UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

Problemas Envolvendo o Operador Pseudo - Laplaceano

Joel Cruz Ramirez

Belo Horizonte - MG
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

Joel Cruz Ramirez

Orientador:
Prof. Emerson Alves Mendonça de Abreu

Problemas Envolvendo o Operador Pseudo - Laplaceano

Dissertação submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMG, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Belo Horizonte - MG
Fevereiro - 2016

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela vida, saúde, força e tudo de essencial que me permitiu concluir esse trabalho.

A minha familia pela torcida e afeto que sempre me proporcionaram fé e perseverança.

Ao professor Emerson Mendonça que além do apoio e da valiosa orientação sempre me proporcionou tranquilidade.

Aos meus professores, colegas, secretárias da pos e amigos da UFMG.

A CAPES e ao CNPq pelo auxílio financeiro.

Enfim, a todos que de alguma forma contribuíram.

Resumo

Neste trabalho estudaremos o seguinte problema crítico fracionário

$$(P_\lambda) = \begin{cases} (-\Delta)^s u = \lambda u^q + u^{2_s^*-1}, \quad u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um dominio regular limitado, $\lambda > 0$, $0 < s < 1$ e $N > 2s$. Aqui $(-\Delta)^s$ denota o operador laplaceano fracionário, a menos de um fator de normalização, por

$$-(-\Delta)^s u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{N+2s}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Nossos resultados principais mostram a existência e multiplicidade de soluções de (P_λ) para diferentes valores de λ. A dependência deste parâmetro muda de acordo com a maneira ao considerar o caso de potência côncava $(0 < q < 1)$ ou o caso de potência convexa $(1 < q < 2_s^* - 1)$. Estes dois casos vão ser tratados separadamente.

Palavras claves: Laplaceano fracionário; crítico não linear; Teorema Passo da Montanha.

Abstract

In this work we study the following fractional critical problem

$$(P_\lambda) = \begin{cases} (-\Delta)^s u = \lambda u^q + u^{2_s^*-1}, \quad u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a regular bounded domain, $\lambda > 0$, $0 < s < 1$ and $N > 2s$. Here $(-\Delta)^s$ denotes the fractional Laplace operator defined, up to a normalization factor, by

$$-(-\Delta)^s u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{N+2s}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Our main results show the existence and multiplicity of solutions to (P_λ) for different values of λ. The dependency on this parameter changes according to whether we consider the concave power case ($0 < q < 1$) or the convex power case ($1 < q < 2_s^* - 1$). These two cases will be treated separately.

Keywords: Frational Laplacian; critical nonlinearities; Mountain Pass Theorem.

Sumário

Introdução

Nos últimos anos, considerável atenção tem sido dada aos problemas de difusão não local, como por exemplo, aqueles impulsionados pelo operador laplaceano fracionário. Uma das razões para isto é que este operador surge naturalmente em vários fenômenos físicos, como propagação do calor e reação térmica dos líquidos, dinâmicas de população, dinâmica de fluidos geofísicos ou em matemática de finanças. Neste trabalho, enfocaremos nossa atenção a problemas fracionários não locais. Para ser mais preciso, consideramos o seguinte problema crítico não linear com potências côncava e convexa:

$$(P_\lambda) = \begin{cases} (-\Delta)^s u = \lambda u^q + u^{2_s^*-1}, & \text{em } \Omega, \\ u > 0, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio regular limitado, $\lambda > 0$, $N > 2s$, $0 < q < 2_s^* - 1$ e

$$2_s^* = \frac{2N}{N-2s}$$

é o exponente Sobolev crítico fracionário. Aqui $(-\Delta)^s$ é o operador fracionário definido, a menos de um fator de normalização, por

$$-(-\Delta)^s u(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{N+2s}} dx, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{2}$$

onde $s \in (0,1)$ é um parâmetro fixo.

Podemos definir também a potência fracionária do laplaceano usando a descomposição espectral, isto é,

$$A_s u = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \lambda_s^i e_i, \tag{3}$$

onde λ_s^i e e_i são, respectivamente, os autovalores e as auntofunções do operador laplaceano $-\Delta$ em Ω com fronteira Dirichlet homogênea, em tanto a_i representa a projeção de u na direção e_i. O mesmo problema considerado aqui, mas usando o laplaceano fracionário espectral A_s foi estudado em [6]. Uma principal diferença entre (2) e (3) é que o primeiro autovalor de $(-\Delta)^s$ é estritamente menor que o primeiro autovalor de A_s (ver [31]).

O propósito deste trabalho é estudar a existência de soluções para (P_λ). Note que o problema (P_λ), com $\lambda = 0$, não tem solução quando Ω é um domínio estrelado. Isto é provado usando a identidade de Pohozaev para o operador $(-\Delta)^s$ (ver [27]). Este fato motiva a perturbação do termo λu^q, com $\lambda > 0$, neste trabalho.

Antes de provar a existencia de soluções do problema (P_λ) para certos valores de $\lambda > 0$, vamos definir quando uma função u, definida num certo espaço $X_0^s(\Omega)$ (ver (5)), é dito solução para o problema (P_λ). Logo, associando um funcional $\mathcal{J}_{s,\lambda}$ apropriado ao nosso problema e usando as ferramentas variacionais, encontramos valores críticos que vão ser soluções de (P_λ).

Em ambos casos, $q < 1$ e $q > 1$, usamos o Teorema Passo da Montanha (TPM). Portanto, a dificuldade para aplicar TPM consiste em provar a condição local de Palais-Smale ((PS)) no nível $c \in \mathbb{R}$ ((PS)_c).

No caso côncavo, $q < 1$, a ideia é provar a existência de pelo menos duas soluções para um intervalo admissível de λ. Para isso, usamos um argumento contraditório inspirado por [3]. A prova é dividida em várias etapas: mostramos primeiro que (P_λ) tem uma solução que é mínimo local de $\mathcal{J}_{s,\lambda}$. No passo seguinte, com o objetivo de encontrar a segunda solução, vamos supor que aquela solução encontrada é o único ponto crítico do funcional, e depois vamos provar a condição local ((PS)_c) para c abaixo de um nível crítico, relacionado com a melhor constante de Sobolev crítico fracionário, $S(N,s)$, definido em (9). Também, determinamos um caminho, abaixo deste nível crítico, localizando o minimizador de Sobolev na concentração possível sobre deltas de Dirac. Esses deltas são obtidos pelo resultado de concentração de compacidade [25, Teorema 1.5] inspirados no resultado clássico por P-Lions [23, 24]. Logo, aplicamos o TPM e sua versão mais refinada dada em [18] para chegar a uma contradição.

No caso convexo, $q > 1$, também aplicamos o TPM para obter a existência de pelo menos uma solução para (P_λ), para valores apropriados de λ que dependem da dimensão N. Como falamos antes, vamos provar a condição local (PS)_c num intervalo apropriado com a constante $S(N,s)$). A estratégia para obter uma solução segue das ideas dadas em [8].

O caso $q = 1$, quando a parte direita da equação em (P_λ) é igual a $\lambda u + |u|^{2_s^*-2}u$, foi tratado em [28, 29, 30]. Nesses trabalhos, os autores estudaram também não linearidades mais gerais do que aquelas dadas pela função potência crítica, assim como, a existencia de soluções não necessariamente positivas.

Preliminares

Apresentamos algumas definições e resultados que serão usados no desenvolvimento deste trabalho. O referente a espaços Sobolev fracionários e algumas das suas propriedades podem ser visto no Apêndice e nas bibliografias citadas.

0.1 Espaço fracionário $X_0^s(\Omega)$

Definição 0.1 *Seja $H^s(\mathbb{R}^N)$, $0 < s < 1$, o espaço fracionário (ver Definição 3.4 e Proposição 3.11) munido da norma*

$$\|g\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{|g(x) - g(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \right)^{1/2}. \tag{4}$$

Seja Ω um dominio regular limitado de $\mathbb{R}^N$. Definimos o espaço $X_0^s(\Omega)$ como

$$X_0^s(\Omega) := \{u \in H^s(\mathbb{R}^N), u = 0 \quad q.t.p. \ \ em \ \mathbb{R}^N \backslash \Omega\}. \tag{5}$$

Munimos o espaço $X_0^s(\Omega)$ com o produto escalar

$$< u, v >_{X_0^s(\Omega)} := \int\limits_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \tag{6}$$

e com a norma

$$\|v\|^2_{X_0^s(\Omega)} := \int\limits_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy, \tag{7}$$

onde $u, v \in X_0^s(\Omega)$. Isto conduz o seguinte.

Proposição 0.2 *Existe uma constante $c > 0$, dependendo de N e s, tal que para qualquer $v \in X_0^s(\Omega)$,*

$$\|v\|^2_{L^{2_s^*}(\Omega)} = \|v\|^2_{L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)} \leq c\|v\|^2_{X_0^s(\Omega)}. \tag{8}$$

Prova: Ver [28, Lema 6]. ■

Observação 0.3 *Dado que* Ω *é limitado e pela injeção continua* $L^{2_s^*}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, *a Proposição 0.2 mostra que* $\|.\|_{H^s(\Omega)}$ *e* $\|.\|_{X_0^s(\Omega)}$ *são equivalentes em* $X_0^s(\Omega)$.

Proposição 0.4 $(X_0^s(\Omega), \|.\|_{X_0^s(\Omega)})$ *é Hilbert.*

Prova: Segue ao considerar a injeção continua $L^{2_s^*}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e o mesmo argumento usado na prova de [13, Proposição 4.24]. ■

Sabemos que o espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ é o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ na norma $H^1(\Omega)$. Assim, também podemos definir $X_0^s(\Omega)$ como o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ com respeito à norma (7). Isto conduz ao seguinte resultado.

Proposição 0.5 *Seja* Ω *aberto de* $\mathbb{R}^N$ *com fronteira regular. Então* $C_c^\infty(\Omega)$ *é denso em* $X_0^s(\Omega)$ *com respeito à norma* (7).

Prova: Ver [15, Teorema 6]. ■

Definição 0.6 *A constante de Sobolev é dada por*

$$S(N,s) := \inf_{v \in H^s(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} Q_{N,s}(v) > 0; \tag{9}$$

onde

$$Q_{N,s}(v) := \frac{\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{|v(x)-v(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy}{(\int_{\mathbb{R}^N} |v(x)|^{2_s^*} dx)^{2/2_s^*}}, \quad v \in H^s(\mathbb{R}^N). \tag{10}$$

0.2 Operador laplaceano fracionário

Definição 0.7 *Sejam* $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ *e* $s \in (0,1)$. *O operador laplaceano fracionário* $(-\Delta)^s$ *é definido por*

$$(-\Delta)^s\varphi(x) := C(N,s)P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy = C(N,s) \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy, \tag{11}$$

para $x \in \mathbb{R}^N$, *onde P.V. é entendido como o valor principal da integral e*

$$C(N,s) = \frac{4^s\Gamma(\frac{N}{2}+s)}{\pi^{\frac{N}{2}}\Gamma(-s)}.$$

Observação 0.8 *1) Ao longo deste trabalho, vamos evitar ecrever a constante $C(N,s)$ para facilitar os cálculos, e, além disso, fazendo uma mudança de variável (ver [14, Proposição 4.1]), de (11) resulta*

$$(-\Delta)^s\varphi(x) := -\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi(x+y)+\varphi(x-y)-2\varphi(x)}{|y|^{N+2s}}dy. \tag{12}$$

2) Via transformada de Fourier, (11) é equivalente a (ver [14, Lema 3.5])

$$\widehat{(-\Delta)^s}\varphi(\xi) = C|\xi|^{2s}\widehat{\varphi}(\xi), \quad \text{para } \xi \in \mathbb{R}^N,$$

onde C é uma constante positiva que depende de N e s.

Lema 0.9 *Para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ temos a estimativa*

$$|(-\Delta)^s\varphi(x)| \leq C\frac{\|\varphi\|_{C^2(\mathbb{R}^N)}}{1+|x|^{N+2s}}, \quad \text{com } x \in \mathbb{R}^N, \tag{13}$$

onde C é uma constante que depende do suporte de φ.

Prova: Ver [16, Lema 2.1]. ■

Definição 0.10 *O espaço $\mathcal{L}_s^1$ consiste de todas as funções mensuráveis $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tais que*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|}{1+|x|^{N+2s}}dx < \infty. \tag{14}$$

Pela da desigualdade de Hölder, temos

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|}{1+|x|^{N+2s}}dx \leq C\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall u \in H^s(\mathbb{R}^N), \tag{15}$$

com $C > 0$. Em outras palavras, $H^s(\mathbb{R}^N)$ está continuamente imerso em $\mathcal{L}_s^1$. De isso e de (13) temos o seguinte.

Definição 0.11 *Seja $u \in H^s(\mathbb{R}^N), 0 < s < 1$. Definimos $(-\Delta)^s u$, como uma distribuição, por*

$$\langle(-\Delta)^s u, \varphi\rangle := \int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x)(-\Delta)^s\varphi(x)dx, \quad \forall\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Da Observação 0.8, via transformada de Fourier para distribuções, a Definição 0.11 é equivalente a

$$\widehat{(-\Delta)^s u}(\xi) := |\xi|^{2s}\widehat{u}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{16}$$

Proposição 0.12 *Seja $u \in X_0^s(\Omega)$, $0 < s < 1$. Então:*

$$(i) \quad \|u\|_{X_0^s(\Omega)} = \|(-\Delta)^{s/2}u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \tag{17}$$

$$(ii) \quad \langle u, v\rangle_{X_0^s(\Omega)} = \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^s u(x)v(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} u(x)(-\Delta)^s v(x)dx. \tag{18}$$

Prova: (i) Ver [14, Proposição 4.4].
(ii) Resulta de (17), (16) e das propriedades da transformada de Fourier. Outra forma de provar é derivando a expresão (17). ■

Teorema 0.13 *(Princípio do Máximo) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto limitado. Seja u uma função semicontínua em $\overline{\Omega}$ tal que $(-\Delta)^s u \geq 0$ em Ω, e $u \geq 0$ em $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$. Então $u \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$. Além disso, se $u(x) = 0$, para algum ponto $x \in \Omega$, então $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N$.*

Prova: Ver [32, Proposição 2.17]. ■

Lema 0.14 *(De Comparação) Sejam $u, v \in H^s(\mathbb{R}^N)$ soluções dos problemas (ver Definição 1.1)*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f_1, & \text{em } \Omega, \\ u = g_1, & \text{em } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \qquad \begin{cases} (-\Delta)^s v = f_2, & \text{em } \Omega, \\ v = g_2, & \text{em } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases}$$

respectivamente. Se $f_1 \leq f_2$ e $g_1 \leq g_2$, então $u(x) \leq v(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Prova: Ver [5, Lema 2.2.2]. ■

0.3 Alguns resultados de minimização

Teorema 0.15 *Sejam X um espaço topológico compacto e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional semicontínuo inferiormente. Então I é limitado inferiormente e existe um $u_0 \in H$ tal que*

$$I(u_0) = \min_{u \in H} I(u).$$

Prova: Ver [11, Teorema 1.1.1]. ■

Teorema 0.16 *Seja H um espaço de Hilbert. Suponha que o funcional $I : H \to \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes condições:*

(i) I é fracamente semicontínua e,

(ii) I é coercivo (isto é, $I(u) \to +\infty$, quando $\|u\| \to +\infty$).

Então, I é limitado inferiormente e existe um $u_0 \in H$ tal que

$$I(u_0) = \min_{u \in H} I(u).$$

Prova: Ver [11, Teorema 1.1.2]. ■

Teorema 0.17 *(Passo da Montanha) Seja I uma função C^1, definido num espaço de Banach E, que satisfaz a condição (PS) e $I(0) = 0$. Se existem uma vizinhança U do zero, $\rho > 0$ e $v \in E \backslash \overline{U}$ tais que:*

$$I(u) \leq \rho, \quad \forall u \in \partial U, \quad \text{e} \quad I(v) \leq 0,$$

então

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = v\}$, é um valor crítico de I.

Prova: Ver [3, Teorema 2.1]. ■

Capítulo 1

Caso crítico e côncavo $0 < q < 1$

Neste capítulo dedicaremos o estudo ao problema (P_λ) no caso do exponente $0 < q < 1$.

1.1 Formulação do problema

Consideremos o seguinte problema de Dirichlet

$$(P_\lambda^+) = \begin{cases} (-\Delta)^s u = \lambda(u_+)^q + (u_+)^{2_s^*-1} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases}$$

onde $u_+ := \max\{u, 0\}$ denota a parte positiva de u. Com isso em mãos, temos o seguinte.

Definição 1.1 *Dizemos que $u \in X_0^s(\Omega)$ é solução fraca de (P_λ^+), se para cada $\varphi \in X_0^s(\Omega)$, temos*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy = \lambda \int\limits_{\Omega} (u_+)^q \varphi dx + \int\limits_{\Omega} (u_+)^{2_s^*-1} \varphi dx. \tag{1.1}$$

A diante, vamos omitir a palavra fraca quando nos referirmos as soluções que satisfazem as condições da Definição 1.1. Uma observação crucial aqui é que, pelo Principio do Máximo, se u é uma solução não trivial de (P_λ^+), então u é solução de (P_λ).

Para encontrar soluções de (P_λ^+), vamos usar ferramentas variacionais. Para tanto, associamos o funcional $\mathcal{J}_{s,\lambda} : X_0^s(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\mathcal{J}_{s,\lambda}(u) := \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy - \frac{\lambda}{q+1} \int\limits_{\Omega} (u_+)^{q+1} dx - \frac{1}{2_s^*} \int\limits_{\Omega} (u_+)^{2_s^*} dx. \tag{1.2}$$

A derivada de $\mathcal{J}_{s,\lambda}$ é dada por

$$\langle \mathcal{J}'_{s,\lambda}(u), \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle_{X_0^s(\Omega)} - \lambda \int_\Omega (u_+)^q \varphi dx - \int_\Omega (u_+)^{2_s^*-1} \varphi dx, \quad \varphi \in X_0^s(\Omega).$$

Em vista da imersões de Sobolev (ver Apêndice) e da Proposiãço 0.2, é fácil provar que $\mathcal{J}_{s,\lambda}$ é C^1 em $X_0^s(\Omega)$. Note que os pontos críticos de $\mathcal{J}_{s,\lambda}$ vão ser soluções de (P_λ^+).

Fixemos um $u \in X_0^s(\Omega)$. Definamos $J : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$J(t) := \mathcal{J}_{s,\lambda}(tu) = At^2 - \lambda B t^{q+1} - C t^{2_s^*}, \quad t > 0, \tag{1.3}$$

onde

$$A = \frac{1}{2} \|u\|_{X_0^s(\Omega)}, \; B = \frac{1}{q+1} \int_\Omega (u_+)^{q+1} dx, \quad \text{e} \quad C = \frac{1}{2_s^*} \int_\Omega (u_+)^{2_s^*} dx.$$

Na seguinte figura podemos observar que a função J possui dois pontos críticos para certos valores de A, B, C e λ.

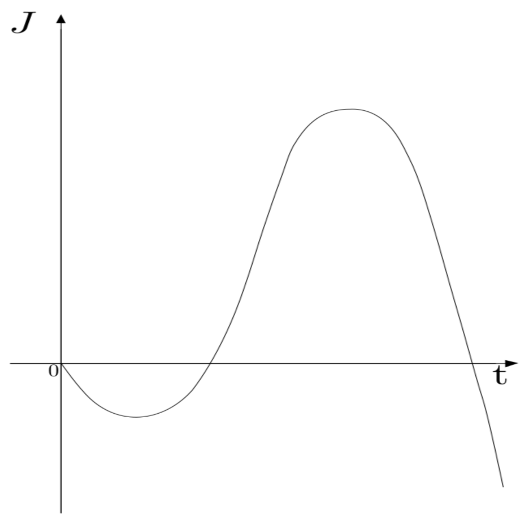

Figura 1.1: 1 $J(t) = 10t^2 - 10t^{(1.5)} - t^3, \; s = 0.5, \; q = 0.5, \; N = 3.$

Agora, enunciamos o teorema que mostra a existencia de soluções de (P_λ).

Teorema 1.2 *Suponha* $0 < q < 1$, $0 < s < 1$ *e* $N > 2s$. *Então, existe* $0 < \Lambda < \infty$ *tal que o problema* (P_λ)*:*

1. *não tem solução para* $\lambda > \Lambda$*;*

2. *tem uma solução minimal para qualquer* $0 < \lambda < \Lambda$*; além disso, a família de soluções minimais é crescente com respeito a* λ.

3. *se* $\lambda = \Lambda$, *existem no mínimo uma solução;*

4. *para* $0 < \lambda < \Lambda$, *existem no mínimo duas soluções.*

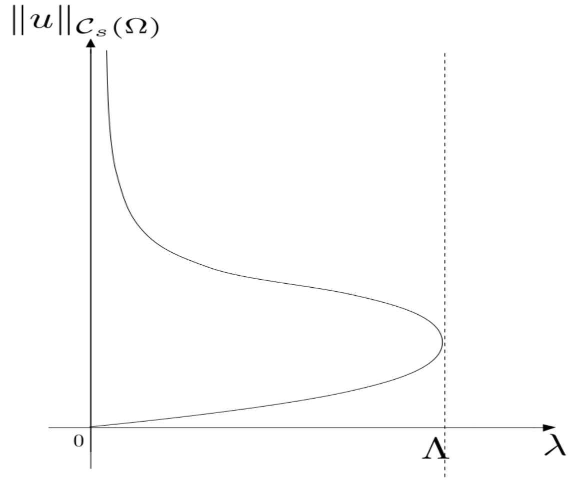

Figura 1.2: Curva de soluções para valores de λ.

Começamos mostrando o seguinte resultado, que utiliza, na sua prova, um método de comparação de padrão, assim como algumas ideias dadas de [2].

Lema 1.3 *Dado* $0 < q < 1$, *seja* Λ *definido por*

$$\Lambda := \sup\{\lambda > 0 : \text{ o problema } (P_\lambda) \text{ tem solução } \}.$$

Então, $0 < \Lambda < \infty$ *e o problema côncavo crítico* (P_λ) *tem no mínimo uma solução para cada* $0 < \lambda \leq \Lambda$. *Além disso, para* $0 < \lambda < \Lambda$, *obtemos uma família de soluções crescentes com respeito a* λ.

Prova: Primeiro, mostremos que $\Lambda < \infty$. Seja φ_1 a primeira autofunção associada ao primeiro auntovalor λ_1 do operador $(-\Delta)^s$. Suponha que existe uma solução u para (P_λ). Então, usando φ_1 como uma 'função test' em (P_λ), temos

$$\lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} u\varphi_1\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} u(-\Delta)^s\varphi_1\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^s u\varphi\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda u^q + u^{2^*-1})\varphi_1\, dx, \tag{1.4}$$

Seja c uma constante positiva tal que

$$\lambda t^q + t^{2^*-1} > c\lambda t, \qquad \forall t > 0. \tag{1.5}$$

Segue de (1.4) que $\lambda_1 \geq c\lambda$, o que implica $\Lambda < +\infty$.

Mostremos agora que $\Lambda > 0$. Seja e a solução de

$$\begin{cases} (-\Delta)^s e = 1, & x \in \Omega, \\ e = 0, & x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases}$$

A existência da função e é devida ao Teorema de Lax-Milgran. Segue, pela Proposição 1.4, que $e \in L^\infty(\Omega)$. Afirmamos que existe um $\lambda_0 > 0$ tal que, para todo $0 < \lambda \leq \lambda_0$, existe um $M = M(\lambda)$ positivo, satisfazendo

$$(-\Delta)^s(Me) = M \geq \lambda M^q \|e\|^q_{L^\infty(\Omega)} + M^{2^*_s-1}\|e\|^{2^*_s-1}_{L^\infty(\Omega)}. \tag{1.6}$$

Com efeito, denotando $r = \|e\|_{L^\infty(\Omega)}$, temos que (1.6) é equivalente a

$$F_\lambda(M) := \lambda M^{q-1} r^q + M^{2^*_s-2} r^{2^*_s-1} \leq 1. \tag{1.7}$$

Derivando com respeito a M, resulta que

$$\frac{dF_\lambda}{dM} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M(\lambda) = cr^{-1}\lambda^{1/(2^*_s-q-1)},$$

onde $c = (\frac{1-q}{2^*_s-2})$; e daí, $M(\lambda)$ é um ponto mínimo de F_λ, pois $F_\lambda \to +\infty$ quando $M \to 0^+$ ou $M \to +\infty$. Então, denotando M_0 o ponto mínimo de F_{λ_0}, segue

$$F_{\lambda_0}(M_0) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad (c^{q-1} + c^{2^*_s-1}) r \lambda_0^{\frac{2^*_s-2}{2^*_s-q-1}} \leq 1, \tag{1.8}$$

e escolhendo um λ_0 positivo tal que satisfaz (1.8), temos para $\lambda < \lambda_0$,

$$F_\lambda(M(\lambda)) \leq F_\lambda(M_0) \leq F_{\lambda_0}(M_0) \leq 1,$$

o que mostra (1.7). Portanto, para um certo M, temos por (1.6) que Me é supersolução de (P_λ).

Consideremos agora um $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon^{1-q}\lambda_1 \leq \lambda$, e por (1.5) temos que

$$(-\Delta)^s(\varepsilon\varphi_1) = \varepsilon\lambda_1\varphi_1 \leq \varepsilon\lambda_1(\varphi_1)^q \leq \lambda(\varepsilon\varphi_1)^q + (\varepsilon\varphi_1)^{2_s^*-1},$$

e assim $\varepsilon\varphi_1$ é uma subsolução de (P_λ). Então, fazendo ε suficientemente pequeno, e pelo Lema de Comparação, temos $\varepsilon\varphi_1 < Me$. Logo, aplicando o método de Sattinger (ver Apêndice), existe uma solução u_λ para (P_λ) com $\varepsilon\varphi_1 \leq u_\lambda \leq Me$. Segue que o conjunto $\{\lambda > 0 :$ o problema (P_λ) tem solução $\}$ é não vazio, e daí $\Lambda > 0$.

Mostremos a última parte do Lema. Dado $0 < \lambda < \Lambda$, podemos encontrar uma solução para um valor tão próximo de Λ. Denotemos este valor por μ e a solução minimal associada de (P_μ) por u_μ. Então para (P_λ), u_μ é supersolução. Além disso, $\varepsilon\varphi_1$ pode ser modificado como fizemos antes, com ε suficientemente pequeno, para ser subsolução de (P_λ). Então, seguindo da mesma maneira como antes, concluímos que existe uma solução u_λ para (P_λ), e portanto para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$.

Note que, pela construção e pelo Lema de Comparação temos que as soluções para (P_λ) são crecentes com respeito a λ.

Por último, mostremos que existe uma solução para $\lambda = \Lambda$. Seguindo a mesma ideia de [2], consideremos uma sequência $\{\lambda_n\}$ tal que $\lambda_n \nearrow \Lambda$, e a sequência $\{u_n\} = \{u_{\lambda_n}\}$, onde u_n é solução minimal de (P_{λ_n}). Seguindo a prova de [2, Lema 3.5 e Teorema 2.1], temos que $J_{s,\lambda_n}(u_n) < 0$. Portanto

$$0 > J_{s,\lambda_n}(u_n) - \frac{1}{2_s^*}\langle J'_{s,\lambda_n}(u_n), u_n\rangle = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_s^*}\right)\|u_n\|^2_{X_0^s(\Omega)} - \lambda_n\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{2_s^*}\right)\int_\Omega u_n^{q+1}\,dx. \quad (1.9)$$

Já que $q + 1 < 2_s^*$ e pelas imersões de Sobolev, então, existe uma constante $C > 0$ tal que $\|u_n\|_{X_0^s(\Omega)} \leq C$. Como consequência, dado que $X_0^s(\Omega)$ é reflexivo, existe uma subsequência que converge fracamente em $X_0^s(\Omega)$, fortemente em $L^{2_s^*-1}(\Omega)$ e q.t.p. em Ω para algum u_Λ. Assim, u_Λ é solução de (P_Λ), e pelo Lema de Comparação, $u_\Lambda > u_\lambda$ em Ω, para qualquer $0 < \lambda < \Lambda$. ■

Pelo lema anterior, provamos os items 1, 2 e 3 do Teorema 1.2. Portanto, no que segue, nos enfocaremos em provar o item 4 do Teorema 1.2, que é a existência de uma segunda solução para (P_λ).

Primeiro, mostraremos um resultado de regularidade que será útil neste capítulo.

Proposição 1.4 *Seja $u \in X_0^s(\Omega)$ uma solução positiva do problema*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases}$$

e suponha que $|f(x,t)| \leq C(1+|t|^p)$, para algum $1 \leq p \leq 2_s^* - 1$ e $C > 0$. Então $u \in L^\infty(\Omega)$.

Prova: A prova usa algumas propriedades para o operador laplaceano, em particular, a seguinte desigualdade: se ϕ é uma função diferenciável e convexa, então

$$(-\Delta)^s \phi(u) \leq \phi'(u)(-\Delta)^s u.$$

Definimos, para $\beta \geq 1$ e $T > 0$ grande,

$$\phi(t) = \phi_{T,\beta}(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 0, \\ t^\beta, & \text{se } 0 < t < T, \\ \beta T^{\beta-1}(t-T) + T^\beta, & \text{se } t \geq T. \end{cases}$$

Observe que $\phi(u) \in X_0^s(\Omega)$, já que ϕ é Lipschitz com constante $K = \beta T^{\beta-1}$ e, portanto,

$$\|\phi(u)\|^2_{X_0^s(\Omega)} = \int\limits_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{|\phi(u(x)) - \phi(u(y))|^2}{|x-y|^{N+2s}} dx\, dy \leq \int\limits_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{K^2 |u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dx\, dy = K^2 \|u\|^2_{X_0^s(\Omega)}.$$

Por (17) e pela Proposição 0.2, temos

$$\int\limits_\Omega \phi(u)(-\Delta)^s \phi(u)\; dx = \|\phi(u)\|^2_{X_0^s(\Omega)} \geq S(N,s) \|\phi(u)\|^2_{L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)}, \tag{1.10}$$

onde $S(N,s)$ é definido em (9). Por outro lado, dado que ϕ é convexa, e $\phi(u)\phi'(u) \in X_0^s(\Omega)$,

$$\int\limits_\Omega \phi(u)(-\Delta)^s \phi(u)\; dx \leq \int\limits_\Omega \phi(u)\phi'(u)(-\Delta)^s u\; dx \leq C \int\limits_\Omega \phi(u)\phi'(u)(1 + u^{2_s^*-1})\; dx.$$

De (1.10) e das desigualdades prévias, obtemos a seguinte estimativa

$$\|\phi(u)\|^2_{L^{2_s^*}(\Omega)} \leq C \int\limits_\Omega \phi(u)\phi'(u)(1 + u^{2_s^*-1})\; dx. \tag{1.11}$$

Pelas propriedades de ϕ temos, $u\phi'(u) \leq \beta\phi(u)$ e $\phi'(u) \leq \beta(1+\phi(u))$. Disso, e pela estimativa (1.11), segue

$$\left(\int\limits_{\Omega}(\phi(u))^{2_s^*}\ dx\right)^{2/2_s^*} \leq C\beta\left(1+\int\limits_{\Omega}(\phi(u))^2\ dx+\int\limits_{\Omega}(\phi(u))^2u^{2_s^*-2}\ dx\right). \tag{1.12}$$

Note que, como ϕ é convexa, as integrais de (1.12) são finitas.

Afirmação: se β_1 satisfaz $2\beta_1 = 2_s^*$, então $u \in L^{2_s^*\beta_1}$. Com efeito, considere um $R > 0$ suficientemente grande, o qual que será determinado depois. Então, pela desigualdade de Hölder com $p = \beta_1 = 2_s^*/2$ e $p' = 2_s^*/2_s^* - 2$ temos

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega}(\phi(u))^2u^{2_s^*-2}\ dx &= \int\limits_{u\leq R}(\phi(u))^2u^{2_s^*-2}\ dx+\int\limits_{u>R}(\phi(u))^2u^{2_s^*-2}\ dx\\ &\leq \int\limits_{u\leq R}(\phi(u))^2R^{2_s^*-2}\ dx+\left(\int\limits_{\Omega}(\phi(u))^{2_s^*}\ dx\right)^{2/2_s^*}\left(\int\limits_{u>R}u^{2_s^*}\ dx\right)^{(2_s^*-2)/2}.\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Monótona, podemos escolher R tal que

$$\left(\int\limits_{u>R}u^{2_s^*}\ dx\right)^{(2_s^*-2)/2} \leq \frac{1}{2C\beta_1}.$$

Usando isso em (1.12) obtemos

$$\left(\int\limits_{\Omega}(\phi(u))^{2_s^*}\ dx\right)^{2/2_s^*} \leq 2C\beta_1\left(1+\int\limits_{\Omega}(\phi(u))^2\ dx+\int\limits_{u\leq R}(\phi(u))^2R^{2_s^*-2}\ dx\right). \tag{1.13}$$

Usando o fato que $\phi_{T,\beta_1}(u) \leq u^{\beta_1}$ na parte direita de (1.13) e tomando $T \to \infty$ na parte esquerda, já que $2\beta_1 = 2_s^*$, temos

$$\left(\int\limits_{\Omega}u^{2_s^*\beta_1}\ dx\right)^{2/2_s^*} \leq 2C\beta_1\left(1+\int\limits_{\Omega}u^{2_s^*}\ dx+R^{2_s^*-2}\int\limits_{\Omega}u^{2_s^*}\ dx\right) < \infty. \tag{1.14}$$

Isso prova a afirmação.

Agora voltamos para a desigualdade (1.12) e usamos como antes o fato de $\phi_{T,\beta}(u) \leq u^\beta$ na parte direita e fazemos $T \to \infty$ na parte esquerda. Então, temos

$$\left(\int\limits_{\Omega}u^{2_s^*\beta}\ dx\right)^{2/2_s^*} \leq C\beta\left(1+\int\limits_{\Omega}u^{2\beta}\ dx+\int\limits_{\Omega}u^{2\beta+2_s^*-2}\ dx\right). \tag{1.15}$$

Dado que $\int_\Omega u^{2\beta} \leq |\Omega| + \int_\Omega u^{2\beta+2_s^*-2}$, segue

$$\Big(\int\limits_\Omega u^{2_s^*\beta}\,dx\Big)^{2/2_s^*} \leq 2C\beta(1+|\Omega|)\Big(1+\int\limits_\Omega u^{2\beta+2_s^*-2}\,dx\Big).$$

Portanto,

$$\Big(1+\int\limits_\Omega u^{2_s^*\beta}\,dx\Big)^{\frac{1}{2_s^*(\beta-1)}} \leq C_\beta^{\frac{1}{2(\beta-1)}}\Big(1+\int\limits_\Omega u^{2\beta+2_s^*-2}\,dx\Big)^{\frac{1}{2(\beta-1)}}, \tag{1.16}$$

onde $C_\beta = 4C\beta(1+|\Omega|)$ para uma constante C adequada.

Para $m \geq 1$ definimos β_{m+1} por indução como $2\beta_{m+1}+2_s^*-2 = 2_s^*\beta_m$, isto é

$$\beta_{m+1}-1 = \frac{2_s^*}{2}(\beta_m-1) = \left(\frac{2_s^*}{2}\right)^m(\beta_1-1).$$

Portanto, de (1.16) segue que

$$(1+\int\limits_\Omega u^{2_s^*\beta_{m+1}}\,dx)^{\frac{1}{2_s^*(\beta_{m+1}-1)}} \leq C_{\beta_{m+1}}^{\frac{1}{2(\beta_{m+1}-1)}}(1+\int\limits_\Omega u^{2_s^*\beta_m}\,dx)^{\frac{1}{2(\beta_m-1)}},$$

com $C_{m+1} = 4C\beta_{m+1}(1+|\Omega|)$. Então, definindo, para $m \geq 1$,

$$A_m := \Big(1+\int\limits_\Omega u^{2_s^*\beta_m}\,dx\Big)^{\frac{1}{2(\beta_m-1)}},$$

pela afirmação provada anteriormente, e usando propriedades de limite, concluímos que existe $C_0 > 0$, independente de $m > 1$, tal que

$$A_{m+1} \leq \Pi_{k=2}^{m+1} C_k^{\frac{1}{2(\beta_k-1)}} A_1 \leq C_0 A_1. \tag{1.17}$$

Isso implica que $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_0A_1$. Com efeito, suponha que existe um $M > C_0A_1$ tal que $|\{u > M\}| > 0$. Então, por (1.17),

$$(M^{2_s^*\beta_m}|\{u>M\}|)^{\frac{1}{2_s^*(\beta_m-1)}} \leq \Big(\int\limits_\Omega u^{2_s^*\beta_m}dx\Big)^{\frac{1}{2(\beta_m-1)}} \leq A_{m+1} \leq C_0A_1,$$

e tomando $m \to \infty$, temos $M \leq C_0A_1$, que é uma contradição. $\blacksquare$

Para achar a existência de uma segunda solução para (P_λ), vamos mostrar primeiro a existência de um mínimo local para o funcional $\mathcal{J}_{s,\lambda}$. Para isso, estabeleceremos o lema de separação na topologia da classe

$$\mathcal{C}_s(\Omega) := \{w \in C^0(\overline{\Omega}) : \|w\|_{\mathcal{C}_s(\Omega)} := \left\|\frac{w}{\delta^s}\right\|_{L^\infty} < \infty\}, \tag{1.18}$$

onde $\delta(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. Então, temos o seguinte.

Lema 1.5 *(De Separação) Suponha* $0 < \lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2 < \Lambda$. *Sejam* $u_{\lambda_1}, u_{\lambda_0}$ *e* u_{λ_2} *soluções minimais correspondentes a* (P_λ), *para* $\lambda = \lambda_1, \lambda_0$ *e* λ_2, *respectivamente. Se*

$$Z := \{u \in \mathcal{C}_s(\Omega) : u_{\lambda_1} \leq u \leq u_{\lambda_2}\},$$

então existe $\varepsilon > 0$ *tal que*

$$\{u_{\lambda_0}\} + \varepsilon B_1 \subset Z, \tag{1.19}$$

com $B_1 = \{w \in C^0(\overline{\Omega}) : \|\frac{w}{\delta^s}\|_{L^\infty} < 1\}$.

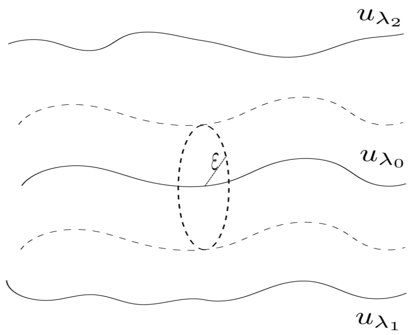

Figura 1.3: Separação de solucões.

Prova: Sejam $\overline{u} = u_{\lambda_0} - u_{\lambda_1}$ e $\underline{u} = u_{\lambda_2} - u_{\lambda_0}$. Então, $\overline{u} = \underline{u} = 0$ em $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$ e,

$$(-\Delta)^s \overline{u} > 0 \quad \text{ e } \quad (-\Delta)^s \underline{u} > 0 \quad \text{ em } \Omega.$$

Dado que $\overline{u} > 0$ e $\underline{u} > 0$ em Ω, segue pelo Lema de Hopf (ver [19, Lema 2.7]), que existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$\overline{u}(x) \geq C_1 \delta^s(x) \quad \text{ e } \quad \underline{u}(x) \geq C_2 \delta^s(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Tomado $\varepsilon < \min\{C_1, C_2\}$, temos

$$u_{\lambda_1}(x) + \varepsilon \delta^s(x) \leq u_{\lambda_0}(x) \leq u_{\lambda_2}(x) - \varepsilon \delta^s(x), \quad \forall x \in \Omega. \tag{1.20}$$

Seja $w \in B_1$, então $|w| \leq \delta^s$, e por (1.20), obtemos

$$u_{\lambda_1}(x) \leq u_{\lambda_0}(x) + \varepsilon w \leq u_{\lambda_2}(x), \quad \forall x \in \Omega,$$

o que mostra (1.19). ■

Usando esse resultado, vamos obter um mínimo local do funcional $\mathcal{J}_{s,\lambda}$ no espaço $\mathcal{C}_s(\Omega)$. Isto é, o primeiro passo para obter um mínimo local em $X_0^s(\Omega)$, é dizer,

Lema 1.6 *Para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$, o funcional $\mathcal{J}_{s,\lambda}$ tem um mínimo local no espaço $\mathcal{C}_s(\Omega)$.*

Prova: Fixe $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2 < \Lambda$. Sejam u_1 e u_2 soluções minimais de (P_{λ_1}) e (P_{λ_2}), respectivamente. Denotemos $f_\lambda(t) = \lambda(t_+)^q + (t_+)^{2_s^*-1}$, $t \in \mathbb{R}$, e vamos definir

$$f^*(x, \eta) := \begin{cases} f_\lambda(u_1(x)), & \eta \leq u_1(x), \\ f_\lambda(\eta), & u_1(x) \leq \eta \leq u_2(x), \\ f_\lambda(u_2(x)), & \eta \geq u_2(x), \end{cases}$$

$$F^*(x, \xi) := \int_0^\xi f^*(x, \eta)\, d\eta \quad \text{ e } \quad J^*_{s,\lambda} := \frac{\|u\|^2_{X_0^s(\Omega)}}{2} - \int_\Omega F^*(x, u(x))\, dx.$$

$J^*_{s,\lambda}$ é coercivo. Com efeito,

$$J^*_{s,\lambda}(u) \geq \frac{\|u\|^2_{X_0^s(\Omega)}}{2} - \int_\Omega F^*(x, u_2)\, dx.$$

Logo, se $\|u\|^2_{X_0^s(\Omega)} \to \infty$ então $J^*_{s,\lambda}(u) \to \infty$.

$J^*_{s,\lambda}$ é fracamente semicontínua inferiormente. Com efeito, seja $u_n \rightharpoonup u$ em $X_0^s(\Omega)$. Então existe uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ convergindo a u fortemente em $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p < 2_s^*$, e q.t.p. em Ω. Assim, temos

$$\begin{aligned} \liminf_n J^*_{s,\lambda}(u_n) &\geq \frac{\|u\|^2}{2} + \liminf_k \left(- \int_\Omega F^*(x, u_{n_k})\, dx \right) \\ &\geq \frac{\|u\|^2}{2} - \int_\Omega F^*(x, u)\, dx. \end{aligned}$$

Portanto, do Teorema 0.16, $J^*_{s,\lambda}$ atinge um mínimo global, isto é, existe um $u_0 \in X_0^s(\Omega)$ tal que

$$J^*_{s,\lambda}(u_0) \leq J^*_{s,\lambda}(u), \quad \forall u \in X_0^s(\Omega).$$

Além disso, u_0 satisfaz

$$(-\Delta)^s u_0 = f^*(x, u_0), \quad x \in \Omega.$$

Pelo Principio do Máximo e pela definição de f^*, resulta que $u_1 < u_0 < u_2$, e daí, pelo Lema 1.5, segue que $\{u_0\} + \varepsilon B_1 \subseteq Z$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Seja agora u satisfazendo $\|u - u_0\|_{\mathcal{C}_s(\Omega)} \leq \varepsilon/4$. Então, para $x \in \Omega$,

$$u(x) \leq u_0(x) + \frac{\varepsilon}{4}\delta^s \leq u_2(x) - \frac{\varepsilon}{2}\delta^s(x) < u_2(x)$$

e

$$u(x) \geq u_0(x) - \frac{\varepsilon}{4}\delta^s \geq u_1(x) + \frac{\varepsilon}{2}\delta^s(x) > u_1(x).$$

Portanto, a desigualdade acima conduz que $J^*_{s,\lambda}(u) - J_{s,\lambda}(u)$ seja igual a zero, para cada u tal que $\|u - u_0\|_{\mathcal{C}_s(\Omega)} \leq \varepsilon/4$. Assim, obtemos

$$J_{s,\lambda}(u) = J^*_{s,\lambda}(u) \geq J^*_{s,\lambda}(u_0) = J_{s,\lambda}(u_0), \ \forall u \in \mathcal{C}_s(\Omega) \ \text{ com } \ \|u - u_0\|_{\mathcal{C}_s(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

O que quer dizer, u_0 é um mínimo local de $J_{s,\lambda}$ em $\mathcal{C}_s(\Omega)$. ■

Para mostrar que realmente $\mathcal{J}_{s,\lambda}$ tem um mínimo no espaço $X^s_0(\Omega)$, provaremos o seguinte resultado obtido por Brezis e Nirenberg.

Proposição 1.7 *Seja $z_0 \in X^s_0(\Omega)$ um mínimo local de $\mathcal{J}_{s,\lambda}$ em $\mathcal{C}_s(\Omega)$; isto é, existe um $r_1 > 0$ tal que*

$$\mathcal{J}_{s,\lambda}(z_0) \leq \mathcal{J}_{s,\lambda}(z_0 + z), \quad \forall z \in \mathcal{C}_s(\Omega) \ \ \textit{com} \ \ \|z\|_{\mathcal{C}_s(\Omega)} \leq r_1. \tag{1.21}$$

Então, z_0 é também um mínimo local de $\mathcal{J}_{s,\lambda}$ em $X^s_0(\Omega)$, isto é, existe um $r_2 > 0$ tal que

$$\mathcal{J}_{s,\lambda}(z_0) \leq \mathcal{J}_{s,\lambda}(z_0 + z), \quad \forall z \in X^s_0(\Omega) \ \ \textit{com} \ \ \|z\|_{X^s_0(\Omega)} \leq r_2.$$

Prova: Seja z_0 como em (1.21) e seja, para $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(z_0) = \{z \in X^s_0(\Omega) : \|z - z_0\|_{X^s_0(\Omega)} \leq \varepsilon\}$. Vamos mostrar por contradição. Vamos supor que para cada $\varepsilon > 0$ tenhamos

$$\min_{v \in B_\varepsilon(z_0)} \mathcal{J}_{s,\lambda}(v) < \mathcal{J}_{s,\lambda}(z_0). \tag{1.22}$$

Escolhamos um $v_\varepsilon \in B_\varepsilon(z_0)$ tal que $\min_{v \in B_\varepsilon(z_0)} \mathcal{J}_{s,\lambda}(v) = \mathcal{J}_{s,\lambda}(v_\varepsilon)$. A existência de v_ε vem do Teorema 0.15. Queremos provar que

$$v_\varepsilon \to z_0 \quad \text{em} \quad \mathcal{C}_s(\Omega) \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0, \tag{1.23}$$

pois, isso, implicaria que existe um $z \in \mathcal{C}_s(\Omega)$, arbitrariamente perto de z_0 na métrica de $\mathcal{C}_s(\Omega)$ (de fato, $z = v_\varepsilon$ para algum ε), tal que $\mathcal{J}_{s,\lambda}(z) < \mathcal{J}_{s,\lambda}(z_0)$, contradizendo a hipótese (1.21).

Seja $0 < \varepsilon \ll 1$. Note que a equação de Euler-Lagrange, satisfeita por v_ε envolve o multiplicador de Lagrange ξ_ε, tal que

$$\langle \mathcal{J}'_{s,\lambda}(v_\varepsilon), \phi \rangle = \xi_\varepsilon \langle v_\varepsilon, \phi \rangle_{X^s_0(\Omega)}, \quad \forall \phi \in X^s_0(\Omega). \tag{1.24}$$

Dado que v_ε é um minimo de $\mathcal{J}_{s,\lambda}$ em $B_\varepsilon(z_0)$, temos

$$-r\mathcal{J}'_{s,\lambda}(v_\varepsilon)v_\varepsilon + o(r) = \mathcal{J}_{s,\lambda}((1-r)v_\varepsilon) - \mathcal{J}_{s,\lambda}(v_\varepsilon) \geq 0, \tag{1.25}$$

onde $o(r)/r \to 0$ quando $r \to 0$. Logo,

$$\xi_\varepsilon = \frac{\langle \mathcal{J}'_{s,\lambda}(v_\varepsilon), v_\varepsilon\rangle}{\|v_\varepsilon\|^2_{X_0^s(\Omega)}} \leq 0. \tag{1.26}$$

Por (1.24), obtemos v_ε satisfazendo

$$\begin{cases} (-\Delta)^s v_\varepsilon = \frac{1}{1-\xi_\varepsilon} f_\lambda(v_\varepsilon) =: f_\lambda^\varepsilon & \text{em } \Omega, \\ v_\varepsilon = 0 & \text{em } R^N\backslash\Omega, \end{cases}$$

Dado que $v_\varepsilon > 0$ e $\|v_\varepsilon\|_{X_0^s(\Omega)} \leq C$, por (1.14), Proposição 0.2 e Proposição 1.4, existe uma constante $C_1 > 0$ independente de ε tal que $\|v_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1$. Além do mais, $\|f_\lambda^\varepsilon(v_\varepsilon)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$. Portanto, por [26, Proposição 1.1] temos que $\|v_\varepsilon\|_{C^{0,s}(\overline{\Omega})} \leq C_2$, para alguma constante C_2 independente de ε.

Assim, pelo teorema de Arzelá-Ascoli existe uma subsequência, que denotamos por v_ε, tal que $v_\varepsilon \to z_0$ uniformemente quando $\varepsilon \to 0$. Também, por [26, Teorema 1.2] obtemos, para uma constante adequada C,

$$\left\| \frac{v_\varepsilon - z_0}{\delta^s} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \sup_\Omega |f_\lambda^\varepsilon(v_\varepsilon) - f_\lambda(z_0)|.$$

Dado que o último tende a zero quando $\varepsilon \to 0$, (1.23) está provado. ■

Do Lema 1.6 e da Proposição 1.7 temos a existência de um mínimo local positivo em $X_0^s(\Omega)$ de $\mathcal{J}_{s,\lambda}$, que denotaremos por u_0. Agora, vamos procurar uma segunda solução para (P_λ) da forma $u = u_0 + v$, com $v > 0$. A correspondente equação para v é

$$(-\Delta)^s v = \lambda(u_0+v)^q - \lambda u_0^q + (u_0+v)^{2_s^*-1} - u_0^{2_s^*-1} \quad \text{em } \Omega.$$

Consideremos as funções

$$g_\lambda(x,t) = \begin{cases} \lambda(u_0+t)^q - \lambda u_0^q + (u_0+t)^{2_s^*-1} - u_0^{2_s^*-1}, & \text{se } t \geq 0, \\ 0, & \text{se } t < 0, \end{cases} \tag{1.27}$$

e

$$G_\lambda(x,\xi) = G_\lambda(\xi) = \int_0^\xi g_\lambda(x,t)\, dt. \tag{1.28}$$

Definamos o problema, a fin de encontrar v,

$$(\overline{P}_\lambda) = \begin{cases} (-\Delta)^s u(x) = g_\lambda(x, u(x)) & \text{em } \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ u = 0 & \text{sobre } R^N \backslash \Omega. \end{cases}$$

Logo, o funcional associado a $(\overline{P}_\lambda)$, $\overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(u) : X_0^s(\Omega) \to \mathbb{R}$ é dado por

$$\overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{X_0^s(\Omega)} - \int_\Omega G_\lambda(x, u(x))\, dx. \tag{1.29}$$

Como $u \in X_0^s(\Omega)$, $\overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}$ está bem definido.

Sabemos que se $v \neq 0$ é um ponto crítico de $\overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}$, então é solução de $(\overline{P}_\lambda)$ e, pelo Princípio do Máximo, implica que $v > 0$. Portanto $u = u_0 + v > 0$ será solução de (P_λ^+) e consequentemente uma segunda solução para (P_λ). Assim, para provar o item 4 do Teorema 1.2 , provaremos por contradição, e vamos assumir que $v \equiv 0$ é o único ponto crítico para $\overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}$.

Lema 1.8 *$u \equiv 0$ é um mínimo local de $\overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}$ em $X_0^s(\Omega)$.*

Prova: Pela Proposição 1.7 é suficiente provar que $u \equiv 0$ é mínimo local de $\overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}$ em $\mathcal{C}_s(\Omega)$. Seja $v \in X_0^s(\Omega)$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{s,\lambda}(u_0 + v_+) &= \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{X_0^s(\Omega)} + \frac{1}{2}\|v_+\|^2_{X_0^s(\Omega)} + < u_0, v_+ >_{X_0^s(\Omega)} - \int_\Omega F_\lambda(u_0 + v_+)dx \\ &= \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{X_0^s(\Omega)} + \frac{1}{2}\|v_+\|^2_{X_0^s(\Omega)} + \int_\Omega (\lambda u_0^q v_+ + u_0^{2_s^*-1} v_+)dx - \int_\Omega F_\lambda(u_0 + v_+)dx \\ &= \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{X_0^s(\Omega)} + \frac{1}{2}\|v_+\|^2_{X_0^s(\Omega)} - \int_\Omega G(x, v_+)dx - \int_\Omega F_\lambda(u_0)dx \\ &= \mathcal{J}_{s,\lambda}(u_0) - \frac{1}{2}\|v_-\|^2_{X_0^s(\Omega)} + \overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(v). \end{aligned}$$

Usando o Lema 1.6, segue que

$$\overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(v) \geq \frac{1}{2}\|v_-\|^2_{X_0^s(\Omega)} \geq 0$$

para $\|v\|_{\mathcal{C}_s(\Omega)} < \varepsilon$. ■

1.2 Condição de Palais - Smale para $\overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}$

Assumindo que temos um único ponto crítico, provaremos que o funcional $\overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}$ satisfaz a condição de Palais - Smale local. A ferramenta principal para provar esse fato é uma extensão do principio de concentração de compacidade dado por Lions para operadores fracionários não locais. Vamos precisar de alguns resultados relacionados com o comportamento do laplaceano fracionário de um produto. Iniciamos com o seguinte.

Lema 1.9 *Seja ϕ uma função regular que satisfaz*

$$|\phi(x)| \leq \frac{C_0}{1+|x|^{N+s}}, \qquad e \qquad |\nabla\phi(x)| \leq \frac{C_0}{1+|x|^{N+s+1}}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.30}$$

para alguma constante $C_0 > 0$. Seja $B : X_0^{s/2}(\Omega) \times X_0^{s/2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ a forma bilinear definida por

$$B(f,g) := \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))}{|x-y|^{N+s}}\, dy. \tag{1.31}$$

Então, para cada $s \in (0,1)$, existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que para cada $x \in \mathbb{R}^N$ temos

$$|(-\Delta)^{s/2}\phi(x)| \leq \frac{C_1}{1+|x|^{N+s}}, \qquad e \quad |B(\phi,\phi)(x)| \leq \frac{C_2}{1+|x|^{N+s}}.$$

Prova: Seja

$$I(x) := \int_{R^N} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|^{N+s}} dy.$$

Para qualquer $x \in \mathbb{R}^N$, é claro que

$$|(-\Delta)^{s/2}\phi(x)| \leq 2I(x).$$

Também, dado que $|\phi(x)| \leq C_0$, temos

$$|B(\phi,\phi)(x)| \leq 2C_0 I(x).$$

Portanto é suficiente provar que

$$I(x) \leq \frac{C}{1+|x|^{N+s}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.32}$$

para uma constante positiva C adequada.

Dado que ϕ é uma função regular, para $|x| < 1$, obtemos que

$$I(x) \leq \|\nabla\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int\limits_{|y|<2} \frac{dy}{|y|^{N+s-1}} + \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int\limits_{|y|\geq 2} \frac{dy}{|y|^{N+s}} \leq C \leq \frac{C}{1+|x|^{N+s}}. \tag{1.33}$$

Para $|x| \geq 1$, fazemos

$$I(x) := I_{A_1}(x) + I_{A_2}(x) + I_{A_3}(x), \tag{1.34}$$

onde

$$I_{A_i}(x) := \int\limits_{A_i} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|^{N+s}}\, dy, \quad i = 1,2,3,$$

com

$$A_1 := \{y : |x-y| \leq \frac{|x|}{2}\}, \qquad A_2 := \{y : |x-y| > \frac{|x|}{2}, |y| \leq 2|x|\},$$

e

$$A_3 := \{y : |x-y| > \frac{|x|}{2}, |y| > 2|x|\}.$$

Portanto, para $|x| \geq 1$ e $y \in A_1$, temos $|\phi(x)-\phi(y)| \leq |\nabla\phi(\xi)||x-y|$ com $\frac{|x|}{2} \leq |\xi| \leq \frac{3}{2}|x|$, e por (1.30) segue que

$$I_{A_1}(x) \leq \frac{C}{|x|^{N+s+1}} \int\limits_{A_1} \frac{dy}{|x-y|^{N+s-1}} \leq C|x|^{-(N+2s)}. \tag{1.35}$$

Usando agora que, para $x, y \in \mathbb{R}^N$ temos a desigualdade

$$|\phi(x)| + |\phi(y)| \leq \frac{C}{1+\min\{|x|^{N+s}, |y|^{N+s}\}},$$

obtemos

$$I_{A_2}(x) \leq \frac{C}{|x|^{N+s}} \int\limits_{A_2} \frac{dy}{(1+|y|^{N+s})} \leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{dy}{1+|y|^{N+s}} \leq C|x|^{-(N+s)}, \tag{1.36}$$

e

$$I_{A_3} \leq \frac{C}{|x|^{N+s}} \int\limits_{A_3} \frac{dy}{|y|^{N+s}} \leq C|x|^{-(N+2s)}. \tag{1.37}$$

Note que a última estimativa segue do fato que $(x,y) \in A_3$ implica $|x-y| \geq |y|/2$. Então, por (1.34)-(1.37), temos o seguinte

$$I(x) \leq C|x|^{-(N+s)} \leq \frac{C}{1+|x|^{N+s}}, \quad |x| \geq 1. \tag{1.38}$$

Portanto, por (1.33) e (1.38), concluímos (1.32). $\blacksquare$

Para estabelecer o seguinte resultado, consideramos

$$\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \qquad \text{e} \qquad \phi_\varepsilon(x) = \phi(x/\varepsilon) \quad \text{com} \quad \varepsilon > 0. \tag{1.39}$$

Lema 1.10 *Seja $\{z_m\}$ uniformemente limitada em $X_0^s(\Omega)$ e ϕ_ε a função definida em (1.39). Então,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{m\to\infty}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} z_m(x)(-\Delta)^{s/2}\phi_\varepsilon(x)(-\Delta)^{s/2}z_m(x)\ dx\right| = 0. \tag{1.40}$$

Prova: Como $\{z_m\}$ é uniformemente limitada por uma constante positiva M no espaço reflexivo $X_0^s(\Omega)$, então existe um $z \in X_0^s(\Omega)$, tal que, a menos de subsequência,

$$\begin{aligned} z_m &\rightharpoonup z \quad \text{fracamente em } X_0^s(\Omega),\\ z_m &\to z \quad \text{fortemente em } L^r(\Omega), 1 \le r < 2_s^*,\\ z_m &\to z \quad \text{q.t.p. em } \Omega. \end{aligned} \tag{1.41}$$

Fazendo uma mudança de variável e por (13), é claro que

$$|(-\Delta)^{s/2}\phi_\varepsilon(x)| = \varepsilon^{-s}\left|((-\Delta)^{s/2}\phi)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right| \le C\varepsilon^{-s}. \tag{1.42}$$

Definindo

$$I_1 := \left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} z_m(x)(-\Delta)^{s/2}\phi_\varepsilon(x)(-\Delta)^{s/2}z_m(x)\ dx\right|,$$

de (1.42) e do fato que $\|z_m\|_{X_0^s(\Omega)} \le M$, obtemos

$$\begin{aligned} I_1 &\le \|(-\Delta)^{s/2}z_m\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|z_m(-\Delta)^{s/2}\phi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le M\|(z_m-z)(-\Delta)^{s/2}\phi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + M\|z(-\Delta)^{s/2}\phi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le C\varepsilon^{-s}\|z_m-z\|_{L^2(\Omega)} + M\|z(-\Delta)^{s/2}\phi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Dado que $\|z\|_{X_0^s(\Omega)} \le M$, então $\|z\|_{L^{2_s^*}(\Omega)} \le C$, isto é, $z^2 \in L^{\frac{N}{N-2s}}(\Omega)$. Logo, para cada $\rho > 0$, existe $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que

$$\|z^2-\eta\|_{L^{\frac{N}{N-2s}}(\Omega)} \le \rho. \tag{1.44}$$

Então, por (1.42), (1.44) e a desigualdade de Hölder com $p = N/(N-2s)$ temos

$$\begin{aligned} \|z(-\Delta)^{s/2}\phi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 &\le \int\limits_{\mathbb{R}^N}|z^2(x)-\eta(x)||(-\Delta)^{s/2}\phi_\varepsilon(x)|^2dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N}|\eta(x)||(-\Delta)^{s/2}\phi_\varepsilon(x)|^2dx\\ &\le \|z^2-\eta\|^{L^{\frac{N}{N-2s}}(\Omega)}\|(-\Delta)^{s/2}\phi_\varepsilon\|_{L^{\frac{N}{s}}}^2 + \|\eta\|_{L^\infty(\Omega)}\|(-\Delta)^{s/2}\phi_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2\\ &\le \rho\varepsilon^{-2s}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|(-\Delta)^{s/2}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^{\frac{N}{s}}dx\right)^{\frac{2s}{N}} + C\varepsilon^{-2s}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|(-\Delta)^{s/2}\phi(z)\right|^2dx\\ &\le \rho\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}|(-\Delta)^{s/2}\phi(z)|^{\frac{N}{s}}dz\right)^{\frac{2s}{N}} + C\varepsilon^{N-2s}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|(-\Delta)^{s/2}\phi(z)|^2dz\\ &\le C\rho + C\varepsilon^{N-2s}. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Assim, usando (1.41), (1.43), (1.45) e o fato que $N > 2s$, segue

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{m\to\infty} I_1 \leq \lim_{\varepsilon\to 0} C(\rho+\varepsilon^{N-2s})^{\frac{1}{2}} = C\rho^{\frac{1}{2}}.$$

Dado que $\rho > 0$ é fixo, mas arbitrariamente pequeno, concluímos assim a prova do Lema 1.10. ■

Também temos o seguinte.

Lema 1.11 *Com as mesmas hipóteses do Lema 1.10 temos*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{m\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^N}(-\Delta)^{s/2} z_m B(z_m,\phi_\varepsilon)(x)\ dx\right| = 0, \tag{1.46}$$

onde B é definida em (1.31).

Prova: Seja

$$I_2 := \left|\int_{\mathbb{R}^N}(-\Delta)^{s/2} z_m B(z_m,\phi_\varepsilon)(x)\ dx\right|.$$

Já que $\|z_m\|_{X_0^s(\Omega)} \leq M$, então

$$I_2 \leq M\|B(z_m,\phi_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq M\|B(z_m - z,\phi_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + M\|B(z,\phi_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \tag{1.47}$$

onde z é, como no Lema 1.10, o limite fraco da sequência $\{z_m\}$ em $X_0^s(\Omega)$. Vamos estimar cada parcela da desigualdade acima. Seja

$$\psi(x) := \frac{1}{1+|x|^{N+s}} \quad \text{e} \quad \psi_\varepsilon(x) := \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \tag{1.48}$$

Pelo Lema 1.9 aplicado a ϕ, note que

$$B(\phi_\varepsilon,\phi_\varepsilon)(x) = \varepsilon^{-s}B(\phi,\phi)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leq C\varepsilon^{-s}\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = C\frac{\varepsilon^{-s}}{1+|\frac{x}{\varepsilon}|^{N+s}} \leq C\varepsilon^{-s}. \tag{1.49}$$

Logo, pela desigualdade de Cauchy - Schwarz e (1.49), segue que

$$\begin{aligned}
\|B(z_m - z,\phi_\varepsilon)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} &\leq \int_{\mathbb{R}^N} B(z_m - z, z_m - z)(x) B(\phi_\varepsilon,\phi_\varepsilon)(x)\ dx \qquad (1.50)\\
&\leq C\varepsilon^{-s}\int_{\mathbb{R}^N} B(z_m - z, z_m - z)(x)\ dx\\
&= C\varepsilon^{-s}\|z_m - z\|^2_{X_0^{s/2}(\Omega)}\\
&= C\varepsilon^{-s}\int_{\mathbb{R}^N}(z_m - z)(-\Delta)^{s/2}(z_m - z)(x)\ dx\\
&\leq C\varepsilon^{-s}\|z_m - z\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|(-\Delta)^{s/2}(z_m - z)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\\
&\leq C\varepsilon^{-s}\|z_m - z\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \qquad (1.51)
\end{aligned}$$

Por outro lado, para uma função adequada f, temos que

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^N} z^2(x)(-\Delta)^{s/2} f(x)dx &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)(-\Delta)^{s/2} z^2(x)dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)(2z(x)(-\Delta)^{s/2} z(x) - B(z,z)(x))dx. \qquad (1.52)
\end{aligned}$$

Então, argumentando como em (1.50) e aplicando (1.52) com $f := \psi_\varepsilon(x)$, de (1.49) obtemos que

$$\begin{aligned}
\|B(z,\phi_\varepsilon)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} B(z,z)(x)B(\phi_\varepsilon,\phi_\varepsilon)(x)dx \\
&\leq C\varepsilon^{-s} \int\limits_{\mathbb{R}^N} B(z,z)(x)\psi_\varepsilon(x)dx \\
&\leq C\varepsilon^{-s} \int\limits_{\mathbb{R}^N} (-z^2(x)(-\Delta)^{s/2}\psi_\varepsilon(x) + 2z(x)\psi_\varepsilon(x)(-\Delta)^{s/2} z(x))dx \\
&:= I_{2,1} + I_{2,2}. \qquad (1.53)
\end{aligned}$$

Vamos estimar $I_{2,1}$ e $I_{2,2}$ separadamente. Seja $\rho > 0$. Pelo Lema 1.9 aplicado a ψ e de (1.42), segue que

$$\begin{aligned}
|I_{2,1}| &\leq C\varepsilon^{-2s} \int\limits_{\mathbb{R}^N} z^2(x)\left|((-\Delta)^{s/2}\psi)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|dx \\
&\leq C\varepsilon^{-2s} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |z^2(x)\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)|dx \\
&\leq C\varepsilon^{-2s} \int\limits_{\mathbb{R}^N} (z^2-\eta)(x)\psi_\varepsilon(x)dx + C\varepsilon^{-2s} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \eta(x)\psi_\varepsilon(x)dx, \qquad (1.54)
\end{aligned}$$

onde $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ é uma função que satisfaz (1.44). Então, de (1.54) obtemos

$$\begin{aligned}
|I_{2,1}| &\leq C\rho\varepsilon^{-2s}\|\psi_\varepsilon\|_{L^{\frac{N}{2s}}(\mathbb{R}^N)} + C\varepsilon^{-2s}\|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|\psi_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq C\rho\|\psi\|_{L^{\frac{N}{2s}}(\mathbb{R}^N)} + C\varepsilon^{N-2s}\|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}. \qquad (1.55)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$|I_{2,2}| \leq C\varepsilon^{-s}\|(-\Delta)^{s/2}z\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|z\psi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon^{-s}\|z\psi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}. \qquad (1.56)$$

Portanto, por (1.44), temos

$$\begin{aligned}|I_{2,2}|^2 &\leq C\varepsilon^{-2s}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|(z^2-\eta)(x)||\psi_\varepsilon(x)|^2dx + C\varepsilon^{-2s}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\eta(x)|\psi_\varepsilon(x)|^2dx \\ &\leq C\varepsilon^{-2s}(\rho\|\psi_\varepsilon\|^2_{L^{\frac{N}{2s}}(\mathbb{R}^N)} + \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|\psi_\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}) \\ &\leq C\rho\|\psi\|^2_{L^{\frac{N}{2s}}(\mathbb{R}^N)} + C\varepsilon^{N-2s}\|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|\psi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \qquad (1.57)\end{aligned}$$

Então, por (1.55) e (1.57), segue-se de (1.53) que

$$\|B(z,\phi_\varepsilon)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C(\rho+\rho^{1/2}) + C(\varepsilon^{N-2s}+\varepsilon^{\frac{N-2s}{2}}). \qquad (1.58)$$

Assim, de (1.41), (1.51), (1.58), e dado que $N > 2s$, obtemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{m\to\infty}(\|B(z_m-z,\phi_\varepsilon)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|B(z,\phi_\varepsilon)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}) \leq \lim_{\varepsilon\to 0} C(\rho^{1/2}+\varepsilon^{\frac{N-2s}{2}}) = C\rho^{1/2}.$$

Então, já que ρ é um valor arbitrariamente positivo,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{m\to\infty}(\|B(z_m-z,\phi_\varepsilon)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|B(z,\phi_\varepsilon)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}) = 0. \qquad (1.59)$$

Finalmente, por (1.47) e (1.59), concluímos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{m\to\infty}|I_2| = 0. \qquad (1.60)$$

■

Agora provaremos o resultado principal deste capítulo.

Lema 1.12 *Se $u \equiv 0$ é o único ponto crítico de $\overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}$ em $X_0^s(\Omega)$, então $\overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}$ satisfaz a condição $(PS)_{c_1}$, para $c_1 < c^*$, onde c^* é definido como*

$$c^* := \frac{s}{N}S(N,s)^{\frac{N}{2s}}. \qquad (1.61)$$

Aqui $S(N,s)$ denota a constante de Sobolev definida em (9).

Prova: Seja $\{u_m\}$ uma sequência de Palais-Smale para $\overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}$ satisfazendo

$$\overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(u_m) \to c_1 < c^* \quad \text{e} \quad \overline{\mathcal{J}}'_{s,\lambda}(u_m) \to 0. \qquad (1.62)$$

Então, já que existe $M > 0$ tal que $\|u_m\|_{X_0^s(\Omega)} \leq M$, e, pela hipótese de que $u \equiv 0$ é o único ponto crítico de $\overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}$, segue que

$$\begin{aligned} u_m &\rightharpoonup 0 \quad \text{fracamente em} \quad X_0^s(\Omega), \\ u_m &\to 0 \quad \text{fortemente em} \quad L^r(\Omega), 1 \leq r < 2_s^*, \\ u_m &\to 0, \quad \text{q.t.p. em } \Omega. \end{aligned} \tag{1.63}$$

Também, como u_0 é ponto crítico de $\mathcal{J}_{s,\lambda}$, temos que, tomando $z_m = u_m + u_0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{s,\lambda}(z_m) &= \overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(u_m) + \mathcal{J}_{s,\lambda}(u_0) + \lambda \int_\Omega \left(\frac{(u_0 + (u_m)_+)^{q+1}}{q+1} + u_0^q (u_m - (u_m)_+) - \frac{(u_0 + u_m)_+^{q+1}}{q+1} \right) dx \\ &+ \int_\Omega \left(\frac{(u_0 + (u_m)_+)^{2_s^*}}{2_s^*} + u_0^{2_s^*-1}(u_m - (u_m)_+) - \frac{(u_0 + (u_m)_+^{2_s^*})^{2_s^*}}{2_s^*} \right) dx \\ &\leq \overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(u_m) + \mathcal{J}_{s,\lambda}(u_0). \end{aligned} \tag{1.64}$$

Além disso, para cada $\varphi \in X_0^s(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{J}'_{s,\lambda}(z_m), \varphi \rangle &= \langle \overline{\mathcal{J}}'_{s,\lambda}(u_m), \varphi \rangle + \int_\Omega (\lambda (u_0 + (u_m)_+)^q + (u_0 + (u_m)_+)^{2_s^*-1}) \varphi dx \\ &- \int_\Omega (\lambda (u_0 + u_m)_+^q + (u_0 + u_m)_+^{2_s^*-1}) \varphi dx. \end{aligned} \tag{1.65}$$

Então, por (1.62), (1.63) e (1.65) obtemos que

$$\mathcal{J}'_{s,\lambda}(z_m) \to 0. \tag{1.66}$$

De (1.64) e (1.66) resulta que a sequência $\{z_m\}$ é uniformemente limitada em $X_0^s(\Omega)$. O fato que $u \equiv 0$ é o único ponto crítico de $\mathcal{J}_{s,\lambda}$, a menos de subsequência, temos que

$$\begin{aligned} z_m &\rightharpoonup u_0 \quad \text{fracamente em} \quad X_0^s(\Omega), \\ z_m &\to u_0 \quad \text{fuertemente em} \quad L^r(\Omega), 1 \leq r < 2_s^*, \\ z_m &\to u_0 \quad \text{q.t.p. em } \Omega. \end{aligned} \tag{1.67}$$

Da Proposição 0.5 e aplicando [25, Teorema 1.5] temos que existem um conjunto de índices $I \subseteq \mathbb{N}$, uma sequência de pontos $\{x_k\}_{k \in I} \subset \overline{\Omega}$ e duas sequências não negativas de números reais $\{\mu_k\}_{k \in I}$, $\{\nu_k\}_{k \in I}$, tais que

$$|(-\Delta)^{s/2}(z_m)_+|^2 \rightharpoonup \mu \geq |(-\Delta)^{s/2} u_0|^2 + \sum_{k \in I} \mu_k \delta_{x_k}. \tag{1.68}$$

Além disso,

$$|(z_m)_+|^{2_s^*} \rightharpoonup \nu = |u_0|^{2_s^*} + \sum_{k \in I} \nu_k \delta_{x_k}, \tag{1.69}$$

no sentido das medidas, com

$$\nu_k \leq S(N,s)^{-\frac{2_s^*}{2}} \mu_k^{\frac{2_s^*}{2}}, \quad \text{para cada } k \in I. \tag{1.70}$$

Fixemos um $k_0 \in I$, e consideremos $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ não negativo satisfazendo

$$\phi = 1 \quad \text{em} \quad B_1(x_{k_0}) \quad \text{e} \quad \phi = 0 \quad \text{em} \quad B_2(x_{k_0})^c. \tag{1.71}$$

Seja, agora,

$$\phi_\varepsilon = \phi(x/\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.72}$$

Então, usando $(z_m)_+\phi_\varepsilon$ como uma função test em (1.66), por (18) e o fato que

$$\int_{\mathbb{R}^N} ((z_m)_+\phi_\varepsilon)(-\Delta)^s z_m \, dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} ((z_m)_+\phi_\varepsilon)(-\Delta)^s (z_m)_+ \, dx,$$

temos

$$0 \geq \lim_{m\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^N} ((z_m)_+\phi_\varepsilon)(-\Delta)^s (z_m)_+ \, dx - \left(\lambda \int_{B_{2\varepsilon}(x_{k_0})} ((z_m)_+)^{q+1}\phi_\varepsilon \, dx + \int_{B_{2\varepsilon}(x_{k_0})} ((z_m)_+)^{2_s^*}\phi_\varepsilon \, dx\right)\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty}\Bigg(\int_{\mathbb{R}^N} (z_m)_+(x)(-\Delta)^{s/2}(z_m)_+(x)(-\Delta)^{s/2}\phi_\varepsilon(x)dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2}(z_m)_+(x) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(\phi_\varepsilon(x)-\phi_\varepsilon(y))((z_m)_+(x)-(z_m)_+(y))}{|x-y|^{N+s}} dxdy\Bigg) \\
&\quad \leq \lim_{m\to\infty}\left(\lambda \int_{B_{2\varepsilon}(x_{k_0})} ((z_m)_+)^{q+1}\phi_\varepsilon \, dx + \int_{B_{2\varepsilon}(x_{k_0})} ((z_m)_+)^{2_s^*}\phi_\varepsilon \, dx - \int_{B_{2\varepsilon}(x_{k_0})} ((-\Delta)^{s/2}(z_m)_+)^2\phi_\varepsilon dx\right).
\end{aligned}$$

Portanto, por (1.67), (1.68) e (1.69) obtemos

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{m\to\infty}\Bigg(\int_{\mathbb{R}^N} (z_m)_+(x)(-\Delta)^{s/2}(z_m)_+(x)(-\Delta)^{s/2}\phi_\varepsilon(x)dx \\
&\qquad - \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2}(z_m)_+(x) B(\phi_\varepsilon,(z_m)_+)(x)dx\Bigg) \\
&\leq \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\lambda \int_{B_{2\varepsilon}(x_{k_0})} u_0^{q+1}\phi_\varepsilon \, dx + \int_{B_{2\varepsilon}(x_{k_0})} \phi_\varepsilon \, d\nu - \int_{B_{2\varepsilon}(x_{k_0})} \phi_\varepsilon d\mu\right).
\end{aligned} \tag{1.73}$$

Como ϕ é uma função regular com suporte compacto, é claro que satisfaz as hipóteses do Lema 1.9. Então, pelos Lema 1.10 e Lema 1.11, aplicados à sequência $\{(z_m)_+\}$, segue que a parte esquerda de (1.73) é igual a zero. Isto é, obtemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\lambda \int\limits_{B_{2\varepsilon}(x_{k_0})} u_0^{q+1}\phi_\varepsilon \, dx + \int\limits_{B_{2\varepsilon}(x_{k_0})} \phi_\varepsilon \, d\nu - \int\limits_{B_{2\varepsilon}(x_{k_0})} \phi_\varepsilon d\mu\right) = \nu_{k_0} - \mu_{k_0} \geq 0.$$

Assim, de (1.70), temos que: ou $\nu_{k_0} = 0$, ou

$$\nu_{k_0} \geq S(N,s)^{\frac{N}{2s}}. \tag{1.74}$$

Suponha agora que $\nu_{k_0} \neq 0$. Por (1.64), (1.66) e (1.74) obtemos que

$$\begin{aligned} c_1 + \mathcal{J}_{s,\lambda}(u_0) &\geq \lim_{m\to\infty} (\mathcal{J}_{s,\lambda}(z_m) - \frac{1}{2}\langle \mathcal{J}'_{s,\lambda}(z_m), z_m\rangle) \\ &\geq \lambda\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\int\limits_\Omega u_0^{q_1} dx + \frac{s}{N}\int\limits_\Omega u_0^{2_s^*} dx + \frac{s}{N}\nu_{k_0} \\ &\geq \mathcal{J}_{s,\lambda}(u_0) + \frac{s}{N} S(N,s)^{\frac{N}{2s}} \\ &= \mathcal{J}_{s,\lambda}(u_0) + c^*. \end{aligned}$$

Isto é uma contradição com (1.61). Dado que k_0 foi arbitrario, deduzimos que $\nu_k = 0$ para todo $k \in I$. Como uma consequência obtemos que $(u_m)_+ \to 0$ em $L^{2_s^*}(\Omega)$. Note que, já que u_m é igual a zero fora de Ω, de fato temos que $(u_m)_+ \to 0$ em $L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)$. Isto implica a convergência de $\lambda((u_m)_+)^q + ((u_m)_+)^{2_s^*-1}$ em $L^{\frac{2N}{N+2s}}(\mathbb{R}^N)$. Finalmente, usando a continuidade do operador inverso $(-\Delta)^{-s}$, obtemos convergencia forte de u_m em $X_0^s(\Omega)$. ■

1.3 Multiplicidade de soluções

No Lema 1.12 provamos que se $u \equiv 0$ é o único ponto crítico do funcional $\overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}$, então $\overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}$ verifica a condição de Palais-Smale em qualquer nível $c_1 < c^*$, onde c^* é o nível crítico definido em (1.61).

Agora, queremos mostrar que podemos obter uma sequência $(PS)_c$ local para $\overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}$ abaixo do nível crítico c^*. Para isso, assumimos, sem perda de generalidade, que $0 \in \Omega$. Por [12] o ínfimo em (9) é atingido na função

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon^{(N-2s)/2}}{(|x|^2 + \varepsilon^2)^{(N-2s)/2}}, \quad \varepsilon > 0, \tag{1.75}$$

isto é,

$$\|(-\Delta)^{s/2}u_\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \int\limits_{\mathbb{R}^N x\mathbb{R}^N} \frac{|u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy = S(N,s)\|u_\varepsilon\|^2_{L^{2^*_s}(\mathbb{R}^N)}. \tag{1.76}$$

Além disso, introduzimos uma função $\phi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\phi_0 \geq 0$, satisfazendo

$$\phi_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2, \\ 0 & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

Para algum $r > 0$ suficientemente pequeno tal que $\overline{B}_r \subset \Omega$ com centro em zero, seja $\phi(x) = \phi_r(x) = \phi_0(\frac{|x|}{r})$ e considere a familia de funções truncadas não negativas

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{\phi u_\varepsilon(x)}{\|\phi u_\varepsilon\|_{L^{2^*_s}(\Omega)}} \in X^s_0(\Omega). \tag{1.77}$$

Então, temos o seguinte.

Lema 1.13 *Existe um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que*

$$\sup_{t\geq 0} \overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(t\eta_\varepsilon) < c^*. \tag{1.78}$$

Prova: Seguiremos a prova de [2].

Assuma $N \geq 4s$. Dado que

$$(a+b)^p \geq a^p + b^p + \mu a^{p-1}b, \quad \text{para algum } \mu > 0 \text{ e cada } a,\ b \geq 0,\ p > 1, \tag{1.79}$$

então a função G_λ definida em (1.28), satisfaz

$$G_\lambda(u) \geq \frac{1}{2^*s}(u_+)^{2^*_s} + \frac{\mu}{2}(u_+)^2 u_0^{2^*_s-2}. \tag{1.80}$$

Portanto,

$$\overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(t\eta_\varepsilon) \leq \frac{t^2}{2}\|\eta_\varepsilon\|^2_{X^s_0(\Omega)} - \frac{t^{2^*_s}}{2^*_s} - \frac{t^2}{2}\mu\int\limits_\Omega u_0^{2^*_s-2}\eta_\varepsilon^2\, dx. \tag{1.81}$$

Já que $u_0 \geq a_0 > 0$ no suporte de η_ε temos, para $t \geq 0$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$\overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(t\eta) \leq \frac{t^2}{2}\|\eta_\varepsilon\|^2_{X^s_0(\Omega)} - \frac{t^{2^*_s}}{2^*_s} - \frac{t^2}{2}\widetilde{\mu}\|\eta_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{1.82}$$

Além disso, como $\|u_\varepsilon\|_{L^{2^*_s}(\mathbb{R}^N)}$ é independente de ε, por [29, Proposição 21] temos

$$\begin{aligned} \|\eta_\varepsilon\|^2_{X^s_0(\Omega)} &= \frac{\|\phi u_\varepsilon\|^2_{X^s_0(\Omega)}}{\|\phi u_\varepsilon\|^2_{L^{2^*_s}(\Omega)}} \\ &\leq \frac{\int_{\mathbb{R}^N x\mathbb{R}^N} \frac{|u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy}{\|\phi u_\varepsilon\|^2_{L^{2^*_s}(\Omega)}} + O(\varepsilon^{N-2s}) \\ &= S(N,s) + O(\varepsilon^{N-2s}). \end{aligned} \tag{1.83}$$

Além do mais, por [29, Proposição 22] segue que

$$\|\eta_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \begin{cases} C\varepsilon^{2s}, & \text{se } N > 4s, \\ C\varepsilon^{2s}\log(1/\varepsilon), & \text{se } N = 4s. \end{cases} \tag{1.84}$$

Portanto, de (1.82), (1.83) e (1.84), resulta

$$\overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(t\eta_\varepsilon) \leq \frac{t^2}{2}(S(N,s) + C\varepsilon^{N-2s}) - \frac{t^{2_s^*}}{2_s^*} - \frac{t^2}{2}\widetilde{C}\varepsilon^{2s} := g(t), \tag{1.85}$$

com $\widetilde{C}$ positivo. Dado que $\lim_{t\to\infty} g(t) = -\infty$, então $\sup_{t\geq 0} g(t)$ é atingido em algum $t_{\varepsilon,\lambda} := t_\varepsilon \geq 0$. Se $t_\varepsilon = 0$, então

$$\sup_{t\geq 0} \overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(t\eta\varepsilon) \leq \sup_{t\geq 0} g(t) = g(0) = 0, \tag{1.86}$$

para qualquer $0 < \lambda < \Lambda$ e (1.78) é trivialmente verificado. Agora, suponha que $t_\varepsilon > 0$. Derivando a função acima $g(t)$, obtemos que

$$0 = g'(t_\varepsilon) = t_\varepsilon(S(N,s) + C\varepsilon^{N-2s}) - t_\varepsilon^{2_s^*-1} - t_\varepsilon\widetilde{C}\varepsilon^{2s}, \tag{1.87}$$

o que implica

$$t_\varepsilon \leq (S(N,s) + C\varepsilon^{N-2s})^{\frac{1}{2_s^*-2}}. \tag{1.88}$$

Também temos, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$t_\varepsilon \geq c > 0. \tag{1.89}$$

Isto segue de (1.87), que resulta

$$t_\varepsilon^{2_s^*-2} = S(N,s) + C\varepsilon^{N-2s} - \widetilde{C}\varepsilon^{2s} \geq c > 0,$$

para um ε adequado. Além do mais, a função

$$t \mapsto \frac{t^2}{2}(S(N,s) + C\varepsilon^{N-2s}) - \frac{t^{2_s^*}}{2_s^*}$$

é crecente em $[0, (S(N,s) + C\varepsilon^{N-2s})^{\frac{1}{2_s^*-2}}]$. Donde, por (1.88) e (1.89), obtemos

$$\sup_{t\geq 0} = g(t_\varepsilon) \leq \frac{s}{N}(S(N,s) + C\varepsilon^{N-2s})^{\frac{N}{2s}} - \overline{C}\varepsilon^{2s},$$

para algum $\overline{C} > 0$. Portanto, por (1.85), para $N > 4s$, temos que

$$\sup_{t\geq 0} \overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(t\eta_\varepsilon) \leq g(t_\varepsilon) \leq \frac{s}{N} S(N,s)^{\frac{N}{2s}} + C\varepsilon^{N-2s} - \overline{C}\varepsilon^{2s} < \frac{s}{N} S(N,s)^{\frac{N}{2s}} = c^*. \tag{1.90}$$

Se $N = 4s$ a mesma conclusão segue.

O último caso $2s < N < 4s$ segue usando a estimativa (1.79) que dá

$$G_\lambda(u) \geq \frac{1}{2_s^*}(u_+)^{2_s^*} + \frac{\mu}{2_s^* - 1} u_0 (u_+)^{2_s^*-1}. \tag{1.91}$$

Então, (1.91), junto com a estimativa de [29, Proposição 22], ao invés de (1.84), e argumentando de um jeito similar como antes, finalizamos a prova. ■

Para completar a existencia da segunda solução, isto é, o item 4 do Teorema 1.2, em vista dos resultados prévios, procuramos um caminho inferior ao nível crítico c^*. Fixemos um $\lambda \in (0, \Lambda)$. Consideramos $M_\varepsilon > 0$ suficientemente grande tal que $\overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(M_\varepsilon \eta_\varepsilon) < \overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(0)$. Note que tal M_ε existe, pois $\lim_{t\to\infty} \overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(t\eta_\varepsilon) = -\infty$. Também, pelo Lema 1.8, existe $\alpha > 0$ tal que se $\|u\|_{X_0^s(\Omega)} = \alpha$, então $\overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(u) \geq \overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(0)$. Definimos

$$\Gamma_\varepsilon = \{\gamma \in C([0,1], X_0^s(\Omega)) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = M_\varepsilon \eta_\varepsilon\},$$

e o valor minimax

$$c_\varepsilon = \inf_{\gamma\in\Gamma_\varepsilon} \sup_{0\leq t\leq 1} \overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(\gamma(t)). \tag{1.92}$$

Por argumentos anteriores, $c_\varepsilon \geq \overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(0)$. Também, pelo Lema 1.13, para $\varepsilon \ll 1$ obtemos que

$$c_\varepsilon \leq \sup_{0\leq t\leq 1} \overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(tM_\varepsilon \eta_\varepsilon) = \sup_{t\geq 0} \overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(t\eta_\varepsilon) < c^*.$$

Para completar a existência da segunda solução, isto é, o item 4 do Teorema 1.2, em vista dos resultados prévios, procuramos um caminho inferior ao nível crítico c^*. Fixemos um $\lambda \in (0, \Lambda)$. Consideramos $M_\varepsilon > 0$ suficientemente grande tal que $\overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(M_\varepsilon \eta_\varepsilon) < \overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(0)$. Note que tal M_ε existe, pois $\lim_{t\to\infty} \overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(t\eta_\varepsilon) = -\infty$. Também, pelo Lema 1.8, existe $\alpha > 0$ tal que se $\|u\|_{X_0^s(\Omega)} = \alpha$, então $\overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(u) \geq \overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(0)$. Definimos

$$\Gamma_\varepsilon = \{\gamma \in C([0,1], X_0^s(\Omega)) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = M_\varepsilon \eta_\varepsilon\},$$

e o valor minimax

$$c_\varepsilon = \inf_{\gamma\in\Gamma_\varepsilon} \sup_{0\leq t\leq 1} \overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(\gamma(t)). \tag{1.93}$$

Por argumentos anteriores, $c_\varepsilon \geq \overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(0)$. Também, pelo Lema 1.13, para ε suficientemente pequeno, obtemos que

$$c_\varepsilon \leq \sup_{0\leq t\leq 1} \overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(tM_\varepsilon \eta_\varepsilon) = \sup_{t\geq 0} \overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(t\eta_\varepsilon) < c^*.$$

Portanto, pelo Lema 1.12 e o Teorema Passo da Montanha se $c_\varepsilon > \overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(0)$, ou o correspondente refinamento dado em [18] se o nível minimax é igual a $\overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}(0)$, obtemos a existência de uma solução não trivial de $(\overline{P}_\lambda)$, tendo que $u \equiv 0$ é a única solução. Claro que isto é uma contradição. Assim, $\overline{\mathcal{J}}_{s,\lambda}$ admite um ponto crítico v distinto da função trivial. Logo, $u = u_0 + v$ é uma solução, diferente de u_0, do problema (P_λ). Isto finaliza a prova do Teorema 1.2.

Capítulo 2

Caso crítico e convexo $1 < q < 2_s^* - 1$

Neste capítulo dedicaremos o estudo ao problema (P_λ) no caso do exponente $1 < q < 2_s^* - 1$.

Para encontrar soluções de (P_λ), como no caso côncavo, temos que encontrar as soluções de (P_λ^+). Para isso, vamos determinar os pontos críticos de $\mathcal{J}_{s,\lambda}$ usando as ferramentas variacionais. Em resumo, enunciamos o teorema que prova a existência de soluções para (P_λ).

Teorema 2.1 *Suponha $1 < q < 2_s^* - 1$, $0 < s < 1$ e $N > 2s$. Então, o problema (P_λ) admite no mínimo uma solução para ou*

* $N > \frac{2s(q+3)}{q+1}$ *é* $\lambda > 0$, *ou*

* $N \leq \frac{2s(q+3)}{q+1}$ *e* λ *suficientemente grande.*

Antes de tudo, vamos ver que o funcional $\mathcal{J}_{s,\lambda}$ tem uma boa geometria. Isto é, temos o seguinte.

Proposição 2.2 *Suponha $\lambda > 0$ e $1 < q < 2_s^* - 1$. Então, existem $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que:*

1. *para qualquer $u \in X_0^s(\Omega)$ com $\|u\|_{X_0^s(\Omega)} = \alpha$ tem-se $\mathcal{J}_{s,\lambda}(u) \geq \beta$,*

2. *existe uma função positiva $e \in X_0^s(\Omega)$ tal que $\|e\|_{X_0^s(\Omega)} > \alpha$ e $\mathcal{J}_{s,\lambda}(e) < \beta$.*

Prova: 1) Pelas imersões de Sobolev, dado que $q + 1 < 2_s^*$, é fácil ver que,

$$\mathcal{J}_{s,\lambda}(u) \geq g(\|u\|_{X_0^s(\Omega)}), \tag{2.1}$$

onde $g(t) = c_1t^2 - \lambda c_2 t^{q+1} - c_3 t^{2_s^*}$, para algumas constantes c_1, c_2 e c_3. Portanto, existe um $\alpha > 0$ tal que $\beta := g(\alpha) > 0$. Logo, $\mathcal{J}_{s,\lambda}(u) \geq \beta$ para $u \in X_0^s(\Omega)$ com $\|u\|_{X_0^s(\Omega)} = \alpha$.

2) Fixe uma função positiva $u_0 \in X_0^s(\Omega)$ tal que $\|u_0\|_{X_0^s(\Omega)} = 1$. Dado que $2_s^* > 2$, segue de (2.1),

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{J}_{s,\lambda}(tu_0) = -\infty.$$

Então, existe um t_0 suficientemente grande, tal que para $e := t_0u_0$, temos $\|e\|_{X_0^s(\Omega)} > \alpha$ e $\mathcal{J}_{s,\lambda}(e) < \beta$. ■

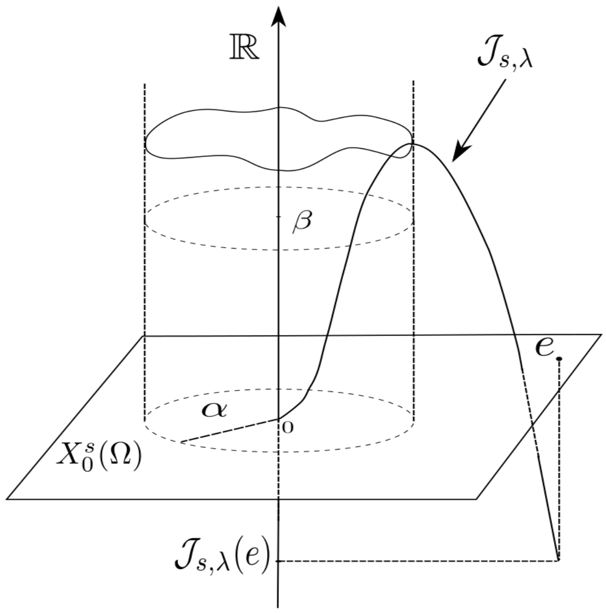

Figura 2.1: Geometria do funcional $\mathcal{J}_{s,\lambda}$.

2.1 Condição de Palais - Smale para $\mathcal{J}_{s,\lambda}$

Proposição 2.3 *Sejam $\lambda > 0$ e $1 < q < 2_s^* - 1$. Então, o funcional $\mathcal{J}_{s,\lambda}$ satisfaz a condição $(PS)_{c_2}$ para $c_2 < c^*$, onde c^* é definido em (9).*

Prova: Seja $\{u_m\}$ uma sequência $(PS)_{c_2}$ para $\mathcal{J}_{s,\lambda}$ em $X_0^s(\Omega)$, isto é,

$$\mathcal{J}_{s,\lambda}(u_m) \to c_2 \quad \text{e} \quad \mathcal{J}'_{s,\lambda}(u_m) \to 0. \tag{2.2}$$

Então, $\{u_m\}$ está limitado em $X_0^s(\Omega)$ por (2.2), isto é, existe um $M > 0$ tal que

$$\|u_m\|_{X_0^s(\Omega)} \leq M. \tag{2.3}$$

Afirmação 1: Existe $u_\infty \in X_0^s(\Omega)$ tal que

$$\langle \mathcal{J}'_{s,\lambda}(u_\infty), \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in X_0^s(\Omega).$$

Prova: Por (2.3) e o fato de $X_0^s(\Omega)$ ser reflexivo, existe $u_\infty \in X_0^s(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência,

$$\begin{aligned} u_m &\rightharpoonup u_\infty \quad \text{em} \quad X_0^s(\Omega), \\ u_m &\rightharpoonup u_\infty \quad \text{em} \quad L^{2_s^*}(\Omega), \\ u_m &\to u_\infty \quad \text{em} \quad L^r(\Omega),\ 1 \leq r < 2_s^*, \\ u_m &\to u_\infty \quad \text{q.t.p.} \quad \text{em} \quad \Omega. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Assim, tomando $m \to \infty$ e por (2.2) e (2.4) concluímos

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{(u_\infty(x) - u_\infty(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy = \lambda \int\limits_\Omega ((u_\infty)_+)^q \varphi dx + \int\limits_\Omega ((u_\infty)_+)^{2_s^*-1} \varphi dx,$$

para todo $\varphi \in X_0^s(\Omega)$, isto é, $\langle \mathcal{J}'_{s,\lambda}(u_\infty), \varphi \rangle = 0$. $\square$

Afirmação 2: É válida a seguinte igualdade:

$$\mathcal{J}_{s,\lambda}(u_m) = \mathcal{J}_{s,\lambda}(u_\infty) + \frac{1}{2}\|u_m - u_\infty\|^2_{X_0^s(\Omega)} - \frac{1}{2_s^*} \int\limits_\Omega |(u_m)_+(x) - (u_\infty)_+(x)|^{2_s^*} dx + o(1).$$

Prova: Por (2.3) e pelas imersões de Sobolev, a sequência u_m é limitada em $X_0^s(\Omega)$ e em $L^{2_s^*}(\Omega)$. Logo, (2.4) é válido, e pelo lema de Brezis-Lieb ([7]) temos

$$\|u_m\|^2_{X_0^s(\Omega)} = \|u_m - u_\infty\|^2_{X_0^s(\Omega)} + \|u_\infty\|^2_{X_0^s(\Omega)} + o(1), \tag{2.5}$$

$$\int\limits_\Omega |(u_m)_+|^{2_s^*} dx = \int\limits_\Omega |(u_m)_+(x) - (u_\infty)_+(x)|^{2_s^*} dx + \int\limits_\Omega |(u_\infty)_+|^{2_s^*} dx + o(1), \tag{2.6}$$

e

$$\|(u_m)_+\|_{L^{q+1}(\Omega)} \to \|(u_\infty)_+\|_{L^{q+1}(\Omega)}. \tag{2.7}$$

Segue de (2.5), (2.6) e (2.7),

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{s,\lambda}(u_m) \ &= \frac{1}{2}\|u_m - u_\infty\|^2_{X_0^s(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u_\infty\|^2_{X_0^s(\Omega)} - \frac{\lambda}{q+1} \int\limits_\Omega ((u_\infty)_+)^{q+1} dx \\ &\quad - \frac{1}{2_s^*} \int\limits_\Omega |(u_m)_+(x) - (u_\infty)_+(x)|^{2_s^*} dx - \frac{1}{2_s^*} \int\limits_\Omega ((u_\infty)_+)^{2_s^*} dx + o(1) \\ &= \mathcal{J}_{s,\lambda}(u_\infty) + \frac{1}{2}\|u_m - u_\infty\|^2_{X_0^s(\Omega)} - \frac{1}{2_s^*} \int\limits_\Omega |(u_m)_+(x) - (u_\infty)_+(x)|^{2_s^*} dx + o(1), \end{aligned}$$

o que dá o resultado da afirmação. $\square$

Afirmação 3: A seguinte estimativa é válida:

$$\begin{aligned}\|u_m - u_\infty\|^2_{X_0^s(\Omega)} &= \int_\Omega |(u_m)_+(x) - (u_\infty)_+(x)|^{2_s^*} dx + o(1)\\ &\leq \int_\Omega |u_m(x) - u_\infty(x)|^{2_s^*} dx + o(1).\end{aligned}$$

Prova: Note que, como uma consequência de (2.4) e (2.6), temos

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (((u_m)_+)^{2_s^*-1}(x) - ((u_\infty)_+)^{2_s^*-1}(x))(u_m(x) - u_\infty(x))dx\\ &= \int_\Omega ((u_m)_+)^{2_s^*} dx - \int_\Omega ((u_\infty)_+)^{2_s^*-1} u_m dx - \int_\Omega ((u_m)_+)^{2_s^*-1} u_\infty dx + \int_\Omega ((u_\infty)_+)^{2_s^*} dx\\ &= \int_\Omega ((u_m)_+)^{2_s^*} dx - \int_\Omega ((u_\infty)_+)^{2_s^*} dx + o(1)\\ &= \int_\Omega |(u_m)_+(x) - (u_\infty)_+(x)|^{2_s^*} dx + o(1).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Por outro lado, de (2.4) e (2.7) obtemos

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (((u_m)_+)^q(x) - ((u_\infty)_+)^q(x))(u_m(x) - u_\infty(x))dx\\ &\quad = \int_\Omega ((u_m)_+)^{q+1} dx - \int_\Omega ((u_\infty)_+)^q u_m dx - \int_\Omega ((u_m)_+)^q u_\infty dx + \int_\Omega ((u_\infty)_+)^{q+1} dx\\ &\quad = o(1).\end{aligned} \tag{2.9}$$

Então, por (2.2), Afirmação 1, (2.8) e (2.9), concluimos que

$$\begin{aligned}o(1) &= \langle \mathcal{J}'_{s,\lambda}(u_m), u_m - u_\infty\rangle\\ &= \langle \mathcal{J}'_{s,\lambda}(u_m) - \mathcal{J}'_{s,\lambda}(u_\infty), u_m - u_\infty\rangle\\ &= \|u_m - u_\infty\|^2_{X_0^s(\Omega)} - \lambda \int_\Omega (((u_m)_+)^q(x) - ((u_\infty)_+)^q(x))(u_m(x) - u_\infty(x))dx\\ &\quad - \int_\Omega (((u_m)_+)^{2_s^*}(x) - ((u_\infty)_+)^{2_s^*}(x))(u_m(x) - u_\infty(x))dx\\ &= \|u_m - u_\infty\|^2_{X_0^s(\Omega)} - \int_\Omega |(u_m)_+(x) - (u_\infty)_+(x)|^{2_s^*} dx + o(1).\end{aligned}$$

A última igualdade mostra (2.8). $\square$

Agora, podemos finalizar a prova da Proposição 2.3. Pela Afirmação 3 sabemos que

$$\frac{1}{2}\|u_m - u_\infty\|^2_{X_0^s(\Omega)} - \frac{1}{2_s^*}\int_\Omega |(u_m)_+(x) - (u_\infty)_+(x)|^{2_s^*}dx = \frac{s}{N}\|u_m - u_\infty\|^2_{X_0^s(\Omega)} + o(1). \quad (2.10)$$

Logo, por (2.2), Afirmação 2 e (2.10), obtemos

$$\mathcal{J}_{s,\lambda}(u_\infty) + \frac{s}{N}\|u_m - u_\infty\|^2_{X_0^s(\Omega)} = \mathcal{J}_{s,\lambda}(u_m) + o(1) = c_2 + o(1). \quad (2.11)$$

Por outro lado, por (2.3), a menos de subsequência, podemos assumir que

$$\|u_m - u_\infty\|^2_{X_0^s(\Omega)} \to L \geq 0, \quad (2.12)$$

e daí, como uma consequência da Afirmação 3,

$$\int_\Omega |u_m(x) - u_\infty(x)|^{2_s^*}dx \to \widetilde{L} \geq L.$$

Pela definição de $S(N,s)$, temos

$$L \geq S(N,s)\widetilde{L}^{2/2_s^*} \geq S(N,s)L^{2/2_s^*},$$

logo,

$$L = 0 \qquad \text{ou} \qquad L \geq S(N,s)^{\frac{N}{2s}}.$$

Mostremos que o caso $L \geq S(N,s)^{\frac{N}{2s}}$ não pode acontecer. Com efeito, tomando $\varphi = u_\infty \in X_0^s(\Omega)$ como uma função test na Afirmação 1, temos que

$$\|u_\infty\|^2_{X_0^s(\Omega)} = \lambda\int_\Omega ((u_\infty)_+)^{q+1}dx + \int_\Omega ((u_\infty)_+)^{2_s^*}dx.$$

Assim,

$$\mathcal{J}_{s,\lambda}(u_\infty) = \lambda\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\|(u_\infty)_+\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} + \frac{S}{N}\|(u_\infty)_+\|^{2_s^*}_{L^{2_s^*}(\Omega)} \geq 0, \quad (2.13)$$

Portanto, se $L \geq S(N,s)^{\frac{N}{2s}}$, então, por (2.11), (2.12) e (2.13), temos

$$c_2 = \mathcal{J}_{s,\lambda}(u_\infty) + \frac{s}{N}L \geq \frac{s}{N}L \geq \frac{s}{N}S(N,s)^{\frac{N}{2s}} = c^*,$$

contradizendo o fato que $c_2 < c^*$. Assim $L = 0$ e, daí, por (2.12), obtemos

$$\|u_m - u_\infty\|_{X_0^s(\Omega)} \to 0.$$

■

2.2 Existência de soluções

Dado que $1 < q < 2_s^* - 1$, via imersões de Sobolev, é fácil ver que $\mathcal{J}_{s,\lambda}$ é contínuo em $X_0^s(\Omega)$, é daí

$$\lim_{t \to 0^+} |\mathcal{J}_{s,\lambda}(tu_0)| = 0, \tag{2.14}$$

para um $u_0 \in X_0^s(\Omega)$ fixo.

Pela Proposição 2.2 e (2.14) obtemos que $\mathcal{J}_{s,\lambda}$ satisfaz as caraterísticas geométricas requeridas no Teorema Passo da Montanha. Além disso, pela Proposição 2.3, o funcional $\mathcal{J}_{s,\lambda}$ verifica a condição de Palais - Smale no nível c, para $c < c^*$.

Agora, como no caso cóncavo, achamos um caminho com valor inferior ao nível crítico c^*. Assim, temos o seguinte.

Lema 2.4 *Sejam $\lambda > 0$, c^* como em (1.61) e η_ε a função não negativa definida em (1.77). Então existe um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que*

$$\sup_{t \geq 0} \mathcal{J}_{s,\lambda}(t\eta_\varepsilon) < c^*,$$

para
i) $N > \frac{2s(q+3)}{q+1}$ e $\lambda > 0$ ou,
ii) $N \leq \frac{2s(q+3)}{q+1}$ e $\lambda > \lambda_s$, para um $\lambda_s > 0$ adequado.

Prova: i) Seja $N > \frac{2s(q+3)}{q+1}$. Para algumas constantes C e $\widetilde{C}$, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon^{q+1}(x)dx &\geq C \int_{|x|<r} u_\varepsilon^{q+1} dx \\
&= C\varepsilon^{(\frac{N-2s}{2})(q+1)} \int_{|x|<r} \frac{dx}{(|x|^2 + \varepsilon^2)^{\frac{(N-2s)(q+1)}{2}}} \\
&= C\varepsilon^{-(\frac{N-2s}{2})(q+1)} \int_0^r \frac{\rho^{N-1}}{(1 + (\frac{\rho}{\varepsilon})^2)^{\frac{(N-2s)(q+1)}{2}}} d\rho \\
&= C\varepsilon^{N-(\frac{N-2s}{2})(q+1)} \int_0^{r/\varepsilon} \frac{t^{N-1}}{(1+t^2)^{\frac{(N-2s)(q+1)}{2}}} dt \\
&\geq C\varepsilon^{N-(\frac{N-2s}{2})(q+1)} \int_{1/2}^{1} t^{N-1} dt \\
&\geq \widetilde{C}\varepsilon^{N-(\frac{N-2s}{2})(q+1)}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Então, por (1.83) e (2.15), para qualquer $t \geq 0$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{s,\lambda}(t\eta_\varepsilon) &= \frac{t^2}{2}\|\eta_\varepsilon\|^2_{X_0^s(\Omega)} - \frac{t^{2_s^*}}{2_s^*} - \lambda\frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega \eta_\varepsilon^{q+1}dx \\ &\leq \frac{t^2}{2}(S(N,s) + C\varepsilon^{N-2s}) - \frac{t^{2_s^*}}{2_s^*} - \widetilde{C}\lambda\frac{t^{q+1}}{q+1}\varepsilon^{N-(\frac{N-2s}{2})(q+1)} =: g(t). \quad (2.16)\end{aligned}$$

É claro que

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = -\infty,$$

portanto $\sup_{t\geq 0} g(t)$ é atingido em algum $t_{\varepsilon,\lambda} := t_\varepsilon \geq 0$. Como foi comentado na prova do Lema 1.13, podemos assumir que $t_\varepsilon > 0$. Derivando g e igualando a zero, obtemos

$$0 = g'(t_\varepsilon) = t_\varepsilon(S(N,s) + C\varepsilon^{N-2s}) - t_\varepsilon^{2_s^*-1} - \widetilde{C}\lambda t_\varepsilon^q \varepsilon^{N-(\frac{N-2s}{2})(q+1)}. \quad (2.17)$$

Assim,

$$t_\varepsilon < (S(N,s) + C\varepsilon^{N-2s})^{\frac{1}{2_s^*-2}}.$$

Além disso, temos para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno

$$t_\varepsilon \geq c > 0. \quad (2.18)$$

Com efeito, de (2.17) segue que

$$t_\varepsilon^{2_s^*-2} + \widetilde{C}\lambda t_\varepsilon^{q-1}\varepsilon^{N-(\frac{N-2s}{2})(q+1)} = S(N,s) + C\varepsilon^{N-2s} \geq c > 0.$$

Também, dado que a função

$$t \mapsto \frac{t^2}{2}(S(N,s) + C\varepsilon^{N-2s}) - \frac{t^{2_s^*}}{2_s^*} \quad (2.19)$$

é crecente em $[0, (S(N,s) + C\varepsilon^{N-2s})^{\frac{1}{2_s^*-2}}]$, por (2.16) e (2.18), obtemos

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq 0} g(t) = g(t_\varepsilon) &\leq \frac{s}{N}(S(N,s) + C\varepsilon^{N-2s})^{\frac{N}{2s}} - \overline{C}\varepsilon^{N-(\frac{N-2s}{2})(q+1)} \\ &\leq \frac{s}{N}S(N,s)^{\frac{N}{2s}} + C\varepsilon^{N-2s} - \overline{C}\varepsilon^{N-(\frac{N-2s}{2})(q+1)}, \quad (2.20)\end{aligned}$$

para alguma constante $\overline{C} > 0$. Finalmente, das hipóteses sobre N, concluímos de (2.20) que

$$\sup_{t\geq 0} \mathcal{J}_{s,\lambda}(t\eta_\varepsilon) \leq g(t_\varepsilon) < \frac{s}{N}S(N,s)^{\frac{N}{2s}}. \quad (2.21)$$

ii) Considere agora o caso $N \leq \frac{2s(q+3)}{q+1}$. Argumentando exatamente como no caso anterior, temos que

$$(S(N,s) + C\varepsilon^{N-2s}) = t_{\varepsilon,\lambda}^{2_s^*-2} + \widetilde{C}\lambda t_{\varepsilon,\lambda}^{q-1}\varepsilon^{N-(\frac{N-2s}{2})(q+1)}, \tag{2.22}$$

com $t_{\varepsilon,\lambda} > 0$ que é o ponto onde o $\sup_{t\geq 0} g(t)$ é atingido. Afirmamos que

$$t_{\varepsilon,\lambda} \to 0 \quad \text{quando} \quad \lambda \to +\infty. \tag{2.23}$$

Para ver isso, assuma que $\overline{\lim}_{\lambda\to\infty} t_{\varepsilon,\lambda} = l > 0$. Então, passando o limite quando $\lambda \to +\infty$ em (2.22), resulta $(S(N,s) + C\varepsilon^{N-2s}) = +\infty$, que é uma contradição. Assim temos (2.23). Se tomamos agora β, o número positivo dado na Proposição 2.2, e por (2.23), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sup_{t\geq 0} \mathcal{J}_{s,\lambda}(t\eta_\varepsilon) \leq g(t_{\varepsilon,\lambda}) \\ &= \frac{t_{\varepsilon,\lambda}^2}{2}(S(N,s) + C\varepsilon^{N-2s}) - \frac{t_{\varepsilon,\lambda}^{2_s^*}}{2_s^*} - \widetilde{C}\lambda\frac{t_{\varepsilon,\lambda}^{q+1}}{q+1}\varepsilon^{N-(\frac{N-2s}{2})(q+1)} \\ &\leq \frac{t_{\varepsilon,\lambda}^2}{2}(S(N,s) + C\varepsilon^{N-2s}) - \frac{t_{\varepsilon,\lambda}^{2_s^*}}{2_s^*} \to 0, \end{aligned}$$

quando $\lambda \to +\infty$. Então,

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \sup_{t\geq 0} \mathcal{J}_{s,\lambda}(t\eta_\varepsilon) = 0,$$

que facilmente conduz ao resultado desejado para o caso $N \leq \frac{2s(q+3)}{q+1}$. ■

Vamos concluir agora a prova do Teorema 2.1. A fim de fazer isto, definimos

$$\Gamma_\varepsilon := \{\gamma \in C([0,1], X_0^s(\Omega)) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = M_\varepsilon\eta_\varepsilon\}$$

para algum $M_\varepsilon > 0$ suficientemente grande, tal que $\mathcal{J}_{s,\lambda}(M_\varepsilon\eta_\varepsilon) < 0$. Observamos que, para cada $\gamma \in \Gamma_\varepsilon$, a função $t \to \|\gamma(t)\|_{X_0^s(\Omega)}$ é contínua em $[0,1]$. Portanto, para o α dado na Proposição 2.2, dado que $\|\gamma(0)\|_{X_0^s(\Omega)} = 0 < \alpha$ e $\|\gamma(1)\|_{X_0^s(\Omega)} = \|M_\varepsilon\eta_\varepsilon\|_{X_0^s(\Omega)} > \alpha$, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $\|\gamma(t_0)\|_{X_0^s(\Omega)} = \alpha$. Como uma consequência,

$$\sup_{0\leq t\leq 1} \mathcal{J}_{s,\lambda}(\gamma(t)) \geq \mathcal{J}_{s,\lambda}(\gamma(t_0)) \geq \inf_{\|v\|_{X_0^s(\Omega)}=\alpha} \mathcal{J}_{s,\lambda}(v) \geq \beta > 0,$$

onde β é o valor positivo da Proposição 2.2. Logo,

$$c_\varepsilon = \inf_{\gamma\in\Gamma_\varepsilon} \sup_{0\leq t\leq 1} \mathcal{J}_{s,\lambda}(\gamma(t)) > 0.$$

Então, pelo Lema 2.4, Proposição 2.3 e o TPM, concluímos que o funcional $\mathcal{J}_{s,\lambda}$ admite um ponto crítico $u \in X_0^s(\Omega)$, para $N > \frac{2s(q+3)}{q+1}$ ou; $N \leq \frac{2s(q+3)}{q+1}$ e $\lambda > \lambda_s$, para um $\lambda_s > 0$ adequado. Além disso, dado que $\mathcal{J}_{s,\lambda}(u) = c_\varepsilon \geq \beta > 0$ e $\mathcal{J}_{s,\lambda}(0) = 0$, a função u é não trivial. Isso conclui a prova do Teorema 2.1.

Capítulo 3

Apêndice

3.1 Espaços Sobolev H^s, $0 < s < 1$

Definição 3.1 *Uma função $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ é dito de decaimento rápido se $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e*

$$|x|^k D^j \phi \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \forall j \in \mathbb{N}^N,$$

onde D^j denota o operador diferencial com respeito ao multi-índice $j = (j_1, j_2, ..., j_N)$.

O conjunto destas funções, denotado por $S(\mathbb{R}^N)$, é conhecido como o espaço topológico de Schwartz, munido das seminormas:

$$n_{k,j}(\phi) := \||x|^k D^j \phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \quad k \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{N}^N.$$

Teorema 3.2 *A transformada de Fourier, definida por*

$$\mathcal{F}(\phi)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} \exp^{-2\pi i \xi . x} \phi(x)\ dx, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N,\ \forall \phi \in S(\mathbb{R}^N),$$

é um automorfismo de $S(\mathbb{R}^N)$. O operador inverso de $\mathcal{F}$, denotado por $\mathcal{F}^{-1}$, é definido por :

$$\mathcal{F}^{-1}(\phi)(\xi) := \mathcal{F}(\phi)(-\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Prova: Ver [33, Teorema 2]. ■

Observação 3.3 *1. A transposta da transformada de Fourier é um automorfismo do dual $S'(\mathbb{R}^N)$, o qual é donotado também por $\mathcal{F}$.*
2. Devido a densidade de $S(\mathbb{R}^N)$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e o Teorema de Pancherel ($\|f\|_{L^2} = \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2}$, $f \in S(\mathbb{R}^N)$), podemos extender a transformada a um automorfismo isométrico no espaço $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Definição 3.4 *Seja $s > 0$. O espaço fracionário $H^s(\mathbb{R}^N)$ é definido como*

$$H^s(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^N) : \{\xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}(u)(\xi)\} \in L^2(\mathbb{R}^N)\}.$$

Proposição 3.5 *O espaço $H^s(\mathbb{R}^N)$, munido da norma*

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} := \|(1 + |\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

é um espaço de Banach.

Prova: Ver [13, Proposição 4.8]. ■

Proposição 3.6 *Se $s = m \in \mathbb{N}$, então $H^s(\mathbb{R}^N)$ coincide com o espaço de Sobolev clássico $W^{m,2}(\mathbb{R}^N)$.*

Prova: Ver [13, Proposição 4.9]. ■

3.2 Espaços de Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$, $0 < s < 1$

Definição 3.7 *Sejam $s \in (0, 1)$ e $p \in (1, +\infty)$. O espaço de Sobolev fracionário $W^{s,p}(\Omega)$ é definido como:*

$$W^{s,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dxdy < \infty\}.$$

Proposição 3.8 *Seja $s \in (0, 1)$. O espaço $W^{s,p}(\Omega)$, munido da norma*

$$\|u\|^p_{W^{s,p}(\Omega)} := \|u\|^p_{L^P(\Omega)} + [u]^p_{s,p,\Omega}, \quad onde \quad [u]^p_{s,p,\Omega} := \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dxdy,$$

é um espaço de Banach.

Prova: Ver [13, Proposição 4.24]. ■

Proposição 3.9 *O espaço $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Prova: Ver [13, Proposição 4.27]. ■

Proposição 3.10 *Temos as seguintes imersões:*
(i) Se $0 < s < s' < 1$, então $W^{s',p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.
(ii) Se $0 < s < 1$, então $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.

Prova: Ver [14, Proposiçao 2.1, Proposição 2.2]. ■

Proposição 3.11 *Seja $s \in (0,1)$. Então $H^s(\mathbb{R}^N)$ coincide com $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Em particular*

$$[u]_{s,2}^2 = C \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi,$$

onde C é uma constante que depende de N e s.

Prova: Ver [14, Proposição 3.4]. ■

3.3 Imersões do $W^{s,p}(\Omega)$

Teorema 3.12 *Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in (1,+\infty)$. Então temos:*

1) Se $N > sp$, então $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$, $\forall q \in [p, \frac{Np}{N-sp}]$.

2) Se $N = sp$, então $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$, $\forall q \in [p,+\infty]$.

3) Se $N < sp$, então $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Prova: Ver [13, Teorema 4.47]. ■

Definição 3.13 *Dizemos que Ω admite uma (s,p)-extensão se existe um operador linear contínuo E que aplica $u \in W^{s,p}(\Omega)$ em $E(u) \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, tal que*

$$Eu(x) = u(x) \quad \forall x \in \Omega. \tag{3.1}$$

Proposição 3.14 *Qualquer aberto Lipschitz Ω admite uma (s,p)-extensão.*

Teorema 3.15 *Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in (1,+\infty)$. Seja Ω aberto Lipschitz de $\mathbb{R}^N$. Então temos:*

1) Se $N > sp$, então $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, \frac{Np}{N-sp}]$.

2) Se $N = sp$, então $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p,+\infty]$.

3) Se $N < sp$, então $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Teorema 3.16 *Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in (1,+\infty)$. Seja Ω aberto Lipschitz limitado de $\mathbb{R}^N$. Então temos:*

1) Se $N > sp$, então a imersão de $W^{s,p}(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$ é compacta, para todo $q \in [p, \frac{Np}{N-sp})$.

2) Se $N = sp$, então a imersão de $W^{s,p}(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$ é compacta, para todo $q \in [p,+\infty)$.

3) Se $N < sp$, então a imersão de $W^{s,p}(\Omega)$ em $C_b^{0,\lambda}$ é compacta, para $\lambda < s - \frac{N}{p}$.

Prova: Ver [13, Teorema 4.5.4]. ■

3.4 Método de Sattinger

Este método determina a existencia para o problema (P_λ) a partir de uma subsolução e uma supersolução. Com efeito, sejam $\underline{u} \in X_0^s(\Omega)$ subsolução e $\overline{u} \in X_0^s(\Omega)$ supersolução de (P_λ^+). Consideremos a sequência de funções $\{u_k\}_{k\geq 1}$ em $X_0^s(\Omega)$ que são soluções para os problemas iterados

$$(P_k) \begin{cases} (-\Delta)^s u_k = f_\lambda(u_{k-1}) & \text{em } \Omega, \\ u_k = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases}$$

onde $u_0 = \underline{u}$. Pelo Teorema de Comparação, podemos ver que

$$\underline{u} \leq u_1 \leq u_2 \leq ... \leq \overline{u}.$$

Portanto, podemos definir, a menos de subsequência,

$$0 \leq u_\lambda := \lim_{k\to\infty} u_k \quad \text{em } L^2.$$

Além disso, pelas Proposição 0.2 e Proposição 0.12, temos

$$\begin{aligned} \|(-\Delta)^{s/2} u_k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \|u_k\|^2_{X_0^s(\Omega)} \\ &= \lambda \int_\Omega u_k u_{k-1}^q dx + \int_\Omega u_k u_{k-1}^{2_s^*-1} dx \\ &\leq \int_\Omega \overline{u}^{q+1} dx + \int_\Omega \overline{u}^{2_s^*} dx \\ &\leq C. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Como $X_0^s(\Omega)$ é Hilbet, então, a menos de subsequência, temos

$$\begin{aligned} u_k &\rightharpoonup u_\lambda \quad \text{fracamente em } X_0^s(\Omega), \\ u_k &\to u_\lambda \quad \text{fortemente em } L^r(\Omega), 1 \leq r < 2_s^*, \\ u_k &\to u_\lambda \quad \text{q.t.p. em } \Omega. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Portanto, passando o limite nos problemas iterados, concluímos que u_λ é uma solução de (P_λ^+), e consequentemente para (P_λ).

Referências Bibliográficas

[1] R. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.

[2] A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. 122 (2) (1994) 519-543.

[3] A. Ambrosetti, P. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. 14 (1973) 349-381.

[4] B. Barrios, *A critical fractional equation with concave - convex power nonlinearities*, Ann. I. H. Poincaré - AN (2014).

[5] B. Barrios, *Nonlocal problems in partial differential equations*, UAM, Madrid, 2013.

[6] B. Barrios, E. Colorado, A. De Pablo, *On some critical problems for the fractional Laplacian operator*, J. Differ. Equ. 252 (2012) 6133-6162.

[7] H. Brezis, E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Am. Math. Soc. 88 (3) (1983) 486-490.

[8] H. Brezis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Commun. Pure Appl. Math. 36 (4) (1983) 437-477.

[9] F. Charro, E. Colorado, I. Peral, *Multiplicity of solutions to uniformly elliptic fully nonlinear equations with concave-convex right-hand side*, J. Differ. Equ. 246 (11) (2009) 4221-4248.

[10] E. Colorado, I. Peral, *Semilinear elliptic problems with mixed Dirichlet-Neumann boundary conditions*, J. Funct. Anal. 199 (2003) 468-507.

[11] J. Cossio, *Introducción a la teoría de puntos críticos con aplicaciones a problemas elípticos semilineales*, Universidad de Colombia, sede Medellin, 2000.

[12] A. Cotsiolis, N. Tavoularis, *Best constants for Sobolev inequalities for higher order fractional derivatives*, J. Math. Anal. Appl. 295 (2004) 225-236.

[13] F. Demengel, D. Gilbert, *Functional spaces for the theory of elliptic partial differential equations*, Springer, 2011.

[14] E. Di Nezza, G. Palatucci, E. Valdinoci, *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*, Bull. Sci. Math. 136 (5) (2012) 521-573.

[15] A. Fiscella, R. Servade, E. Valdinoci, *Density properties for fractional Sobolev spaces*, preprint, 2013.

[16] M. Fall, T. Weth, *Nonexistence results for a class of fractional elliptic boundary value problems*, preprint, arXiv:1201.4007v2.

[17] J. García-Azorero, I. Peral, *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with non-symmetric term*, Trans. Am. Math. Soc. 323 (2) (1991) 877-895.

[18] N. Ghoussoub, D. Preiss, *A general mountain pass principle for locating and classifying critical points*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire 6 (5) (1989) 321-330.

[19] A. Iannizzotto, S. Liu, K. Perera, M. Squassina, *Existence results for fractional p-Laplacian problems via Morse theory*, Adv. Calc. Var. 9 (2016), 101-125.

[20] V. Maz'ya, *Sobolev Spaces with Applications to Elliptic Partial Differential Equations*, second, revised and augmented edition, Grundlehren Math. Wiss. (Fundamental Principles of Mathematical Sciences), vol. 342, Springer, Heidelberg, 2011.

[21] N. Meyers, J. Serrin, $H = W$, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 51 (1964) 1055-1056.

[22] E. Lieb, *Sharp constants in the Hardy-Littlewood?Sobolev and related inequalities*, Ann. Math. 118 (2) (1983) 349-374.

[23] P.-L. Lions, *The concentration - compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I*, Rev. Mat. Iberoam. 1 (1) (1985) 145-201.

[24] P.-L. Lions, *The concentration - compactness principle in the calculus of variations. The limit case. II*, Rev. Mat. Iberoam. 1 (2) (1985) 45-121.

[25] G. Palatucci, A. Pisante, *Improved Sobolev embeddings, profile decomposition and concentration-compactness for fractional Sobolev spaces*, preprint, arXiv:1302.5923.

[26] J. Serra, X. Ros-Oton, *The Dirichlet problem for the fractional Laplacian: regularity up to the boundary*, J. Math. Pures Appl. (9) 101 (3) (2014) 275-302.

[27] J. Serra, X. Ros-Oton, *Pohozaev identity for the fractional Laplacian*, arXiv:1207.5986 [math.AP].

[28] R. Servadei, E. Valdinoci, *Mountain Pass solutions for non-local elliptic operators*, J. Math. Anal. Appl. 389 (2012) 887-898.

[29] R. Servadei, E. Valdinoci, *The Brezis-Nirenberg result for the fractional Laplacian*, Trans. Am. Math. Soc. (2014), in press.

[30] R.Servadei, E. Valdinoci, *A Brezis-Nirenberg result for non-local critical equations in low dimension*, Commun. Pure Appl. Anal. 12 (6) (2013) 2445-2464.

[31] R. Servadei, E. Valdinoci, *On the spectrum of two different fractional operators*, Royal Society of Edinburgh, Math. 144 (2014) 831-855.

[32] L. Silvestre, *Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the Laplace operator*, Commun. Pure Appl. Math. 60 (1) (2007) 67-112.

[33] S. Valeriy, *Fourier tranform and distributions with applications to the Schrödinger operator*, Lecture Notes 2a edition, University of Oulu, 2007.

[34] M. Willem, *Minimax Theorems*, Prog. Nonlinear Differ. Equ. Appl., vol. 24, Birkhäuser, Boston, 1996.