UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sobre a falta de compacidade em desigualdades do tipo Trudinger-Moser

Leandro Gonzaga Fernandes Junior

Belo Horizonte - MG
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Leandro Gonzaga Fernandes Junior
Orientador:
Emerson Alves Mendonça de Abreu

Sobre a falta de compacidade em desigualdades do tipo Trudinger-Moser

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas (ICEX) da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Belo Horizonte - MG
2016

Sumário

Resumo

A desigualdade Clássica de Trudinger-Moser diz que se $N \geq 2$ e Ω é um domínio limitado, então existe uma constante $B_{N,\alpha} > 0$ (que depende somente de N e α) tal que

$$\int_{\Omega} \exp\left(\alpha\left(\frac{|u(x)|}{\|\nabla u\|_{L^N(\Omega)}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right)dx \leq B_{N,\alpha}\mathcal{L}_N(\Omega),$$

para toda função $u \in W_0^{1,N}(\Omega)\backslash\{0\}$, com $\alpha \in (0, \alpha_N]$ e $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$. Existe uma extensão dessa desigualdade para $\mathbb{R}^N$ que é a seguinte: para todo $N \geq 2$ e, para todo $\alpha \in (0, \alpha_N]$, existe uma constante $D_{N,\alpha}$, que depende apenas de N e α, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,\alpha}(u)dx \leq D_{N,\alpha}, \tag{1}$$

para toda função $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$, com $\|u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)} = 1$, em que

$$\Phi_{N,\alpha}(t) := \exp(\alpha t^{\frac{N}{N-1}}) - \sum_{j=0}^{N-2} \frac{\alpha^j}{j!} t^{\frac{N}{N-1}j}.$$

O principal objetivo deste trabalho é provar que a melhor constante, denotada por $d_{N,\alpha}$, associada a desigualdade (1), é atingida para $N \geq 3$ e $\alpha \in (0, \alpha_N)$ ou $N = 2$ e $\alpha \in (2/B_2, \alpha_2]$. Além disso, será provado que para $N = 2$ e $0 < \alpha \ll 1$, $d_{N,\alpha}$ não é atingida.

Abstract

The Classical Trudinger-Moser inequality says that if $N \geq 2$ and Ω is a bounded domain then there is a constant $B_{N,\alpha} > 0$ (which depends only on N and α) such that,

$$\int_{\Omega} \exp\left(\alpha\left(\frac{|u(x)|}{\|\nabla u\|_{L^N(\Omega)}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right)dx \leq B_{N,\alpha}\mathcal{L}_N(\Omega),$$

for all $u \in W_0^{1,N}(\Omega)\backslash\{0\}$, with $\alpha \in (0, \alpha_N]$ and $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$.

There is one extension of this inequality for $\mathbb{R}^N$ that is the following: for all $N \geq 2$ and $\alpha \in (0, \alpha_N]$, there is a constant $D_{N,\alpha}$, which depends only on N and α, such that

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,\alpha}(u)dx \leq D_{N,\alpha}, \tag{1}$$

for all $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$, with $\|u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)} = 1$, in which

$$\Phi_{N,\alpha}(t) := \exp(\alpha t^{\frac{N}{N-1}}) - \sum_{j=0}^{N-2} \frac{\alpha^j}{j!} t^{\frac{N}{N-1}j}.$$

The main aim of this work is to prove that the best constant, denoted by $d_{N,\alpha}$, associated with inequality (1), is attained for $N \geq 3$ and $\alpha \in (0, \alpha_N)$ or $N = 2$ and $\alpha \in (2/B_2, \alpha_2]$. In addition, it will be proved that for $N = 2$ and $0 < \alpha \ll 1$, $d_{N,\alpha}$ is not attained.

Notações

$B_R(x)$	bola aberta centrada em x e raio R
Ω	subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$
q.t.p	quase todo ponto
$supp(f)$	suporte da função f
$\rightharpoonup$	convergência fraca
$\overset{*}{\rightharpoonup}$	convergência fraca estrela
$D^\alpha f$	derivada parcial de f dada por $D^\alpha f = \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\dfrac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}}\cdots\dfrac{\partial^{\alpha_{N-1}}}{\partial x_{N-1}^{\alpha_2}}\dfrac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}}f$, onde $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$
$\lvert\alpha\rvert$	norma soma do vetor $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$
$C^k(\Omega)$	conjunto das funções k vezes diferenciáveis sobre Ω, com derivada contínua
$C_c^k(\Omega)$	subconjunto de $C^k(\Omega)$ com suporte compacto em Ω
$C^\infty(\Omega)$	$\cap_{k\geq 1}C^k(\Omega)$
$C_c^\infty(\Omega)$	$\cap_{k\geq 1}C_c^k(\Omega)$
$[u]$	classe das funções Lebesque mensuráreis que são iguais q.t.p
$K_A(\Omega)$	classe de Orlicz definida a partir da $N-$função A por $K_A(\Omega) = \left\{[u]; \int_\Omega A(\lvert u(x)\rvert) < \infty\right\}$
$L_A(\Omega)$	espaço de Orlicz definido a partir da $N-$ função A por $L_A(\Omega) = \{a_1u_1 + \cdots + a_ku_k; a_i \in \mathbb{R}, u_i \in K_A(\Omega), \text{para todo } i = 1, ..., k\}$
$\lVert\cdot\rVert_{A,\Omega}$	norma Luxemburg sobre $L_A(\Omega)$ dada por $\lVert\cdot\rVert_{A,\Omega} = \inf\left\{k > 0; \int_\Omega A\left(\dfrac{\lvert\cdot(x)\rvert}{k}\right)dx \leq 1\right\}$
$W^{m,p}(\Omega)$	espaço de Sobolev
$W_{rad}^{1,N}(\mathbb{R}^N)$	subespaço de $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ das funções radiais
$\lvert\lvert\cdot\rvert\rvert_{W^{m,p}(\Omega)}$	Norma no espaço $W^{m,p}(\Omega)$ dada por $\lVert\cdot\rVert_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{\lvert\alpha\rvert\leq m}\lVert D^\alpha\cdot\rVert_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}}$, se $1 \leq p < \infty$ e $\lVert\cdot\rVert_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{\lvert\alpha\rvert\leq m} ess.\sup_\Omega \lvert D^\alpha\cdot\rvert$, se $p = \infty$
$\mathcal{L}_N$	medida de Lebesque em $\mathbb{R}^N$
ω_N	volume da bola unitária em $\mathbb{R}^N$
α_N	$\alpha_N := N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$
χ_E	função característica (indicadora) do conjunto E
$\mathcal{M}(\Omega)$	espaço das medidas de Radon com sinal sobre Ω

(NCS)	sequência de concentração normalizada
$(RNCS)$	sequência radialmente simétrica de concentração normalizada
(NVS)	sequência de anulamento normalizada
$(RNVS)$	sequência radialmente simétrica de anulamento normalizada
B_2	$\sup\limits_{\phi\neq 0, \phi\in H^1(\mathbb{R}^N)} \dfrac{\|\phi\|^4_{L^4(\mathbb{R}^N)}}{\|\nabla\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}}$

Introdução

As imersões dos Espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ são bem conhecidas e podem ser encontradas em vários livros clássicos, como [2],[7] e [10]. Dentre elas estão as imersões de $W^{1,N}(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $N \leq p < \infty$. Com essas imersões é natural pensar se $W^{1,N}(\Omega)$ está imerso em $L^\infty(\Omega)$, porém, é bem conhecido que isso não acontece. Um exemplo clássico é a função

$$f(x) = \log\left(\log\left(1 + \frac{1}{|x|}\right)\right),$$

que pertence a $W^{1,N}(B_1(0))$ e não pertence $L^\infty(B_1(0))$, quando $N \geq 2$. A pergunta que surge é: porque a imersão não ocorre? Para começar a entender isso estuda-se o caso limite da imersão, ou seja, qual seria o menor espaço no qual $W^{1,N}(\Omega)$ está imerso.

Com esse objetivo, estuda-se os Espaços de Orlicz $L_A(\Omega)$, teoria essa que pode ser encontrada em [2], e que também é feita em detalhes neste trabalho (veja capítulo 1), baseado em [2].

É provado em [2] que

$$W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L_{\Phi_{N,\alpha}}(\Omega), \tag{1}$$

onde $\Phi_{N,\alpha}$ é dada por

$$\Phi_{N,\alpha}(t) = \exp\left(\alpha t^{\frac{N}{N-1}}\right) - \sum_{j=0}^{N-2} \frac{\alpha^j}{j!} t^{\frac{N}{N-1}j}, \tag{2}$$

$0 < \alpha \leq 1$ e Ω é qualquer domínio que satisfaz a condição do cone (em domínio limitado, por Trudinger, e em domínio ilimitado, por Adams). Moser, prova em [18] que

$$W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L_{\Phi_{N,\alpha}}(\Omega), \tag{3}$$

onde $\Phi_{N,\alpha}$ é dada como em (2), $\alpha \in (0, \alpha_N]$ e Ω é um domínio limitado.

É conhecido que

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L_{\Phi_{N,\alpha}}(\mathbb{R}^N), \tag{4}$$

onde $\Phi_{N,\alpha}$ é dada como em (2) e $\alpha \in (0, \alpha_N]$ (veja [4] e [17]).

A imersão (3) é uma consequência da Desigualdade Clássica de Trudinger-Moser: se $N \geq 2$ e Ω é um domínio limitado, então existe uma constante $B_{N,\alpha} > 0$ (que depende somente de N e α) tal que

$$\int_\Omega \exp\left(\alpha\left(\frac{|u(x)|}{\|\nabla u\|_{L^N(\Omega)}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right)dx \leq B_{N,\alpha}\mathcal{L}_N(\Omega), \tag{5}$$

para toda função $u \in W_0^{1,N}(\Omega)\backslash\{0\}$, com $\alpha \in (0, \alpha_N]$.

Agora, definida a melhor constante relacionada com a desigualdade (5) acima, isto é,

$$b_{N,\alpha} := \sup_{u \in W_0^{1,N}(\Omega), ||\nabla u||_{L^N(\Omega)}=1} \frac{\displaystyle\int_\Omega \exp\left(\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}\right)dx}{\mathcal{L}_N(\Omega)}, \tag{6}$$

surge uma pergunta natural: existe uma função que realiza a igualdade em (5) usando a melhor constante $b_{N,\alpha}$ definida em (6)? Repostas parciais são dadas. A existência de uma função que atinge $b_{N,\alpha}$ é provada por Carleson e Chang em [6], se Ω é uma bola N-dimensional, e por Flucher [9], para domínios suaves limitados em $\mathbb{R}^2$.

Existem extensões dessa desigualdade para $\mathbb{R}^N$ das quais resultam a imersão (4). Com isso, um problema de maximização é relacionado: existe uma função que atinge a melhor constante da imersão de $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ em $L_{\Phi_{N,\alpha}}(\mathbb{R}^N)$? A proposta deste trabalho, baseada em [11], é estudar quando essa melhor constante, denotada por $d_{N,\alpha}$, é atingida.

É provado por Ishiwata, em [11] e, reproduzido neste trabalho que $d_{N,\alpha}$ é atingida para $N \geq 3$ e $\alpha \in (0, \alpha_N)$. Já para o caso $N = 2$, é provado que $d_{2,\alpha}$ é atingida em um intervalo semi aberto contendo o expoente crítico α_2, além disso, é verificado que em um intervalo aberto, com extremidade em 0, $d_{2,\alpha}$ não é atingida.

Nos casos de existência, o método utilizado é baseado em argumentos de concentração de compacidade. Mais precisamente, avalia-se o comportamento do tipo concentração e/ou anulamento para as sequências maximizantes. Já para os casos de não existência, é provado que o funcional relacionado ao problema não possui pontos críticos.

Capítulo 1

Espaços de Sobolev e Espaços de Orlicz

Com o objetivo de "melhorar" as imersões dos espaços $W^{m,p}(\Omega)$, quando $mp = N$, é tratado neste capítulo parte considerável da teoria sobre Espaços de Orlicz $L_A(\Omega)$ e imersões de $W^{m,p}(\Omega)$ em $L_{\Phi_{N,\alpha}}(\Omega)$, para domínios que satisfazem a condição do cone. Será provado que a imersão acontece para $N \geq 2$ e $\alpha \in (0,1]$.

1.1 Espaços de Sobolev

Definição 1.1 (Derivada Fraca)**.** *Sejam u, uma função localmente integrável em Ω, e $\alpha \in \mathbb{N}^N$, qualquer multi-índice. Então uma função v, localmente integrável, é chamada a α-ésima derivada fraca de u, se ela satisfaz*

$$\int_\Omega \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx, \tag{1.1}$$

para toda função $\varphi \in C_c^{|\alpha|}(\Omega)$. Além disso, verifica-se facilmente que v é única, a menos de um conjunto de medida nula. Daí, denota-se a α-ésima derivada fraca de u por $D^\alpha u$.

Definição 1.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, um subconjunto aberto, $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. O Espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é definido por*

$$W^{m,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ com } |\alpha| \leq m \right\},$$

onde $D^\alpha u$ é a α-ésima derivada fraca de u. Uma norma introduzida nesse espaço é

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}, & se\ 1 \leq p < \infty \\ \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq m} ess.\sup_\Omega |D^\alpha u|, & se\ p = \infty, \end{cases}$$

para toda função $u \in W^{m,p}(\Omega)$.

Já o Espaço de Sobolev $W_0^{m,p}(\Omega)$ *é definido sendo o fecho do espaço* $C_c^\infty(\Omega)$*, com a norma* $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$.

1.2 Espaços de Orlicz

1.2.1 N-função

Definição 1.3 (N-função). *Seja* $a : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *uma função com as seguintes propriedades:*

(a) $a(0) = 0,\ \ a(t) > 0$ *se* $t > 0$ *e* $\lim\limits_{t\to+\infty} a(t) = +\infty$*;*

(b) *não-decrescente;*

(c) *contínua à direita.*

A função $A : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *definida por* $A(t) = \displaystyle\int_0^t a(x)dx$ *é chamada uma N-função.*

Algumas propriedades de uma N-função:

(i) A é contínua;

(ii) A é crescente;

(iii) A é convexa;

(iv) $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{A(t)}{t} = 0$ e $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{A(t)}{t} = +\infty$;

(v) se $0 < t < s$, então $\dfrac{A(t)}{t} < \dfrac{A(s)}{s}$.

Segue a demonstração de algumas dessas propriedades.

Demonstração.

(iii) Primeiramente, será provado a seguinte afirmação: se

$$A\left(\frac{s+t}{2}\right) \leq \frac{A(s)+A(t)}{2},$$

para todo $t, s \geq 0$, então A é convexa.

De fato, sejam $s, t \geq 0$, defina $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(\lambda) = A(\lambda s + (1-\lambda)t) - \lambda A(s) - (1-\lambda)A(t).$$

Como A é contínua, g é contínua. Agora, suponha por absurdo, que $g(\alpha) > 0$, para algum $\alpha \in [0,1]$, e defina

$$\lambda_0 = \inf \left\{ \lambda \in (0,1]; g(\lambda) = \sup_{x\in[0,1]} g(x) \right\}.$$

Então $g(\lambda_0) = \sup_{x\in[0,1]} g(x)$, $0 < \lambda_0 < 1$ e existe $\delta > 0$ tal que $[\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta] \subset (0,1)$. Defina

$$\begin{aligned} u_1 &= (\lambda_0 - \delta)s + (1 - (\lambda_0 - \delta))t \ \text{ e} \\ u_2 &= (\lambda_0 + \delta)s + (1 - (\lambda_0 + \delta))t. \end{aligned}$$

Por hipótese,

$$A\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \leq \frac{A(u_1) + A(u_2)}{2},$$

daí,

$$\begin{aligned} g(\lambda_0) &\leq \frac{A(u_1) + A(u_2)}{2} - \lambda_0 A(s) - (1 - \lambda_0)A(t) \\ &= \frac{1}{2}\left[A(u_1) - (\lambda_0 - \delta)A(s) - (1 - (\lambda_0 - \delta))A(t) + \right. \\ &\left. A(u_2) - (\lambda_0 + \delta)A(s) - (1 - (\lambda_0 + \delta))A(t)\right] \\ &= \frac{g(\lambda_0 - \delta) + g(\lambda_0 + \delta)}{2} \\ &< g(\lambda_0), \end{aligned}$$

o que é uma contradição.

Agora, dados $0 < s < t$, tem-se

$$\begin{aligned} A\left(\frac{s+t}{2}\right) = \int_0^{\frac{s+t}{2}} a(x)dx &\leq \int_0^s a(x)dx + \frac{1}{2}\left(\int_s^{\frac{s+t}{2}} a(x)dx + \int_{\frac{s+t}{2}}^t a(x)dx\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^s a(x)dx + \int_0^t a(x)dx\right) \\ &= \frac{A(s) + A(t)}{2}. \end{aligned}$$

Logo, A é convexa.

(iv) Considere $t > 0$. Pela definição de A e pelas propriedades (a) e (b), tem-se

$$\frac{A(t)}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t a(x)dx \leq a(t)$$

e

$$\frac{A(t)}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t a(x)dx \geq \frac{1}{t}\int_{\frac{t}{2}}^t a(x)dx \geq \frac{1}{2}a\left(\frac{t}{2}\right).$$

Segue, das desigualdades anteriores e das propriedades (a) e (c), que $\lim_{t\to 0^+} \frac{A(t)}{t} = 0$ e $\lim_{t\to +\infty} \frac{A(t)}{t} = +\infty$.

(v) Novamente, será provado uma afirmação: sejam $s, t \geq 0$ fixos e $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(\lambda) = A(\lambda s + (1-\lambda)t) - \lambda A(s) - (1-\lambda)A(t),$$

então g é convexa. E, se existe $\lambda_0 \in (0,1)$ tal que $g(\lambda_0) = 0$, então g é identicamente nula.

Com efeito, dados $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$, pela convexidade de A, tem-se

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right) &= A\left(\frac{\lambda_1 s + (1-\lambda_1)t + \lambda_2 s + (1-\lambda_2)t}{2}\right) - \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}A(s) - \frac{2-(\lambda_1+\lambda_2)}{2}A(t) \\ &\leq \frac{1}{2}[A(\lambda_1 s + (1-\lambda_1)t) - \lambda_1 A(s) - (1-\lambda_1)A(t) + \\ &A(\lambda_2 s + (1-\lambda_2)t) - \lambda_2 A(s) - (1-\lambda_2)A(t)] \\ &= \frac{g(\lambda_1)+g(\lambda_2)}{2}. \end{aligned}$$

Logo, g é convexa, pela afirmação que foi mostrada anteriormente.

Agora, para provar a segunda parte, suponha que exista $\lambda_1 \in (0,1)$ tal que $g(\lambda_1) < 0$. Caso seja $\lambda_1 < \lambda_0$, pela convexidade de g, tem-se

$$g(\lambda_0) \leq \frac{1-\lambda_0}{1-\lambda_1}g(\lambda_1) + \frac{\lambda_0-\lambda_1}{1-\lambda_1}g(1) = \frac{1-\lambda_0}{1-\lambda_1}g(\lambda_1) < 0,$$

o que é uma contradição. Caso $\lambda_0 < \lambda_1$, seque pela convexidade de g que

$$g(\lambda_0) \leq \frac{\lambda_0}{\lambda_1}g(\lambda_1) < 0,$$

o que também é uma contradição.

Analogamente, não existe $\lambda_1 \in (0,1)$ tal que $g(\lambda_1) > 0$. A afirmação segue.

Finalmente, sejam $0 < \alpha < 1$ e $u > 0$, então $A(\alpha u) < \alpha A(u)$. De fato, se existir $u_1 > 0$ e $\alpha_0 \in (0,1)$, tal que $A(\alpha_0 u_1) = \alpha_0 A(u_1)$, então, pela afirmação anterior, a igualdade acontece para todo $\alpha \in (0,1)$, isto é, $A(\alpha u_1) = \alpha A(u_1)$ para todo $\alpha \in (0,1)$.

Daí,

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{A(\alpha u_1)}{\alpha u_1}=\frac{A(u_1)}{u_1}>0,$$

o que é uma contradição, pela propriedade (iv).

Logo, $A(\alpha u)<\alpha A(u)$, para todo $\alpha\in(0,1)$, consequentemente,

$$\frac{A(u_1)}{u_1}=\frac{A\left(\frac{u_1}{u}u\right)}{\frac{u_1}{u}u}<\frac{\frac{u_1}{u}A(u)}{\frac{u_1}{u}u}=\frac{A(u)}{u},$$

desde que $0<u_1<u$. ■

Alguns exemplos de N-funções.

Exemplo 1.4. (a) $A(t)=\dfrac{t^p}{p}$ $,1<p<+\infty$;

(b) $A(t)=e^t-t-1$;

(c) $A(t)=e^{t^p}-1$ $,1<p<+\infty$;

(d) $A(t)=(1+t)\log(1+t)-t$.

Definição 1.5 (N-funções complementares). *Seja a uma função como na Definição 1.3.*

Defina

$$\tilde{a}(s):=\sup_{a(t)\leq s} t,$$

com $s\geq 0$. *Note que* $\tilde{a}$ *tem as mesmas propriedades* (a), (b) *e* (c) *da função* a.

As N-funções A *e* $\tilde{A}$ *dadas por* $A(t)=\int_0^t a(x)dx$ *e* $\tilde{A}(s)=\int_0^s \tilde{a}(y)dy$ *são ditas complementares.*

Exemplo 1.6. (a) $A(t)=\dfrac{t^p}{p}$, $\tilde{A}(s)=\dfrac{s^{p'}}{p'}$ *onde* $1<p<+\infty$ *e* $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$;

(b) $A(t)=e^t-t-1$ $,\tilde{A}(s)=(1+s)\log(1+s)-s$.

Teorema 1.7 (Desigualdade de Young)**.** *Se* A *e* $\tilde{A}$ *são N-funções complementares, então*

$$st\leq A(t)+\tilde{A}(s),$$

para todo $s,t\geq 0$. *Além disso, a igualdade acontece somente quando* $t=\tilde{a}(s)$ *ou* $s=a(t)$.

Demonstração. (Veja [8], pag. 106, exercício 48 e pag. 121, exercício 2). ■

Observação 1.8. (1) $\tilde{A}(s) = \sup_{t \geq 0}\{st - A(t)\}$, *para todo* $s \geq 0$, *e o supremo é atingido em* $t = \tilde{a}(s)$;

(2) $\tilde{A}\left(\frac{A(t)}{t}\right) < A(t)$, *para todo* $t > 0$;

(3) $\tilde{A}\left(\frac{t}{A^{-1}(t)}\right) < t$, *para todo* $t > 0$;

(4) $t < A^{-1}(t)\tilde{A}^{-1}(t) \leq 2t$, *para todo* $t > 0$.

Definição 1.9 (Dominância e equivalência de N-funções)**.** *Considere* A *e* B *N-funções. Diz-se que* B *domina* A *globalmente, se existe uma constante* $k > 0$, *tal que* $A(t) \leq B(kt)$, *para todo* $t \geq 0$.

Similarmente, B *domina* A *próximo do infinito, se existem constantes* $k, t_0 > 0$, *tais que* $A(t) \leq B(kt)$, *para todo* $t \geq t_0$.

A *e* B *são ditas equivalentes globalmente (respectivamente, próximo do infinito), se existem constantes* $k_1, k_2 > 0$, *tais que* $B(k_1 t) \leq A(t) \leq B(k_2 t)$, *para todo* $t \geq 0$, *(para todo* $t \geq t_0$*).*

Observação 1.10. *Sejam* A *e* B *N-funções com* $\tilde{A}$ *e* $\tilde{B}$ *suas respectivas complementares. Então* B *domina* A *se, e somente se,* $\tilde{A}$ *domina* $\tilde{B}$.

Definição 1.11. *Considere* A *e* B *duas N-funções.* A *aumenta essencialmente mais lenta do que* B *próximo do infinito, se* B *domina* A *próximo do infinito e* A *não é equivalente a* B.

Observação 1.12. A *aumenta essencialmente mais lenta do que* B *se, e somente se, para toda constante* $k > 0$, *tem-se*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{A(kt)}{B(t)} = 0.$$

Exemplo 1.13. *Se* $1 < q < p < +\infty$ *e* $A_p(t) = \frac{t^p}{p}$, *onde* $0 \leq t < +\infty$, *então* A_q *aumenta essencialmente mais lenta do que* A_p, *já que, para todo* $k > 0$,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{A_q(kt)}{A_p(t)} = \lim_{t \to \infty} \frac{k^q t^q p}{q t^p} = 0,$$

pois $q < p$.

Definição 1.14 (A condição Δ_2)**.** *Uma N-função* A *é dita satisfazer uma condição* Δ_2 *global (respectivamente, próximo do infinito), se existe uma constante* $k > 0$, *tal que* $A(2t) \leq kA(t)$, *para todo* $t \geq 0$, *(respectivamente,* $A(2t) \leq kA(t)$, *para todo* $t \geq t_0$ *e para algum* $t_0 > 0$*).*

Note que é equivalente definir da seguinte maneira:

(1) *Condição Δ_2 global: para todo* $r > 1,$ *existe* $k(r) > 0$ *com* $A(rt) \leq k(r)A(t)$*, para todo* $t \geq 0$*;*

(2) *Condição Δ_2 próximo do infinito: para todo* $r > 1,$ *existem* $k(r), t_0 > 0$ *com* $A(rt) \leq k(r)A(t)$*, para todo* $t \geq t_0$*.*

Finalmente, se A *satisfaz* $A(rt) \leq k(r)A(t)$*, para todo* $t \geq t_0$ *e* $0 < t_1 < t_0$*, então*

$$A(rt) \leq \sup\left\{k(r), \frac{A(rt_0)}{A(t_1)}\right\} A(t),$$

para todo $t \geq t_1$*.*

1.2.2 Classe de Orlicz e Espaços de Orlicz

Definição 1.15 (A classe de Orlicz $K_A(\Omega)$)**.** *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio e* A *uma N-função. A classe de Orlicz é definida por*

$$K_A(\Omega) = \left\{u; \int_\Omega A(|u(x)|)dx < \infty\right\},$$

em que $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função mensurável. Além disso, o par* (A, Ω) *é dito* Δ*-regular, se*

(a) *A satisfaz a condição* Δ_2 *global; ou*

(b) *A satisfaz a condição* Δ_2 *próximo do infinito e* Ω *tem volume finito.*

Lema 1.16. *Considere* A *uma N-função.* $K_A(\Omega)$ *é um espaço vetorial se, e somente se,* (A, Ω) *é* Δ*-regular.*

Demonstração. Primeiramente, observe a veracidade dos dois itens abaixo.

(i) Se $u \in K_A(\Omega)$, então $\lambda u \in K_A(\Omega)$, para todo $\lambda \in [-1, 1]$.

(ii) Se $\lambda w \in K_A(\Omega)$, para todo $w \in K_A(\Omega)$ e para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, então $u + v \in K_A(\Omega)$, desde que $u, v \in K_A(\Omega)$.

Segue que, $K_A(\Omega)$ é um espaço vetorial se, e somente se, $\lambda u \in K_A(\Omega)$, sempre que $u \in K_A(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Considere $u \in K_A(\Omega)$. Se A satisfaz uma condição Δ_2 global e $|\lambda| > 1$, então

$$\int_\Omega A(|\lambda u(x)|)dx \leq k(|\lambda|) \int_\Omega A(|u(x)|)dx < \infty.$$

Similarmente, se A satisfaz uma condição Δ_2 próximo do infinito e $\mathcal{L}_N(\Omega) < \infty$, para $|\lambda| > 1$, tem-se

$$\int_\Omega A(|\lambda u(x)|)dx = \int_{\{x\in\Omega; |u(x)|\geq t_0\}} A(|\lambda u(x)|)dx + \int_{\{x\in\Omega; |u(x)|< t_0\}} A(|\lambda u(x)|)dx$$
$$\leq k(|\lambda|)\int_\Omega A(|u(x)|)dx + A(|\lambda t_0|)\mathcal{L}_N(\Omega) < \infty.$$

Reciprocamente, suponha que (A, Ω) não seja Δ-regular. Então, existe uma sequência (t_j), onde cada $t_j > 0$, tal que

(i) $A(2t_j) \geq 2^j A(t_j)$, se $\mathcal{L}_N(\Omega) = +\infty$

(ii) $A(2t_j) \geq 2^j A(t_j)$ e $t_j \geq t_0 > 0$, se $\mathcal{L}_N(\Omega) < +\infty$.

Considere, agora, uma sequência disjunta (Ω_j) de subdomínios mensuráveis de Ω tais que

$$\mathcal{L}_N(\Omega_j) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^j A(t_j)}, & \text{se } \mathcal{L}_N(\Omega) = +\infty \\ \dfrac{A(t_0)\mathcal{L}_N(\Omega)}{2^j A(t_j)}, & \text{se } \mathcal{L}_N(\Omega) < +\infty. \end{cases}$$

Defina $u : \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$u(x) = \begin{cases} t_j, & \text{se } x \in \Omega_j, \\ 0, & \text{se } x \in \Omega \backslash \left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} \Omega_j\right). \end{cases}$$

Assim,

$$\int_\Omega A(|u(x)|)dx = \sum_{j=1}^{+\infty}\int_{\Omega_j} A(t_j)dx = \sum_{j=1}^{+\infty} A(t_j)\mathcal{L}_N(\Omega_j)$$
$$= \begin{cases} 1, & \text{se } \mathcal{L}_N(\Omega) = +\infty \\ A(t_0)\mathcal{L}_N(\Omega), & \text{se } \mathcal{L}_N(\Omega) < +\infty \end{cases}$$

e

$$\int_\Omega A(2|u(x)|)dx = \sum_{j=1}^{+\infty}\int_{\Omega_j} A(2t_j)dx \geq \sum_{j=1}^{+\infty}\int_{\Omega_j} 2^j A(t_j)dx = +\infty.$$

Logo, $K_A(\Omega)$ não seria um espaço vetorial. O que prova o lema. ■

Definição 1.17 (O espaço de Orlicz $L_A(\Omega)$). *O espaço de Orlicz é o espaço gerado por $K_A(\Omega)$, isto é,*

$$L_A(\Omega) := \{a_1 u_1 + \cdots + a_m u_m; a_i \in \mathbb{R} \;\; e \;\; u_i \in K_A(\Omega), \;\; i = 1, \cdots, m\}.$$

E define-se $||\cdot||_A : L_A(\Omega) \to \mathbb{R}$ *por*

$$||u||_A = \inf\left\{k > 0; \int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{k}\right)dx \leq 1\right\}.$$

Afirmação 1.18. *(i)* $||u||_A < +\infty$, *para todo* $u \in L_A(\Omega)$;

(ii) $||\cdot||_A$ *é uma norma em* $L_A(\Omega)$.

Demonstração. Para demonstrar os itens (i) e (ii), serão verificados os itens (a), (b) e (c) a seguir:

(a) $||u||_A = 0 \Leftrightarrow u = 0$ q.t.p.

Com efeito, se $u = 0$ q.t.p, então

$$\int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{\frac{1}{n}}\right)dx = 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, consequentemente, $||u||_A = 0$.

Agora, se $||u||_A = 0$, então

$$\int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{\rho}\right)dx = 0,$$

para todo $\rho > 0$. Pois, se existisse $\rho_0 > 0$ tal que

$$\int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{\rho_0}\right)dx > 0,$$

então

$$\int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{\rho_0}\right)dx > \varepsilon_0 > 0,$$

para algum $\varepsilon_0 \in (0,1)$ e, consequentemente,

$$1 \geq \int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{\varepsilon_0\rho_0}\right)dx \geq \frac{1}{\varepsilon_0}\int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{\rho_0}\right)dx > 1.$$

O que é uma contradição.

Logo, $\displaystyle\int_\Omega A(|u(x)|)dx = 0$, implica que $u = 0$ q.t.p.

(b) Se $u, v \in L_A(\Omega)$, com $0 < ||u||_A + ||v||_A < +\infty$, então $||u+v||_A \leq ||u||_A + ||v||_A$.

De fato, como A é não decrescente e convexa, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_\Omega A\left(\frac{|u(x)+v(x)|}{||u||_A+||v||_A}\right)dx &\leq \int_\Omega A\left(\frac{||u||_A}{||u||_A+||v||_A}\cdot\frac{|u(x)|}{||u||_A}+\frac{||v||_A}{||u||_A+||v||_A}\cdot\frac{|v(x)|}{||v||_A}\right)dx\\
&\leq \frac{||u||_A}{||u||_A+||v||_A}\int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{||u||_A}\right)dx\\
&+\frac{||v||_A}{||u||_A+||v||_A}\int_\Omega A\left(\frac{|v(x)|}{||v||_A}\right)dx\\
&\leq \frac{||u||_A}{||u||_A+||v||_A}+\frac{||v||_A}{||u||_A+||v||_A}=1.
\end{aligned}$$

Ou seja, $||u+v||_A \leq ||u||_A+||v||_A$.

Além disso, o item (b), juntamente com a definição de $L_A(\Omega)$, demonstra a primeira parte da afirmação.

(c) Se $u \in L_A(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $||\lambda u||_A = |\lambda|||u||_A$.

Com efeito, considere $\lambda \neq 0$, então

$$\int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{|\lambda|^{-1}||\lambda u||_A}\right)dx = \int_\Omega A\left(\frac{|\lambda u(x)|}{\|\lambda u\|_A}\right)dx \leq 1$$

e

$$\int_\Omega A\left(\frac{|\lambda u(x)|}{|\lambda|\|u\|_A}\right)dx = \int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_A}\right)dx \leq 1.$$

A primeira desigualdade mostra que $\|u\|_A \leq |\lambda|^{-1}\|\lambda u\|_A$, enquanto a segunda mostra que $\|\lambda u\|_A \leq |\lambda|\|u\|_A$. Logo, $\|\lambda u\|_A = |\lambda|\|u\|_A$. ■

A norma $||\cdot||_A$ é chamada a norma Luxemburg.

Teorema 1.19. *Considere A uma N-funcão, o espaço de Orlicz $L_A(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma Luxemburg.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência de Cauchy em $L_A(\Omega)$ com a norma Luxemburg.

É possível extrair uma subsequência (v_k) de (u_n), tal que $||v_{k+1}-v_k||_A < \dfrac{1}{2^k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Defina $v(x) := |v_1(x)| + \sum_{j=1}^{\infty}|v_{j+1}(x)-v_j(x)|$ e $w_m(x) := |v_1(x)| + \sum_{j=1}^{m}|v_{j+1}(x)-v_j(x)|$, então $w_m \in L_A(\Omega)$ e $||w_m||_A < 1 + ||v_1||_A$. Além disso, pela continuidade de A e pelo lema de Fatou, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_\Omega A\left(\frac{|v(x)|}{1+||v_1||_A}\right)dx &= \int_\Omega A\left(\frac{\lim\limits_{m\to+\infty} w_m(x)}{1+||v_1||_A}\right)dx \\
&= \int_\Omega \lim_{m\to+\infty} A\left(\frac{w_m(x)}{1+||v_1||_A}\right)dx \\
&\leq \liminf_{m\to+\infty}\int_\Omega A\left(\frac{w_m(x)}{1+||v_1||_A}\right)dx \\
&\leq 1,
\end{aligned}$$

daí, $v \in L_A(\Omega)$ e $||v||_A \leq 1 + ||v_1||_A$. Segue que, $\mathcal{L}_N(\tilde{\Omega}) = 0$, onde $\tilde{\Omega} := \{x \in \Omega; |v(x)| = \infty\}$.

Agora, defina

$$u(x) := \begin{cases} v_1(x) + \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}(v_{j+1}(x) - v_j(x)), & \text{se } x \in \Omega\backslash\tilde{\Omega} \\ 0, & \text{se } x \in \tilde{\Omega}, \end{cases}$$

então $|u(x)| < \infty$, para todo $x \in \Omega$ e $u \in L_A(\Omega)$. Por outro lado, escrevendo

$$v_m(x) = v_1(x) + \sum_{j=1}^{m-1}(v_{j+1}(x) - v_j(x)),$$

obtém-se

$$|u(x) - v_m(x)| \leq \sum_{j=m}^{+\infty} |v_{j+1}(x) - v_j(x)| \leq v(x).$$

Assim, $g_m \in L_A(\Omega)$, onde g_m está definida por

$$g_m(x) = \sum_{j=m}^{+\infty} |v_{j+1}(x) - v_j(x)|.$$

Segue, pela continuidade de A e pelo Lema de Fatou, que

$$\int_\Omega A\left(\frac{g_m(x)}{\displaystyle\sum_{j=m}^{+\infty}||v_{j+1}-v_j||_A}\right)dx = \int_\Omega A\left(\frac{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=m}^{n}|v_{j+1}(x)-v_j(x)|}{\displaystyle\sum_{j=m}^{+\infty}||v_{j+1}-v_j||_A}\right)dx$$

$$= \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} A\left(\frac{\displaystyle\sum_{j=m}^{n}|v_{j+1}(x)-v_j(x)|}{\displaystyle\sum_{j=m}^{+\infty}||v_{j+1}-v_j||_A}\right)dx$$

$$\leq \liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega A\left(\frac{\displaystyle\sum_{j=m}^{n}|v_{j+1}(x)-v_j(x)|}{\displaystyle\sum_{j=m}^{+\infty}||v_{j+1}-v_j||_A}\right)dx$$

$$\leq 1.$$

Logo,

$$||g_m||_A \leq \sum_{j=m}^{+\infty}||v_{j+1}-v_j||_A,$$

o que implica

$$||v_m-u||_A \leq ||g_m||_A \leq \sum_{j=m}^{+\infty}||v_{j+1}-v_j||_A \leq \sum_{j=m}^{+\infty}\frac{1}{2^j}.$$

Portanto, $\lim\limits_{m\to+\infty}||v_m-u||_A = 0$ e, consequentemente, $\lim\limits_{n\to+\infty}||u_n-u||_A = 0$.

■

Observação 1.20. *$L^p(\Omega) = L_{A_p}(\Omega) = K_{A_p}(\Omega)$, onde $A_p(t) = \dfrac{t^p}{p}$ e $1 < p < +\infty$. Além disso, vale a seguinte relação, $||u||_{A_p,\Omega} = p^{-\frac{1}{p}}||u||_{L^p(\Omega)}$.*

Teorema 1.21 (Desigualdade de Hölder Generalizada)**.** *Se A e $\tilde{A}$ são N-funções complementares, então a seguinte relação é satisfeita*

$$\left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right| \leq 2||u||_{A,\Omega}\cdot||v||_{\tilde{A},\Omega},$$

desde que $u \in L_A(\Omega)$ e $v \in L_{\tilde{A}}(\Omega)$.

Demonstração. Com efeito, pela Desigualdade de Young,

$$\frac{|u(x)|}{||u||_A} \cdot \frac{|v(x)|}{||v||_{\tilde{A}}} \leq A\left(\frac{|u(x)|}{||u||_A}\right) + \tilde{A}\left(\frac{|v(x)|}{||v||_{\tilde{A}}}\right),$$

para todo $x \in \Omega$. Em vista disso,

$$\begin{aligned}\frac{1}{||u||_A} \cdot \frac{1}{||v||_{\tilde{A}}} \left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right| &\leq \int_\Omega \frac{|u(x)|}{||u||_A} \cdot \frac{|v(x)|}{||v||_{\tilde{A}}} dx \\ &\leq \int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{||u||_A}\right) dx + \int_\Omega \tilde{A}\left(\frac{|v(x)|}{||v||_{\tilde{A}}}\right) dx \\ &\leq 2.\end{aligned}$$

Portanto, $\left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right| \leq 2||u||_{A,\Omega} \cdot ||v||_{\tilde{A},\Omega}$. ■

Teorema 1.22 (Um teorema de Imersão para espaços de Orlicz)**.** *Considere A e B duas N-funções, $L_B(\Omega) \hookrightarrow L_A(\Omega)$ se, e somente se,*

(*a*) *B domina A globalmente; ou*

(*b*) *B domina A próximo do infinito e $\mathcal{L}_N(\Omega) < +\infty$.*

Demonstração. Se existe $k > 0$, tal que $A(t) \leq B(kt)$, para todo $t > 0$, então dado $u \in L_B(\Omega)$, tem-se

$$\int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{k||u||_B}\right)dx \leq \int_\Omega B\left(\frac{|u(x)|}{||u||_B}\right) dx \leq 1.$$

Logo, $u \in L_A(\Omega)$ e $||u||_A \leq k||u||_B$.

Considere, agora, o caso $A(t) \leq B(kt)$, para todo $t \geq t_0$ e $\mathcal{L}_N(\Omega) < \infty$. Tomando

$$t_1 = A^{-1}\left(\frac{1}{2\mathcal{L}_N(\Omega)}\right),$$

existe $k_1 > 1$, tal que $A(t) \leq k_1 B(kt)$, para todo $t \geq t_1$. Dado $u \in L_{A(\Omega)}$, defina

$$\Omega'(u) := \left\{x \in \Omega; \frac{|u(x)|}{2k_1 k||u||_B} < t_1\right\}.$$

Segue que,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{2k_1k||u||_B}\right)dx &\leq \int_{\Omega'(u)} A\left(\frac{|u(x)|}{2k_1k||u||_B}\right)dx + \int_{\Omega\setminus\Omega'(u)} A\left(\frac{|u(x)|}{2k_1k||u||_B}\right)dx \\
&\leq A(t_1)\int_{\Omega'(u)} dx + k_1\int_{\Omega\setminus\Omega'(u)} B\left(\frac{|u(x)|}{2k_1||u||_B}\right)dx \\
&\leq \frac{1}{2\mathcal{L}_N(\Omega)}\int_{\Omega'(u)} dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Omega'(u)} B\left(\frac{|u(x)|}{||u||_B}\right)dx \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

Isto é, $u \in L_A(\Omega)$ e $||u||_A \leq 2k_1k||u||_B$.

Reciprocamente, suponha que nenhuma das alternativas (a) e (b) ocorram. Em vista disso, existe uma sequência de números reais positivos (t_j), tal que

$$\begin{cases} A(t_j) \geq B(jt_j), & \text{se } \mathcal{L}_N(\Omega) = \infty \\ A(t_j) \geq B(jt_j) \ \text{ com } t_j j \geq B^{-1}\left(\dfrac{1}{\mathcal{L}_N(\Omega)}\right), & \text{se } \mathcal{L}_N(\Omega) < \infty. \end{cases}$$

Considere ainda, $\Omega_j \subset \Omega$ subdomínio tal que $\mathcal{L}_N(\Omega_j) = \dfrac{1}{B(jt_j)}$ e seja $u_j : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por

$$u_j(x) = \begin{cases} jt_j, & \text{se } x \in \Omega_j \\ 0, & \text{se } x \in \Omega\setminus\Omega_j. \end{cases}$$

Assim,

$$\int_\Omega A\left(\frac{|u_j(x)|}{j}\right)dx \geq \int_\Omega B(|u_j(x)|)dx = 1,$$

ou seja, $||u_j||_B = 1$ e $||u_j||_A \geq j$. Portanto, a imersão de $L_B(\Omega)$ em $L_A(\Omega)$ não ocorre. ∎

Definição 1.23 (Convergência em Média)**.** *Uma sequência de funções (u_j) em $L_A(\Omega)$ converge em média para $u \in L_A(\Omega)$ se*

$$\lim_{j\to+\infty}\int_\Omega A\left(|u_j(x) - u(x)|\right)dx = 0.$$

Afirmação 1.24. *Convergência em $(L_A(\Omega), ||\cdot||_A)$ implica convergência em média.*

Demonstração. Com efeito, seja (u_j) sequência em $L_A(\Omega)$ tal que $u_j \to u \in L_A(\Omega)$, com a norma Luxemburg. Dado $\varepsilon \in (0,1]$, tem-se

$$\int_\Omega A(|u_j(x) - u(x)|)dx \leq \varepsilon\int_\Omega A\left(\frac{|u_j(x) - u(x)|}{\varepsilon}\right)dx.$$

Portanto, $\lim_{j\to+\infty}\int_\Omega A\left(|u_j(x)-u(x)|\right)dx = 0.$ ■

Observação 1.25. *Se (A,Ω) é Δ-regular, então convergência em média implica convergência em $L_A(\Omega)$.*

Definição 1.26 (O Espaço $E_A(\Omega)$). *Considere o conjunto*

$$\Gamma(\Omega) := \{u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}; u \ \textit{é limitada em} \ \Omega \ \textit{com} \ supp(u) \subset \overline{\Omega} \ \textit{limitado}\}.$$

O conjunto, denotado por $E_A(\Omega)$, é definido como sendo o fecho de $\Gamma(\Omega)$ em $L_A(\Omega)$, com a norma Luxemburg.

Afirmação 1.27. *(i) Se $u \in K_A(\Omega)$, então existe uma sequência (u_j) em $\Gamma(\Omega)$, tal que $u_j \to u$ em média;*

(ii) Se A é uma N-função, então $E_A(\Omega) \subset K_A(\Omega)$.

Demonstração.

(i) De fato, defina

$$u_j(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } |x| \leq j \text{ e } |u(x)| \leq j \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

então $u_j \to u$ q.t.p, em Ω, e $u_j \in \Gamma(\Omega)$. Além disso, $A(|u(\cdot)-u_j(\cdot)|) \leq A(|u(\cdot)|)$. Consequentemente, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{j\to+\infty}\int_\Omega A(|u_j(x)-u(x)|)dx = 0.$$

(ii) Considere $u \in E_A(\Omega)$. Por definição, existe $v \in \Gamma(\Omega)$, tal que $0 < ||u-v||_A \leq \dfrac{1}{2}$. Segue que,

$$\frac{1}{||2u-2v||_A}\int_\Omega A(|2u(x)-2v(x)|)dx \leq \int_\Omega A\left(\frac{|2u(x)-2v(x)|}{||2u-2v||_A}\right)dx \leq 1.$$

O que implica que $2u-2v \in K_A(\Omega)$. Daí, $u \in K_A(\Omega)$, já que $u = \frac{1}{2}(2u-2v)+\frac{1}{2}(2v)$. ■

Lema 1.28. *$E_A(\Omega)$ é um subespaço maximal de $K_A(\Omega)$.*

Demonstração. Considere S subespaço vetorial de $K_A(\Omega)$. Note que, dado $u \in S$, tem-se $\lambda u \in K_A(\Omega)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Fixe $\epsilon > 0$ e defina

$$u_j(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } |x| \leq j \text{ e } |u(x)| \leq j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Como $A\left(\dfrac{|u_j(x)-u(x)|}{\epsilon}\right) \leq A\left(\dfrac{|u(x)|}{\epsilon}\right)$, para todo $x \in \Omega$, e $A\left(\dfrac{|u_j(\cdot)-u(\cdot)|}{\epsilon}\right) \to 0$ q.t.p, segue, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

$$\lim_{j\to+\infty}\int_\Omega A\left(\frac{|u_j(x)-u(x)|}{\epsilon}\right)dx = 0.$$

Portanto, $u \in E_A(\Omega)$. ■

Teorema 1.29. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, domínio com volume finito. Suponha que a N-função A cresce essencialmente mais lenta do que a N-função B. Então*

$$L_B(\Omega) \hookrightarrow E_A(\Omega).$$

Demonstração. Com efeito, como B domina A próximo do infinito e $\mathcal{L}_N(\Omega) < \infty$, tem-se

$$L_B(\Omega) \hookrightarrow L_A(\Omega).$$

Assim, basta provar que $L_B(\Omega) \subset E_A(\Omega)$.

Será demonstrado que, se $u \in K_B(\Omega)$, então $\lambda u \in K_A(\Omega)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Como A cresce essencialmente mais lenta do que B, existe $t_0 > 0$ tal que $A(|\lambda|t) \leq B(t)$, para todo $t \geq t_0$. Então,

$$\begin{aligned}\int_\Omega A(|\lambda u(x)|)dx &= \int_{\{x\in\Omega;|u(x)|<t_0\}} A(|\lambda u(x)|)dx + \int_{\{x\in\Omega;|u(x)|\geq t_0\}} A(|\lambda u(x)|)dx \\ &\leq A(|\lambda|t_0)\mathcal{L}_N(\Omega) + \int_\Omega B(|u(x)|)dx < \infty.\end{aligned}$$

■

1.2.3 Dualidade em Espaços de Orlicz

Lema 1.30. *Dado $v \in L_{\tilde{A}}(\Omega)$, o funcional linear F_v, definido por*

$$F_v(u) = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \tag{1.2}$$

pertence ao espaço dual $[L_A(\Omega)]^*$ e a norma $||F_v||$ nesse espaço satisfaz

$$||v||_{\tilde{A}} \leq ||F_v|| \leq 2||v||_{\tilde{A}}. \tag{1.3}$$

Demonstração. Segue, da Desigualdade de Hölder Generalizada, que

$$|F_v(u)| \leq 2||u||_A||v||_{\tilde{A}},$$

para toda $u \in L_A(\Omega)$, confirmando a segunda desigualdade.

Para estabelecer a outra desigualdade, assuma que $v \neq 0$ em $L_{\tilde{A}}(\Omega)$ e, então, $||F_v|| > 0$. Defina

$$u(x) = \begin{cases} \tilde{A}\left(\dfrac{|v(x)|}{||F_v||}\right) \cdot \dfrac{||F_v||}{v(x)}, & \text{se } v(x) \neq 0 \\ 0, & v(x) = 0 \end{cases}.$$

Note que $u \in L_A(\Omega)$, pois, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $2^m||F_v|| > ||v||_{\tilde{A}}$. Consequentemente,

$$\frac{1}{2^m}\int_\Omega A\left(\tilde{A}\left(\frac{|v(x)|}{||F_v||}\right) \cdot \frac{||F_v||}{|v(x)|}\right) dx < \int_\Omega \tilde{A}\left(\frac{|v(x)|}{2^m||F_v||}\right) dx \leq 1.$$

Se $||u||_A > 1$, então para $0 < \varepsilon \leq ||u||_A - 1$, tem-se

$$\frac{1}{||u||_A - \varepsilon}\int_\Omega A(|u(x)|)dx \geq \int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{||u||_A - \varepsilon}\right) dx \geq 1.$$

Em vista disso,

$$\begin{aligned} ||u||_A \leq \int_\Omega A(|u(x)|)dx &= \int_\Omega A\left(\tilde{A}\left(\frac{|v(x)|}{||F_v||}\right) \cdot \frac{||F_v||}{|v(x)|}\right) dx \\ &< \int_\Omega \tilde{A}\left(\frac{|v(x)|}{||F_v||}\right) dx \\ &= \frac{1}{||F_v||}\int_\Omega u(x)v(x)dx \\ &\leq ||u||_A. \end{aligned}$$

O que leva a uma contradição.

Finalmente, como $||u||_A \leq 1$,

$$||F_v|| = \sup_{u \in L_A(\Omega), ||u||_A \leq 1} F_v(u) \geq ||F_v|| \left| \int_\Omega \tilde{A}\left(\frac{|v(x)|}{||F_v||}\right) dx \right|.$$

Logo,

$$\int_\Omega \tilde{A}\left(\frac{|v(x)|}{||F_v||}\right) dx \leq 1. \tag{1.4}$$

Portanto, $||v||_{\tilde{A}} \leq ||F_v||$. ■

Observação 1.31. *O Lema acima também é válido quando F_v está restrito a $E_A(\Omega)$. Para obter a primeira desigualdade de* (1.3)*, tome $||F_v||$ sendo a norma de F_v sobre $[E_A(\Omega)]^*$ e substitua u na prova acima por $u\chi_{\Omega_n}$, onde χ_{Ω_n} é a função característica de $\Omega_n := \{x \in \Omega; |x| \leq n \ \text{ e } \ |u(x)| \leq n\}$. Claramente, $u\chi_{\Omega_n}$ pertence a $E_A(\Omega)$, $||u\chi_{\Omega_n}|| \leq 1$*

e a desigualdade (1.4) *torna-se*

$$\int_\Omega \chi_{\Omega_n}(x)\tilde{A}\left(\frac{|v(x)|}{||F_v||}\right)dx \leq 1.$$

Já que χ_{Ω_n} *tende a* 1*, quando* $n \to +\infty$*, obtem-se, através do Lema de Fatou,*

$$\int_\Omega \tilde{A}\left(\frac{|v(x)|}{||F_v||}\right)dx \leq 1.$$

e, consequentemente, $||v||_{\tilde{A}} \leq ||F_v||$.

Teorema 1.32. *O Espaço dual de* $E_A(\Omega)$ *é isomorfo e homeomorfo a* $L_{\tilde{A}}(\Omega)$*.*

Demonstração. Foi provado que qualquer elemento $v \in L_A(\tilde{\Omega})$ determina um funcional linear limitado F_v via (1.2) sobre $L_A(\Omega)$, também sobre $E_A(\Omega)$, e que em qualquer caso tem-se $||v||_{\tilde{A}} \leq ||F_v|| \leq 2||v||_{\tilde{A}}$. Resta provar que todo funcional linear limitado sobre $E_A(\Omega)$ é da forma F_v, para algum $v \in E_A(\Omega)$.

Dado $F \in [E_A(\Omega)]^*$, defina $\lambda : \{S \subset \Omega; S$ é mensurável e tem volume finito$\} \to \mathbb{R}$ por

$$\lambda(S) = F(\chi_S).$$

Então, λ está bem definida e é uma medida sobre essa coleção de conjuntos. Uma vez que

$$\int_\Omega A\left(|\chi_S(x)|A^{-1}\left[\frac{1}{\mathcal{L}_N(S)}\right]\right)dx = \int_S \frac{1}{\mathcal{L}_N(S)}dx = 1,$$

tem-se

$$|\lambda(S)| \leq ||F||||\chi_S||_A = \frac{||F||}{A^{-1}\left(\dfrac{1}{\mathcal{L}_N(S)}\right)}.$$

Essa desigualdade prova que λ é absolutamente contínua com respeito a medida $\mathcal{L}_N$. Pelo Teorema de Radon-Nikodyn, λ pode ser expressa por

$$\lambda(S) = \int_S v(x)dx, \tag{1.5}$$

para alguma função $v \in L^1(\Omega)$. Assim,

$$F(u) = \int_\Omega u(x)v(x)dx,$$

para toda função simples integrável u em Ω.

Agora, se $u \in E_A(\Omega)$, é possível encontrar uma sequência (u_j) de funções mensuráveis simples que converge em quase todo ponto para a função u e satisfaz $|u_j(x)| \leq 2|u(x)|$, sobre Ω. Pelo Lema de Fatou,

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right| &\leq \sup_j \int_\Omega |u_j(x)v(x)|dx\\ &= \sup_j |F(|u_j|sign(v))|\\ &\leq ||F|| \sup_j ||u_j||_A\\ &\leq 2||F||||u||_A.\end{aligned}$$

Em vista disso, o funcional linear

$$F_v(u) = \int_\Omega u(x)v(x)dx \tag{1.6}$$

é limitado sobre $E_A(\Omega)$ e $v \in L_{\tilde{A}}(\Omega)$, por um argumento análogo ao da observação (1.31). Como F_v e F assumem os mesmos valores sobre funções simples integráveis, um conjunto denso em $E_A(\Omega)$ (veja Teorema 1.35), $F_v = F$ sobre $E_A(\Omega)$, o que conclui a demonstração. ■

Teorema 1.33 (Reflexividade de Espaços de Orlicz). *$L_A(\Omega)$ é reflexivo se, e somente se, ambas (A, Ω) e $(\tilde{A}, \Omega)$ são Δ-regulares.*

Demonstração. Se (A, Ω) e $(\tilde{A}, \Omega)$ são Δ-regulares, o resultado segue do teorema anterior. Reciprocamente, se (A, Ω) não for Δ-regular então $E_A(\Omega) \subsetneqq L_A(\Omega)$ e é um subespaço fechado. Segue, do Teorema da Separação de Hahn-Banach (Segunda Forma Geométrica), que $L_{\tilde{A}}(\Omega) = [E_A(\Omega)]^* \subsetneqq [L_A(\Omega)]^*$, onde a primeira igualdade provém do teorema anterior. ■

1.2.4 Separabilidade e Teoremas de Compacidade

Definição 1.34. *Seja $J \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, satisfazendo*

(i) $J(x) = 0$, *se* $|x| \geq 1$, *e*

(ii) $\int_{\mathbb{R}^N} J(x)dx = 1$.

Para cada $\varepsilon > 0$, defina $J_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}J(\frac{x}{\varepsilon})$, então $J_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfaz

(a) $J_\varepsilon(x) = 0$, *se* $|x| \geq \varepsilon$, *e*

(b) $\int_{\mathbb{R}^N} J_\varepsilon(x)dx = 1$.

Teorema 1.35 (Aproximação de Funções em $E_A(\Omega)$).

(a) $C_c(\Omega)$ é denso em $E_A(\Omega)$;

(*b*) $E_A(\Omega)$ *é separável;*

(*c*) *Para cada* $u \in E_A(\Omega)$, $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} J_\epsilon * u = u$, *na norma de* $E_A(\Omega)$*;*

(*d*) $C_c^\infty(\Omega)$ *é denso em* $E_A(\Omega)$.

Demonstração.

(a) Considere $u \in E_A(\Omega)$, com $u \geq 0$. Seja (s_n) uma sequência de funções simples mensuráveis não-negativas que é não-decrescente, com $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n(x) = s(x)$. Dado $\varepsilon > 0$, tem-se

$$A\left(\frac{u(x) - s_n(x)}{\varepsilon}\right) \leq A\left(\frac{u(x)}{\varepsilon}\right),$$

em Ω. Pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $n \geq n_\varepsilon$, tem-se $||u - s_n||_A < \varepsilon$.

Seja s função simples tal que $||u - s||_A < \frac{\varepsilon}{2}$, em particular, $\mathcal{L}_N(supp(s)) < \infty$. Fazendo uso do Teorema de Lusin, existe $v \in C_c(\Omega)$ tal que

$$\mathcal{L}_N(\{x \in \Omega; v(x) \neq s(x)\}) < \frac{1}{A\left(\frac{4||s||_{L^\infty(\Omega)}}{\varepsilon}\right)}$$

e $|v(x)| \leq ||s||_{L^\infty(\Omega)}$, para todo $x \in \Omega$.

Em vista disso,

$$\int_\Omega A\left(\frac{|v(x) - s(x)|}{\frac{\varepsilon}{2}}\right) dx \leq \int_{\{x\in\Omega; v(x)\neq s(x)\}} A\left(\frac{4||s||_{L^\infty(\Omega)}}{\varepsilon}\right) dx \leq 1.$$

Logo, $||v - s||_A < \frac{\varepsilon}{2}$ e, portanto, $||v - u||_A < \varepsilon$.

(b) Considere a sequência de subconjuntos compactos

$$\Omega_m = \left\{x \in \Omega; |x| \leq m \ \text{ e } \ d(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{m}\right\},$$

defina

$$P = \left\{f; f \ \text{ é um polinômio sobre } \ \mathbb{R}^N \ \text{ com coeficientes racionais}\right\}$$

e

$$P_m = \{f\chi_{\Omega_m}; f \in P\}.$$

Pelo Teorema de Stone-Weierstrass, P_m é denso em $(C(\Omega_m), ||\cdot||_\infty)$. Decorre do item ($a$)

que dada $u \in E_A(\Omega)$, existe $v \in C_c(\Omega)$ tal que

$$||u - v||_A < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Segue que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $d(supp(v), \partial\Omega) > \frac{1}{m}$. Assim, obtém-se $w \in P_m$ tal que

$$||v - w||_{L^\infty(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2} A^{-1}\left(\frac{1}{\mathcal{L}_N(\Omega_m)}\right).$$

Daí,

$$\int_\Omega A\left(\frac{|v(x) - s(x)|}{\frac{\varepsilon}{2}}\right) dx \leq \int_{\Omega_m} A\left(\frac{||v - w||_{L^\infty(\Omega)}}{\frac{\varepsilon}{2}}\right) dx \leq 1.$$

Portanto, $||u - w||_A < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

(c) Seja $u \in E_A(\Omega)$, estenda u sendo 0 fora de Ω. Combinando o Teorema de Hahn-Banach e o Teorema 1.32, tem-se

$$||J_\epsilon * u - u||_{A,\Omega} = \sup_{v \in L_{\tilde{A}}, ||F_v|| \leq 1} |F_v(J_\varepsilon * u - u)| = \sup_{v \in L_{\tilde{A}}, ||v||_{\tilde{A}} \leq 1} \left| \int_\Omega ((J_\varepsilon * u) - u(x))v(x)dx \right|.$$

Estimando a integral acima:

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega ((J_\varepsilon * u) - u(x))v(x)dx \right| &= \left| \int_\Omega \left(\int_{\mathbb{R}^N} J(y)(u(x - \varepsilon y) - u(x))dy \right) v(x)dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_\Omega J(y)|(u(x - \varepsilon y) - u(x))||v(x)|dxdy \\
&\leq 2||v||_{\tilde{A}} \int_{|y| \leq 1} J(y)||u_{\varepsilon y} - u||_A dy,
\end{aligned}$$

onde $u_{\varepsilon y}(x) = u(x - \varepsilon y)$. Dado $\delta > 0$, (pelo item (b)) existe $\tilde{u} \in C_0(\Omega)$ tal que

$$||u - \tilde{u}||_A < \frac{\delta}{6},$$

daí,

$$||u_{\varepsilon y} - \tilde{u}_{\varepsilon y}||_{A,\Omega} < \frac{\delta}{6}.$$

Note, ainda, que

$$||\tilde{u}_{\varepsilon y} - \tilde{u}||_A < \frac{\delta}{6},$$

para $|y| \leq 1$ e ε suficientemente pequeno, devido a continuidade uniforme de $\tilde{u}$ sobre

$supp(u) \subset \Omega$. Portanto, $||J_\varepsilon * u - u||_A \leq \delta$. ∎

Observação 1.36. *$L_A(\Omega)$ é separável se, e somente se, $L_A(\Omega) = E_A(\Omega)$.*

Definição 1.37 (Convergência em Medida)**.** *Uma sequência (u_j) de funções mensuráveis converge em medida sobre Ω para uma função mensurável u se, para cada $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$, existe um número natural M tal que se $j > M$, tem-se*

$$\mathcal{L}_N(\{x \in \Omega; |u_j(x) - u(x)| > \varepsilon\}) \leq \delta.$$

Nesse caso, existe também um número natural N tal que se $j, k \geq N$, tem-se

$$\mathcal{L}_N(\{x \in \Omega; |u_j(x) - u_k(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \delta.$$

Teorema 1.38. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ subconjunto com volume finito. Suponha que a N-função B cresça essencialmente mais lenta do que a N-função A, perto do infinito. Se a sequência (u_j) for limitada em $L_A(\Omega)$ e convergir em medida sobre Ω, então ela converge na norma em $L_B(\Omega)$.*

Demonstração. Fixe $\varepsilon > 0$ e defina

$$v_{j,k}(x) := \frac{1}{\varepsilon}(u_j(x) - u_k(x)).$$

Por hipótese, $||v_{j,k}|| \leq K$. Como B cresce essencialmente mais lenta do que A próximo do infinito,

$$B(t) \leq \frac{1}{4} A\left(\frac{t}{K}\right), \text{ para todo } t > t_0.$$

Considere $\delta = \dfrac{1}{4B(t_0)}$ e

$$\Omega_{j,k} = \left\{x \in \Omega; |v_{j,k}(x)| > B^{-1}\left(\frac{1}{2\mathcal{L}_N(\Omega)}\right)\right\}.$$

Já que (u_j) converge em medida, existe um inteiro N tal que se $j, k \geq N$, então $\mathcal{L}_N(\Omega_{j,k}) \leq \delta$.

Defina, agora,

$$\Omega'_{j,k} = \{x \in \Omega_{j,k}; |v_{j,k}(x)| \geq t_0\} \text{ e } \Omega''_{j,k} = \Omega_{j,k} - \Omega'_{j,k}.$$

Segue que, para $j, k \geq N$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega B(|v_{j,k}(x)|)dx &= \int_{\Omega\setminus\Omega_{j,k}} B(|v_{j,k}(x)|)dx + \int_{\Omega'_{j,k}} B(|v_{j,k}(x)|)dx + \int_{\Omega''_{j,k}} B(|v_{j,k}(x)|)dx \\ &\leq \frac{\mathcal{L}_N(\Omega)}{2\mathcal{L}_N(\Omega)} + \frac{1}{4}\int_{\Omega'_{j,k}} A\left(\frac{|v_{j,k}(x)|}{K}\right) dx + \delta B(t_0) \\ &\leq 1.\end{aligned}$$

Portanto, para $j, k \geq N$, vale $||u_j - u_k||_B < \varepsilon$. ■

Teorema 1.39 (Conjuntos pré-compactos em Espaços de Orlicz)**.** *Seja Ω domínio com volume finito e suponha que a N-função B cresce essencialmente mais lenta do que a N-função A próximo do infinito. Então, qualquer subconjunto limitado S de $L_A(\Omega)$, que é pré-compacto em $L^1(\Omega)$, é também pré-compacto em $L_B(\Omega)$.*

Demonstração. Considere $u \in L_A(\Omega)$. Como $\mathcal{L}_N(\Omega) < \infty$, pela Desigualdade de Jensen,

$$A\left(\frac{1}{\mathcal{L}_N(\Omega)}\int_\Omega \frac{|u(x)|}{||u||_A}dx\right) \leq \frac{1}{\mathcal{L}_N(\Omega)}\int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{||u||_A}\right)dx \leq \frac{1}{\mathcal{L}_N(\Omega)},$$

daí, $L_A(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$.

Seja (u_j^*) uma sequência em S, então existe uma subsequência (u_j) de (u_j^*) que converge para u em $L^1(\Omega)$. Sejam $\varepsilon, \delta > 0$, existe um número natural N tal que, se $j \geq N$, obtém-se $\|u_j - u\|_{L^1(\Omega)} \leq \varepsilon\delta$, isto é, se $j \geq N$,

$$\begin{aligned}\varepsilon\delta \geq \int_\Omega |u_j(x) - u(x)|dx &= \int_{\{x\in\Omega; |u_j(x)-u(x)|\geq\varepsilon\}} |u_j(x) - u(x)|dx \\ &\quad + \int_{\{x\in\Omega; |u_j(x)-u(x)|<\varepsilon\}} |u_j(x) - u(x)|dx \\ &\geq \varepsilon\mathcal{L}_N(\{x \in \Omega; |u_j(x) - u(x)| \geq \varepsilon\}) \\ &\quad + \int_{\{x\in\Omega; |u_j(x)-u(x)|<\varepsilon\}} |u_j(x) - u(x)|dx.\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{L}_N(\{x \in \Omega; |u_j(x) - u(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \delta$, para todo $j \geq N$. Pelo teorema anterior, (u_j) converge para u em $(L_B(\Omega), ||\cdot||_B)$. ■

1.2.5 Um Caso Limite do Teorema de Imersão de Sobolev

Definição 1.40 (Cone Finito)**.** *Seja v um vetor não nulo em $\mathbb{R}^N$ e, para cada $x \neq 0$, considere $\angle(x, v)$ o ângulo entre x e v. Dado v, $\rho > 0$, e k satisfazendo $0 < k \leq \pi$, o* *conjunto*

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^N ; x = 0 \ \ ou \ 0 < |x| \leq \rho, \angle(x, v) \leq \frac{k}{2} \right\},$$

é chamado um cone finito de altura ρ, eixo de direção v e ângulo de abertura k, com vértice na origem.

Definição 1.41 (A Condição do Cone)**.** *Ω satisfaz a condição do cone se existe um cone finito C tal que cada $x \in \Omega$ é um vértice de um cone finito C_x contido em Ω e congruente a C. C_x é obtido de C através de um movimento rígido.*

Lema 1.42 (Uma Estimativa Local)**.** *Seja Ω satisfazendo a condição do cone. Existe uma constante K, dependendo somente de m, N e das dimensões ρ e k do cone C especificado na condição do cone de Ω, tal que, para todo $u \in C^\infty(\Omega)$, todo $x \in \Omega$, e todo r satisfazendo $0 < r \leq \rho$, vale*

$$|u(x)| \leq K \left(\sum_{|\alpha| \leq m-1} r^{|\alpha| - N} \int_{C_{x,r}} |D^\alpha u(y)| dy + \sum_{|\alpha| = m} \int_{C_{x,r}} |D^\alpha u(y)| |x - y|^{m-N} \right) dx,$$

onde $C_{x,r} := \{y \in C_x ; |x - y| \leq r\}$. Aqui $C_x \subset \Omega$ é congruente a C tendo vértice em x.

Demonstração. Seja $y \in C_{x,r}$, defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(t) = u(tx + (1-t)y)$.

Aplicando a Fórmula de Taylor com Resto Integral,

$$f(1) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} f^j(0) + \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} f^m(t) dt.$$

Note que

$$f^j(t) = \sum_{|\alpha| = j} \frac{j!}{\alpha!} D^\alpha u(tx + (1-t)y)(x-y)^\alpha,$$

onde $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_N!$ e $(x-y)^\alpha = (x_1 - y_1)^{\alpha_1} \cdots (x_N - y_N)^{\alpha_N}$, daí

$$\begin{aligned} |u(x)| \leq & \sum_{|\alpha| \leq m-1} \frac{1}{\alpha!} |D^\alpha u(y)| |x-y|^{|\alpha|} \\ & + \sum_{|\alpha| = m} \frac{m}{\alpha!} |x-y|^m \int_0^1 (1-t)^{m-1} |D^\alpha u(tx + (1-t)y)| dt. \end{aligned}$$

Se $\mathcal{L}_N(C) = c \cdot \rho^N$, então $|C_{x,r}| = c \cdot r^N$. Integrando com respeito a y sobre $C_{x,r}$ e usando mudança de variáveis, tem-se

$$
\begin{aligned}
cr^N|u(x)| \leq & \sum_{|\alpha|\leq m-1} \frac{r^{|\alpha|}}{\alpha!}\int_{C_{x,r}} |D^\alpha u(y)|dy \\
& + \sum_{|\alpha|=m} \frac{m}{\alpha!}\int_{C_{x,r}} |x-y|^m \int_0^1 (1-t)^{m-1}|D^\alpha u(tx+(1-t)y)|dtdy \\
= & \sum_{|\alpha|\leq m-1} \frac{r^{|\alpha|}}{\alpha!}\int_{C_{x,r}} |D^\alpha u(y)|dy \\
& + \sum_{|\alpha|=m} \frac{m}{\alpha!}\int_0^1\int_{C_{x,r}} |x-y|^m (1-t)^{m-1}|D^\alpha u(tx+(1-t)y)|dydt \\
= & \sum_{|\alpha|\leq m-1} \frac{r^{|\alpha|}}{\alpha!}\int_{C_{x,r}} |D^\alpha u(y)|dy \\
& + \sum_{|\alpha|=m} \frac{m}{\alpha!}\int_0^1\int_{C_{x,(1-t)r}} |z-x|^m (1-t)^{-N-1}|D^\alpha u(z)|dzdt \\
= & \sum_{|\alpha|\leq m-1} \frac{r^{|\alpha|}}{\alpha!}\int_{C_{x,r}} |D^\alpha u(y)|dy \\
& + \sum_{|\alpha|=m} \frac{m}{\alpha!}\int_{C_{x,r}}\int_0^{1-\frac{|z-x|}{r}} |z-x|^m (1-t)^{-N-1}|D^\alpha u(tx+(1-t)y)|dtdz \\
= & \sum_{|\alpha|\leq m-1} \frac{r^{|\alpha|}}{\alpha!}\int_{C_{x,r}} |D^\alpha u(y)|dy \\
& + \sum_{|\alpha|=m} \frac{m}{\alpha!}\cdot\frac{r^N}{N}\int_{C_{x,r}} |z-x|^{m-N}|D^\alpha u(z)|dz.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
|u(x)| \leq & \sum_{|\alpha|\leq m-1} \frac{r^{|\alpha|-N}}{\alpha! c}\int_{C_{x,r}} |D^\alpha u(y)|dy + \sum_{|\alpha|=m}\frac{m}{c\alpha! N}\int_{C_{x,r}} |y-x|^{m-N}|D^\alpha u(y)|dy \\
\leq & K\left(\sum_{|\alpha|\leq m-1} r^{|\alpha|-N}\int_{C_{x,r}} |D^\alpha |u(y)dy + \sum_{|\alpha|=m}\int_{C_{x,r}} |y-x|^{m-N}|D^\alpha u(y)|dy\right),
\end{aligned}
$$

onde $K = \sup\left\{\frac{1}{c}, \frac{m}{cN}\right\}$. ∎

Lema 1.43. *Considere $z \in \mathbb{R}^N$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, domínio com volume finito. Se $0 \leq \eta < N$, então*

$$
\int_\Omega |x-y|^{-\eta}dx \leq \frac{K}{N-\eta}\mathcal{L}_N(\Omega)^{1-\frac{\eta}{N}}, \tag{1.7}
$$

onde K é uma constante que depende apenas de η e N.

Demonstração. Seja $R > 0$ tal que $\mathcal{L}_N(\Omega) = \mathcal{L}_N(B(z,R))$, então

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |x-z|^{-\eta}dx &= \int_{\Omega\cap B(z,R)} |x-z|^{-\eta}dx + \int_{\Omega\cap(\mathbb{R}^N\setminus B(z,R))} |x-z|^{-\eta}dx \\
&\leq \int_{\Omega\cap B(z,R)} |x-z|^{-\eta}dx + \int_{\Omega\cap(\mathbb{R}^N\setminus B(z,R))} R^{-\eta}dx \\
&= \int_{\Omega\cap B(z,R)} |x-z|^{-\eta}dx + \int_{B(z,R)\cap(\mathbb{R}^N\setminus\Omega)} R^{-\eta}dx \\
&\leq \int_{B(z,R)} |x-z|^{-\eta}dx \\
&= \int_0^R \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x-z|^\eta} ds_x dr \\
&= \int_0^R N\omega_N r^{N-\eta-1}dr \\
&= \frac{N\omega_N}{N-\eta} R^{N-\eta} \\
&= N\omega_N^{\frac{N}{\eta}} \frac{\mathcal{L}_N(\Omega)^{1-\frac{\eta}{N}}}{N-\eta}.
\end{aligned}$$

■

Teorema 1.44 (Teorema de Trudinger)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ satisfazendo a condição do cone. Considere $mp = N$, $p > 1$ e*

$$A(t) = \exp\left(t^{\frac{N}{N-m}}\right) - 1 = \exp\left(t^{\frac{p}{p-1}}\right) - 1.$$

Então,

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L_A(\Omega).$$

Demonstração. Se $m > 1$ e $mp = N$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,N}(\Omega)$. Portanto, é suficiente provar o teorema para $m = 1$, $p = N > 1$. Considere $u \in C^1(\Omega) \cap W^{1,N}(\Omega)$ (conjunto denso em $W^{1,N}(\Omega)$) e $x \in \Omega$, pelo caso especial $m = 1$ do Lema 1.42, tem-se

$$\begin{aligned}
|u(x)| &\leq K_1 \left(||u||_{1,C} \sum_{j=1}^N \int_C |D_j u(x)||x-y|^{1-N}dy \right) \\
&\leq K_1 \left(||u||_{1,\Omega} + \sum_{j=1}^N \int_\Omega |D_j u(y)||x-y|^{1-N}dy \right),
\end{aligned}$$

onde C é um cone contido em Ω, tendo vértice em x e congruente ao cone especificado na condição do cone de Ω.

Agora, o objetivo é estimar a norma de u em $L^s(\Omega)$, para qualquer $s > 1$.

Se $v \in L^{s'}(\Omega)$ (onde $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$), usando a Desigualdade de Hölder, tem-se

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |u(x)v(x)|dx &\leq K_1 \left(||u||_{L^1(\Omega)} \int_\Omega |v(x)|dx + \sum_{j=1}^{N} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D_j u(y)||v(x)|}{|x-y|^{N-1}} dydx \right) \\
&\leq K_1 \Bigg(||u||_{L^1(\Omega)} ||v||_{L^{s'}(\Omega)} \mathcal{L}_N(\Omega)^{\frac{1}{s}} \\
&+ \sum_{j=1}^{N} \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|v(x)|}{|x-y|^{N-\frac{1}{s}}} dydx \right)^{\frac{N-1}{N}} \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|D_j u(y)|^N |v(x)|}{|x-y|^{\frac{N-1}{s}}} dydx \right)^{\frac{1}{N}} \Bigg).
\end{aligned}
$$

Usando o Lema 1.43 e a Desigualdade de Hölder, obtém-se

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \int_\Omega \frac{|v(x)|}{|x-y|^{N-\frac{1}{s}}} dydx &\leq \int_\Omega K_2 s \mathcal{L}_N(\Omega)^{\frac{1}{sN}} |v(x)|dx \\
&\leq K_2 s \mathcal{L}_N(\Omega)^{\frac{1}{sN}} \mathcal{L}_N(\Omega)^{\frac{1}{s}} ||v||_{L^{s'}(\Omega)} \\
&= K_2 s \mathcal{L}_N(\Omega)^{\frac{1}{s} + \frac{1}{sN}} ||v||_{L^{s'}(\Omega)}. \qquad (1.8)
\end{aligned}
$$

Via Teorema de Tonelli, Teorema de Fubini, Desiguadade de Hölder e Lema 1.43, tem-se

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \int_\Omega \frac{|D_j u(y)|^N |v(x)|}{|x-y|^{\frac{N-1}{s}}} dydx &= \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D_j u(y)|^N |v(x)|}{|x-y|^{\frac{N-1}{s}}} dxdy \\
&\leq \int_\Omega |D_j u(y)|^N ||v||_{L^{s'}(\Omega)} \left(\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{N-1}} dx \right)^{\frac{1}{s}} dy \\
&\leq \int_\Omega |D_j u(y)|^N ||v||_{L^{s'}(\Omega)} \left(K_2 \mathcal{L}_N(\Omega)^{\frac{1}{N}} \right)^{\frac{1}{s}} dy \\
&= K_3 ||D_j u||^N_{L^N(\Omega)} ||v||_{L^{s'}(\Omega)} \mathcal{L}_N(\Omega)^{\frac{1}{Ns}}. \qquad (1.9)
\end{aligned}
$$

Segue das estimativas (1.8) e (1.9), que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega u(x)v(x)dx &\leq K_1 ||u||_{L^1(\Omega)} ||v||_{L^{s'}(\Omega)} \mathcal{L}_N(\Omega)^{\frac{1}{s}} \\
&+ K_1 \sum_{j=1}^{N} \left(K_2 s \mathcal{L}_N(\Omega)^{\frac{1}{s}+\frac{1}{sN}} ||v||_{L^{s'}(\Omega)} \right)^{\frac{N-1}{N}} \cdot \left(K_3 ||D_j u||^N_{L^N(\Omega)} ||v||_{L^{s'}(\Omega)} \mathcal{L}_N(\Omega)^{\frac{1}{Ns}} \right)^{\frac{1}{N}} \\
&= K_1 ||u||_{L^1(\Omega)} ||v||_{L^{s'}(\Omega)} \mathcal{L}_N(\Omega)^{\frac{1}{s}} + K_4 \sum_{j=1}^{N} s^{\frac{N-1}{N}} ||D_j u||_{L^N(\Omega)} ||v||_{L^{s'}(\Omega)} \mathcal{L}_N(\Omega)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq K_5 s^{\frac{N}{N-1}} \left(||u||_{L^1(\Omega)} + \sum_{j=1}^{N} ||D_j u||_{N,\Omega} \right) \mathcal{L}_N(\Omega)^{\frac{1}{s}} ||v||_{L^{s'}(\Omega)} \\
&= K_5 s^{\frac{N-1}{N}} \mathcal{L}_N(\Omega) ||v||_{L^{s'}(\Omega)} ||u||_{W^{1,N}(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Visto que, $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para qualquer $1 \leq s < +\infty$, segue, da combinação dos Teoremas de Hahn-Banach (Forma Analítica) e do Teorema da Representação de Riesz, que

$$||u||_{L^s(\Omega)} = \sup_{v\in L^{s'}(\Omega), ||v||_{L^{s'}(\Omega)}\leq 1} \left| \int_\Omega u(x)v(x)dx \right| \leq K_5 s^{\frac{N-1}{N}} \mathcal{L}_N(\Omega)^{\frac{1}{s}} ||u||_{W^{1,N}(\Omega)}.$$

Aqui a constante K_5 depende apenas de N e do cone C. Agora, tomando $s = \frac{Nk}{N-1}$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u(x)|^{\frac{Nk}{N-1}} dx &\leq \mathcal{L}_N(\Omega) \left(\frac{Nk}{N-1} \right)^k (K_5 ||u||_{1,N,\Omega})^{\frac{Nk}{N-1}} \\
&= \mathcal{L}_N(\Omega) \left(\frac{k}{e^{\frac{N}{N-1}}} \right)^k \left(eK_5 \left[\frac{N}{N-1} \right]^{\frac{N-1}{N}} ||u||_{1,N,\Omega} \right)^{\frac{Nk}{N-1}}.
\end{aligned}$$

Como a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{k}{e^{\frac{N}{N-1}}} \right)^k$ converge, pois $e^{\frac{N}{N-1}} > e$, defina

$$\begin{aligned}
K_6 &:= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{k}{e^{\frac{N}{N-1}}} \right)^k, K_7 := \sup\{1, K_6 \mathcal{L}_N(\Omega)\} \text{ e} \\
K_8 &:= eK_7K_5 \left(\frac{N}{N-1} \right)^{\frac{N}{N-1}} ||u||_{W^{1,N}(\Omega)} = K_9 ||u||_{W^{1,N}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\int_\Omega \left(\frac{|u(x)|}{K_8} \right)^{\frac{Nk}{N-1}} dx \leq \frac{\mathcal{L}_N(\Omega)}{K_7^{\frac{Nk}{N-1}}} \left(\frac{k}{e^{\frac{N}{N-1}}} \right)^k \leq \frac{\mathcal{L}_N(\Omega)}{K_7} \left(\frac{k}{e^{\frac{N}{N-1}}} \right)^k.$$

Finalmente,

$$\int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{K_8} \right) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \int_\Omega \left(\frac{|u(x)|}{K_8} \right)^{\frac{Nk}{N-1}} dx \leq \frac{\mathcal{L}_N(\Omega)}{K_7} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{k}{e^{\frac{N}{N-1}}} \right)^k \leq 1.$$

Portanto, $u \in L_A(\Omega)$ e $||u||_A \leq K_9 ||u||_{W^{1,N}(\Omega)}$, onde K_9 depende apenas de N, do volume de Ω e do cone C determinado na condição do cone de Ω.

■

Definição 1.45 (Paralelepípedo). *Dados N vetores linearmente independentes $y_1, ..., y_N$ em $\mathbb{R}^N$, o conjunto*

$$P = \left\{ \sum_{j=1}^N \lambda_j y_j ; 0 \leq \lambda_j \leq 1, 1 \leq j \leq N \right\}$$

é um paralelepípedo com vértice na origem e $x + P$ é uma translação de P tendo vértice em x.

Lema 1.46 (Decomposição de Ω)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ satisfazendo a condição do cone. Existe uma coleção finita $\{\Omega_1, \cdots, \Omega_k\}$ de subconjuntos abertos de Ω, tais que $\Omega = \cup_{j=1}^{k} \Omega_j$, e, para cada Ω_j, existe um subconjunto correspondente $A_j \subset \Omega_j$ e um paralelepípedo P_j com vértice em 0 tal que $\Omega_j = \cup_{x \in A_j}(x + P_j)$.*

Demonstração. Seja C o cone finito com vértice em 0, tal que qualquer $x \in \Omega$ é o vértice de um cone finito $C_x \subset \Omega$ congruente a C. É possível selecionar um número finito de cones $C_1, ..., C_N$, cada um tendo vértice em 0 (e cada um tendo a mesma altura que C mas ângulo de abertura menor que C) tal que qualquer cone finito congruente a C e tendo vértice em 0 obrigatoriamente contém algum dos cones C_j. Para cada j, seja P_j um paralelepípedo aberto com vértice na origem, contido em C_j, e com volume positivo, então, para cada $x \in \Omega$, existem j, $1 \leq j \leq k$, tais que

$$x + P_j \subset x + C_j \subset C_x \subset \Omega.$$

Já que Ω é aberto e $\overline{x + P_j}$ é compacto, $y + P_j \subset \Omega$ para qualquer y suficientemente próximo de x. Logo, todo $x \in \Omega$ pertence a $y + P_j$, para algum j e algum $y \in \Omega$. Definindo $A_j = \{y \in \Omega; y + P_j \subset \Omega\}$ e $\Omega_j = \cup_{y \in A_j}(y + P_j)$, tem-se $\Omega = \cup_{j=1}^{k} \Omega_j$. O que conclui a demonstração do lema. ■

Teorema 1.47 (Extensão para Domínios Ilimitados)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domínio satisfazendo a condição do cone. Considere $mp = N$, $p > 1$ e $A_0(t) = \exp\left(t^{\frac{p}{p-1}}\right) - \sum_{j=0}^{k_0 - 1} \frac{1}{j!} t^{\frac{jp}{p-1}}$, onde k_0 é o menor inteiro tal que $k_0 \geq p - 1$. Então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L_{A_0}(\Omega).$$

Demonstração. Pelo Lema anterior, $\Omega = \cup_{j=1}^{+\infty} \Omega_j$, onde os Ω_j são subdomínios satisfazendo a condição do cone especificado na condição do cone de Ω que independe de j. Além disso, existem constantes K_1, K_2 que independem de j, tais que $0 < K_1 \leq \mathcal{L}_N(\Omega_j) \leq K_2$, para todo j, e qualquer coleção de $M + 1$ subdomínios tem interseção vazia.

Segue, do Teorema de Trudinger, que $||u||_{A_0, \Omega_j} \leq K_3 ||u||_{W^{m,p}(\Omega_j)}$, onde K_3 é uma constante que independe de j.

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega A_0\left(\frac{|u(x)|}{M^{\frac{1}{p}}k_3||u||_{W^{m,p}(\Omega)}}\right)dx &\leq \sum_{j=1}^{+\infty}\int_\Omega A_0\left(\frac{||u||_{W^{m,p}(\Omega_j)}}{M^{\frac{1}{p}}k_3||u||_{m,p,\Omega}}\cdot\frac{|u(x)|}{||u||_{W^{m,p}(\Omega_j)}}\right)dx \\
&\leq \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{||u||^p_{W^{m,p}(\Omega_j)}}{M||u||^p_{W^{m,p}(\Omega)}}\int_{\Omega_j} A_0\left(\frac{|u(x)|}{K_3||u||_{W^{m,p}(\Omega)}}\right)dx \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

Portanto, $u \in L_{A_0}(\Omega)$ e $||u||_{A_0,\Omega} \leq M^{\frac{1}{p}}K_3||u||_{W^{m,p}(\Omega)}$.

■

Capítulo 2

Simetrização de Schwarz e Desigualdade de Pólya-Szegö

Neste capítulo, será apresentado o processo de simetrização de Schwarz em domínios limitados e a Desigualdade de Pólya-Szegö que é de extrema importância para a demonstração do Teorema de Concentração de Compacidade de Lions.

2.1 Simetrização de Schwarz

2.1.1 O Rearranjamento Decrescente

Definição 2.1 (Função Distribuição)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto limitado e $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Para cada $t \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{u > t\}$ é definido por*

$$\{u > t\} = \{x \in \Omega; u(x) > t\},$$

a função distribuição de u é dada por

$$\mu_u(t) = \mathcal{L}_N(\{u > t\}).$$

Essa função é não crescente e $Im(u) = [0, \mathcal{L}_N(\Omega)]$.

Definição 2.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ subconjunto aberto e $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. O rearranjamento decrescente (unidimensional) de u, denotado $u^{\#}$, é definido sobre Ω por*

$$u^{\#}(s) := \begin{cases} ess.\sup(u), & se\ s = 0 \\ \inf\{t; \mu_u(t) < s\}, & se\ s > 0 \end{cases}.$$

Observação 2.3. *(i) Se $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função mensurável e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado, então $u^{\#}$ é não crescente e contínua à esquerda.*

(ii) O mapeamento $u \mapsto u^{\#}$ é não decrescente, isto é, se $u \leq v$, onde u e v são funções com valores reais sobre Ω, então $u^{\#} \leq v^{\#}$.

Definição 2.4. *Duas funções com valores reais são ditas equimensuráveis, se elas têm a mesma função distribuição. Além disso, funções equimensuráveis são ditas o rearranjamento uma da outra.*

Observação 2.5. *As funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e $u^{\#} : [0, \mathcal{L}_N(\Omega)] \longrightarrow \mathbb{R}$ são equimensuráveis. Consequentemente, se $u \geq 0$ e $u \in L^p(\Omega)$, para $1 \leq p \leq \infty$, então $u^{\#} \in L^p((0, \mathcal{L}_N(\Omega)))$.*

Teorema 2.6. *Seja $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mensurável.Para toda função $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Borel mensurável e não negativa, tem-se*

$$\int_\Omega F(u(x))dx = \int_0^{\mathcal{L}_N(\Omega)} F(u^{\#}(s))ds.$$

Demonstração. Sejam $E = [t, \infty]$ e $F = \chi_E$, então

$$\int_\Omega F(u(x))dx = \mathcal{L}_N(\{u \geq t\}) = \mathcal{L}_N(\{u^{\#} \geq t\}) = \int_0^{\mathcal{L}_N(\Omega)} F(u^{\#}(s))ds.$$

Similarmente, o resultado vale para $F = \chi_E$, onde E é um intervalo, e consequentemente, para E, um conjunto aberto. Além disso, o resultado vale para qualquer conjunto de Borel E, via argumentos usuais.

Além disso, se F é uma função Borel mensurável e não negativa, então F pode ser expressa como o limite de uma sequência de funções (F_n), mensuráveis, simples, crescentes (em n) e não-negativas. Daí, para cada n, tem-se

$$\int_\Omega F_n(u(x))dx = \int_0^{\mathcal{L}_N(\Omega)} F_n(u^{\#}(s))ds.$$

Portanto, por Convergência Monótona, o resultado segue. ∎

Corolário 2.7. *Sejam $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função Borel mensurável e $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(u) \in L^1(\Omega)$, então $F(u^{\#}) \in L^1((0, \mathcal{L}_N(\Omega)))$ e*

$$\int_\Omega F(u(x))dx = \int_0^{\mathcal{L}_N(\Omega)} F(u^{\#}(s))ds.$$

Consequentemente, se $u \in L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$, então $u^{\#} \in L^p((0, \mathcal{L}_N(\Omega)))$ e as correspondentes normas L^p são iguais.

Demonstração. Basta escrever $F = F^+ - F^-$ e aplicar o teorema (2.6) para F^+ e F^-. Para provar a consequência, tome $F(t) = |t|^p$. ∎

Observação 2.8. (1) *Se $u : [0, l] \longrightarrow \mathbb{R}$ é não crescente, então $u = u^{\#}$ q.t.p.*

(2) *Se* $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função não decrescente e* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função mensurável definida em* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *limitado, então*

$$\psi(u^{\#}) = (\psi(u))^{\#} \; q.t.p.$$

(3) *Se* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *é mensurável, então* $(u^+)^{\#} = (u^{\#})^+$ *e* $(u+c)^{\#} = u^{\#} + c$ *para qualquer constante* c.

2.1.2 Algumas Desigualdades do Rearranjamento

Proposição 2.9. *Seja* $p = 1$ *ou* ∞, *então para* $f, g \in L^p(\Omega)$,

$$\|f^{\#} - g^{\#}\|_{L^p((0,\mathcal{L}_N(\Omega)))} \leq \|f - g\|_{L^p(\Omega)}. \tag{2.1}$$

Demonstração. Seja $p = \infty$, então para quase todo $x \in \Omega$, tem-se

$$|f(x) - g(x)| \leq \|f - g\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Assim,

$$f(x) - \|f - g\|_{L^\infty(\Omega)} \leq g(x) \leq f(x) + \|f - g\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Como o mapeamento rearranjamento é monótono (observação 2.3) e pela observação 2.8, deduz-se que

$$f^{\#}(s) - \|f - g\|_{L^\infty(\Omega)} \leq g^{\#}(s) \leq f^{\#}(s) + \|f - g\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

O que prova (2.1) para $p = \infty$. ■

Agora, considere $p = 1$ e defina $h = \max\{f, g\}$, então $f \leq h$ e $g \leq h$, e, consequentemente, $f^{\#} \leq h^{\#}$ e $g^{\#} \leq h^{\#}$. Segue que

$$|f^{\#} - g^{\#}| \leq |f^{\#} - h^{\#}| + |h^{\#} - g^{\#}| = 2h^{\#} - f^{\#} - g^{\#}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^{\mathcal{L}_N(\Omega)} |f^{\#}(s) - g^{\#}(s)| ds &\leq \int_0^{\mathcal{L}_N(\Omega)} (2h^{\#}(s) - f^{\#}(s) - g^{\#}(s)) ds \\ &= \int_\Omega (2h(x) - f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_\Omega |f(x) - g(x)| dx, \end{aligned}$$

o que prova o caso $p = 1$.

Teorema 2.10. *Seja $1 \leq p \leq \infty$, então $u \mapsto u^{\#}$ é um mapa contínuo de $L^p(\Omega)$ em $L^p((0, \mathcal{L}_N(\Omega)))$.*

Demonstração. Se $p = 1$ ou $p = \infty$, o resultado segue da proposição anterior. Agora, considere $1 < p < \infty$ e $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$. Então $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$, já que $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ (Ω é limitado). Logo, $u_n^{\#} \to u^{\#}$ em $L^1(\Omega)$ e, consequentemente, existe uma subsequência (u_{n_k}) tal que $u_{n_k}^{\#} \to u^{\#}$ *q.t.p.* Logo,

$$\|u_{n_k}^{\#}\|_{L^p((0,\mathcal{L}_N(\Omega)))} = \|u_{n_k}\|_{L^p(\Omega)} \to \|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u^{\#}\|_{L^p((0,\mathcal{L}_N(\Omega)))}.$$

Assim, $u_{n_k}^{\#} \to u^{\#}$ em $L^p((0, \mathcal{L}_N(\Omega)))$, o que completa a prova. ■

Observação 2.11. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado e $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável, então*

$$\int_E u(x)dx \leq \int_0^{\mathcal{L}_N(E)} u^{\#}(s)ds, \tag{2.2}$$

para todo conjunto mensurável $E \subset \Omega$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $(u|_E)^{\#} = u^{\#}|_{[0,\mathcal{L}_N(E)]}$.

Lema 2.12. *Sejam $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$. Defina*

$$\begin{aligned} E_t &= \{x \in \Omega; u(x) > t\}, \\ F_t &= \{x \in \Omega; u(x) \leq t\} = \Omega \backslash E_t \end{aligned}$$

e $b : \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$b(t,x) := \begin{cases} \chi_{E_t}(x), & se\ t \geq 0, \\ -\chi_{F_t}(x), & se\ t < 0 \end{cases}.$$

Então,

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} b(t,x)dt.$$

Demonstração. Se $u(x) \geq 0$, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b(t,x)dt = \int_0^{u(x)} dt = u(x).$$

Agora, se $u(x) < 0$, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b(t,x)dt = -\int_{u(x)}^{0} dt = u(x).$$

■

Lema 2.13. *Sejam $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, com g integrável sobre Ω. Se $a \leq f \leq b \leq \infty$ com $a \in \mathbb{R}$, então*

$$\int_\Omega f(x)g(x)dx = a\int_\Omega g(x)dx + \int_a^b \left(\int_{\{f>t\}} g(x)dx\right)dt.$$

Demonstração. Suponha que $a \geq 0$ e escreva $E_t = \{f > t\}$. Pelo lema anterior,

$$f(x) = \int_0^b \chi_{E_t}(x)dt.$$

Assim, pelo Teorema de Fubini,

$$\int_\Omega f(x)g(x)dx = \int_\Omega g(x)\int_0^b \chi_{E_t}(x)dtdx = \int_0^b\int_\Omega g(x)\chi_{E_t}(x)dxdt$$

e, consequentemente,

$$\int_\Omega f(x)g(x)dx = \int_0^a\int_\Omega g(x)dxdt + \int_a^b\int_{E_t} g(x)dxdt.$$

O resultado segue. ■

Teorema 2.14 (Hardy-Littlewood)**.** *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \leq p, q \leq \infty$. Então*

$$\int_\Omega f(x)g(x)dx \leq \int_0^{\mathcal{L}_N(\Omega)} f^\#(s)g^\#(s)ds.$$

Demonstração. Se $f \in L^\infty(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, existem $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que $a \leq f \leq b$ *q.t.p.* Assim, pelo Lema 2.13,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(x)g(x)dx &= a\int_\Omega g(x)dx + \int_a^b\left(\int_{\{f>t\}} g(x)dx\right)dt \\
&= a\int_0^{\mathcal{L}_N(\Omega)} g^\#(s)ds + \int_a^b\int_{\{f>t\}} g(x)dxdt \\
&\leq a\int_0^{\mathcal{L}_N(\Omega)} g^\#(s)ds + \int_a^b\int_0^{\mathcal{L}_N(\{f>t\})} g^\#(s)dsdt \\
&= \int_0^{\mathcal{L}_N(\Omega)} g^\#(s)ds + \int_a^b\int_0^{\mathcal{L}_N(\{f^\#>t\})} g^\#(s)dsdt \\
&= \int_0^{\mathcal{L}_N(\Omega)} f^\#(s)g^\#(s)ds.
\end{aligned}$$

Agora, se $1 \leq p < \infty$, o resultado segue via argumentos de densidade e continuidade do mapa $u \mapsto u^{\#}$. ■

Observação 2.15. (1) *Se* $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é não decrescente,* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $\psi(g) \in L^q(\Omega)$, *onde* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *com* $1 \leq p, q \leq \infty$, *então*

$$\int_\Omega f(x)\psi(g(x))dx \leq \int_0^{\mathcal{L}_N(\Omega)} f^{\#}(s)\psi(g^{\#}(s))ds.$$

(2) *Se* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *é mensurável, então* $(\chi_{\{u>t\}})^{\#} = \chi_{\{u^{\#}>t\}}$. *Além disso, se* $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *é outra função mensurável, então*

$$\int_\Omega u(x)\chi_{\{v\leq t\}}(x)dx \geq \int_0^{\mathcal{L}_N(\Omega)} u^{\#}(s)\chi_{\{v^{\#}\leq t\}}(s)ds.$$

Teorema 2.16. *Sejam* $f, g \in L^p(\Omega)$, *em que* $1 < p < \infty$. *Então*

$$\|f^{\#} - g^{\#}\|_{L^p((0,\mathcal{L}_N(\Omega)))} \leq \|f - g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração. Defina $J(t) = |t|^p$,

$$J_+(t) := \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 0 \\ |t|^p, & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

e

$$J_-(t) := \begin{cases} |t|^p, & \text{se } t \leq 0 \\ 0, & \text{se } t > 0 \end{cases},$$

então $J = J_+ + J_-$ e ambas J_+ e J_- são convexas e diferenciáveis. Assim,

$$J_+(f(x) - g(x)) = \int_{g(x)}^{f(x)} J_+'(f(x) - t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} J_+'(f(x) - t)\chi_{\{g\leq t\}}(x)dt.$$

Segue, via Teorema de Fubini, que

$$\int_\Omega J_+(f(x) - g(x))dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_\Omega J_+'(f(x) - t)\chi_{\{g\leq t\}}(x)dxdt \tag{2.3}$$

e, similarmente,

$$\int_0^{\mathcal{L}_N(\Omega)} J_+(f^{\#}(s) - g^{\#}(s))ds = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\mathcal{L}_N(\Omega)} J_+'(f^{\#}(s) - t)\chi_{\{g^{\#}\leq t\}}(s)dsdt. \tag{2.4}$$

Agora, já que J_+ é convexa, J_+' é não decrescente. Daí, pela observação 2.8, obtém-se $(J_+'(f(x) - t))^{\#}(s) = J_+'(f^{\#}(s) - t)$.

Logo, usando (2.3), (2.4) e a observação (2.15), tem-se

$$\int_\Omega J_+(f(x)-g(x))dx \geq \int_0^{\mathcal{L}_N(\Omega)} J_+(f^\#(s)-g^\#(s))ds.$$

O mesmo resultado vale para a função J_- e, portanto, o teorema está demonstrado. ■

Definição 2.17. *Sejam Ω um domínio limitado, $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável e $\Omega^\star$ a bola centrada na origem com o mesmo volume de Ω. A simetrizada de Schwarz $u^\star$ de u é a função $u^\star : \Omega^\star \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$u^\star(x) = u^\#(\omega_N|x|^N), x \in \Omega^\star.$$

Observe que, se R é o raio de $\Omega^\star$, então

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^\star} u^\star(x)dx = \int_{\Omega^\star} u^\#(\omega_N|x|^N)dx &= \int_0^R u^\#(\omega_N r^N)N\omega_N r^{N-1}dr \\ &= \int_0^{\mathcal{L}_N(\Omega^\star)} u^\#(s)ds \\ &= \int_0^{\mathcal{L}_N(\Omega)} u^\#(s)ds.\end{aligned}$$

As propriedades do Rearranjamento unidimensional que foram estudadas na seção anterior, são obtidas para a simetrizada de Schwarz. Segue algumas:

- $u^\star$ é radialmente simétrica com decrescimento radial;
- $u, u^\#$ e $u^\star$ são equimensuráveis;
- se $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função Borel mensurável tal que $F \geq 0$ ou $F(u) \in L^1(\Omega)$, então

$$\int_{\Omega^\star} F(u^\star(x))dx = \int_\Omega F(u(x))dx;$$

- se $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função não decrescente, então

$$(\psi(u))^\star = \psi(u^\star);$$

- $u \longmapsto u^\star$ é um mapa não expansivo (lipschitziano com constante de Lipchitz igual a 1) de $L^p(\Omega)$ em $L^p(\Omega^\star)$, para $1 \leq p \leq \infty$;
- se $E \subset \Omega$ é um subconjunto mensurável, então

$$\int_E u(x)dx \leq \int_0^{\mathcal{L}_N(E)} u^\#(s)ds = \int_{E^\star} u^\star(x)dx$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, $(u|_E)^\star = u^\star|_{E^\star}$;

- (Hardy-Littlewood) se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então

$$\int_\Omega f(x)g(x)dx \leq \int_0^{\mathcal{L}_N(\Omega)} f^\#(s)g^\#(s)ds = \int_{\Omega^\star} f^\star(x)g^\star(x)dx.$$

2.2 Desigualdade de Pólya-Szegö

Definição 2.18. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ conjunto aberto e $E \subset \Omega$ um subconjunto mensurável. O perímetro de De Giorgi de E com respeito a Ω, denotado por $P_\Omega(E)$, é definido por*

$$P_\Omega(E) = \sup\left\{\int_E div(\varphi)dx; \varphi \in (C_c^\infty(\Omega))^N, \|\varphi\| = 1\right\},$$

onde $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_N)$ *e* $\|\varphi\|^2 = \max_{x\in\Omega}\left(\sum_{i=1}^N |\varphi_i(x)|^2\right)$.

Teorema 2.19 (Fleming-Rischell). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domínio limitado com fronteira suave. Para toda função $u \in W^{1,1}(\Omega)$, tem-se*

$$\int_\Omega |\nabla u|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P_\Omega(\{u > t\})dt.$$

Demonstração. Observe que

$$\int_\Omega udiv(\varphi)dx = \int_\Omega\int_{-\infty}^{+\infty} b(t,x)div(\varphi)dtdx$$

e, pelo Teorema de Fubini,

$$\int_\Omega udiv(\varphi)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_\Omega b(t,x)div(\varphi)dxdt.$$

Logo,

$$\int_\Omega udiv(\varphi)dx = -\int_{-\infty}^0\int_{F_t} div(\varphi)dxdt + \int_0^\infty\int_{E_t} div(\varphi)dxdt.$$

Via Teorema da Divergência, tem-se

$$\int_{E_t} div(\varphi)dx = -\int_{F_t} div(\varphi)dx.$$

Logo,

$$\int_\Omega \nabla u(-\varphi)dx = \int_\Omega udiv(\varphi)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{E_t} div(\varphi)dxdt.$$

Portanto,

$$\int_\Omega |\nabla u|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P_\Omega(\{u > t\})dt.$$

■

Observação 2.20. *No teorema acima, se $u \geq t_0$ q.t.p, então*

$$\int_\Omega |\nabla u|dx = \int_{t_0}^{+\infty} P_\Omega(\{u > t\})dt.$$

Corolário 2.21. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domínio limitado com fronteira suave e $u \in W^{1,1}(\Omega)$, então*

$$P_\Omega(\{u > \tau\})d\tau = -\frac{d}{dt}\left(\int_{\{u>t\}} |\nabla u|dx\right).$$

Demonstração. Defina $v = (u-t)^+ + t$, então $v \geq t$ e, pela observação anterior,

$$\int_\Omega |\nabla v|dx = \int_t^{+\infty} P_\Omega(\{v > \tau\})d\tau.$$

Observe que, para $\tau \geq t$, tem-se $\{v > \tau\} = \{u > \tau\}$. De fato, considere $\tau \geq t$, se $v > \tau$, então $(u-t)^+ > 0$. Daí, $u > t$ e, consequentemente, $v = u$. Reciprocamente se $u > t$, então $v > t$.

Como $|\nabla v| = 0$ sobre $\{u \leq t\}$, então

$$\int_\Omega |\nabla v|dx = \int_{\{u\leq t\}} |\nabla v|dx + \int_{\{u>t\}} |\nabla v|dx = \int_{\{u>t\}} |\nabla u|dx.$$

Logo,

$$\int_{\{u>t\}} |\nabla u|dx = \int_t^{+\infty} P_\Omega(\{u > \tau\})d\tau.$$

O resultado segue. ■

Teorema 2.22 (Desigualdade Isoperimétrica)**.** *Sejam $N \geq 3$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio* *limitado com fronteira C^2, então*

$$\mathcal{L}_{N-1}(\partial\Omega) \geq N\omega_N^{\frac{1}{N}}\mathcal{L}_N(\Omega)^{\frac{N-1}{N}}.$$

Demonstração. Defina $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad d(x,\partial\Omega) \geq \varepsilon \\ \dfrac{d(x,\partial\Omega)}{\varepsilon}, & \text{se} \quad d(x,\partial\Omega) < \varepsilon \end{cases},$$

então $\varphi_\varepsilon \in W_0^{1,1}(\Omega)$ e, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, tem-se

$$\int_\Omega (\varphi_\varepsilon(x))^{\frac{N}{N-1}} dx \to \int_\Omega dx = \mathcal{L}_N(\Omega), \tag{2.5}$$

quando $\varepsilon \to 0$. Além disso, se $D_\varepsilon := \{x \in \Omega; d(x,\partial\Omega) < \varepsilon\}$, então

$$|\nabla\varphi_\varepsilon| = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & \text{se} \quad x \in D_\varepsilon \\ 0, & \text{se} \quad x \in \Omega\backslash D_\varepsilon \end{cases}.$$

Logo,

$$\int_\Omega |\nabla\varphi_\varepsilon| dx = \frac{\mathcal{L}_N(D_\varepsilon)}{\varepsilon}. \tag{2.6}$$

Definindo $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = d(x,\partial\Omega)$, tem-se

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{D_\varepsilon} |\nabla f| dx = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon P_\Omega(f > t)dt \to P_\Omega(f > 0) = \mathcal{L}_{N-1}(\partial\Omega). \tag{2.7}$$

Além disso, pela Desigualdade de Sobolev,

$$\int_\Omega |\nabla\varphi_\varepsilon| dx \geq N\omega_N^{\frac{1}{N}}\left(\int_\Omega (\varphi_\varepsilon)^{\frac{N}{N-1}} dx\right)^{\frac{N-1}{N}}. \tag{2.8}$$

Finalmente, usando as relações (2.5), (2.6), (2.7) e (2.8), obtém-se

$$\mathcal{L}_{N-1}(\partial\Omega) \geq N\omega_N^{\frac{1}{N}}\mathcal{L}_N(\Omega)^{\frac{N-1}{N}}.$$

■

Lema 2.23. *Sejam $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $(1 \leq p, q \leq \infty)$, e*

$$F(t) = \int_{\{f>t\}} g(f-t)dx,$$

então

$$F'(t) = -\int_{\{f>t\}} g dx.$$

Demonstração. Defina $h = (f-t)^+ + t$, para $t \in \mathbb{R}$, então $h \geq t$ e, pelo Lema 2.13,

$$\int_\Omega ghdx = t\int_\Omega gdx + \int_t^{+\infty}\left(\int_{\{h>\tau\}} gdx\right)d\tau.$$

Por outro lado, pela definição de h, tem-se

$$\int_\Omega ghdx = t\int_\Omega gdx + \int_{\{f>t\}} g(f-t)dx.$$

Das duas relações acima, obtém-se

$$\int_{\{f>t\}} g(f-t)dx = \int_t^{+\infty}\left(\int_{\{h>\tau\}} gdx\right)d\tau.$$

Agora, via argumentos da demonstração do Corolário 2.21, observe que para $\tau \geq t$, tem-se $\{h > \tau\} = \{f > \tau\}$. O resultado segue. ■

Teorema 2.24. *Seja $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Se $u \geq 0$, então, para $1 \leq p < \infty$, tem-se*

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx = \int_0^M \left(\int_{\{u=t\}} |\nabla u|^{p-1} d\sigma\right) dt, \tag{2.9}$$

onde $M = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} u(x)$. Além disso, se $u^\star : \Omega^\star \longrightarrow \mathbb{R}$ é a simetrizada de Schwarz de u, então

$$\int_{\Omega^\star} |\nabla u^\star|^p \leq \int_0^M \left(\int_{\{u^\star=t\}} |\nabla u^\star|^{p-1} d\sigma\right) dt. \tag{2.10}$$

Demonstração. Primeiramente, pelo Teorema de Sard, para quase todo $t \in Im(\varphi)$ tem-se $|\nabla u| \neq 0$ sobre $\{u = t\}$.

Considere $2 \leq p < \infty$ e defina $f = -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$. Então, para toda função $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tem-se

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx. \tag{2.11}$$

Dado $t > 0$, defina $v_t = (u-t)^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Usando v_t em (2.11), obtém-se

$$\int_{\{u>t\}} |\nabla u|^p dx = \int_{\{u>t\}} f(u-t)dx.$$

Assim, diferenciando com respeito a t, e usando o Lema 2.23, obtém-se

$$-\frac{d}{dt}\left(\int_{\{u>t\}} |\nabla u|^p\right) = \int_{\{u>t\}} f dx. \tag{2.12}$$

Integrando essa relação sobre o intervalo $[0, M]$,

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx = \int_0^M \left(\int_{\{u>t\}} f dx\right) dt. \tag{2.13}$$

Por outro lado, via Teorema da Divergência e definição da função f, obtém-se

$$\int_{\{u>t\}} f dx = -\int_{\{u=t\}} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nu d\sigma = \int_{\{u=t\}} |\nabla u|^{p-1} d\sigma.$$

Substituindo esta relação em (2.13), obtém-se (2.9) para o caso $2 \leq p < \infty$.

Agora, considere $1 \leq p < 2$ e defina $f_\varepsilon = -div\left((|\nabla u|^2 + \varepsilon)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u\right)$, então para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tem-se

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \varepsilon\right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f_\varepsilon v dx. \tag{2.14}$$

Como no caso $2 \leq p < \infty$, tome $v_t = (u-t)^+$, para $t > 0$, e substitua em (2.14). Assim,

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \varepsilon\right)^{\frac{p-2}{2}} |\nabla u|^2 dx = \int_0^M \left(\int_{\{u=t\}} \left(|\nabla u|^2 + \varepsilon\right)^{\frac{p-2}{2}} |\nabla u| d\sigma\right) dt. \tag{2.15}$$

Além disso, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, tem-se

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \varepsilon\right)^{\frac{p-2}{2}} |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega |\nabla u|^p dx \tag{2.16}$$

e

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^M \left(\int_{\{u=t\}} \left(|\nabla u|^2 + \varepsilon\right)^{\frac{p-2}{2}} |\nabla u| d\sigma\right) dt = \int_0^M \left(\int_{\{u=t\}} |\nabla u|^{p-1} d\sigma\right) dt. \tag{2.17}$$

As relações (2.15), (2.16) e (2.17) concluem a demonstração de (2.9).

Finalmente, considere a simetrizada de Schwarz $u^\star$ de u. Coloque $g(r) = u^\star(x)$, onde

$r = |x|$. Assim

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^\star} |\nabla u^\star|^p dx &= \int_0^R \left|\frac{dg}{dr}(r)\right|^p N\omega_N r^{N-1} dr \\
&= \int_0^R \left|\frac{dg}{dr}(r)\right|^{p-1} N\omega_N r^{N-1} \left(-\frac{dg}{dr}(r)\right) dr \\
&\leq \int_0^M |\nabla u^\star_{|_{\{u^\star=t\}}}|^{p-1} \mathcal{L}_{N-1}(\{u^\star = t\}) dt \\
&= \int_0^M \left(\int_{\{u^\star=t\}} |\nabla u^\star|^{p-1} d\sigma\right) dt,
\end{aligned}$$

o que prova (2.10). ■

Teorema 2.25. *Seja $u \in C_c^\infty(\Omega)$, com $u \geq 0$. Para quase todo $t \in Im(u)$, tem-se*

$$-\frac{d\mu}{dt}(t) = \int_{\{u=t\}} \frac{d\sigma}{|\nabla u|} = \int_{\{u^\star=t\}} \frac{d\sigma}{|\nabla u^\star|}, \tag{2.18}$$

em que μ é a função distribuição de u e $u^\star$ é a simetrizada de Schwarz de u.

Demonstração. Novamente, pelo Teorema de Sard, para quase todo t, vale $|\nabla u| \neq 0$ sobre $\{u = t\}$.

Dado $\varepsilon > 0$, defina

$$f = -div\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|^2 + \varepsilon}\right).$$

Usando os mesmos argumentos da demonstração do Teorema (2.24), obtém-se

$$\int_{\{u>t\}} \frac{|\nabla u|^2}{|\nabla u|^2 + \varepsilon} dx = \int_{\{u>t\}} f(u-t) dx.$$

Diferenciando com respeito a t, deduz-se

$$-\frac{d}{dt}\left(\int_{\{u>t\}} \frac{|\nabla u|^2}{|\nabla u|^2 + \varepsilon} dx\right) = \int_{\{u>t\}} f dx. \tag{2.19}$$

Agora, seja t, tal que $|\nabla u| \neq 0$ sobre $\{u = t\}$, então existe $h > 0$, suficientemente pequeno, com $|\nabla u| \neq 0$ sobre $\{t - h \leq u \leq t + h\}$.

Integrando a relação (2.19) de $t - h$ a t, tem-se

$$\int_{\{t-h<u\leq t\}} \frac{|\nabla u|^2}{|\nabla u|^2 + \varepsilon} dx = \int_{t-h}^t \left(\int_{\{u>\tau\}} f dx\right) d\tau = \int_{t-h}^t \left(\int_{\{u=\tau\}} \frac{|\nabla u|}{|\nabla u|^2 + \varepsilon} d\sigma\right) d\tau$$

e, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\mu(t-h)-\mu(t)=\int_{\{t-h<u\leq t\}}dx=\int_{t-h}^{t}\int_{\{u=\tau\}}\frac{d\sigma}{|\nabla u|}$$

e a primeira relação de (2.18) está provada.

Agora, se $r(t)$ é o raio da bola $\{u^\star>t\}$, então $\mu(t)=\omega_N(r(t))^N$ e, consequentemente,

$$\frac{d\mu}{dt}(t)=N\omega_N(r(t))^{N-1}\frac{dr}{dt}(t)\ q.t.p..$$

Como no teorema anterior, tomando $g(r)=u^\star(x)$, em que $r=|x|$, tem-se $g(r(t))=t$ $q.t.p.$. Assim,

$$\frac{d\mu}{dt}(t)=\mathcal{L}_{N-1}(\{u^\star=t\})\frac{1}{g'(r(t))}=-\frac{\mathcal{L}_{N-1}(\{u^\star=t\})}{|\nabla u^\star_{|_{\{u^\star=t\}}}|}.$$

O que conclui a demonstração. ■

Teorema 2.26 (Desigualdade de Pólya-Szegö). *Se $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $u\geq 0$ e $1\leq p<\infty$, então $u^\star\in W_0^{1,p}(\Omega^\star)$ e*

$$\int_{\Omega^\star}|\nabla u^\star|^p dx\leq\int_{\Omega}|\nabla u|^p dx.$$

Demonstração. Primeiramente, considere $p=1$. Já que $u\in W_0^{1,1}(\Omega)$, estenda $u=0$ fora de Ω, então $P_\Omega(\{u>t\})=P_{\mathbb{R}^N}(\{u>t\})$, para todo $t>0$.

Pela Desigualdade Isoperimétrica Clássica, tem-se

$$P_{\mathbb{R}^N}(\{u>t\})\geq P_{\mathbb{R}^N}(\{u^\star>t\}).$$

Assim, pelo Teorema de Fleming-Rischell e Observação 2.20, segue que

$$\int_\Omega|\nabla u|dx=\int_0^\infty P_{\mathbb{R}^N}(\{u>t\})dt\geq\int_0^\infty P_{\mathbb{R}^N}(\{u^\star>t\})dt=\int_{\Omega^\star}|\nabla u^\star|dx.$$

Agora, considere $1<p<\infty$ e $u\in C_c^\infty(\Omega)$, com $u\geq 0$. Além disso, como antes, defina $M=\max\limits_{x\in\mathbb{R}^N}u(x)$. Pelo Teorema 2.24, é suficiente provar que, para quase todo $t\in(0,M)$,

$$\int_{\{u=t\}}|\nabla u|^{p-1}d\sigma\geq\int_{\{u^\star=t\}}|\nabla u^\star|^{p-1}d\sigma.$$

Já que u é suave, pelo Teorema de Sard, $|\nabla u|\neq 0$ sobre $\{u=t\}$, para quase todo $t\in(0,M)$. Daí, defina ν sobre $\{u=t\}$ por $d\nu=\dfrac{d\sigma}{|\nabla u|}$, então pela Desigualdade de

Hölder, tem-se

$$\int_{\{u=t\}} |\nabla u| d\nu \leq \left(\int_{\{u=t\}} |\nabla u|^p d\nu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\{u=t\}} d\nu\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Assim, via Teorema 2.25, Desigualdade Isoperimétrica Clássica e definição da medida ν, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{\{u=t\}} |\nabla u|^{p-1} d\sigma &\geq \frac{\left(\int_{\{u=t\}} |\nabla u| d\nu\right)^p}{\left(\int_{\{u=t\}} d\nu\right)^{p-1}} \\
&= \frac{\left(\int_{\{u=t\}} d\sigma\right)^p}{\left(\int_{\{u=t\}} d\nu\right)^{p-1}} \\
&\geq \frac{\left(\int_{\{u^\star=t\}} d\sigma\right)^p}{\left(\int_{\{u=t\}} d\nu\right)^{p-1}} \\
&= \frac{(\mathcal{L}_{N-1}(\{u^\star = t\}))^p}{(-\mu'(t))^{p-1}} \\
&= \mathcal{L}_{N-1}(\{u^\star = t\}) |\nabla u^\star_{|_{\{u^\star=t\}}}|^{p-1} \\
&= \int_{\{u^\star=t\}} |\nabla u^\star|^{p-1} d\sigma.
\end{aligned}$$

Assim, o teorema está provado quando $u \in C_c^\infty(\Omega)$ e $u \geq 0$.

Finalmente, considere $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $1 < p < \infty$, com $u \geq 0$. Nessas condições, existe uma sequência (u_n) tal que $u_n \in C_c^\infty(\Omega)$, $u_n \geq 0$ e $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Assim,

$$\int_{\Omega^\star} |\nabla u_n^\star|^p dx \leq \int_\Omega |\nabla u_n|^p dx.$$

Logo, a sequência $(u_n^\star)$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega^\star)$. Já que $W_0^{1,p}(\Omega^\star)$ é reflexivo, para $1 < p < \infty$, segue que existe uma subsequência que converge fracamente em $W_0^{1,p}(\Omega^\star)$, que, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, também converge fortemente em $L^p(\Omega^\star)$. Por outro lado, $u_n^\star \to u^\star$ em $L^p(\Omega^\star)$. Assim, $u^\star \in W_0^{1,p}(\Omega^\star)$ e $u_n^\star \rightharpoonup u^\star$ em $W_0^{1,p}(\Omega^\star)$. Pela semi-continuidade inferior fraca da norma, tem-se

$$\int_{\Omega^\star} |\nabla u^\star|^p dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega^\star} |\nabla u_n^\star|^p dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^p dx = \int_\Omega |\nabla u|^p dx.$$

O que conclui a demonstração. ∎

Capítulo 3

Compacidade Forte para Sequências Maximizantes

Neste capítulo, será desenvolvido o principal resultado deste trabalho. Baseado em [11], será provado que a melhor constante, denotada por $d_{N,\alpha}$, da imersão de $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ em $L_{\Phi_{N,\alpha}}(\mathbb{R}^N)$ é atingida para $N \geq 3$ e $\alpha \in (0, \alpha_N)$ ou para $N = 2$ e $\alpha \in (2/B_2, 4\pi]$. Além disso, na última seção será provado que a constate $d_{2,\alpha}$ não é atingida para α próximo de 0.

3.1 Desigualdades do Tipo Trudinger-Moser em $\mathbb{R}^N$ e Trabalhos Anteriores

Uma extensão da Desigualdade Clássica de Trudinger-Moser para $\mathbb{R}^N$ é a seguinte:

Teorema 3.1 ([1], Adachi-Tanaka). *Suponha $N \geq 2$, então para qualquer $\alpha \in (0, \alpha_N)$, existe uma constante $C_{N,\alpha}$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,\alpha}\left(\frac{|u|}{\|\nabla u\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}}\right) dx \leq C_{N,\alpha} \frac{\|u\|^N_{L^N(\mathbb{R}^N)}}{\|\nabla u\|^N_{L^N(\mathbb{R}^N)}},$$

para toda função $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \backslash \{0\}$, onde

$$\Phi_{N,\alpha}(t) := \exp(\alpha t^{\frac{N}{N-1}}) - \sum_{j=0}^{N-2} \frac{\alpha^j}{j!} t^{\frac{N}{N-1}j} = \sum_{j=N-1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} t^{\frac{N}{N-1}j}.$$

Além disso, para $\alpha \geq \alpha_N$, existe uma sequência (u_n) em $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$, tal que $\|\nabla u_n\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} =$

1 *e*

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\|u_n\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,\alpha}\left(\frac{|u_n|}{\|\nabla u_n\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}}\right) dx \\
&\geq \frac{1}{\|u_n\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,\alpha_N}\left(\frac{|u_n|}{\|\nabla u_n\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}}\right) dx \to \infty,
\end{aligned}
$$

quando $n \to \infty$.

Agora, é conhecido que, para todo $N \geq 2$ e $\alpha \in (0, \alpha_N]$, existe uma constante $D_{N,\alpha}$ tal que

$$
\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,\alpha}(|u|)dx \leq D_{N,\alpha}, \tag{3.1}
$$

para toda função $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$, com $\|u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)} = 1$ (veja [4] e [17]).

Considere a melhor constante associada a desigualdade (3.1), isto é,

$$
d_{N,\alpha} = \sup_{u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N), \|u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}=1} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,\alpha}(u)dx.
$$

Neste trabalho, serão estudados os casos $N \geq 3$ e $\alpha \in (0, \alpha_N)$ e $N = 2$ e $\alpha \in (0, \alpha_2]$. Por outro lado, Li e Ruf, provam em [17] que d_{N,α_N} é atingida para $N \geq 3$. O método usado em [17] é a técnica blow up, técnica essa que não pode ser empregada para o caso $N = 2$. O caso $N = 2$ e $\alpha = \alpha_2 = 4\pi$ é tratado por Ruf em [20], onde, segundo Ishiwata (veja [11]), há um "gap".

3.2 Sequências de Concentração e Anulamento

Nesta seção, serão analisados os casos do tipo concentração e/ou anulamento das sequências maximizantes de $d_{N,\alpha}$.

Seja (u_n) uma sequência limitada em $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$, satisfazendo

$$
u_n \rightharpoonup u, \text{ em } W^{1,N}(\mathbb{R}^N). \tag{3.2}
$$

A seguir serão introduzidos fatos necessários para o estudo de compacidade das sequências maximizantes de $d_{N,\alpha}$. São eles:

$$\mu_0 = \lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{B_R}\left(|\nabla u_n|^N + |u_n|^N\right)dx; \tag{3.3}$$

$$\mu_\infty = \lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{B_R^c}\left(|\nabla u_n|^N + |u_n|^N\right)dx; \tag{3.4}$$

$$\nu_0 = \lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{B_R}\Phi_{N,\alpha}(u_n)\,dx; \tag{3.5}$$

$$\nu_\infty = \lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{B_R^c}\Phi_{N,\alpha}(u_n)\,dx; \tag{3.6}$$

$$\eta_0 = \lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{B_R}|u_n|^N dx; \tag{3.7}$$

$$\eta_\infty = \lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{B_R^c}|u_n|^N dx, \tag{3.8}$$

a menos de subsequência. Considere R, um número real, e $h_R(r) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, tal que

$$\begin{cases} h_R(r) = 1, & \text{para} & 0 \le r \le R, \\ 0 \le h_R(r) \le 1, & \text{para} & R \le r \le R+1, \\ h_R(r) = 0, & \text{para} & R+1 \le r, \\ |h_R'(r)| \le 2, & \text{para todo} & r \end{cases}$$

e defina as funções ϕ_R^0 e ϕ_R^∞ por

$$\phi_R^0(x) := h_R(|x|), \;\; \phi_R^\infty(x) := 1 - h_R(|x|).$$

Lema 3.2. *Seja* $u_{n,R}^* := u_n\phi_R^*(* = 0,\infty)$, *então*

$$\mu_* = \lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u_{n,R}^*|^N + |u_{n,R}^*|^N\right)dx, \tag{3.9}$$

$$\nu_* = \lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\Phi_{N,\alpha}\left(u_{n,R}^*\right)dx, \tag{3.10}$$

$$\eta_* = \lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|u_{n,R}^*|^N dx. \tag{3.11}$$

Demonstração. Observe que $\chi_{B_{R+1}^c} \le |\phi_R^\infty| \le \chi_{B_R^c}$ e $\chi_{B_R} \le |\phi_R^0| \le \chi_{B_{R+1}}$, então

$$\int_{B_{R+1}^c}|u_n|^N dx \le \int_{\mathbb{R}^N}|\phi_R^\infty u_n|^N dx \le \int_{B_R^c}|u_n|^N dx,$$

$$\int_{B_R}|u_n|^N dx \le \int_{\mathbb{R}^N}|\phi_R^0 u_n|^N dx \le \int_{B_{R+1}}|u_n|^N dx,$$

e

$$\int_{B^c_{R+1}} |\nabla u_n|^N dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\phi^\infty_R|^N |\nabla u_n|^N dx \leq \int_{B^c_R} |\nabla u_n|^N dx.$$

Assim, (3.11) é estabelecido e, também,

$$\lim_{R\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\phi^\infty_R|^N |\nabla u_n|^N dx = \lim_{R\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int_{B^c_R} |\nabla u_n|^N dx. \tag{3.12}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\phi^\infty_R u_n)|^N dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |\phi^\infty_R(\nabla u_n) + u_n(\nabla \phi^\infty_R)|^N dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^N |\phi^\infty_R|^N dx + \mathcal{R}_{n,R}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

onde

$$\mathcal{R}_{n,R} = N \int_{\mathbb{R}^N} |\phi^\infty_R(\nabla u_n) + \theta u_n \nabla(\phi^\infty_R)|^{N-2} (\phi^\infty_R(\nabla u_n) + \theta u_n \nabla(\phi^\infty_R)) \cdot u_n \nabla(\phi^\infty_R) dx$$

e $0 < \theta < 1$.

Será provado que $\lim\limits_{R\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{R}_{n,R} = 0$. Com efeito,

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}_{n,R}| &\leq N \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\phi^\infty_R(\nabla u_n) + \theta u_n(\nabla \phi^\infty_R)|^N dx \right)^{\frac{N}{N-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n \nabla \phi^\infty_R|^N dx \right)^{\frac{1}{N}} \\ &\leq N(||\nabla u_n||_N + ||\nabla \phi^\infty_R||_\infty ||u_n||_{N,A(R,R+1)})^{N-1} ||\nabla \phi^\infty_R||_\infty ||u_n||_{N,A(R,R+1)} \\ &\leq C||u_n||_{N,A(R,R+1)}, \text{ pois } \sup_R ||\nabla \phi^\infty_R||_\infty \leq 2 \text{ e } u_n \rightharpoonup u \text{ em } W^{1,N}(\mathbb{R}^N), \end{aligned}$$

onde $A(R, R+1) = \{x \in \mathbb{R}^N; R < |x| < R+1\}$. Pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, tem-se

$$\int_{A(R,R+1)} |u_n| dx \to \int_{A(R,R+1)} |u|^N dx,$$

quando $n \to \infty$, e, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{A(R,R+1)} |u|^N dx \to 0,$$

quando $R \to \infty$. Logo, $\lim\limits_{R\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{R}_{n,R} = 0$.

Combinando as relações (3.12) e (3.13), obtém-se (3.9) com $(* = \infty)$. Já a igualdade (3.9), com $(* = 0)$, obtém-se de maneira análoga.

Para estabelecer (3.10), basta observar que, para $j \geq N-1$, tem-se $\chi_{B^c_{R+1}} u_n^{\frac{N}{N-1}j} \leq$

$(\phi_R^\infty u_n)^{\frac{N}{N-1}j} \leq \chi_{B_R^c} u_n^{\frac{N}{N-1}j}$ e $\chi_{B_R} u_n^{\frac{N}{N-1}j} \leq (\phi_R^0 u_n)^{\frac{N}{N-1}j} \leq \chi_{B_{R+1}} u_n^{\frac{N}{N-1}j}$, então

$$\int_{B_R} \sum_{j=N-1}^{\infty} u_n^{\frac{N}{N-1}j} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{j=N-1}^{\infty} (\phi_R^0 u_n)^{\frac{N}{N-1}j} dx \leq \int_{B_{R+1}} \sum_{j=N-1}^{\infty} u_n^{\frac{N}{N-1}j} dx$$

e

$$\int_{B_{R+1}^c} \sum_{j=N-1}^{\infty} u_n^{\frac{N}{N-1}j} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{j=N-1}^{\infty} (\phi_R^\infty u_n)^{\frac{N}{N-1}j} dx \leq \int_{B_R^c} \sum_{j=N-1}^{\infty} u_n^{\frac{N}{N-1}j} dx.$$

Portanto,

$$\nu_* = \lim_{R\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,\alpha}\left(u_{n,R}^*\right) dx.$$

■

Definição 3.3. *Seja $(u_n) \subset W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$.*

(*a*) *(u_n) é dita uma Sequência de Concentração Normalizada , termo abreviado no inglês (NCS), se (u_n) satisfaz $||u_n||_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)} = 1$, $u = 0$ e*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_\rho^c} (|\nabla u_n|^N + |u_n|^N) dx = 0,$$

para todo $\rho > 0$. Uma (NCS) consistindo de funções radialmente simétricas é chamada uma Sequência Radialmente Simétrica de Concentração Normalizada, termo abreviado no inglês (RNCS).

(*b*) *(u_n) é dita uma Sequência de Anulamento Normalizada, termo abreviado no inglês (NVS), se (u_n) satisfaz $||u_n||_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)} = 1$, $u = 0$ e $\nu_0 = 0$. Uma (NVS) consistindo de funções radialmente simétricas é chamada uma Sequência Radialmente Simétrica de Anulamento Normalizada, termo abreviado no inglês (RNVS).*

Abaixo será dado um exemplo de uma (NVS).

Exemplo 3.4. *Considere $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, satisfazendo $||\nabla\phi||_{L^N(\mathbb{R}^N)} = c_1$ e $||\phi||_{L^N(\mathbb{R}^N)} = 1$. Seja (λ_n) uma sequência de números reais positivos tal que $\lambda_n \to 0$, quando $n \to \infty$. Agora, defina a sequência (ψ_n) por $\psi_n(x) = \lambda_n \phi(\lambda_n x)$. Então $\left(\frac{\psi_n}{||\psi_n||_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}}\right)$ é uma (NVS).*

Definição 3.5. (*a*) *Um número*

$$d_{ncl}(N,\alpha) = \sup_{(u_n):(RNCS)} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,\alpha}(u_n)\, dx$$

é chamado um limite de concentração normalizado.

(b) *Um número*

$$d_{nvl}(N,\alpha) = \sup_{(u_n):(RVCS)} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,\alpha}(u_n)\, dx$$

é chamando um limite de anulamento normalizado.

Proposição 3.6. *Se* $\alpha \in (0, \alpha_N]$*, então* $d_{nvl}(N,\alpha) = \dfrac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!}$.

Demonstração. Seja (u_n) uma (RNVS). Note que

$$\begin{aligned}\nu_\infty &= \lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{B_R^c}\left(\Phi_{N,\alpha}(u_n) - \frac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!}|u_n|^N\right)dx \\ &+ \lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!}||u_n||^N_{N,B_R^c},\end{aligned} \tag{3.14}$$

passando a uma subsequência, se necessário. Primeiramente, será mostrado que

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{B_R^c}\left(\Phi_{N,\alpha}(u_n) - \frac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!}|u_n|^N\right)dx = 0. \tag{3.15}$$

Tem-se

$$u_n(r)^N = -N\int_r^\infty u_n(\sigma)^{N-1}\frac{du_n}{d\sigma}(\sigma)d\sigma,$$

e consequentemente,

$$\begin{aligned}|u_n(r)|^N &\le N\int_r^\infty |u_n(\sigma)|^{N-1}\sigma^{\frac{(N-1)^2}{N}}\left|\frac{du_n}{d\sigma}(\sigma)\right|\sigma^{\frac{N-1}{N}}\frac{d\sigma}{\sigma^{N-1}} \\ &\le N\left(\int_r^\infty |u_n(\sigma)|^N\sigma^{N-1}d\sigma\right)^{\frac{N-1}{N}}\left(\int_r^\infty\left|\frac{du_n}{d\sigma}(\sigma)\right|^N\sigma^{N-1}d\sigma\right)^{\frac{1}{N}}\cdot\frac{1}{r^{N-1}} \\ &\le C_1||u_n||_N^{N-1}||\nabla u_n||_N\frac{1}{r^{N-1}}.\end{aligned}$$

Logo,

$$|u_n(r)| \le C_2||u_n||_{1,N}\frac{1}{r^{\frac{N-1}{N}}}, \tag{3.16}$$

onde C_1 e C_2 são constantes que dependem apenas de N.

Seja $j \ge N+1$, por (3.16) e pela limitação de (u_n) em $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$, obtém-se

$$\int_R^\infty |u_n|^{\frac{N}{N-1}j}r^{N-1}dr \le C_3^{\frac{N}{N-1}j}\frac{1}{R^{j-N}}, \tag{3.17}$$

onde C_3 depende apenas de N. Assim,

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} ||u_n||^{\frac{N}{N-1}j}_{\frac{N}{N-1}j, B_R^c} &\leq C_4 \sum_{j=N+1} \frac{\alpha^j}{j!} C_3^{\frac{N}{N-1}j} \frac{1}{R^{j-N}} \\
&\leq C_4 \left[\alpha C_3^{\frac{N}{N-1}}\right]^N \left(e^{\frac{\alpha C_3^{\frac{N}{N-1}}}{R}} - 1\right) \to 0, \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

quando $R \to \infty$, uniformemente em n.

Agora, já que $\dfrac{N}{N-1}N = \dfrac{N}{2} + \dfrac{N}{2} \cdot \dfrac{N+1}{N-1}$, usando a Desigualdade de Hölder, (3.17) e a limitação de (u_n) em $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$, obtém-se

$$
\begin{aligned}
\int_{B_R^c} |u_n|^{\frac{N}{N-1}N} dx &\leq \left(\int_{B_R^c} |u_n|^N\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_R^c} |u_n|^{\frac{N}{N-1}(N+1)} dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_5 \frac{1}{R^{1/2}} \to 0,
\end{aligned}
$$

quando $R \to \infty$. Essa relação e (3.18) implicam (3.15). Das relações (3.14) e (3.15), vale

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,\alpha}(u_n)\, dx = \nu_0 + \nu_\infty = \nu_\infty \\
&= \lim_{R\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!} ||u_n||^N_{N,B_R^c} \leq \frac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!},
\end{aligned}
$$

isto é, $d_{nvl} \leq \dfrac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!}$.

Agora, para provar a desigualdade inversa, considere $\left(\dfrac{\psi_n}{||\psi_n||_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}}\right)$ como a sequência definida no Exemplo 3.4 com uma função ϕ radialmente simétrica, então essa sequência é uma (RNVS) e (ψ_n) satisfaz

$$
\lim_{R\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int_{B_R^c} |\psi_n|^N dx = 1, \lim_{n\to\infty} ||\psi_n||^N_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)} = \lim_{n\to\infty} (1 + (\lambda_n c_1)^N) = 1.
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,\alpha}\left(\frac{\psi_n}{||\psi_n||_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}}\right) dx = \nu_0 + \nu_\infty = \nu_\infty \\
&= \lim_{R\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!} \frac{\displaystyle\int_{B_R^c} |\psi_n|^N dx}{||\psi_n||^N_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}} \\
&= \frac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!}.
\end{aligned}
$$

■

Proposição 3.7. *(a) Se $\alpha \in (0, \alpha_N]$ e $N \geq 3$, então $d_{N,\alpha} > \dfrac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!}$;*

(b) Se $\alpha \in (\frac{2}{B_2}, \alpha_2]$, onde $B_2 = \sup\limits_{\phi \neq 0, \phi \in H^1(\mathbb{R}^N)} \dfrac{\|\phi\|^4_{L^4(\mathbb{R}^N)}}{\|\nabla \phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}}$, e $N = 2$, então $d_{N,\alpha} > \dfrac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!}$.

Demonstração. Considere $v \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ uma função que não faça parte de uma sequência de anulamento nem concentração. Seja v_t, uma família de funções, dadas por

$$v_t(x) = t^{1/N} v(t^{1/N} x),$$

onde $t > 0$ é um parâmetro.

Fazendo mudança de variável, $y = t^{1/N} x$, para $p \geq N$, tem-se

$$||\nabla v_t||^N_N = t ||\nabla v||^N_N \text{ e } ||v_t||^p_p = t^{(p-N)/N} ||v||^p_p.$$

Pelas relações acima, obtém-se

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,\alpha}\left(\frac{v_t}{|||v_t||_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}}\right) dx = \sum_{j=N-1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \frac{||v_t||^{\frac{N}{N-1}j}_{\frac{N}{N-1}j}}{(||\nabla v_t||^N_N + ||v_t||^N_N)^{\frac{1}{N}\frac{N}{N-1}j}} \\
&\geq \sum_{j=N-1}^{N} \frac{\alpha^j}{j!} \frac{||v_t||^{\frac{N}{N-1}j}_{\frac{N}{N-1}j}}{(||\nabla v_t||^N_N + ||v_t||^N_N)^{\frac{1}{N}\frac{N}{N-1}j}} \\
&= \frac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!} \left[\frac{||v||^N_N}{t||\nabla v||^N_N + ||v||^N_N} + \frac{\alpha}{N} \frac{t^{\frac{1}{N-1}} ||v||^{\frac{N}{N-1}N}_{\frac{N}{N-1}N}}{(t||\nabla v||^N_N + ||v||^N_N)^{\frac{N}{N-1}}} \right] \\
&:= \frac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!} f_{N,\alpha,v}(t).
\end{aligned}$$

Note que, à partir da relação acima, para obter o resultado, basta provar

$$f'_{N,\alpha,v}(t) > 0 \text{ para } 0 < t \ll 1,$$

uma vez que $\lim\limits_{t \to 0} f_{N,\alpha,v}(t) = 1$. Através de um cálculo direto, obtém-se

$$
\begin{aligned}
f'_{N,\alpha,v}(t) = \frac{-||v||_N^N||\nabla v||_N^N}{(t||\nabla v||_N^N + ||v||_N^N)^2} + \frac{\alpha}{N}\Bigg[& \frac{\frac{1}{N-1}t^{\frac{2-N}{N-1}}||v||_{\frac{N}{N-1}N}^{\frac{N}{N-1}N}\cdot\left(t\|\nabla v\|_N^N + \|v\|_N^N\right)^{\frac{N}{N-1}}}{(t||\nabla v||_N^N + ||v||_N^N)^{\frac{2N}{N-1}}} \\
& + \frac{-t^{\frac{1}{N-1}}||v||_{\frac{N}{N-1}N}^{\frac{N}{N-1}N}\frac{N}{N-1}(t||\nabla v||_N^N + ||v||_N^N)^{\frac{1}{N-1}}||\nabla v||_N^N}{(t||\nabla v||_N^N + ||v||_N^N)^{\frac{2N}{N-1}}}\Bigg] \\
& = \frac{||v||_N^N||\nabla v||_N^N}{(t||\nabla v||_N^N + ||v||_N^N)^{2+\frac{1}{N-1}}}\frac{1}{t^{\frac{N-2}{N-1}}}\Bigg[-t^{\frac{N-2}{N-1}}(t||\nabla v||_N^N + ||v||_N^N)^{\frac{1}{N-1}} \\
& + \frac{\alpha}{N(N-1)}\frac{||v||_{\frac{N}{N-1}N}^{\frac{N}{N-1}N}}{||\nabla v||_N^N||v||_N^N}\left(-t(N-1)||\nabla v||_N^N + ||v||_N^N\right)\Bigg] \\
& := \frac{||v||_N^N||\nabla v||_N^N}{(t||\nabla v||_N^N + ||v||_N^N)^{2+\frac{1}{N-1}}}\frac{1}{t^{\frac{N-2}{N-1}}}\cdot g_{N,\alpha,v}(t).
\end{aligned}
$$

Observe que $f'_{N,\alpha,v}$ e $g_{N,\alpha,v}$ tem o mesmo sinal. Suponha primeiro que $N \geq 3$, então

$$\lim_{t\to 0} g_{N,\alpha,v}(t) = \frac{\alpha}{N(N-1)}\frac{||v||_{\frac{N}{N-1}N}^{\frac{N}{N-1}N}}{||\nabla v||_N^N} > 0.$$

Isso prova o caso $N \geq 3$.

Agora, suponha que $N = 2$ e $B_2 > 2/\alpha$. Em vista de [21], tem-se que B_2 é atingida, isto é, existe uma função $U \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$B_2 = \frac{||U||_4^4}{||\nabla U||_2^2||U||_2^2}.$$

Tomando $v := U$, tem-se

$$\lim_{t\to 0} g_{2,\alpha,U}(t) = ||U||_2^2\left(-1 + \frac{\alpha}{2}B_2\right) > 0.$$

Isso completa a demonstração. ■

3.3 Limite de uma Sequência Maximizante

Nesta seção, serão tratados dois dos três principais resultados. Suponha, durante toda a seção, que:

$$\alpha \in (0, \alpha_N) \text{ e } N \geq 3 \text{ ou } \alpha \in (2/B_2, \alpha_2] \text{ e } N = 2;$$

(u_n) uma sequência maximizante para $d_{N,\alpha}$. Além disso, em virtude do processo de simetrização de Schwarz, pode-se assumir que a sequência (u_n) é radialmente simétrica, não negativa e com decrescimento radial. Já que $||u_n||_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)} = 1$, é possível encontrar $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ fracamente em } W^{1,N}(\mathbb{R}^N),$$

tomando uma subsequência, se necessário.

Lema 3.8. *Sejam* $N \geq 3$ *e* $\alpha \in (0, \alpha_N)$ *ou* $N = 2$ *e* $\alpha \in (2/B_2, 4\pi]$ *e* $(u_n) \subset W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ *uma sequência maximizante de* $d_{N,\alpha}$. *Então*

$$\nu_* \geq \frac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!}\eta_* \ \textit{para} \ (* = 0, \infty)$$

e

$$1 = \mu_0 + \mu_\infty, 1 \geq \eta_0 + \eta_\infty, d_{N,\alpha} = \nu_0 + \nu_\infty.$$

Demonstração. Pelo Lema 3.2, tem-se

$$\begin{aligned}\nu_* &= \lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=N-1}^{\infty}\frac{\alpha^j}{j!}||u^*_{n,R}||^{\frac{N}{N-1}j}_{\frac{N}{N-1}j}\\ &\geq \lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!}||u^*_{n,R}||^N_N = \frac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!}\eta_*.\end{aligned}$$

Observe que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Phi_{N,\alpha}(u_n)\,dx = \int_{B_R}\Phi_{N,\alpha}(u_n)\,dx + \int_{B_R^c}\Phi_{N,\alpha}(u_n)\,dx,$$

então, tomando o limite quando $n \to \infty$ e, posteriormente, quando $R \to \infty$ em uma subsequência apropriada, obtém-se

$$d_{N,\alpha} = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\Phi_{N,\alpha}(u_n)\,dx = \nu_0 + \nu_\infty.$$

Finalmente, note que

$$1 = \int_{\mathbb{R}^N}(|u_n|^N + |\nabla u_n|^N)dx = \int_{B_R}(|u_n|^N + |\nabla u_n|^N)dx + \int_{B_R^c}(|u_n|^N + |\nabla u_n|^N)dx$$

e

$$1 = \int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^N dx \geq \int_{B_R}|u_n|^N dx + \int_{B_R^c}|u_n|^N dx.$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$ e, posteriormente, quando $R \to \infty$ em subsequências apropriadas nas duas expressões acima, obtém-se, respectivamente, $1 = \mu_0 + \mu_\infty$ e $1 \geq \eta_0 + \eta_\infty$. ■

Lema 3.9. *Sejam $N \geq 3$ e $\alpha \in (0, \alpha_N)$ ou $N = 2$ e $\alpha \in (2/B_2, 4\pi]$ e $(u_n) \subset W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência maximizante de $d_{N,\alpha}$. Se $\mu_* < 1 (* = 0, \infty)$, então*

$$\begin{aligned} d_{N,\alpha}||u^*_{n,R}||^N_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)} &\geq \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,\alpha}\left(u^*_{n,R}\right) dx \\ &+ \left(\frac{1}{||u^*_{n,R}||^{\frac{N}{N-1}}_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}} - 1 \right) \int_{\mathbb{R}^N} \left(\Phi_{N,\alpha}\left(u^*_{n,R}\right) - \frac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!}|u^*_{n,R}|^N \right) dx. \end{aligned}$$

Demonstração. Pela definição de $d_{N,\alpha}$,

$$\begin{aligned} d_{N,\alpha} &\geq \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,\alpha}\left(\frac{u^*_{n,R}}{||u^*_{n,R}||_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}} \right) dx \\ &= \sum_{j=N-1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \frac{||u^*_{n,R}||^{\frac{N}{N-1}j}_{\frac{N}{N-1}j}}{||u^*_{n,R}||^{\frac{N}{N-1}j}_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}} = \frac{1}{||u^*_{n,R}||^N_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}} \sum_{j=N-1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \frac{||u^*_{n,R}||^{\frac{N}{N-1}j}_{\frac{N}{N-1}j}}{||u^*_{n,R}||^{\frac{N}{N-1}(j-N+1)}_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}} \\ &= \frac{1}{||u^*_{n,R}||^N_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}} \left[\sum_{j=N-1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} ||u^*_{n,R}||^{\frac{N}{N-1}j}_{\frac{N}{N-1}j} \right. \\ &\left. + \sum_{j=N}^{\infty} \left(\frac{1}{||u^*_{n,R}||^{\frac{N}{N-1}(j-N+1)}_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}} - 1 \right) \frac{\alpha^j}{j!} ||u^*_{n,R}||^{\frac{N}{N-1}j}_{\frac{N}{N-1}j} \right]. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} d_{N,\alpha}||u^*_{n,R}||^N_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)} &\geq \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,\alpha}\left(u^*_{n,R}\right) dx \\ &+ \sum_{j=N}^{\infty} \left(\frac{1}{||u^*_{n,R}||^{\frac{N}{N-1}(j-N+1)}_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}} - 1 \right) \frac{\alpha^j}{j!} ||u^*_{n,R}||^{\frac{N}{N-1}j}_{\frac{N}{N-1}j}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Considere $j \geq N$, como $\lim\limits_{R\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} ||u^*_{n,R}||^N_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)} = \mu_* < 1$, existem $R_0 > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que, se $R \geq R_0$ e $n \geq n_0$, tem-se

$$||u^*_{n,R}||^{\frac{N}{N-1}(j-N+1)}_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)} \leq ||u^*_{n,R}||^{\frac{N}{N-1}}_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)} < 1.$$

Logo,

$$\sum_{j=N}^{\infty}\left(\frac{1}{||u_{n,R}^{*}||_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{N}{N-1}(j-N+1)}}-1\right)\frac{\alpha^j}{j!}||u_{n,R}^{*}||_{\frac{N}{N-1}j}^{\frac{N}{N-1}j}\geq\left(\frac{1}{||u_{n,R}^{*}||_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{N}{N-1}}}-1\right)\sum_{j=N}^{\infty}||u_{n,R}^{*}||_{\frac{N}{N-1}j}^{\frac{N}{N-1}j}\frac{\alpha^j}{j!}$$
$$\geq\left(\frac{1}{||u_{n,R}^{\star}||_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{N}{N-1}}}-1\right)\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Phi_{N,\alpha}\left(u_{n,R}^{*}\right)-\frac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!}|u_{n,R}^{*}|^N\right)dx.$$

Combinando essa relação com (3.19), conclui-se a demonstração do lema. ■

Proposição 3.10. *Sejam* $N\geq 3$ *e* $\alpha\in(0,\alpha_N)$ *ou* $N=2$ *e* $\alpha\in(2/B_2,4\pi]$ *e* $(u_n)\subset W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ *uma sequência maximizante de* $d_{N,\alpha}$. *Então*

$$(\mu_0,\nu_0)=(1,d_{N,\alpha})\ \ e\ \ (\mu_\infty,\nu_\infty)=(0,0).$$

Demonstração. Primeiro, será mostrado que ou

$$(\mu_0,\nu_0)=(1,d_{N,\alpha})\ \text{ e }\ (\mu_\infty,\nu_\infty)=(0,0),\tag{3.20}$$

ou

$$(\mu_0,\nu_0)=(0,0)\ \text{ e }\ (\mu_\infty,\nu_\infty)=(1,d_{N,\alpha}).\tag{3.21}$$

Note que $0<\mu_*<1$ não ocorre para $(*=0)$ ou $(*=\infty)$. Com efeito, se $0<\mu_*<1$ em algum dos casos, então $0<\mu_*<1$ em ambos os casos, pelo Lema 3.8.

Como valem as hipóteses do Lema 3.9, tem-se

$$d_{N,\alpha}\mu_*\geq\nu_*+\left(\frac{1}{\mu_*^{\frac{1}{N-1}}}-1\right)\left(\nu_*-\frac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!}\eta_*\right).\tag{3.22}$$

Novamente, pelo Lema 3.8

$$\nu_*-\frac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!}\eta_*\geq 0.$$

Assim,

$$d_{N,\alpha}\mu_*\geq\nu_*,*=0,\infty.$$

Combinando essa relação com

$$1=\mu_0+\mu_\infty,\ \ \nu_0+\nu_\infty=d_{N,\alpha},$$

tem-se

$$d_{N,\alpha}\mu_* = \nu_*, * = 0, \infty.$$

Logo, essa relação, juntamente com (3.22) e o Lema 3.8, implicam

$$\nu_* = \frac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!}\eta_*, \quad * = 0, \infty.$$

Segue, dessa igualdade e do Lema 3.8, que

$$d_{N,\alpha} = \nu_0 + \nu_\infty \leq \frac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!}(\eta_0 + \nu_\infty) \leq \frac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!},$$

que contradiz a Proposição 3.7. Consequentemente, ou $(\mu_0, \mu_\infty) = (1, 0)$ ou $(\mu_0, \mu_\infty) = (0, 1)$, em vista do Lema 3.8.

Agora, será mostrado que, se $\mu_* = 0$, então $\nu_* = 0$, onde $(* = 0, \infty)$. Considere $\mu_* = 0$, pelo Lema 3.2, vale

$$\frac{1}{||u_{n,R}^*||_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{N}{N-1}}} - 1 > \frac{1}{2},$$

para R e n suficientemente grandes. A relação acima e o Lema 3.9 produzem,

$$\begin{aligned} d_{N,\alpha}||u_{n,R}^*||_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}^N \geq & \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,\alpha}\left(u_{n,R}^*\right) dx \\ & + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Phi_{N,\alpha}\left(u_{n,R}^*\right) - \frac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!}|u_{n,R}^*|^N\right) dx, \end{aligned}$$

para R e n grandes.

Tomando o limite quando $n \to \infty$ e, posteriormente, quando $R \to \infty$ na última relação e usando os Lemas 3.2 e 3.8, obtém-se

$$d_{N,\alpha}\mu_* \geq \nu_* + \frac{1}{2}\left(\nu_* - \frac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!}\eta_*\right) \geq \nu_*.$$

Logo, conclui-se que, se $\mu_* = 0$, então $\nu_* = 0$. Aplicando o Lema 3.8, a afirmação está demonstrada.

Agora, será provado que (3.20) não pode ocorrer. Suponha, por contradição, que (3.20) seja verdade. Então, em virtude da demonstração da Proposição 3.6, vale

$$d_{N,\alpha} = \nu_\infty = \lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{B_R^c} \Phi_{N,\alpha}\left(u\right) dx \leq \frac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!},$$

que é um absurdo, em vista da Proposição 3.7. ■

Teorema 3.11 (P-H.Lions)**.** *Sejam $N \geq 2$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e limitado. Considere (u_n) uma sequência em $W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que*

$$u_n \rightharpoonup u \;\; em \;\; W_0^{1,N}(\Omega),\; ||\nabla u_n||_{L^N(\Omega)} \leq 1 \;\; e \;\; |\nabla u_n|^N \overset{*}{\rightharpoonup} \mu \;\; em \;\; \mathcal{M}(\overline{\Omega}),$$

para algum $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ e $\mu \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$. Então, vale apenas uma das alternativas:

(*i*) *$u = 0$ e $\mu = \delta_{x_0}$, para algum $x_0 \in \overline{\Omega}$. Neste caso,*

$$e^{\alpha_N |u_n|^{\frac{N}{N-1}}} \overset{*}{\rightharpoonup} c\delta_{x_0},$$

para algum $c \in [0, \infty)$;

(*ii*) *$u = 0$ e μ não está concentrada em um único ponto. Neste caso, existe um $p > 1$, tal que*

$$e^{\alpha_N p |u_n|^{\frac{N}{N-1}}} \;\; \text{está limitada em } L^1(\Omega);$$

(*iii*) *$u \neq 0$. Neste caso,*

$$e^{\alpha_N p |u_n|^{\frac{N}{N-1}}} \;\; \text{é limitada em } L^1(\Omega),$$

para todo $p < P$, onde

$$P = \begin{cases} \infty, & se \;\; ||\nabla u||_{L^N(\Omega)} = 1 \\ \dfrac{1}{\left(1 - ||\nabla u||^N_{L^N(\Omega)}\right)^{\frac{1}{N-1}}}, & se \;\; ||\nabla u||_{L^N(\Omega)} < 1 \end{cases}.$$

Além disso, esta conclusão falha, se $p \geq P$.

Finalmente, em ambos os casos (ii) e (iii),

$$\int_\Omega e^{\alpha_N |u_n|^{\frac{N}{N-1}}} dx \to \int_\Omega e^{\alpha_N |u|^{\frac{N}{N-1}}} dx,$$

a menos de subsequência.

Demonstração. (Veja Teorema A.15, Apêndice A) ■

Na demonstração da seguinte proposição, será usado que $d_{ncl}(2, \mathbb{R}^2) = e\pi$, fato esse provado por Carleson e Chang (veja[6]).

Proposição 3.12. *Sejam $N = 2$ e $\alpha = \alpha_2 = 4\pi$ e $(u_n) \subset W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ uma sequência maximizante de $d_{2,\alpha}$, convergindo fracamente em $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$, para $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$. Então, (u_n) não é uma sequência de concentração normalizada. Em particular, u não pode ser a função nula.*

Demonstração. Primeiramente, note que se (u_n) é uma (NCS), então

$$d_{2,\alpha_2} = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \Phi_{2,\alpha_2}(u_n)dx \leq d_{ncl}(2,\mathbb{R}^2) = e\pi < 4\pi,$$

o que contradiz a proposição 3.7.

Agora, será provado que, se $u = 0$, então (u_n) é uma (NCS). Com efeito, considere $\rho > 0$, pela Proposição 3.10, $\mu_\infty = 0$, isto é,

$$\lim_{R\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int_{B_R^c} |\nabla u_n|^2 + |u_n|^2 dx = 0. \tag{3.23}$$

Já que $\mu_\infty = 0$ e $u_{n,R}^0 \to 0$ fortemente em $L^2(B_{R+3})$, quando $n \to \infty$, pelo Lema 3.2, existe $R_1 > 0$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_{R+3}} |\nabla u_{n,R}^0|^2 dx \geq \frac{1}{2}, \tag{3.24}$$

para todo $R > R_1$.

Tome $R > \max\{\rho, R_1\}$ e $w_{n,R} := \dfrac{u_{n,R}^0}{||\nabla u_{n,R}^0||_{L^2(B_{R+3})}}$. Usando a relação (3.24) e $u_{n,R}^0 \rightharpoonup 0$ em $W_0^{1,2}(B_{R+3})$, quando $n \to \infty$, obtém-se

$$w_{n,R} \rightharpoonup 0 \text{ em } W_0^{1,2}(B_{R+3}) \text{ e } u_{n,R}^0 \to 0 \text{ } q.t.p \text{ em } \mathbb{R}^2.$$

Pelo Teorema 3.11, vale

$$|\nabla w_{n,R}|^2 \overset{*}{\rightharpoonup} \delta_0 \text{ em } \mathcal{M}(B_{R+3}) \text{ e } w_{n,R} \to 0 \text{ em } L^2(B_{R+3}), \tag{3.25}$$

quando $n \to \infty$.

Agora, considere $\phi_{\rho,R} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ satisfazendo

$$\begin{cases} \phi_{\rho,R} = 1, & \text{em} \quad B_{R+1} \backslash B_\rho \\ \phi_{\rho,R} = 0, & \text{em} \quad B_{\frac{\rho}{2}} \cup B_{R+2}^c \\ 0 \leq \phi_{\rho,R} \leq 1, & \text{em} \quad \mathbb{R}^2 \end{cases}.$$

Note que,

$$\int_{B_\rho^c} \left(|\nabla u_{n,R}^0|^2 + |u_{n,R}^0|^2\right) dx \leq \int_{B_{R+3}} \left(|\nabla u_{n,R}^0|^2 + |u_{n,R}^0|^2\right) \phi_{\rho,R} dx$$
$$= ||\nabla u_{n,R}^0||_2^2 \int_{B_{R+3}} \left(|\nabla w_{n,R}|^2 + |w_{n,R}|^2\right) \phi_{\rho,R} dx.$$

Então, tomando-se o limite quando $n \to \infty$ e, depois, quando $R \to \infty$ na desigualdade acima e usando (3.25), obtém-se

$$\lim_{R\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int_{B_\rho^c} \left(|\nabla u_{n,R}^0|^2 + |u_{n,R}^0|^2\right) dx = 0.$$

Como

$$\int_{B_\rho^c \cap B_R} \left(|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2\right) dx \leq \int_{B_\rho^c} \left(|\nabla u_{n,R}^0|^2 + |u_{n,R}^0|^2\right) dx,$$

tem-se

$$\lim_{R\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int_{B_\rho^c \cap B_R} \left(|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2\right) dx = 0. \tag{3.26}$$

Além disso, observe que é possível escrever

$$\int_{B_\rho^c} \left(|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2\right) dx = \int_{B_\rho^c \cap B_R} \left(|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2\right) dx + \int_{B_\rho^c \cap B_R^c} \left(|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2\right) dx.$$

Fazendo o uso de (3.23) e (3.26),

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_\rho^c} \left(|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2\right) dx = 0.$$

Portanto, (u_n) é uma (NCS).

■

Proposição 3.13. *Sejam $N \geq 3$ e $\alpha \in (0, \alpha_N)$ ou $N = 2$ e $\alpha \in (2/B_2, 4\pi]$ e $(u_n) \subset W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência maximizante de $d_{N,\alpha}$, convergindo fracamente em $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$, para $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$. Então*

$$d_{N,\alpha} = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,\alpha}(u)\, dx.$$

Demonstração. Primeiramente, será provado que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^N dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^N dx. \tag{3.27}$$

Com efeito, pela Proposição 3.10, é conhecido que $\mu_\infty = 0$ e, dado $R > 0$, observe que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N} \left(|u_n|^N - |u|^N\right) dx\right| &\leq \left|\int_{B_R} \left(|u_n|^N - |u|^N\right) dx\right| + \int_{B_R^c} |u_n|^N dx + \int_{B_R^c} |u|^N dx \\ &=: I(n,R) + II(n,R) + III(n,R).\end{aligned}$$

Segue que $\lim\limits_{R\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty} I(n,R) = 0$, já que $W^{1,N}(B_R) \hookrightarrow L^N(B_R)$ compactamente. Além disso, $\lim\limits_{R\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty} III(n,R) = 0$, em virtude do Teorema da Convergência Dominada. Finalmente, $\lim\limits_{R\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty} II(n,R) = 0$, pois $\mu_\infty = 0$. Ou seja, (3.27) é verificada.

Agora, suponha que $N \geq 3$ e $\alpha \in (0, \alpha_N)$ ou $N = 2$ e $\alpha \in (2/B_2, \alpha_2)$. Note que

$$\begin{aligned} d_{N,\alpha} - \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,\alpha}(u)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,\alpha}(u_n)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,\alpha}(u)\, dx + \left(d_{N,\alpha} - \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,\alpha}(u_n)\, dx\right) \\ &=: IV(n,R) + V(n,R), \end{aligned} \tag{3.28}$$

onde,

$$V(n,R) := d_{N,\alpha} - \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,\alpha}(u_n)\, dx$$

e

$$IV(n,R) := \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,\alpha}(u_n)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,\alpha}(u)\, dx.$$

Assim, pela definição de $d_{N,\alpha}$, tem-se

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty} V(n,R) = 0.$$

Agora será provado que $\lim\limits_{R\to\infty}\lim\limits_{R\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty} IV(n,R) = 0$. Com efeito,

$$\begin{aligned} IV(n,R) = &\int_{\mathbb{R}^N} \left(\Phi_{N,\alpha}(u_n) - \frac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!}|u_n|^N\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \left(\Phi_{N,\alpha}(u) - \frac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!}|u|^N\right) dx \\ &+ \frac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|u_n|^N - |u|^N\right) dx. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Segue, via Teorema do Valor Médio e Desigualdade de Hölder, que

$$\begin{aligned} &\left|\int_{\mathbb{R}^N} \left(\Phi_{N,\alpha}(u_n) - \frac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!}|u_n|^N\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \left(\Phi_{N,\alpha}(u) - \frac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!}|u|^N\right) dx\right| \\ &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{\frac{1}{N-1}} \Phi_{N,\alpha}(v_n)\, |u_n - u| dx \\ &\leq C_2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,q\alpha}(v_n)\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^N dx\right)^{\frac{1}{N(N-1)}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned} \tag{3.30}$$

onde $q > 1, q\alpha < \alpha_N$, $1/q + 1/N(N-1) + 1/p = 1$ e $p > N$.

Como $W^{1,N}_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ compactamente, para $p > N$, segue das relações (3.27), (3.29) e (3.30), que $\lim\limits_{R\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} IV(n,R) = 0$. Logo, por (3.28), segue que $d_{N,\alpha}$ é atingida.

Agora, suponha que $N = 2$ e $\alpha = \alpha_2 = 4\pi$, pela Proposição 3.10, tem-se $\nu_\infty = 0$. Daí

$$d_{2,4\pi} = \nu_0 + \nu_\infty = \lim_{R\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{4\pi(u^0_{n,R})^2} - 1 \right) dx.$$

Uma vez que $1 = ||u_n||^2_{H^1(\mathbb{R}^2)}$, pela relação (3.27) e pela Proposição 3.12,

$$\lim_{n\to\infty} ||\nabla u_n||_2^2 = 1 - \lim_{n\to\infty} ||u_n||_2^2 = 1 - \|u\|_2^2 < 1.$$

Essa relação e o Lema 3.2 implicam

$$\lim_{R\to\infty} \lim_{n\to\infty} ||\nabla(u^0_{n,R})||_2^2 = \lim_{n\to\infty} ||\nabla u_n||_2^2 < 1.$$

Assim, existem $\eta > 0$ e $R_0 > 0$, satisfazendo o seguinte: para qualquer $R > R_0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$||\nabla(u^0_{n,R})||_2^2 < 1 - \eta,$$

para todo $n \geq N$.

Agora, considere $R > 0$ e defina $c_R = \lim\limits_{n\to\infty} c_{n,R}$, onde $c_{n,R} = ||\nabla(u^0_{n,R})||_2$. Já que $u^0_{n,R} \rightharpoonup u\phi^0_R$ em $H^1_0(B_{R+3})$, quando $n \to \infty$, então

$$c_R = \lim_{n\to\infty} ||\nabla(u^0_{n,R})||_2 \geq ||\nabla(u\phi^0_R)||_2 \to ||\nabla u||_2,$$

quando $R \to \infty$. Logo, pode-se supor que $0 < C \leq c_R$, para todo $R > 0$, onde C é uma constante . Além disso,

$$4\pi c_R^2 = \lim_{n\to\infty} 4\pi c^2_{n,R} \leq 4\pi(1-\eta) < 4\pi.$$

Esse fato, juntamente com argumentos de compacidade para o funcional com o expoente subcrítico em $H^1_0(B_{R+1})$, produzem

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{4\pi(u^0_{n,R})^2} - 1 \right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_{B_{R+1}} \left(e^{4\pi c^2_{n,R}\left(\frac{u^0_{n,R}}{c_{n,R}}\right)^2} - 1 \right) dx$$

$$= \int_{B_{R+1}} \left(e^{4\pi c_R^2\left(\frac{u\phi^0_R}{c_R}\right)^2} - 1 \right) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{4\pi\left(u\phi^0_R\right)^2} - 1 \right) dx,$$

o que conclui a demonstração. ∎

Teorema 3.14. *Sejam $N \geq 3$ e $\alpha \in (0, \alpha_N)$ ou $N = 2$ e $\alpha \in (2/B_2, 4\pi]$ e $(u_n) \subset W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência maximizante de $d_{N,\alpha}$ convergindo fracamente em $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$, para $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$. Então $\|u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)} = 1$ e*

$$d_{N,\alpha} = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,\alpha}(u)\, dx.$$

Demonstração. Note que $||u||_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)} \leq \liminf_{n\to\infty} ||u_n||_{W^{1,N}(\mathbb{R})} = 1$. Pela Proposição 3.13, tem-se $u \neq 0$ e

$$\begin{aligned}
d_{N,\alpha} &\geq \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,\alpha}\left(\frac{u}{||u||_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}}\right) dx = \sum_{j=N-1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \frac{||u||_{\frac{N}{N-1}j}^{\frac{N}{N-1}j}}{||u||_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{N}{N-1}j}} \\
&\geq \frac{1}{||u||_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}^{N}} \sum_{j=N-1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} ||u||_{\frac{N}{N-1}j}^{\frac{N}{N-1}j} = \frac{1}{||u||_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}^{N}} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,\alpha}(u)\, dx \\
&= \frac{1}{||u||_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}^{N}} d_{N,\alpha}.
\end{aligned}$$

Assim, $||u||_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)} \geq 1$ e, consequentemente, $||u||_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)} = 1$. Segue daí, com a Proposição 3.13, a demonstração do teorema. ∎

3.4 Não Existência de uma Função Maximizante

Nesta seção, será provada a não existência de uma função maximizante para o caso $N = 2$ e α suficientemente pequeno.

Pelo Teorema 3.1, existe uma constante $C_{N,\alpha}$, que depende somente de N e α, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,\alpha}\left(\frac{u}{||\nabla u||_{L^N(\mathbb{R}^N)}}\right) dx \leq C_{N,\alpha} \frac{||u||_N^N}{||\nabla u||_N^N}.$$

Com isso, para qualquer $\beta \in (0, 4\pi)$, existe $C_\beta > 0$ tal que

$$||u||_{2j}^{2j} \leq C_\beta \frac{j!}{\beta^j} ||\nabla u||_2^{2(j-1)} ||u||_2^2, \tag{3.31}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ e para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$.

Teorema 3.15. *Sejam $N = 2$ e $\alpha \ll 1$, não existe $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$, com $\|u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)} = 1$, tal que*

$$d_{2,\alpha} = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{2,\alpha}(u) dx.$$

Demonstração. Tomando $\alpha < 2\pi$ e definindo $M = \{u \in H^1(\mathbb{R}^2); ||u||_{H^1(\mathbb{R}^2)} = 1\}$, fixe

$v \in M$. Considere a família de funções

$$v_t(x) = t^{1/2} v(t^{1/2} x),$$

onde $t > 0$ é um parâmetro.

Agora, defina $w_t = \dfrac{v_t}{||v_t||_{H^1(\mathbb{R}^2)}}$, assim, $w_t \in M$, para todo $t > 0$ e $w_1 = v$.

Será provado que v não é ponto crítico de $J(u) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \Phi_{2,\alpha}(u)dx$, se α é suficientemente pequeno.

De fato, como

$$||v_t||_p^p = t^{\frac{p-2}{2}} ||v||_p^p \ \text{ e } \ ||\nabla v_t||_2^2 = t||v||_2^2,$$

tem-se,

$$J(w_t) = J\left(\frac{v_t}{||v_t||_{H^1(\mathbb{R}^2)}}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \frac{t^{j-1}||v||_{2j}^{2j}}{(t||\nabla v||_2^2 + ||v||_2^2)^j}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J(w_t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \frac{(j-1)t^{j-2}||v||_{2j}^{2j}(t||\nabla v||_2^2 + ||v||_2^2)^j - t^{j-1}||v||_{2j}^{2j} j(t||\nabla v||_2^2 + ||v||_2^2)^{j-1}||\nabla v||_2^2}{(t||\nabla v||_2^2 + ||v||_2^2)^{2j}} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \frac{t^{j-2}||v||_{2j}^{2j}}{(t||\nabla v||_2^2 + ||v||_2^2)^{j+1}} \left(-t||\nabla v||_2^2 + (j-1)||v||_2^2\right)
\end{aligned}$$

e, consequentemente

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J(w_t)\bigg|_{t=1} &\leq -\alpha||v||_2^2||\nabla v||_2^2 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\alpha^j}{(j-1)!}||v||_{2j}^{2j} \\
&= \alpha||v||_2^2||\nabla v||_2^2 \left[-1 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\alpha^{j-1}}{(j-1)!} \frac{||v||_{2j}^{2j}}{||v||_2^2||\nabla v||_2^2}\right]. \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

Pela desigualdade (3.31), com $\beta = 3\pi$, e por $||v||_{H^1(\mathbb{R}^2)} = 1$, vale

$$\frac{||v||_{2j}^{2j}}{||v||_2^2||\nabla v||_2^2} \leq C_{3\pi} \frac{j!}{(3\pi)^j}, \ \ j \geq 2.$$

Usando a relação anterior e $\dfrac{\alpha}{3\pi} < \dfrac{2}{3}$, obtém-se de (3.32),

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J(w_t)\bigg|_{t=1} &\leq \alpha||v||_2^2||\nabla v||_2^2\left[-1 + \alpha C_{3\pi}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\alpha^{j-2}}{(3\pi)^j}j\right] \\
&< \alpha||v||_2^2||\nabla v||_2^2\left[-1 + \alpha\frac{C_{3\pi}}{(3\pi)^2}\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{j-2}j\right] \\
&=: \alpha||v||_2^2||\nabla v||_2^2[-1 + \alpha C],
\end{aligned}$$

onde $C = \dfrac{C_{3\pi}}{(3\pi)^2}\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{j-2}j$. Consequentemente,

$$\frac{d}{dt}J(w_t)\bigg|., m_{t=1} \leq \alpha||v||_2^2||\nabla v||_2^2[-1 + \alpha C] < 0,$$

desde que $\alpha < 1/C$. Portanto, v não é um ponto crítico de J em M, se $\alpha < \min\left\{2\pi, \dfrac{1}{C}\right\}$. O que completa a prova.

■

Apêndice A

Concentração de Compacidade

Este capítulo trata de alguns casos clássicos de concentração de compacidade, conceitos e teoremas primordiais para demonstração da existência de uma função maximizante para $d_{N,\alpha}$, no caso $N = 2$, com expoente crítico.

A.1 Teoria Básica

Definição A.1. *Uma sequência (f_k) em $L^p(\Omega)$ converge fracamente para $f \in L^p(\Omega)$, quando*

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \int_\Omega f_k g dx = \int_\Omega f g dx,$$

para cada $g \in L^{p'}(\Omega)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$, e será denotada por

$$f_k \rightharpoonup f \ \text{ em } \ L^p(\Omega).$$

Teorema A.2 (Limitação de sequências fracamente convergentes)**.** *Assuma que $f_k \rightharpoonup f$ em $L^p(\Omega)$, então*

(i) (f_k) é limitada em $L^p(\Omega)$;

(ii) $||f||_{L^p(\Omega)} \leq \liminf_{k \to +\infty} ||f_k||_{L^p(\Omega)}$.

Em vista de (i), se $f_k \rightharpoonup f$ em $L^p(\Omega)$ e $g_k \to g$ em $L^{p'}(\Omega)(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$, então

$$\lim_{k \to +\infty} \int_\Omega f_k g_k dx = \int_\Omega f g dx.$$

Mais ainda, se $1 < p < +\infty$, $f_k \rightharpoonup f$ em $L^p(\Omega)$ e $||f||_p = \lim_{k \longrightarrow +\infty} ||f_k||_{L^p(\Omega)}$, então $f_k \to f$ fortemente em $L^p(\Omega)$.

Teorema A.3 (Compacidade Fraca)**.** *Considere $1 < p < +\infty$ e seja (f_k) uma sequência limitada em $L^p(\Omega)$. Então, existem uma subsequência f_{k_j} e uma função $f \in L^p(\Omega)$, com $f_{k_j} \rightharpoonup f$ em $L^p(\Omega)$.*

No caso $p = \infty$, diz-se que $(f_k) \subset L^\infty(\Omega)$ converge fracamente estrela para $f \in L^\infty(\Omega)$, e escreve-se

$$f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f \ \text{ em } \ L^\infty(\Omega),$$

desde que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega f_k g dx = \int_\Omega f g dx,$$

para cada $g \in L^1(\Omega)$.

Definição A.4. *Uma sequência $(\mu_k) \subset \mathcal{M}(\Omega)$ converge fracamente para $u \in \mathcal{M}(\Omega)$, e denota-se*

$$\mu_k \rightharpoonup \mu \ \text{ em } \ \mathcal{M}(\Omega),$$

quando

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega g d\mu_k = \int_\Omega g d\mu,$$

para cada $g \in C_c(\Omega)$.

Teorema A.5. *Suponha que $\mu_k \rightharpoonup \mu$ fracamente em $\mathcal{M}(\Omega)$. Então*

$$\limsup_{k\to\infty} \mu_k(K) \leq \mu(K),$$

para cada conjunto compacto $K \subset \Omega$, e

$$\mu(V) \leq \liminf_{k\to\infty} \mu_k(V),$$

para cada conjunto aberto $V \subset \Omega$.

Teorema A.6 (Compacidade Fraca para Medidas)**.** *Suponha que a sequência (μ_k) seja limitada em $\mathcal{M}(\Omega)$. Então existem uma subsequência (μ_{k_j}) e uma medida $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, com $\mu_{k_j} \rightharpoonup \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$.*

Observação A.7. *A terminologia acima é estendida para espaços de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$ dizendo que $f_k \rightharpoonup f$ em $W^{1,p}(\Omega)$, desde que $f_k \rightharpoonup f$ em $L^p(\Omega)$ e $\dfrac{\partial f_k}{\partial x_i} \rightharpoonup \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ em $L^p(\Omega)$, para cada $i \in \{1, \cdots, N\}$.*

A.2 Concentração de Compacidade

Teorema A.8 (Compacidade para Medidas). *Suponha que a sequência (μ_k) seja limitada em $\mathcal{M}(\Omega)$. Então (μ_k) é pré-compacta em $W^{-1,p}(\Omega)$, para cada $1 \leq p < 1^*$.*

Demonstração. Existe uma subsequência tal que $\mu_{k_j} \rightharpoonup \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$, para alguma medida $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$.

Considere $p' = \frac{p}{p-1}$ e $B = \{u \in W^{1,p'}(\Omega); ||u||_{1,p',\Omega} \leq 1\}$. Já que $1 \leq p < 1^*$, tem-se $p' > N$, e $\overline{B}^{||\cdot||_{\infty,\Omega}}$ é compacto em $C_c(\overline{\Omega})$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe uma coleção finita $\{\phi_i\}_{i=1}^{N(\varepsilon)} \subset C_c(\Omega)$, tal que

$$\min_{1\leq i\leq N(\varepsilon)} ||\phi - \phi_i||_{C(\overline{\Omega})} < \varepsilon,$$

para toda função $\phi \in B$. Assim, se $\phi \in B$,

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \phi d\mu_{k_j} - \int_\Omega \phi d\mu\right| &\leq \left|\int_\Omega \phi d\mu_{k_j} - \int_\Omega \phi_i d\mu_{k_j}\right| + \left|\int_\Omega \phi_i d\mu_{k_j} - \int_\Omega \phi_i d\mu\right| \\ &+ \left|\int_\Omega \phi_i d\mu - \int_\Omega \phi d\mu\right| \\ &\leq 2\varepsilon \sup_j |\mu_{k_j}|(\Omega) + \left|\int_\Omega \phi_i d\mu_{k_j} - \int_\Omega \phi_i d\mu\right|,\end{aligned}$$

para algum índice $1 \leq i \leq N(\varepsilon)$. Consequentemente,

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{\phi\in B} \left|\int_\Omega \phi d\mu_{k_j} - \int_\Omega \phi d\mu\right| = 0.$$

Portanto, $\mu_{k_j} \to \mu$ em $W^{-1,p}(\Omega)$. ■

Definição A.9 (p-Capacidade). *Sejam $K^p = \{f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}; f \geq 0, f \in L^{\frac{Np}{N-p}}\left(\mathbb{R}^N\right)$ e $\nabla f \in L^p\left(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N\right)\}$, então a p-capacidade de A é definida por*

$$Cap_p(A) = \inf\left\{\int |\nabla f|^p dx; f \in K^p, A \subset \{f \geq 1\}^\circ\right\},$$

para $A \subset \mathbb{R}^N$, onde $\{f \geq 1\}^\circ$ é o interior de $\{f \geq 1\}$.

Teorema A.10. *Suponha que a sequência (f_k) seja limitada em $W^{1,p}(\Omega)$ $(1 < p < N)$, onde Ω tem bordo $C^{1,1}$. Então existem uma subsequência (f_{k_j}) e uma função $f \in W^{1,p}(\Omega)$ tais que, para cada $1 \leq q < p$ e cada $\delta > 0$, existe um conjunto relativamente fechado $E_\delta \subset \Omega$, com*

$$f_{k_j} \to f \text{ uniformemente sobre } E_\delta \text{ e } Cap_q(\Omega - E_\delta) \leq \delta.$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha que $f_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, uma vez que e possível escolher um subconjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^N$, com Ω compactamente contido em V e estender cada f_k para $W_0^{1,p}(V)$. Passando, se necessário, a uma subsequência, pode-se supor $f_k \to f$ em $L^p(\Omega)$, para alguma $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Fixe $\delta, \varepsilon > 0$ e seja $E_\varepsilon^k := \{x \in \Omega; |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. Escreva $g_\varepsilon^k := \frac{2}{\varepsilon}\sup\{|f_k - f| - \frac{\varepsilon}{2}, 0\}$, logo, $g_\varepsilon^k \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $g_\varepsilon^k \geq 1$ sobre E_ε^k. Além disso,

$$
\begin{aligned}
Cap_q(E_\varepsilon^k) &\leq C\int_\Omega |\nabla g_\varepsilon^k|^q dx \\
&\leq C_1\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^q |\{|f_k - f| > \frac{\varepsilon}{2}\}|^{1-\frac{q}{p}}\left(\int_\Omega |\nabla f_k|^p + |\nabla f|^p\right)^{\frac{q}{p}} \\
&\leq C_2(\varepsilon)||f_k - f||_{L^p(\Omega)}^{p-q}.
\end{aligned}
$$

Escolha uma subsequência (f_{k_j}), tal que $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} ||f_{k_j} - f||_{L^p(\Omega)}^{p-q} < \infty$. Escreva $F_i^l := \displaystyle\bigcup_{j=l}^{\infty} E_{\frac{1}{i}}^{k_j}$, então,

$$
\begin{aligned}
Cap_q(F_i^l) &\leq \sum_{j=l}^{\infty} Cap_q(E_{\frac{1}{i}}^{k_j}) \\
&\leq C_1(i)\sum_{j=l}^{\infty} ||f_{k_j} - f||_{L^p(\Omega)}^{p-q} \\
&\leq \frac{\delta}{2^{i+l(i)}}.
\end{aligned}
$$

Como $Cap_q(E) = \inf\{Cap_q(V); V \supset E, V \text{ aberto}\}$, é possível encontrar conjuntos abertos $G_i^l \supset F_i^l$ com $Cap_q(G_i^l) \leq \frac{\delta}{2^i}$. Finalmente, definindo $E_\delta := \Omega \setminus \cup_{i=1}^\infty G_i^{l(i)}$, tem-se que $Cap_q(\Omega - E_\delta) \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} Cap_q(G_{i=1}^{l(i)}) \leq \delta$ e $f_{k_j} \to f$ uniformemente sobre E_δ.

■

Definição A.11. *θ é dita concentrada sobre um conjunto de p-capacidade zero, se existem conjuntos abertos (V_i) em Ω, com*

$$\theta(\Omega - V_i) = 0 \;\; (i = 1, \cdots) \;\; e \;\; \lim_{i\to\infty} Cap_p(V_i) = 0.$$

Definição A.12. *θ é dita concentrada sobre um conjunto de medida Hausdorff H^s nula, se existem conjuntos abertos (V_i) em Ω e uma sequência $(\delta_i) \subset (0, \infty)$, com*

$$\theta(\Omega - V_i) = 0 \;\; (i = 1, \cdots), \;\; \lim_{i\to\infty} \delta_i = 0 \;\; e \;\; \lim_{i\to\infty} H_{\delta_i}^s(V_i) = 0.$$

A ideia informal é que θ está concentrada sobre o conjunto $C := \cap_{i=1}^\infty V_i$, com $Cap_p(C) = 0$ ou $H^s(C) = 0$. Além disso, é importante notar que θ não é apenas finitamente subaditiva. Por exemplo, considere $\Omega = (0,1)$, $f := 0$, e

$$f_k(x) := \begin{cases} k, & \text{se } \frac{1}{2} - \frac{1}{2k} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2k} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Então, θ está concentrada sobre $C = \{\frac{1}{2}\}$, $\theta(\Omega - V) = 0$, para cada conjunto aberto $V \supset C$, mas $\theta(\Omega - C) = 1$.

Lema A.13 (Brezis-Lieb)**.** *Suponha que $f_k \rightharpoonup f$ em $L^p(\Omega)(1 \leq p < \infty)$ e $f_k \to f$ em quase todo ponto. Então,*

$$\lim_{k\to\infty} (||f_k||^p_{L^p(\Omega)} - ||f_k - f||^p_{L^p(\Omega)}) = ||f||^p_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, vale

$$||a+b|^p - |a|^p| \leq \varepsilon |a|^p + C(\varepsilon, p)|b|^p,$$

onde $C(\varepsilon, p)$ depende apenas de ε e p. Defina

$$g_k^\varepsilon := (||f_k|^p - |f_k - f|^p - |f|^p| - \varepsilon |f_k - f|^p)^+,$$

então, $g_k^\varepsilon \to 0$ em quase todo ponto. Além disso,

$$\begin{aligned} g_k^\varepsilon &\leq (||f_k|^p - |f_k - f|^p| + |f|^p - \varepsilon |f_k - f|^p)^+ \\ &\leq (C(\varepsilon, p) + 1)|f|^p. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que $\lim\limits_{k\to\infty} \displaystyle\int_\Omega g_k^\varepsilon dx = 0$. Logo,

$$\limsup_{k\to\infty} \int_\Omega ||f_k|^p - |f_k - f|^p - |f|^p| dx \leq \varepsilon \limsup_{k\to\infty} \int_\Omega |f_k - f|^p dx \leq C \cdot \varepsilon,$$

onde C é uma constante.

Portanto, $\limsup\limits_{k\to\infty} \displaystyle\int_\Omega ||f_k|^p - |f_k - f|^p - |f|^p| dx = 0.$

■

Teorema A.14. *Suponha que $N \geq 3$, $f_k \to f$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $\nabla f_k \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla f$ em $L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$. Suponha ainda, que $|\nabla f_k|^2 \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ e $|f_k|^{2^*} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu$ em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$. Então:*

(*i*) *Existe um conjunto enumerável de índices J, valores distintos $(x_j)_{j\in J} \subset \mathbb{R}^N$ e pesos não negativos $\{\mu_j, \nu_j\}_{j\in J}$, tais que*

$$\nu = |f|^{2^*} + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j} \;\; e \;\; \mu \geq |\nabla f|^2 + \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j};$$

(ii) $\nu_j \leq C_2^{2^*} \mu_j^{\frac{2^*}{2}}$ $(j \in J)$;

(iii) *se* $f \equiv 0$ *e* $\nu(\mathbb{R}^N)^{\frac{1}{2^*}} \geq C_2 \mu_j(\mathbb{R}^N)^{\frac{1}{2}}$, *então* ν *está concentrada em um único ponto.*

Aqui C_2 *é a constante ótima da Desigualdade Gagliardo-Nirenberg-Sobolev.*

Demonstração. Suponha, primeiramente, que $f \equiv 0$, considerando $\phi \in C_c(\mathbb{R}^N)$, deduz-se, pela imersão de Sobolev, que

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\phi f_k|^{2^*} dx\right)^{\frac{1}{2^*}} &\leq C_2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\phi f_k)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C_2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\phi \nabla f_k|^2 + 2 f_k \phi \nabla f_k \cdot \nabla \phi + |f_k \nabla \phi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Visto que, $f_k \to f \equiv 0$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $|\nabla f_k|^2 \rightharpoonup \mu$ e $|f_k|^{2^*} \rightharpoonup \nu$ em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$, daí

$$\left(\int_\Omega |\phi|^{2^*} d\nu\right)^{\frac{1}{2^*}} \leq C_2 \left(\int_\Omega |\phi|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{A.1}$$

Por aproximação, obtém-se

$$\nu(E)^{\frac{1}{2^*}} \leq C_2 \mu(E)^{\frac{1}{2}}, \tag{A.2}$$

onde $E \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto de Borel. Agora, já que μ é uma medida finita, o conjunto $\Gamma := \{x \in \mathbb{R}^N; \mu(\{x\}) > 0\}$ é enumerável. Logo, é possível escrever $\Gamma = \{x_j\}_{j\in J}$, $u_j \equiv \mu(\{x_j\})(j \in J)$, de modo que $\mu \geq \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j}$.

A desigualdade $(A.2)$ implica que, a medida ν é absolutamente contínua com respeito a medida μ. Consequentemente, pelo Teorema de Radon-Nikodyn, existe uma função $D_\mu \nu \in L^1(\mathbb{R}^N)$, que

$$\nu(E) = \int_E D_\mu \nu \, d\mu, \tag{A.3}$$

onde E é um conjunto de Borel. Segue, pelo Teorema da Diferenciação de Lebesque,

$$D_\mu \nu(x) = \lim_{r\to 0} \frac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r))},$$

μ q.t.p, para $x \in \mathbb{R}^N$. Além disso,

$$\frac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r))} \leq C_2^{2^*} \mu(B(x,r))^{2/N-2},$$

desde que, $\mu(B(x,r)) \neq 0$. Assim, $D_\mu \nu = 0$ μ q.t.p sobre $\mathbb{R}^N \backslash \Gamma$. Agora, basta definir $\nu_j := D_\mu \nu(x_j)\mu_j$ e concluir as afirmações (i) e (ii).

Supondo a hipótese da afirmação (iii), com a adição da desigualdade $(A.2)$, tem-se $\nu(\mathbb{R}^N)^{1/2^*} = C_2 \mu(\mathbb{R}^N)^{1/2}$. Já $(A.1)$, juntamente com a Desiguadade de Hölder, implicam

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^{2^*} d\nu \right)^{1/2^*} \leq C_2 \mu(\mathbb{R}^N)^{1/N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^{2^*} d\mu \right)^{1/2^*}.$$

Consequentemente, $\nu \leq C_2^{2^*} \mu(\mathbb{R}^N)^{2/N-2}\mu$. Além disso, observe que

$$\begin{aligned}
\nu(E) &= \nu(\mathbb{R}^N) - \nu(\mathbb{R}^N \backslash E) \\
&\geq C_2^{2^*} \mu(\mathbb{R}^N)^{N/N-2} - C_2^{2^*} \mu(\mathbb{R}^N)^{2/N-2} \mu(\mathbb{R}^N \backslash E) \\
&= C_2^{2^*} \mu(\mathbb{R}^N)^{\frac{2}{N-2}} \mu(E).
\end{aligned}$$

Então, $\nu = C_2^{2^*} \mu(\mathbb{R}^N)^{2/N-2}\mu$. Através da desigualdade $(A.1)$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^{2^*} d\nu \right)^{1/2^*} \nu(\mathbb{R}^N)^{1/N} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^2 d\nu \right)^{1/2}$$

e, então, $\nu(E)^{1/2^*} \nu(\mathbb{R}^N)^{\frac{1}{N}} \leq \nu(E)^{1/2}$, para cada conjunto E de Borel. Portanto, ν esta concentrada em um único ponto.

Suponha, agora, f não identicamente nula e escreva $g_k = f_k - f$. Então,

$$|\nabla g_k|^2 = |\nabla f_k|^2 - 2\nabla f_k \cdot \nabla f + |\nabla f|^2 \overset{*}{\rightharpoonup} \mu - |\nabla f|^2 \text{ em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$$

e

$$|g_k|^{2^*} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu - |f|^{2^*} \text{ em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N).$$

Aplicando os argumentos anteriores, para a sequência (g_k) e o Lema de Brezis-Lieb, a demonstração segue.

∎

Teorema A.15 (P-H.Lions)**.** *Sejam $N \geq 2$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e limitado. Considere (u_n) uma sequência em $W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega),\ ||\nabla u_n||_{L^N(\Omega)} \leq 1 \text{ e } |\nabla u_n|^N \overset{*}{\rightharpoonup} \mu \text{ em } \mathcal{M}(\overline{\Omega}), \tag{A.4}$$

para algum $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ *e* $\mu \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$. *Então, vale apenas uma das alternativas:*

(i) $u = 0$ *e* $\mu = \delta_{x_0}$, *para algum* $x_0 \in \overline{\Omega}$. *Neste caso,*

$$e^{\alpha_N |u_n|^{\frac{N}{N-1}}} \stackrel{*}{\rightharpoonup} c\delta_{x_0}, \tag{A.5}$$

para algum $c \in [0, \infty)$;

(ii) $u = 0$ *e* μ *não está concentrada em um único ponto. Neste caso, existe um* $p > 1$, *tal que*

$$e^{\alpha_N p |u_n|^{\frac{N}{N-1}}} \text{ está limitada em } L^1(\Omega); \tag{A.6}$$

(iii) $u \neq 0$. *Neste caso,*

$$e^{\alpha_N p |u_n|^{\frac{N}{N-1}}} \text{ é limitada em } L^1(\Omega), \tag{A.7}$$

para todo $p < P$, *onde*

$$P = \begin{cases} \infty, & se \ ||\nabla u||_{L^N(\Omega)} = 1 \\ \dfrac{1}{\left(1 - ||\nabla u||^N_{L^N(\Omega)}\right)^{\frac{1}{N-1}}}, & se \ ||\nabla u||_{L^N(\Omega)} < 1 \end{cases}. \tag{A.8}$$

Além disso, esta conclusão falha, se $p \geq P$.

Finalmente, em ambos os casos (ii) *e* (iii),

$$\int_\Omega e^{\alpha_N |u_n|^{\frac{N}{N-1}}} dx \to \int_\Omega e^{\alpha_N |u|^{\frac{N}{N-1}}} dx, \tag{A.9}$$

a menos de subsequência.

Demonstração. Primeiramente, note que, a menos de subsequência, vale $u_n \to u$ q.t.p sobre Ω.

Admita as hipóteses do caso (i), isto é, $u = 0$ e $u = \delta_{x_0}$ para algum $x_0 \in \overline{\Omega}$. Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo

$$\varphi = \begin{cases} 1, & \text{em } \Omega \backslash B(x_0, \eta) \\ 0, & \text{em } B(x_0, \eta/2) \end{cases},$$

para algum $\eta > 0$. Pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla(\varphi u_n)|^N dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\varphi \nabla u_n + u_n \nabla \varphi|^N dx = \int_\Omega |\varphi|^N d\delta_{x_0} = 0,$$

já que $u_n \to 0$ em $L^N(\Omega)$. Daí, existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_{\Omega \setminus B(x_0,\eta)} \exp\left(\alpha_N(1+\delta)|v_n|^{\frac{N}{N-1}}\right)dx \leq \int_{\Omega} \exp\left(\alpha_N \frac{|\varphi u_n|^{\frac{N}{N-1}}}{||\nabla \varphi u_n||_{L^N(\Omega)}}\right)dx \leq C(\Omega). \quad \text{(A.10)}$$

Por $(A.10)$ e o Teorema da Convergência de Vitali, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega \setminus B(x_0,\eta)} \left(\exp\left(\alpha_N|v_n|^{\frac{N}{N-1}}\right) - 1\right) dx = 0.$$

Usando que, a menos de subsequência, vale

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \left(\exp\left(\alpha_N|u_n|^{\frac{N}{N-1}}\right) - 1\right) dx = c,$$

para algum $c > 0$, então

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B(x_0,\eta)} \left(\exp\left(\alpha_N|u_n|^{\frac{N}{N-1}}\right) - 1\right) dx = c. \quad \text{(A.11)}$$

Agora, fixe uma função arbitrária $\psi \in C(\overline{\Omega})$ e $\varepsilon > 0$. Existe $\eta > 0$ tal que

$$|\psi(x) - \psi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2\max\{c,1\}}, \text{ para } x \in \overline{\Omega} \text{ e } |x - x_0| < \eta.$$

Segue que

$$\left|\int_{\Omega} \psi d(c\delta_{x_0}) - \int_{\Omega} \psi \left(\exp\left(\alpha_N|u_n|^{\frac{N}{N-1}}\right) - 1\right) dx\right| \leq \int_{\Omega \setminus B(x_0,\eta)} |\psi| \left(\exp\left(\alpha_N|v_n|^{\frac{N}{N-1}}\right) - 1\right) dx$$
$$+ \int_{B(x_0,\eta)} |\psi - \psi(x_0)| \left(\exp\left(\alpha_N|v_n|^{\frac{N}{N-1}}\right) - 1\right) dx$$
$$+ |\psi(x_0)| \left|c - \int_{B(x_0,\eta)} \left(\exp\left(\alpha_N|v_n|^{\frac{N}{N-1}}\right) - 1\right) dx\right| =: I_1(n,\eta) + I_2(n,\eta) + I_3(n,\eta).$$

Observe que, por $(A.11)$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $I_3(n,\eta) < \varepsilon$, para todo $n \geq n_1$, e

$$I_2(n,\eta) \leq \frac{\varepsilon}{2\max\{c,1\}} \int_{B(x_0,\eta)} \left(\exp\left(\alpha_N|v_n|^{\frac{N}{N-1}}\right) - 1\right) dx \to \frac{c\varepsilon}{2\max\{c,1\}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, existe n_2 tal que, para $n \geq n_2$, tem-se $I_2(n,\eta) < \varepsilon$. Além disso, existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_3$, tem-se $I_3(n,\eta) < \varepsilon$.

Logo, está provado o caso (i).

Para o caso (ii), suponha que $||\nabla u_n||_{L^N(\Omega)} = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Já que, μ não está concentrada em um único ponto, existe um conjunto compacto $A \subset \overline{\Omega}$ tal que $0 < \mu(A) < 1$. Além disso, como μ é uma medida de Radon, existe $\eta > 0$, tal que $0 < \mu(A + B(0,\eta)) < 1$.

Por conseguinte, considere $\varphi_1, \varphi_2 \in C^{\infty}(\Omega)$ satisfazendo $0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 1$, tal que $\varphi_1 = 1$ sobre $A + B(0,\eta)$, $\varphi_1 = 0$ sobre $\Omega \backslash (A + B(0, 2\eta))$, $\varphi_2 = 1$ sobre $\Omega \backslash (A + B(0,\eta))$ e $\varphi_2 = 0$ sobre A. Usando o mesmo argumento do caso (i), obtém-se

$$\int_{\Omega} |\nabla(\varphi_1 u_n)|^N dx \to \int_{\Omega} |\varphi_1|^N d\mu \leq \mu(A + B(0,\eta)) < 1$$

e

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi_2 u_n|^N dx \to \int_{\Omega} |\varphi_2|^N d\mu \leq \mu(\Omega \backslash A) < 1.$$

Assim, existe $\delta > 0$ tal que, se n é suficientemente grande, então

$$||\nabla((1+\delta)^{\frac{N-1}{N}} \varphi_1 u_n)||_{L^N(\Omega)} < 1 \text{ e } ||\nabla((1+\delta)^{\frac{N-1}{N}} \varphi_2 u_2)||_{L^N(\Omega)} < 1.$$

Logo, via Desigualdade de Trudinger-Moser, existe $\delta > 0$, tal que

$$\int_{A+B(0,\eta)} \exp\left(\alpha_N (1+\delta) |u_n|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq \int_{\Omega} \exp\left(\alpha_N \left(\frac{|\varphi_1 u_2|}{||\nabla(\varphi_1 u_n)||_{L^N(\Omega)}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq C(\Omega) \tag{A.12}$$

e

$$\int_{\Omega \backslash (A+B(0,\eta))} \exp\left(\alpha_N (1+\delta) |u_n|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq \int_{\Omega} \exp\left(\alpha_N \left(\frac{|\varphi_2 u_2|}{||\nabla(\varphi_2 u_n)||_{L^N(\Omega)}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq C(\Omega). \tag{A.13}$$

Combinando $(A.12)$ e $(A.13)$,

$$\int_{\Omega} \exp\left(\alpha_N (1+\delta) |u_n|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq C(\Omega),$$

onde C é uma constante. Logo, $(A.6)$ ocorre para $1 \leq p < 1 + \delta$.

Para o caso (iii), primeiramente, considere $0 < ||\nabla u||_{L^N(\Omega)} < 1$ e proceda por contradição. Suponha que exista uma sequência $(u_n) \subset W_0^{1,N}(\Omega)$ satisfazendo $(A.4)$, para que $(A.7)$ falhe para algum $p_1 < P$. Assim, já que $u_n^{\star}$ e u_n são equimensuráveis para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\Omega^{\star}} e^{\left(\alpha_N p_1 |u_n^{\star}|^{\frac{N}{N-1}}\right)} dx = \int_{\Omega} e^{\left(\alpha_N p_1 |u_n|^{\frac{N}{N-1}}\right)} dx \to \infty, \tag{A.14}$$

quando $n \to \infty$.

Pela Desigualdade de Pólya-Szegö, tem-se

$$||\nabla u_n^\star||_{L^N(\Omega^\star)} \leq ||\nabla u_n||_{L^N(\Omega)} \leq 1, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{A.15}$$

Já que $u_n^\#(\mathcal{L}_N(\Omega)) = 0$, então

$$u_n^\#(s) = \int_s^{\mathcal{L}_N(\Omega)} -\frac{du_n^\#}{dr}(r)dr, \text{ para todo } s \in (0, \mathcal{L}_N(\Omega)). \tag{A.16}$$

Logo, via $(A.15)$, Desigualdade de Hölder e Mudança de Coordenadas Polares,

$$\begin{aligned}
u_n^\#(s) &= \int_s^{\mathcal{L}_N(\Omega)} N^{\frac{N-1}{N}} \omega_{N-1}^{\frac{1}{N}} \left(-\frac{du_n^\#}{dr}(r)\right) r^{\frac{N}{N-1}} \frac{1}{N^{\frac{N-1}{N}} \omega_{N-1}^{\frac{1}{N}} r^{\frac{N-1}{N}}} dr \\
&\leq \left(\int_s^{\mathcal{L}_N(\Omega)} \left(N^{\frac{N-1}{N}} \omega_{N-1}^{\frac{1}{N}} \left|\frac{du_n^\#}{dr}(r)\right|\right)^N r^{N-1} dr\right)^{\frac{1}{N}} \left(\int_s^{\mathcal{L}_N(\Omega)} \frac{1}{N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}} \frac{1}{r} dr\right)^{\frac{N-1}{N}} \\
&\leq \left(\int_{\left(\frac{Ns}{\omega_{N-1}}\right)^{\frac{1}{N}}}^{\left(\frac{N\mathcal{L}_N(\Omega)}{\omega_{N-1}}\right)^{\frac{1}{N}}} \omega_{N-1} r^{N(N-1)} \left|\frac{du_n^\#}{dr}\left(\frac{\omega_{N-1}}{N} r^N\right)\right|^N \omega_{N-1} r^{N-1} dr\right)^{\frac{1}{N}} \\
&\cdot \left(\frac{1}{N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}} \log\left(\frac{\mathcal{L}_N(\Omega)}{s}\right)\right)^{\frac{N}{N-1}} \\
&\leq \left(\int_{\left(\frac{Ns}{\omega_{N-1}}\right)^{\frac{1}{N}}}^{\left(\frac{N\mathcal{L}_N(\Omega)}{\omega_{N-1}}\right)^{\frac{1}{N}}} |\nabla u_n^\star{}_{|\{|x|=r\}}|^N \omega_{N-1} r^{N-1} dr\right)^{\frac{1}{N}} \left(\frac{1}{N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}} \log\left(\frac{\mathcal{L}_N(\Omega)}{s}\right)\right)^{\frac{N}{N-1}} \\
&\leq ||\nabla u_n^\star||_{L^N(\Omega^\star)} \left(\frac{1}{N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}} \log\left(\frac{\mathcal{L}_N(\Omega)}{s}\right)\right)^{\frac{N}{N-1}} \\
&\leq \left(\frac{1}{N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}} \log\left(\frac{\mathcal{L}_N(\Omega)}{s}\right)\right)^{\frac{N}{N-1}},
\end{aligned} \tag{A.17}$$

aqui $s \in (0, \mathcal{L}_N(\Omega))$.

Agora, fixe $p_2 \in (p_1, P)$. Observe que, para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ e todo $t_0 \in (0, \mathcal{L}_N(\Omega))$, existe $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, $t \in (0, t_0)$, tal que

$$u_n^\#(t) \geq \left(\frac{1}{p_2 N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}} \log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{\frac{N-1}{N}}. \tag{A.18}$$

De fato, por contradição, suponha que exista $n_0 \in \mathbb{N}$ e $t_0 \in (0, \mathcal{L}_N(\Omega))$, tal que

$$u_n^{\#}(t) < \left(\frac{1}{p_2 N \omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}} \log\left(\frac{1}{t}\right) \right)^{\frac{N-1}{N}}, \text{ para todo } t \in (0, t_0) \text{ e } n \geq n_0.$$

Então, pela estimativa $(A.17)$ e sendo $p_1 < p_2$,

$$\int_0^{\mathcal{L}_N(\Omega)} e^{\left(N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}} p_1 |u_k^{\#}|^{\frac{N}{N-1}}\right)} dt \leq \int_0^{t_0} \frac{1}{t^{\frac{p_1}{p_2}}} dt + \int_{t_0}^{\mathcal{L}_N(\Omega)} \left(\frac{\mathcal{L}_N(\Omega)}{t_0}\right)^{p_1} dt < \infty,$$

contradizendo $(A.14)$.

Assim, a menos de subsequência, existe (t_n), tal que

$$u_n^{\#}(t_n) \geq \left(\frac{1}{p_2 N \omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}} \log\left(\frac{1}{t_n}\right) \right)^{\frac{N-1}{N}} \text{ e } t_n \leq \frac{1}{n} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{A.19}$$

Agora, dado $L > 0$, defina as funções truncamento $T^L(u)$ e $T_L(u)$ em Ω por

$$T^L(u) = \min\{|u|, L\} sign(u) \text{ e } T_L(u) = u - T^L(u).$$

Analogamente, defina as funções $T^L(u_n)$ e $T_L(u_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Observe que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^N dx = \int_\Omega |\nabla (T^L(u_n))| dx + \int_\Omega |\nabla (T_L(u_n))|^N dx,$$

$$T^L(u_n) \to T^L(u) \text{ q.t.p sobre } \Omega \text{ e } T_L(u_n) \to T_L(u) \text{ q.t.p sobre } \Omega. \tag{A.20}$$

Além disso, $(T^L(u_k))$ é uma sequência limitada em $W^{1,N}(\Omega)$. Logo, existe uma subsequência que converge fracamente em $W^{1,N}(\Omega)$. Já que ela converge em quase todo ponto para $T^L(u)$ sobre Ω, tem-se

$$T^L(u_n) \rightharpoonup T^L(u) \text{ em } W^{1,N}(\Omega) \text{ e } T_L(u_n) \rightharpoonup T_L(u) \text{ em } W^{1,N}(\Omega).$$

Por conseguinte, fixe $p_3 \in (p_2, P)$ e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, escolha $L > 0$, tal que

$$\frac{1 - \int_\Omega |\nabla u|^N dx}{1 - \int_\Omega |\nabla (T^L(u))|^N dx} > \left(\frac{p_3}{P}\right)^{N-1}. \tag{A.21}$$

Por $(A.19)$, passando a uma subsequência se necessário, é possível supor que $u_n^{\#}(t_n) > L$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela continuidade à esquerda de $u_n^{\#}$, existe $s_n \in (t_n, \mathcal{L}_N(\Omega))$, tal que

$u_n^{\#}(s_n) = L$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, devido a $(A.19)$ e à Desigualdade de Hölder e via os mesmos argumentos na prova de $(A.17)$, obtém-se

$$\left(\frac{1}{p_2 N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}}\log\left(\frac{1}{t_n}\right)\right)^{\frac{N-1}{N}} - L \le u_n^{\#}(t_n) - u_n^{\#}(s_n) = \int_{t_n}^{s_n} -\frac{du_n^{\#}}{dt}(t)dt$$
$$\le ||\frac{du_n^{\#}}{dt}N^{\frac{N-1}{N}}\omega_{N-1}^{\frac{1}{N}}t^{\frac{N-1}{N}}||_{L^N(t_n,s_n)}\frac{1}{N^{\frac{N-1}{N}}\omega_{N-1}^{\frac{1}{N}}}\log\left(\frac{\mathcal{L}_N(\Omega)}{t_n}\right),\ \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, para n suficientemente grande,

$$\left(\frac{1}{p_3}\right)^{\frac{N-1}{N}} \le \left\|\frac{du_n^{\#}}{dt}N^{\frac{N-1}{N}}\omega_{N-1}^{\frac{1}{N}}t^{\frac{N-1}{N}}\right\|_{L^N(t_n,s_n)} \le \left\|\frac{du_n^{\#}}{dt}N^{\frac{N-1}{N}}\omega_{N-1}^{\frac{1}{N}}t^{\frac{N-1}{N}}\right\|_{L^N(0,s_n)}. \tag{A.22}$$

Por $(A.15)$ e pela definição de $T_L(u_n)$, tem-se

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(T_L(u_n))|^N dx &\ge \int_{\Omega^\star}|\nabla((T_L(u_n))^\star)|^N dx = \int_{\Omega^\star}|\nabla(T_L(u_k^\star))|^N dx\\ &= \left\|\frac{du_n^{\#}}{dt}N^{\frac{N-1}{N}}\omega_{N-1}^{\frac{1}{N}}t^{\frac{N-1}{N}}\right\|_{L^N(0,s_n)}^N.\end{aligned} \tag{A.23}$$

Agora, usando $(A.23)$ e $(A.22)$, vale

$$\left(\frac{1}{p_3}\right)^{N-1} \le \int_\Omega |\nabla(T_L(u_n))|^N dx. \tag{A.24}$$

Consequentemente, segue de $(A.20)$ que

$$\int_\Omega |\nabla(T^L(u_n))|^N dx \le 1 - \left(\frac{1}{p_3}\right)^{N-1}.$$

1 A desigualdade anterior, a semi-continuidade inferior fraca da norma (em L^N) e a desigualdade $(A.21)$, produzem

$$p_3 \ge \frac{1}{\left(1 - \liminf\limits_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla(T^L(u_n))|^N dx\right)^{\frac{1}{N-1}}} \ge \frac{1}{\left(1 - \int_\Omega |\nabla(T^L(u))|^N dx\right)^{\frac{1}{N-1}}}$$
$$> \frac{p_3}{P}\frac{1}{\left(1 - \int_\Omega |\nabla u|^N dx\right)^{\frac{1}{N-1}}} = p_3,$$

o que constitui uma contradição.

No caso $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^N dx = 1$, a prova segue da mesma forma e serão destacadas apenas algumas diferenças. Dado qualquer $p_1 > 1$, fixe qualquer $p_2 > p_1$. Na parte final do argumento, tome $p_3 > p_2$ e, por Convergência Dominada, escolha $L > 0$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla(T^L(u))|^N dx > 1 - \left(\frac{1}{p_3}\right)^{N-1}.$$

Seja n suficientemente grande tal que $(A.22)$ é satisfeita. Isso implica que

$$\int_\Omega |\nabla(T^L(u_n))|^N dx \leq 1 - \left(\frac{1}{p_3}\right)^{N-1}.$$

Já que $T^L(u_n) \rightharpoonup T^L(u)$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$, por semi-continuidade inferior fraca da norma, tem-se

$$1 - \left(\frac{1}{p_3}\right)^{N-1} < \int_\Omega |\nabla(T^L(u))|^N dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla(T^L(u_n))|^N dx \leq 1 - \left(\frac{1}{p_3}\right)^{N-1},$$

uma contradição.

Agora, será mostrado que a limitação de p dado em (iii), não pode ser melhorada. Veja que, para todo $\alpha \in (0,1)$, existem uma sequência $(u_n) \in W_0^{1,N}(\Omega)$ e uma função $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$, tais que

$$||\nabla u_n||_{L^N(\Omega)} = 1, u_n \rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega), u_n \to u \text{ q.t.p sobre } \Omega,$$
$$||\nabla u||_{L^N(\Omega)} = \alpha \text{ e } \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \exp\left(\alpha_N \frac{1}{(1-\alpha^N)^{\frac{1}{N-1}}} |u_n|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx = \infty.$$

Sem perda de generalidade, assuma que $0 \in \Omega$. Sejam $R > 0$, tal que $\overline{B(R)} \subset \Omega$, e $\rho = R/3$ e considere a sequência $(v_n) \subset W_0^{1,N}(\Omega)$ definida por

$$v_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| \geq \rho \\ N^{\frac{1}{N}} \omega_{N-1}^{-\frac{1}{N}} \log\left(\frac{\rho}{|x|}\right) n^{-\frac{1}{N}}, & \text{se } |x| \in [\rho e^{-\frac{n}{N}}, \rho) \\ N^{\frac{1-N}{N}} \omega_{N-1}^{-\frac{1}{N}} n^{\frac{N-1}{N}}, & \text{se } |x| \in [0, \rho e^{-\frac{n}{N}}] \end{cases}.$$

Daí,

$$\int_{B(\rho)} |\nabla v_n|^N dx = \int_{\rho e^{-\frac{n}{N}}}^{\rho} \left(N^{\frac{1}{N}} \omega_{N-1}^{-\frac{1}{N}} \frac{1}{r} n^{-\frac{1}{N}}\right)^N \omega_{N-1} r^{N-1} dr = \frac{N}{n} \left[\log(r)\right]_{\rho e^{-\frac{n}{N}}}^{\rho} = 1.$$

Agora, defina $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ por

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| \geq \rho \\ 3A - \frac{3A}{R}|x|, & \text{se } |x| \in [2R/3, R) \\ A, & \text{se } |x| \in [0, 2R/3] \end{cases},$$

onde $A > 0$ é escolhido de modo que $||\nabla u||_{L^N(\Omega)} = \alpha$. Finalmente, defina

$$u_n = u + \left(1 - \alpha^N\right)^{\frac{1}{N}} v_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \exp\left(\alpha_N \frac{|u_n|^{\frac{N}{N-1}}}{(1-\alpha^N)^{\frac{1}{N-1}}}\right) dx &\geq \int_{B(\rho e^{-\frac{n}{N}})} \exp\left(\alpha_N \frac{|A + (1-\alpha^N)^{\frac{1}{N}} v_n|^{\frac{N}{N-1}}}{(1-\alpha^N)^{\frac{1}{N-1}}}\right) dx \\
&= \int_{B(\rho e^{-\frac{n}{N}})} \exp \alpha_N |C + v_n|^{\frac{N}{N-1}} dx \\
&= C^{'} e^{-n} \exp\left(\left(C^{''} + n^{\frac{N-1}{N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \to \infty,
\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. Aqui $C, C^{'}$ e $C^{''}$ são constantes positivas. Além disso, como ∇u e ∇v_n tem suportes disjuntos, vale

$$||\nabla u_n||_{L^N(\Omega)} = \int_{B(R)} |\nabla u|^N dx + (1-\alpha^N) \int_{B(R)} |\nabla v_n|^N dx = 1. \tag{A.25}$$

As outras propriedades da sequência (u_n) são facilmente verificadas.

■

Referências Bibliográficas

[1] ADACHI, S.; TANAKA, K. *Trudinger type inequalities in* $\mathbb{R}^N$ *and their best exponents.*, Proc. Am. Math. Soc., v. 128, n. 7, p. 2051-2057, 2000.

[2] ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J. F. *Sobolev Spaces*, Second Edition, New York, Academic Press, 2003. 317 p.

[3] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* New Jersey: Springer, 2010. 614 p.

[4] CAO, D. M. *Nontrivial solution of semilinear elliptic equation with critical expoent in* $\mathbb{R}^2$. Comm. Partial Differ. Equ., v. 17, n. 3-4), p. 407-435, 1992.

[5] CERNY, R.; CIANCHI, A.; HENCL, S. *Concentration-Compacteness Principles For Moser-Trudinger Inequalities: New Results And Proofs. Annali di Matematica Pura ed Applicata*, v. 192, n. 2, p. 225-243, Outubro 2011.

[6] CARLESON, L.; CHANG, S. Y. A. *On the existence of an extremal function for an inequality for an inequality of J. Moser.* Bull. Sci. Math., v. 110, n. 2, p. 113-127, 1986.

[7] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations.* Berkeley: American Mathematical Society, 1997. 664 p. 19 v.

[8] FERNANDEZ, Pedro Jesus. *Medida e Integração.* Rio de Janeiro: IMPA, 2007. 198 p.

[9] FLUCHER, M. *Extremal functions for the Trudinger-Moser inequality in 2 dimensions.* Comment. Math. Helv., v. 67, n. 3, p. 471-497, 1992.

[10] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Third Edition. New York: Springer, 1983. 532 p.

[11] ISHIWATA, M. *Existence and nonexistence of maximizers for variational problems associated with Trudinger-Moser type inequalities in* $\mathbb{R}^N$. Mathematische Annalen, v.351, n. 4, p. 781-804, 2010.

[12] KESAVAN, S. *Symmetrization and Applications*. Hong Kong: World Scientific, 2006. 162 p. 3 vol.

[13] LIONS, P. L. *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case I*. Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire, v. 1, n. 2, p. 109-145, 1984.

[14] LIONS, P. L.*The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case II*. Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire, v. 1, n. 4, p. 223-283, 1984.

[15] LIONS, P. L.*The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case I*. Rev. Math. Iberoamericana, v. 1, n. 1, p. 145-201, 1985.

[16] LIONS, P. L.*The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case II*. Rev. Math. Iberoamericana, v. 1, n. 2, p. 45-121, 1985.

[17] LI, Y.; RUF, B. *A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in* $\mathbb{R}^N$. Indiana Univ. Math.J., v. 57, n. 1, p. 451-480, 2008.

[18] MOSER, J. *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*. Indiana Uni. Math. J, v. 20, p. 1077-1092, 1970/1971.

[19] OGAWA, T. *A proof of Trudinger's inequality and its application to nonlinear Schodinger equations*. Nonlinear Anal., v. 14, n. 9, p. 765-769, 1990.

[20] RUF, B. *A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in* $\mathbb{R}^2$. J. Funct. Anal., v. 219, n. 2, p. 340-367, 2005.

[21] WEINSTEIN, M. I. *Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates*. commun. Math.Phys., v. 87, n. 4, p. 567-576, 1982/1983.

[22] WILLEM, M. *Minimax Theorems, Editora Birkhäuser*, 1996. 85 p. Volume 24.