARIDADES HIPERBÓLICAS COMPLEXAS . . . . .	65
3.4	CAMPOS DE VETORES DO TIPO POINCARÉ FORTEMENTE NÃO RESSONANTE . . . . .	68
3.5	FOLHEAÇÕES INVARIANTES POR CAMPOS DE VETORES DO TIPO POINCARÉ FORTEMENTE NÃO RESSONANTES . . . . .	77
<b>4</b>	<b>CAMPOS TANGENTES A FEIXES LINEARES DE FOLHEAÇÕES</b>	<b>81</b>
4.1	FEIXE LINEARES DE FOLHEAÇÕES . . . . .	81
4.2	A CURVATURA DE UM FEIXE LINEAR . . . . .	85
4.3	CAMPOS HOMOGÊNEOS E O EXEMPLO DE JOUANLOU . . . . .	95
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>97</b>

# Introdução

---

Dizemos que um germe de campo de vetores holomorfo  $X = A\partial/\partial x_1 + B\partial/\partial x_2 + C\partial/\partial x_3$  em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  é *tangente* a uma folheação holomorfa de codimensão um se existe uma 1-forma holomorfa  $\omega = adx_1 + bdx_2 + cdx_3$  em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  satisfazendo a condição de integrabilidade —  $\omega \wedge d\omega = 0$  — tal que  $i_X\omega = Aa + Bb + Cc = 0$ , onde  $A, B, C, a, b$  e  $c$  são germes de funções nas variáveis  $x_1, x_2, x_3$ . Sejam  $\mathcal{F}$  a folheação de dimensão um induzida por  $X$  e  $\mathcal{G}$  a folheação de codimensão um induzida por  $\omega$ . Como é usual em teoria de folheações holomorfas, supomos que ambas as folheações têm seus conjuntos singulares,  $Sing(\mathcal{F})$  e  $Sing(\mathcal{G})$ , com codimensão pelo menos dois. Nesse caso, como o espaço ambiente tem dimensão três, temos que, tanto para  $\mathcal{F}$  quanto para  $\mathcal{G}$ , o conjunto singular é formado pelo ponto isolado  $0 \in \mathbb{C}^3$  ou por uma curva analítica passando por  $0 \in \mathbb{C}^3$ . A condição de invariância equivale à propriedade que, fora de  $Sing(\mathcal{F}) \cup Sing(\mathcal{G})$ , as folhas de  $\mathcal{F}$  estão contidas nas folhas de  $\mathcal{G}$ . Casos particulares da situação acima são campos de vetores tangentes definidos por 1-forma  $\omega = df$ , onde  $f$  é holomorfa e  $\omega = g^2d(f/g)$  onde  $f, g$  são holomorfas. Dizemos que  $X$  possui integral primeira holomorfa no primeiro caso e uma integral primeira meromorfa no segundo caso.

Uma propriedade relevante dessa configuração é que  $Sing(\mathcal{G})$  é invariante por  $X$ , ou seja, em cada ponto liso de  $Sing(\mathcal{G})$ , o campo de vetores  $X$  é tangente a  $Sing(\mathcal{G})$ , como podemos ver na Proposição 1.2.2. No caso em que  $Sing(\mathcal{G})$  é um ponto isolado, o clássico Teorema de Malgrange [Mal76] diz que  $\mathcal{G}$  possui integral primeira holomorfa, ou seja, existe um germe de função holomorfa  $g \in \mathcal{O}_3$  com singularidade isolada, tal que  $\mathcal{G}$  é induzida por  $dg = 0$ . Assim,  $\omega = hdg$  para algum germe de função nunca nula  $h \in \mathcal{O}_3$ . Nesse caso, a superfície  $g = 0$  é invariante por  $X$ .

Para um germe de campo de vetores analítico  $X$  com uma singularidade isolada em  $0 \in \mathbb{C}^n$  é natural perguntar se existem curvas analíticas invariantes passando por  $0 \in \mathbb{C}^n$ .

Estas curvas são chamadas *separatrizes*. O problema de determinar se um campo de vetores  $X$  possui uma separatriz aparece nos trabalhos de Briot-Bouquet em [BB56] e, em 1982, C. Camacho e P. Sad em [CS82] mostraram que o resultado é verdadeiro no caso  $n = 2$ . Em dimensão três, X. Gómez-Mont e I. Luengo em [GML92] provaram a existência de uma família de germes de campos de vetores em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  sem separatriz, a qual denotaremos por  $\mathcal{X}$ . No caso considerado acima, em que o campo  $X$  em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  é tangente a uma folheação  $\mathcal{G}$  satisfazendo  $\dim \text{Sing}(\mathcal{G}) = 1$ , temos evidentemente uma separatriz para  $X$ .

Conjectura-se que campos de vetores tangentes a folheações em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  sempre possuem separatrizes. Tendo em mente esse fato, iniciamos esse trabalho mostrando o seguinte resultado:

**TEOREMA A.** Seja  $X$  um campo de vetores pertencente à família  $\mathcal{X}$ . Então  $X$  não é tangente a uma folheação em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ .

De fato, para demonstrar o teorema, é suficiente mostrar que cada campo de vetores em  $\mathcal{X}$  não possui integral primeira holomorfa, uma vez que uma possível folheação tangente deverá necessariamente ter singularidade isolada. No caso real, R. Mol e F. Sanz em [MS15], mostraram que se  $X$  é um germe de campo analítico real em  $(\mathbb{R}^3, 0)$  com singularidade isolada então temos um dos seguintes casos:

- (i) Se  $X$  tem integral primeira holomorfa então  $X$  possui separatriz real formal.
- (ii) Se  $X$  é tangente a um germe de folheação holomorfa de codimensão um em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  então  $X$  possui separatriz complexa formal.

A *envoltória convexa* de um conjunto  $A \subset \mathbb{C}$  é a interseção de todos os conjuntos convexos que contém  $A$ , a qual denotaremos por  $\mathcal{H}\{A\}$ . Chamaremos de *domínio de Poincaré* o conjunto de todas as  $n$ -uplas  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  de  $\mathbb{C}^n$  tais que  $0 \in \mathbb{C}$  não pertence à envoltória convexa de  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , ou seja, é o conjunto

$$\{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n; 0 \notin \mathcal{H}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}\}.$$

Dizemos que um germe de campo de vetores  $X$  está no domínio de Poincaré se os autovalores de sua parte linear estiverem no domínio de Poincaré. Um campo de vetores no domínio de Poincaré não possui integral primeira holomorfa, como provado na Proposição 2.3.5. Utilizando deste fato provamos o seguinte teorema:

**TEOREMA B.** Seja  $X$  um campo de vetores tangente a uma folheação de codimensão um com singularidade isolada em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ . Suponha que alguma dessingularização de  $X$  possua uma singularidade no domínio de Poincaré. Então  $X$  possui separatriz.

Há evidências de que um campo de vetores tangente a uma folheação possui propriedades geométricas especiais. Em [CR14], F. Cano and C. Roche estudaram campos de vetores tangentes a folheações em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  sob a perspectiva da dessingularização, provando que um campo nessas condições possui uma dessingularização. Mais precisamente, se um campo de vetores  $X$  é tangente a uma folheação holomorfa de codimensão um em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ , então, após uma sequência finita de blow-ups  $\pi : (M, E) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  com centros permissíveis, o campo  $X$  é transformado em uma folheação unidimensional cujas singularidades são *elementares*, significando que, em cada singularidade, a folheação é expressa por um campo com parte linear não nilpotente.

A família de campos de vetores proposta por F. Sancho e F. Sanz, notadamente

$$\xi_{\alpha, \beta, \lambda} = x \left( x \frac{\partial}{\partial x} - \alpha y \frac{\partial}{\partial y} - \beta z \frac{\partial}{\partial z} \right) + xz \frac{\partial}{\partial y} + (y - \lambda x) \frac{\partial}{\partial z},$$

onde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}_{> 0}$ , é tal que seus elementos não possuem uma dessingularização como a descrita acima e, assim, temos uma família de exemplos de campos que não são tangentes a folheações.

Em dimensão dois, C. Camacho, A. Lins Neto e P. Sad em [CLNS84] apresentaram uma família de folheações — as chamadas *curvas generalizadas* — com propriedades geométricas relevantes. Por exemplo, sua dessingularização equivale à dessingularização de suas separatrizes. Um germe de folheação  $\mathcal{F}$  em  $(\mathbb{C}^2, 0)$  é curva generalizada se sua dessingularização não produzir singularidades do tipo sela-nó, ou seja, singularidades reduzidas com um autovalor nulo. Em dimensão três, dado um germe de folheação holomorfa singular de codimensão um  $\mathcal{G}$  em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ , dizemos que  $\mathcal{G}$  é uma *folheação hiperbólica complexa* se para toda aplicação  $i : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ , holomorfa e transversal a  $\mathcal{G}$ , temos que  $i^*\mathcal{G}$  é uma folheação do tipo curva generalizada. Um estudo dessa família de folheações foi apresentado em [CRVS15].

Diremos que um vetor  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$  é *fortemente não ressonante* se para qualquer função não identicamente nula  $\Phi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{Z}$  temos que  $\sum \Phi(i)\lambda_i \neq 0$ . Dado um germe de campo de vetores  $X$  em  $(\mathbb{C}^n, 0)$  dizemos que  $X$  é *fortemente Poincaré*,

ou simplesmente *do tipo*  $\mathcal{P}_F$ , se os autovalores da parte linear de  $X$  estiverem no domínio de Poincaré e forem fortemente não ressonantes.

Se  $X$  é um campo de vetores do tipo  $\mathcal{P}_F$  então as únicas curvas lisas invariantes por  $X$  são os eixos coordenados. Além do mais, o modelo de campo de vetores do tipo  $\mathcal{P}_F$  é invariante por explosões: se  $X$  é um campo de vetores do tipo  $\mathcal{P}_F$ , o transformado de  $X$  por blow-up puntual ou por um blow-up monoidal centrado em qualquer uma das curvas invariantes por  $X$  possui apenas singularidades do tipo  $\mathcal{P}_F$ .

Há também evidências que um campo de vetores tangentes a uma folheação pode determinar características geométricas da mesma. Como ilustração desse princípio, apresentamos o seguinte teorema:

**TEOREMA C.** Seja  $\mathcal{F}$  um germe de folheação de dimensão um em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  com singularidade isolada em  $0 \in \mathbb{C}^3$ . Suponha que  $\mathcal{F}$  possua uma dessingularização por blow-ups puntuais não dicríticos em que todas as singularidades são do tipo  $\mathcal{P}_F$ . Se  $\mathcal{G}$  é um germe de folheação de codimensão um em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  invariante por  $\mathcal{F}$ , então  $\mathcal{G}$  é hiperbólica complexa.

Na última parte do trabalho, apresentamos um estudo local sobre feixes lineares de folheações e seus desdobramentos no estudo de campos de vetores tangentes a folheações. Considere  $\omega_1$  e  $\omega_2$  germes de 1-formas integráveis em  $(\mathbb{C}^n, 0)$  com conjunto singular de codimensão maior ou igual a dois. Diremos que as folheações representadas por  $\omega_1$  e  $\omega_2$  definem um *feixe linear* de folheações se, e somente se,  $\omega = \omega_1 + t\omega_2$  é integrável para todo  $t \in \mathbb{C}$ . Isto nos diz que

$$\begin{aligned} 0 = \omega \wedge d\omega &= (\omega_1 + t\omega_2) \wedge (d\omega_1 + td\omega_2) \\ &= t(\omega_1 \wedge d\omega_2 + \omega_2 \wedge d\omega_1) \quad \forall t \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

o que equivale a

$$\omega_1 \wedge d\omega_2 + \omega_2 \wedge d\omega_1 = 0. \quad (1)$$

Um valor de  $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  para o qual  $\omega_1 + t\omega_2$  é integrável é suficiente para assegurar a condição (1). Assim, se três 1-formas integráveis estão sobre uma reta no espaço de formas

holomorfas, então elas definem um feixe linear de folheações. Dado um feixe linear de folheações  $\mathcal{L}$ , existe uma 1-forma meromorfa  $\theta$  tal que  $d\eta = \theta \wedge \eta$  para toda  $\eta$  em  $\mathcal{L}$ . A 2-forma meromorfa  $d\theta$  é chamada de *curvatura do feixe* e denotada por  $k(\mathcal{L})$ .

Uma conjectura devido a M. Brunella afirma que, se  $\mathcal{G}$  é uma folheação de codimensão um em  $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ , então uma das alternativas ocorre:

- (a)  $\mathcal{G}$  deixa uma superfície algébrica invariante;
- (b)  $\mathcal{G}$  é invariante por uma folheação holomorfa  $\mathcal{F}$  por curvas algébricas.

Do ponto de vista global, D. Cerveau em [Cer02] demonstrou que se  $\mathcal{G}$  é uma folheação de codimensão um em  $\mathbb{P}^3$  que pertence a um feixe linear de folheações então ou  $\mathcal{G}$  deixa uma superfície algébrica invariante ou  $\mathcal{G}$  é invariante por uma folheação holomorfa  $\mathcal{F}$  por curvas algébricas. Isso é uma resposta parcial para à conjectura de M. Brunella.

De volta aos campos de vetores tangentes a folheações, considere  $X$  um germe de campo de vetores em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  tangente a três folheações independentes. Mostra-se, nesse caso, que as três folheações definem um feixe linear cujos elementos são todos tangentes a  $X$ . Lembramos que um germe de folheação em  $(\mathbb{C}^n, 0)$  dado por uma 1-forma holomorfa  $\omega$  possui *fator integrante liouvilliano* se existe um germe de 1-forma meromorfa pura fechada  $\eta$  tal que  $d\omega = \eta \wedge \omega$ . Nesse caso, os pólos de  $\eta$  são superfícies invariantes para  $\omega$ . Adaptamos as técnicas de D. Cerveau para o caso local e obtemos o seguinte teorema:

**TEOREMA D.** Seja  $X$  um germe de campo de vetores holomorfo em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  tangente a três folheações independentes. Então  $X$  é tangente a um feixe linear de folheações e, portanto, a infinitas folheações. Além disso,  $X$  possui superfícies invariantes. Mais precisamente, denotando por  $\mathcal{L}$  o feixe linear e por  $k(\mathcal{L})$  sua curvatura, temos:

- i) Se  $k(\mathcal{L}) = 0$  então todas as integrais do feixe linear  $\mathcal{L}$  possuem fator integrante liouvilliano.
- ii) Se  $k(\mathcal{L}) \neq 0$  então  $X$  possui integral primeira meromorfa, possivelmente holomorfa.



---

*PRELIMINARES*

---

## 1.1 NOÇÕES BÁSICAS

**DEFINIÇÃO 1.1.1.** Um *campo vetorial* holomorfo  $X$  sobre uma variedade complexa  $M$  é uma aplicação holomorfa que associa a cada ponto  $p \in M$  um vetor  $X_p \in T_pM$ , o espaço tangente holomorfo de  $M$  em  $p$ .

Então ao campo contínuo  $X$  podemos associar uma equação diferencial holomorfa

$$\dot{x} = X(x(t)), \quad (1.1)$$

onde  $t$  é o tempo complexo.

As subvariedades de  $M$  obtidas pelo prolongamento das soluções locais são usualmente chamadas de *trajetórias* de  $X$ . Se supomos que  $X$  é *não singular* em  $M$ , então essas trajetórias são curvas analíticas lisas em  $M$ , duas a duas disjuntas e por cada ponto  $p \in M$ , passa somente uma trajetória de  $X$ . Assim, as trajetórias definem uma *folheação por curvas* — ou de *dimensão um* — de  $M$ . Entretanto, uma variedade complexa  $M$  pode não admitir campos vetoriais holomorfos não singulares globalmente definidos. Mesmo assim, persiste a ideia de se decompor a variedade ambiente  $M$  em uma união disjunta de subvariedades, que (ao menos localmente) comportam-se como solução de uma equação diferencial.

De fato, se considerarmos uma cobertura aberta de  $M$  por conjuntos  $U_i$ ,  $i \in I$ , tal que em cada aberto  $U_i$  temos definido um campo de vetores holomorfo  $X_i$ , então fluxo local define uma decomposição de  $U_i$  em superfícies de Riemann, a qual denotaremos por  $\mathcal{F}_i$ . Basta, então, dar para cada interseção não vazia  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , uma condição de "colagem"

para  $\mathcal{F}_i$  e  $\mathcal{F}_j$  nesta interseção.

Para isso, fixemos  $p \in U_i \cap U_j$ . A subvariedade de  $\mathcal{F}_i$  passando por  $p \in U_i$  tem por espaço tangente neste ponto o subespaço complexo de dimensão um gerado por  $X_i(p)$  em  $T_p(M)$ , o espaço tangente a  $M$  em  $p$ . Analogamente, como  $p \in U_j$ , então  $X_j(p)$  gera o espaço tangente à subvariedade de  $\mathcal{F}_j$  por  $p$ . A condição destes subespaços coincidirem, pode ser expressa por  $X_i(p) = g_{ij}(p)X_j(p)$ , onde  $g_{ij}(p) \neq 0$ .

Assim, a condição natural para a colagem de  $\mathcal{F}_i$  e  $\mathcal{F}_j$  em  $U_i \cap U_j$  é a seguinte:

$$X_i = g_{ij} X_j$$

onde  $g_{ij}$  é uma função holomorfa em  $U_i \cap U_j$  que não se anula em nenhum ponto deste conjunto.

Deste modo, de forma simplificada, uma folheação de dimensão um de  $M$  é uma decomposição de  $M$  em subvariedades lisas de mesma dimensão que são localmente associadas a equações diferenciais.

Obviamente, uma folheação não é simplesmente uma coleção  $\{U_j, X_j\}_{j \in I}$ , mas sim, uma classe de equivalência de coleções deste tipo, onde

$$\{U_j, X_j\}_{j \in I} \sim \{U'_j, X'_j\}_{j \in I'}$$

se, e somente se, sempre que  $U_j \cap U'_j \neq \emptyset$ ,  $X_j$  e  $X'_j$  definem a mesma direção, isto é,  $X_j = g_{jj'} X'_j$ , para  $g_{jj'}$  holomorfa nunca nula.

Formalizaremos então, os comentários acima, com as definições:

**DEFINIÇÃO 1.1.2.** Seja  $M$  uma variedade complexa de dimensão  $n$ . Uma *folheação holomorfa de dimensão  $k$*  é um objeto definido por um atlas holomorfo descrito por  $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$  tal que toda carta  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ , satisfaz:

- (i)  $\varphi_\alpha(U_\alpha) = A_\alpha \times B_\alpha$  onde  $A_\alpha$  e  $B_\alpha$  são abertos de  $\mathbb{C}^k$  e  $\mathbb{C}^{n-k}$ , respectivamente;
- (ii) Para todo  $(x_\beta, y_\beta) \in \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ , com  $x_\beta \in \mathbb{C}^k$ ,  $y_\beta \in \mathbb{C}^{n-k}$  a mudança de carta satisfaz  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x_\beta, y_\beta) = (f_{\alpha\beta}(x_\beta, y_\beta), g_{\alpha\beta}(y_\beta))$ , onde  $f_{\alpha\beta}$  e  $g_{\alpha\beta}$  são holomorfas em  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ .

Cada carta  $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$  é chamada de *carta distinguida* da folheação  $\mathcal{F}$ . Os subconjuntos de  $U$  da forma  $\varphi_\alpha^{-1}(A_\alpha \times b)$  são chamados de *placas* da carta distinguida  $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ . Um

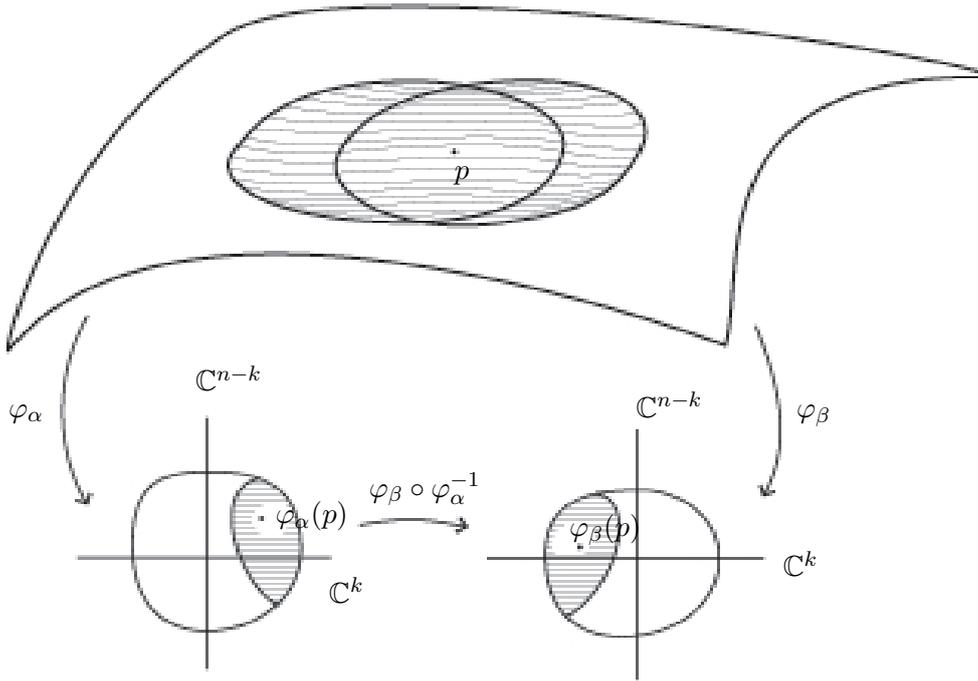


Figura 1.1: Folheação holomorfa de dimensão  $k$ .

atlas que satisfaz tais condições define uma partição de  $M$  em subvariedades de dimensão  $k$ , chamadas *folhas*, com a seguinte propriedade:  $p$  e  $q$  estão na mesma folha se existem  $(U_{\alpha_1}, \varphi_{\alpha_1}), \dots, (U_{\alpha_k}, \varphi_{\alpha_k})$  e constantes  $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{C}^{n-k}$  tal que

$$\varphi_{\alpha_i}^{-1}(\cdot \times \{y_i\}) \cap \varphi_{\alpha_{i+1}}^{-1}(\cdot \times \{y_{i+1}\}) \neq \emptyset$$

com  $p \in \varphi_{\alpha_1}^{-1}(\cdot \times \{y_1\})$  e  $q \in \varphi_{\alpha_k}^{-1}(\cdot \times \{y_k\})$ .

**DEFINIÇÃO 1.1.3.** Seja  $M$  uma variedade complexa de dimensão  $n$ . Uma *folheação com singularidades por curvas* — ou de *dimensão um* — de  $M$ , digamos  $\mathcal{F}$ , é um objeto definido por coleções  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ,  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  e  $\{g_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset}$  tal que

- (i)  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  é uma cobertura aberta de  $M$ ;
- (ii)  $X_\alpha$  é um campo de vetores holomorfo em  $U_\alpha$  com  $\text{codim } \text{Sing}(U_\alpha) \geq 2$ ;
- (iii)  $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$ , ou seja, é uma função holomorfa em  $U_\alpha \cap U_\beta$  que não se anula;
- (iv) se  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  então  $X_\alpha = g_{\alpha\beta} X_\beta$  em  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ .

**DEFINIÇÃO 1.1.4.** Seja  $\mathcal{F}$  folheação por curvas em  $M$  definida por  $\{U_j, X_j\}_{j \in I}$ . O *conjunto singular* de  $\mathcal{F}$ , denotado por  $\text{Sing}(\mathcal{F})$ , é o subconjunto analítico de  $M$  de codimensão maior

ou igual a dois definido por

$$\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap U_j = \{x \in U_j; X_j(x) = 0\}. \quad (1.2)$$

Um germe de folheação de codimensão um  $\mathcal{G}$  em  $0 \in \mathbb{C}^n$  é dado por uma 1-forma  $\omega = \sum a_i dx_i$ ,  $a_i \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$  satisfazendo:

(i)  $\omega \wedge d\omega = 0$ ;

(ii)  $\text{Sing}(\omega) = \{a_1 = \dots = a_n = 0\}$  tem codimensão maior ou igual a dois.

Dois formas  $\omega$  e  $\omega'$  definem a mesma folheação  $\mathcal{G}$  se, e somente se,  $\omega = g\omega'$  para alguma unidade  $g \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^n, 0)$ .

**DEFINIÇÃO 1.1.5.** Seja  $M$  uma variedade complexa de dimensão  $n \geq 2$ . Uma *folheação holomorfa singular de codimensão um sobre  $M$* , é definida por coleções  $\{\omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ,  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  e  $\{g_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset}$  satisfazendo as seguintes propriedades:

(i)  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  é uma cobertura aberta de  $M$ ;

(ii)  $\omega_\alpha$  é uma 1-forma diferencial holomorfa integrável em  $U_\alpha$  tal que codimensão do conjunto singular de  $\omega_\alpha$  é maior ou igual a dois;

(iii)  $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$ ;

(iv) se  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  então  $\omega_\alpha = g_{\alpha\beta}\omega_\beta$ .

Sejam  $\mathcal{G}$  uma folheação holomorfa definida na variedade conexa  $M$  por uma 1-forma  $\omega$  e  $f \in \mathcal{O}(M)$  uma função holomorfa não constante se anulando em algum ponto de  $M$ , de forma que o subconjunto analítico  $(f = 0)$  de  $M$  seja não vazio e, conseqüentemente, de codimensão um.

**DEFINIÇÃO 1.1.6.** Diremos que  $f$  é *invariante* por  $\mathcal{G}$  se, fora de  $\text{Sing}(\mathcal{G})$ , as suas componentes conexas de  $f = 0$  são folhas de  $\mathcal{G}$ .

Assim enunciamos:

**PROPOSIÇÃO 1.1.7.** O subconjunto analítico irreduzível  $(f = 0)$  é invariante por  $\mathcal{G}$  se, e somente se, existe uma 2-forma holomorfa  $\theta$  em  $M$  tal que

$$\omega \wedge df = f\theta.$$

Para ver isso, considere  $f = 0$  equação irreduzível da separatriz de  $\mathcal{G}$ . Temos que  $\omega \wedge df$  é uma 2-forma que se anula sobre  $f = 0$ . Como  $f$  é irreduzível e invariante por  $\mathcal{G}$  temos que  $f$  divide  $\omega \wedge df$ . Assim

$$\omega \wedge df = f\eta,$$

onde  $\eta$  é uma 2-forma holomorfa.

Definimos o conceito de subvariedade invariante por um campo vetorial holomorfo do seguinte modo:

**DEFINIÇÃO 1.1.8.** Seja  $X$  um germe de um campo de vetores holomorfo em  $0 \in \mathbb{C}^n$  e  $V$  um germe em  $p$  de uma subvariedade analítica, ou seja,  $V = f^{-1}(0)$ , onde  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$  é um germe em  $p$  do mapa analítico. Dizemos que  $V$  é *invariante* por  $X$  se, para qualquer  $p \in V$ , temos  $df_p X(p) = 0$ .

Considere a equação diferencial

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x) \quad \text{para } i = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

Podemos associar à equação acima o campo de vetores

$$X = \sum_{i=1}^n X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (1.4)$$

**DEFINIÇÃO 1.1.9.** Uma função  $f$  é dita *integral primeira* para a EDO (1.3) se para toda solução  $\phi(t)$  da EDO acima tivermos  $f(\phi(t))$  constante, ou seja, se as órbitas de  $X$  estiverem contidas nos níveis de  $f$ .

A definição acima nos diz que, se  $f$  é uma integral primeira para a EDO (1.3), então teremos

$$\frac{df(\phi(t))}{dt} = \vec{\nabla} f(\phi(t)) \cdot X(\phi(t)) = 0,$$

ou seja, se a derivada de  $f$  ao longo das trajetórias do campo  $X$  for 0.

**DEFINIÇÃO 1.1.10.** Se  $\mathcal{G}$  é uma folheação de codimensão um, dada por uma 1-forma integrável  $\omega$  então uma função meromorfa não constante  $f$  é uma *integral primeira* de  $\mathcal{G}$  se as folhas de  $\mathcal{G}$  estiverem contidas nos níveis de  $f$ . Isso ocorre se, e somente se,  $\omega \wedge df = 0$ .

**DEFINIÇÃO 1.1.11.** Dado um germe de folheação holomorfa  $\mathcal{F}$  de dimensão um em  $(\mathbb{C}^n, 0)$  com singularidade isolada, dizemos que  $\mathcal{F}$  possui uma *separatriz* em  $0 \in \mathbb{C}^n$  se existe um germe de curva analítica irreduzível  $\gamma$ , com as seguintes propriedades:

- (i)  $0 \in \gamma$ ;
- (ii)  $\gamma \setminus \{0\}$  é uma folha de  $\mathcal{F}$ .

**DEFINIÇÃO 1.1.12.** Seja  $X$  um germe de campo de vetores holomorfo em  $(\mathbb{C}^n, p)$  onde  $p$  é singularidade isolada. Definimos o *índice de  $X$  em  $p$* , denotado por  $ind_p(X)$ , como o grau topológico do mapa

$$\frac{X}{|X|} : S_r^{2n-1}(p) \longrightarrow S^{2n-1},$$

onde  $|x|^2 = \sum_{j=1}^{2n} x_j^2$ ,  $S_r^{2n-1}(p) = \{z : |z - p| = r, r > 0\}$  e  $r$  é suficientemente pequeno.

Seja  $X$  um germe de campo de vetores em  $(\mathbb{C}^n, p)$ , expresso em coordenadas por  $X = (X_1, \dots, X_n)$ . Considere  $\mathcal{O}_p$  o anel de germes de funções holomorfas em  $p$  e  $\langle X_1, \dots, X_n \rangle$  o ideal de  $\mathcal{O}_p$  gerado por  $X_1, \dots, X_n$ .

**DEFINIÇÃO 1.1.13.** A dimensão do espaço vetorial

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_p}{\langle X_1, \dots, X_n \rangle},$$

denotada por  $\mu(X, p)$ , é chamada de *número de Milnor* do campo de vetores  $X$  em  $p$ .

**OBSERVAÇÃO 1.1.14.** Em [CLNS84] podemos encontrar as seguintes propriedades com respeito ao número de Milnor:

- (i)  $\mu(X, p) = 0$  se, e somente se,  $p$  não é ponto singular de  $X$ ;
- (ii)  $0 < \mu(X, p) < \infty$  se, e somente se,  $p$  é singularidade isolada do campo  $X$ ;
- (iii)  $\mu(X, p) = ind_p(X)$ .

Em dimensão dois, considere  $p \in Sing(\mathcal{F})$  e  $\gamma$  uma curva invariante por  $\mathcal{F}$  em  $p$ , ou seja,  $\gamma$  é uma união finita de separatrizes. Tomemos uma 1-forma holomorfa  $\omega$  que induz  $\mathcal{F}$  em torno de  $p$  e uma função holomorfa  $f = 0$  equação reduzida de  $\gamma$ . Assim podemos enunciar:

**PROPOSIÇÃO 1.1.15.** [LN88] *Nas condições acima, existem germes de funções holomorfas  $g$  e  $h$ , relativamente primos e não identicamente nulos sobre  $\gamma$ , e germe de 1-forma holomorfa  $\eta$ , tais que*

$$g\omega = hdf + f\eta. \quad (1.5)$$

Reciprocamente, a existência da decomposição (1.5) implica que a curva  $\gamma$  de equação  $f = 0$  é invariante pela folheação induzida por  $\omega = 0$ . De fato, temos que  $g\omega \wedge df = f\eta \wedge df$ , ou seja,  $\omega \wedge df \equiv 0$  sobre  $\gamma$ . Então temos a seguinte definição

**DEFINIÇÃO 1.1.16.** O índice Camacho-Sad de  $\mathcal{F}$  com respeito a  $\gamma$  em  $p$  é definido por

$$CS(\mathcal{F}, \gamma, p) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\gamma} \frac{\eta}{h},$$

onde  $h$  e  $\eta$  são dados pela decomposição (1.5).

Nas condições acima podemos enunciar

**TEOREMA 1.1.17.** [CS82] *Seja  $M$  uma superfície complexa e  $\mathcal{F}$  uma folheação com singularidades isoladas em  $M$ . Considere  $\gamma \subset M$  uma curva compacta, invariante pela folheação  $\mathcal{F}$ . Defina*

$$CS(\mathcal{F}, \gamma) = \sum_{p \in \gamma} CS(\mathcal{F}, \gamma, p),$$

onde, no cálculo de  $CS(\mathcal{F}, \gamma, p)$ , tomamos as componentes locais de  $\gamma$  em  $p$ . Então

$$CS(\mathcal{F}, \gamma) = \gamma \cdot \gamma,$$

onde  $\gamma \cdot \gamma$  denota a autointerseção de  $\gamma$  em  $M$ .

## 1.2 CAMPOS DE VETORES TANGENTES A FOLHEAÇÕES

Nesta tese, propomos estudar folheações em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  que tem como objeto invariante folheações de codimensão um. Assim, neste momento, definiremos

**DEFINIÇÃO 1.2.1.** Sejam  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  germes de folheações em  $(\mathbb{C}^n, 0)$ ,  $n \geq 3$ , de dimensões  $i = 1$  e  $j = n - 1$ , respectivamente, com representantes em uma vizinhança  $U$  de  $0 \in \mathbb{C}^n$ . Dizemos que  $\mathcal{F}$  é tangente a  $\mathcal{G}$ , ou, alternativamente, que  $\mathcal{G}$  é invariante por  $\mathcal{F}$  se, para todo

$p \in U \setminus (Sing(\mathcal{F}) \cup Sing(\mathcal{G}))$ , vale a inclusão de espaços tangentes  $T_p\mathcal{F} \subset T_p\mathcal{G}$ , ou seja, para cada  $p \in U$  fora de  $Sing(\mathcal{F}) \cup Sing(\mathcal{G})$ , a folha de  $\mathcal{F}$  passando por  $p$  está contida na folha de  $\mathcal{G}$  por  $p$ .

Sejam  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  germes de folheações de dimensão um e codimensão um definidas em  $(\mathbb{C}^n, 0)$ , respectivamente, pelo germe de campo de vetores  $X = A_1\partial/\partial x_1 + \cdots + A_n\partial/\partial x_n$  e pelo germe de 1-forma holomorfa  $\omega = a_1dx_1 + \cdots + a_ndx_n$ . Temos que  $\mathcal{F}$  é tangente a  $\mathcal{G}$  se, e somente se,

$$i_X\omega = a_1A_1 + \cdots + a_nA_n = 0.$$

De posse da definição acima enunciamos:

**PROPOSIÇÃO 1.2.2.** *Sejam  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  germes de folheações holomorfas em  $(\mathbb{C}^n, 0)$  de dimensão um e codimensão um, respectivamente. Suponha que  $\mathcal{G}$  seja invariante por  $\mathcal{F}$ . Então  $Sing(\mathcal{G})$  é invariante por  $\mathcal{F}$ .*

*Demonstração.* Como o problema é de natureza local, podemos supor que  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  são definidas, respectivamente, por um campo de vetores  $X$  e por uma 1-forma  $\omega$  realizáveis no aberto  $U \subset \mathbb{C}^n$ . Seja  $p$  um ponto regular de  $\mathcal{F}$  pertencente a  $Sing(\mathcal{G})$ . Fixe  $(z_1, \dots, z_n)$  um sistema de coordenadas locais tal que  $p = (0, \dots, 0)$  e para o qual  $\mathcal{F}$  tem folhas verticais, ou seja,  $\mathcal{F}$  é induzida pelo campo local  $X = \partial/\partial z_n$ . Tome  $\omega = Q_1dz_1 + \cdots + Q_ndz_n$  uma 1-forma integrável que induz  $\mathcal{G}$  em torno de  $p$ , onde  $Q_i, i = 1 \cdots n$ , são polinômios homogêneos de mesmo grau e relativamente primos. Temos que

$$i_X\omega = Q_n \equiv 0.$$

A condição de integrabilidade de  $\omega$  nos dá

$$\begin{aligned} 0 = d\omega \wedge \omega &= \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial Q_j}{\partial z_i} dz_i \wedge dz_j \right) \wedge \left( \sum_{k=1}^{n-1} Q_k dz_k \right) \\ &= \sum_{i=1}^n dz_i \wedge \left( \sum_{1 \leq j < k \leq n-1} \left( \frac{\partial Q_j}{\partial z_i} Q_k - \frac{\partial Q_k}{\partial z_i} Q_j \right) dz_j \wedge dz_k \right). \end{aligned}$$

Fixando  $i = n$  temos

$$\frac{\partial Q_j}{\partial z_n} Q_k - \frac{\partial Q_n}{\partial z_n} Q_j = 0 \tag{1.6}$$

para todo  $1 \leq j < k < n$ . Mostraremos que isso implica que  $\partial Q_j / \partial z_n = 0$  para todo  $j = 1, \dots, n-1$ . Vamos provar tal fato para  $j = 1$ . Podemos supor que  $Q_1 \neq 0$ , pois caso contrário não há nada a fazer. Seja  $\varphi$  um fator irredutível do germe de  $Q_1$  em  $x$ . Afirmamos que existe um valor de  $k$  na lista  $2, \dots, n-1$  tal que  $\varphi$  não é fator irredutível do germe de  $Q_k$  em  $p$ . De fato, se isso não fosse verdade,  $\varphi$  seria um fator comum de  $Q_1, \dots, Q_{n-1}$ , o que resultaria em uma componente de codimensão um em  $Sing(\mathcal{G})$ . Seja  $s$  a multiplicidade de  $\varphi$  como fator de  $Q_1$ . Escrevemos  $Q_1 = \varphi^s \tilde{Q}_1$  onde  $\varphi$  não divide  $\tilde{Q}_1$ . Derivando com respeito a  $z_n$  temos

$$\frac{\partial Q_1}{\partial z_n} = s\varphi^{s-1} \frac{\partial \varphi}{\partial z_n} \tilde{Q}_1 + \varphi^s \frac{\partial \tilde{Q}_1}{\partial z_n}.$$

Como  $\partial Q_1 / \partial z_n Q_k = \partial Q_n / \partial z_n Q_1$  então temos que  $\varphi$  divide  $\partial \varphi / \partial z_n$ , implicando que  $\varphi = u\hat{\varphi}$ , onde  $u$  é unidade e  $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(z_1, \dots, z_{n-1})$ . Portanto  $\partial \hat{\varphi} / \partial z_n = 0$ . Aplicando esta técnica a todos os fatores irredutíveis de  $Q_1$  temos  $Q_1 = u_1 \hat{Q}_1$ , onde  $\hat{Q}_1 = \hat{Q}_1(z_1, \dots, z_{n-1})$ . Assim,  $\partial \hat{Q}_1 / \partial z_n = 0$ . De modo análogo temos

$$\begin{aligned} Q_2 &= u_2 \hat{Q}_2 \\ &\vdots \\ Q_n &= u_n \hat{Q}_n. \end{aligned}$$

Supondo  $u_1 = 1$  então  $Q_1 = \hat{Q}_1(z_1, \dots, z_n)$ . Pela equação (1.6), temos

$$\frac{\partial Q_j}{\partial z_n} Q_1 = Q_j \frac{\partial Q_1}{\partial z_n}.$$

Portanto  $\frac{\partial Q_j}{\partial z_n} = 0$ , implicando que  $Q_j = Q_j(z_1, \dots, z_{n-1})$ .

□

**TEOREMA 1.2.3.** [Mal76] (de Malgrange) *Seja  $\mathcal{G}$  um germe de folheação holomorfa de codimensão um em  $(\mathbb{C}^n, 0)$ ,  $n \geq 3$ , induzida por um germe de 1-forma holomorfa integrável  $\omega$ . Se o conjunto singular de  $\mathcal{G}$  tem codimensão maior ou igual a três, então  $\mathcal{G}$  possui integral primeira holomorfa, ou seja, existem germes de funções holomorfas  $f, g$  em  $(\mathbb{C}^n, 0)$ , com  $f(0) \neq 0$ , tais que  $\omega = fdg$ .*

Em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ , se a folheação de dimensão um  $\mathcal{F}$  é tangente a folheação de codimensão um  $\mathcal{G}$ , no caso em que  $Sing(\mathcal{G})$  é uma curva  $\gamma$ , ela é invariante por  $\mathcal{F}$  e, portanto é uma separatriz de  $\mathcal{F}$ . Se  $Sing(\mathcal{G}) = 0 \in \mathbb{C}^3$ , pelo Teorema de Malgrange temos que  $\mathcal{G}$  possui

uma integral primeira holomorfa  $f$ , que será também integral primeira holomorfa para  $\mathcal{F}$ . Em particular,  $f = 0$  é uma superfície invariante por  $\mathcal{F}$ . Expressamos este fato na seguinte proposição:

**PROPOSIÇÃO 1.2.4.** *Sejam  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  germes de folheações em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  tal que  $\mathcal{F}$  é tangente a  $\mathcal{G}$ . Então ou bem  $\mathcal{F}$  possui separatriz, ou bem possui integral primeira holomorfa e, nesse caso, possui uma superfície invariante.*

### 1.3 BLOW-UP OU EXPLOSÃO EM $0 \in \mathbb{C}^2$

A explosão em  $0 \in \mathbb{C}^2$  consiste em criar uma nova superfície complexa ao substituir a origem pelo conjunto de direções complexas neste ponto. Considere duas cópias de  $\mathbb{C}^2$ , denotadas por  $U_1$  e  $U_2$  com coordenadas  $(x, t)$  e  $(u, y)$ . Defina o biholomorfismo

$$U_1 \setminus \{t = 0\} \longrightarrow U_2 \setminus \{u = 0\}$$

$$(x, t) \longmapsto (t^{-1}, tx). \quad (1.7)$$

Identificamos os pontos de  $U_1 \setminus \{t = 0\}$  e  $U_2 \setminus \{u = 0\}$ , construindo uma superfície complexa  $\tilde{\mathbb{C}}^2$ . Existe uma aplicação holomorfa  $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$  definida em coordenadas locais por  $\pi(x, t) = (x, tx)$  em  $U_1$  e  $\pi(u, y) = (uy, y)$  em  $U_2$ , a qual chamaremos de *explosão* (ou *blow-up*) em  $0 \in \mathbb{C}^2$ . O conjunto  $\pi^{-1}(0) = \{(0, t) \in U_1\} \cup \{(u, 0) \in U_2\}$ , submetido à identificação (1.7), é uma reta projetiva  $\mathbb{P}^1$  que denotamos por  $E$ . Assim,  $\pi$  é um difeomorfismo holomorfo entre  $\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus E$  e  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ , e  $\pi^{-1}(0) = E$ .

**DEFINIÇÃO 1.3.1.** Seja  $X$  um campo de vetores holomorfo definido em uma vizinhança de  $0 \in \mathbb{C}^2$  tal que  $0$  é uma singularidade isolada de  $X$ . Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  os autovalores de  $DX(0)$ . Dizemos que  $0$  é uma *singularidade simples* ou *reduzida* de  $X$  se uma das condições abaixo for verificada:

- (a) Se  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ , então um dos autovalores é não nulo. Neste caso, dizemos que a singularidade é uma *sela-nó*.
- (b) Se  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$  e  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}_{>0}$ .

Se  $\mathcal{F}$  é uma folheação em vizinhança  $U$  de  $0 \in \mathbb{C}^2$  então  $\mathcal{F}$  se levanta pelo biholomorfismo  $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus E \longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  a uma folheação que se estende a  $\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$  com

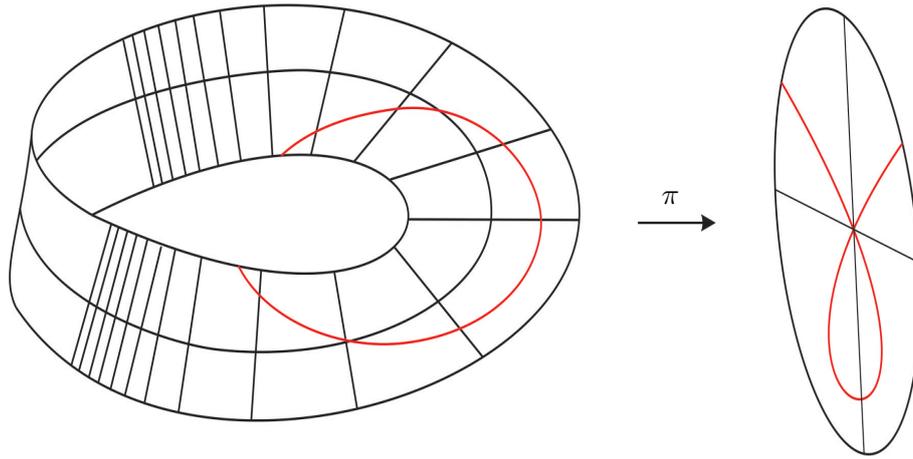


Figura 1.2: Blow-up de  $\mathbb{C}^2$ .

singularidades isoladas. Esta será chamada de transformado estrito de  $\mathcal{F}$  e será denotada por  $\pi^*\mathcal{F}$ . Podemos ainda considerar o transformado  $\pi^*S = \overline{\pi^{-1}(S \setminus \{0\})}$  do conjunto de separatrizes  $S$  de  $\mathcal{F}$ . As noções de transformado estrito de folheações e de curvas se aplicam de forma canônica a sequências finitas de blow-ups feitos a partir de  $0 \in \mathbb{C}^2$ . Defina  $E = \cup D_j$ , onde cada  $D_j$  é um divisor. Se  $D_i \cap D_j \neq \emptyset$  para  $i \neq j$ , chamaremos de esquina esta interseção. Temos a seguinte definição:

**DEFINIÇÃO 1.3.2.** Dizemos que o conjunto  $S$  de separatrizes de um campo de vetores é *dessingularizado* por uma sequência de blow-ups  $\pi$  se as componentes de  $\pi^*S$  satisfazem as seguintes condições:

- (i) todas elas são suaves e transversais ao divisor;
- (ii) nenhuma delas passa por uma esquina.

Se além disso, todas as singularidades de  $\pi^*\mathcal{F}$  forem simples e estiverem em curvas projetivas invariantes então dizemos que o campo está *dessingularizado*. Nesse caso, diremos que  $\pi$  é uma *resolução* ou *dessingularização* de  $\mathcal{F}$ .

O teorema a seguir diz que se  $0 \in \mathbb{C}^2$  é uma singularidade isolada de uma folheação  $\mathcal{F}$ , então, após uma sequência finita de blow-ups  $\pi : M \rightarrow \mathbb{C}^2$ , é possível definir uma folheação  $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^*\mathcal{F}$  que coincide com  $\mathcal{F}$  fora da união do divisor excepcional de  $\pi$  e cujas singularidades são todas simples.

**TEOREMA 1.3.3.** [Sei68] (Resolução de singularidades) *Toda singularidade isolada de uma folheação holomorfa em uma superfície complexa admite uma resolução.*

Vejamos o que acontece com uma folheação após um blow-up em  $0 \in \mathbb{C}^2$ . Considere a folheação  $\mathcal{F}$  em uma vizinhança da singularidade isolada  $0 \in \mathbb{C}^2$ , representada pelo campo de vetores

$$X = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

ou, de modo equivalente, pela 1-forma dual

$$\omega = P(x, y)dy - Q(x, y)dx.$$

Escrevendo o desenvolvimento de Taylor da forma  $\omega$  em torno de  $0 \in \mathbb{C}^2$  temos

$$\omega = \sum_{j=k}^{\infty} P_j dy - Q_j dx, \quad (1.8)$$

onde  $P_j$  e  $Q_j$  são polinômios homogêneos de grau  $j$ , com  $P_k \neq 0$  ou  $Q_k \neq 0$ . A forma  $\pi^*\omega$  se escreve na carta  $(x, t) \in U_1$  como

$$\begin{aligned} \pi^*\omega &= \sum_{j=k}^{\infty} P_j(x, tx)d(tx) - Q_j(x, tx)dx \\ &= x^k \sum_{j=k}^{\infty} x^{j-k} [(tP_j(1, t) - Q_j(1, t))dx + xP_j(1, t)dt]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Dividindo a equação (1.9) por  $x^k$ , obtemos

$$\frac{\pi^*\omega}{x^k} = (tP_k(1, t) - Q_k(1, t))dx + xP_k(1, t)dt + x\alpha, \quad (1.10)$$

onde

$$\alpha = \sum_{j=k+1}^{\infty} x^{j-k-1} [(tP_j(1, t) - Q_j(1, t))dx + xP_j(1, t)dt].$$

Analogamente, calculamos a expressão de  $\pi^*\omega$  na carta  $(u, y)$  e obtemos

$$\frac{\pi^*\omega}{y^k} = (tP_k(u, 1) - Q_k(u, 1))dy - yQ_k(u, 1)du + y\beta, \quad (1.11)$$

onde

$$\beta = \sum_{j=k+1}^{\infty} x^{j-k-1} [(tP_j(u, 1) - Q_j(u, 1))dy - yQ_j(u, 1)du].$$

Temos então dois casos à considerar:

- (1) Se  $tP_k(1, t) - Q_k(1, t) \neq 0$ , dizemos que a singularidade é *não dicrítica*. A folheação  $\pi^*\mathcal{F}$  é induzida por  $(\pi^*\omega)/x^k$ . O Divisor  $E = \{x = 0\}$  é invariante por  $\pi^*\mathcal{F}$ , que possui  $k + 1$  singularidades contadas com multiplicidade no divisor.
- (2) Se  $tP_k(1, t) - Q_k(1, t) \equiv 0$  dizemos que a singularidade é *dicrítica* e  $\pi^*\mathcal{F}$  é induzida por  $(\pi^*\omega)/x^{k+1}$ . O divisor  $E$  é não invariante e a imagem por  $\pi$  das infinitas folhas de  $\pi^*\mathcal{F}$  que cruzam o divisor resultam em infinitas separatrizes para  $\mathcal{F}$ .

## 1.4 BLOW-UP OU EXPLOSÃO DE $0 \in \mathbb{C}^3$

Subdividiremos esta seção em duas subseções, descrevendo assim os blow-ups pontuais e monoidais.

### 1.4.1 BLOW-UP PUNTUAL

Para isto, considere o conjunto  $\Sigma = \{(x, Y) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}^2; x \in Y\}$ . Escreva  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$  e  $Y = [Y_1 : Y_2 : Y_3] \in \mathbb{P}^2$ . Temos que  $x \in Y$  se, e somente se, existe  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  tal que

$$(x_1, x_2, x_3) = \lambda(Y_1, Y_2, Y_3).$$

Ou seja,

$$\frac{x_1}{Y_1} = \frac{x_2}{Y_2} = \frac{x_3}{Y_3} = \lambda,$$

sempre que essas expressão fizerem sentido. Assim, as equações  $x_i Y_j = x_j Y_i$  para  $i \neq j$  definem o conjunto  $\Sigma \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}^2$ . Considere  $\Sigma$  com a topologia induzida de  $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}^2$ .

Defina a projeção

$$\begin{array}{rcl} \pi : & \Sigma & \longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ & (x, Y) & \longmapsto x. \end{array}$$

Observe que

$$\pi : \Sigma \setminus \pi^{-1}(0) \longrightarrow \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$$

é um isomorfismo. Se  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ , então  $[x] \in \mathbb{P}^2$  está bem definido e podemos escrever  $\pi^{-1}(x) = (x, [x]) \in \Sigma$ . Temos ainda que

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(0) &= \{(0, [a_1 : a_2 : a_3]); [a_1 : a_2 : a_3] \in \mathbb{P}^2\} \\ &= \{0\} \times \mathbb{P}^2 \simeq \mathbb{P}^2. \end{aligned}$$

Neste caso,  $\pi$  é o blow-up *puntual da origem* de  $\mathbb{C}^3$ ,  $\pi^{-1}(0) \simeq \mathbb{P}^2$  é o *divisor excepcional*, geralmente denotado por  $E$ , e  $\Sigma$  é o novo espaço ambiente, uma variedade complexa de dimensão três.

A partir de agora vamos descrever o blow-up puntual  $\pi$  em cartas locais. Para isto, considere para  $j = 1, 2$  ou  $3$  o conjunto

$$H_j = \{[a_1 : a_2 : a_3] \in \mathbb{P}^2; a_j \neq 0\}.$$

Vemos então que  $H_j \simeq \mathbb{C}^2$ . Escreva

$$\Sigma_j = \Sigma \cap (\mathbb{C}^3 \times H_j) = \{(x, Y); Y_j \neq 0\}.$$

Defina

$$\begin{aligned} \Phi_1 : \quad \Sigma_1 &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ ((x_1, x_2, x_3), [Y_1, Y_2, Y_3]) &\longmapsto \left(x_1, \frac{Y_2}{Y_1}, \frac{Y_3}{Y_1}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 : \quad \Sigma_2 &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ ((x_1, x_2, x_3), [Y_1, Y_2, Y_3]) &\longmapsto \left(\frac{Y_1}{Y_2}, x_2, \frac{Y_3}{Y_2}\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Phi_3 : \quad \Sigma_3 &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ ((x_1, x_2, x_3), [Y_1, Y_2, Y_3]) &\longmapsto \left(\frac{Y_1}{Y_3}, \frac{Y_2}{Y_3}, x_3\right). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \Phi_1^{-1} : \mathbb{C}^3 \setminus \{x_1 = 0\} &\longrightarrow \Sigma_1 \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto ((x_1, x_1x_2, x_1x_3), [1 : x_2 : x_3]), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2^{-1} : \mathbb{C}^3 \setminus \{x_2 = 0\} &\longrightarrow \Sigma_2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto ((x_1x_2, x_2, x_2x_3), [x_1 : 1 : x_3]) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Phi_3^{-1} : \mathbb{C}^3 \setminus \{x_3 = 0\} &\longrightarrow \Sigma_3 \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto ((x_1x_3, x_2x_3, x_3), [x_1 : x_2 : 1]). \end{aligned}$$

As três cartas locais são dadas por:

$$\begin{aligned} \pi \circ \Phi_1^{-1}(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_1x_2, x_1x_3); \\ \pi \circ \Phi_2^{-1}(x_1, x_2, x_3) &= (x_1x_2, x_2, x_2x_3); \\ \pi \circ \Phi_3^{-1}(x_1, x_2, x_3) &= (x_1x_3, x_2x_3, x_3). \end{aligned}$$

Vejamos o que acontece com uma folheação de dimensão um após um blow-up puntual em  $0 \in \mathbb{C}^3$ . Seja  $\mathcal{F}$  um germe de folheação de dimensão um em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  induzida pelo campo de vetores

$$X = (A_\nu + A) \frac{\partial}{\partial x_1} + (B_\nu + B) \frac{\partial}{\partial x_2} + (C_\nu + C) \frac{\partial}{\partial x_3},$$

onde  $A_\nu, B_\nu$  e  $C_\nu$  são homogêneos de grau  $\nu$  não todos nulos. Considere a primeira carta do blow-up puntual  $\pi$  dada por

$$x_1 = x_1^*, \quad x_2 = x_1^*x_2^*, \quad x_3 = x_1^*x_3^*.$$

Escreveremos as coordenadas do campo de vetores  $X$  em função das novas coordenadas

como

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1^*} - \frac{x_2^*}{x_1^*} \frac{\partial}{\partial x_2^*} - \frac{x_3^*}{x_1^*} \frac{\partial}{\partial x_3^*}, \\ \frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{1}{x_1^*} \frac{\partial}{\partial x_2^*}, \\ \frac{\partial}{\partial x_3} &= \frac{1}{x_1^*} \frac{\partial}{\partial x_3^*}.\end{aligned}\tag{1.12}$$

O campo de vetores  $X$  é transformado na carta  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  em

$$\begin{aligned}X_1^* &= (x_1^{*\nu} A_\nu(1, x_2^*, x_3^*) + x_1^{*\nu+1} \tilde{A}(x_1^*, x_2^*, x_3^*)) \left( \frac{\partial}{\partial x_1^*} - \frac{x_2^*}{x_1^*} \frac{\partial}{\partial x_2^*} - \frac{x_3^*}{x_1^*} \frac{\partial}{\partial x_3^*} \right) + \\ &\quad (x_1^{*\nu} B_\nu(1, x_2^*, x_3^*) + x_1^{*\nu+1} \tilde{B}(x_1^*, x_2^*, x_3^*)) \left( \frac{1}{x_1^*} \frac{\partial}{\partial x_2^*} \right) + \\ &\quad (x_1^{*\nu} C_\nu(1, x_2^*, x_3^*) + x_1^{*\nu+1} \tilde{C}(x_1^*, x_2^*, x_3^*)) \left( \frac{1}{x_1^*} \frac{\partial}{\partial x_3^*} \right).\end{aligned}$$

onde  $\tilde{A}(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ ,  $\tilde{B}(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  e  $\tilde{C}(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  são funções holomorfas e  $X_1^*$  define em  $(\Sigma, \pi^{-1}(0))$  uma folheação de dimensão um denotada por  $\mathcal{F}_1$ . Temos que

$$\begin{aligned}\frac{X_1^*}{x_1^{*\nu-1}} &= x_1^* A_\nu(1, x_2^*, x_3^*) \frac{\partial}{\partial x_1^*} + (B_\nu(1, x_2^*, x_3^*) - x_2^* A_\nu(1, x_2^*, x_3^*)) \frac{\partial}{\partial x_2^*} + \\ &\quad (C_\nu(1, x_2^*, x_3^*) - x_3^* A_\nu(1, x_2^*, x_3^*)) \frac{\partial}{\partial x_3^*} + x_1^* \tilde{X},\end{aligned}\tag{1.13}$$

onde o coeficiente de  $\tilde{X}$  se anula sobre  $x_1^{*=0}$ . Temos dois casos para analisar:

(1) Se  $(A_\nu, B_\nu, C_\nu)$  é múltiplo do campo radial, temos que  $A_\nu = \phi x_1$ ,  $B_\nu = \phi x_2$  e  $C_\nu = \phi x_3$ , onde  $\phi$  é homogênea de grau  $\nu - 1$ . Neste caso podemos reescrever as expressões acima como

$$A_\nu = x_1^{*\nu-1} \phi(1, x_2^*, x_3^*) x_1^*, B_\nu = x_1^{*\nu-1} \phi(1, x_2^*, x_3^*) x_1^* x_2^* \text{ e } C_\nu = x_1^{*\nu-1} \phi(1, x_2^*, x_3^*) x_1^* x_3^*.$$

Observe que

$$B_\nu(1, x_2^*, x_3^*) - x_2^* A_\nu(1, x_2^*, x_3^*) = x_2^* \phi(1, x_2^*, x_3^*) x_1^{*\nu} - x_2^* x_1^{*\nu-1} \phi(1, x_2^*, x_3^*) x_1^* = 0$$

e

$$C_\nu(1, x_2^*, x_3^*) - x_3^* A_\nu(1, x_2^*, x_3^*) = x_3^* \phi(1, x_2^*, x_3^*) x_1^{*\nu} - x_3^* x_1^{*\nu-1} \phi(1, x_2^*, x_3^*) x_1^* = 0.$$

Neste caso dizemos que o campo de vetores  $X$  é *dicrítico*. Como  $A_\nu \neq 0$ , pois caso contrário  $\phi$  seria nulo e a ordem do campo seria maior que  $\nu$ , temos que o coeficiente de  $\partial/\partial x_1^*$  não é identicamente nulo. Assim,  $\mathcal{F}_1$  é genericamente transversal ao divisor com equação  $E = \{x_1 = 0\}$ .

(2) Se  $(A_\nu, B_\nu, C_\nu)$  não é múltiplo do campo radial, temos

$$B_\nu(1, x_2^*, x_3^*) - x_2^* A_\nu(1, x_2^*, x_3^*) \neq 0 \text{ ou } C_\nu(1, x_2^*, x_3^*) - x_3^* A_\nu(1, x_2^*, x_3^*) \neq 0.$$

Neste caso, dizemos que o campo de vetores  $X$  é *não dicrítico*. O campo de vetores com equação (1.13) define  $\mathcal{F}_1$  e o coeficiente de  $\partial/\partial x_1^*$  se anula sobre o divisor  $E$ . Portanto  $E$  é invariante por  $\mathcal{F}_1$ .

## 1.4.2 BLOW-UP MONOIDAL

Vamos agora descrever o blow-up com centros em um subconjunto analítico liso  $\Gamma \subset M$  tal que  $\text{codim}(\Gamma) \geq 2$ . Como exemplo, faremos um blow-up do eixo  $x_3$  de  $\mathbb{C}^3$ , ou seja,  $O_{x_3} = \{x_1 = x_2 = 0\}$ .

Defina os conjuntos

$$\Sigma = \{((z_1, z_2, z_3), Y) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}^1; [z_1, z_2] = Y\},$$

$$H_j = \{[Y_1 : Y_2] \in \mathbb{P}^1; Y_j \neq 0\}$$

e

$$\Sigma_j = \Sigma \cap (\mathbb{C}^3 \times H_j).$$

E os mapas

$$\begin{array}{lll} \Psi_1 : & \Sigma_1 & \longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ & ((z_1, z_2, z_3), [Y_1 : Y_2]) & \longmapsto \left( z_1, \frac{Y_2}{Y_1}, z_3 \right) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{lll} \Psi_2 : & \Sigma_2 & \longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ & ((z_1, z_2, z_3), [Y_1 : Y_2]) & \longmapsto \left( \frac{Y_1}{Y_2}, z_2, z_3 \right). \end{array}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \Psi_1^{-1} : \mathbb{C}^3 \setminus \{x_1 = 0\} &\longrightarrow \Sigma_1 \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto ((x_1, x_1x_2, x_3), [1 : x_2]) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Psi_2^{-1} : \mathbb{C}^3 \setminus \{x_2 = 0\} &\longrightarrow \Sigma_2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto ((x_1x_2, x_2, x_3), [x_1 : 1]). \end{aligned}$$

Assim, temos as cartas locais

$$\begin{aligned} \pi \circ \Psi_1^{-1}(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_1x_2, x_3), \\ \pi \circ \Psi_2^{-1}(x_1, x_2, x_3) &= (x_1x_2, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Temos ainda que, para cada ponto  $p$  sobre o eixo  $x_3$ ,

$$\pi^{-1}(p) \simeq \mathbb{P}^1,$$

$$\pi^{-1}(O_{x_3}) \simeq O_{x_3} \times \mathbb{P}^1.$$

Como exemplo, suponha que a folheação  $\mathcal{F}$  seja induzida pelo campo de vetores

$$X = A \frac{\partial}{\partial x_1} + B \frac{\partial}{\partial x_2} + C \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Considere o blow-up monoidal  $\pi$  do eixo  $x_3$  de  $\mathbb{C}^3$  dado, em coordenadas, por

$$x_1 = x_1^*, \quad x_2 = x_1^*x_2^*, \quad x_3 = x_3^*.$$

Escreveremos as coordenadas do campo de vetores  $X$  em função das novas coordenadas

como

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1^*} - \frac{x_2^*}{x_1^*} \frac{\partial}{\partial x_2^*}; \\ \frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{1}{x_1^*} \frac{\partial}{\partial x_2^*}; \\ \frac{\partial}{\partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_3^*}.\end{aligned}\tag{1.14}$$

Assim, temos que  $\mathcal{F}_1 = \pi^*(\mathcal{F})$  é induzido pelo campo de vetores meromorfo

$$\begin{aligned}X^* &= A(x_1^*, x_1^*x_2^*, x_3^*) \left( \frac{\partial}{\partial x_1^*} - \frac{x_2^*}{x_1^*} \frac{\partial}{\partial x_2^*} \right) + B(x_1^*, x_1^*x_2^*, x_3^*) \frac{1}{x_1^*} \frac{\partial}{\partial x_2^*} + C(x_1^*, x_1^*x_2^*, x_3^*) \frac{\partial}{\partial x_3^*} \\ &= A^* \frac{\partial}{\partial x_1^*} + \left( -\frac{x_2^*}{x_1^*} A^* + \frac{B^*}{x_1^*} \right) \frac{\partial}{\partial x_2^*} + C^* \frac{\partial}{\partial x_3^*},\end{aligned}\tag{1.15}$$

onde  $A^* = A(x_1^*, x_1^*x_2^*, x_3^*)$ ,  $B^* = B(x_1^*, x_1^*x_2^*, x_3^*)$  e  $C^* = C(x_1^*, x_1^*x_2^*, x_3^*)$ .

## 1.5 CAMPOS DE VETORES TANGENTES A FOLHEAÇÕES E DESSINGULARIZAÇÃO

Nesta seção descreveremos o estudo sobre campos de vetores tangentes a folheações feito por F. Cano e C. Roche em [CR14]. Mas antes, começamos com a definição

**DEFINIÇÃO 1.5.1.** Seja  $X$  um campo de vetores definido em uma variedade  $M$  de dimensão pelo menos três. Dizemos que  $X$  é um campo de vetores *elementar* ou *simplex* em  $p \in M$  se uma das seguintes condições acontece:

- (i)  $X(p) \neq 0$  (caso não singular);
- (ii)  $X(p) = 0$  e o mapa jacobiano  $DX(p)$  tem pelo menos um autovalor não nulo.

**DEFINIÇÃO 1.5.2.** [CR14] Dizemos que a curva formal  $\widehat{\Gamma}$  é *totalmente transcendente* se não estiver contida em qualquer germe de superfície analítica de  $(\mathbb{C}^3, 0)$ .

Chamaremos de *blow-ups permissíveis* os blow-ups em pontos ou ao longo de curvas lisas invariantes com cruzamentos normais com o divisor  $E$ .

Enunciaremos a seguir um teorema, devido a F. Cano e C. Roche, que garante que todo germe de campo de vetores tangente a uma folheação de codimensão um em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  pode ser dessingularizado.

**TEOREMA 1.5.3.** [CR14] *Seja  $X$  um germe de campo de vetores em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  com uma curva formal invariante totalmente transcendente  $\widehat{\Gamma}$  e seja  $E$  um divisor com cruzamentos normais em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ . Denote por  $\mathcal{F}$  a folheação induzida por  $X$ . Assuma que existe um germe de folheação holomorfa de codimensão um em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ , digamos  $\mathcal{G}$ , tal que  $X$  é tangente a  $\mathcal{G}$ . Então existe uma sequência finita de blow-ups locais*

$$(\mathbb{C}^3, 0) = (M_0, p_0) \xleftarrow{\pi_1} (M_1, p_1) \xleftarrow{\pi_2} \cdots \xleftarrow{\pi_n} (M_n, p_n) \quad (1.16)$$

com as seguintes propriedades:

- (1) *O centro  $Y_{j-1}$  de  $\pi_j$  é um ponto ou um germe de curva analítica não singular invariante para a folheação transformada  $\mathcal{F}_{j-1}$  de  $\mathcal{F}$ . Além disso,  $Y_{j-1}$  tem cruzamento normal com o transformado total  $E_{j-1}$  de  $E$ .*
- (2) *Os pontos  $p_i$  estão no transformado estrito de  $\widehat{\Gamma}$ .*
- (3) *O transformado final  $\mathcal{F}_n$  possui pontos singulares elementares.*

Como exemplo, consideremos o campo de vetores descrito por F. Sanz e F. Sancho (em [CMS04] podemos encontrar a primeira referência na literatura para tal campo):

$$X = X_{\alpha, \beta, \lambda, x_1, x_2, x_3} = x_1 \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \alpha x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - \beta x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) + x_1 x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + (x_2 - \lambda x_1) \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad (1.17)$$

onde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}_{> 0}$ . Este campo de vetores não pode ser dessingularizado por blow-ups birracionais.

Os campos em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  que não possuem uma dessingularização — ou seja, aqueles que são transformados por qualquer sequência finita de blow-ups permissíveis em campos contendo singularidades não elementares — deixam invariantes curvas formais totalmente transcendente. Isto segue dos trabalhos [CRS14, Pan06, MP13]. Como o campo de vetores dado em (1.17) possui uma curva formal invariante totalmente transcendente, concluímos que:

**COROLÁRIO 1.5.4.** *O campo de vetores dado em (1.17) não é tangente a uma folheação de codimensão um em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ .*

Uma outra consequência direta pode ser enunciada como:

**COROLÁRIO 1.5.5.** *Se um campo de vetores é tangente a uma folheação, então ele possui uma dessingularização.*



---

*INTEGRAIS PRIMEIRAS DE CAMPOS DE VETORES EM  $(\mathbb{C}^3, 0)$* 

---

Campos vetoriais holomorfos em  $(\mathbb{C}^2, 0)$  sempre possuem separatrizes pelo Teorema de C. Camacho e P. Sad [CS82]. Em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ , tal fato não é verdadeiro. No artigo [GML92], X. Gómez-Mont e I. Luengo mostraram que existe uma família de campos de vetores em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  sem separatriz. Mostraremos que campos de vetores nesta família não admitem integrais primeiras holomorfas e, portanto, não são tangentes a folheações holomorfas de codimensão um. Mostraremos ainda que um campo de vetores com singularidade isoladas em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  tangente a uma folheação que possui, em alguma dessingularização, singularidades no domínio de Poincaré, admite separatriz.

## 2.1 EXEMPLO DE CAMPO DE VETORES HOLOMORFO SEM SEPARATRIZ

Seja  $X$  um germe de campo de vetores analítico em  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . É natural perguntar se existem soluções da equação diferencial

$$\frac{dx(t)}{dt} = X(x(t)), \quad X(0) = 0$$

que tendem a  $0 \in \mathbb{C}^2$ . Essa é uma questão que aparece em dinâmica complexa, tendo sido estudada pela primeira vez por C. Briot e J. Bouquet em [BB56]. Eles mostraram, em diversos casos particulares, que existem tais soluções tendendo assintoticamente a  $0 \in \mathbb{C}^2$ . Este problema também foi considerado por H. Dulac de um outro ponto de vista. Dada a equação diferencial com parte linear não nula, Dulac se propôs a determinar o conjunto das soluções que tendem assintoticamente a  $0 \in \mathbb{C}^2$ . Em 1982, C. Camacho e P. Sad mostraram

o seguinte teorema:

**TEOREMA 2.1.1.** [CS82] (da Separatriz) *Considere a equação diferencial analítica*

$$\frac{dx(t)}{dt} = X(x(t)), \quad X(0) = 0,$$

com uma singularidade isolada em  $0 \in \mathbb{C}^2$ . Então, em uma vizinhança de  $0 \in \mathbb{C}^2$ , existe uma subvariedade analítica complexa de dimensão um passando por  $0 \in \mathbb{C}^2$ , invariante por  $X$ .

Isto significa que existem uma vizinhança  $U$  de  $0 \in \mathbb{C}^2$  e uma curva complexa  $\Gamma \subset U$ , integral da equação diferencial em  $U \setminus \{0\}$ , tal que  $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \{0\}$  é um conjunto analítico complexo. A curva  $\Gamma$  é chamada de *separatriz*.

Em 1992, X. Gómez-Mont e I. Luengo construíram em [GML92], uma subvariedade algébrica no espaço dos campos de vetores de multiplicidade algébrica dois e grau três localmente fechada

$$\mathcal{V} \subset \frac{\mathfrak{m}_{(\mathbb{C}^3,0)}^2 \cdot \Theta_{(\mathbb{C}^3,0)}}{\mathfrak{m}_{(\mathbb{C}^3,0)}^4 \cdot \Theta_{(\mathbb{C}^3,0)}},$$

de codimensão 17, tal que todo campo de vetores de multiplicidade algébrica 2 e cujo 3-jato está em  $\mathcal{V}$  não possui separatriz. Veremos na segunda seção deste capítulo que campos de vetores nesta família não são tangentes a folheações.

**DEFINIÇÃO 2.1.2.** Seja  $f(x_1, x_2, x_3)$  um germe de função analítica em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  que admite expansão em série de potências convergente, digamos,  $f = \sum f_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^k$ . A *multiplicidade* ou *ordem* de  $f$  denotada por  $\nu_0(f)$ , é o menor dos valores  $i + j + k$  com  $f_{ijk} \neq 0$ .

**DEFINIÇÃO 2.1.3.** Seja  $\mathcal{F}$  um germe de folheação holomorfa em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  definida pelo campo de vetores  $X$ . Então a *multiplicidade algébrica* ou *ordem* de  $\mathcal{F}$  em  $0 \in \mathbb{C}^3$  é a menor das multiplicidades das componentes de  $X$ .

Neste capítulo, diremos que um germe de campo de vetores  $X$  é *não dicrítico* em  $0 \in \mathbb{C}^3$  se os termos de menor grau de  $X$  não são múltiplos do campo radial. Isto equivale a pedir que o divisor do blow-up puntual em  $0 \in \mathbb{C}^3$  seja invariante pela folheação transformada estrita, como visto na Seção 1.4.1.

A partir de agora, considere

$$\mathcal{V} \subset \frac{\mathfrak{m}_{(\mathbb{C}^3,0)}^2 \cdot \Theta_{(\mathbb{C}^3,0)}}{\mathfrak{m}_{(\mathbb{C}^3,0)}^4 \cdot \Theta_{(\mathbb{C}^3,0)}} \tag{2.1}$$

o espaço dos campos de vetores polinomiais  $X$  em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  com termos não nulos somente nos graus dois e três satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i)  $X$  é não dicrítico em  $0 \in \mathbb{C}^3$  e a folheação obtida pelo blow-up puntual de  $0 \in \mathbb{C}^3$  possui três pontos singulares no divisor excepcional com multiplicidades 3, 2 e 2, respectivamente. Além disso, sobre estes pontos, a parte linear do campo de vetores que gera a folheação transformada estrita  $\tilde{\mathcal{F}}$  tem dois autovalores iguais e não nulos.
- (ii) Em cada um desses pontos singulares, a parte linear do campo que gera  $\tilde{\mathcal{F}}$  é não diagonalizável.

**DEFINIÇÃO 2.1.4.** [GML92] Chamaremos de  $\mathcal{X}$  a família de germes de campos de vetores holomorfos em  $0 \in \mathbb{C}^3$  com multiplicidade algébrica 2 e tal que seu 3-jato está em  $\mathcal{V}$ .

Seja  $\mathcal{F}$  um germe de folheação holomorfa dada por um campo de vetores holomorfo  $X$  em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ . Seja  $\pi_j : \mathbb{C}_j^3 \rightarrow \mathbb{C}_{j-1}^3, j = 1, \dots, n$ , uma sequência de blow-ups puntuais nos pontos  $p_{j-1}, j = 1, \dots, n$ , onde  $p_0 = 0 \in \mathbb{C}^3, E_j = \pi_j^{-1}(p_{j-1}), p_j \in E_j$ . Para  $k > j$  seja  $E_j^k$  o transformado estrito de  $E_j$  por  $\pi_k \circ \dots \circ \pi_{j+1}$  e  $E_k^k = E_k$ . Denotaremos ainda por  $\mathcal{F}_j$  a folheação transformada estrita de  $\mathcal{F}_{j-1}$  por  $\pi_j$  e por  $D_k = \bigcup_{j=1}^k E_j^k$ . Com esta notação enunciamos o seguinte lema, cuja demonstração apresentamos por seu útil na sequência do trabalho.

**LEMA 2.1.5.** [GML92] *Sejam  $X \in \mathcal{X}$  e  $\mathcal{F}$  a folheação induzida por  $X$ . Então  $X$  tem uma singularidade isolada em  $0 \in \mathbb{C}^3$  e satisfaz as propriedades (i) e (ii).*

*Demonstração.* Os termos quadráticos de  $X$  determinam  $\mathcal{F}_1|_{E_1}$  e os jatos de ordem 2 e 3 determinam a parte linear  $\mathcal{F}_1$  nos pontos singulares em  $E_1$ . Se o 3-jato do campo de vetores  $X \in \mathcal{X}$  está em  $\mathcal{V}$ , então  $\mathcal{F}_1$  satisfaz as propriedades (i) e (ii). Verificaremos que  $X$  tem singularidade isolada em  $0 \in \mathbb{C}^3$ . Como  $\pi_1 : \mathbb{C}_1^3 \setminus E_1 \rightarrow \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$  é um biholomorfismo, é suficiente mostrar que os pontos singulares de  $\mathcal{F}_1$  sobre o divisor  $E_1$  são isolados. Pelo item (i), temos que a parte linear do campo de vetores que gera a folheação transformada estrita  $\mathcal{F}_1$  possui um autovalor nulo e os outros dois iguais e não nulos e, pelo item (ii), é não diagonalizável. Assim em cada uma das singularidades de  $\mathcal{F}_1|_{E_1}$  podemos tomar cartas

coordenadas locais tais que  $\mathcal{F}_1$  é definida por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix},$$

onde  $h_1 \in \mathfrak{m}$ ,  $h_2, h_3 \in \mathfrak{m}^2$ ,  $h_3(0, x_2, x_3) \neq 0$  e  $\mathfrak{m}$  é o ideal maximal em  $\mathcal{O}_3$ . Observe que o terceiro autovalor é nulo, pois caso contrário  $\mu(\mathcal{F}_1|_{E_1}, 0) = 1$  e, portanto, a parte linear de  $\tilde{\mathcal{F}}$  seria invertível. Neste caso o campo de vetores que induz a folheação próximo do ponto singular é descrito por:

$$\tilde{X} = x_1(1 + h_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 + x_2 + h_2) \frac{\partial}{\partial x_2} + h_3 \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad (2.2)$$

Sabemos que  $x_1 = 0$  é a equação do divisor. Assim, o número de Milnor de  $\mathcal{F}_1$  em  $0 \in \mathbb{C}^3$  é

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{F}_1, 0) &= \dim \frac{\mathcal{O}_3}{(x_1(1 + h_1), x_1 + x_2 + h_2, h_3)} \\ &= \dim \frac{\mathcal{O}_3}{(x_1, x_2 + h_2, h_3)} \\ &= \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(x_2 + h_2(0, x_2, x_3), h_3(0, x_2, x_3))} \\ &= \mu(\mathcal{F}_1|_{E_1}, 0) \leq 3, \end{aligned} \quad (2.3)$$

visto que  $h_3(0, x_2, x_3) \neq 0$ . Como  $\mu(\mathcal{F}_1, 0) \leq 3$ , então  $h_2(0, x_2, x_3)$  e  $h_3(0, x_2, x_3)$  possuem singularidades isoladas e portanto  $X$  possui singularidade isolada. Devido à Observação 1.1.14,  $\mathcal{F}_1$  tem singularidades isoladas sobre  $E_1$ , o que conclui a demonstração do lema.  $\square$

A seguir, introduziremos o conceito de singularidade do tipo esquina simples proposta por F. Cano em [Can87].

**DEFINIÇÃO 2.1.6.** Um ponto singular  $p \in D_j$  da folheação  $\mathcal{F}_j$  é dito uma *esquina simples* se podemos encontrar coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  centradas em  $p$  tais que

- (1)  $p \in E_{j_0}^j \cap E_{j_1}^j$  com  $j_0 < j_1 \leq j$  e  $x_1 x_2 = 0$  é a equação local para  $E_{j_0}^j \cup E_{j_1}^j$  em  $p$ .
- (2) Podemos descrever a folheação  $\mathcal{F}_j$ , em vizinhança de  $p$ , por meio do campo de

vetores

$$Y = x_1(1 + g_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2(\beta + g_2) \frac{\partial}{\partial x_2} + g_3 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

onde  $\beta$  é um número complexo que não é estritamente racional positivo e  $g_i(p) = 0$ , para  $i = 1, 2, 3$ .

A proposição a seguir mostra que o modelo de esquinas simples é invariante por blow-ups.

**PROPOSIÇÃO 2.1.7.** [Can87] *Se  $p_j$  é uma esquina simples para  $\mathcal{F}_j$ , então o blow-up  $\pi_{j+1}$  é não dicrítico e todos os pontos singulares de  $\mathcal{F}_{j+1}$  sobre  $E_{j+1}$  são esquinas simples.*

**PROPOSIÇÃO 2.1.8.** [GML92] *Seja  $X$  um germe de campo de vetores holomorfo em  $\mathbb{C}^3$  com um zero isolado na forma (2.2), então todas as separatrizes de  $X$  por  $0 \in \mathbb{C}^3$  estão contidas no plano  $x_1 = 0$ .*

A demonstração da proposição acima se faz em dois passos. Primeiramente, mostra-se que a folheação obtida pelo blow-up de cada uma das três singularidades de  $\mathcal{F}_1$  em  $E_1$  definidas localmente pelo campo da forma (2.2) tem dois pontos singulares que são esquinas simples com respeito ao divisor excepcional. Depois, é suficiente provar que não existem separatrizes fora do plano  $x_1 = 0$ , pois uma tal separatriz geraria singularidades fora do cruzamento dos divisores, o que não é possível visto que o modelo de esquinas simples é invariante por blow-ups.

Com a notação utilizada no Lema 2.1.5, seja  $\mathcal{F}_1$  a folheação em  $(\mathbb{C}_1^3, E_1)$ . Sabemos que a folheação  $\mathcal{F}_2$ , restrita ao divisor  $E_2$ , é descrita pelos termos lineares de (2.2) e possui dois pontos singulares  $p = (0 : 0 : 1)$  e  $q = (0 : 1 : 0)$ , correspondendo aos autoespaços de  $DX(0)$  com autovalores 0 e 1. Vamos mostrar que  $\mathcal{F}_2$  tem esquinas simples em  $p$  e  $q$ .

**PROPOSIÇÃO 2.1.9.** *Tomando coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  em torno de  $p$  e tais que  $\pi_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_3, x_2x_3, x_3)$ , então a folheação  $\mathcal{F}_2$  será induzida por*

$$Z_0 = (x_1 + x_1x_3(H_1 - H_3), x_1 + x_2 + x_3(H_2 - x_2H_3), x_3^2H_3), \quad (2.4)$$

onde  $H_1 = x_3^{-1}h_1$ ,  $H_2 = x_3^{-2}h_2$  e  $H_3 = x_3^{-2}h_3$ .

*Demonstração.* De fato, nas coordenadas acima, o divisor  $D_2$  será  $x_1x_3 = 0$ . Calculando o transformado do campo de vetores definido em (2.2) por  $\pi_2$ , temos

$$\begin{aligned}
 Z_0 &= (x_1x_3 + x_1x_3h_1)\frac{1}{x_3}\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1x_3 + x_2x_3 + h_2)\frac{1}{x_3}\frac{\partial}{\partial x_2} \\
 &\quad + h_3\left(\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{x_2}{x_3}\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{x_1}{x_3}\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \\
 &= \left(x_1 + x_1h_1 - \frac{x_1}{x_3}h_3\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(x_1 + x_2 + \frac{h_2}{x_3} - \frac{x_2}{x_3}h_3\right)\frac{\partial}{\partial x_2} + h_3\frac{\partial}{\partial x_3} \\
 &= \left(x_1 + x_1x_3\left(\frac{h_1}{x_3} - \frac{h_3}{x_3^2}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(x_1 + x_2 + x_3\left(\frac{h_2}{x_3^2} - \frac{x_2}{x_3^2}h_3\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_2} + h_3\frac{\partial}{\partial x_3} \\
 &= (x_1 + x_1x_3(H_1 - H_3))\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 + x_2 + x_3(H_2 - x_2H_3))\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3^2H_3\frac{\partial}{\partial x_3},
 \end{aligned}$$

onde  $H_1 = x_3^{-1}h_1$ ,  $H_2 = x_3^{-2}h_2$  e  $H_3 = x_3^{-2}h_3$ .  $\square$

**PROPOSIÇÃO 2.1.10.** *A singularidade  $p$  é esquina simples para a folheação  $\mathcal{F}_2$  induzida por  $Z_0$ .*

*Demonstração.* Para isto, basta considerarmos  $g_1 = x_3(H_1 - H_3)$ ,  $\beta = 0$ ,  $g_2 = x_3H_3$  e  $g_3 = x_1 + x_2 + x_3(H_2 - x_2H_3)$ .  $\square$

**PROPOSIÇÃO 2.1.11.** *O campo de vetores  $Z_0$  possui singularidade isolada na origem.*

*Demonstração.* O campo de vetores  $\tilde{X}$  dado pela equação (2.2), cuja explosão resultou em  $Z_0$ , possui singularidade isolada. Assim, as possíveis singularidades de  $Z_0$  estão no divisor da explosão, de equação  $x_3 = 0$ . É então evidente da expressão de  $Z_0$  que a única singularidade está em  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ .  $\square$

**PROPOSIÇÃO 2.1.12.** *Tomando coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  centradas em  $q$  e tais que  $\pi_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2, x_2, x_2x_3)$ , então a folheação  $\mathcal{F}_2$  será induzida pelo campo de vetores*

$$Z_1 = (-x_1^2 + x_1x_2(H_1 - H_2), x_2 + x_1x_2 + x_2^2H_2, -x_3 - x_1x_3 + x_2, (-x_3H_2 + H_3)), \quad (2.5)$$

onde  $H_1 = x_2^{-1}h_1$ ,  $H_2 = x_2^{-2}h_2$  e  $H_3 = x_2^{-2}h_3$ .

*Demonstração.* Mais uma vez, calcularemos o transformado do campo de vetores (2.2). Em tais coordenadas, o divisor será dado por  $x_1x_2 = 0$  e  $\mathcal{F}_2$  será induzida pelo campo de vetores

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= (x_1x_2 + x_1x_2h_1) \frac{1}{x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1x_2 + x_2 + h_2) \left( \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{x_1}{x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_3}{x_2} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \\
 &\quad + (h_3) \frac{1}{x_2} \frac{\partial}{\partial x_3} \\
 &= \left( -x_1^2 + x_1x_2 \left( \frac{h_1}{x_2} - \frac{h_2}{x_2^2} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 + x_1x_2 + h_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \\
 &\quad + \left( -x_3 - x_1x_3 - \frac{x_3}{x_2} h_2 + \frac{h_3}{x_2} \right) \frac{\partial}{\partial x_3} \\
 &= (-x_1^2 + x_1x_2(H_1 - H_2)) \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 + x_1x_2 + x_2^2 H_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \\
 &\quad + (-x_3 - x_1x_3 + x_2(-x_3 H_2 + H_3)) \frac{\partial}{\partial x_3},
 \end{aligned}$$

onde  $H_1 = x_2^{-1}h_1$ ,  $H_2 = x_2^{-2}h_2$  e  $H_3 = x_2^{-2}h_3$ .  $\square$

**PROPOSIÇÃO 2.1.13.** *A singularidade  $q$  é esquina simples para a folheação  $\mathcal{F}_2$  induzida pelo campo de vetores  $Z_1$ .*

*Demonstração.* De fato, considere  $g_1 = x_1 + x_2 H_2$ ,  $\beta = 0$ ,  $g_2 = -x_1 + x_2(H_1 - H_2)$  e  $g_3 = -x_3 - x_1x_3 + x_2(-x_3 H_2 + H_3)$ .  $\square$

**PROPOSIÇÃO 2.1.14.** *A folheação  $\mathcal{F}_1$  não possui separatrizes fora de  $x_1 = 0$ .*

*Demonstração.* Suponha  $\Gamma$  uma separatriz, ou seja, um germe de curva analítica irreduzível por  $0 \in \mathbb{C}^3$  tangente ao campo  $X$  e não contida no plano  $x_1 = 0$ . Tomando uma sequência de blow-ups pontuais que dessingulariza  $\Gamma$ , esta é levada em uma curva  $\hat{\Gamma}$  lisa, que intercepta o divisor de dessingularização transversalmente em um ponto liso. Porém, pela Proposição 2.1.7, as esquinas simples são invariantes por blow-ups pontuais. Assim, o divisor de dessingularização  $D$  de  $\Gamma$  será invariante pelo transformado estrito  $\hat{\mathcal{F}}$  de  $\mathcal{F}_2$ . Como  $\hat{\Gamma}$  é invariante por  $\hat{\mathcal{F}}$ , o ponto de interseção entre  $\Gamma$  e  $D$  será uma singularidade de  $\hat{\mathcal{F}}$  fora das esquinas de  $D$ . Isso contradiz o fato de  $\mathcal{F}$  ser uma esquina simples em  $p$ . Portanto não existe uma tal separatriz.  $\square$

Esta discussão é resumida no seguinte teorema:

**TEOREMA 2.1.15.** [GML92] *Seja  $X$  um campo de vetores holomorfo em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  com*

multiplicidade algébrica 2 e cujo 3-jato está no conjunto  $\mathcal{V}$  definido em (2.1). Então  $X$  não possui uma separatriz.

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{F}$  a folheação induzida pelo campo de vetores  $X$ . Considere  $\mathcal{F}_1$  a folheação definida pelo blow-up de  $\mathcal{F}$  em  $0 \in \mathbb{C}^3$ . Pelo Lema 2.1.5,  $\mathcal{F}_1$  tem três pontos singulares no divisor. Nesses pontos singulares, pelo Lema 2.1.5, em cada zero isolado temos um campo de vetores na forma (2.2). Pela Proposição 2.1.14, todas as separatrizes nos pontos singulares de  $\mathcal{F}_1$  estão contidas no divisor  $E_1$ .  $\square$

## 2.2 EXEMPLO DE CAMPO DE VETORES HOLOMORFO EM $(\mathbb{C}^3, 0)$ NÃO TANGENTE A UMA FOLHEAÇÃO

Seja  $X$  um campo de vetores pertencente à família  $\mathcal{X}$  e considere  $\mathcal{F}_0$  a folheação induzida por ele. Recordamos que se  $\pi_1 : (\mathbb{C}_1^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  é um blow-up puntual, então o transformado estrito  $\mathcal{F}_1 = \pi_1^* \mathcal{F}_0$  possui três singularidades sobre o divisor  $E_1 = \pi_1^{-1}(0)$ . Explodindo uma dessas singularidades por um blow-up puntual  $\pi_2$ , obtemos  $\mathcal{F}_2 = \pi_1^* \mathcal{F}_1$ . Esta possui duas singularidades sobre o divisor que são esquinas simples. Na vizinhança de cada um desses pontos,  $\mathcal{F}_2$  é induzida pelos campos  $Z_0$  e  $Z_1$  descritos em (2.4) e (2.5). Nesta seção, mostraremos que se  $X \in \mathcal{X}$  então  $X$  não é tangente a uma folheação.

Recordemos que os campo de vetores dados em (2.4) é escrito da seguinte maneira

$$Z_0 = (x_1 + x_1 x_3 (H_1 - H_3)) \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 + x_2 + x_3 (H_2 - x_2 H_3)) \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3^2 H_3 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

onde  $H_1 = x_3^{-1} h_1$ ,  $H_2 = x_3^{-2} h_2$  e  $H_3 = x_3^{-2} h_3$ . Iniciamos com o seguinte resultado:

**PROPOSIÇÃO 2.2.1.** *As integrais primeiras polinomiais homogêneas da parte linear do campo de vetores  $Z_0$  são da forma  $g = ax_3^n$ , onde  $n \in \mathbb{N}$  e  $a \in \mathbb{C}^*$ .*

*Demonstração.* Seja  $L = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 + x_2 + \alpha x_3) \frac{\partial}{\partial x_2}$ , com  $\alpha = H_2(0)$ , a parte linear do campo de vetores  $Z_0$ . Seja  $g = g(x_1, x_2, x_3)$  uma integral primeira polinomial homogênea de grau  $n$  para  $L$ . Assim, a contração de  $dg = g_{x_1} dx_1 + g_{x_2} dx_2 + g_{x_3} dx_3$  por  $L$  nos fornece

$$x_1 g_{x_1} + (x_1 g_{x_2} + x_2 g_{x_2} + \alpha x_3 g_{x_2}) = 0, \quad (2.6)$$

onde  $\alpha = H_2(0)$ . Somando  $x_3g_{x_3}$  a ambos os lados da igualdade acima, obtemos

$$x_1g_{x_1} + x_2g_{x_2} + x_3g_{x_3} = x_3g_{x_3} - (x_1 + \alpha x_3)g_{x_2}. \quad (2.7)$$

Como  $g$  é homogênea de grau  $n$ , pela identidade de Euler temos

$$ng = x_3g_{x_3} - (x_1 + \alpha x_3)g_{x_2}. \quad (2.8)$$

Sabemos que existe  $k \leq n$  tal que  $D_{x_2}^k g \neq 0$  e  $D_{x_2}^{k+1} g = 0$ . Então

$$nD_{x_2}^k g = x_3D_{x_2}^k (g_{x_3}). \quad (2.9)$$

Como  $D_{x_2}^{k+1} g = 0$ , podemos escrever

$$g = a_0(x_1, x_3) + a_1(x_1, x_3)x_2 + \cdots + a_k(x_1, x_3)x_2^k,$$

onde cada  $a_j$  é um polinômio homogêneo de grau  $n - j$ . Então,

$$D_{x_2}^k g = k!a_k(x_1, x_3)$$

e

$$D_{x_2}^k g_{x_3} = k!D_{x_3} a_k(x_1, x_3).$$

Substituindo as duas igualdades em (2.9) temos

$$na_k(x_1, x_3) = x_3D_{x_3} a_k(x_1, x_3) \quad (2.10)$$

Suponha  $x_1$  fixado. Simplificando a notação escrevemos

$$a_k(x_1, x_3) = \alpha_0 + \alpha_1 x_3 + \cdots + \alpha_{n-k} x_3^{n-k}.$$

Substituindo em (2.10), temos

$$n(\alpha_0 + \alpha_1 x_3 + \cdots + \alpha_{n-k} x_3^{n-k}) = \alpha_1 x_3 + \cdots + (n - k)\alpha_{n-k} x_3^{n-k}, \quad (2.11)$$

o que resulta em

$$\left\{ \begin{array}{l} n\alpha_0 = 0; \\ n\alpha_1 = \alpha_1; \\ \vdots \\ n\alpha_{n-k} = (n-k)\alpha_{n-k}. \end{array} \right.$$

Como  $n > 0$ , as igualdades acima implicam que  $\alpha_j = 0$  para  $0 \leq j \leq n-1$ . Portanto, temos que  $k = 0$  e  $\alpha_n \neq 0$ . Assim, podemos escrever  $g = a_n x_3^n$ , onde  $a_n \in \mathbb{C}^*$ , como queríamos.  $\square$

**COROLÁRIO 2.2.2.** *Suponha que  $g \in \mathcal{O}_3$  seja uma integral primeira holomorfa de  $Z_0$  com  $n = \nu_0(g)$ . Então a parte inicial de  $g$  é da forma  $ax_3^n$ , onde  $a \in \mathbb{C}^*$ .*

*Demonstração.* A parte inicial de uma integral primeira holomorfa para  $Z_0$  é, em particular, uma integral primeira polinomial homogênea para sua parte linear  $L$ . O resultado segue da proposição anterior.  $\square$

De posse dos resultados acima, obtemos a seguinte proposição:

**PROPOSIÇÃO 2.2.3.** *O campo de vetores  $Z_0$  não possui integral primeira holomorfa.*

*Demonstração.* Mostraremos que se  $g \in \mathcal{O}_3$  é uma integral primeira holomorfa para  $Z_0$ , então  $g = x_3^n u$ , onde  $u \in \mathcal{O}_3$  é uma unidade e  $n = \nu_0(g)$ . Escreva

$$g = \sum_{k \geq n} g_k$$

o desenvolvimento em série de potências de  $g$ , onde  $g_k$  representa os termos homogêneos de ordem  $k$ . Temos, pelo corolário anterior, que  $g_n = ax_3^n$ , onde  $a \in \mathbb{C}^*$ .

**AFFIRMAÇÃO 2.2.4.**  *$x_3^n$  divide  $g_k$  para todo  $k \geq n$ .*

De fato, suponha a afirmação falsa e tome  $k_0 > n$  o menor valor de  $k$  para o qual  $x_3^n$  não divide  $g_{k_0}$ . Escreva

$$g_{k_0} = x_3^m \tilde{g},$$

onde  $\tilde{g} \in \mathcal{O}_3$ ,  $m < n$  e  $x_3$  não divide  $\tilde{g}$ . Portanto, podemos escrever

$$\tilde{g} = \beta_1 x_1^\nu + \beta_2 x_2^\nu + x_3 \tilde{h},$$

onde  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ ,  $\nu = k_0 - m > 0$  e  $\tilde{h}$ , se não nulo, é homogêneo de grau  $\nu - 1$ . Observe que  $\beta_1$  e  $\beta_2$  não podem ser simultaneamente nulos. Denotamos por  $\nu_{x_3}$  a ordem na variável  $x_3$ . Os termos homogêneos de grau mais baixo divisíveis por  $x_3^m$  e não por  $x_3^{m+1}$  na expressão

$$i_{Z_0} dg = (x_1 + x_1 x_3 (H_1 - H_3))g_{x_1} + (x_1 + x_2 + x_3 (H_2 - x_2 H_3))g_{x_2} + x_3^2 H_3 g_{x_3} \quad (2.12)$$

aparecem em

$$x_1 (g_{k_0})_{x_1} + (x_1 + x_2) (g_{k_0})_{x_2}. \quad (2.13)$$

Mas,  $(g_{k_0})_{x_1} = x_3^m (\nu \beta_1 x_1^{\nu-1} + x_3 \tilde{h}_{x_1})$  e  $(g_{k_0})_{x_2} = x_3^m (\nu \beta_2 x_2^{\nu-1} + x_3 \tilde{h}_{x_2})$ . Substituindo na equação (2.13) e considerando apenas os termos de ordem  $m$  em  $x_3$ , temos

$$\nu x_3^m (\beta_1 x_1^\nu + \beta_2 x_1 x_2^{\nu-1} + \beta_2 x_2^\nu) = 0.$$

Concluimos daí que  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ , o que é uma contradição.

Da afirmação segue que  $g = x_3^n u$ , para alguma  $u \in \mathcal{O}_3$  unidade. Podemos então, através de uma mudança holomorfa de variáveis, supor  $g = x_3^n$ . Isso porém implica que  $Z_0$ , nessas coordenadas, é da forma  $Z_0 = A \frac{\partial}{\partial x_1} + B \frac{\partial}{\partial x_2}$ , com  $A, B \in \mathcal{O}_3$ . Isto não é possível pois um campo com esta forma não possui singularidades isoladas, contradizendo a Proposição 2.1.11. □

Podemos ainda mostrar o seguinte resultado para os campos de vetores na família  $\mathcal{X}$ :

**PROPOSIÇÃO 2.2.5.** *Um campo de vetores pertencente à família  $\mathcal{X}$  não possui integral primeira holomorfa.*

*Demonstração.* Suponha que um tal campo de vetores possua integral primeira holomorfa. Explodindo duas vezes, cada singularidade do campo resultante também terá integral primeira holomorfa, pois basta compor a integral primeira com as explosões. Uma contradição, pois, pela proposição anterior,  $Z_0$  não possui integral primeira holomorfa. □

E assim temos:

**TEOREMA A.** *Seja  $X$  um campo de vetores pertencente a família  $\mathcal{X}$ . Então  $X$  não é tangente a uma folheação.*

*Demonstração.* Suponha por contradição que  $X$  seja tangente a uma folheação. Como não possui separatriz, uma folheação que o deixa invariante terá singularidade isolada e, pelo Teorema de Malgrange [Mal76], possuirá integral primeira holomorfa, que também será integral primeira holomorfa para  $X$ . Isso contradiz a proposição anterior.  $\square$

**EXEMPLO 2.2.6.** Em [FE97] é apresentado um membro explícito da família  $\mathcal{X}$  dado por

$$X = (x_1^2 - 9x_1x_2 - 14x_1x_3 + 6x_2x_3 + 3x_3^2/2) \frac{\partial}{\partial x_1} + (-x_1x_2 + 2x_1x_3 - 10x_2x_3 + x_1^3 - 3x_2^2) \frac{\partial}{\partial x_2} + (-8x_3^2 - 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^3) \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Como consequência do Teorema A, este campo de vetores não é tangente a nenhuma folheação holomorfa.

## 2.3 CAMPOS DE VETORES NO DOMÍNIO DE POINCARÉ

Nesta seção estudaremos condições necessárias para que um campo de vetores com parte linear não nula e com três autovalores não nulos possua uma integral primeira polinomial homogênea. Assim, trabalhando com os termos de ordem mais baixa, estabeleceremos condições sobre a parte linear de um germe de campo de vetores holomorfo  $X$  possuindo integral primeira holomorfa.

**DEFINIÇÃO 2.3.1.** A *envoltória convexa* de um conjunto  $A \subset \mathbb{C}$  é a interseção de todos os conjuntos convexos que contém  $A$ , a qual denotaremos por  $\mathcal{H}\{A\}$ .

**DEFINIÇÃO 2.3.2.** Chamamos de *domínio de Poincaré* o conjunto de todas as  $n$ -uplas de pontos  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  de  $\mathbb{C}^n$  tais que  $0 \in \mathbb{C}$  não pertence a envoltória convexa de  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ . Ou seja, trata-se do conjunto  $\{\lambda \in \mathbb{C}^n; 0 \notin \mathcal{H}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}\}$ . O complementar do domínio de Poincaré é chamado de *domínio de Siegel*.

**DEFINIÇÃO 2.3.3.** Dizemos que  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  são *ressonantes* se existe uma relação do tipo  $\lambda_r = m_1\lambda_1 + \dots + m_n\lambda_n$  com  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $\sum m_i \geq 2$  e  $1 \leq r \leq n$ .

De posse das definições acima enunciamos o seguinte teorema:

**TEOREMA 2.3.4.** (linearização de Poincaré) *Seja  $X$  um campo de vetores tal que  $DX(0)$  é uma matriz triangularizável não ressonante. Se  $DX(0)$  está no domínio de Poincaré, então  $X$  é analiticamente linearizável.*

Considere um campo de vetores  $X$  cuja parte linear é dada pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix},$$

possuindo três autovalores não nulos. Normalizando o campo de vetores  $X$ , podemos supor que os autovalores são  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \beta$  e  $\lambda_3 = \lambda$ . Então, pela *forma canônica de Jordan*, fazendo uma mudança linear de coordenadas, temos as seguintes possibilidades para a parte linear de  $X$ :

$$P_1 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ onde } \lambda, \beta \in \mathbb{C}^*; \quad (2.14)$$

$$P_2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ onde } \beta \in \mathbb{C}^*; \quad (2.15)$$

$$P_3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Suporemos que  $X$  possua integral primeira holomorfa. Então a parte linear de  $X$  possui integral primeira holomorfa homogênea. Analisaremos cada um dos casos acima.

1. Caso  $P_1$ : Suponha que  $g = g(x_1, x_2, x_3)$  seja integral primeira polinomial homogênea de grau  $n$  para a parte linear do campo de vetores  $X$  dada em (2.14). Então,

a contração de  $dg = g_{x_1}dx_1 + g_{x_2}dx_2 + g_{x_3}dx_3$  pela parte linear de  $X$  nos fornece

$$x_1g_{x_1} + \beta x_2g_{x_2} + \lambda x_3g_{x_3} = 0. \quad (2.17)$$

Assim, somando  $x_2g_{x_2} + x_3g_{x_3}$  a ambos os lados da igualdade acima temos

$$x_1g_{x_1} + x_2g_{x_2} + x_3g_{x_3} = x_2g_{x_2} + x_3g_{x_3} - \beta x_2g_{x_2} - \lambda x_3g_{x_3}.$$

Como  $g$  é homogênea de grau  $n$ , pela identidade de Euler temos

$$ng = (1 - \beta)x_2g_{x_2} + (1 - \lambda)x_3g_{x_3}. \quad (2.18)$$

1.1. Suponha  $\lambda = 1$  e  $\beta = 1$ . Neste caso, substituindo na equação (2.18) concluímos que  $ng = 0$ , ou seja,  $g = 0$ , o que não pode acontecer.

1.2. Suponha agora  $\lambda \neq 1$  e  $\beta = 1$ , pela equação (2.18) temos

$$ng = (1 - \lambda)x_3g_{x_3}. \quad (2.19)$$

Sabemos que existe  $k \leq n$  tal que  $D_{x_2}^k g \neq 0$  e  $D_{x_2}^{k+1} g = 0$ . Então, aplicando a derivada  $D_{x_2}^k$  à equação (2.19) obtemos

$$nD_{x_2}^k g = (1 - \lambda)x_3D_{x_2}^k g_{x_3}. \quad (2.20)$$

Escreva  $g = a_0(x_1, x_3) + a_1(x_1, x_3)x_2 + \dots + a_k(x_1, x_3)x_2^k$ . Então  $D_{x_2}^k g = k!a_k(x_1, x_3)$  e  $D_{x_2}^k g_{x_3} = k!D_{x_3}a_k(x_1, x_3)$ . Isso nos diz que,

$$k!na_k(x_1, x_3) = (1 - \lambda)k!x_3D_{x_3}a_k(x_1, x_3). \quad (2.21)$$

Fixe  $x_1$ . Então  $a_k(x_1, x_3) = \alpha_0 + \alpha_1x_3 + \dots + \alpha_{n-k}x_3^{n-k}$ . Substituindo na equação (2.21), temos

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)(\alpha_1x_3 + 2\alpha_2x_3^2 + \dots + (n - k)\alpha_{n-k}x_3^{n-k}) &= \\ &= n(\alpha_0 + \alpha_1x_3 + \dots + \alpha_{n-k}x_3^{n-k}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Segue que  $\alpha_0 = 0$ , e isto nos diz que  $x_3$  divide  $a_k(x_1, x_3)$ . Vemos assim que, existe no

máximo um valor para  $j$  tal que  $\alpha_j \neq 0$  para  $1 \leq j \leq n - k$ , ou seja,  $j(1 - \lambda) = n$ . Então

$$\lambda = \frac{j - n}{j} \in \mathbb{Q}_{<0}. \quad (2.23)$$

1.3. No caso em que  $\beta \neq 1$  e  $\lambda \neq 1$ , usando a equação (2.18), sabemos que existe  $k \leq n$  tal que  $D_{x_2}^k g \neq 0$  e  $D_{x_2}^{k+1} g = 0$ . Então, aplicando a derivada  $D_{x_2}^k$  à equação (2.18), obtemos

$$\begin{aligned} nD_{x_2}^k g &= (1 - \beta)D_{x_2}^k(x_2 g_{x_2}) + (1 - \lambda)x_3 D_{x_2}^k g_{x_3} \\ &= k(1 - \beta)D_{x_2}^k g + (1 - \lambda)x_3 D_{x_2}^k g_{x_3}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ou seja,

$$(n - k(1 - \beta))D_{x_2}^k g = (1 - \lambda)x_3 D_{x_2}^k g_{x_3}.$$

Escrevendo  $g = a_0(x_1, x_3) + a_1(x_1, x_3)x_2 + \dots + a_k(x_1, x_3)x_2^k$ , então  $D_{x_2}^k g = k!a_k(x_1, x_3)$  e  $D_{x_2}^k g_{x_3} = k!D_{x_3} a_k(x_1, x_3)$ . Isso nos diz que,

$$k!(n - k(1 - \beta))a_k(x_1, x_3) = (1 - \lambda)k!x_3 D_{x_3} a_k(x_1, x_3). \quad (2.25)$$

Fixemos  $x_1$ . Então podemos escrever  $a_k(x_1, x_3) = \alpha_0 + \alpha_1 x_3 + \dots + \alpha_{n-k} x_3^{n-k}$ . Assim, substituindo a equação acima na equação (2.25), temos que

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)(\alpha_1 x_3 + 2\alpha_2 x_3^2 + \dots + (n - k)\alpha_{n-k} x_3^{n-k}) &= \\ &= (n - k(1 - \beta))(\alpha_0 + \alpha_1 x_3 + \dots + \alpha_{n-k} x_3^{n-k}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Por igualdade de polinômios segue que  $\alpha_0 = 0$  e isto nos diz que  $x_3$  divide  $a_k(x_1, x_3)$ . Vemos assim que, existe no máximo um valor  $j$  tal que  $\alpha_j \neq 0$  para  $1 \leq j \leq n - k$ , ou seja,  $j(1 - \lambda) = n - k(1 - \beta)$ . Assim temos que

$$j\lambda + k\beta + (n - k) - j = 0. \quad (2.27)$$

E portanto temos uma relação linear não trivial entre  $1, \beta, \lambda$ , com coeficientes inteiros não negativos implicando que  $0$  está no fecho convexo de  $1, \beta, \lambda$ . Neste caso,  $0$  não está do domínio de Poincaré.

2. Caso  $P_2$ : Suponha que  $g = g(x_1, x_2, x_3)$  seja integral primeira polinomial homogênea de grau  $n$  para a parte linear do campo de vetores  $X$  do tipo  $P_2$ . Então, contraindo  $dg = g_{x_1}dx_1 + g_{x_2}dx_2 + g_{x_3}dx_3$  pela parte linear de  $X$  temos

$$x_1g_{x_1} + x_1g_{x_2} + x_2g_{x_2} + \beta x_3g_{x_3} = 0.$$

Somando  $x_3g_{x_3}$  a ambos os lados da equação anterior temos

$$x_1g_{x_1} + x_2g_{x_2} + x_3g_{x_3} = x_3g_{x_3} - \beta x_3g_{x_3} - x_1g_{x_2}.$$

Como  $g$  é homogênea de grau  $n$ , então

$$ng = (x_3 - \beta x_3)g_{x_3} - x_1g_{x_2}. \quad (2.28)$$

Sabemos que existe  $k \leq n$  tal que  $D_{x_2}^k g \neq 0$  e  $D_{x_2}^{k+1} g = 0$ . Então, aplicando a derivada  $D_{x_2}^k$  na equação (2.28), obtemos

$$nD_{x_2}^k g = (1 - \beta)x_3D_{x_2}^k g_{x_3}. \quad (2.29)$$

Observe que  $\beta \neq 1$ , pois caso contrário, teríamos  $nD_{x_2}^k g = 0$  implicando que  $D_{x_2}^k g = 0$ . Escreva  $g = a_0(x_1, x_3) + a_1(x_1, x_3)x_2 + \dots + a_k(x_1, x_3)x_2^k$ . Então  $D_{x_2}^k g = k!a_k(x_1, x_3)$  e  $D_{x_2}^k g_{x_3} = k!D_{x_3}a_k(x_1, x_3)$ . Substituindo essas duas equações na equação (2.29) temos

$$k!na_k(x_1, x_3) = (1 - \beta)k!x_3D_{x_3}a_k(x_1, x_3). \quad (2.30)$$

Suponha  $x_1$  fixado e escreva  $a_k(x_1, x_3) = \alpha_0 + \alpha_1x_3 + \dots + \alpha_{n-k}x_3^{n-k}$ . Substituindo na equação (2.30), temos

$$\begin{aligned} (1 - \beta)(\alpha_1x_3 + 2\alpha_2x_3^2 + \dots + (n - k)\alpha_{n-k}x_3^{n-k}) &= \\ &= n(\alpha_0 + \alpha_1x_3 + \dots + \alpha_{n-k}x_3^{n-k}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Segue, portanto, que  $\alpha_0 = 0$ , e isto nos diz que  $x_3$  divide  $a_k(x_1, x_3)$ . Assim existe no máximo

um valor para  $j$  tal que  $\alpha_j \neq 0$  para  $1 \leq j \leq n - k$ , ou seja,  $j(1 - \beta) = n$ . Então

$$\beta = \frac{j - n}{j} \in \mathbb{Q}_{<0}. \quad (2.32)$$

3. Caso  $P_3$ : Suponha que  $g = g(x_1, x_2, x_3)$  seja integral primeira polinomial homogênea de grau  $n$  para a parte linear do campo de vetores  $X$  do tipo  $P_3$ . Então, contraindo  $dg = g_{x_1}dx_1 + g_{x_2}dx_2 + g_{x_3}dx_3$  pela parte linear de  $X$  temos

$$x_1g_{x_1} + (x_1 + x_2)g_{x_2} + (x_2 + x_3)g_{x_3} = 0.$$

Como  $g$  é homogênea de grau  $n$ , então

$$ng = -x_1g_{x_2} - x_2g_{x_3}. \quad (2.33)$$

Sabemos que existe  $k \leq n$  tal que  $D_{x_3}^k g \neq 0$  e  $D_{x_3}^{k+1} g = 0$ . Então, aplicando a derivada  $D_{x_3}^k$  na equação (2.33), obtemos

$$nD_{x_3}^k g = -x_1D_{x_3}^k g_{x_2}. \quad (2.34)$$

Faça  $D_{x_3}^k g = h(x_2)$ . Assim, da equação (2.34) temos

$$\frac{h(x_2)}{h'(x_2)} = \frac{-x_1}{n}.$$

Ou seja,

$$\ln h(x_2) = \frac{-nx_2}{x_1} + r(x_1).$$

Portanto,

$$h(x_2) = \exp \frac{-nx_2}{x_1} \cdot \exp^{r(x_1)}, \quad (2.35)$$

que não é um polinômio na variável  $x_2$ . Neste caso, não existe integral primeira polinomial homogênea.

Resumimos os casos 1, 2 e 3 na seguinte proposição:

**PROPOSIÇÃO 2.3.5.** *Seja  $X$  um germe de campo de vetores em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  no domínio de Poincaré. Então  $X$  não possui integral primeira holomorfa.*

*Demonstração.* Se  $X$  possui integral primeira holomorfa então sua parte linear possui integral primeira polinomial homogênea. Temos as possibilidades (2.14), (2.15) e (2.16) para

a parte linear do campo  $X$ . As equações (2.23), (2.27), (2.32) mostram que os autovalores da parte linear de  $X$  possuem relação linear não trivial com coeficientes inteiros não negativos e a equação (2.35) nos diz que a integral primeira não é polinomial homogênea.  $\square$

Valendo-se da existência de dessingularização para um campo de vetores tangente a uma folheação, fato esse provado por F. Cano e C. Roche em [CR14], enunciamos o seguinte teorema:

**TEOREMA B.** *Seja  $X$  um campo de vetores tangente a uma folheação de codimensão um com singularidade isolada em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ . Suponha que alguma dessingularização de  $X$  possua uma singularidade no domínio de Poincaré. Então  $X$  possui separatriz.*

*Demonstração.* Suponha por contradição que  $X$  não possua separatriz. Como  $X$  é tangente a uma folheação, este possui integral primeira holomorfa que também é integral primeira holomorfa para  $X$ . Levantando pela dessingularização, encontramos uma integral primeira holomorfa para uma singularidade no domínio de Poincaré, contradizendo a proposição anterior.  $\square$

---

*FORMAS DIFERENCIAIS INVARIANTES POR CAMPOS VETORIAIS*

---

Neste capítulo faremos um estudo dos germes de folheações holomorfas de codimensão um em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  invariantes por campos de vetores. Iniciaremos introduzindo a noção de singularidades simples e de dessingularização de um germe de folheação holomorfa de codimensão um. Nos interessaremos, mais precisamente, por folheações que após o processo de redução de suas singularidades não possuam singularidades do tipo sela-nó. Tais folheações são conhecidas como *folheações hiperbólicas complexas*. Mostraremos ainda que, se um campo de vetores na forma

$$X = \alpha_{11}x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_{22}x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_{33}x_3 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

com  $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33} \in \mathbb{C}^*$  fortemente não ressonantes no domínio de Poincaré — ou, de forma mais geral, um campo que possua uma redução de singularidades por blow-ups pontuais não dicríticos onde aparecem apenas singularidades simples desse tipo — deixa uma 1-forma holomorfa integrável  $\omega$  invariante, então esta forma  $\omega$  é hiperbólica complexa.

### 3.1 SINGULARIDADES SIMPLES EM $\mathbb{C}^3$ DE TIPOS DIMENSIONAIS DOIS E TRÊS

Como em dimensão dois, o problema da classificação analítica de singularidades simples surge naturalmente e para tanto, devemos estabelecer a priori algumas definições. Começamos com a seguinte

**DEFINIÇÃO 3.1.1.** [Can98] Dizemos que  $\mathcal{G}$ , folheação de codimensão um em  $(\mathbb{C}^n, 0)$ , tem *tipo dimensional*  $\tau$  na origem, com  $2 \leq \tau \leq n$ , se existem  $(n - \tau)$  germes de campos de vetores não singulares  $\xi_1, \dots, \xi_{n-\tau}$ , tangentes a  $\mathcal{G}$ , tais que  $\xi_1(0), \dots, \xi_{n-\tau}(0)$  são vetores  $\mathbb{C}$ -linearmente independentes e, além disso,  $\tau$  é mínimo com esta propriedade.

Neste caso, existe uma submersão  $\phi : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^\tau, 0)$  e uma folheação  $\mathcal{F}$  de codimensão um em  $(\mathbb{C}^\tau, 0)$  tal que  $\mathcal{G} = \phi^*\mathcal{F}$ . Em outras palavras, existem coordenadas locais  $x_1, \dots, x_n$  na origem de  $\mathbb{C}^n$  tal que  $\mathcal{G}$  é gerada por uma 1-forma integrável do tipo

$$\omega = \sum_{i=1}^{\tau} a_i(x_1, \dots, x_\tau) dx_i.$$

Seja  $M$  uma variedade complexa de dimensão  $n$ . Um subconjunto  $E \subset M$  é um *divisor com cruzamentos normais* em  $M$  se é uma união de um número finito de hipersuperfícies não singulares de tal modo que em cada ponto  $p \in E$ , podemos encontrar coordenadas locais  $x_1, \dots, x_n$  tal que  $E = \left( \prod_{i=1}^e x_i = 0 \right)$ , com  $1 \leq e \leq n$ . Denote por  $e = e(E, p)$  o número de componentes do divisor com cruzamentos normais  $E$  por  $p$ . Assumindo que  $E = \left( \prod_{i=1}^e x_i = 0 \right)$ , se  $\omega$  é uma 1-forma integrável de tipo dimensional  $\tau$  que deixa  $E$  invariante, podemos escrever

$$\omega = \prod_{i=1}^e x_i \left[ \sum_{i=1}^e a_i \frac{dx_i}{x_i} + \sum_{i=e+1}^{\tau} a_i dx_i \right].$$

Seja  $Y \subset M$  uma subespaço analítico não singular de  $M$ . Dizemos que  $Y$  tem *cruzamento normal* com  $E$  se temos: em cada  $p \in Y$  existem coordenadas locais  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e conjuntos  $A, B \subset \{1, 2, \dots, n\}$  tal que

$$E = \left( \prod_{i \in A} x_i = 0 \right) \text{ e } Y = \bigcap \{x_i = 0; i \in B\}$$

localmente em  $p$ .

**DEFINIÇÃO 3.1.2.** [Can98] A *multiplicidade adaptada* da folheação  $\mathcal{G}$  relativa ao divisor  $E$  no ponto  $p \in E$  é definida como  $\mu(\mathcal{G}, E, p) = \min\{\{\nu_p(a_i)\}_{1 \leq i \leq e} \cup \{\nu_p(a_i) + 1\}_{i > e}\}$ .

**DEFINIÇÃO 3.1.3.** [Can04] Dizemos que um germe de folheação de codimensão um  $\mathcal{G}$  possui *singularidade simples* em  $0 \in \mathbb{C}^n$  com relação ao divisor de cruzamentos normais  $E$ , se é

formalmente conjugada a um dos seguintes tipos:

- (A) Existem coordenadas locais formais  $x_1, \dots, x_\tau$  em torno de  $0 \in \mathbb{C}^n$  e uma função  $\psi : u = x_1^{\lambda_1} \cdots x_\tau^{\lambda_\tau}$  com  $\sum \lambda_i m_i \neq 0$ ,  $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , com pelo menos um deles não nulo, tal que  $\mathcal{G}$  nessas coordenadas é dada por  $\omega = 0$ , onde

$$\omega = \psi^* \alpha, \quad \alpha = \frac{du}{u}.$$

Ou seja,

$$\omega = \left( \prod_{i=1}^{\tau} x_i \right) \left\{ \sum_{i=1}^{\tau} \lambda_i \frac{dx_i}{x_i} \right\}. \quad (3.1)$$

- (B) Existem coordenadas locais formais  $x_1, \dots, x_\tau$  e uma função  $\psi = (u, v)$ , onde

$$\psi : \begin{cases} u = x_1^{p_1} \cdots x_l^{p_l}, l \leq \tau \\ v = x_2^{\lambda_2} \cdots x_\tau^{\lambda_\tau} \end{cases}$$

com  $p_1, \dots, p_l \in \mathbb{Z}_{>0}$ ,  $\sum_{i \geq l+1} \lambda_i m_i \neq 0$  se  $m = (m_{l+1}, \dots, m_\tau) \neq 0$ ,  $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  de modo que  $\mathcal{G}$  é dada por  $\omega = 0$ , onde

$$\omega = \psi^* \alpha, \quad \alpha = \frac{du}{u} + \varphi(u) \frac{dv}{v}, \varphi(0) = 0.$$

Ou seja,

$$\omega = \left( \prod_{i=1}^{\tau} x_i \right) \left\{ \sum_{i=1}^l p_i \frac{dx_i}{x_i} + \varphi(x_1^{p_1} \cdots x_l^{p_l}) \sum_{i=2}^{\tau} \lambda_i \frac{dx_i}{x_i} \right\}. \quad (3.2)$$

Em dimensão três, os modelos de singularidades simples de tipo dimensional dois são descritos por:

(A)  $\omega = \lambda_1 x_2 dx_1 + \lambda_2 x_1 dx_2$  onde  $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$  e  $\lambda_1 / \lambda_2 \notin \mathbb{Q}_{<0}$ ;

(B<sub>1</sub>)  $\omega = p_1 x_2 dx_1 + p_2 x_1 dx_2 + \varphi(x_1^{p_1} x_2^{p_2}) \lambda_2 x_1 dx_2$  onde  $p_1 \neq 0$  e  $p_2 \neq 0$ ;

(B<sub>2</sub>)  $\omega = p_1 x_2 dx_1 + \varphi(x_1^{p_1}) \lambda_2 x_1 dx_2$  onde  $p_1 \neq 0$  e  $p_2 = 0$ .

Estes correspondem aos modelos simples listados na Definição 1.3.1, onde os casos (A) e (B<sub>1</sub>) são singularidades não degeneradas e o caso (B<sub>2</sub>) é uma singularidade do tipo sela-nó.

Os modelos de singularidades simples de tipo dimensional três são descritos por:

(A)

$$\omega = x_1 x_2 x_3 \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{dx_i}{x_i} \quad (3.3)$$

onde  $\lambda_i \neq 0$  para todo  $i = 1, 2, 3$  e  $m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + m_3 \lambda_3 \neq 0$  se  $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  com pelo menos um deles não nulo;

(B<sub>1</sub>)

$$\omega = x_1 x_2 x_3 \left( p_1 \frac{dx_1}{x_1} + \varphi(x_1^{p_1}) \left( \lambda_2 \frac{dx_2}{x_2} + \lambda_3 \frac{dx_3}{x_3} \right) \right) \quad (3.4)$$

onde  $l = 1$  em (3.2) e  $m_2 \lambda_2 + m_3 \lambda_3 \neq 0$  se  $m_2, m_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  com pelo menos um deles não nulo;

(B<sub>2</sub>)

$$\omega = x_1 x_2 x_3 \left( p_1 \frac{dx_1}{x_1} + p_2 \frac{dx_2}{x_2} + \varphi(x_1^{p_1} x_2^{p_2}) \left( \lambda_2 \frac{dx_2}{x_2} + \lambda_3 \frac{dx_3}{x_3} \right) \right) \quad (3.5)$$

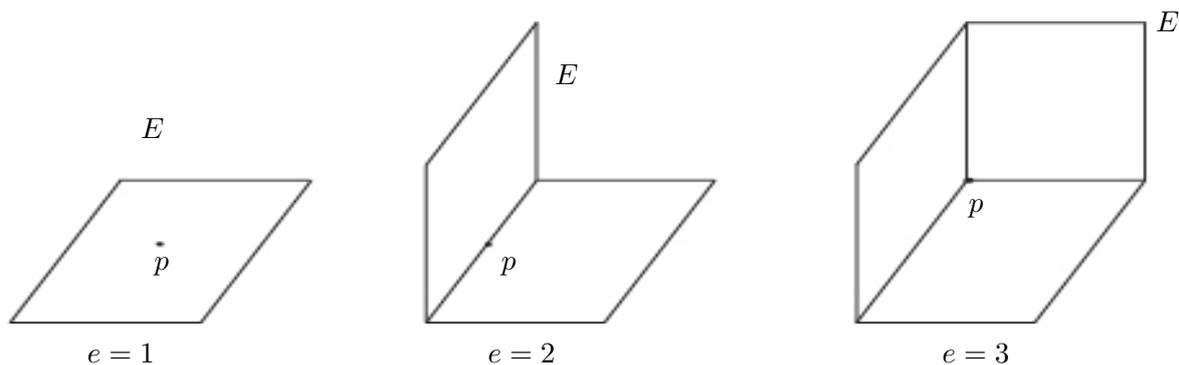
onde  $l = 2$  em (3.2) e  $m_2 \lambda_2 + m_3 \lambda_3 \neq 0$  se  $m_2, m_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  com pelo menos um deles não nulo;

(B<sub>3</sub>)

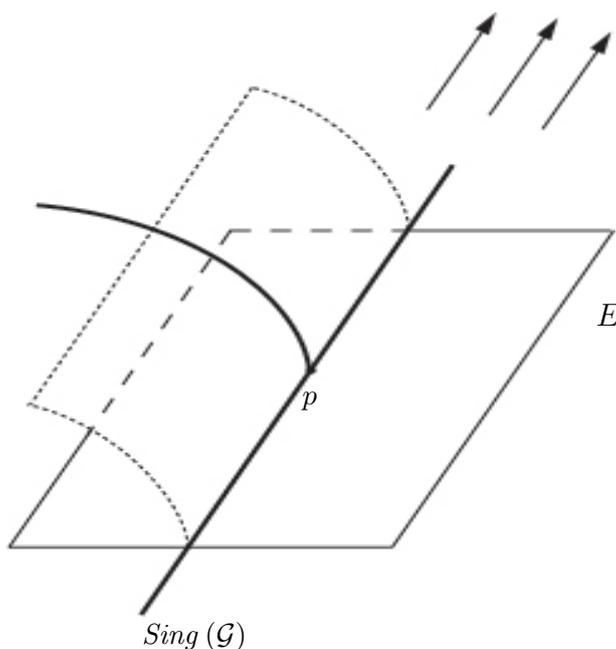
$$\omega = x_1 x_2 x_3 \left( p_1 \frac{dx_1}{x_1} + p_2 \frac{dx_2}{x_2} + p_3 \frac{dx_3}{x_3} + \varphi(x_1^{p_1} x_2^{p_2} x_3^{p_3}) \left( \lambda_2 \frac{dx_2}{x_2} + \lambda_3 \frac{dx_3}{x_3} \right) \right) \quad (3.6)$$

onde  $l = 3$  em (3.2) e  $m_2 \lambda_2 + m_3 \lambda_3 \neq 0$  se  $m_2, m_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  com pelo menos um deles não nulo.

Nosso interesse é o estudo de folheações holomorfas em ambientes de dimensão três. Consideraremos uma folheação de codimensão um simples em relação ao divisor com cruzamentos normais  $E$  em  $p \in \mathbb{C}^3$ . Neste caso, temos três possibilidades para o número de componentes do divisor  $E$  por  $p$ , ou seja,  $e = 1$ ,  $e = 2$  ou  $e = 3$ , como podemos ver na figura abaixo:

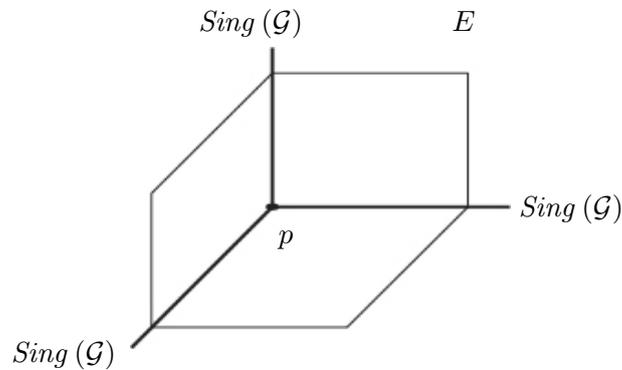


(i) Quando  $e = 1$ , dizemos que  $p$  é singularidade simples se, e somente se,  $\mathcal{G}$  é um cilindro analítico sobre a singularidade simples bidimensional. Neste caso,  $Sing(\mathcal{G})$  é localmente uma curva não singular contida em  $E$ .

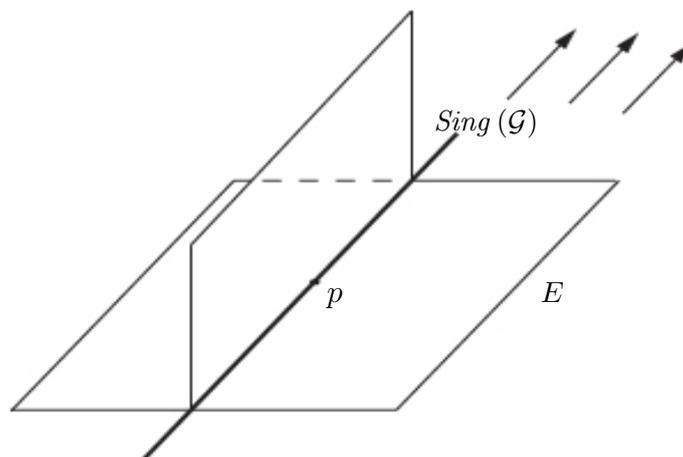


(ii) Quando  $e = 3$ , dizemos que  $p$  é singularidade simples se, e somente se, a multiplicidade adaptada de  $\mathcal{G}$  é nula,  $\mu(\mathcal{G}, E, p) = 0$  e os pontos singulares próximos de  $p$  são singularidades simples com  $e = 2$ . Neste caso, o local singular é a união

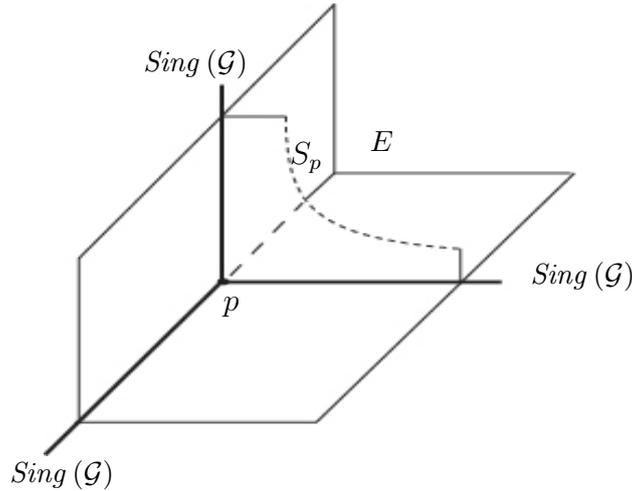
das interseções das componentes de  $E$  e somente as separatrizes de  $\mathcal{G}$  em  $p$  são componentes irredutíveis de  $E$ .



(iii) Quando  $e = 2$ , temos dois tipos de singularidades. O primeiro caso é localmente um cilindro analítico sobre a singularidade bidimensional com  $e = 2$ . Neste caso,  $Sing(\mathcal{G})$  é localmente a interseção das componentes de  $E$  e somente as separatrizes em  $p$  são componentes irredutíveis de  $E$ .



No segundo caso,  $p$  é singularidade simples se, e somente se, existe uma separatriz formal não singular  $S_p$  em  $p$  tal que  $E \cup S_p$  é um divisor com cruzamentos normais em  $p$  e, além disso,  $p$  é singularidade simples para  $\mathcal{G}$  relativo a  $E \cup S_p$ , isto é, com  $e = 3$ .



O teorema a seguir nos diz que, dada uma folheação holomorfa de codimensão um  $\mathcal{G}$  em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ , é possível encontrar um morfismo  $\pi : M_n \longrightarrow M_0 = (\mathbb{C}^3, 0)$ , composição de um número finito de blow-ups pontuais ou com centros em curvas lisas tal que todo ponto de  $\mathcal{G}_n = \pi^*\mathcal{G}$  é simples.

**TEOREMA 3.1.4.** [Can04] (de dessingularização) *Seja  $\mathcal{G}$  uma folheação holomorfa singular em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  e  $E$  um divisor com cruzamentos normais. Então existe uma seqüência de blow-ups pontuais ou com centros em curvas lisas — invariantes pelo transformado de  $\mathcal{G}$  e com cruzamento normal com o transformado de  $E$  —*

$$(\mathbb{C}^3, 0) = (M_0, p_0) \xleftarrow{\pi_1} (M_1, p_1) \xleftarrow{\pi_2} \dots \xleftarrow{\pi_n} (M_n, p_n)$$

*tal que o transformado estrito  $\mathcal{G}'$  de  $\mathcal{G}$  na seqüência acima tem cruzamentos normais com o transformado total  $E'$  de  $E$  e possui apenas singularidades simples adaptadas a  $E'$ .*

A seguir, introduziremos o conceito de dicriticidade de folheações holomorfas de codimensão um  $(\mathbb{C}^3, 0)$ .

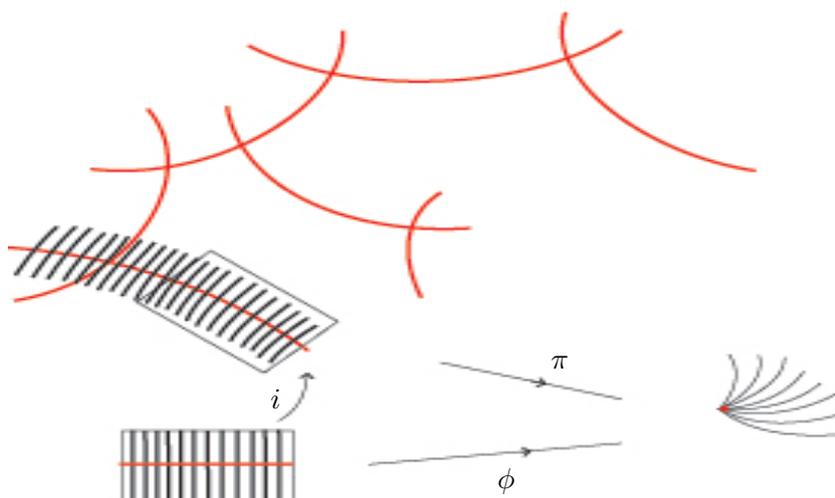
**DEFINIÇÃO 3.1.5.** [CRVS15] *Seja  $\mathcal{G}$  um germe de folheação holomorfa singular de codimensão um em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ . Dizemos que  $\mathcal{G}$  é dicrítica se existe um germe de mapa holomorfo*

$$\begin{aligned} \phi : \quad (\mathbb{C}^2, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0) \\ (x, y) &\longmapsto (\phi_1(x, y), \phi_2(x, y), \phi_3(x, y)) \end{aligned}$$

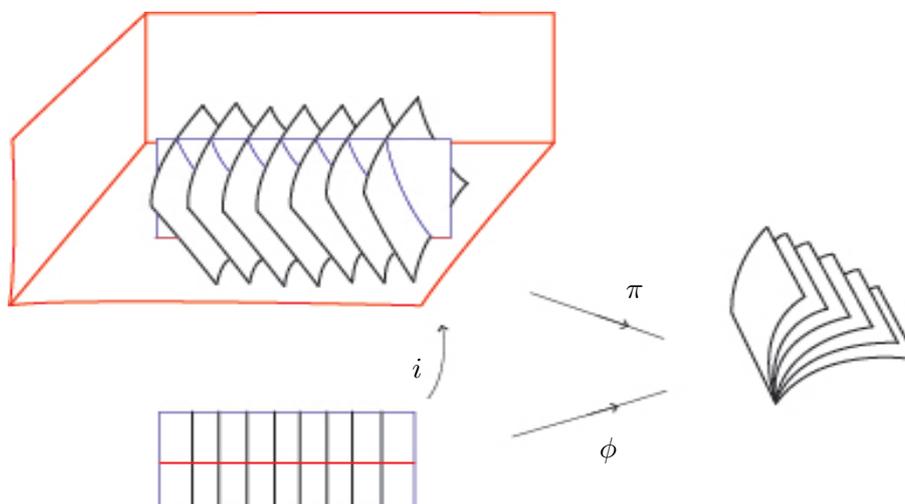
tal que  $\phi((y = 0))$  é invariante por  $\mathcal{G}$  e o pull-back  $\phi^*(\mathcal{G})$  da folheação  $\mathcal{G}$ , coincide com a

folheação  $dx = 0$  em  $(\mathbb{C}^2, 0)$ .

As figuras abaixo nos dão uma ideia geométrica local de dicriticidade nos casos de dimensão dois



e, respectivamente, em dimensão três:



Em [CC92], F. Cano e D. Cerveau apresentaram um método para construir um germe de superfície invariante para folheações de codimensão um não dicrítica usando a redução de singularidades. Esse resultado é enunciado como

**TEOREMA 3.1.6.** [CC92] (existência de separatriz em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ ) *Se  $\mathcal{G}$  é um germe de folheação holomorfa singular não dicrítica de codimensão um em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  então  $\mathcal{G}$  tem um germe de superfície invariante.*

Uma vez definido o conceito de singularidade simples em espaços de dimensão três, faremos nas Subseções 3.1.1 e 3.1.2 uma abordagem mais geométrica deste objeto.

### 3.1.1 SINGULARIDADES SIMPLES DE TIPO DIMENSIONAL DOIS EM $(\mathbb{C}^3, 0)$

Para uma singularidade simples de tipo dimensional dois recuperamos os modelos formais de singularidades simples em dimensão dois. Neste caso, existem coordenadas analíticas em que  $\mathcal{G}$  é induzida por uma 1-forma que depende apenas de duas variáveis. Assim, o conjunto singular de  $\mathcal{G}$  é uma curva lisa. Se o modelo transversal for não degenerado, existem duas superfícies transversais invariantes por  $\mathcal{G}$  convergentes. Se o modelo transversal for uma sela-nó, uma dessas superfícies pode ser formal.

### 3.1.2 SINGULARIDADES SIMPLES DE TIPO DIMENSIONAL TRÊS EM $(\mathbb{C}^3, 0)$

Como vimos na Seção 1.3, em dimensão dois, existem dois tipos de singularidades simples, um deles chamado sela-nó, a saber, aquele em que a parte linear do campo que gera a folheação tem um autovalor nulo. Com o intuito de generalizar este conceito para um espaço ambiente de dimensão três, dado um ponto singular simples  $p$  para a folheação  $\mathcal{G}$  com tipo dimensional três, dizemos que  $p$  é uma *sela-nó* para  $\mathcal{G}$  se, sobre alguma componente da curva de singularidade, a folheação tem tipo dimensional dois com modelo transversal bidimensional do tipo sela-nó. A descrição a ser apresentada aqui é uma adaptação de D. Cerveau em [CGSY03]. O local singular de um modelo formal é composto pelos três eixos coordenados e suas separatrizes são os três planos coordenados. Assim para uma singularidade simples de uma folheação  $\mathcal{G}$  com tipo dimensional  $\tau = 3$ , seu conjunto singular  $Sing(\mathcal{G})$  é holomorficamente difeomorfo aos três eixos coordenados, como pode ser visto no trabalho supracitado. Em um ponto suave de  $Sing(\mathcal{G})$ , vemos que  $\mathcal{G}$  tem tipo dimensional dois. Os seguintes casos possíveis já foram apresentados em (3.3), (3.4), (3.5) e (3.6):

(A) – Singularidade simples logarítmica de tipo formal

$$\omega = x_1x_2x_3 \left( \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{dx_i}{x_i} \right) \tag{3.7}$$

onde  $\lambda_i \neq 0$  para todo  $i = 1, 2, 3$  e  $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + m_3\lambda_3 \neq 0$  se  $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  com pelo menos um deles não nulo.

Em cada ponto suave de  $Sing(\mathcal{G})$ , pelo caso bidimensional não degenerado, existem duas separatrizes suaves transversais convergentes. Na origem,  $\mathcal{G}$  possui três separatrizes lisas, as quais são biholomorfas aos planos  $x_1x_2x_3 = 0$ . Tomando uma seção plana sobre o eixo  $x_3$ , digamos  $x_3 = c$  onde  $c = constante$  em (3.7), então temos

$$\omega = \lambda_1x_2dx_1 + \lambda_2x_1dx_2.$$

Neste caso temos duas separatrizes fortes  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 0$  associadas aos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , respectivamente, como retratado na Figura 3.1.

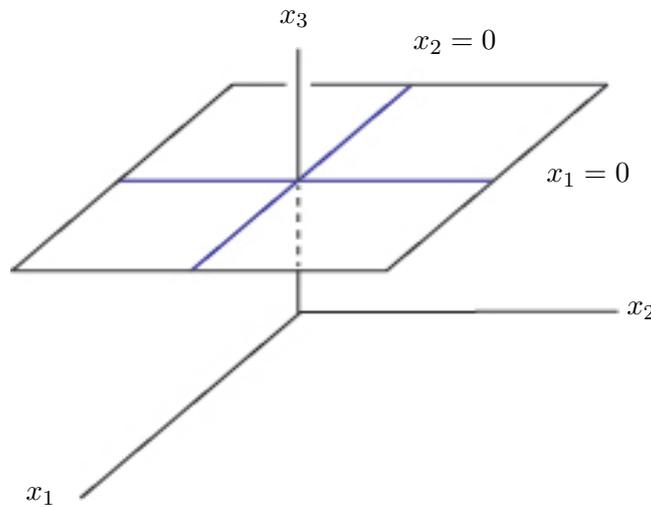


Figura 3.1

Uma situação análoga ocorre para os outros ramos de  $Sing(\mathcal{G})$ .

(B<sub>1</sub>) – Singularidade simples (sela-nó logarítmica) de tipo formal

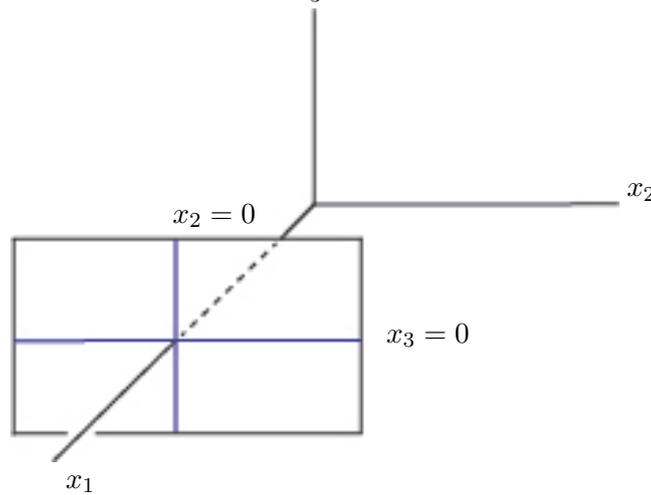
$$\omega = x_1x_2x_3 \left( p_1 \frac{dx_1}{x_1} + \varphi(x_1^{p_1}) \left( \lambda_2 \frac{dx_2}{x_2} + \lambda_3 \frac{dx_3}{x_3} \right) \right), \tag{3.8}$$

onde  $p_1 \in \mathbb{Z}_{>0}$  com  $p_1 \neq 0$  e  $\lambda_2\lambda_3 \neq 0$  e  $m_2\lambda_2 + m_3\lambda_3 \neq 0$  se  $m_2, m_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  com pelo

menos um deles não nulo. Aqui o local singular é difeomorfo aos três eixos coordenados. Em um ponto diferente da origem, o eixo  $x_1$  tem uma singularidade logarítmica de tipo dimensional dois com duas separatrizes convergentes. Supondo  $x_1 = c$  onde  $c = constante$  em (3.8), então

$$\omega = \lambda_2 x_3 dx_2 + \lambda_3 x_2 dx_3, \text{ com } \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}_{<0}.$$

Portanto, temos duas separatrizes fortes, a saber,  $x_3 = 0$  e  $x_2 = 0$ .



Ao longo dos outros dois eixos, temos singularidades de tipo dimensional dois, do tipo sela-nó.

(B<sub>2</sub>) – Singularidade simples (selas-nós ressonante) de tipo formal

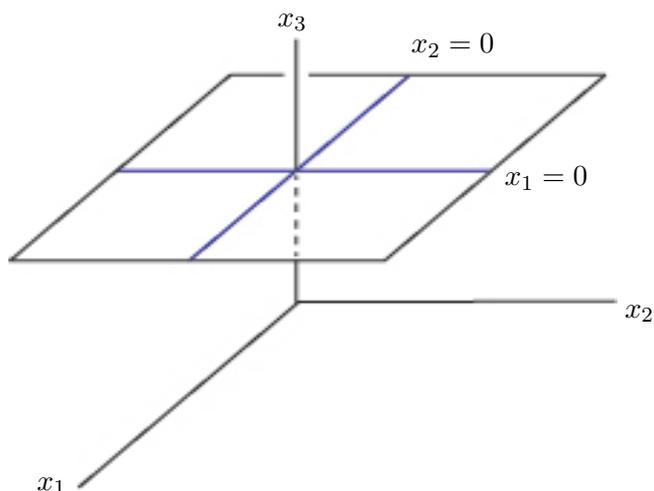
$$\omega = x_1 x_2 x_3 \left( p_1 \frac{dx_1}{x_1} + p_2 \frac{dx_2}{x_2} + \varphi(x_1^{p_1} x_2^{p_2}) \left( \lambda_2 \frac{dx_2}{x_2} + \lambda_3 \frac{dx_3}{x_3} \right) \right), \quad (3.9)$$

onde  $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$  e  $m_2 \lambda_2 + m_3 \lambda_3 \neq 0$  se  $m_2, m_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  com pelo menos um deles não nulo. Neste caso, os ramos do local singular não desempenham o mesmo papel. Ao longo do eixo  $x_3$  e fora da origem, temos uma singularidade ressonante de tipo dimensional dois; ao longo dos outros dois eixos, temos singularidades do tipo sela-nó de tipo dimensional dois, como podemos ver nos casos abaixo.

Tomando uma seção plana, transversal ao eixo  $x_3$ , isto é, fazendo  $x_3 = c$  onde  $c$  é constante na equação (3.9) temos

$$p_1 x_2 dx_1 + (p_2 x_1 + \lambda_2 x_1 \varphi(x_1^{p_1} x_2^{p_2})) dx_2 = 0.$$

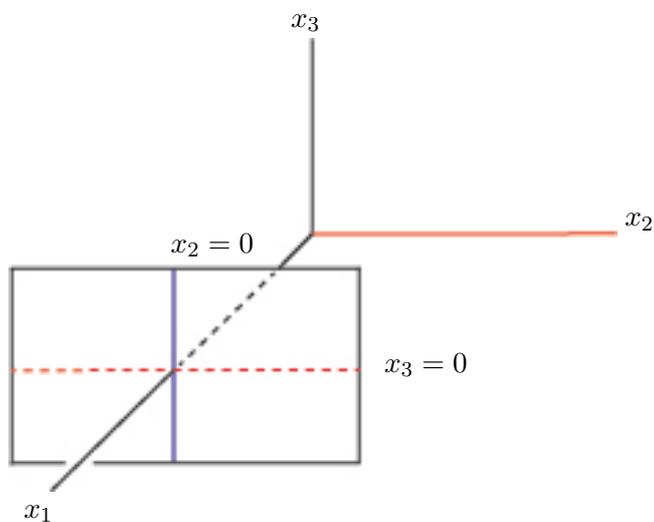
Portanto  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 0$  são as separatrizes fortes.



Agora, tome uma seção plana transversal ao eixo  $x_1$ . Faça  $x_1 = c$  onde  $c = constante$  na equação (3.9). Então temos

$$\omega = (p_2 + \tilde{\varphi}(x_2^{p_2})\lambda_2)x_3 dx_2 + \tilde{\varphi}(x_2^{p_2})\lambda_3 x_2 dx_3.$$

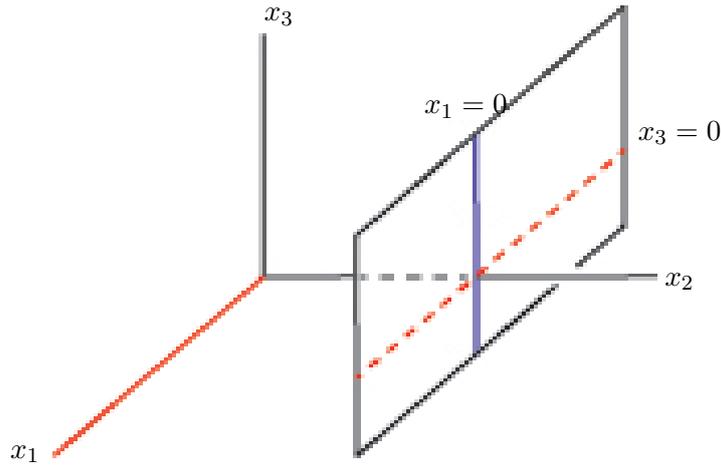
Aqui,  $x_3 = 0$  é a separatriz fraca e  $x_2 = 0$  é a separatriz forte.



Analogamente, tomamos uma seção plana transversal ao eixo  $x_2$ , ou seja,  $x_2 = c$  onde  $c$  é uma constante temos

$$\omega = p_1 x_3 dx_1 + \tilde{\varphi}(x_1^{p_1})\lambda_3 x_1 dx_3,$$

onde  $\tilde{\varphi}(x_1^{p_1}) = \varphi(x_1^{p_1} x_2^{p_2})$ . Donde temos  $x_3 = 0$  como separatriz fraca e  $x_1 = 0$  a separatriz forte.



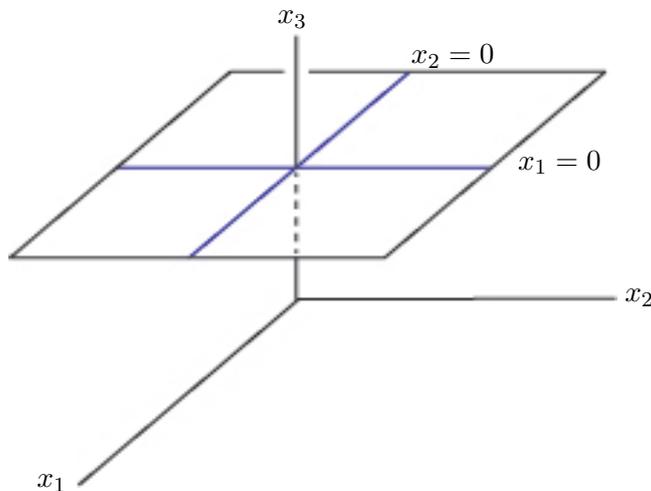
(B<sub>3</sub>) – Singularidade simples (ressonante) de tipo formal

$$\omega = x_1 x_2 x_3 \left( p_1 \frac{dx_1}{x_1} + p_2 \frac{dx_2}{x_2} + p_3 \frac{dx_3}{x_3} + \varphi(x_1^{p_1} x_2^{p_2} x_3^{p_3}) \left( \lambda_2 \frac{dx_2}{x_2} + \lambda_3 \frac{dx_3}{x_3} \right) \right), \quad (3.10)$$

onde  $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{Z}_{>0}$  e  $m_2 \lambda_2 + m_3 \lambda_3 \neq 0$  se  $m_2, m_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  com pelo menos um deles não nulo. Aqui, em cada ponto suave do conjunto singular, a singularidade é ressonante e de tipo dimensional dois e, novamente, existem duas separatrizes. Como no caso anterior, na origem, temos três separatrizes difeomorfas a  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  e  $x_3 = 0$ . Tomando uma seção transversal ao eixo  $x_3$ , isto é, fazendo  $x_3 = c$  onde  $c$  é constante em (3.10) temos

$$\omega = x_2 p_1 dx_1 + (p_2 + \lambda_2 \tilde{\varphi}(x_1^{p_1} x_2^{p_2})) x_1 dx_2. \quad (3.11)$$

Neste caso temos duas separatrizes fortes  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 0$  associadas aos autovalores  $p_1$  e  $p_2$ .



## 3.2 FOLHEAÇÕES DE CODIMENSÃO UM INVARIANTES POR CAMPOS DE VETORES NO DOMÍNIO DE POINCARÉ

Nesta seção estudaremos folheações holomorfas simples de codimensão um em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  invariantes por campos de vetores no domínio de Poincaré.

### 3.2.1 FOLHEAÇÕES DE TIPO DIMENSIONAL DOIS

Nesta subseção estudaremos quando uma 1-forma  $\omega$  em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  dada por

$$\omega = x_1 x_2 \left( \sum_{i=1}^l p_i \frac{dx_i}{x_i} + \varphi(\mathbf{x}^p) \lambda_2 \frac{dx_2}{x_2} \right), \quad (3.12)$$

onde  $l = 1$  ou  $l = 2$ ,  $p_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ ,  $\varphi \in \mathbb{C}[[T]]$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\lambda_2 \in \mathbb{C}^*$ ,  $|\lambda_2| \neq 0$  e  $\mathbf{x}^p = x_1^{p_1}$  ou  $\mathbf{x}^p = x_1^{p_1} x_2^{p_2}$  correspondendo a uma singularidade simples de tipo dimensional dois e invariante pelo campo de vetores

$$\begin{aligned} X = & (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3) \frac{\partial}{\partial x_1} + (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3) \frac{\partial}{\partial x_2} + \\ & + (\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} + h.o.t. \end{aligned} \quad (3.13)$$

possuindo três autovalores não nulos no domínio de Poincaré (ver Seção 2.3). Como o tipo dimensional de  $\omega$  é dois, observe que o campo de vetores  $\frac{\partial}{\partial x_3}$  é tangente à 1-forma  $\omega$ .

Neste caso, analisaremos quando  $l = 1$  ou  $l = 2$ .

(i) Tomando  $l = 1$ , na equação (3.12) e fazendo a contração pelo campo de vetores  $X$  dado em (3.13) temos

$$i_X \omega = p_1(\alpha_{11}x_1x_2 + \alpha_{12}x_2x_2 + \alpha_{13}x_2x_3) + \lambda_2 \varphi(x_1^{p_1})(\alpha_{21}x_1x_1 + \alpha_{22}x_1x_2 + \alpha_{23}x_1x_3) = 0.$$

Olhando para os termos de ordem mais baixa concluímos que

$$\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{13} = 0. \quad (3.14)$$

Portanto a matriz da parte linear do campo de vetores  $X$  tem uma linha nula, isto é, temos um autovalor nulo, o que não é compatível com o fato de  $X$  estar no domínio de Poincaré.

Portanto, um campo de vetores  $X$  descrito acima não deixa invariante uma 1- forma dada por  $\omega = p_1x_2dx_1 + \varphi(x_1^{p_1})\lambda_2x_1dx_2$ .

(ii) Quando  $l = 2$  na equação (3.12) dois casos se apresentam para analisarmos:

Se  $\varphi(x_1^{p_1}x_2^{p_2}) = 0$  então  $x_1^{p_1}x_2^{p_2}$  é integral primeira holomorfa para  $p_1x_2dx_1 + p_2x_1dx_2$ .

De fato,

$$d(x_1^{p_1}x_2^{p_2}) = p_1x_1^{p_1-1}x_2^{p_2}dx_1 + p_2x_1^{p_1}x_2^{p_2-1}dx_2 = x_{p_1-1}x_2^{p_2-1}(p_1x_2dx_1 + p_2x_1dx_2).$$

Segue portanto da Proposição 2.3.5 que  $X$  não está no domínio de Poincaré.

Se  $\varphi(x_1^{p_1}x_2^{p_2}) \neq 0$ , como  $X$  deixa invariante a 1-forma  $\omega$ , ao fazermos a contração de  $\omega$  por  $X$  e olhando para os termos de ordem mais baixa dessa equação obteremos

$$p_1(\alpha_{11}x_1x_2 + \alpha_{12}x_2x_2 + \alpha_{13}x_2x_3) + p_2(\alpha_{21}x_1x_1 + \alpha_{22}x_1x_2 + \alpha_{23}x_1x_3) = 0.$$

Assim,

$$\alpha_{11}p_1 + \alpha_{22}p_2 = 0 \tag{3.15}$$

e

$$\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{21} = \alpha_{23} = 0. \tag{3.16}$$

Donde concluímos que a matriz da parte linear do campo de vetores  $X$  dado por  $A$  se escreve como

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}.$$

Pela equação (3.15), ou  $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$  ou  $\alpha_{11} \neq 0$  e  $\alpha_{22} \neq 0$ . Se  $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$ , então temos dois autovalores nulos, o que não pode acontecer. Se  $\alpha_{22} \neq 0$  e  $\alpha_{11} \neq 0$  então  $\alpha_{11}/\alpha_{22} = -p_2/p_1 \in \mathbb{Q}_{<0}$  implicando que os autovalores não estão no domínio de Poincaré. Concluímos que o campo de vetores  $X$  não deixa invariante uma 1-forma do tipo  $\omega = p_1x_2dx_1 + p_2x_1dx_2 + \varphi(x_1^{p_1}x_2^{p_2})\lambda_2x_1dx_2$ .

### 3.2.2 FOLHEAÇÕES DE TIPO DIMENSIONAL TRÊS

Nesta seção, estudaremos especificamente singularidades simples de tipo dimensional três. Segue da definição que, se a folheação holomorfa de codimensão um em  $(\mathbb{C}^3, 0)$

induzida por uma 1-forma  $\omega$  tem tipo dimensional três e possui singularidades simples, então existe uma mudança formal de coordenadas de modo que a 1-forma  $\omega$  se escreve como em (3.3), (3.4), (3.5) ou (3.6), correspondendo, respectivamente, aos tipos (A), (B<sub>1</sub>), (B<sub>2</sub>) e (B<sub>3</sub>).

Faremos um estudo sobre os campos de vetores da forma dada em (3.13) tangentes a folheações desses quatro tipos. Começamos com uma 1-forma  $\omega$  do tipo (A).

**PROPOSIÇÃO 3.2.1.** *Se  $X$  deixa invariante uma forma do tipo (A), então sua parte linear é diagonal.*

*Demonstração.* Escreva o campo de vetores  $X$  como em (3.13). Como  $X$  deixa invariante a 1-forma  $\omega = (\lambda_1 x_2 x_3 dx_1 + \lambda_2 x_1 x_3 dx_2 + \lambda_3 x_1 x_2 dx_3)$ , então a contração de  $\omega$  pela parte linear de  $X$  nos fornece a seguinte equação:

$$\begin{aligned} &\lambda_1(\alpha_{11}x_1x_2x_3 + \alpha_{12}x_2^2x_3 + \alpha_{13}x_2x_3^2) + \lambda_2(\alpha_{21}x_1^2x_3 + \alpha_{22}x_1x_2x_3 + \alpha_{23}x_1x_3^2) \\ &+ \lambda_3(\alpha_{31}x_1^2x_2 + \alpha_{32}x_1x_2^2 + \alpha_{33}x_1x_2x_3) = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Deste modo, teremos as seguintes relações

$$\lambda_1\alpha_{11} + \lambda_2\alpha_{22} + \lambda_3\alpha_{33} = 0 \quad (3.18)$$

e

$$\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{21} = \alpha_{23} = \alpha_{31} = \alpha_{32} = 0, \quad (3.19)$$

donde concluímos que a parte linear do campo de vetores  $X$  é diagonal nas coordenadas da forma normal da folheação de codimensão um e pode ser escrito como

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix}.$$

□

Uma vez que a parte linear do campo vetorial  $X$  é diagonal e, supondo que seus

autovalores sejam  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ , reescrevemos o campo de vetores  $X$  como

$$X = \mu_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mu_2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mu_3 x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + h.o.t.$$

Desse modo, a equação (3.18) nos fornece a relação

$$\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_3 = 0. \quad (3.20)$$

A seguir, estudaremos a situação em que o campo de vetores  $X$  é tangente a 1-formas dos tipos  $(B_1)$ ,  $(B_2)$  ou  $(B_3)$ .

**Tipo(B<sub>1</sub>):** A 1-forma  $\omega$  tem equação dada por (3.4). Contraindo  $\omega$  pela parte linear de  $X$  temos

$$\begin{aligned} i_X \omega = (\alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3) p_1 x_2 x_3 + \varphi(x_1^{p_1}) [(\alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \alpha_{23} x_3) \lambda_2 x_1 x_3 \\ + (\alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + \alpha_{33} x_3) \lambda_3 x_1 x_2] = 0. \end{aligned}$$

Olhando para os termos de ordem mais baixa concluímos que

$$\alpha_{11} p_1 = \alpha_{12} p_1 = \alpha_{13} p_1 = 0.$$

Como  $p_1 \neq 0$ , necessariamente  $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{13} = 0$ , o que resulta em um autovalor nulo, contradizendo a hipótese sobre  $X$ .

**Tipo(B<sub>2</sub>):** A 1-forma  $\omega$  tem equação dada por (3.5). Contraindo pelo campo de vetores  $X$  e tomando os termos de ordem mais baixa, temos

$$(\alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3) p_1 x_2 x_3 + (\alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \alpha_{23} x_3) p_2 x_1 x_3 = 0.$$

Deste modo, temos as relações

$$\alpha_{11} p_1 + \alpha_{22} p_2 = 0, \quad (3.21)$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{21} = \alpha_{23} = 0,$$

donde concluimos que a parte linear  $X$  se expressa como

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}.$$

Pela equação (3.21) temos que, ou  $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$  ou  $\alpha_{11} \neq 0$  e  $\alpha_{22} \neq 0$ . Se  $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$  então  $X$  possui um autovalor nulo. Se  $\alpha_{22} \neq 0$  então  $\alpha_{11}/\alpha_{22} = -p_2/p_1 \in \mathbb{Q}_{<0}$ , implicando que os autovalores de  $X$  não estão no domínio de Poincaré. Portanto a situação aqui descrita não é possível.

**Tipo(B<sub>3</sub>):** Contraindo a 1-forma  $\omega$  dada em (3.6) pelo campo de vetores  $X$  e olhando para os termos de ordem mais baixa temos

$$\begin{aligned} &(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3)p_1x_2x_3 + (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3)p_2x_1x_3 \\ &+ (\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3)p_3x_1x_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Assim, temos que

$$\alpha_{11}p_1 + \alpha_{22}p_2 + \alpha_{33}p_3 = 0 \quad (3.23)$$

e

$$\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{21} = \alpha_{23} = \alpha_{31} = \alpha_{32} = 0. \quad (3.24)$$

Concluimos que a parte linear do campo de vetores  $X$  se expressa pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix},$$

cujos autovalores satisfazem à relação de ressonância (3.23). Isso contradiz a hipótese sobre  $X$ .

A discussão acima é resumida no seguinte resultado:

**PROPOSIÇÃO 3.2.2.** *Seja  $\mathcal{G}$  uma folheação em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  de tipo dimensional três com uma singularidade simples invariante por um campo de vetores no domínio de Poincaré. Então  $\mathcal{G}$  possui singularidade do tipo (A).*

### 3.3 SINGULARIDADES HIPERBÓLICAS COMPLEXAS

Em dimensão dois, o conceito de folheações hiperbólicas complexas foi introduzido em [CLNS84] por C. Camacho, A. Lins Neto e P. Sad, apresentadas neste artigo como folheações do tipo curva generalizada. Mais precisamente temos a seguinte definição:

**DEFINIÇÃO 3.3.1.** Dizemos que um germe de folheação  $\mathcal{F}$  em  $(\mathbb{C}^2, 0)$  é *curva generalizada* se sua dessingularização não possui singularidades com autovalor nulo, ou seja, singularidades do tipo sela-nó.

Faremos a seguir a extensão da definição de curvas generalizadas para folheações de codimensão um em um ambiente de dimensão qualquer. Estas são chamadas de folheações hiperbólicas complexas. As folheações hiperbólicas complexas foram consideradas em [FSMF09], no caso não dicrítico, ali chamadas *superfícies generalizadas*. Um estudo sobre esse tema no caso dicrítico é encontrado em [CRVS15].

**DEFINIÇÃO 3.3.2.** Seja  $\mathcal{G}$  uma folheação em  $(\mathbb{C}^n, 0)$  definida por uma 1-forma holomorfa  $\omega$ ,  $n \geq 3$ . Uma imersão  $i : (\mathbb{C}^2, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  é *transversal* a  $\mathcal{G}$  se

- (i)  $Sing(i^*\omega) = i^{-1}(Sing(\omega)) = \{0\}$ ;
- (ii)  $\nu_0(\mathcal{G}) = \nu_0(i^*\mathcal{G})$ ,

onde  $\nu_0$  denota a multiplicidade algébrica, definida de forma análoga à Definição 2.1.3.

J-F. Mattei e R. Moussu, em [MM80], mostraram que imersões satisfazendo (i) e (ii) são genéricas.

**DEFINIÇÃO 3.3.3.** [CRVS15] Seja  $\mathcal{G}$  um germe de folheação holomorfa singular de codimensão um em  $(\mathbb{C}^n, 0)$ . Dizemos que  $\mathcal{G}$  é uma *folheação hiperbólica complexa na origem* se para toda aplicação  $i : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ , holomorfa e transversal a  $\mathcal{G}$ , temos que  $i^*\mathcal{G}$  é uma folheação do tipo curva generalizada.

**DEFINIÇÃO 3.3.4.** [CC92, Can04] Seja  $\mathcal{G}$  um germe de folheação holomorfa singular de codimensão um em  $(\mathbb{C}^n, 0)$  de tipo dimensional  $\tau$ . Dizemos que  $\mathcal{G}$  tem um *ponto hiperbólico complexo simples na origem* se, e somente se, existem coordenadas locais  $x_1, \dots, x_\tau$  e uma 1-forma integrável  $\omega$  definindo  $\mathcal{G}$  que pode ser escrita como

$$\omega = \sum_{i=1}^{\tau} (\lambda_i + b_i(x_1, \dots, x_\tau)) \frac{dx_i}{x_i},$$

com  $b_i \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_\tau\}$ ,  $b_i(0) = 0$  e  $\sum \lambda_i m_i \neq 0$  com  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_\tau) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $\mathbf{m} \neq 0$ .

Em dimensão três, essas folheações correspondem quando  $\tau = 2$  ou  $3$  ao modelo simples (A).

Os dois conceitos são relacionados pelo seguinte resultado:

**LEMA 3.3.5.** [CRVS15] *Seja  $\mathcal{G}$  um germe de folheação holomorfa de codimensão um em  $(\mathbb{C}^n, 0)$  com um ponto hiperbólico complexo simples na origem. Então  $\mathcal{G}$  é folheação hiperbólica complexa.*

De acordo com o Teorema de dessingularização (Teorema 3.1.4), em um espaço ambiente de dimensão três, qualquer germe de folheação holomorfa de codimensão um admite redução de singularidades. Assim, a redução das singularidades é chamada de *hiperbólica complexa* se todos os pontos de  $\pi^*\mathcal{G}$  são pontos hiperbólicos complexos simples. É fácil ver que se a folheação  $\mathcal{G}$  possui uma resolução que não é hiperbólica complexa então  $\mathcal{G}$  não é uma folheação hiperbólica complexa. De fato, nesse caso, aparecerá ao menos uma singularidade com tipo dimensional  $\tau = 2$  com modelo transversal de uma sela-nó, ou com  $\tau = 3$  dos tipos  $(B_1)$  ou  $(B_2)$ . Em qualquer dos casos, encontramos na resolução uma curva de singularidades com  $\tau = 2$  e modelo transversal de uma sela-nó. Uma seção bidimensional a uma tal curva nos permite construir a imersão transversal como na Definição 3.3.2, em que  $i^*\mathcal{G}$  é uma sela-nó e portanto não é curva generalizada.

A proposição a seguir é uma adaptação da Proposição 4.4 de [CRVS15].

**PROPOSIÇÃO 3.3.6.** *Seja  $\mathcal{G}$  um germe de folheação holomorfa de codimensão um em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ . Então  $\mathcal{G}$  é folheação hiperbólica complexa se, e somente se,  $\mathcal{G}$  admite uma redução de singularidade hiperbólica complexa.*

Os modelos hiperbólicos complexos simples são invariantes por blow-ups. Para referência futura, mostraremos isto em dimensão três na seguinte proposição:

**PROPOSIÇÃO 3.3.7.** *Uma singularidade hiperbólica complexa simples em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  é invariante por blow-ups pontuais ou blow-ups monoidais em curvas contidas no conjunto singular.*

*Demonstração.* Faremos os cálculos apenas quando o tipo dimensional for três. Então tomamos coordenadas de modo que o blow-up pontual da primeira carta seja expresso por

$$\pi : x_1 = x_1, x_2 = tx_1, x_3 = sx_1.$$

Assim  $dx_2 = tdx_1 + x_1dt$  e  $dx_3 = sdx_1 + x_1ds$ . Segue que o transformado estrito da 1-forma  $\omega$ , denotado por  $\tilde{\omega}$ , é dado por

$$\begin{aligned}\tilde{\omega} = \pi^*(\omega) &= x_1^2 st(\lambda_1 + a_1)dx_1 + x_1^2 s(\lambda_2 + a_2)(tdx_1 + x_1dt) + x_1^2 t(\lambda_3 + a_3)(sdx_1 + x_1ds) \\ &= x_1^2 \{st[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + (a_1 + a_2 + a_3)]dx_1 + x_1s(\lambda_2 + a_2)dt + x_1t(\lambda_3 + a_3)ds\}\end{aligned}$$

Portanto,  $\tilde{\omega}/x_1^2 = st(\tilde{\lambda} + \tilde{a})dx_1 + x_1s(\lambda_2 + a_2)dt + x_1t(\lambda_3 + a_3)ds$ , onde

$$\tilde{\lambda} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (3.25)$$

e

$$\tilde{a} = a_1 + a_2 + a_3.$$

Os autovalores  $\tilde{\lambda}$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  não possuem ressonância. De fato, tome  $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}_{>0}$  tal que  $m_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + m_2\lambda_2 + m_3\lambda_3 = 0$ , então  $m_1\lambda_1 + (m_2 + m_1)\lambda_2 + (m_1 + m_3)\lambda_3 = 0$  o que implica,  $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ .

Tomemos agora coordenadas de modo que o blow-up monoidal seja dado por

$$\pi : x_1 = x_1, x_2 = tx_1, x_3 = x_3.$$

Assim,  $dx_2 = tdx_1 + x_1dt$ . Segue que o transformado estrito da 1-forma  $\omega$ , denotado por  $\tilde{\omega}$ , é dado por

$$\begin{aligned}\tilde{\omega} = \pi^*(\omega) &= x_1tx_3(\lambda_1 + a_1)dx_1 + x_1x_3(\lambda_2 + a_2)(tdx_1 + x_1dt) + x_1^2t(\lambda_3 + a_3)dx_3 \\ &= x_1[tx_3((\lambda_1 + \lambda_2) + (a_1 + a_2))dx_1 + x_1x_3(\lambda_2 + a_2)dt + x_1t(\lambda_3 + a_3)dx_3].\end{aligned}$$

Portanto  $\tilde{\omega}/x_1 = tx_3(\lambda + \tilde{a})dx_1 + x_1x_3(\lambda_2 + a_2)dt + x_1t(\lambda_3 + a_3)dx_3$ , onde

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (3.26)$$

e

$$a = a_1 + a_2.$$

Os autovalores  $\lambda$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  não possuem ressonância. De fato, tome  $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}_{>0}$  tal que  $m_1(\lambda_1 + \lambda_2) + m_2\lambda_2 + m_3\lambda_3 = 0$ , então  $m_1\lambda_1 + (m_1 + m_2)\lambda_2 + m_3\lambda_3 = 0$  o que

implica,  $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ . □

### 3.4 CAMPOS DE VETORES DO TIPO POINCARÉ FORTEMENTE NÃO RESSONANTE

Iniciaremos esta seção com a seguinte definição. Dizemos que um vetor na forma  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$  é *fortemente não ressonante* se para qualquer função não identicamente nula  $\Phi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{Z}$  temos que  $\sum \Phi(i)\lambda_i \neq 0$ .

**DEFINIÇÃO 3.4.1.** Seja  $X$  um germe de campo de vetores em  $(\mathbb{C}^n, 0)$ . Dizemos que  $X$  é *fortemente Poincaré*, e denotado por  $\mathcal{P}_F$ , se  $X$  estiver no domínio de Poincaré com autovalores fortemente não ressonantes.

Evidentemente, um campo  $X$  do tipo  $\mathcal{P}_F$  é do tipo Poincaré sem ressonâncias e, conseqüentemente, é linearizável. Além disso, seus autovalores são necessariamente não nulos e distintos dois a dois. Portanto,  $X$  é diagonalizável em coordenadas analíticas. Um campo do tipo  $\mathcal{P}_F$  em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  pode ser escrito como

$$X = \alpha_{11}x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_{22}x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_{33}x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad (3.27)$$

**LEMA 3.4.2.** *Seja  $X$  um campo de vetores do tipo  $\mathcal{P}_F$  escrito como (3.27). Então as únicas curvas lisas invariantes por  $X$  são os eixos coordenados.*

*Demonstração.* Escreva a curva  $\gamma(t) = (at + f(t), g(t), h(t))$  onde  $a \in \mathbb{C}^*$  e  $g, h \in \mathcal{O}_1$  são não unidades. Suponha, por exemplo,  $g \neq 0$ . Temos  $\nu_0(f(t)) \geq 2$ ,  $m = \nu_0(g(t)) \geq 1$  e  $n = \nu_0(h(t)) \geq 1$ . Suponha que o campo de vetores  $X$  deixe invariante a curva  $\gamma(t)$ . Assim,  $\gamma'$  é paralelo a  $X(\gamma)$ , ou seja,

$$\Phi(t)(a + f'(t), g'(t), h'(t)) = (\alpha_{11}(at + f(t)), \alpha_{22}g(t), \alpha_{33}h(t)) \quad (3.28)$$

para alguma função da forma  $\Phi(t) = \mu t + \rho(t)$  onde  $\mu \neq 0$ . Da igualdade acima temos, por exemplo,

$$\Phi(t)g'(t) = \alpha_{22}g(t).$$

Portanto,

$$\frac{\alpha_{22}}{\Phi(t)} = \frac{g'(t)}{g(t)}.$$

Assim, o cálculo do resíduo nos fornece  $Res_{t=0} \left( \frac{g'(t)}{g(t)} \right) = m \geq 1$ . Fazendo a expansão de  $\alpha_{22}/\Phi(t)$  como série de potências teremos

$$\frac{\alpha_{22}}{\Phi(t)} = \frac{\alpha_{22}}{\mu t + \rho(t)} = \frac{\alpha_{22}}{\mu t(1 + \tilde{\rho}(t))} = \frac{\alpha_{22}}{\mu t} (1 - \tilde{\rho}(t) + \tilde{\rho}^2(t) + \dots).$$

Então o resíduo de  $\alpha_{22}/\Phi(t)$  é dado por  $Res(\alpha_{22}/\Phi(t)) = \alpha_{22}/\mu$ . Por outro lado, da primeira igualdade de (3.28) temos  $\alpha_{11} = \mu$ . Assim temos  $\alpha_{22}/\alpha_{11} = m$  o que nos dá uma relação de ressonância forte entre  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{22}$  e  $\alpha_{33}$ . Logo,  $g = h = 0$  e  $\gamma$  é o eixo  $x_1$ .  $\square$

**PROPOSIÇÃO 3.4.3.** *Considere o campo de vetores  $X$  do tipo  $\mathcal{P}_F$  como em (3.27). O transformado de  $X$  por blow-ups pontuais ou blow-ups monoidais centrados em curvas lisas invariantes por  $X$  possui singularidades do tipo  $\mathcal{P}_F$ .*

*Demonstração.* Começemos com um blow-up pontual em  $0 \in \mathbb{C}^3$ . Considere a mudança de coordenadas  $x_1 = x_1^*$ ,  $x_2^* = x_2/x_1$  e  $x_3^* = x_3/x_1$ . Após o primeiro blow-up pontual, o transformado de  $X$  será

$$\tilde{X} = \alpha_{11}x_1^* \frac{\partial}{\partial x_1^*} + (\alpha_{22} - \alpha_{11})x_2^* \frac{\partial}{\partial x_2^*} + (\alpha_{33} - \alpha_{11})x_3^* \frac{\partial}{\partial x_3^*}.$$

A única singularidade de  $\tilde{X}$  é  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (0, 0, 0)$ . Podemos ver que os novos autovalores são fortemente não ressonantes. De fato, se

$$\alpha\alpha_{11} + \beta(\alpha_{22} - \alpha_{11}) + \delta(\alpha_{33} - \alpha_{11}) = 0,$$

com  $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{Z}$ , então temos

$$(\alpha - \beta - \delta)\alpha_{11} + \beta\alpha_{22} + \delta\alpha_{33} = 0,$$

implicando em  $\alpha = \beta = \delta = 0$ . Analogamente, encontramos singularidades do tipo  $\mathcal{P}_F$  na origem de cada uma das duas outras cartas do blow-up.

Faremos agora um blow-up monoidal com centro em uma curva lisa invariante. Pelo Lema 3.4.2, essa curva está contida em um dos três eixos, que suporemos ser o eixo  $x_3$ . Tomando cartas  $x_1 = x_1^*$ ,  $x_2 = x_2^*$  e  $x_3^* = x_3/x_2$  e usando a equação (1.12), temos que o

transformado de  $X$  será

$$\tilde{X} = \alpha_{11}x_1^* \frac{\partial}{\partial x_1^*} + \alpha_{22}x_2^* \frac{\partial}{\partial x_2^*} + (\alpha_{33} - \alpha_{22})x_3^* \frac{\partial}{\partial x_3^*}.$$

Encontramos uma singularidade em  $0 \in \mathbb{C}^3$ , onde os novos autovalores são fortemente não ressonantes. De fato, se

$$\alpha\alpha_{11} + \beta\alpha_{22} + \delta(\alpha_{33} - \alpha_{22}) = 0,$$

com  $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{Z}$ , então temos

$$\alpha\alpha_{11} + (\beta - \delta)\alpha_{22} + \delta\alpha_{33} = 0,$$

implicando que  $\alpha = \beta = \delta = 0$ . Uma situação similar ocorre nas demais cartas.  $\square$

**COROLÁRIO 3.4.4.** *Se  $X$  é um campo de vetores do tipo  $\mathcal{P}_F$  escrito na forma (3.27) então as únicas curvas invariantes por  $X$  são os três eixos coordenados.*

*Demonstração.* Seja  $\gamma$  uma curva invariante pelo campo  $X$ . O caso em que a curva é lisa, foi feito no Lema 3.4.2. Se  $\gamma$  é singular, a dessingularizamos por blow-ups monoidais. Aplicando a proposição anterior, as singularidades do transformado de  $X$  são do tipo  $\mathcal{P}_F$ . Concluimos que o transformado de  $\gamma$  coincide com um eixo coordenado não contido no divisor. Isso basta para concluir que  $\gamma$  coincide com um dos três eixos coordenados em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ .  $\square$

Os próximos resultados dessa seção foram obtidos em colaboração com Miguel Fernández Duque. Mostramos que se  $\mathcal{G}$  é um germe de folheação holomorfa de codimensão um invariante por um campo de vetores do tipo  $\mathcal{P}_F$ , então  $\mathcal{G}$  é uma folheação hiperbólica complexa. Para isto, considere a 1-forma integrável  $\omega$  dada por

$$\omega = ax_1 + bx_2 + cx_3, \tag{3.29}$$

onde  $a, b, c \in \mathcal{O}_3$  não possuem fator em comum. Assim, como  $X$  deixa invariante  $\omega$ , a contração de  $\omega$  por  $X$  nos fornece a seguinte equação

$$0 = i_X\omega = \alpha_{11}x_1a + \alpha_{22}x_2b + \alpha_{33}x_3c. \tag{3.30}$$

A diferencial de  $\omega$  é dada por

$$\begin{aligned} d\omega &= b_{x_1} dx_1 \wedge dx_2 + c_{x_1} dx_1 \wedge dx_3 - a_{x_2} dx_1 \wedge dx_2 + c_{x_2} dx_2 \wedge dx_3 - \\ &\quad - a_{x_3} dx_1 \wedge dx_3 - b_{x_3} dx_2 \wedge dx_3 \\ &= (b_{x_1} - a_{x_2}) dx_1 \wedge dx_2 + (c_{x_1} - a_{x_3}) dx_1 \wedge dx_3 + (c_{x_2} - b_{x_3}) dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Como  $\omega$  é integrável, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \omega \wedge d\omega \\ &= [a(c_{x_2} - b_{x_3}) + b(-c_{x_1} + a_{x_3}) + c(b_{x_1} - a_{x_2})] dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

Portanto,  $\omega \wedge d\omega = 0$  se, e somente se,

$$a(c_{x_2} - b_{x_3}) + b(-c_{x_1} + a_{x_3}) + c(b_{x_1} - a_{x_2}) = 0. \quad (3.32)$$

Agora, derivando a equação (3.30) em relação a cada uma das variáveis  $x_1, x_2$  e  $x_3$ , temos as seguintes equações:

$$\alpha_{11}a + \alpha_{11}x_1a_{x_1} + \alpha_{22}x_2b_{x_1} + \alpha_{33}x_3c_{x_1} = 0; \quad (3.33)$$

$$\alpha_{11}x_1a_{x_2} + \alpha_{22}b + \alpha_{22}x_2b_{x_2} + \alpha_{33}x_3c_{x_2} = 0; \quad (3.34)$$

$$\alpha_{11}x_1a_{x_3} + \alpha_{22}x_2b_{x_3} + \alpha_{33}x_3c_{x_3} + \alpha_{33}c = 0. \quad (3.35)$$

De posse das equações anteriores podemos enunciar a seguinte proposição:

**PROPOSIÇÃO 3.4.5.** *Suponha que o campo de vetores  $X$  seja do tipo  $\mathcal{P}_F$  e deixe invariante a 1-forma integrável  $\omega = adx_1 + bdx_2 + cdx_3$  como em (3.29). Então  $X$  deixa invariante cada um dos quocientes de pares de coeficientes de  $\omega$ .*

*Demonstração.* De fato,

$$\begin{aligned}
 b^2 X(a/b) &= bX(a) - aX(b) \\
 &= b(\alpha_{11}x_1a_{x_1} + \alpha_{22}x_2a_{x_2} + \alpha_{33}x_3a_{x_3}) - a(\alpha_{11}x_1b_{x_1} + \alpha_{22}x_2b_{x_2} + \alpha_{33}x_3b_{x_3}) \\
 &= b(-\alpha_{11}a - \alpha_{22}x_2b_{x_1} - \alpha_{33}x_3c_{x_1}) + b\alpha_{22}x_2a_{x_2} + b\alpha_{33}x_3a_{x_3} - a\alpha_{11}x_1b_{x_1} \\
 &\quad - a\alpha_{22}x_2b_{x_2} - a\alpha_{33}x_3b_{x_3} \quad (\text{por (3.33)}) \\
 &= b\alpha_{33}x_3(a_{x_3} - c_{x_1}) - ab\alpha_{11} - b\alpha_{22}x_2b_{x_1} + b\alpha_{22}x_2a_{x_2} - a\alpha_{11}x_1b_{x_1} \\
 &\quad - a\alpha_{22}x_2b_{x_2} - a\alpha_{33}x_3b_{x_3} \\
 &= b\alpha_{33}x_3(a_{x_3} - c_{x_1}) + a\alpha_{33}x_3(c_{x_2} - b_{x_3}) + ab(\alpha_{22} - \alpha_{11}) + \\
 &\quad b\alpha_{22}x_2(a_{x_2} - b_{x_1}) + a\alpha_{11}x_1(a_{x_2} - b_{x_1}) \quad (\text{por (3.34)}) \\
 &= \alpha_{33}x_3(c(a_{x_2} - b_{x_1})) + ab(\alpha_{22} - \alpha_{11}) + (a_{x_2} - b_{x_1})(a\alpha_{11}x_1 + b\alpha_{22}x_2) \\
 &\quad (\text{por (3.32)}) \\
 &= ab(\alpha_{22} - \alpha_{11}) + (a_{x_2} - b_{x_1})(\alpha_{11}ax_1 + \alpha_{22}bx_2 + \alpha_{33}cx_3) \quad (\text{por (3.30)}) \\
 &= ab(\alpha_{22} - \alpha_{11}). \tag{3.36}
 \end{aligned}$$

Portanto,  $X(a/b) = (\alpha_{22} - \alpha_{11})a/b$ . De modo análogo, temos  $X(a/c) = (\alpha_{33} - \alpha_{11})a/c$  e  $X(b/c) = (\alpha_{33} - \alpha_{22})b/c$ .  $\square$

Um *monômio meromorfo* é uma função meromorfa da forma  $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^i x_2^j x_3^k$ , onde  $i, j, k \in \mathbb{Z}$ . O terno ordenado  $(i, j, k)$  é chamado de *multigrau* de  $F$ . Temos

$$x_1 F_{x_1} = i x_1^i x_2^j x_3^k, \quad x_2 F_{x_2} = j x_1^i x_2^j x_3^k, \quad x_3 F_{x_3} = k x_1^i x_2^j x_3^k.$$

Essas relações resultam no seguinte:

**LEMA 3.4.6.** *O monômio meromorfo  $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^i x_2^j x_3^k$  é invariante pelo campo de vetores do tipo  $\mathcal{P}_F$ .*

*Demonstração.* Com efeito, note que

$$\begin{aligned}
 X(F) &= \alpha_{11}x_1 F_{x_1} + \alpha_{22}x_2 F_{x_2} + \alpha_{33}x_3 F_{x_3} \\
 &= (i\alpha_{11} + j\alpha_{22} + k\alpha_{33})x_1^i x_2^j x_3^k = (i\alpha_{11} + j\alpha_{22} + k\alpha_{33})F.
 \end{aligned}$$

$\square$

O lema acima nos permite mostrar o seguinte:

**LEMA 3.4.7.** *Seja  $X$  um campo de vetores do tipo  $\mathcal{P}_F$ . Se  $F = \rho x_1^i x_2^j x_3^k$  e  $F' = \rho' x_1^{i'} x_2^{j'} x_3^{k'}$  são monômios meromorfos de multigrados distintos então o binômio da forma  $F + F'$  não é invariante por  $X$ .*

*Demonstração.* Suponha que o binômio  $F + F'$  seja invariante por  $X$ . Pela demonstração do Lema 3.4.6,

$$X(F + F') = (i\alpha_{11} + j\alpha_{22} + k\alpha_{33})F + (i'\alpha_{11} + j'\alpha_{22} + k'\alpha_{33})F' = \lambda F + \lambda' F'.$$

Por outro lado, se  $F + F'$  fosse invariante por  $X$ , teríamos  $X(F + F') = \mu(F + F')$ , donde  $\mu = \lambda = \lambda'$ . Mas  $\lambda = \lambda'$  se, e somente se,  $i\alpha_{11} + j\alpha_{22} + k\alpha_{33} = i'\alpha_{11} + j'\alpha_{22} + k'\alpha_{33}$ , o que equivale a

$$(i - i')\alpha_{11} + (j - j')\alpha_{22} + (k - k')\alpha_{33} = 0.$$

Teríamos portanto uma ressonância forte para os autovalores  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{22}$  e  $\alpha_{33}$  de  $X$ , o que não é possível.  $\square$

Destacamos que a chave da demonstração do lema anterior é o fato de que se  $F$  e  $F'$  são monômios meromorfos de multigrados distintos então os multiplicadores  $\lambda$  e  $\lambda'$  são diferentes.

Sabemos que

$$X(a/b) = (\alpha_{22} - \alpha_{11})a/b = \mu_1 a/b \tag{3.37}$$

$$X(a/c) = (\alpha_{33} - \alpha_{11})a/c = \mu_2 a/c \tag{3.38}$$

$$X(b/c) = (\alpha_{33} - \alpha_{22})b/c = \mu_3 b/c. \tag{3.39}$$

Essas expressões equivalem a

$$bX(a) - aX(b) = \mu_1 ab$$

$$cX(a) - aX(c) = \mu_2 ac$$

$$cX(b) - bX(c) = \mu_3 bc.$$

Portanto  $bX(a) = a(X(b) + \mu_1 b)$ . Assim, os fatores de  $a$  que não dividem  $b$  dividem  $X(a)$ . De modo análogo, usando a expressão  $cX(a) = a(X(c) + \mu_2 c)$ , concluímos que os fatores

de  $a$  que não dividem  $c$  dividem  $X(a)$ . Como  $a$ ,  $b$  e  $c$  não possuem fatores em comum temos que  $a$  divide  $X(a)$ . Analogamente,  $b$  divide  $X(b)$  e  $c$  divide  $X(c)$ . Ou seja, existem funções  $R_1, R_2, R_3 \in \mathcal{O}_3$  tais que

$$\begin{aligned} X(a) &= R_1 a \\ X(b) &= R_2 b \\ X(c) &= R_3 c. \end{aligned}$$

Das equações (3.37), (3.38) e (3.39) temos

$$\begin{aligned} R_1 - R_2 &= \mu_1 \\ R_1 - R_3 &= \mu_2 \\ R_2 - R_3 &= \mu_3. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Escrevemos, para  $i = 1, 2, 3$ ,  $R_i = (\lambda_i + f_i)$ , onde  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  e  $f_i \in \mathcal{O}_3$  é não unidade. Das relações (3.40), temos

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_2 &= \mu_1 = \alpha_{22} - \alpha_{11} \\ \lambda_1 - \lambda_3 &= \mu_2 = \alpha_{33} - \alpha_{11} \\ \lambda_2 - \lambda_3 &= \mu_3 = \alpha_{33} - \alpha_{22}. \end{aligned}$$

Além disso,  $f_1 = f_2 = f_3 = f$ .

Suponha  $a \neq 0$ . Seja  $a_\nu$  sua parte inicial. Pela equação  $X(a) = (\lambda_1 + f)a$ , tomando a parte inicial dos dois lados dessa expressão e considerando o fato que a derivação por  $X$  preserva o multigrado de cada monômio de  $a$ , temos que

$$X(a_\nu) = \lambda_1 a_\nu.$$

Segue do Lema 3.4.7 que  $a_\nu$  é monomial. Escrevendo

$$a_\nu = b_1 x_1^i x_2^j x_3^k,$$

onde  $i, j, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  e  $b_1 \in \mathbb{C}^*$  temos que  $\lambda_1 = i\alpha_{11} + j\alpha_{22} + k\alpha_{33} \neq 0$ . Propriedades análogas valem para os coeficientes  $b$  e  $c$  quando não nulos.

**AFIRMAÇÃO 3.4.8.** *O monômio  $x_1^i x_2^j x_3^k$  divide  $a$ .*

*Demonstração.* Escreva o desenvolvimento em série de potências  $a = \sum_{l \geq \nu} a_l$ , onde  $a_l$  é

um polinômio homogêneo de grau  $l$ . Mostraremos por indução que todas as parcelas homogêneas  $a_l$  são divisíveis por  $x_1^i x_2^j x_3^k$ . Evidentemente, isso vale para  $a_\nu$ . Seja  $m > \nu$  e suponha que  $a_l$  seja divisível por  $x_1^i x_2^j x_3^k$  para todo  $l = \nu, \dots, m-1$ . Seja  $F$  um monômio de  $a_m$ . Temos que  $X(F) = \lambda F$ . Considere a relação  $X(a) = \lambda_1 a + fa$ . Como  $\lambda_1$  já está determinado por  $a_\nu$  então  $\lambda \neq \lambda_1$ . Destacando os monômios de mesmo multigrado que  $F$  na expressão  $X(a) = \lambda_1 a + fa$ , escrevemos

$$X(F) = \lambda_1 F + \tilde{F}, \quad (3.41)$$

onde  $\tilde{F}$  corresponde aos monômios advindos de  $fa$ . Observe que  $\tilde{F}$  é uma combinação de monômios de  $a$  de ordem menor do que  $m$  cujos coeficientes são monômios de  $f$ . Segue que  $x_1^i x_2^j x_3^k$  divide  $\tilde{F}$ . Reescrevemos a equação (3.41) como  $\lambda F = \lambda_1 F + \tilde{F}$ , implicando em  $(\lambda - \lambda_1)F = \tilde{F}$ . Portanto  $x_1^i x_2^j x_3^k$  divide  $F$ . Concluimos que  $a_m$  é divisível por  $x_1^i x_2^j x_3^k$ , provando o passo geral da indução e finalizando a demonstração. □

Suponha que os coeficientes  $a, b$  e  $c$  de  $\omega$  sejam não nulos. Pela Afirmação 3.4.8, podemos escrever

$$\begin{aligned} a &= x_1^{i_1} x_2^{j_1} x_3^{k_1} (b_1 + g_1) \\ b &= x_1^{i_2} x_2^{j_2} x_3^{k_2} (b_2 + g_2) \\ c &= x_1^{i_3} x_2^{j_3} x_3^{k_3} (b_3 + g_3), \end{aligned}$$

onde  $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{C}^*$  e  $g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{O}_3$  são não unidades. Como  $\omega$  é invariante por  $X$ , temos

$$\alpha_{11} b_1 x_1^{i_1+1} x_2^{j_1} x_3^{k_1} + \alpha_{22} b_2 x_1^{i_2} x_2^{j_2+1} x_3^{k_2} + \alpha_{33} b_3 x_1^{i_3} x_2^{j_3} x_3^{k_3+1} = 0.$$

Isto implica em

$$\begin{aligned} i_1 + 1 &= i_2 = i_3 \\ j_1 &= j_2 + 1 = j_3 \\ k_1 &= k_2 = k_3 + 1. \end{aligned}$$

Como  $a, b, c$  não possuem fatores em comum temos  $i_1 = j_2 = k_3 = 0$ , donde

$$\begin{aligned} i_2 &= i_3 = 1; \\ j_1 &= j_3 = 1; \\ k_1 &= k_2 = 1. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}\omega &= x_2x_3(b_1 + g_1)dx_1 + x_1x_3(b_2 + g_2)dx_2 + x_1x_2(b_3 + g_3)dx_3 \\ &= x_1x_2x_3 \left( (b_1 + g_1)\frac{dx_1}{x_1} + (b_2 + g_2)\frac{dx_2}{x_2} + (b_3 + g_3)\frac{dx_3}{x_3} \right).\end{aligned}\quad (3.42)$$

Se eventualmente um dos coeficientes de  $\omega$  for nulo, por exemplo,  $c = 0$ , argumentos similares mostram que

$$\omega = x_1x_2 \left( (b_1 + g_1)\frac{dx_1}{x_1} + (b_2 + g_2)\frac{dx_2}{x_2} \right).\quad (3.43)$$

Retomamos o caso em que os três coeficientes  $a, b, c$  de  $\omega$  são não nulos e  $\omega$  é dada pela equação (3.42). Observe que  $b_1 + g_1$  é uma unidade em  $\mathcal{O}_3$ . Dividindo a equação (3.42) por  $1 + g_1/b_1$ , podemos reescrever, abusando a notação,

$$\omega = b_1x_2x_3dx_1 + x_1x_3(b_2 + g_2)dx_2 + x_1x_2(b_3 + g_3)dx_3.\quad (3.44)$$

Sabemos por (3.37) que  $X(a/b) = \mu_1 a/b$ . Então  $X(b/a) = -\mu_1 b/a$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{b}{a} &= \frac{x_1}{b_1x_2}(b_2 + g_2) \\ &= \sum_{\substack{i,k \geq 0 \\ j \geq -1}} \alpha_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^k\end{aligned}\quad (3.45)$$

é uma soma de monômios meromorfos. Segue do Lema 3.4.6 que  $b/a$  é monomial. Logo  $g_2 = 0$  e

$$\frac{b}{a} = \frac{b_2x_1}{b_1x_2},$$

implicando em  $b = b_2x_1x_3$ . Analogamente,  $c = b_3x_1x_2$ .

Suponha agora um dos coeficientes de  $\omega$  nulo, por exemplo,  $c = 0$ . Temos

$$\omega = x_2(b_1 + g_1)dx_1 + x_1(b_2 + g_2)dx_2.$$

Dividindo por  $1 + g_1/b_1$ , reescrevemos, abusando a notação,

$$\omega = x_2dx_1 + x_1(b_2 + g_2)dx_2.$$

Então

$$\frac{b}{a} = \frac{x_1}{x_2}(b_2 + g_2)$$

é uma soma de monômios meromorfos invariante por  $X$ . Novamente  $g_2 = 0$  e  $b = b_2x_1$ . Observe neste caso que  $b_1$  e  $b_2$  são não ressonantes. De fato, se existem  $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$  tais que  $p_1b_1 + p_2b_2 = 0$ , a invariância por  $X$  nos dá  $\alpha_{11}b_1 + \alpha_{22}b_2 = 0$ , o que implica em  $p_2\alpha_{11} - p_1\alpha_{22} = 0$ . Isto não é possível pois  $X$  é do tipo  $\mathcal{P}_F$ .

Deste modo, podemos enunciar a seguinte proposição:

**PROPOSIÇÃO 3.4.9.** *Seja  $\omega$  um germe de 1-forma integrável em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  invariante por um campo de vetores do tipo  $\mathcal{P}_F$ . Então, a menos de multiplicação por unidade em  $\mathcal{O}_3$ , podemos escrever*

$$\omega = x_1x_2 \left( b_1 \frac{dx_1}{x_1} + b_2 \frac{dx_2}{x_2} \right) \quad (\text{I})$$

ou

$$\omega = x_1x_2x_3 \left( b_1 \frac{dx_1}{x_1} + b_2 \frac{dx_2}{x_2} + b_3 \frac{dx_3}{x_3} \right), \quad (\text{II})$$

onde  $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{C}^*$ , correspondendo aos tipos dimensionais dois e três, respectivamente. No caso (I), a 1-forma  $\omega$  possui uma singularidade hiperbólica complexa simples em  $0 \in \mathbb{C}^3$ .

### 3.5 FOLHEAÇÕES INVARIANTES POR CAMPOS DE VETORES DO TIPO POINCARÉ FORTEMENTE NÃO RESSONANTES

A forma logarítmica dada em (II) na Proposição 3.4.9 é persistente por blow-ups pontuais ou monoidais em curvas de singularidades. Uma eventual ressonância, ou seja, uma relação do tipo  $mb_1 + nb_2 + pb_3$ , onde  $m, n, p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  não todos nulos, pode ser levantada por blow-ups pontuais ou monoidais conforme as técnicas de dessingularização de folheação de codimensão um em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  (veja [Can04, Duq15]). Como consequência temos a seguinte proposição:

**PROPOSIÇÃO 3.5.1.** *Seja  $\omega$  um germe de 1-forma integrável em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  invariante por um campo de vetores  $X$  do tipo  $\mathcal{P}_F$ . Então  $\omega$  é hiperbólica complexa.*

*Demonstração.* Pela Proposição 3.4.9, se o tipo dimensional for dois então  $\omega$  é hiperbólica complexa simples. Se o tipo dimensional for três então  $\omega$  é necessariamente uma 1-forma do tipo (A) dada em (3.3) com possíveis ressonâncias entre os resíduos. Estas, por sua vez,

podem ser eliminadas por blow-ups pontuais ou monoidais em curvas de singularidades, obtendo singularidades simples do tipo hiperbólico complexo. Assim sendo, concluímos que  $\omega$  é hiperbólica complexa.  $\square$

Suponha, como antes,  $\mathcal{G}$  uma folheação de codimensão um em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  invariante por uma folheação  $\mathcal{F}$  de dimensão um. Em relação à proposição anterior, é possível enfraquecer as hipóteses sobre  $\mathcal{F}$  da seguinte maneira:

**PROPOSIÇÃO 3.5.2.** *Seja  $\mathcal{F}$  um germe de folheação holomorfa de dimensão um em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  que possui uma resolução por blow-ups pontuais não dicríticos contendo apenas singularidades do tipo  $\mathcal{P}_F$ . Seja  $\mathcal{G}$  um germe de folheação de codimensão um em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  simples e invariante por  $\mathcal{F}$ . Então  $\mathcal{G}$  é uma folheação hiperbólica complexa.*

*Demonstração.* Se a folheação  $\mathcal{G}$  não é hiperbólica complexa então ela possui uma curva  $\gamma$  contida no conjunto singular cujos modelos transversais são do tipo sela-nó. Seja  $\pi$  a sequência de blow-ups que dessingulariza  $\mathcal{F}$ . O transformado  $\pi^*\gamma$  encontra transversalmente o divisor de dessingularização de  $\mathcal{F}$  em um ponto  $p$ . Esta é singularidade para  $\pi^*\mathcal{F}$ , pois  $\pi^*\gamma$  e o divisor de dessingularização são invariantes por  $\pi^*\mathcal{F}$ . Mas  $\pi^*\mathcal{F}$  é do tipo  $\mathcal{P}_F$  em  $p$ . Pela Proposição 3.5.1,  $\pi^*\mathcal{G}$  é hiperbólica complexa em  $p$ . Isso é um absurdo, pois  $\pi^*\mathcal{G}$  tem estrutura transversal do tipo sela-nó ao longo de  $\pi^*\gamma$ .  $\square$

De maneira mais geral é válido o seguinte teorema:

**TEOREMA C.** *Seja  $\mathcal{F}$  um germe de folheação de dimensão um em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  com singularidade isolada em  $0 \in \mathbb{C}^3$ . Suponha que  $\mathcal{F}$  possua uma dessingularização por blow-ups pontuais não dicríticos em que todas as singularidades são do tipo  $\mathcal{P}_F$ . Se  $\mathcal{G}$  é um germe de folheação de codimensão um em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  invariante por  $\mathcal{F}$ , então  $\mathcal{G}$  é hiperbólica complexa.*

*Demonstração.* A demonstração será feita por indução no número mínimo de blow-ups pontuais não dicríticos que dessingularizam  $\mathcal{F}$  resultando em singularidades simples do tipo  $\mathcal{P}_F$ . Para  $n = 0$  o resultado é verdadeiro pela Proposição 3.5.1. Seja  $n > 0$  o número de blow-ups que dessingularizam  $\mathcal{F}$  e suponha o resultado verdadeiro para folheações de dimensão um que se dessingularizam por  $n - 1$  blow-ups ou menos. Seja  $\pi : (M, E) \rightarrow$

$(\mathbb{C}^3, 0)$  o primeiro blow-up puntual da dessingularização de  $\mathcal{F}$ . Como  $\pi$  é não dicrítico, o divisor  $E \simeq \mathbb{P}^2$  é invariante por  $\mathcal{F}_1 = \pi^*\mathcal{F}$ .

Seja  $p \in E$  tal que  $p \in \text{Sing}(\mathcal{G}_1)$ , onde  $\mathcal{G}_1 = \pi^*\mathcal{G}$ . Se  $p \in \text{Sing}(\mathcal{F}_1)$ , pela hipótese de indução, temos que  $\mathcal{G}_1$  é hiperbólica complexa. Se  $p$  é regular para  $\mathcal{F}_1$ , então  $\mathcal{G}_1$  tem tipo dimensional dois e existe uma curva analítica  $\gamma \subset \text{Sing}(\mathcal{G}_1)$  suave em  $p$ . Como  $E$  é invariante por  $\mathcal{F}_1$  temos que  $\gamma \subset E \simeq \mathbb{P}^2$  é algébrica. Como  $\mathcal{F}_1$  é tangente a  $\mathcal{G}_1$ , então  $\gamma$  é invariante por  $\mathcal{F}_1|_E$ . Pelo Teorema da soma de índices de Camacho-Sad, (veja Teorema 1.1.17),  $\gamma$  contém pelo menos uma singularidade  $q$  de  $\mathcal{F}_1|_E$ . Evidentemente  $q \in \text{Sing}(\mathcal{F}_1)$ . Pela hipótese de indução,  $q$  é do tipo hiperbólico complexo para  $\mathcal{G}_1$ . Em vista disso, o modelo transversal de  $\mathcal{G}_1$  ao longo de  $\gamma$  é do tipo hiperbólico complexo. Deste modo,  $\mathcal{G}_1$  é do tipo hiperbólico complexo em  $p$ . Então cada singularidade de  $\mathcal{G}_1$  sobre  $E$  é do tipo hiperbólico complexo, possuindo assim uma dessingularização do tipo hiperbólico complexo. Segue da Proposição 3.3.6, que a folheação  $\mathcal{G}$  é hiperbólica complexa.  $\square$



---

## CAMPOS TANGENTES A FEIXES LINEARES DE FOLHEAÇÕES

---

Existe uma conjectura devido a M. Brunella afirmando que, se  $\mathcal{G}$  é uma folheação de codimensão um em  $\mathbb{P}^3$ , então uma das alternativas ocorre:

- (a)  $\mathcal{G}$  deixa uma superfície algébrica invariante;
- (b)  $\mathcal{G}$  é invariante por uma folheação holomorfa  $\mathcal{F}$  por curvas algébricas.

Em (b), queremos dizer que o fecho de cada folha de  $\mathcal{F}$  é uma curva algébrica. Em [Cer02], D. Cerveau mostrou o seguinte resultado:

**TEOREMA 4.0.1.** *Seja  $\mathcal{G}$  uma folheação de codimensão um em  $\mathbb{P}^3$  que pertence a um feixe linear de folheações. Então,  $\mathcal{G}$  satisfaz (a) ou (b) acima.*

Nosso objetivo neste capítulo é explorar uma versão local da situação geométrica tratada no teorema acima. Mostraremos essencialmente que um germe de campo de vetores tangente a três folheações independentes é tangente a um feixe linear de folheações e, como consequência, possui superfícies invariantes.

### 4.1 FEIXE LINEARES DE FOLHEAÇÕES

Sejam  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$  duas folheações em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  induzidas por germes de 1-formas integráveis  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . Dizemos que  $\omega_1$  e  $\omega_2$  definem um *feixe linear* ou um *pencil* de folheações se, e somente se,  $\omega = \omega_1 + t\omega_2$  é integrável para todo  $t \in \mathbb{C}$ . Isto nos diz que

$$\begin{aligned} 0 = \omega \wedge d\omega &= (\omega_1 + t\omega_2) \wedge (d\omega_1 + td\omega_2) \\ &= t(\omega_1 \wedge d\omega_2 + \omega_2 \wedge d\omega_1) \forall t \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

o que equivale a

$$\omega_1 \wedge d\omega_2 + \omega_2 \wedge d\omega_1 = 0. \quad (4.1)$$

**DEFINIÇÃO 4.1.1.** Sejam  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$  duas folheações linearmente independentes em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  induzidas por germes de 1-formas integráveis  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . Considere a 2-forma  $\omega_1 \wedge \omega_2$  a qual pode ser nula em um conjunto de codimensão um, correspondendo ao conjunto de tangências entre  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$ , e denote por  $f = 0$  a equação das componentes de codimensão um para este conjunto. O eixo de  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$  é a folheação  $\mathcal{F}$ , de dimensão um em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ , induzida por  $\eta = \frac{1}{f}\omega_1 \wedge \omega_2$ . Observe que  $\mathcal{F}$  é simultaneamente tangente a  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$ .

Seja  $X$  um germe de campo de vetores em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  tangente a três germes de folheações definidas por 1-formas holomorfas  $\omega_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij}dx_j$  com  $i = 1, 2, 3$ . Denote por

$$T_{ij} = \text{Tang}(\omega_i, \omega_j) = \omega_i \wedge \omega_j = 0$$

o conjunto de tangências entre  $\omega_i$  e  $\omega_j$ . Considere ainda

$$S = \text{Sing}(X) \cup \text{Sing}(\omega_1) \cup \text{Sing}(\omega_2) \cup \text{Sing}(\omega_3).$$

Observe que  $\text{codim}(S) \geq 2$ . Defina

$$\eta_{ij} = \omega_i \wedge \omega_j = A_{ij}dx_1 \wedge dx_2 + B_{ij}dx_1 \wedge dx_3 + C_{ij}dx_2 \wedge dx_3.$$

Evidentemente

$$T_{ij} = \{A_{ij} = B_{ij} = C_{ij} = 0\} = \text{Sing}(\eta_{ij}).$$

Escreva

$$T = \bigcup T_{ij}. \quad (4.2)$$

Para cada  $p \notin S \cup T$ , temos três 1-formas  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , são não singulares, transversais duas a duas e tangentes ao campo não singular  $X$ . Temos que  $\omega_1, \omega_2$  e  $\omega_3$  definem equações de espaços bidimensionais que contém um espaço unidimensional em comum. Assim, por álgebra linear elementar, podemos escrever

$$\omega_3 = \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2, \quad (4.3)$$

onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são funções complexas definidas fora de  $S \cup T$ . Isto posto, podemos enunciar a seguinte proposição:

**PROPOSIÇÃO 4.1.2.** *Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  satisfazem (4.3) então  $\lambda_1, \lambda_2$  definem, em vizinhança de  $0 \in \mathbb{C}^3$ , funções holomorfas fora de  $T$ . Além do mais,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  se estendem a germes de funções meromorfas em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  que ainda satisfazem (4.3).*

*Demonstração.* Como

$$\omega_3 = \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2$$

em  $\mathbb{C}^3 \setminus (S \cup T)$ , então

$$\omega_3 \wedge \omega_2 = \lambda_1 \omega_1 \wedge \omega_2.$$

Observe que  $\lambda_1$  é definida pelo quociente entre coeficientes correspondentes de  $\omega_3 \wedge \omega_2$  e  $\omega_1 \wedge \omega_2$ . Portanto  $\lambda_1$  é holomorfa fora de  $T$ . Este resultado também nos permite concluir que  $\lambda_1$  se estende a uma função meromorfa em vizinhança de  $0 \in \mathbb{C}^3$ . O resultado para  $\lambda_2$  segue de modo análogo.  $\square$

A partir do seguinte lema, podemos concluir que sob certas hipóteses, se três formas integráveis são invariantes por um campo de vetores então estas três formas pertencem a um feixe linear.

**LEMA 4.1.3.** *Sejam  $\omega_1$  e  $\omega_2$  germes de 1-formas holomorfas em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  satisfazendo  $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$ . Suponha que  $\text{Sing}(\omega_1)$  e  $\text{Sing}(\omega_2)$  não têm componente comum de codimensão um. Então o elemento genérico do feixe linear de 1-formas*

$$\{\alpha \omega_1 + \beta \omega_2; (\alpha : \beta) \in \mathbb{P}^1\},$$

*ou seja, fora de um conjunto finito de pontos  $(\alpha : \beta) \in \mathbb{P}^1$ , tem conjunto singular de codimensão pelo menos dois.*

*Demonstração.* Escrevemos

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^3 A_i dx_i \quad \text{e} \quad \omega_2 = \sum_{i=1}^3 B_i dx_i,$$

onde  $A_i, B_i \in \mathcal{O}_3$ . Vamos supor, por absurdo, o resultado falso. Então, para  $t$  genérico, a 1-forma  $\omega_t = \omega_1 + t\omega_2$  tem componente de codimensão um em seu conjunto singular. Para cada um desses valores de  $t$ , seja  $g_t = 0$  a equação dessa componente, onde  $g_t \in \mathcal{O}_3$  é não unidade e irredutível. Para cada par  $i, j$ , com  $1 \leq i, j \leq 3$ , temos que  $A_i + tB_i$  e  $A_j + tB_j$  se anulam sobre  $\{g_t = 0\}$ . Se  $g_t$  não é fator comum de  $B_i$  e  $B_j$ , então  $A_i/B_i = -t = A_j/B_j$  sobre  $\{g_t = 0\}$ , o que implica em  $A_i B_j - A_j B_i = 0$  sobre  $\{g_t = 0\}$ . O mesmo vale se  $g_t$  é um fator de  $B_i$  (ou de  $B_j$ ), visto que, nesse caso, também será fator de  $A_i$  (ou  $A_j$ ). Em qualquer dos casos, temos que  $g_t$  é um fator  $A_i B_j - A_j B_i$ . Finalmente, a hipótese sobre os conjuntos singulares de  $\omega_1$  e de  $\omega_2$  implica que, variando  $t$ , existem infinitas dessas funções  $g_t$ . Isso resulta em  $A_i B_j - A_j B_i = 0$ , ou seja,  $A_i/B_i = A_j/B_j = \Phi$ , onde  $\Phi$  é um germe de função meromorfa. Variando  $i$  e  $j$ , concluímos que  $\omega_1 = \Phi\omega_2$ , o que contradiz  $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$ .  $\square$

**PROPOSIÇÃO 4.1.4.** *Sejam  $\omega_1, \omega_2$  e  $\omega_3$  três 1-formas integráveis com  $\text{codim Sing}(\omega_i) \geq 2$ , para  $i = 1, 2$  e  $3$ , invariantes por um germe de campo de vetores  $X$ . Então as 1-formas  $\omega_1, \omega_2$  e  $\omega_3$  definem folheações que estão em um feixe linear.*

*Demonstração.* Pela Proposição 4.1.2, temos  $\omega_3 = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2$ , onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são germes de funções meromorfas em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ . Escreva  $\lambda_i = \frac{\psi_i}{\varphi_i}, i = 1, 2$  com  $\psi_i, \varphi_i \in \mathcal{O}_3$  sem fatores em comum. Seja  $\varphi = m.m.c.(\varphi_1, \varphi_2)$ . Assim temos

$$\varphi\omega_3 = \varphi\lambda_1\omega_1 + \varphi\lambda_2\omega_2.$$

Escrevendo

$$\eta_1 = \varphi\lambda_1\omega_1, \quad \eta_2 = \varphi\lambda_2\omega_2 \quad \text{e} \quad \eta_3 = \varphi\omega_3$$

temos

$$\eta_3 = \eta_1 + \eta_2. \tag{4.4}$$

Observe que se  $\omega \in \mathcal{O}_3$  é integrável e  $\lambda \in \mathcal{O}_3$  então  $\lambda\omega$  é integrável. De fato,

$$\lambda\omega \wedge d(\lambda\omega) = \lambda^2\omega \wedge d\omega = 0.$$

Portanto  $\eta_1, \eta_2$  e  $\eta_3$  são 1-formas holomorfas integráveis que definem as folheações  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  e  $\mathcal{G}_3$ , respectivamente. Possivelmente, podemos ter  $\text{codim } \text{Sing}(\eta_i) = 1$  para  $i = 1, 2, 3$ . Da relação (4.4), obtemos a condição algébrica do feixe linear:

$$\eta_1 \wedge d\eta_2 + \eta_2 \wedge d\eta_1 = 0.$$

Para mostrar que  $\eta_1$  e  $\eta_2$  definem de fato um feixe linear de folheações, é suficiente mostrar que, para  $(\alpha : \beta) \in \mathbb{P}^1$  genérico,  $\alpha\eta_1 + \beta\eta_2$  tem conjunto singular de codimensão dois. Pelo lema anterior basta mostrar que  $\text{Sing}(\eta_1)$  e  $\text{Sing}(\eta_2)$  não têm componente comum de codimensão um. Com efeito,  $\psi_1$  e  $\psi_2$  não têm fatores comuns, pois, caso contrário,  $\text{Sing}(\omega_3)$  teria componente de codimensão um. Assim, as possíveis componentes de codimensão um comuns de  $\eta_1$  e  $\eta_2$  são os zeros de  $\varphi = m.m.c.\{\varphi_1, \varphi_2\}$ . Mas pela definição de *m.m.c.*, temos que  $\varphi/\varphi_1$  e  $\varphi/\varphi_2$  não possuem fatores em comum. Conclui-se a demonstração observando que não há zeros em comum entre  $\varphi$  e cada  $\lambda_i, i = 1, 2$ , pois  $\varphi = m.m.c.(\varphi_1, \varphi_2)$  e cada par  $\psi_i, \varphi_i$  foi escolhido sem fatores em comum.

□

Desta forma, podemos concluir que

**PROPOSIÇÃO 4.1.5.** *Sejam  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  e  $\mathcal{G}_3$  três folheações dadas por 1-formas integráveis invariantes por um germe de campo de vetores  $X$  em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ . Então  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  e  $\mathcal{G}_3$  são elementos de um feixe linear de folheações.*

## 4.2 A CURVATURA DE UM FEIXE LINEAR

O desenvolvimento que faremos a seguir é uma adaptação para o contexto local do trabalho de D. Cerveau [Cer02]. Consideremos a situação descrita na Proposição 4.1.5, em que o germe de campo de vetores  $X$  é tangente a todas as folheações de uma feixe linear  $\mathcal{L}$ .

**PROPOSIÇÃO 4.2.1.** *Seja  $\omega$  uma 1-forma holomorfa integrável em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ . Então existe 1-forma meromorfa  $\theta$  tal que*

$$d\omega = \theta \wedge \omega. \tag{4.5}$$

*Demonstração.* Como  $\omega$  é integrável, temos  $\omega \wedge d\omega = 0$ . Seja  $Y$  um campo meromorfo tal

que  $i_Y\omega = 1$ . Contraindo ambos os lados da equação anterior pelo campo  $Y$ , temos

$$0 = d\omega - \omega \wedge i_Y d\omega.$$

Assim, encontramos  $d\omega = \omega \wedge i_Y d\omega$ . Faça  $\theta = -i_Y d\omega$ . □

Se tomarmos  $\eta_1$  e  $\eta_2$  definidas como na Proposição 4.1.4, temos que  $\eta_1$  e  $\eta_2$  definem um feixe linear de folheações. Encontramos pela proposição anterior, 1-formas meromorfas  $\theta_1$  e  $\theta_2$  tais que

$$d\eta_i = \theta_i \wedge \eta_i \text{ para } i = 1, 2. \quad (4.6)$$

Usando a equação da condição do feixe linear (4.1), temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \eta_1 \wedge d\eta_2 + \eta_2 \wedge d\eta_1 \\ &= \eta_1 \wedge \theta_2 \wedge \eta_2 + \eta_2 \wedge \theta_1 \wedge \eta_1 \\ &= (\theta_1 - \theta_2) \wedge \eta_1 \wedge \eta_2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Da equação (4.7), repetindo os argumentos da Proposição 4.1.2, encontramos funções meromorfas  $g_1, g_2$  tais que

$$\theta_1 - \theta_2 = g_1\eta_1 - g_2\eta_2. \quad (4.8)$$

Definimos  $\theta = \theta_1 - g_1\eta_1 = \theta_2 - g_2\eta_2$ . Se  $\eta_{(a,b)} = a\eta_1 + b\eta_2$  é um elemento do feixe linear gerado por  $\eta_1$  e  $\eta_2$  então  $d\eta_{(a,b)} = \theta \wedge \eta_{(a,b)}$ . De fato, usando as relações (4.6) e (4.8)

$$\begin{aligned} \theta \wedge \eta_{(a,b)} &= (\theta_1 - g_1\eta_1) \wedge (a\eta_1 + b\eta_2) \\ &= a\theta_1 \wedge \eta_1 + b\theta_1 \wedge \eta_2 - bg_1\eta_1 \wedge \eta_2 \\ &= ad\eta_1 + b(g_1\eta_1 + \theta_2 - g_2\eta_2) \wedge \eta_2 - bg_1\eta_1 \wedge \eta_2 \\ &= ad\eta_1 + bd\eta_2 = d\eta_{(a,b)}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Deste modo podemos enunciar a seguinte proposição:

**PROPOSIÇÃO 4.2.2.** *Seja  $\mathcal{L}$  um feixe linear de folheações em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ . Então existe uma 1-forma meromorfa  $\theta$  tal que  $d\eta = \theta \wedge \eta$  para toda  $\eta \in \mathcal{L}$ .*

**DEFINIÇÃO 4.2.3.** A 2-forma meromorfa  $d\theta$  é chamada de *curvatura* do feixe linear e será denotada por  $k(\mathcal{L})$ .

Vamos analisar separadamente as situações em que a curvatura do feixe linear é nula e não nula.

**Caso1:** Suponha  $k(\mathcal{L}) = 0$ , ou seja, a 1-forma  $\theta$  é fechada. Separaremos em dois subcasos:

(i) Suponha  $\theta$  meromorfa pura. Então, por [MM80], podemos escrever

$$\theta = \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{df_i}{f_i} + d \left( \frac{h}{f_1^{n_1} \cdots f_k^{n_k}} \right),$$

onde  $h, f_i$  são germes de funções holomorfas, sendo cada  $f_i$  irredutível, dois a dois primos entre si,  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ,  $n_i \in \mathbb{N}$  para  $i = 1, \dots, k$ . Além do mais, se  $n_i > 0$ ,  $f_i$  não divide  $h$ . Mostraremos que, se  $\omega$  é uma 1-forma pertencente ao feixe linear, então o conjunto polar de  $\theta$  é invariante por  $\omega$  e, portanto, também é invariante por  $X$ . Para cada ponto  $p$  liso no conjunto polar de  $\theta$ , podemos tomar coordenadas em torno de  $p$  de forma que conjunto polar seja escrito como  $(\theta)_\infty = \{x_1 = 0\}$ . Então podemos escrever

$$\begin{aligned} \theta &= \lambda \frac{dx_1}{x_1} + d \left( \frac{\xi}{x_1^k} \right) \\ &= \lambda \frac{dx_1}{x_1} - k \frac{\xi}{x_1^{k+1}} dx_1 + \frac{1}{x_1^k} d\xi, \end{aligned}$$

onde  $\xi \in \mathcal{O}_3$  e  $x_1$  não divide  $\xi$  se  $k > 0$ . Se  $\omega$  é um elemento do feixe linear, temos

$$\begin{aligned} d\omega = \theta \wedge \omega &= \left( \lambda \frac{dx_1}{x_1} - k \frac{\xi}{x_1^{k+1}} dx_1 + \frac{1}{x_1^k} d\xi \right) \wedge \omega \\ &= \frac{\lambda}{x_1} dx_1 \wedge \omega - k \frac{\xi}{x_1^{k+1}} dx_1 \wedge \omega + \frac{1}{x_1^k} d\xi \wedge \omega. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Se  $k > 0$  então  $x_1 = 0$  é pólo de ordem  $k + 1$  de  $\theta$ . Comparando as ordens dos pólos das três parcelas do lado direito temos que  $-k \frac{\xi}{x_1^{k+1}} dx_1 \wedge \omega$  não pode ter pólo de ordem  $k + 1$ , pois o lado esquerdo é holomorfo. Portanto,  $x_1$  divide  $dx_1 \wedge \omega$ . Agora, se  $k \leq 0$  e  $\lambda \neq 0$ , então  $x_1 = 0$  é pólo simples de  $d\omega$  e, como as duas últimas parcelas do lado direito da igualdade são holomorfas,  $x_1$  divide  $dx_1 \wedge \omega$ . Logo, as componentes do conjunto de pólos de  $\theta$  são superfícies invariantes pelos elementos do feixe linear  $\mathcal{L}$ . Consequentemente, o campo de vetores  $X$ , tangente a todas as folheações de  $\mathcal{L}$ , possui superfície invariante.

(ii) Suponha agora  $\theta$  holomorfa. Seja  $\omega$  uma 1-forma do feixe linear  $\mathcal{L}$ . Como temos

$d\theta = 0$ , podemos escrever  $\theta = dh$ , onde  $h \in \mathcal{O}_3$ . Portanto

$$d\omega = \theta \wedge \omega = dh \wedge \omega. \quad (4.11)$$

Fazendo  $h' = \exp(h)$ , temos

$$dh' = \exp(h)dh = h'dh.$$

Substituindo em (4.11), temos

$$d\omega = \frac{dh'}{h'} \wedge \omega. \quad (4.12)$$

Escrevemos

$$\omega' = \frac{1}{h'}\omega. \quad (4.13)$$

Diferenciando a equação acima e aplicando a relação (4.12), temos

$$\begin{aligned} d\omega' &= -\frac{dh'}{h'^2} \wedge \omega + \frac{1}{h'}d\omega \\ &= \frac{1}{h'} \left( -\frac{dh'}{h'} \wedge \omega + d\omega \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Assim,  $\omega'$  é uma 1-forma holomorfa fechada que define a mesma folheação que  $\omega$ . Isto implica que  $\omega' = df$  para algum germe de função  $f \in \mathcal{O}_3$  tal que  $f(0) = 0$ . Portanto, tanto  $\omega$  quanto  $X$  possuem integral primeira holomorfa. Em particular, a superfície  $f = 0$  é invariante por  $X$ . Neste caso, todas as folheações do feixe linear possuem integral primeira holomorfa.

**Caso2:** Suponha agora que  $k(\mathcal{L}) \neq 0$ . Lembrando que

$$d\eta_i = \theta \wedge \eta_i, \quad i = 1, 2, \quad (4.15)$$

tomando a diferencial em ambos os lados, temos para  $i = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= d\theta \wedge \eta_i - \theta \wedge d\eta_i \\ &= d\theta \wedge \eta_i - \theta \wedge \theta \wedge \eta_i \\ &= d\theta \wedge \eta_i. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Escrevemos  $\eta_i = \alpha_i \omega_i$  para  $i = 1, 2$  onde  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são germes de funções holomorfas, enquanto  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são 1-formas com  $\text{codim } \text{Sing}(\omega_i) \geq 2$ . Usando (4.16) temos

$$d\theta \wedge \omega_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.17)$$

Tome  $q$  um ponto próximo de  $0 \in \mathbb{C}^3$  tal que  $\omega_1 \wedge \omega_2(q) \neq 0$ , ou seja, de modo que  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são não singulares e independentes em vizinhança de  $q$ . Assim podemos tomar  $(x_1, x_2, x_3)$  coordenadas locais em  $q$  nas quais escrevemos  $\omega_1 = A_1 dx_1$  e  $\omega_2 = A_2 dx_2$  com  $A_1, A_2 \in \mathcal{O}_q^*$ .

**AFIRMAÇÃO 4.2.4.** *Existe  $\alpha$  meromorfo em torno de  $0 \in \mathbb{C}^3$  tal que*

$$d\theta = \alpha \eta_1 \wedge \eta_2. \quad (4.18)$$

*Demonstração.* Com efeito, escreva  $d\theta = B_1 dx_1 \wedge dx_2 + B_2 dx_2 \wedge dx_3 + B_3 dx_1 \wedge dx_3$  onde  $B_1, B_2$  e  $B_3$  são germes de funções meromorfas. Como  $d\theta \wedge \omega_1 = 0$  e  $d\theta \wedge \omega_2 = 0$  devemos ter  $B_2 = 0$  e  $B_3 = 0$ . Portanto

$$d\theta = B_1 dx_1 \wedge dx_2 = \frac{B_1}{A_1 A_2} A_1 A_2 dx_1 \wedge dx_2 = \tilde{\alpha} \omega_1 \wedge \omega_2, \quad (4.19)$$

onde  $\tilde{\alpha}$  é um germe de função meromorfa. Como  $\eta_1 = \alpha_1 \omega_1$  e  $\eta_2 = \alpha_2 \omega_2$ , podemos escrever

$$d\theta = \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_1 \alpha_2} \eta_1 \wedge \eta_2. \quad (4.20)$$

Mostramos portanto que  $d\theta$  e  $\eta_1 \wedge \eta_2$  são colineares em todo ponto fora do conjunto de tangências de  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . Repetindo mais uma vez o argumento da Proposição 4.1.2, concluímos que existe um germe de função meromorfa em  $0 \in \mathbb{C}^3$ , que denotaremos por  $\alpha$ , tal que  $d\theta = \alpha \eta_1 \wedge \eta_2$ , provando a afirmação.  $\square$

Com a mesma notação da afirmação anterior, enunciamos:

**PROPOSIÇÃO 4.2.5.** *Se a função  $\alpha$  definida em (4.18) é constante então existe integral primeira meromorfa, possivelmente holomorfa, para o eixo do feixe linear de  $X$ . Em particular, o campo de vetores  $X$  possui superfície invariante.*

*Demonstração.* Como  $k(\mathcal{L}) \neq 0$ , temos que  $\alpha$  é não nula. Supondo  $\alpha$  constante, derivando a equação (4.18), temos

$$0 = \alpha(d\eta_1 \wedge \eta_2 - \eta_1 \wedge d\eta_2) \quad (4.21)$$

e, por conseguinte,

$$\eta_2 \wedge d\eta_1 - \eta_1 \wedge d\eta_2 = 0. \quad (4.22)$$

Usando a condição do feixe linear, dada pela equação

$$\eta_1 \wedge d\eta_2 + \eta_2 \wedge d\eta_1 = 0,$$

obtemos

$$\eta_2 \wedge d\eta_1 = \eta_1 \wedge d\eta_2 = 0. \quad (4.23)$$

Usando (4.15) temos que  $\theta \wedge \eta_1 \wedge \eta_2 = 0$ . Assim, existem  $\mu_1$  e  $\mu_2$  germes de funções meromorfas na origem de  $\mathbb{C}^3$  tais que

$$\theta = \mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2. \quad (4.24)$$

Pela equação (4.6), temos que

$$d\eta_1 = \theta \wedge \eta_1 = -\mu_2 \eta_1 \wedge \eta_2 \quad (4.25)$$

e

$$d\eta_2 = \theta \wedge \eta_2 = \mu_1 \eta_1 \wedge \eta_2. \quad (4.26)$$

Das equações (4.25) e (4.26) concluímos que

$$d\eta_1 = \frac{-\mu_2}{\mu_1} d\eta_2. \quad (4.27)$$

Derivando a equação acima e usando a equação (4.26) temos

$$\begin{aligned} 0 &= -d(\mu_2/\mu_1) \wedge d\eta_2 \\ &= -\mu_1 d(\mu_2/\mu_1) \wedge \eta_1 \wedge \eta_2. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Se  $\mu_1 = 0$  então  $d\eta_2 = 0$  implicando que um dos geradores do feixe linear é fechado. Assim,  $\eta_2 = d(g)$ , para alguma  $g \in \mathcal{O}_3$  e o eixo do feixe linear possui uma integral primeira holomorfa. Se  $\mu_1 \neq 0$  temos dois casos a analisar. Quando  $\mu_2/\mu_1$  é não constante, então  $\mu_2/\mu_1$  é integral primeira meromorfa para o eixo do feixe linear, cuja com equação é

$\eta_1 \wedge \eta_2 = 0$ . Se  $\mu_2/\mu_1$  é constante, digamos  $\mu_2/\mu_1 = c$ , pela equação (4.27), temos

$$d\eta_1 = -cd\eta_2.$$

Ou seja,  $d(\eta_1 + c\eta_2) = 0$ . Portanto  $\eta_1 + c\eta_2$  é fechada e está no feixe linear. Assim, temos que  $\eta_1 + c\eta_2 = d(h)$  para alguma  $h \in \mathcal{O}_3$ . Nesse caso, também encontramos uma integral primeira holomorfa para o eixo do feixe linear.

□

Vamos supor agora, na equação (4.18),  $\alpha$  não constante. Derivando ambos os lados de (4.18) e usando o fato que  $d\eta_i = \theta \wedge \eta_i$ ,  $i = 1, 2$ , temos

$$\begin{aligned} 0 &= d\alpha \wedge \eta_1 \wedge \eta_2 + \alpha(d\eta_1 \wedge \eta_2 - \eta_1 \wedge d\eta_2) \\ &= d\alpha \wedge \eta_1 \wedge \eta_2 + \alpha(\theta \wedge \eta_1 \wedge \eta_2 - \eta_1 \wedge \theta \wedge \eta_2) \\ &= (d\alpha + 2\alpha\theta) \wedge \eta_1 \wedge \eta_2. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Logo, podemos escrever

$$\frac{d\alpha}{2\alpha} + \theta = k_1\eta_1 + k_2\eta_2, \quad (4.30)$$

onde  $k_1$  e  $k_2$  são germes de funções meromorfas em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ . Vemos que pelo menos um dentre  $k_1$  e  $k_2$  é não nulo, pois caso contrário, teríamos  $\theta = -d\alpha/2\alpha$ , ou seja,  $d\theta = 0$ , que não é o caso.

Derivando ambos os lados da equação (4.30) e usando o fato que  $d\eta_i = \theta \wedge \eta_i$ , para  $i = 1, 2$ , temos

$$\begin{aligned} d\theta &= k_1d\eta_1 + k_2d\eta_2 + dk_1 \wedge \eta_1 + dk_2 \wedge \eta_2 \\ &= k_1\theta \wedge \eta_1 + k_2\theta \wedge \eta_2 + dk_1 \wedge \eta_1 + dk_2 \wedge \eta_2 \\ &= (k_1\theta + dk_1) \wedge \eta_1 + (k_2\theta + dk_2) \wedge \eta_2. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Tomando o produto exterior por  $\eta_1$  e  $\eta_2$  e usando a equação (4.18) temos, respectivamente,

$$\left( \theta + \frac{dk_2}{k_2} \right) \wedge \eta_1 \wedge \eta_2 = 0 \quad (4.32)$$

e

$$\left(\theta + \frac{dk_1}{k_1}\right) \wedge \eta_1 \wedge \eta_2 = 0. \quad (4.33)$$

Subtraindo a equação (4.29) de cada uma das equações acima, obtemos

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{dk_2}{k_2}\right) \wedge \eta_1 \wedge \eta_2 = 0 \quad (4.34)$$

e

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{dk_1}{k_1}\right) \wedge \eta_1 \wedge \eta_2 = 0. \quad (4.35)$$

Visto que,  $\eta_1 \wedge \eta_2$  induz a mesma folheação que  $X$  temos:

**PROPOSIÇÃO 4.2.6.** *As funções meromorfas,  $k_1^2/\alpha$ ,  $k_2^2/\alpha$  e  $k_1/k_2$  são constantes sobre as órbitas de  $X$ .*

No caso em que as três funções dadas na proposição acima são constantes, mostramos no seguinte resultado que existe uma folheação no feixe linear com fator integrante meromorfo.

**PROPOSIÇÃO 4.2.7.** *Se  $k_1^2/\alpha$ ,  $k_2^2/\alpha$  e  $k_1/k_2$  são todas constantes, então existe uma folheação no feixe linear dada por 1-forma meromorfa fechada. Portanto  $X$  possui superfície invariante.*

*Demonstração.* Suponha  $k_1^2/\alpha$ ,  $k_2^2/\alpha$  e  $k_1/k_2$  constantes. Escreva  $k_1/k_2 = c_1$ . Então

$$\begin{aligned} d(c_1\eta_1 + \eta_2) &= c_1d\eta_1 + d\eta_2 \\ &= c_1\theta \wedge \eta_1 + \theta \wedge \eta_2 \\ &= \theta \wedge (c_1\eta_1 + \eta_2). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Por outro lado, pela equação (4.30)

$$\frac{d\alpha}{2\alpha} + \theta = k_2(c_1\eta_1 + \eta_2). \quad (4.37)$$

Isto implica que

$$\frac{dk_2}{k_2} + \theta = k_2(c_1\eta_1 + \eta_2) \quad (4.38)$$

pois  $k_2^2/\alpha$  é constante. Assim, podemos escrever

$$\theta = -\frac{dk_2}{k_2} + k_2(c_1\eta_1 + \eta_2).$$

Portanto, da equação (4.36) temos

$$d(c_1\eta_1 + \eta_2) = -\frac{dk_2}{k_2} \wedge (c_1\eta_1 + \eta_2). \quad (4.39)$$

Observe que a forma  $\eta = k_2(c_1\eta_1 + \eta_2)$  é fechada. De fato,

$$\begin{aligned} d\eta &= dk_2 \wedge (c_1\eta_1 + \eta_2) + k_2 d(c_1\eta_1 + \eta_2) \\ &= dk_2 \wedge (c_1\eta_1 + \eta_2) + k_2 \left(-\frac{dk_2}{k_2} \wedge (c_1\eta_1 + \eta_2)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto  $c_1\eta_1 + \eta_2$  é definido pela 1-forma meromorfa fechada  $\eta$ . Seus pólos são superfícies invariantes por  $\eta$  e, por conseguinte, invariantes por  $X$ .  $\square$

Seja  $X$  o campo de vetores gerado por  $\eta_1 \wedge \eta_2$ . Como consequência direta das Proposições 4.2.5, 4.2.6 e 4.2.7, temos

**PROPOSIÇÃO 4.2.8.** *Seja  $\mathcal{L}$  um feixe linear de folheações holomorfas com curvatura não nula gerado pelas 1-formas integráveis  $\eta_1$  e  $\eta_2$ . Então ou bem o eixo  $X$  possui integral primeira meromorfa não constante, possivelmente holomorfa, ou bem existe uma folheação no feixe linear definida por uma 1-forma meromorfa fechada. Em ambos os casos  $X$  possui superfície invariante.*

O conjunto de resultados anteriores é sumarizado no seguinte teorema:

**TEOREMA D.** *Seja  $X$  um germe de campo de vetores holomorfo em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  tangente a três folheações independentes. Então  $X$  é tangente a um feixe linear de folheações e, portanto, a infinitas folheações. Além disso,  $X$  possui superfícies invariantes. Mais precisamente, denotando por  $\mathcal{L}$  o feixe linear e por  $k(\mathcal{L})$  sua curvatura, temos:*

- i) *Se  $k(\mathcal{L}) = 0$  então todas as 1-formas do feixe linear  $\mathcal{L}$  possuem fator integrante liouvilliano.*

ii) Se  $k(\mathcal{L}) \neq 0$  então ou bem  $X$  possui integral primeira meromorfa não constante, possivelmente holomorfa, ou bem existe uma folheação em  $\mathcal{L}$  definida por uma 1-forma meromorfa fechada.

Finalizaremos esta seção com um comentário a respeito de campos de vetores tangentes a exatamente duas folheações independentes. Considere  $X$  um germe de campo de vetores em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  possuindo singularidade isolada na origem. Sejam  $\omega_1$  e  $\omega_2$  dois germes de 1-formas integráveis em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  invariantes por  $X$  cujos conjuntos singulares têm codimensão pelo menos dois. Suponha que o campo de vetores  $X$  não possua separatriz. Para  $i = 1, 2$ , temos que  $0 \in \mathbb{C}^3$  é uma singularidade de  $\omega_i$ . De fato, se  $\omega_i$  fosse regular em  $0 \in \mathbb{C}^3$  a restrição de  $X$  à folha de  $\omega_i$  passando por  $0 \in \mathbb{C}^3$  possuiria separatriz pelo Teorema da Separatriz (2.1.1). Além do mais, pela Proposição 1.2.2, essa é a única singularidade de cada 1-forma  $\omega_i, i = 1, 2$ . Então, pelo Teorema de Malgrange [Mal76], podemos escrever  $\omega_i = h_i df_i, i = 1, 2$ , com  $f_1, f_2, h_1, h_2 \in \mathcal{O}_3$ . Observe que cada  $f_i, i = 1, 2$ , é reduzida pois  $\text{codim} \text{Sing}(\omega_i) \geq 2$  e também irredutível, pois caso contrário, existiria uma curva no conjunto singular de  $\omega_i$  e portanto  $X$  possuiria separatriz. Escreva  $S_1 = \{f_1 = 0\}$  e  $S_2 = \{f_2 = 0\}$  superfícies com singularidades na origem. Temos duas possibilidades:

(1)  $S_1 \cap S_2 = \Gamma$  é uma curva.

(2)  $S_1 = S_2$ ;

No caso (1),  $\Gamma$  seria uma separatriz para  $X$ . No caso (2), podemos supor  $S_1 = S_2 : f = 0$ , onde  $f$  é irredutível e com singularidade isolada. Podemos escrever  $f_i = u_i f, i = 1, 2$ , onde  $u_1$  e  $u_2$  são unidades. Então

$$\omega_i = h_i df_i, \text{ para } i = 1, 2. \quad (4.40)$$

Temos que  $\omega_1/h_1 = d(u_1 f)$  e  $\omega_2/h_2 = d(u_2 f)$ . Então

$$\frac{\omega_2}{h_2} + t \frac{\omega_1}{h_1} = d((u_1 + tu_2)f). \quad (4.41)$$

Nesse caso,  $(u_1 + tu_2)f$  define um feixe linear de folheações tangente ao campo de vetores  $X$ .

Das considerações acima enunciamos

**PROPOSIÇÃO 4.2.9.** *Um campo de vetores que deixa invariante exatamente duas folheações independentes possui separatriz.*

### 4.3 CAMPOS HOMOGÊNEOS E O EXEMPLO DE JOUANOLOU

Seja  $X = A\partial/\partial x_1 + B\partial/\partial x_2 + C\partial/\partial x_3$  um campo de vetores homogêneo em  $\mathbb{C}^3$ , ou seja, cujas entradas são polinômios homogêneos de mesmo grau. Defina

$$\omega_X = (Cx_2 - Bx_3)dx_1 + (Ax_3 - Cx_1)dx_2 + (Bx_1 - Ax_2)dx_3.$$

**PROPOSIÇÃO 4.3.1.** *O campo homogêneo  $X$  é tangente à folheação  $\omega_X$ .*

*Demonstração.* Considere a forma volume  $\Omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ . Fazendo a contração de  $\Omega$  por  $X$ , temos que

$$i_X\Omega = Adx_2 \wedge dx_3 - Bdx_1 \wedge dx_3 + Cdx_1 \wedge dx_2.$$

Por outro lado, temos que

$$\omega_X = i_R(i_X\Omega) = (Cx_2 - Bx_3)dx_1 + (Ax_3 - Cx_1)dx_2 + (Bx_1 - Ax_2)dx_3$$

onde  $R$  é o campo radial. Portanto  $i_X\omega_X = i_X(i_R i_X\Omega) = 0$ . A distribuição gerada por  $X$  e  $R$  é a distribuição induzida por  $\omega_X$ . Se  $X$  é homogêneo de grau  $d$ , a dita distribuição é integrável visto que  $[R, X] = (d - 1)X$ .  $\square$

Seja  $f$  um germe de função holomorfa em  $(\mathbb{C}^n, 0)$  de ordem  $\nu$ . Chamaremos de parte inicial de  $f$  e denotaremos por  $f_\nu$ , os termos homogêneos de grau mais baixo no desenvolvimento em série de potências de  $f$ . Analogamente, definimos parte inicial de germes de campos de vetores e de 1-formas holomorfas. Temos

**PROPOSIÇÃO 4.3.2.** *Se o campo de vetores  $X$  é tangente a uma folheação definida pela 1-forma integrável  $\omega$  então a parte inicial de  $X$  é tangente a uma 1-forma homogênea integrável.*

*Demonstração.* Sejam  $X_\nu$  e  $\omega_\mu$  as partes iniciais de  $X$  e  $\omega$ , respectivamente. Temos que  $\omega_\mu \wedge d\omega_\mu$  é a parte inicial de  $\omega \wedge d\omega$ . Portanto  $\omega_\mu \wedge d\omega_\mu = 0$ . Por outro lado,  $i_{X_\nu}\omega_\mu$  é a parte inicial de  $i_X\omega$ . Portanto  $i_{X_\nu}\omega_\mu = 0$ .  $\square$

**PROPOSIÇÃO 4.3.3.** *Se  $X$  possui integral primeira holomorfa então a parte inicial de  $X$  possui integral primeira homogênea.*

*Demonstração.* Se  $X$  possui integral primeira homomorfa  $f \in \mathcal{O}_n$ , temos que  $i_X df = 0$ . Pela proposição anterior, temos  $i_{X_\nu} df_\mu = 0$ , onde  $f_\mu$  e  $X_\nu$  são as partes iniciais de  $f$  e do campo de vetores  $X$ .  $\square$

Considere  $S = \{f = 0\}$ , onde  $f$  é um germe de função holomorfa irreduzível e  $S_\mu = \{f_\mu = 0\}$ , onde  $f_\mu$  é a parte inicial de  $f$ . Com esta notação enunciamos:

**PROPOSIÇÃO 4.3.4.** *Se  $S$  é invariante pelo campo de vetores  $X$  então  $S_\mu$  é invariante pelo campo  $X_\nu$ , onde  $X_\nu$  é a parte inicial de  $X$ .*

*Demonstração.* De fato,  $S$  é invariante por  $X$  se, e somente se,  $i_X df \equiv 0$  sobre  $f = 0$ . Portanto  $i_X df = fh$  para alguma  $h \in \mathcal{O}_n$ . Tomando as partes iniciais de  $X$ ,  $f$  e  $h$ , que denotaremos por  $X_\nu$ ,  $f_\mu$  e  $h_\lambda$ , temos que  $i_{X_\nu} df_\mu = f_\mu h_\lambda$ . Portanto  $f_\mu = 0$  é invariante por  $X_\nu$ .  $\square$

**EXEMPLO 4.3.5.** Considere agora a seguinte 1-forma, conhecida como exemplo de Jouanolou:

$$\omega = (x_1^m x_3 - x_2^{m+1})dx_1 + (x_2^m x_1 - x_3^{m+1})dx_2 + (x_3^m x_2 - x_1^{m+1})dx_3.$$

Considere

$$X = x_3^m \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1^m \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2^m \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Temos  $\omega = i_R(i_X \Omega)$ , onde  $R$  é o campo radial e  $\Omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$  é a forma volume. Como  $i_R \omega = 0$ , a 1-forma  $\omega$  define uma folheação em  $\mathbb{P}^2$ . Essa folheação não possui curvas algébricas invariantes, o que equivale a dizer que  $X$  não possui superfícies homogêneas invariantes [Jou79]. Como consequência,  $X$  não é tangente a um feixe linear de folheações. De fato, se isso ocorresse, pelo Teorema D, o campo de vetores  $X$  seria tangente a uma superfície. Como  $X$  é homogêneo, pela Proposição 4.3.2,  $X$  seria tangente a uma superfície homogênea, o que não é possível.

## Referências Bibliográficas

---

- [BB56] C. Briot and J. Bouquet. Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 21:36, 1856.
- [Can87] F. Cano. Final forms for a three-dimensional vector field under blowing-up. *37(2):151–193*, 1987.
- [Can98] F. Cano. Reduction of the singularities of foliations and applications. *Banach Center Publications*, 44:51–71, 1998.
- [Can04] F. Cano. Reduction of the singularities of codimension one singular foliations in dimension three. *Ann. of Math. (2)*, 160(3):907–1011, 2004.
- [CC92] F. Cano and D. Cerveau. Desingularization of non-dicritical holomorphic foliations and existence of separatrices. *Acta Mathematica*, 169(1):1–103, 1992.
- [Cer02] D. Cerveau. Pinceaux linéaires de feuilletages sur CP (3) et conjecture de Brunella. 46:441–451, 2002.
- [CGSY03] D. Cerveau, E. Ghys, N. Sibony, and J. C. Yoccoz. *Complex dynamics and geometry*, volume 10 of *SMF/AMS Texts and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI; Société Mathématique de France, Paris, 2003. With the collaboration of Marguerite Flexor, Papers from the Meeting “State of the Art of the Research of the Société Mathématique de France” held at the École Normale Supérieure de Lyon, Lyon, January 1997, Translated from the French by Leslie Kay.
- [CLNS84] C. Camacho, A. Lins Neto, and P. Sad. Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields. *Journal of differential geometry*, 20(1):143–174, 1984.

- [CMS04] F. Cano, R. Moussu, and F. Sanz. Pinceaux de courbes intégrales d'un champ de vecteurs analytique. *Astérisque*, 297:1–34, 2004.
- [CR14] F. Cano and C. Roche. Vector fields tangent to foliations and blow-ups. *Journal of Singularities*, 9:43–49, 2014.
- [CRS14] F. Cano, C. Roche, and M. Spivakovsky. Reduction of singularities of three-dimensional line foliations. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 108(1):221–258, 2014.
- [CRVS15] F. Cano, M. Ravara-Vago, and M. Soares. Local Brunella's alternative I. RICH foliations. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (9):2525–2575, 2015.
- [CS82] C. Camacho and P. Sad. Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields. *Ann. of Math. (2)*, 115(3):579–595, 1982.
- [Duq15] M. Duque. Elimination of resonances in codimension one foliations. *Publicacions matemàtiques*, 59(1):75–97, 2015.
- [FE97] J.M. Fernández (Editor). *Ecuaciones diferenciales: singularidades*. 1997.
- [FSMF09] P. Fernández-Sánchez and J. Mozo-Fernández. On generalized surfaces in  $(\mathbb{C}^3, 0)$ . *Astérisque*, (323):261, 2009.
- [GML92] X. Gómez-Mont and I. Luengo. Germs of holomorphic vector fields in  $\mathbb{C}^3$  without a separatrix. *Inventiones mathematicas*, 109(1):211–219, 1992.
- [Jou79] J. P. Jouanolou. *Équations de Pfaff algébriques*, volume 708 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979.
- [LN88] A. Lins Neto. Algebraic solutions of polynomial differential equations and foliations in dimension two. In *Holomorphic dynamics (Mexico, 1986)*, volume 1345 of *Lecture Notes in Math.*, pages 192–232. Springer, Berlin, 1988.
- [Mal76] B. Malgrange. Frobenius avec singularités. I. Codimension un. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 46:163–173, 1976.
- [MM80] J.-F. Mattei and R. Moussu. Holonomie et intégrales premières. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 13(4):469–523, 1980.

- [MP13] M. McQuillan and D. Panazzolo. Almost étale resolution of foliations. *J. Differential Geom.*, 95(2):279–319, 2013.
- [MS15] R. Mol and F. Sanz. Analytic vector fields tangent to foliations and separatrices. *Preprint*, 2015.
- [Pan06] D. Panazzolo. Resolution of singularities of real-analytic vector fields in dimension three. *Acta mathematica*, 197(2):167–289, 2006.
- [Sei68] A. Seidenberg. Reduction of singularities of the differential equation  $A dy = B dx$ . *Amer. J. Math.*, 90:248–269, 1968.