UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

HENRIQUE MARTINS OLIVEIRA

Percolação Bootstrap em Árvores Homogêneas

Belo Horizonte
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

AUTORIZAÇÃO PARA PUBLICAÇÃO DE DISSERTAÇÃO EM FORMATO ELETRÔNICO

Na qualidade de titular dos direitos de autor, **AUTORIZO** o Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG a reproduzir, inclusive em outro formato ou mídia e através de armazenamento permanente ou temporário, bem como a publicar na rede mundial de computadores (*Internet*) e na biblioteca virtual da UFMG, entendendo-se os termos "reproduzir" e "publicar" conforme definições dos incisos VI e I, respectivamente, do artigo 5º da Lei nº 9610/98 de 10/02/1998, a obra abaixo especificada, sem que me seja devido pagamento a título de direitos autorais, desde que a reprodução e/ou publicação tenham a finalidade exclusiva de uso por quem a consulta, e a título de divulgação da produção acadêmica gerada pela Universidade, a partir desta data.

Título: Percolação Bootstrap em Árvores Homogêneas

Autor(a): Henrique Martins Oliveira

Belo Horizonte, 08 de Março de 2016.

Henrique Martins Oliveira – Autor

Remy de Paiva Sanchis – Orientador

Roger William Câmara Silva – Co-Orientador

HENRIQUE MARTINS OLIVEIRA

Percolação Bootstrap em Árvores Homogêneas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Probabilidade.

Orientador: Prof. Remy de Paiva Sanchis

Co-Orientador: Prof. Roger William Câmara Silva

Belo Horizonte
2016

HENRIQUE MARTINS OLIVEIRA

Percolação Bootstrap em Árvores Homogêneas

Dissertação defendida no Programa de Pós–Graduação do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 08 de Março de 2016, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Remy de Paiva Sanchis
Instituto de Ciências Exatas – UFMG
Presidente da Banca

Prof. Roger William Câmara Silva
Instituto de Ciências Exatas – UFMG

Prof. Marcelo Richard Hilario
Instituto de Ciências Exatas – UFMG

Prof. Rodrigo Geraldo do Couto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas – UFOP

Agradecimentos

Agradeço imensamente a todas as pessoas que de alguma maneira tornaram possível a elaboração desse trabalho. Em particular, agradeço minha família pela confiança, carinho e por me terem possibilitado chegar até aqui. Agradeço aos amigos Danilo, Francisco e Thaís que dividem casa comigo e que por muitas vezes me deram coragem e incentivo para voltar a mesa e escrever mais uma página. Agradeço a meu orientador Remy de Paiva e a meu co-orientador Roger William pela paciência e empenho que tiveram ao sanar as inúmeras dúvidas que atravancaram meu caminho durante a escrita desse texto.

Agradeço, por fim, a Universidade Federal de Minas Gerais pela estrutura e acolhimento e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Oliveira, Henrique Martins. **Percolação Bootstrap em Árvores Homogêneas**. Belo Horizonte, 2016. 62p. Dissertação de Mestrado. Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais.

Dada uma árvore homogênea de grau $b+1$, $b \in \mathbb{N}$, e uma densidade inicial de sítios ocupados p, é sabido que existe um ponto p_f para o qual a configuração final do modelo de percolação bootstrap de limiar $2 \leq \theta \leq b$ nessa árvore apresenta duas fases distintas para quase toda configuração inicial: possuirá densidade de vértices ocupados menor que 1 se $p < p_f$ e estará completamente ocupada se $p > p_f$. Nesse trabalho, além de mostrarmos esse resultado, estudamos ainda um outro ponto crítico relacionado a esse modelo. Mostramos que existe um ponto $p_c \in (0, p_f)$ que também divide as possíveis configurações finais em dois casos distintos para quase todas as configurações iniciais desse modelo: se $p > p_c$, teremos a ocorrência de aglomerados infinitos de vértices ocupados e, se $p \leq p_c$, nenhum aglomerado inifinito é encontrado. Além disso, mostramos que na fase subcrítica $p < p_c$ a distribuição do tamanho dos aglomerados de sítios ocupados na configuração bootstrap final possui decaimento exponencial e que, ainda nessa configuração final, no valor crítico $p = p_c$ o tamanho esperado do aglomerado de sítios ocupados é infinito.

Palavras–chave

percolação bootstrap, probabilidade, árvores homogêneas, transição de fase.

Abstract

Oliveira, Henrique Martins. **Bootstrap Percolation On Homogeneous Trees**. Belo Horizonte, 2016. 62p. MSc. Dissertation. Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais.

Given a homogeneous tree with degree $b+1$, $b \in \mathbb{N}$, and a initial density p of occupied sites, it is known that there exists a point p_f for wich the the final configuration of the bootstrap percolation model with threshold $2 \leq \theta \leq b$ in this tree shows two distinct phases for almost every initial configuration: it will have density of occupied vertices less than 1 if $p < p_f$ and it will be entirely occupied if $p > p_f$. In this work, besides of showing this result, we study another critical point related to this model. We show that there exists a point $p_c \in (0, p_f)$ which also divides all possible final configurations in two distinct cases for almost every initial configuration of this model: if $p > p_c$, then we will have the occurrence of infinite clusters of occupied vertices and, if $p \leq p_c$, then no infinite cluster can be found. In addition, we show that in the subcritical phase $p < p_c$, the distribution of the occupied cluster size in the final bootstrapped configuration has an exponetial decay and show that, in this same final configuration, in the critial value $p = p_c$ the expected occupied cluster size is infinite.

Keywords

bootstrap percolation, probability, homogeneous trees

Sumário

Lista de Figuras

CAPÍTULO 1

Introdução

Inspirado por problemas encontrados na interseção da mecânica estatística e percolação, o modelo de Percolação Bootstrap mostra-se uma importante ferramenta para se estudar modelos dinâmicos que evoluem com uma regra determinística dada uma condição inicial aleatória. Em termos gerais, que serão formalizados mais adiante nesse capítulo, dado um grafo G, um modelo de Percolação Bootstrap com limiar $\theta \in \mathbb{N}$ é definido da seguinte maneira: distribuimos nesse grafo quais vértices, que chamaremos também de sítios, serão declarados ocupados seguindo uma medida produto de Bernoulli com parâmetro p. Feito isso, a cada instante de tempo numa escala discreta, os sítios que estavam ocupados permanecem ocupados e, dentre os que estavam vagos, serão ocupados aqueles que possuem pelo menos θ vizinhos ocupados.

Tais modelos, introduzidos no trabalho seminal [Chalupa, Leath e Reich 1979], foram amplamente estudados durante a década de 80 guiados pelo desejo de se entender qualitativamente como essa dinâmica se comporta quando eram variados os valores do parâmetro p. Mais especificamente, uma questão principal que se coloca naturalmente a esse modelo é a do seu comportamento crítico, *i.e.*, qual o menor valor de p a partir do qual, em algum momento, todos os sítios do grafo se tornarão ocupados seguindo a dinâmica descrita acima. Chamaremos esse valor de p_f. Devido a sua grande aplicabilidade nos campos já mencionados, esse modelo foi primeiramente estudado de maneira ampla por físicos e várias simulações foram feitas a fim de se determinar qual o valor de p_f. Tais simulações, aplicadas naturalmente apenas a sistemas finitos, indicavam que $p_f = 0,035 \pm 0,005$ para $d = 2$, onde d é a dimensão do sistema. Contudo, em [Enter 1987], van Enter, estudando as redes cúbicas $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 2$, mostrou que para $\theta = 2$, temos que $p_f = 0$ para todo $d \geq 2$ usando uma técnica devida a Straley. Ou seja, para qualquer densidade inicial que tenhamos, se o limiar do processo for 2, em algum momento toda a rede se tornará ocupada. Além disso, Schonmann, em [Schonmann 1992], estudando as mesmas redes, mostrou que $p_f = 0$ para $\theta = d$ e que $p_f = 1$ para $\theta > d$. A causa de tal discrepância de resultados é explorada em [Enter, Adler e Duarte 1990], e advém de uma hipótese incorreta acerca da chamada *escala do tamanho finito* que se supunha comportar como em outros modelos físicos.

Podemos ainda definir um outro ponto de interesse, que chamaremos de ponto crítico de percolação e denotaremos por p_c, da seguinte maneira. Dado um grafo G, diremos que dois vértices são vizinhos se eles compartilham uma aresta e chamaremos de caminho uma sequência $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ de sítios em que x_i e x_{i+1} são vizinhos $\forall 1 \leq i \leq n-1$. Dados dois vértices $x, y \in G$ diremos que eles estão conectados se existe um caminho composto inteiramente por sítios ocupados tal que $x_1 = x$ e $x_n = y$. Por fim, chamaremos de aglomerado de x, o conjunto de todos os vértices de G que estão conectados a x. Isso posto, de maneira análoga ao que fizemos no caso de p_f, definimos p_c como sendo o menor valor de p a partir do qual, com probabilidade positiva, o aglomerado de um dado sítio do grafo tenha tamanho infinito.

Este trabalho, que tem como base [Fontes e Schonmann 2008], é focado em um tipo específico de rede infinita, a saber, as árvores homogêneas. Nessa rede, podemos definir um processo de percolação bootstrap, que chamaremos de orientado, onde cada sítio possui um vizinho do qual não sofre influência, e um processo que chamaremos de não orientado, onde o estado de cada sítio é influenciado por todos seus primeiros vizinhos. Mostraremos no Capítulo 2 que, nessa rede, tanto no caso orientado quanto no não orientado, temos um valor de p_f não trivial e igual nos dois casos e daremos ainda as definições precisas dos diversos conceitos introduzidos aqui. No Capítulo 3 mostramos que existe uma fase intermediária entre o aglomerado infinito de um dado vértice da árvore e a ocupação total da rede, *i.e.*, mostramos que em ambos os casos orientado e não orientado o ponto crítico de percolação é estritamente positivo e estritamente menor que p_f embora assuma um valor distinto em cada um desses casos. Ao final do trabalho, um glossário de símbolos e uma breve discussão sobre os resultados mais elementares de processos de ramificação é disponibilizado nos apêndices.

CAPÍTULO 2

A Ocupação Total

2.1 Notações, Definições e Resultados Preliminares

Como já foi mencionado na introdução desse trabalho, estamos interessados em estudar árvores homogêneas que são definidas como um grafo conexo e acíclico em que todos os vértices possuem o mesmo grau. Denotaremos por $\mathbb{T}_b$ e $\vec{\mathbb{T}}_b$, respectivamente, as árvores homogêneas não orientada e orientada de grau $b+1$, com $b \geq 2$, e por $\mathbb{V}_b$ seu conjunto de vértices. Note que ambas as árvores possuem o mesmo conjunto de vértives e sua única diferença reside no fato de que na segunda orientamos os elos de modo que tenhamos b elos emergindo de cada vértice e 1 elo incidindo nele. Seja agora $x \in \mathbb{V}_b$. Definimos

$$\begin{aligned} N_x &:= \{y \in \mathbb{V}_b;\ \text{existem elos de } \mathbb{T}_b \text{ incidentes a } x \text{ que também são incidentes a } y\} \text{ e} \\ \vec{N}_x &:= \{y \in \mathbb{V}_b;\ \text{existem elos de } \vec{\mathbb{T}}_b \text{ incidindo em } y \text{ que emergem de } x\}, \end{aligned}$$

isto é, N_x e $\vec{N}_x$ denotam o conjunto de primeiros vizinhos do vértice x na árvore não-orientada e orientada, respectivamente. Note que o conjunto $N_x \backslash \vec{N}_x$ só possui um elemento. Denotaremos por x^- tal elemento.

Dado um vértice arbitrário de $\mathbb{V}_b$, vamos denotá-lo por R e fixá-lo como a raiz da árvore que estamos considerando. Além disso, considere um $x \in \mathbb{V}_b$. Note que se removermos x^- juntamente com todos os elos de $\mathbb{T}_b$ e $\vec{\mathbb{T}}_b$ que são incidentes a x^-, obtemos componentes conexas dentre as quais uma que contem x e outras que não contém. Denotaremos então por $\mathbb{T}_b^{+,x}$ e $\vec{\mathbb{T}}_b^{+,x}$ as componentes conexas que contêm x de $\mathbb{T}_b$ e $\vec{\mathbb{T}}_b$, respectivamente, e por $\mathbb{V}_b^{+,x}$ o cunjunto de vértices que é comum a ambas. Veja Figura 2.2. Perceba que tanto $\mathbb{T}_b^{+,x}$ quanto $\vec{\mathbb{T}}_b^{+,x}$ são árvores cuja raiz é o vértice x de modo que vamos escrever $\mathbb{T}_b^{+}$, $\vec{\mathbb{T}}_b^{+}$ e $\mathbb{V}_b^{+}$ em vez de $\mathbb{T}_b^{+,R}$, $\vec{\mathbb{T}}_b^{+,R}$ e $\mathbb{V}_b^{+,R}$, respectivamente. Se x e y são vértices da árvore, diremos que y está *abaixo* de x se $y \in \mathbb{V}_b^{+,x}$ e diremos que y está *acima* de x se $x \in \mathbb{V}_b^{+,y}$ e $y \notin \mathbb{V}_b^{+,x}$.

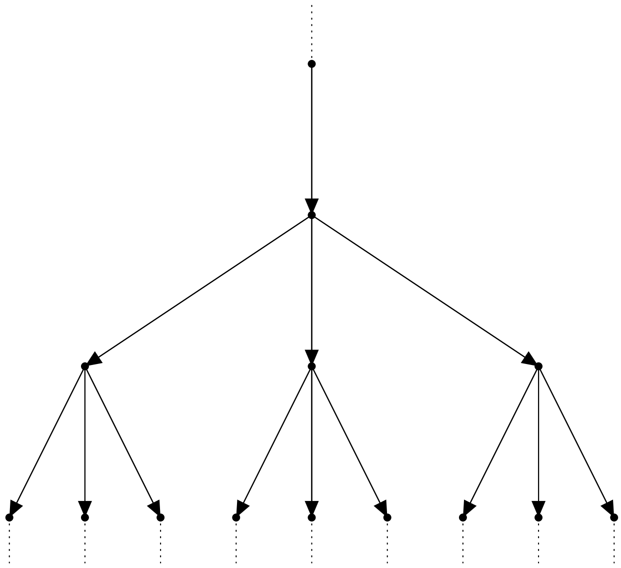

Figura 2.1: *Árvore orientada de grau* 4.

Cosidere agora $\Lambda \subseteq \mathbb{V}_b$ e o conjunto $\{0,1\}^{\Lambda}$. Chamaremos de *configuração* a todo elemento $\eta \in \{0,1\}^{\Lambda}$. Além disso, se $x \in \Lambda$, diremos que x está ocupado em η se $\eta(x) = 1$. Caso contrário, *i.e.*, se $\eta(x) = 0$, diremos que x está vago. Dado um subconjunto $\Lambda' \subseteq \Lambda$, se $\eta(x) = 1$, $\forall x \in \Lambda'$, diremos que Λ' está ocupado. De maneira análoga, Λ' está vago se $\eta(x) = 0$, $\forall x \in \Lambda'$.

Isso posto, já temos condições de definir de maneira formal alguns conceitos mencionados na Introdução. Começaremos definindo o modelo de percolação bootstrap de limiar $\theta \in \mathbb{N}$, com $2 \leq \theta \leq b$. Para isso, primeiramente, tomamos uma configuração inicial $\eta_0 \in \{0,1\}^{\mathbb{V}_b}$ que será tomada a partir do produto de variáveis aleatórias independentes:

$$\mathbb{P}_p = \prod_{x \in \mathbb{V}_b} \mu_x$$

onde μ_x é Bernoulli em $\{0,1\}$ de parâmetro p dada por

$$\mu_x(\eta_0(x) = 0) = 1 - p \quad \text{ e } \quad \mu_x(\eta_0(x) = 1) = p.$$

Essa configuração inicial será a mesma para o caso orientado e para o não-orientado, *i.e.*, $\eta_0 = \vec{\eta}_0$. Feito isso, para $n \geq 1$ e $x \in \mathbb{V}_b$, a evolução se dará da seguinte maneira:

$$\eta_n(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } \eta_{n-1}(x) = 1; \\ 1, \text{ se } \eta_{n-1}(x) = 0 \text{ e } \sum_{y \in N_x} \eta_{n-1}(y) \geq \theta; \\ 0, \text{ se } \eta_{n-1}(x) = 0 \text{ e } \sum_{y \in N_x} \eta_{n-1}(y) < \theta. \end{cases} \tag{2-1}$$

para o caso não-orientado e

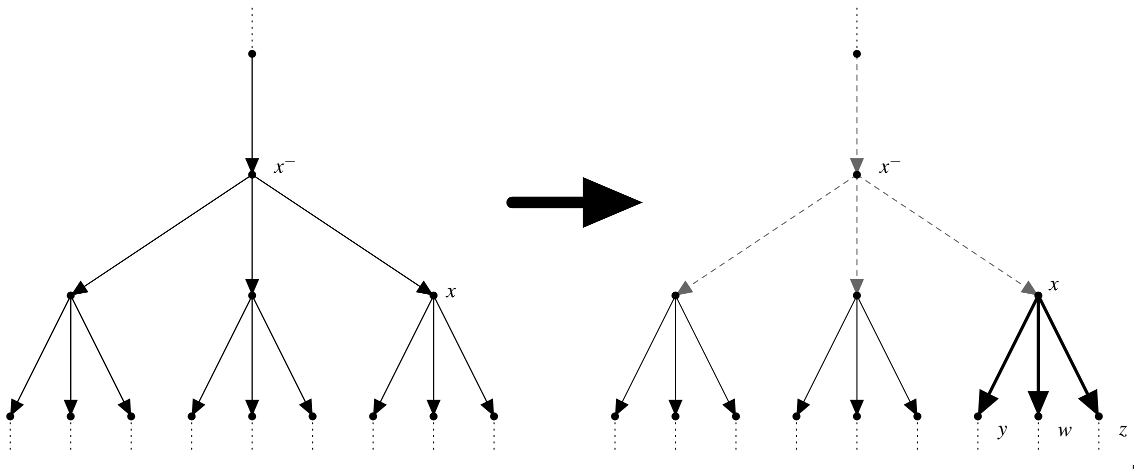

Figura 2.2: *Construção da árvore $\vec{\mathbb{T}}_b^{+,x}$ (em destaque). Note que $\{x,w,y,z\} \subset \mathbb{V}_b^{+,x}$ e que, nesse caso, $R = x$.*

$$\vec{\eta}_n(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } \vec{\eta}_{n-1}(x) = 1; \\ 1, \text{ se } \vec{\eta}_{n-1}(x) = 0 \text{ e } \sum_{y \in \vec{N}_x} \vec{\eta}_{n-1}(y) \geq \theta; \\ 0, \text{ se } \vec{\eta}_{n-1}(x) = 0 \text{ e } \sum_{y \in \vec{N}_x} \vec{\eta}_{n-1}(y) < \theta. \end{cases} \tag{2-2}$$

para o caso orientado.

Ou seja, um vértice que estava ocupado no instante $n-1$ continuará ocupado no instante n em ambos os casos. Agora, um vértice que estava vago no instante $n-1$ se tornará ocupado no instante n se, e somente se, ele possuir pelo menos θ vizinhos ocupados no instante $n-1$. Perceba, portanto, que tanto η_n quanto $\vec{\eta}_n$ são não-decrescentes em n e por isso

$$\eta_\infty := \lim_{n\to\infty} \eta_n \tag{2-3}$$

e

$$\vec{\eta}_\infty := \lim_{n\to\infty} \vec{\eta}_n \tag{2-4}$$

estão bem definidos. Chamaremos tanto η_∞ quanto $\vec{\eta}_\infty$ de *configuração final* e $(\eta_n)_{n\geq 0}$ e $(\vec{\eta}_n)_{n\geq 0}$ de *dinâmica bootstrap não-orientada* e *orientada*, respectivamente.

Perceba agora que o modelo evolui seguindo uma dinâmica determinística e, portanto, a única aleatoriedade presente nele está na configuração inicial η_0. Assim sendo, chamemos de $\mathbb{P}_p$ a medida de probabilidade associada a essa configuração. Podemos assim definir

$$\vec{p}_n = \vec{p}_n(p) = \mathbb{E}_p(\vec{\eta}_n(R)),\ p_n = p_n(p) = \mathbb{E}_p(\eta_n(R)),\ \text{para } n = 0,1,2,\ldots,\infty \tag{2-5}$$

onde $\mathbb{E}_p$ denota a esperança dessa medida de probabilidade. Ou seja, como $\eta_n(R)$ e $\vec{\eta}_n(R)$ só assumem o valor 0 ou 1, as quantidades definidas acima nos fornecem a probabilidade de que a origem esteja ocupada no instante n do processo no caso orientado e não-orientado. Perceba, portanto que temos

$$\vec{p}_0 = p_0 = p.$$

Além disso, um aumento no valor de p faz com que mais vértices estejam ocupados na configuração inicial, incluindo a raiz, donde concluimos que $\vec{p}_n$ e p_n são cresecentes em p. Por fim, observe que se um vértice está ocupado no instante n do processo então ele estará ocupado em todo instante $k \geq n$. Logo, por inclusão de eventos, a probabilidade de a raiz estar ocupada no instante n é menor ou igual à probabilidade de ela estar ocupada no instante $n+1$ e, assim, segue que $\vec{p}_n$ e p_n são cresecentes também em n.

Note que a escolha da raiz não é importante para a definição feita em (2-5). Isso se deve ao fato de que a medida $\mathbb{P}_p$ é invariante por automorfismos. Além disso, pela própria dinâmica do processo que foi definida, temos que ambos η_n e $\vec{\eta}_n$ são também invariantes por automorfismos $\forall n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$.

Voltemos então a atenção para os pontos críticos deste modelo que serão o cerne dos princiapis resultados apresentados nesse trabalho. Primeiramente definimos:

$$p_f := \inf\{p \in [0,1] : \mathbb{P}_p(\eta_\infty \equiv 1) = 1\} = \inf\{p \in [0,1] : p_\infty = 1\} \tag{2-6}$$

e

$$\vec{p}_f := \inf\{p \in [0,1] : \mathbb{P}_p(\vec{\eta}_\infty \equiv 1) = 1\} = \inf\{p \in [0,1] : \vec{p}_\infty = 1\}, \tag{2-7}$$

isto é, p_f e $\vec{p}_f$ denotam o ínfimo dos valores de p a partir do qual a dinâmica do processo bootstrap irá ocupar toda a rede. A última igualdade em ambos os casos advém do fato de que a escolha da raiz não é importante. Sendo assim, um valor de p para o qual $\vec{p}_\infty = 1$ implica que, no limite, qualquer vértice, com probabilidade 1, estará ocupado. Podemos assim explorar esse conceito com os primeiros resultados acerca do ponto p_f. Começamos pela

Proposição 2.2 *$\vec{p}_\infty$ é a menor solução no intervalo $[0,1]$ da equação*

$$x = f_p(x), \tag{2-8}$$

onde $f_p(x) = p + q\sum_{k=\theta}^{b} \binom{b}{k} x^k (1-x)^{b-k}$, com $q = 1-p$.

Prova. Para todo $n \geq 0$, as variáveis aleatórias $\{\vec{\eta}_n(x); x \in \vec{N}\}$ têm distribuição de Bernoulli com parâmetro $\vec{p}_n$ comum a todas e são independentes já que se x e y estão em $\vec{N}$ então $x \notin \vec{N}_y$ e $y \notin \vec{N}_x$. Logo, pela dinâmica do processo orientado, o estado de x

não afeta o estado de y e nem o de y afeta o de x. Também pela dinâmica do processo orientado, temos que essas variáveis são independetes do estado inicial da raiz, $\vec{\eta}_0(R)$. Segue da definição do processo que, para $n \geq 1$, $\vec{\eta}_n(R) = 1$ se, e somente se, ou $\vec{\eta}_0(R) = 1$ ou $\vec{\eta}_0(R) = 0$ mas $\sum_{x \in \vec{N}} \vec{\eta}_{n-1}(x) \geq \theta$. Sumarizando o que foi dito acima,

$$\begin{aligned} \vec{p}_n = \mathbb{P}_p(\vec{\eta}_n(R) = 1) &= p_0 + (1-p_0)\mathbb{P}_p\left(\sum_{x \in \vec{N}} \vec{\eta}_{n-1}(x) \geq \theta \,\middle|\, \vec{\eta}_0(R) = 0\right) \\ &= p + q\mathbb{P}_p\left(\sum_{x \in \vec{N}} \vec{\eta}_{n-1}(x) \geq \theta\right). \end{aligned}$$

Mas perceba que $\sum_{x \in \vec{N}} \vec{\eta}_{n-1}(x)$ possui distribuição binomial com b tentativas e probabilidade de sucesso em cada tentativa dada por $\vec{p}_{n-1}$. Logo,

$$\vec{p}_n = f_p(\vec{p}_{n-1}). \tag{2-9}$$

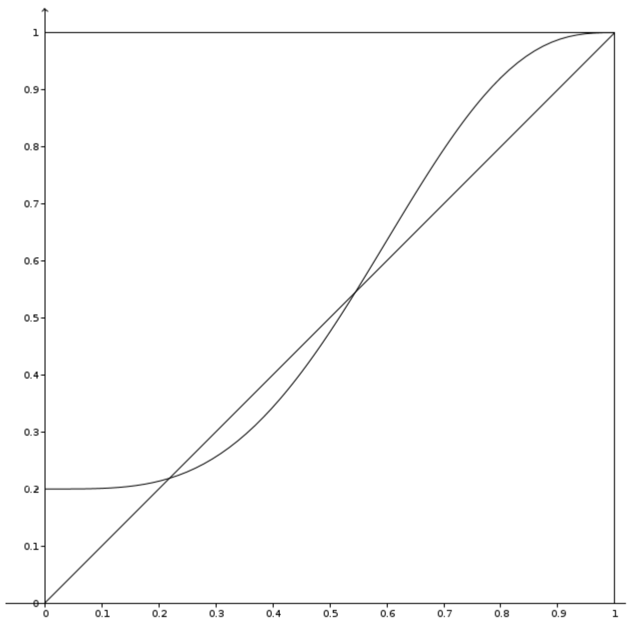

Figura 2.3: *Gráfico da função $f_p(x)$, com $p = 0,2$, e seus pontos de interseção com a reta x.*

Por fim, note que $\vec{p}_n$ é monótona em n e que $f_p(x)$ é continua e monotonamente crescente em x. Desse modo, temos que

$$\vec{p}_\infty = \lim_{n \to \infty} \vec{p}_n = \lim_{n \to \infty} f_p(\vec{p}_{n-1}) = f_p(\vec{p}_\infty).$$

O fato de ser essa a menor solução segue de (2-9). Pois, se formos tomando iterativamente os pontos $\vec{p}_n$ e $f_p(\vec{p}_{n-1})$, vemos que as soluções se acumulam no primeiro ponto de

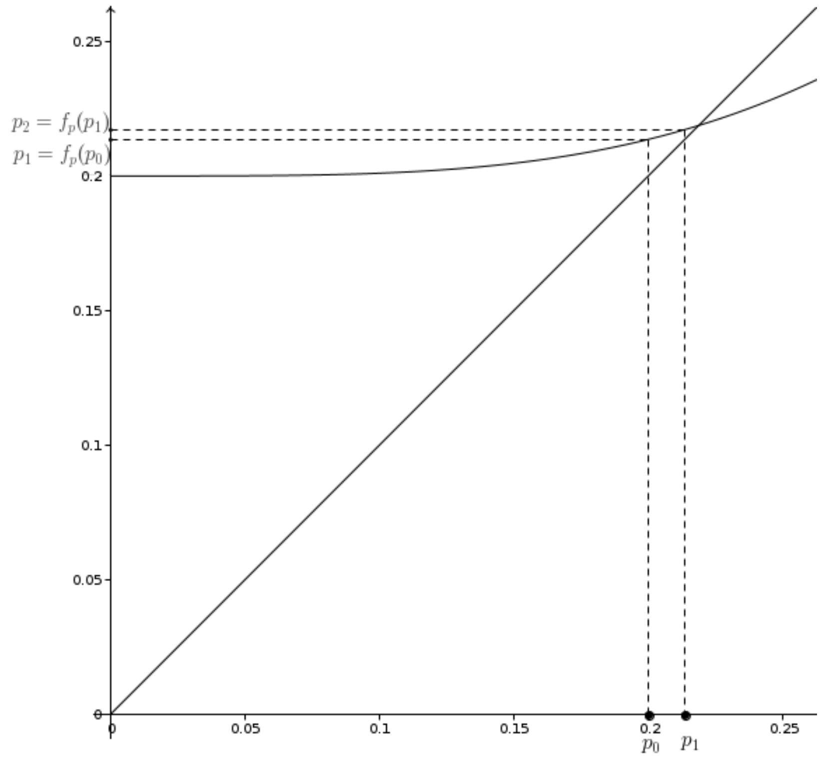

Figura 2.4: *Duas primeiras iterações do processo descrito pela Equação (2-9).*

interseção da função f_p com a reta $x = y$, não podem passar dali e, no limite, esse é o ponto $\vec{p}_\infty$. Veja Figura 2.4.

$\square$

Note agora que

$$f_p(1) = p + q = 1,$$

donde 1 é sempre solução de (2-8). Mostraremos que, para valores de p suficientemente próximos de 1 essa é a única solução. De fato, perceba que

$$\begin{aligned} p + q\sum_{k=\theta}^{b}\binom{b}{k}x^k(1-x)^{b-k} &= p + q\left[\sum_{k=0}^{b}\binom{b}{k}x^k(1-x)^{b-k} - \sum_{k=0}^{\theta-1}\binom{b}{k}x^k(1-x)^{b-k}\right] \\ &= p + q\left[1 - \sum_{k=0}^{\theta-1}\binom{b}{k}x^k(1-x)^{b-k}\right] \\ &= 1 - q\sum_{k=0}^{\theta-1}\binom{b}{k}x^k(1-x)^{b-k} \\ &= 1 - q(1-x)^b - q\sum_{k=1}^{\theta-1}\binom{b}{k}x^k(1-x)^{b-k}. \end{aligned} \tag{2-10}$$

Desse modo, temos que

$$\frac{d}{dx} f_p(x) = q(1-x)^{b-1} b - q \sum_{k=1}^{\theta-1} \binom{b}{k} x^{k-1} (1-x)^{b-k-1} (k-bx). \tag{2-11}$$

Note, portanto, que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d}{dx} f_p(x) \right| &= \left| q \left(-b(1-x)^{b-1} + \sum_{k=1}^{\theta-1} \binom{b}{k} x^{k-1} (1-x)^{b-k-1} (k-bx) \right) \right| \\
&\leq q \left| -b(1-x)^{b-1} + \sum_{k=1}^{\theta-1} \binom{b}{k} x^{k-1} (1-x)^{b-k-1} (k-bx) \right| \\
&\leq q(b+1(|k|+|b|)). \\
&\leq q(b+\theta-1+b) = q(\theta-1+2b)
\end{aligned}$$

Segue então que, para $q < \frac{1}{\theta-1+2b}$, temos

$$\left| \frac{d}{dx} f_p(x) \right| < 1, \forall x \in [0,1].$$

Assim sendo, tome $p > 1 - \frac{1}{\theta-1+b}$ e suponha que (2-8) tenha outra solução estritamente menor que 1. Ou seja, suponha que exista $x_0 \in (0,1)$ tal que $f_p(x_0) = x_0$. Nesse caso, pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (x_0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned}
f_p(1) - f_p(x_0) &= f'(c)[1-x_0] \\
f_p(x_0) &= 1 - f'(c)[1-x_0] \\
|f_p(x_0)| &> 1-(1-x) = x,
\end{aligned}$$

o que contradiz o fato de que $f_p(x_0) = x_0$. Logo, para esse valor de p, a única solução da equação (2-8) será o 1.

Por outro lado, se p é suficientemente próximo de zero, então (2-8) possuirá outras soluções. Para ver isso, note primeiramente que, se $p < 1/2$ e, aplicando (2-10) no ponto $x = 2p$,

$$\begin{aligned}
f_p(2p) &= 1-(1-p) \sum_{k=0}^{\theta-1} \binom{b}{k} (2p)^k (1-2p)^{b-k} \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{\theta-1} \binom{b}{k} (2p)^k (1-2p)^{b-k} + p \left(\sum_{k=0}^{\theta-1} \binom{b}{k} (2p)^k (1-2p)^{b-k} \right)
\end{aligned}$$

$$\leq \quad 1-(1-2p)^b - b2p(1-2p)^{b-1} - \ldots - \binom{b}{\theta-1}(2p)^{\theta-1}(1-2p)^{b-\theta+1} + p.$$

Repare agora que o termo 1 irá se anular com o 1 proveniente do termo $(1-2p)^b$ acima. Além disso, perceba que ficaremos com

$$\begin{aligned} f_p(2p) &\leq p + 2pb - 2pb] + p^2c \\ &\leq p + p^2c < 2p, \end{aligned}$$

para valores de p suficientemente próximos de 0 com c uma constante. Mas note que temos $2p < 1$ e $f_p(0) = p > 0$. Logo, no ponto $x = 2p$, o gráfico da função f_p está abaixo da reta $x = y$ e, no ponto $x = 0$, está acima. Pelo Teorema do Valor Intermediário, portanto, há um ponto desse gráfico que também está na reta $x = y$. Logo, para valores de p suficientemente próximos de zero, a equação (2-8) possui solução diferente de 1.

Esse fato, juntamente com a Proposição (2.2) e o que foi definido em (2-7), nos fornecem o

Corolário 2.2.1 $\vec{p}_f = sup\{p \in [0,1] : (2\text{-}8)$ *tem uma solução em* $(0,1)\}$. *Ou seja,* $\vec{p}_f$ *é não trivial.*

Isso porque, dizer que (2-8) tem solução em $(0,1)$ é o mesmo que dizer que $\vec{p}_\infty < 1$. Daí a necessidade de tomarmos o *sup* a fim de estarmos em consonância com a definição (2-7).

Tome $\overline{p} = \vec{p}_f$ e $\overline{p}_\infty = \vec{p}_\infty(\overline{p})$. Suponha que $f'_{\overline{p}}(\overline{p}_\infty) < 1$. Nesse caso, pela continuidade de f_p como função de x, temos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f_{\overline{p}}(\overline{p}_\infty + \varepsilon) < \overline{p}_\infty + \varepsilon$. Mas temos também que f_p é contínua como função de p. Logo, existe $\delta > 0$ tal que $f'_{\overline{p}+\delta}(\overline{p}_\infty + \varepsilon) < \overline{p}_\infty + \varepsilon$. Como $f'_{\overline{p}+\delta}(1) = 0$, para que tenhamos $f'_{\overline{p}+\delta}(\overline{p}_\infty + \varepsilon)$ menor que $\overline{p}_\infty + \varepsilon$, essa função deve cruzar a reta $x = y$ em algum ponto antes do 1, como mostra a Figura 2.5. Mas isso é absurdo pois definimos $\vec{p}_f$ como sendo o sup dos valores para os quais (2-8) tem solução no intervalo $(0,1)$. Suponha agora que $f'_{\overline{p}}(\overline{p}_\infty) > 1$. Pela continuidade da derivada da função f_p, temos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f'_{\overline{p}}(\overline{p}_\infty - \varepsilon) > 1$ e portanto $f_{\overline{p}}(\overline{p}_\infty - \varepsilon)$ está abaixo da reta $x = y$, isto é, $f_{\overline{p}}(\overline{p}_\infty - \varepsilon) < \overline{p}_\infty - \varepsilon$. Como $f_{\overline{p}}(0) = \overline{p} > 0$ segue que a função f_p deveria cruzar a reta $x = y$ em algum ponto $x < \overline{p}_\infty$. Ver Figura 2.6. Mas isso é absurdo pois já provamos que $\overline{p}_\infty$ é a menor solução de (2-8). Sendo assim, unindo os dois resultados, temos que

$$f'_{\overline{p}}(\overline{p}_\infty) = 1. \tag{2-12}$$

A próxima proposição nos fornece uma nova caracterização do ponto p_∞ relacionando-o com o ponto $\vec{p}_\infty$ do caso orientado.

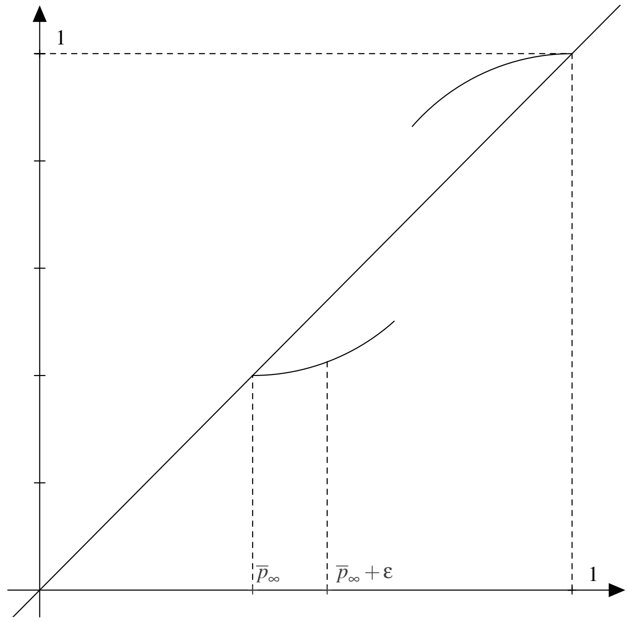

Figura 2.5: *O caso em que* $f'_{\overline{p}}(\overline{p}_\infty) < 1$.

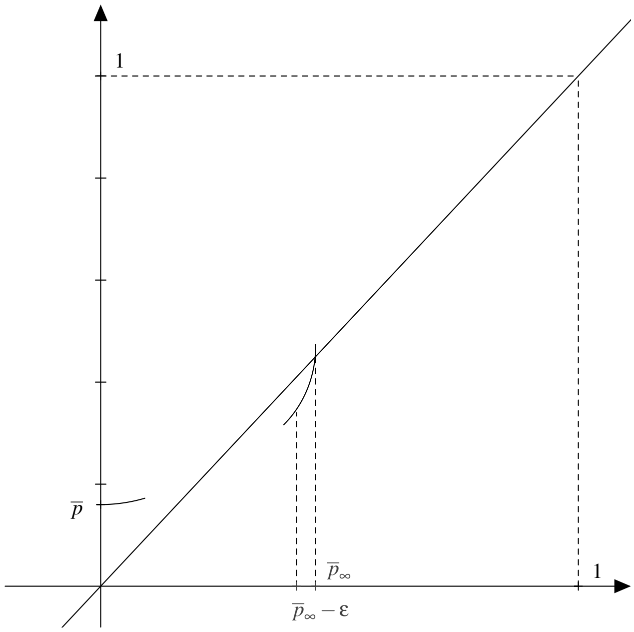

Figura 2.6: *O caso em que* $f'_{\overline{p}}(\overline{p}_\infty) > 1$.

Proposição 2.3 *Temos que*

$$p_\infty = p + q \sum_{k=\theta}^{b+1} \binom{b+1}{k} \vec{p}_\infty^{\,k} (1 - \vec{p}_\infty)^{b+1-k}. \tag{2-13}$$

Prova. Tome $x_1, x_2, \ldots, x_{b+1}$ uma enumeração de N_R. Considere também modelos não-orientados de percolação bootstrap nas árvores $\mathbb{T}^{+,x_i}$, com $i = 1, \ldots, b+1$, começando da configuração inicial η_0 restrita à respectiva subarvore. Denote por $\zeta_n^{(i)}$, com $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$, as sucessivas configurações dos modelos de percolação bootstrap em $\mathbb{T}^{+,x_i}$, com $i = 1, \ldots, b+1$. Suponha então que tenhamos $\{\eta_o(R) = 0\}$. Nesse caso, é fato que

$$\eta_\infty(R) = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{b+1} \zeta_\infty^{(i)}(x_i) \geq \theta.$$

Mas note que os $\zeta_n^{(i)}$, com $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$, são i.i.d.. Segue então que

$$\begin{aligned} p_\infty = \mathbb{E}_p(\eta_\infty(R)) &= \mathbb{P}_p(\eta_\infty(R) = 1) \\ &= p + (1-p)\sum_{k=\theta}^{b+1} \binom{b+1}{k} \mathbb{P}_p(\zeta_\infty^{(1)}(x_1) = 1)^k \mathbb{P}_p(\zeta_\infty^{(1)}(x_1) = 0)^{b+1-k}. \end{aligned}$$

Mas note que $\mathbb{P}_p(\zeta_\infty^{(1)}(x_1) = 1) = \mathbb{E}_p(\zeta_\infty^{(1)}(x_1))$. Ou seja, temos que (2-13) vale se trocamos $\vec{p}_\infty$ por $\mathbb{E}_p(\zeta_\infty^{(1)}(x_1))$.

De maneira análoga, consideraremos agora percolação bootstrap orientada em $\vec{\mathbb{T}}^{+,x_1}$, isto é, vamos restringir a percolação bootstrap original em $\vec{\mathbb{T}}_b$ a $\vec{\mathbb{T}}^{+,x_1}$ e denotar por $\vec{\zeta}_n^{(1)}$, com $n \in \overline{\mathbb{N}}$, as configurações sucessivas deste modelo. Note, portanto, que teremos $\zeta_0^{(1)} = \vec{\zeta}_0^{(1)} = \eta_0$ restrita a $\mathbb{V}_b^{+,x_1}$.

Claramente, $\zeta_\infty^{(1)}(x_1) = 0 \Rightarrow \vec{\zeta}_\infty^{(1)}(x_1) = 0$. Vamos mostrar agora que

$$\vec{\zeta}_\infty^{(1)}(x_1) = 0 \Rightarrow \zeta_\infty^{(1)}(x_1) = 0.$$

De fato, seja $x \in \mathbb{V}_b^{+,x_1}$. Diremos que esse vértice é *protegido* se $\vec{\zeta}_\infty^{(1)}(x) = 0$. Suponha então que x é protegido. Nesse caso, devemos ter $\vec{\zeta}_0^{(1)}(x) = 0$ e, pelo menos, $b - \theta + 1$ vértices protegidos em $\vec{N}_x$. Para cada um desses x protegidos, seja $\mathcal{P}_x$ uma escolha arbitrária de exatamente $b - \theta + 1$ vértices dentre os vértices protegidos de $\vec{N}_x$. Supondo x_1 protegido, i.e., $\vec{\zeta}_\infty^{(1)}(x_1) = 0$, defina então $\tau_0 = \{x_1\}$ e, para $n \geq 1$, $\tau_n = \bigcup_{x \in \tau_{n-1}} \mathcal{P}_x$. Por fim, defina $\tau = \bigcup_n \tau_n$. Mostramos assim que deve existir uma subarvore de $\vec{\mathbb{T}}^{+,x_1}$, que denotaremos por τ, completamente vaga que tem x_1 como raiz e que é isomorfa a $\vec{\mathbb{T}}^{+,x_1}_{(b-\theta+1)}$. Note que τ se mantem invariante se a olhamos na dinâmica da percolação bootstrap não-orientada de limiar θ em $\mathbb{T}^{+,x_1}$. Isso porque, na dinâmica orientada, cada vértice dessa árvore τ possui menos de θ vizinhos ocupados. Quando passamos à dinâmica não-orientada, o único vizinho a mais que cada um dos vértices passa a ter tem que estar vago devido à própria construção de τ. Logo, segue que $\zeta_\infty^{(1)}(x_1) = 0$ sempre que $\vec{\zeta}_\infty^{(1)}(x_1) = 0$. $\square$

A partir da proposição anterior, podemos mostrar o importante

Corolário 2.3.1 *Para todo $b \geq 2$, temos que*

$$\vec{p}_f = p_f.$$

Prova. De (2-13), é claro que se $\vec{p}_\infty = 1$ então $p_\infty = 1$. Logo, de (2-6) e (2-7) segue que $p_f \leq \vec{p}_f$. Suponha agora $p_\infty = 1$. Substituindo na Equação (2-13), temos que

$$\sum_{k=\theta}^{b+1} \binom{b+1}{k} \vec{p}_\infty^{\,k} (1-\vec{p}_\infty)^{b+1-k} = 1.$$

Mas note que essa equação pode ser reescrita como

$$(\vec{p}_\infty + 1 - \vec{p}_\infty)^{b+1} - \sum_{k=0}^{\theta-1} \binom{b+1}{k} \vec{p}_\infty^{\,k} (1-\vec{p}_\infty)^{b+1-k} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{\theta-1} \binom{b+1}{k} \vec{p}_\infty^{\,k} (1-\vec{p}_\infty)^{b+1-k} = 0$$

Temos que $\vec{p}_\infty \in [0,1]$. Assim sendo, todos os termos da soma que está do lado esquerdo da equação acima são não-negativos. Portanto, para que a última equação acima seja verdadeira devemos ter $\vec{p}_\infty = 1$. Logo, se $p_\infty = 1$ então $\vec{p}_\infty = 1$ e, novamente observando as Equações (2-6) e (2-7), temos que $\vec{p}_f \leq p_f$, donde $p_f = \vec{p}_f$. □

Note que a função $f_p(x)$, se tomamos $p < 1$, é estritamente crescente. Além disso, $f_p(x)$ é analítica. Note também que os Corolários 2.3.1 e 2.2.1 nos permitem escrever

$$p_f = \sup\{p \in [0,1] : \text{(2-8) tem uma solução em } (0,1)\}.$$

Mas então $p_f \neq 1$ já que, caso contrário, (2-8) não teria solução em $(0,1)$. De fato, nesse caso, a solução seria 1. Analogamente, $p_f \neq 0$ e, portanto, podemos escrever

$$p_f \in (0,1).$$

De (2-8) temos que $\vec{p}_\infty$ é o menor ponto de interseção do gráfico da função $f_p(x)$ e da reta $y = x$. Tomemos então $p < p_f$. Nesse caso, temos que a derivada de $f_p(x)$ no ponto $\vec{p}_\infty$ é estritamente menor que 1. Para ver isso, suponha que $f_p'(\vec{p}_\infty) > 1$. Nesse caso, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f_p(\vec{p}_\infty - \varepsilon) < \vec{p}_\infty - \varepsilon$, *i.e.*, $f_p(\vec{p}_\infty - \varepsilon)$ está abaixo da reta $x = y$. Nesse caso, como $f_p(0) = p > 0$, segue que a função f_p, para que esteja abaixo da reta $x = y$ no ponto $\vec{p}_\infty - \varepsilon$, deve cruzar essa reta em algum ponto antes de $\vec{p}_\infty$. Mas isso é absurdo pois já provamos que $\vec{p}_\infty$ é o menor ponto de interseção. Suponha agora que $f_p'(\vec{p}_\infty) < 1$. Já foi mostrado, em (2-12), que a derivada de f_p no ponto $\vec{p}_\infty$ para $p = p_f$ é 1.

Desse modo, perceba que no ponto $\vec{p}_\infty$ a derivada da função $f_p(x) - x$ é diferente de zero. Assim sendo, podemos invocar o Teorema da Função Analítica Implícita e concluir que

$$\vec{p}_\infty = \vec{p}_\infty(p) \text{ e } p_\infty = p_\infty(p) \text{ são analíticas em } [0, p_f). \tag{2-14}$$

Note agora que aumentando o valor do parâmetro p, aumentamos a probabilidade de que um sítio esteja ocupado no configuração final. Ou seja, aumentar o valor de p aumenta o valor da esperança do estado desse sítio na configuração final. Sendo assim, temos mostrado que ambos p_∞ e $\vec{p}_\infty$ são estritamente crescentes em $[0, p_f]$.

É fato, mostrado em [Balogh, Peres e Pete 2006], que o ponto p_f pode ser explicitamente calculado nos casos específicos em que $\theta = 2$ ou $\theta = b$. Mais especificamente, quando temos $\theta = b$, $p_f = 1 - 1/b$.

Isso posto, podemos focar agora na formalização da definição de percolação para esse modelo. Para isso, comece considerando uma configuração inicial $\eta_0 \in \{0,1\}^{\mathbb{V}_b}$ e tome $x \in \mathbb{V}_b$.

Definição 2.3.1 *Um caminho em $\mathbb{T}_b$ é uma coleção ordenada de vértices distintos $\{y_1, y_2, \ldots\} \subseteq \mathbb{V}_b$ tal que $y_{i+1} \in N_{y_i}$ (resp. $\vec{N}_{y_i}$) para $i \geq 1$.*

Definição 2.3.2 *Dado um vértice $x \in \mathbb{V}_b$, o aglomerado de vértices ocupados de $\mathbb{T}_b$ (resp. $\vec{\mathbb{T}}_b$) contendo x, que será denotado por C_x (resp. $\vec{C}_x$), é o conjunto maximal de vértices $y \in \mathbb{V}_b$ que estão ocupados em η_∞ (resp. $\vec{\eta}_\infty$) e tais que existe um caminho finito em C_x (resp. $\vec{C}_x$) conectando x a y. Usaremos a abreviação $C = C_R$ e $\vec{C} = \vec{C}_R$.*

Diremos então que x *percola* em η_∞ (resp. em $\vec{\eta}_\infty$) se $|C_x| = \infty$ (resp. $|\vec{C}_x| = \infty$). Podemos assim definir os pontos críticos da percolação como sendo

$$p_c = inf\{p \in [0,1] : \mathbb{P}_p(|C| = \infty) > 0\} \tag{2-15}$$

e

$$\vec{p}_c = inf\{p \in [0,1] : \mathbb{P}_p(|\vec{C}| = \infty) > 0\}. \tag{2-16}$$

Em modelos em que p_c é não-trivial, *i.e.*, $p_c \in (0,1)$, dizemos que ocorre o fenômeno de *transição de fase* que consiste na passagem de um estado subcrítico em que, com probabilidade 1, todos os aglomerados são finitos, para um estado supercrítico em que, com probabilidade 1, existe um aglomerado infinito de sítios ocupados. Será mostrado mais adiante, na Seção 3.6, que, ao contrário do que poderia sugerir o Corolário 2.3.1, temos

$$p_c < \vec{p}_c.$$

Podemos agora enunciar, para o caso não orientado, o principal resultado mostrado nesse trabalho. A partir de sua demonstração ficará claro que o caso orientado pode ser tratado de maneira totalmente análoga.

Teorema 2.1 *1. Os pontos críticos na árvore homogênea satisfazem*

$$0 < p_c < p_f. \tag{2-17}$$

2. *Para $p < p_c$, existem constantes $c_1, c_2 \in (0, \infty)$ tais que para todo $k \geq 0$*

$$\mathbb{P}_p(|C| > k) \leq c_1 e^{-c_2 k}. \tag{2-18}$$

3. *Em $p = p_c$,*

$$\mathbb{P}_p(|C| > k) \to 0, \text{ quando } k \to \infty; \tag{2-19}$$

$$\mathbb{E}_p(|C|) = \infty. \tag{2-20}$$

4. *Para $p > p_c$, existem constantes $c_3, c_4 \in (0, \infty)$ tais que para todo $k \geq 0$*

$$\mathbb{P}_p(k < |C| < \infty) \leq c_3 e^{-c_4 k}. \tag{2-21}$$

Suponha que $\mathbb{P}_p(\eta_\infty \equiv 1) = 0$. Se $x \in \mathbb{V}_b$ está vago, podemos definir o *aglomerado de vértices vagos contendo x* da mesma maneira como foi feito na Definição 2.3.2 apenas trocando a palavra *ocupado* por *vago*. Segue então que devemos ter um aglomerado infinito de sítios vagos na árvore (em outras palavras, os sítios vagos devem percolar). Isso porque se o aglomerado de vértices vagos de um dado sítio é finito, então, existe um nível da árvore que é o maior possível contendo vértices desse aglomerado. Tomando, então, os vértices do aglomerado que estão nesse nível, concluimos que todos os vizinhos de todos esses vértives têm de estar ocupados. Mas daí temos que esses vértices também se ocupariam e assim sucessivamente até que todo o aglomerado, a princípio vago, se torne ocupado. Mas note também que esse teorema afirma a existência de uma fase intermediária em que $p \in (p_c, p_f)$. Ou seja, temos que, nessa fase, aglomerados infinitos de sítios ocupados e aglomerados infinitos de sítios vagos coexistem.

Perceba ainda que se $p \in (p_c, p_f)$, então é possível que não tenhamos um aglomerado infinito de sítios ocupados na configuração inicial. Porém, como estamos na fase supercrítica de percolação, o Teorema (2.1) nos garante que para quase toda configuração inicial existem aglomerados infinitos de vértices ocupados na configuração final η_∞. Ora, mas nesse caso, tal aglomerado é totalmente produzido pela dinâmica de percolação bootstrap. Mais que isso, como $p < p_f$, tal fato mostra que, para alguns valores de b e θ, a dinâmica de percolação bootstrap é forte o suficiente para criar aglomerados infinitos mas não é forte o suficiente para ocupar a rede inteira. Como exemplo desse fato, podemos tomar o caso em que $\theta = 2$ e b é suficientemente grande. Isso porque em [Balogh, Peres e Pete 2006], é mostrado que para esse caso temos p_f da ordem de $1/b^2$. Logo, se tomamos $p \in (p_c, p_f)$, segue que $p < 1/b^2$. Mas é mostrado em [Grimmett 1999] que o ponto crítico para percolação em η_0 é $1/b$, donde segue que $p < 1/b^2 \ll 1/b$.

CAPÍTULO 3

Os Dois Pontos Críticos da Percolação Bootstrap em Árvores

3.1 O Caso Orientado

A fim de chegarmos aos resultados principais desse trabalho, convém que estudemos os processos orientados e não-orientados de maneira separada. Além da necessidade devida ao fato de que se tratam de processos distintos, ficará claro no decorrer das definições e demonstrações que o segundo se utiliza de resultados do primeiro em seu desenvolvimento. Assim sendo, começaremos analisando o processo orientado visando descrever o aglomerado de vértices ocupados contendo a raiz em $\vec{\eta}_\infty$, como um aglomerado que, por sua vez, é formado por outros aglomerados oriundos de processos de ramificação.

Primeiramente, vamos classificar os vértices que são vagos na configuração inicial como sendo *fracamente vago* se a dinâmica orientada eventualmente o torna ocupado ou *fortemente vago* se ele nunca é ocupado por essa dinâmica. Mais formalmente:

Definição 3.1.1 *Seja $x \in \mathbb{V}_b$ tal que $\vec{\eta}_0(x) = \eta_0(x) = 0$. Se $\vec{\eta}_\infty(x) = 1$, diremos que esse vértice é fracamente vago. Se $\vec{\eta}_\infty(x) = 0$, diremos que ele é fortemente vago.*

Consideremos agora configurações de vértices ocupados, fracamente vagos e fortemente vagos $\xi \in \{1, \underline{0}, \overline{0}\}^{\mathbb{V}_b}$ da seguinte maneira. Tome $x \in \mathbb{V}_b$ e defina:

$$\xi(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } \vec{\eta}_0(x) = 1, \\ \underline{0}, \text{ se } \vec{\eta}_0(x) = 0 \text{ mas } \vec{\eta}_\infty(x) = 1, \\ \overline{0}, \text{ se } \vec{\eta}_\infty(x) = 0. \end{cases} \tag{3-1}$$

Isso posto, definimos o aglomerado $\overline{W}_x$ de vértices fracamente vagos como sendo:

Definição 3.1.2 *Dado um $x \in \mathbb{V}_b$, definimos*

$$\overline{W}_x = \{y \in \mathbb{V}_b : \textit{ existe } x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y \textit{ com } x_i \in \vec{N}_{x_{i-1}}, i = 1, \ldots, n \textit{ e } \xi(x_i) = \underline{0}, i = 0, \ldots, n\}.$$

Ou seja: é o conjunto de todos os sítios y para os quais existe um caminho composto inteiramente por vértices fracamente vagos que começa em x e termina em y. Observe, portanto, que se $\xi(x) \neq \underline{0}$, então o conjunto $\overline{W}_x$ é vazio. Caso contrário, temos a seguinte

Proposição 3.2 *Se $\overline{W}_x$ não é vazio, então $\overline{W}_x$ é o aglomerado de um processo de ramificação.*

Prova. Seja $x \in \mathbb{V}_b$. Denote então

$$(O_x, W_x, S_x) = \left(\sum_{y \in \vec{N}_x} 1\{\xi(y) = 1\}, \sum_{y \in \vec{N}_x} 1\{\xi(y) = \underline{0}\}, \sum_{y \in \vec{N}_x} 1\{\xi(y) = \overline{0}\} \right) \tag{3-2}$$

o número de vizinhos de x que são, respectivamente, inicialmente ocupados, fracamente vagos e fortemente vagos.

Note agora que, uma vez que estamos no caso orientado, os elementos de $\{\xi(y), y \in \vec{N}_x\}$ são independentes e portanto (O_x, W_x, S_x) é trinomial com parâmetros $(b; p, \vec{r}_\infty, \vec{q}_\infty)$, onde b será o número de tentativas, p, a probabilidade de que o sítio esteja ocupado na configuração inicial, $\vec{r}_\infty$, a probabilidade de que o sítio seja fracamente vago, e $\vec{q}_\infty$, a probabilidade de que ele seja fortemente vago. Note também que

$$\vec{p}_\infty = \mathbb{E}_p(\vec{\eta}_\infty(R)) = p + \vec{r}_\infty \Rightarrow \vec{r}_\infty = \vec{p}_\infty - p$$

e que $\vec{q}_\infty = 1 - \vec{p}_\infty$. Além disso, temos que $\xi(x) = \underline{0}$ se, e somente se, $\vec{\eta}_0(x) = 0$ e $S_x \leq b - \theta$ já que, caso contrário, x teria mais de $b - \theta$ vizinhos fortemente vagos e, assim, não se ocuparia em nenhum momento. Portanto, a distribuição condicional de W_x dado $\{\xi(x) = \underline{0}\}$ é a mesma de W_x dado $S_x \leq b - \theta$. Suponha, então, $\overline{W}_x$ diferente de vazio. Podemos definir um processo de ramificação da seguinte maneira. Tome uma variável aleatória $\zeta \stackrel{d}{=} W_x | S_x \leq b - \theta$. Começando do vértice x, definimos nossa primeira geração Y_1, segundo a probabilidade

$$P(\zeta = k) = P(W_x = k | S_x \leq b - \theta).$$

Associamos ao i-ésimo descendente desse vértice uma variável aleatória ζ_i identicamente distribuída a ζ. Definimos então as gerações do processo fazendo

$$Y_n = \sum_{i=1}^{Y_{n-1}} \zeta_i.$$

Note que cada um dos descendentes de cada uma das gerações são vértices que fazem parte do aglomerado de sítios fracamente vagos de x. Sendo assim, podemos concluir que ou $\overline{W}_x$ é vazio, e isso acontece com probabilidade $1 - \vec{r}_\infty$, ou, com probabilidade $\vec{r}_\infty$,

$\overline{W}_x$ é o aglomerado de um processo da ramificação iniciado com um indivíduo e com distribuição de descendentes dada pela distribuição condicional de W_x dado $S_x \leq b - \theta$.

□

Vamos definir agora outras duas estruturas que serão utilizadas na construção do aglomerado $\vec{C}$, a saber, o *aglomerado local* de vértices ocupados de $\vec{\eta}_\infty$ contendo x, que vamos denotar por L_x, e sua fronteira de vértices inicialmente ocupados que denotaremos por $\hat{O}_x$.

Se $\xi(x) = \overline{0}$, então

$$L_x = \hat{O}_x = \emptyset. \tag{3-3}$$

Se $\xi(x) = 1$, então

$$L_x = \hat{O}_x = \{x\}. \tag{3-4}$$

Se $\xi(x) = \underline{0}$, então

$$L_x = \overline{W}_x \cup \hat{O}_x, \text{ com } \hat{O}_x = \{y \in \overline{\partial}\overline{W}_x : \xi(y) = 1\} \tag{3-5}$$

onde, o símbolo $\overline{\partial}$ se refere à fronteira orientada exterior que é definida como: dado um subconjunto não-vazio Λ de $\mathbb{V}_b$, $\overline{\partial}\Lambda = \{y \notin \Lambda : y \in \vec{N}_z \text{ para algum } z \in \Lambda\}$. Ou seja, nesse caso, $\hat{O}_x$ é o conjunto de todos os vértices que além de serem vizinhos de algum vértice no aglomerado de sítios fracamente vagos, estão ocupados na configuração inicial.

Perceba então que podemos construir $\vec{C}_x$ a partir de aglomerados locais de vértices ocupados e suas fronteiras. Para isso, começamos fazendo

$$C_0 = L_x, \;\; O_0 = \hat{O}_x.$$

Isso posto, para $n \geq 0$, fazemos as iterações:

$$C_{n+1} = \bigcup_{y \in O_n} \bigcup_{z \in \vec{N}_y} L_z; \;\; O_{n+1} = \bigcup_{y \in O_n} \bigcup_{z \in \vec{N}_y} \hat{O}_z. \tag{3-6}$$

Segue, desse modo, que

$$\vec{C}_x = \bigcup_{n \geq 0} C_n. \tag{3-7}$$

Para todo $n \geq 0$, tal que $O_n \neq \emptyset$, considere a parte da $\xi-$configuração que sai de O_n. Como estamos tratando do processo orientado e somente o conjunto de vizinhos orientados de cada vértice pode ocupar ou não esse vértice, note que ela é independente da

ξ−configuração restrita a $\cup_{i=0}^{n} C_i$. Temos, portanto, desse fato e da construção do aglomerado $\vec{C}_x$ que $O := (O_n)_{n\geq 0}$ são as sucessivas gerações de um processo de ramificação com distribuição inicial dada por uma cópia de $|\hat{O}|$, e distribuição de descendentes dada pela soma de b cópias i.i.d. de $|\hat{O}|$, independente da distribuição inicial, onde $\hat{O} = \hat{O}_R$. Para ver isso, observe primeiramente que partimos de O_0 cuja distribuição é, de fato, uma cópia de $|\hat{O}|$. Tome agora um elemento dessa geração inicial. A fim de determinarmos a descendênca desse elemento vamos olhar cada um de seus vizinhos e para cada um desses vizinhos vamos tomar sua fronteira de vértices incialmente ocupados.

Mas perceba que, tendo escolhido um tal vizinho, não há diferença alguma, com relação ao processo, entre esse vizinho escolhido e a raiz da árvore. Ou seja, a distribuição da fronteira de sítios inicialmente ocupados desse vértice que estamos considerando é a mesma da raiz, a saber, $|\hat{O}|$. Como cada elemento da geração inicial possui b vizinhos e toda a discussão que fizemos vale para qualquer um desses vizinhos, temos que a distribuição de descendentes de um vértice qualquer na geração inicial será dada por b cópias de $|\hat{O}|$. Para cada $n \geq 1$ o mesmo raciocínio se aplica donde concluimos que $O := (O_n)_{n\geq 0}$ são, de fato, a gerações sucessivas do processo de ramificação definido acima. Note ainda que quase certamente $|\vec{C}| = \infty$ se, e somente se, aquele processo de ramificação sobrevive.

Os seguintes lemas são úteis para que formalizemos e exploremos melhor o que acabou de ser dito no parágrafo acima.

Lema 3.1 *Seja* $\nu = \nu(p) = \mathbb{E}_p(|\hat{O}|)$ *e*

$$M = M(p) = q\sum_{k=\theta}^{b} k\binom{b}{k}\vec{p}_{\infty}^{\,k-1}\vec{q}_{\infty}^{\,b-k}. \tag{3-8}$$

Então, ou $M < 1$ *e* $\nu = \frac{p}{1-M}$ *ou* $\nu = \infty$.

Prova. Primeiramente, perceba que $M(0) = 0$. Além disso, segue de (2-14), que M é analítica em $[0, p_f)$ e contínua à esquerda em p_f.

Suponha então que tenhamos $n < \infty$. Considere então os eventos

$$A = \left\{ \sum_{x\in\vec{N}} 1\{\xi(x) = 1 \text{ ou } \underline{0}\} \geq \theta \right\} \tag{3-9}$$

e, para $k \leq b$, dada uma escolha de k vértices $x_1, x_2, \ldots, x_k$ de $\vec{N}$,

$$A_k = \{\xi(x_i) = 1 \text{ ou } \underline{0} \text{ para } i = 1, \ldots, k\}. \tag{3-10}$$

Lembre que, por definição, $\hat{O}$ é o conjunto de todos os sítios que não pertencem ao aglomerado de sítios fracamente vagos da raiz mas são vizinhos de algum sítio nesse aglomerado e, além disso, estão ocupados na configuração inicial. Lembre ainda que, se um sítio x está ocupado na configuração inicial, então $\hat{O} = \{x\}$.

Segue assim que ou a raiz está ocupada na configuração inicial, donde teríamos $|\hat{O}| = 1$, ou ela está vaga. Nesse último caso, se o evento A não ocorre, ela é fortemente vaga e assim $\hat{O} = \emptyset$ e, se o evento A ocorre, ela é fracamente vaga. Desse modo, note então que podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
\nu &= \mathbb{E}_p(|\hat{O}|) \\
&= 1.p + q\mathbb{E}_p\left(\sum_{x\in\vec{N}} |\hat{O}_x|;A\right) \\
&= p + q\sum_{k=\theta}^{b}\binom{b}{k}\mathbb{E}_p(|\hat{O}_{x_1}| + \ldots + |\hat{O}_{x_k}|;A_k) \\
&= p + q\sum_{k=\theta}^{b} k\binom{b}{k}\mathbb{E}_p(|\hat{O}_{x_1}|;A_k) \\
&= p + q\sum_{k=\theta}^{b} k\binom{b}{k}\mathbb{E}_p(|\hat{O}_{x_1}|;\xi(x_1) = 1 \text{ ou } \underline{0})\mathbb{P}_p(\xi(x_2) = 1 \text{ ou } \underline{0}) \\
&\quad \times \ldots \times \mathbb{P}_p(\xi(x_k) = 1 \text{ ou } \underline{0})\mathbb{P}_p(\xi(x_{k+1}) = \overline{0})\ldots\mathbb{P}_p(\xi(x_b) = \overline{0})
\end{aligned}
$$

onde $\{x_{k+1},\ldots,x_b\} = \vec{N}\setminus\{x_1,\ldots,x_k\}$. Perceba, por fim, que, sem mudanças significativas na geometria do modelo, podemos tomar qualquer sítio como sendo a raiz da nossa árvore. Sendo assim, usando as definições de ν, $\vec{p}_\infty$ e $\vec{q}_\infty$, temos

$$
\nu = p + q\sum_{k=\theta}^{b} k\binom{b}{k}\nu\vec{p}_\infty^{\,k-1}\vec{q}_\infty^{\,b-k} = p + \nu M, \tag{3-11}
$$

como queríamos mostrar.

□

Importante notar nesse lema o modo como o tamanho do aglomerado $|\hat{O}|$ se relaciona com a quantidade M, sendo que ele é infinito sempre que tivermos $M = 1$.

Lema 3.2 *Defina $\tilde{p} = inf\{p \in [0,p_f] : M(p) = 1\}$. Então,*

$$
\tilde{p}\begin{cases} < p_f, \ \textit{se } 2 \le \theta < b, \\ = p_f, \ \textit{se } \theta = b. \end{cases} \tag{3-12}
$$

Prova. Primeiramente, considere o caso em que $\theta = b$. Novamente, faça $p = \overline{p} = \vec{p}_f$. De (2-12) temos que

$$1 = f_p'(\overline{p}_\infty) = qb\overline{p}_\infty^{b-1} = M(p).$$

Já sabemos que, para esse caso, $p_f = 1 - 1/b$. Suponha então, por absurdo, que tenhamos $p < 1 - 1/b$ para o qual $M(p) = qb\vec{p}_\infty^{b-1} = 1$ e, portanto, $\vec{p}_\infty = (qb)^{\frac{-1}{b-1}}$. Lembre que $\vec{p}_\infty$ é monótona crescente em $[0, p_f]$ donde $\vec{p}_\infty(p) < \vec{p}_\infty(p_f) = 1$, já que em p_f a ocupação da rede é total. Além disso, $\vec{p}_\infty$ satisfaz (2-8). Unindo esses dois fatos, ficamos com a forma equivalente

$$\begin{aligned} f_p(\vec{p}_\infty) = p + q\vec{p}_\infty^b &= \vec{p}_\infty \\ q\vec{p}_\infty^b - \vec{p}_\infty &= -p \\ (1-p)\vec{p}_\infty^b - \vec{p}_\infty &= -p \end{aligned}$$

Assim,

$$\vec{p}_\infty^b - p\vec{p}_\infty^b - \vec{p}_\infty = -p \Rightarrow \vec{p}_\infty^b - \vec{p}_\infty = p\vec{p}_\infty^b - p \Rightarrow \vec{p}_\infty^b - \vec{p}_\infty = p(\vec{p}_\infty^b - 1).$$

Expandindo então os membros dessa equação:

$$\vec{p}_\infty(\vec{p}_\infty - 1)(1 + \vec{p}_\infty + \vec{p}_\infty^2 + \ldots + \vec{p}_\infty^{b-2}) = p(\vec{p}_\infty - 1)(1 + \vec{p}_\infty + \vec{p}_\infty^2 + \ldots + \vec{p}_\infty^{b-1}).$$

Mas, como já foi observado, $\vec{p}_\infty(p) < 1$, donde

$$\vec{p}_\infty + \vec{p}_\infty^2 + \vec{p}_\infty^3 + \ldots + \vec{p}_\infty^{b-1} - p - p\vec{p}_\infty - p\vec{p}_\infty^2 - \ldots - p\vec{p}_\infty^{b-1} = 0$$

$$\vec{p}_\infty + \vec{p}_\infty^2 + \ldots + \vec{p}_\infty^{b-1} = (qb)^{\frac{-1}{b-1}} + \ldots + (qb)^{-1} = \frac{p}{q}.$$

Mas, note que $qb > 1$ já que, por hipótese, $p < 1 - \frac{1}{b}$. Logo, cotando a soma acima pelo menor elemento temos que

$$\frac{p}{q} \geq (b-1)(qb)^{-1} = \frac{b-1}{qb}.$$

Ora, mas nesse caso $p \geq \frac{b-1}{b} = 1 - \frac{1}{b}$ o que é um absurdo. Logo, devemos ter $\tilde{p} = p_f$.

Passemos agora ao segundo caso. Considere portanto $2 \leq \theta < b$ e tome, novamente, o ponto $p = \overline{p} = p_f$. De (2-12) segue que

$$1 = f_p'(\overline{p}_\infty)$$

$$\begin{aligned}
&= q\frac{d}{dx}\left[\sum_{k=\theta}^{b}\binom{b}{k}x^k(1-x)^{b-k}\right]_{x=\overline{p}_\infty} \\
&= q\sum_{k=\theta}^{b}k\binom{b}{k}\overline{p}_\infty^{k-1}\overline{q}_\infty^{b-k} - q\sum_{k=\theta}^{b-1}(b-k)\binom{b}{k}\overline{p}_\infty^{k}\overline{q}_\infty^{b-k-1} \\
&= M(p) - q\sum_{k=\theta}^{b-1}(b-k)\binom{b}{k}\overline{p}_\infty^{k}\overline{q}_\infty^{b-k-1} \\
&< M(p),
\end{aligned}$$

já que o termo que estamos subtraindo de $M(p)$ na última igualdade é positivo. Mostramos, assim, que $M(p) > 1$. Mas perceba que $M(0) = 0$ e que M é contínua. Sendo assim, deve existir $\tilde{p} < p = p_f$ para o qual $M(\tilde{p}) = 1$. □

Perceba que este lema nos garante que $M(p) = 1$ possui, pelo menos, uma solução no intervalo $[0, p_f]$. Sendo assim, pela continuidade de M, podemos concluir que $\tilde{p}$ é a menor dessas soluções. Além disso, temos que no intervalo $[0, \tilde{p})$, $\nu = \frac{p}{1-M}$ é analítica, uma vez que M é analítica. Note também que $\nu(0) = 0$ e que $\nu(p) \to \infty$ quando $p \uparrow \tilde{p}$.

O Lema 3-12, juntamente com o Lema 3.3, servem para começar a delimitar a relação existente entre o ponto $\tilde{p}$ e o tamanho do aglomerado de elos ocupados da origem. Fazemos isso mostrando primeiramente que o aglomerado local de vértices ocupados de $\vec{\eta}_\infty$ possui decaimento exponencial para vaores de p menores que $\tilde{p}$. Antes de passar ao próximo lema, vamos enunciar uma proposição que será de fundamental importância na demonstração dele.

Proposição 3.3 *Suponha que um processo de ramificação subcrítico começando com apenas um único indivíduo é tal que sua distribuição de descendentes tem decaimento exponencial. Então, a distribuição do tamanho total da família também terá decaimento exponencial. Essa proposição também se extende ao caso onde a distribuição inicial do processo tem decaimento exponencial.*

Prova. Denote por $(Z_n)_{n\geq 0}$ o tamanho das sucessivas gerações do processo de ramificação que estamos considerando. Por hipótese, temos que $Z_0 = 1$. Seja então F_n a função geradora de probabilidades da soma $Z_0 + Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$ e F a função geradora de probabilidades da soma $Z_0 + Z_1 + Z_2 + \ldots$. Ou seja, temos que

$$F_n(s) = \mathbb{E}_p(s^{Z_0+Z_1+Z_2+\ldots+Z_n}) = \sum_{k=0} s^k \mathbb{P}_p(Z_0 + Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = k) \text{ e}$$

$$F(s) = \mathbb{E}_p(s^{Z_0+Z_1+Z_2+\ldots}) = \sum_{k=0} s^k \mathbb{P}_p(Z_0 + Z_1 + Z_2 + \ldots).$$

Vamos mostrar que, para algum $s > 1$, $F(s) < \infty$. Repare que isso prova a primeira afirmação do teorema pois podemos aplicar um argumento semelhante àquele usado na demonstração da Proposição 3.7. Defina agora ς como sendo a função geradora de probabilidades da distribuição de descendentes e seja

$$\tilde{Z}_n \equiv \text{ tamanho total da família até a geração } n.$$

Note que $\{\tilde{Z}_{n+1} \mid \tilde{Z}_1\} \overset{d}{=} \{(\tilde{Z}_1 - 1)$ cópias independentes de $\tilde{Z}_n + 1\}$. Sendo assim, temos que

$$\mathbb{E}_p\left(s^{\tilde{Z}_{n+1}} \mid \tilde{Z}_1\right) = \sum_{k\geq 0} \mathbb{E}_p\left(s^{k(\tilde{Z}_n+1)}\right) 1_{(\tilde{Z}_1=k+1)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_p\left(s^{\tilde{Z}_{n+1}}\right) &= \mathbb{E}_p\left(\mathbb{E}_p\left(s^{\tilde{Z}_{n+1}} \mid \tilde{Z}_1\right)\right) \\
&= \mathbb{E}_p\left(\sum_{k\geq 0} \mathbb{E}_p\left(s^{k\tilde{Z}_n+1}\right) 1_{(\tilde{Z}_1=k+1)}\right) \\
&= s\sum_{k\geq 0} \mathbb{E}_p\left(s^{\tilde{Z}_n}\right)^k \mathbb{P}_p(\tilde{Z}_1 = k+1) \\
&= s\sum_{k\geq 0} \mathbb{E}_p\left(s^{\tilde{Z}_n}\right)^k \mathbb{P}_p(\text{número de descendentes do primeiro indivíduo} = k+1) \\
&= s\varsigma\left(\mathbb{E}_p\left(s^{\tilde{Z}_n}\right)\right).
\end{aligned}$$

Concluimos desse modo, portanto, que, para $n \geq 1$ e $s \geq 0$,

$$F_n(s) = s\varsigma(F_{n-1}(s)). \tag{3-13}$$

Por hipótese, a distribuição de descendentes possui decaimento exponencial. Logo, temos que $\varsigma(s) < \infty$ para algum $s > 1$. Além disso, perceba que

$$\varsigma'(s) = \sum_{k=0} ks^{k-1}\mathbb{P}_p(\text{número de descendentes} = k)$$

donde $\varsigma'(1)$ é o número de esperado de descendentes de cada indivíduo. Como estamos tratando de um processo de ramificação subcrítico, podemos concluir que $\varsigma'(1) < 1$. Como ς possui derivada contínua, segue que existe $1 < s_0$ tal que $\alpha := s_0\varsigma'(s_0) < 1$. De fato, se $\varsigma'(s_0) > \frac{1}{s_0}$, para todo $s_0 > 1$, então, pela continuidade de $\varsigma'(s)$, teríamos $\varsigma'(1) \geq 1$ o que não pode acontecer. Como ς é uma função contínua e como $\varsigma(1) = 1$, podemos tomar s_1 suficientemente próximo de 1 de modo que a fração $[\varsigma(s_1) - 1]/(1-\alpha)$ esteja tão perto de zero quanto queiramos uma vez que α é fixo. Desse modo, segue que existe $1 < s_1 < s_0$

tal que

$$s_1\{1+[\varsigma(s_1)-1]/(1-\alpha)\} \leq s_0. \tag{3-14}$$

Vamos mostrar por indução que, para todo $n \geq 0$

$$F_n(s_1) \leq s_0.$$

Primeiramente, note que $F_0(s_1) = \sum_{k=0}^{\infty} s_1^k \mathbb{P}_p(Z_0 = k) = s_1 < s_0$, já que, por hipótese, $\mathbb{P}_p(Z_0 = 1) = 1$. Suponha então que a afirmação valha para todo $n \leq k$. Nesse caso, podemos aplicar (3-13) e ficamos com

$$F_{n+1}(s_1) - F_n(s_1) = s_1[\varsigma(F_n(s_1)) - \varsigma(F_{n-1}(s_1))].$$

Repare então que $F_n(s_1)$ e ς' são funções monótonas. Nesse caso,

$$\begin{aligned}
F_{n+1}(s_1) - F_n(s_1) &\leq s_1\varsigma'(F_n(s_1))[F_n(s_1) - F_{n-1}(s_1)] = s_1\varsigma'(F_n(s_1))s_1[\varsigma(F_{n-1}(s_1)) - \varsigma(F_{n-2}(s_1))] \\
&\leq s_1\varsigma'(F_n(s_1))s_1\varsigma'(F_{n-1}(s_1))[F_{n-1}(s_1) - F_{n-2}(s_1)] \\
&\leq [s_1\varsigma'(F_n(s_1))]^2[F_{n-1}(s_1) - F_{n-2}(s_1)]
\end{aligned}$$

Repetindo esse raciocínio iterativamente, chegamos em

$$\begin{aligned}
F_{n+1}(s_1) - F_n(s_1) &\leq [s_1\varsigma'(F_n(s_1))]^n[F_1(s_1) - F_0(s_1)] \\
&= [s_1\varsigma'(F_n(s_1))]^n s_1[\varsigma(s_1) - 1] \leq \alpha^n s_1[\varsigma(s_1) - 1],
\end{aligned} \tag{3-15}$$

onde, na última igualdade, usamos a hipótese de indução. Por fim, note que

$$F_{k+1}(s_1) - F_0(s_1) = \sum_{n=0}^{k} F_{n+1}(s_1) - F_n(s_1) \leq s_1[\varsigma(s_1) - 1]\sum_{n=0}^{k} \alpha^n.$$

Logo, aplicando (3-14),

$$F_{k+1}(s_1) = F_0(s_1) + s_1[\varsigma(s_1) - 1]/(1-\alpha) = s_1\{1+[\varsigma(s_1)-1]/(1-\alpha)\} \leq s_0,$$

o que conclui a demonstração. Tome então $s = s_1$ e perceba que

$$F(s) = \lim_{n\to\infty} F_n(s) \leq s_0,$$

como queríamos mostrar.

A fim de mostrarmos agora o caso em que o processo de ramificação possui distribuição inicial com decaimento exponencial, procedemos da seguinte maneira. Seja ψ a função geradora de probabilidade da distribuição inicial Z_0 de um processo de ramificação. Seja também τ_n a função geradora de probabilidades de υ_n, onde W_n é o tamanho total da família iniciando em Z_0. Por fim, seja F_n a função geradora de probabilidades do tamanho total da família até a geração n de um processo começando com apenas um indivíduo. Utilizando a notação definida no início dessa demonstração, note que

$$\{\upsilon_n \mid Z_0\} \stackrel{d}{=} \{Z_0 \text{ cópias independentes de } \tilde{Z}_n\}.$$

Logo, $\mathbb{E}_p\left(s^{W_n} \mid Z_0\right) = \sum_{k\geq 0} \mathbb{E}_p\left(s^{k\tilde{Z}_n}\right) 1_{(Z_0=k)}$. Então:

$$\begin{aligned}
\tau_n = \mathbb{E}_p\left(s^{W_n}\right) &= \mathbb{E}_p\left(\mathbb{E}_p\left(s^{W_n} \mid Z_0\right)\right) \\
&= \sum_{k\geq 0} \left[\mathbb{E}_p\left(s^{\tilde{Z}_n}\right)\right]^k \mathbb{P}_p(Z_0 = k) \\
&= \psi(F_n(s)) = \psi \circ F_n.
\end{aligned}$$

Essa relação vale para cada $n \in \mathbb{N}$. Por hipótese, o processo é subcrítico. Sendo assim, temos que existe $N \in \mathbb{N}$, $N < \infty$ q.c., tal que $W = W_n$. Segue então que $\tau = \psi \circ F$. Se a distribuição inicial do processo que estamos considerando e sua distribuição de descendentes possuem decaimento exponencial, então temos que exsite $s_0 > 1$ onde ψ e F são finitos. Por continuidade de F em $(0, s_0]$ e dado que $F(1) = 1$, segue que existe $s_1 > 1$ tal que $F(s_1) \leq s_0$. Sendo assim,

$$\tau(s_1) = \psi \circ F(s_1) < \psi(s_0) < \infty.$$

□

Lema 3.3 *Seja $p \in [0, \tilde{p})$. Então, existem constantes c_1 e c_2, positivas e finitas, tais que para todo $k \geq 0$*

$$\mathbb{P}_p(|L| > k) \leq c_1 e^{-c_2 k}, \tag{3-16}$$

onde $L = L_R$.

Prova. Considere o processo de ramificação descrito na demonstração da Proposição 3.2. Afirmamos que M é a média de descendentes desse processo. Para ver isso, repare que tal média pode ser escrita como

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_p(W|S\leq b-\theta) &= \sum_{w=0}^{b-s} w\mathbb{P}_p(W=w|S\leq b-\theta)\\
&= \frac{1}{\mathbb{P}_p(S\leq b-\theta)}\sum_{s=0}^{b-\theta}\sum_{w=0}^{b-s} w\mathbb{P}_p(W=w,S=s)\\
&= \frac{1}{\mathbb{P}_p(S\leq b-\theta)}\sum_{s=0}^{b-\theta}\sum_{w=1}^{b-s} w\binom{b}{w}\binom{b-w}{s}\vec{r}_\infty^{\,w}\vec{q}_\infty^{\,s}p^{b-w-s}\\
&= \frac{1}{\mathbb{P}_p(S\leq b-\theta)}\sum_{s=0}^{b-\theta}\sum_{w=1}^{b-s} w\frac{b!}{w!s!(b-w-s)!}\vec{r}_\infty^{\,w}\vec{q}_\infty^{\,s}p^{b-w-s}\\
&= \frac{b\vec{r}_\infty}{\mathbb{P}_p(S\leq b-\theta)}\sum_{s=0}^{b-\theta}\sum_{w=1}^{b-s} \frac{(b-1)!}{(w-1)!s!(b-w-s)!}\vec{r}_\infty^{\,w-1}\vec{q}_\infty^{\,s}p^{b-w-s}
\end{aligned}
$$

Mas note agora que $\frac{(b-1)!}{(w-1)!s!(b-w-s)!}=\binom{b-1}{s}\binom{b-s-1}{w-1}$. Logo, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_p(W|S\leq b-\theta) &= \frac{b\vec{r}_\infty}{\mathbb{P}_p(S\leq b-\theta)}\sum_{s=0}^{b-\theta}\sum_{w=1}^{b-s}\binom{b-1}{s}\binom{b-s-1}{w-1}\vec{r}_\infty^{\,w-1}\vec{q}_\infty^{\,s}p^{b-w-s}\\
&= \frac{b\vec{r}_\infty}{\mathbb{P}_p(S\leq b-\theta)}\sum_{s=0}^{b-\theta}\binom{b-1}{s}\vec{q}_\infty^{\,s}\sum_{w=1}^{b-s}\binom{b-s-1}{w-1}\vec{r}_\infty^{\,w-1}p^{b-w-s}
\end{aligned}
$$

Fazendo a mudança de variáveis $j=w-1$ ficamos com

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_p(W|S\leq b-\theta) &= \frac{b\vec{r}_\infty}{\mathbb{P}_p(S\leq b-\theta)}\sum_{s=0}^{b-\theta}\binom{b-1}{s}\vec{q}_\infty^{\,s}\sum_{j=0}^{b-s-1}\binom{b-s-1}{j}\vec{r}_\infty^{\,j}p^{b-s-1-j}\\
&= \frac{b\vec{r}_\infty}{\mathbb{P}_p(S\leq b-\theta)}\sum_{s=0}^{b-\theta}\binom{b-1}{s}\vec{q}_\infty^{\,s}(\vec{r}_\infty+p)^{b-s-1}\\
&= \frac{b\vec{r}_\infty}{\mathbb{P}_p(S\leq b-\theta)}\sum_{s=0}^{b-\theta}\binom{b-1}{s}\vec{p}_\infty^{\,b-s-1}\vec{q}_\infty^{\,s}\\
&= \frac{\vec{r}_\infty M(p)}{q\mathbb{P}_p(S\leq b-\theta)}=\frac{\mathbb{P}_p(\xi(R)=\underline{0})}{q\mathbb{P}_p(S\leq b-\theta)}M(p),
\end{aligned}
$$

já que, como já discutido, um vértice será fracamente vago se, e somente se, ele começa vago e possui uma quantidade menor que $b-\theta$ de vizinhos fortemente vagos. Repare que na demonstração acima usamos a notação $S=S_R$ e $W=W_R$.

Se tomamos, então, $p<\tilde{p}$, temos que o processo envolvendo $\overline{W}$ será subcrítico, já que a esperança de descendentes em cada geração será menor do que 1. Ou seja, temos que a distribuição de descendentes é limitada. Assim sendo, podemos aplicar a Proposição 3.3 e concluir o decaimento exponencial da distribuição de $|\overline{W}|$. Mas note agora que $L = \hat{O} \cup \overline{W}$ e que podemos limitar $|\hat{O}| \leq b|\overline{W}| + 1$, já que cada elemento de $\overline{W}$ possui, no máximo b vizinhos em $\hat{O}$. Desse modo, temos mostrado que a distribuição de L também possui decaimento exponencial para $p < \tilde{p}$. □

A seguinte proposição e o corolário subsequente nos auxiliarão na demonstração dos resultados futuros. Serão enunciados sem prova e estas podem ser encontradas em [Fontes e Schonmann 2008].

Proposição 3.4 *Tome* $2 \leq \theta \leq b$ *e seja* C *um subconjunto conexo, finito e não vazio de* $\mathbb{T}_b^+$ *contendo* R. *Defina*

$$\partial^* C = \{x \in C : |\vec{N}_x \setminus C| > b - \theta\}. \tag{3-17}$$

Então,

$$|\partial^* C| \geq \frac{|C|}{2}. \tag{3-18}$$

Corolário 3.4.1 *Da definição de* W *e* $\hat{O}$ *e da dinâmica bootstrap segue que para todo vértice de* $\partial^* W$ *existe um vértice distinto em* $\hat{O}$. *Temos então que*

$$|W| \leq 2|\hat{O}| \text{ e } |\vec{C}| \leq 3Z$$

onde Z *é o tamanho total da família do processo de ramificação.*

Feito isso, já temos condições de demonstrar a proposição mais importante ao nosso estudo do processo orientado.

Proposição 3.5 *Temos que*

1. *Lembrando da definição de* $\nu(p)$ *dada no Lema 3.1, o valor do ponto crítico da percolação é dado por*

$$\vec{p}_c = inf\{p \in [0, p_f] : \nu(p) = 1/b\} \in (0, \tilde{p}). \tag{3-19}$$

2. *Para* $p < \vec{p}_c$, *existem constantes* c_3 *e* c_4, *finitas e positivas, tais que para todo* $k \geq 0$

$$\mathbb{P}_p(|\vec{C}| > k) \leq c_3 e^{-c_4 k}. \tag{3-20}$$

3. $\mathbb{P}_{\vec{p}_c}(|\vec{C}| = \infty) = 0$ *e* $\mathbb{E}_{\vec{p}_c}(|\vec{C}|) = \infty$.

Prova. Considere a construção do aglomerado $\vec{C}_x$ descrita em (3-6) e (3-7). Já foi mostrado que $O := (O_n)_{n \geq 0}$ são as sucessivas gerações de um processo de ramificação com distribuição inicial dada por uma cópia de $|\hat{O}|$ e distribuição da descendência dada pela soma de b cópias i.i.d. de $|\hat{O}|$ independentes da configuração inicial. Além disso, quase certamente, $\{|\vec{C}| = \infty\}$ se, e somente se, o processo sobrevive. Como cada geração tem distribuição de descendentes dada pela soma de b cópias de $|\hat{O}|$, segue que sua esperança é dada por

$$\mathbb{E}_p(b|\hat{O}|) = b\mathbb{E}_p(|\hat{O}|) = b\nu(p)$$

e, como estamos em um processo de ramificação, podemos portanto escrever

$$b\nu(p) > 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}_p(|\vec{C}| = \infty) > 0. \tag{3-21}$$

Do Lema 3.3, temos que L_x possui decaimento exponencial e, como $\overline{W}$ também possui decaimento exponencial, segue de $L_x = \hat{O} \cup \overline{W}$ que, para $p < \tilde{p}$, $|\hat{O}|$ também possui decaimento exponencial. Podemos então aplicar a Proposição (B.1) e concluir que

$$b\nu(p) = 1 \Rightarrow \mathbb{E}_p(|\vec{C}|) = \infty. \tag{3-22}$$

Temos também que

$$b\nu(p) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}_p(|\vec{C}| = \infty) = 0 \tag{3-23}$$

já que nesse caso o processo é subcrítico. Vamos mostrar agora que existem constantes finitas $c_3, c_4 > 0$ tais que

$$b\nu(p) < 1, p < \tilde{p} \Rightarrow \mathbb{P}_p(|\vec{C}| > k) \leq c_3 e^{-c_4 k}. \tag{3-24}$$

Para isso, note que o processo de ramificação $O := (O_n)_{n\geq 0}$ possui decaimento exponencial pelo que foi discutido acima. Como estamos na fase subcrítica desse processo, podemos aplicar a Proposição 3.3, no caso que diz respeito a processos cuja distribuição inicial tem decaimento exponencial, e concluir o decaimento exponencial da distribuição de Z, onde Z é o tamanho total da família. Vamos mostrar agora que $|\vec{C}| \leq 3Z$. A Proposição 3.4 nos diz que para $2 \leq \theta \leq b$, e tomando T uma componente conexa de $\mathbb{T}_b^+$ contendo R, se definimos

$$\partial^* T = \{x \in T : |\vec{N}_x \setminus T| > b - \theta\},$$

então

$$|\partial^* T| \geq \frac{|T|}{2}.$$

Tomando agora o Corolário 3.4.1, temos que da definição de $\overline{W}$ e de $\hat{O}$, e pela própria dinâmica bootstrap, para cada vértice de $\partial^*\overline{W}$ existe um vértice distinto em $\hat{O}$. Isso porque se $x \in \partial^*\overline{W}$, então x tem mais de $b-\theta$ vizinhos que não pertencem a $\overline{W}$, ou seja, que não são fracamente vagos. Mas, nesse caso, se todos fossem fortemente vagos, x nunca seria ocupado pois ele jamais teria θ vizinhos ocupados o que é absurdo pois x é fracamente vago e portanto $\eta_\infty(x) = 1$. Sendo assim, $x \in \partial^*\overline{W}$ tem que ter, pelo menos, um vizinho ocupado. Logo, $|\partial^*\overline{W}| \leq |\hat{O}|$ e, nesse caso, segue da Proposição 3.4 que $|\overline{W}| \leq 2|\hat{O}|$. Vamos mostrar agora que $|\vec{C}| \leq 3Z$. Lembre que

$$\vec{C}_x = \bigcup_{n\geq 0} C_n. \tag{3-25}$$

onde $C_0 = L_x, O_0 = \hat{O}_x$ e

$$C_{n+1} = \bigcup_{y\in O_n}\bigcup_{z\in\vec{N}_y} L_z;\; O_{n+1} = \bigcup_{y\in O_n}\bigcup_{z\in\vec{N}_y} \hat{O}_z.$$

Procedemos então por indução em n. Defina Z_n como sendo o tamanho total da família do processo de ramificação até a geração n e repare que $L_x = \overline{W}_x \cup \hat{O}_x$. Como se trata de uma união disjunta, temos que

$$|C_0| = |L_x| = |\overline{W}_x| + |\hat{O}_x| \leq 3|\hat{O}_x| = 3Z_0.$$

Suponha então que

$$\left|\bigcup_{i=0}^{n} C_i\right| \leq 3Z_n.$$

Tome $y \in O_n$ arbitrário e seja $z \in \vec{N}_y$. O vértice z irá contribuir para o tamanho de $\vec{C}_x$ com seu aglomerado de sítios fracamente vagos, $\overline{W}_z$, e com sua fronteira de sítios inicialmente ocupados, $\hat{O}_z$. Pelo que já vimos anteriormente, segue que essa contribuição será menor que $|3\hat{O}_z|$. Além disso, pela geometria do processo, as contribuições que cada vértice na vizinhança de um elemento em O_n são independentes entre si. Elas também são independentes das contribuições que os vértices na vizinhança de outros elementos de O_n fazem. Como isso vale para todo vértice z que está na vizinhança orientada de qualquer elemento de O_n, temos que

$$|C_{n+1}| \quad = \quad \left|\bigcup_{y\in O_n}\bigcup_{z\in\vec{N}_y} L_z\right|$$

$$= \sum_{y\in O_n}\left|\bigcup_{z\in\vec{N}_y} L_z\right| = \sum_{y\in O_n}\sum_{z\in\vec{N}_y}|L_z| \leq 3\sum_{y\in O_n}\sum_{z\in\vec{N}_y}|\hat{O}_z| = 3\left|\bigcup_{y\in O_n}\bigcup_{z\in\vec{N}_y}\hat{O}_z\right| = 3|O_{n+1}|.$$

Por outro lado, perceba que podemos escrever

$$\left|\bigcup_{i=0}^{n+1} C_i\right| = \left|C_{n+1}\cup\bigcup_{i=0}^{n} C_i\right|$$

e, como os vértices em C_{n+1} não influenciam os vértices que estão acima deles, já que estamos no processo orientado, podemos concluir que

$$\left|\bigcup_{i=0}^{n+1} C_i\right| = |C_{n+1}| + \left|\bigcup_{i=0}^{n} C_i\right| \leq 3|O_{n+1}| + 3Z_n = 3(|O_{n+1}| + Z_n) = 3Z_{n+1}.$$

Logo, $|\vec{C}| \leq 3Z$ e, como Z tem decaimento exponencial, $|\vec{C}|$ também o terá para $p < \tilde{p}$ e $b\nu(p) < 1$. Segue, portanto, (3-20).

Defina agora

$$p' = \inf\{p \in [0, p_f] : b\nu(p) = 1\}$$

e lembre que $\tilde{p} = inf\{p \in [0, p_f] : M(p) = 1\}$. Como já foi discutido anteriormente, temos que $M(\tilde{p}) = 1$, $\nu(0) = 0$ e que $\nu(p)$ é analítica em $[0, p_f)$. Além disso, $\nu(p) \to \infty$ quando $p \uparrow \tilde{p}$. Mas, nesse caso, temos, em particular, que existe $p_0 < \tilde{p}$ tal que $\nu(p_0) > \frac{1}{b}$ para todo $p \in (p_0, p_f)$. Ora, mas nesse caso temos que $p' < p_0 < \tilde{p} \leq p_f$.

De (3-42), temos que $\mathbb{E}_{p'}(|\vec{C}|) = \infty$. Mas note que aumentar o valor de p produz também um aumento no tamanho do aglomerado, isto é, temos que

$$\mathbb{E}_p(|\vec{C}|) = \infty \text{ para } p > p'.$$

Considerando agora (3-24), perceba que $b\nu(p) \geq 1$ para $p > p'$. Isso porque, se tivessemos $b\nu(p) < 1$ então $\mathbb{P}_p(|\vec{C}| > k)$ teria decaimento exponencial e portanto não poderíamos ter $\mathbb{E}_p(|\vec{C}|) = \infty$ ali. Sendo assim, podemos concluir também que existem valores de $p > p'$, arbitrariamente próximos a p', tais que $b\nu(p) > 1$. De fato, mais uma vez a analicidade de $\nu(p)$ nos garante que o contrário não pode acontecer já que ela não pode ser constante em nenhum intervalo. Desse modo, (3-21) garante que $\vec{p}_c \leq p'$. Por fim, tome a experessão (3-24) novamente. Temos que para todo $p < p'$, o tamanho do aglomerado possui decaimento exponencial. Isso quer dizer que para todo $p < p'$, o modelo não percola e, portanto, podemos concluir que $p_c \geq p'$. Sendo assim, concluimos que $p_c = p'$. $\square$

3.6 O Caso Não Orientado

Nesta seção, serão discutidos e demonstrados resultados para o processo não orientado que são análogos aos da seção anterior que diziam respeito ao caso orientado. Para isso, serão introduzidos dois sistemas orientados modificados a partir dos quais o aglomerado C será construído. Primeiramente, portanto, é necessário que introduzamos alguma notação e terminologias.

Tome x um vértice de $\vec{\mathbb{T}}_b$. Diremos que x *aponta* para a raiz R se existe um caminho orientado em $\vec{\mathbb{T}}_b$ que começa em x e termina em R. Diremos ainda que um *elo aponta* para R se ele termina em um vértice que aponta para R. Seja então $\vec{\mathbb{T}}_b^*$ a árvore obtida revertendo-se todos os elos de $\vec{\mathbb{T}}_b$ que apontam para R. Perceba que na construção dessa nova árvore tudo o que estamos fazendo é tomar o vértice que está acima de R e passar ele para baixo de R juntamente com toda a árvore "acima" de R. Em resumo, $\vec{\mathbb{T}}_b^*$ será uma árvore orientada com raiz R onde todos os vértices possuem b elos emergindo com exceção da raiz que possui $b+1$. Além disso, a raiz R só possui elos emergindo, nenhum incidindo sobre ela. Chamaremos de $\vec{N}_x^*$ o conjunto de vizinhos orientados de x em $\vec{\mathbb{T}}_b^*$ e faremos a abreviação $\vec{N}^* = \vec{N}_R^*$. Sendo assim, pelo que foi discutido acima, $|\vec{N}^*| = b+1$ e $|\vec{N}_x^*| = b$ para todo $x \in \mathbb{V}_b \setminus R$. Note que, para $x \neq R$, o conjunto $N_x \setminus \vec{N}_x^*$ possui um único elemento. Seja então $x^{*,-}$ esse elemento. Note agora que, ao removermos $x^{*,-}$ juntamente com todos os elos de $\vec{\mathbb{T}}_b$ que são incidentes a $x^{*,-}$, ficamos com duas componentes conexas. Seja $\vec{\mathbb{T}}_b^{*,+,x}$ a componente que contem x. Seja ainda $\mathbb{V}_b^{*,+,x}$ o conjunto de vértices de $\vec{\mathbb{T}}_b^{*,+,x}$.

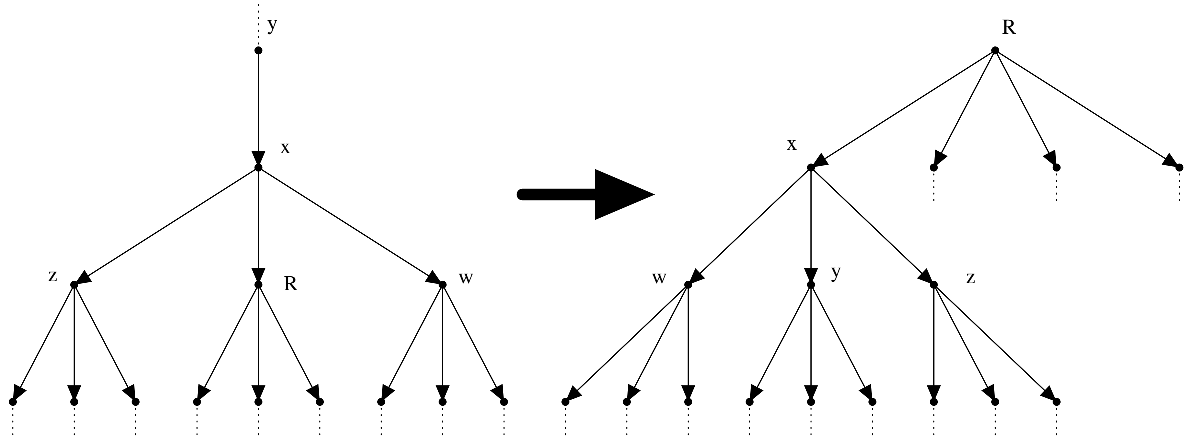

Figura 3.1: *Processo de construção da árvore $\vec{\mathbb{T}}_b^*$ (à direita) a partir da árvore $\vec{\mathbb{T}}$ (à esquerda). Note que os vértices x e y apontam para R e os elos que unem x a R e y a R também.*

Passemos então à definição da dinâmica bootstrap que será definida nessa árvore.

Seja $(\eta_n^*, n \geq 0)$ a dinâmica bootstrap orientada em $\vec{T}_b^*$ e seja C^* o aglomerado de vértices ocupados de η_∞^* contendo R. Seja agora $x \neq R$. Denote por $(\eta_n^{+,x}, n \geq 0)$ a dinâmica bootstrap em $\vec{\mathbb{T}}_b^{*,+,x}$ adicionando a seguinte perturbação: o limiar do vértice x será agora $\theta - 1$ em vez de θ; para todos os outros vértices o limiar continua sendo θ. $\eta_0^{+,x}$ é a restrição de η_0 ao conjunto de vértices de $\vec{\mathbb{T}}_b^{*,+,x}$. Por fim, para todo $y \in \mathbb{V}_b^{*,+,x}$, seja $C_y^{+,x}$ o aglomerado de vértices ocupados de $\eta_\infty^{+,x}$ contendo y com a convenção

$$C_x^+ := C_x^{+,x} \text{ e } C^+ := C_{x_0}^+$$

onde x_0 é um elemento fixo de $\vec{N}_R$. Note, portanto, que pela homogeneidade espacial da condição inicial e pelas regras da dinâmica, a distribuição de $|C_x^+|$ é independente da escolha de $x \neq R$.

Consideremos agora a Proposição 3.5. Segue dela que para $p < \vec{p}_c$, C^* e C^+ são, quase certamente, finitos e as distribuições de $|C^*|$ e $|C^+|$ têm decaimento exponencial. Denotemos então $X := |\bar{\partial} C^+|$ e $\tilde{X} := |\tilde{\partial} C^*|$ onde

$$\tilde{\partial} C^* = \{y \notin C^* : y \in \vec{N}_z^* \text{ para algum } z \in C^*\} \quad \text{e} \quad \tilde{\partial}\emptyset = \emptyset.$$

Nesse caso, podemos definir ainda

$$\sigma = \sigma(p) := \mathbb{E}_p(X | \xi(x_0) = \bar{0}) \text{ e} \tag{3-26}$$

$$\rho = \rho(p) := \mathbb{E}_p(|\bar{\partial}\vec{C}|). \tag{3-27}$$

Isso posto, temos condições de expor os resultados concernentes à dinâmica não orientada que vamos apresentar na forma de quatro lemas e uma proposição que é o resultado mais importante dessa seção. Começamos, portanto com o

Lema 3.4 *A função ρ definida em (3-27) é analítica em $[0, \vec{p}_c)$.*

Antes de passar à demonstração desse lema faremos as seguintes definições:

Definição 3.6.1 *Um animal na árvore será um subgrafo conexo de $\vec{\mathbb{T}}_b$ que contem a raiz R dessa árvore.*

Definição 3.6.2 *Chamaremos de configuração* orientadamente gerada de 0's e 1's *em um animal na árvore uma configuração para a qual o animal é internamente gerado pela dinâmica bootstrap orientada,* i.e., *o animal é inteiramente gerado pelos vértices que estão em seu interior e pela dinâmica bootstrap.*

Prova.[Do Lema 3.4] Defina $\vec{C}^{(0)}$ como sendo o conjunto de vértices de $\vec{C}$ que são inicialmente vagos e $\vec{C}^{(1)}$ o conjunto de vértices de $\vec{C}$ que são inicialmente ocupados. Note que podemos escrever

$$\mathbb{P}_p(|\bar{\partial}\vec{C}| = n) = \sum_{m,l} \mathbb{P}_p(|\vec{C}^{(0)}| = m, |\vec{C}^{(1)}| = l, |\bar{\partial}\vec{C}| = n) = \sum_{m,l} a_{nml} p^l q^m \vec{q}_\infty^n, \qquad (3\text{-}28)$$

onde a_{nml} é o número de animais da árvore com $m+l$ vértices e n vértices no bordo, e configurações orientadamente geradas com m vértices 0's e l vértices 1's nelas. Note agora que $|\vec{C}^{(0)}| + |\vec{C}^{(1)}| = |\vec{C}|$. Além disso, perceba que cada vértice em $\vec{C}$ tem, no máximo, b vizinhos em $\bar{\partial}\vec{C}$. Perceba ainda que todo elemento de $\partial^*\vec{C}$ também é elemento de $\bar{\partial}\vec{C}$ mas não o contrário, ou seja, $|\partial^*\vec{C}| \leq |\bar{\partial}\vec{C}|$. Sendo assim, aplicando essa conclusões juntamente com a Proposição 3.4, temos a seguinte cota:

$$\frac{|\vec{C}|}{2} \leq |\bar{\partial}\vec{C}| \leq b|\vec{C}|.$$

Seja $r = min\{p, q, \sqrt{\vec{q}_\infty}\}$. Note que

$$\begin{aligned} \sum_{m,l} a_{nml} p^l q^m \vec{q}_\infty^n &= \sum_{m,l} a_{nml} p^l q^m (\sqrt{\vec{q}_\infty})^{2n} > \sum_{m,l} a_{nml} r^{m+l} r^{2n} \\ &> \sum_{m,l} a_{nml} r^{2n} r^{2n}. \end{aligned}$$

Segue então que o lado direito da Equação (3-28) é cotada inferiormente por $r^{4n} \sum_{m,l} a_{nml}$. Além disso, como o lado esquerdo de (3-28) é uma probabilidade, segue que devemos ter

$$r^{4n} \sum_{m,l} a_{nml} \leq 1 \Rightarrow \sum_{m,l} a_{nml} \leq \left(r^{-4}\right)^n.$$

Mas a soma que acabamos de encontrar independe de p. Logo, devemos ter $\sum_{m,l} a_{nml} \leq (\lambda)^n$ com $\lambda = \inf_{0<p<p_f} r^{-4}$. Repare ainda que $\lambda < \infty$ já que $\vec{q}_\infty > 0$ para $p < p_f$, e $p_f > 0$.

Seja agora $W_1, W_2, \ldots, W_k$ os $\underline{0}$-subaglomerados de $\vec{C}$, *i.e.*, os aglomerados de sítios que estão vagos na configuração inicial mas que se ocupam na configuração final e passam a fazer parte de $\vec{C}$. Seja também O_i, com $1 \leq i \leq k$, a vizinhança inicialmente ocupada de W_i, *i.e.*, o conjunto de sítios ocupados na configuração inicial que são vizinhos de algum sítio em W_i. Repare primeiramente que existem sítios inicialmente ocupados que farão parte de $\vec{C}$ e que não são vizinhos de um sítio fracamente vago. Temos então que

$$|\vec{C}^{(1)}| \geq |O_1| + |O_2| + \ldots + |O_k|.$$

Além disso, dado W_i, para todo sítio x em $\partial^* W_i$, existe pelo menos um sítio na vizinhança de sítios inicialmente ocupados de x e, portanto, existe um sítio em O_i. Contudo, a existência um sítio na vizinhança de sítios inicialmente ocupados de x não necessariamente siginifica que $x \in \partial^* W_i$. Podemos portanto concluir, aplicando a Proposição (3.4), que

$$|O_i| \geq |\partial^* W_i| \geq \frac{1}{2}|W_i|, \forall i \in \{1,2,\ldots,k\}.$$

Como $|W_1|+|W_2|+\ldots+|W_k| = |\vec{C}^{(0)}|$, concluimos que

$$|\vec{C}^{(1)}| \geq |O_1|+|O_2|+\ldots+|O_k| \geq \frac{1}{2}\left(|W_1|+|W_2|+\ldots+|W_k|\right) = \frac{1}{2}|\vec{C}^{(0)}|.$$

Mas disso segue também que

$$\frac{1}{b}|\bar{\partial}\vec{C}| \leq |\vec{C}| = |\vec{C}^{(0)}|+|\vec{C}^{(1)}| \leq 3|\vec{C}^{(1)}|,$$

ou seja, $l \geq cn$, onde $c = \frac{1}{3b}$. Mais que isso, como $\frac{1}{2}|\vec{C}| \leq |\bar{\partial}\vec{C}|$, temos que

$$2n \geq m+l \geq h,$$

onde $h = max\{m,l\}$. Repare agora que temos então:

$$\begin{aligned}
\rho(p) = \mathbb{E}_p(|\bar{\partial}\vec{C}|) &= \sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}_p(|\bar{\partial}\vec{C}| = n) \\
&= \sum_{n\geq 1} n \sum_{m,l} a_{nml} p^l q^m \vec{q}_\infty^{\,n}.
\end{aligned}$$

Dado que $\vec{q}_\infty$ é analítica numa vizinhança complexa de $[0, p_f)$, podemos escrever, formalmente por enquanto, em uma vizinhança complexa de $[0, \vec{p}_c)$,

$$\rho(p) = \sum_{n\geq 1} n \sum_{m,l} a_{nml} z^l (1-z)^m \vec{q}_\infty(z)^n. \tag{3-29}$$

A fim de provarmos que ρ é analítica em $[0, \vec{p}_c)$, vamos mostrar que a série em (3-29) é uniformemente convergente em uma vizinhança de qualquer ponto daquele intervalo. Usando os resultados do início dessa demonstração, podemos escrever:

$$\left|\sum_{m,l} a_{nml} z^l (1-z)^m \vec{q}_\infty(z)^n\right| \leq \sum_{m,l} a_{nml} |z|^{cn} (1+|z|)^{2n} |\vec{q}_\infty(z)|^n.$$

Como a função $\vec{q}_\infty(z)$ é analítica numa vizinhança da origem e como $|\vec{q}_\infty(0)| = 1$, segue, por continuidade, que existe uma vizinhança de 0 na qual $|\vec{q}_\infty(z)| < 2$. Nessa vizinhança, portanto,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{m,l} a_{nml} z^l (1-z)^m \vec{q}_\infty(z)^n\right| &\leq \sum_{m,l} a_{nml} |z|^{cn} (1+|z|)^{2n} 2^n \\ &= |z|^{cn}(1+|z|)^{2n} 2^n \sum_{m,l} a_{nml} \\ &\leq |z|^{cn}(1+|z|)^{2n} 2^n \lambda^n = (d(z))^n.\end{aligned}$$

Tome agora $d(z) = 2\lambda |z|^c (1+|z|)^2 < 1$. Note que d é contínua e que $d(0) = 0$. Assim, deve existir uma vizinhança da origem onde $d(z) < 1$. Tomando a menor dentre essa vizinhança e a vizinhança que faz $|\vec{q}_\infty(z)| < 2$, segue a convergência uniforme da série em torno da origem, donde concluimos que ρ é analítica na origem.

Tome agora $p \in (0, \vec{p}_c)$ e $\delta > 0$ tal que $|z - p| \leq \delta$ e $|\vec{q}_\infty(z) - \vec{q}_\infty(p)| \leq \delta$. Segue que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{m,l} a_{nml} z^l (1-z)^m \vec{q}_\infty(z)^n\right| &\leq \sum_{m,l} a_{nml} p^l q^m \vec{q}_\infty(p)^n \left(\frac{p+\delta}{p}\right)^l \left(\frac{q+\delta}{q}\right)^m \left(\frac{\vec{q}_\infty(p)+\delta}{\vec{q}_\infty(p)}\right)^n \\ &\leq c(p,\delta)^n \sum_{m,l} a_{nml} p^l q^m \vec{q}_\infty(p)^n \\ &= c(p,\delta)^n \mathbb{P}_p(|\overline{\partial}\vec{C}| = n) \leq d(p,\delta)^n,\end{aligned}$$

onde

$$c(p,\delta) = \left(\frac{(p+\delta)(q+\delta)}{pq}\right)^2 \left(\frac{\vec{q}_\infty(p)+\delta}{\vec{q}_\infty}\right) \to 1 \text{ quando } \delta \to 0.$$

Como estamos na fase subcrítica, $p < \vec{p}_c$, a distribuição de $|\vec{C}|$ possui cauda com decaimento exponencial. Mas como $|\overline{\partial}\vec{C}| \leq b|\vec{C}|$, concluimos que também $|\overline{\partial}\vec{C}|$ possui cauda com decaimento exponencial. Sendo assim, tomando δ suficientemente pequeno, podemos fazer $d(p,\delta)$ estritamente menor que 1. Nesse caso, segue a convergência uniforme da série em (3-29) em $|z - p| \leq \rho$, como queríamos mostrar. □

Podemos passar agora a uma caracterização mais profunda da função σ definida em (3-26).

Lema 3.5 *Para $p \in [0, \vec{p}_c]$, temos que*

1. *A função* σ *pode ser escrita como*

$$\sigma(p) = \binom{b}{\theta-1} q\vec{q}_\infty^{\,b-\theta}\vec{p}_\infty^{\,\theta-2}\{(b-\theta+1)\vec{p}_\infty + (\theta-1)\rho\}; \tag{3-30}$$

2. $\sigma(p)$ *é analítica em* $[0,\vec{p}_c)$ *e*
3.
$$\sigma(p) = \begin{cases} \infty, \text{ quando } p \uparrow \vec{p}_c; \\ 0, \text{ quando } p \downarrow 0. \end{cases} \tag{3-31}$$

(Note que podemos ter $\xi(x_0) = \overline{0}$ e ainda assim $X := |\overline{\partial}C^+| \neq 0$. Isso porque ξ só diz respeito à nossa árvore orientada original enquanto que X diz respeito à árvore cuja raiz é x_0 e tal que o limiar de x_0 é $\theta - 1$. Ou seja, se x_0 tem exatamente $\theta - 1$ vizinhos ocupados ou fracamente vagos, então $\xi(x_0) = \overline{0}$ mas $X \neq 0$.)

Prova. Comecemos provando o ítem 1. Considere os seguintes eventos

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \sum_{x \in \vec{N}_{x_0}} 1\{\xi(x) = \underline{0} \text{ ou } 1\} = \theta - 1 \right\}, \\ B &= \left\{ \sum_{x \in \vec{N}_{x_0}} 1\{\xi(x) = \underline{0} \text{ ou } 1\} \leq \theta - 1 \right\}, \\ \tilde{A} &= \left\{ \sum_{i=1}^{\theta-1} 1\{\xi(x_i) = \underline{0} \text{ ou } 1\} = \theta - 1 \right\} \cap \left\{ \sum_{i=\theta}^{b} 1\{\xi(x_i) = \underline{0} \text{ ou } 1\} = 0 \right\} \end{aligned}$$

onde $\{x_1, x_2, \dots x_b\}$ é uma ordenação arbitrária e determinística de $\vec{N}_{x_0}$.

Note agora que $\{\xi(x_0) = \overline{0}\} = \{\eta_0(x_0) = 0\} \cap B$ já que, nesse caso, o sítio x_0 começa vago e possui no máximo $\theta - 1$ vizinhos ocupados ou fracamente vagos. Temos ainda que $X = 0$ no evento $\{\xi(x_0) = \overline{0}, A^c\}$ já que, nessa interseção, $\sum_{x \in \vec{N}_{x_0}} 1_{\{\xi(x) = \underline{0} \text{ ou } 1\}} < \theta - 1$ (caso contrário não teríamos $\xi(x_0) = \overline{0}$, o conjunto $\{\xi(x_0) = \overline{0}, A^c\}$ seria vazio e o vazio está contido no evento $X = 0$). Além disso, segue que $A \subset B$. Logo, temos que

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathbb{E}_p(X | \xi(x_0) = \overline{0}) \frac{\vec{q}_\infty}{\vec{q}_\infty} \\ \vec{q}_\infty \sigma &= \mathbb{E}_p(X, \xi(x_0)) = \sum_{X=k} k[\mathbb{P}_p(X, \xi(x_0), A) + \mathbb{P}_p(X, \xi(x_0), A^c)] \\ &= \mathbb{E}_p(X, \xi(x_0) = \overline{0}, A) \end{aligned}$$

Como A acontece, o número de primeiros vizinhos de x_0 fracamente vagos ou ocupados é igual a $\theta - 1$. Nesse caso, para que x_0 seja fortemente vago, basta que ele esteja vago na configuração inicial:

$$\begin{aligned}\vec{q}_\infty \sigma &= \mathbb{E}_p(X, \xi(x_0) = \overline{0}, A) = \mathbb{E}_p(X, \eta_0(x_0), A) \\ &= \binom{b}{\theta - 1} \mathbb{E}_p(X, \eta_0(x_0) = 0, \tilde{A}).\end{aligned}$$

Note que, se condicionamos essa esperança ao evento $\tilde{A}$, ficamos com:

$$\vec{q}_\infty \sigma = \binom{b}{\theta - 1} \mathbb{E}_p(X, \eta_0(x_0) = 0 | \tilde{A}) \mathbb{P}_p(\tilde{A}).$$

Note também que no evento $\tilde{A}$ teremos $b - \theta + 1$ vizinhos de x_0 que serão fortemente vagos e, portanto, contribuirão com sua presença na fronteira de X. Além disso, teremos $\theta - 1$ vizinhos que são fracamente vagos ou ocupados e estes contribuirão para a fronteira de X com suas próprias fronteiras de sítios fortemente vagos. É preciso perceber, contudo, que quando estamos lidando com o aglomerado de x_0 estamos tratando do processo em que o vértice x_0 possui limiar $\theta - 1$ e todos os outros vértices continuam possuindo o mesmo limiar θ, definido no início dessa seção, ao passo que, quando passamos a observar os aglomerados dos vizinhos de x_0, voltamos a considerar o processo orientado usual. Isso posto, temos que

$$\vec{q}_\infty \sigma = \binom{b}{\theta - 1} \mathbb{E}_p(|\overline{\partial} \vec{C}_{x_1}| + \ldots + |\overline{\partial} \vec{C}_{x_{\theta-1}}| + b - \theta + 1, \eta_0(x_0) = 0 | \tilde{A}) \mathbb{P}_p(\tilde{A})$$

onde, novamente, $\{x_1, \ldots, x_{\theta-1}\}$ é uma escolha de vértices de $\vec{N}_{x_0}$. Mas perceba que as variáveis aleatórias na esperança que estamos calculando são identicamente distribuídas e, portanto,

$$\begin{aligned}\vec{q}_\infty \sigma &= \binom{b}{\theta - 1} \left\{ \sum_{i=1}^{\theta-1} \mathbb{E}_p(|\overline{\partial} \vec{C}_{x_1}|, \eta_0(x_0) = 0 | \tilde{A}) \mathbb{P}_p(\tilde{A}) + \mathbb{E}_p(b - \theta + 1, \eta_0(x_0) = 0 | \tilde{A}) \mathbb{P}_p(\tilde{A}) \right\}. \\ &= \binom{b}{\theta - 1} \{ (\theta - 1) \mathbb{E}_p(|\overline{\partial} \vec{C}_{x_1}|, \eta_0(x_0) = 0 | \tilde{A}) \mathbb{P}_p(\tilde{A}) + \mathbb{E}_p(b - \theta + 1, \eta_0(x_0) = 0 | \tilde{A}) \mathbb{P}_p(\tilde{A}) \} \\ &= \binom{b}{\theta - 1} \{ (\theta - 1) \mathbb{E}_p(|\overline{\partial} \vec{C}_{x_1}|, \eta_0(x_0) = 0, \tilde{A}) + (b - \theta + 1) \mathbb{P}_p(\eta_0(x_0) = 0, \tilde{A}) \} \\ &= \binom{b}{\theta - 1} \{ (\theta - 1) q \vec{p}_\infty^{\,\theta-2} \vec{q}_\infty^{\,b-\theta+1} \rho + (b - \theta + 1) q \vec{p}_\infty^{\,\theta-1} \vec{q}_\infty^{\,b-\theta+1} \} \\ &= \binom{b}{\theta - 1} q \vec{p}_\infty^{\,\theta-2} \vec{q}_\infty^{\,b-\theta+1} \{ (\theta - 1) \rho + (b - \theta + 1) \vec{p}_\infty \} \end{aligned} \quad (3\text{-}32)$$

Do Lema 3.4 temos que ρ é analítica. Sendo assim, pela expressão que chegamos acima, segue que σ é analítica e temos assim provado o Item 2 do lema.

A fim de provar o Item 3 procedemos da seguinte maneira. Primeiramente note que $\vec{p}_\infty$ some quando $p \to 0$. Isso porque, como já foi discutido anteriormente, temos que $\vec{p}_\infty = \vec{p}_\infty(p)$ é analítica em $[0, p_f)$. Em particular, ela será contínua nesse intervalo e, como $\vec{p}_\infty(0) = 0$, pela própria definição de $\vec{p}_\infty$, segue o que queríamos provar. Analogamente, como $\rho(0) = 0$ e temos, pelo Lema 3.4 que ρ é analítica, quando $p \to 0$ temos que ρ também some, o que mostra a segunda linha da afirmação 3 do lema. Para mostrar a primeira linha, note que $\mathbb{E}_{\vec{p}_c}(|\vec{C}|) = \infty$. Note também que segue de (3-18) que

$$|\bar{\partial}\vec{C}| \geq |\partial^*\vec{C}| \geq \frac{|\vec{C}|}{2}.$$

Ou seja, temos que $\mathbb{E}_{\vec{p}_c}(|\bar{\partial}\vec{C}|) = \infty$ donde segue que $\rho(\vec{p}_c) = \infty$, o que mostra o resultado que queríamos. $\square$

Isso feito, podemos passar agora à construção do aglomerado. Para isso, iremos construir C como um aglomerado de aglomerados, interativamente, da seguinte maneira.

Defina

$$\hat{C}_0 = C^*, S_0 = \tilde{\partial}C^*$$

e, para $n \geq 0$ tome

$$\hat{C}_{n+1} = \bigcup_{y \in S_n} C_y^+ \;,\; S_{n+1} = \bar{\partial}\hat{C}_{n+1} = \bigcup_{y \in S_n} \bar{\partial}C_y^+ \;;\; \hat{C} = \bigcup_{n \geq 0} \hat{C}_n. \tag{3-33}$$

Repare que na construção do aglomerado $\hat{C}$, C_i, qualquer que seja i, termina em uma fronteira de vértices fortemente vagos no processo orientado. Para cada vértice x nessa fronteira, tomaremos posteriormente o aglomerado C_x^+. Veja então que por esse motivo só terá um aglomerado não vazio aqueles vértices que possuem $\theta - 1$ vizinhos ocupados "abaixo" já que, caso contrário, como eles já estão vagos, eles não se ocupariam nunca.

Se $p \leq \vec{p}_c$, então pelo que foi mostrado nas seções anteriores, quase certamente em cada passo teremos a adição de um conjunto finito de vértices. Isso porque se $p \leq \vec{p}_c$ e tomamos a árvore com raiz em y, então quase certamente o aglomerado de y será finito. Sendo assim, a fronteira desse aglomerado também o será. Note, por fim, que o conjunto finito que será adicionado em cada espaço pode, na realidade, ser um conjunto vazio. Nesse caso, segue que todas as adições subsequentes serão vazias e, portanto, definimos que a iteração pára. O próximo lema ajuda a entender a formação desse aglomerado ao mesmo tempo em que caracteriza melhor os conjuntos S_n.

Lema 3.6 *Quando $p \leq \vec{p}_c$, $(S_n)_{n \geq 0}$ têm a distribuição das gerações sucessivas de um processo de ramificação com distribuição inicial dada pela distribuição de $\tilde{X}$ e distribuição* *de descendentes dada pela distribuição condicional de X dado $\xi(x_0) = \overline{0}$.*

Prova. Demonstraremos usando indução em n.

Temos que $S_0 = \overline{\partial} C^*$. Logo, pela definição de $\tilde{X}$, segue que a distribuição inicial de S_0 é como afirma o teorema.

Suponhamos agora que o lema valha para $S_0, S_1, \ldots, S_n$, com $n \geq 0$. Note que para que um vértice esteja em S_n ele deve ser um vértice fortemente vago com respeito ao processo orientado já que, caso contrário, ele certamente se ocuparia no processo orientado e, portanto, estaria em $\hat{C}_n$. Note também que pela construção do aglomerado, a descendência de S_n, isto é, S_{n+1}, será formado pela união de $\overline{\partial} C_y^+$ para todo y em S_n. Mas temos que, sem perda de informação, podemos tomar cada um desses y como sendo um vizinho da raiz R da árvore, dado que esse vizinho seja fortemente vago. Isso posto repare então que S_{n+1} depende apenas de η_0 restrito a S_n e de $\cup_{y \in S_n} \mathbb{V}_b^{*,+,y}$, que é uma união disjunta. E já que $\xi \equiv \overline{0}$ em S_n, o resultado segue.

□

Notemos agora que se o processo S sobrevive, então sempre haverá novos elementos $y \in S_n$, $\forall n$. Sendo assim sempre teremos $\hat{C}_n \neq \emptyset$ para todo n e, consequentemente, $|\hat{C}| = \infty$. Por outro lado, se $|\hat{C}| = \infty$, então ou $\hat{C}_n \neq \emptyset$, e nesse caso, pelo mesmo motivo acima, temos que o processo S sobrevive, ou $|\hat{C}_n| = \infty$ para algum n. Mas esse segundo caso não ocorre, quase certamente, porque estamos considerando a fase subcrítica do processo. Logo, temos que

$$S \text{ sobrevive } \Leftrightarrow |\hat{C}| = \infty.$$

Finalmente, terminamos a construção do aglomerado com o

Lema 3.7 $C = \hat{C}$.

Prova. Antes de tudo, perceba que $\hat{C}_0 = C^*$ não é o aglomerado não orientado final da origem. Isso porque ele diz respeito à árvore $\mathbb{T}_b$ onde consideramos o processo orientado. Logo, existem vértices fortemente vagos em $\mathbb{T}_b$ que podem se tornar ocupados quando olhamos para o processo não orientado.

A fim de provar o lema, começaremos mostrando que $\hat{C} \subset C$. Para isso, procedemos mais uma vez por indução.

Temos que $\hat{C}_0 = C^* \subset C$. Note agora que $\hat{C}_0$ é não vazio, então ele é internamente gerado, *i.e.*, a dinâmica bootstrap restrita a $\hat{C}_0$ eventualmente o ocupa totalmente.

Suponha agora que $\bigcup_{i=0}^{n} \hat{C}_i \subset C, n \geq 0$. Temos que se $\hat{C}_{n+1}$ é não-vazio então ele se torna totalmente ocupado quando olhamos a dinâmica bootstrap restrita a $\bigcup_{i=0}^{n+1} \hat{C}_i$. Isso porque, dado $\hat{C}_{n+1}$, ele só recebe influência de vértices que pertencem a ele mesmo e de vértices que estão acima dele; se recebesse dos vértices que estão abaixo dele, então estes fariam parte dele e $\hat{C}_{n+1}$ seria maior. Mas perceba que $\bigcup_{i=0}^{n}\hat{C}_i$ é conexo e contem a raiz R. Logo, $\bigcup_{i=0}^{n}\hat{C}_i \subset C$. Mas, como n é arbitrário, segue que $\hat{C} \subset C$.

Mostraremos agora que $C \subset \hat{C}$.

Faremos as seguinte classificação dos vértices de $\mathbb{V}_b^* \setminus \{R\}$:

Dado $x \neq R$,

$$\xi^*(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } \eta_0^*(x) = 1; \\ \underline{0}^*, \text{ se } \eta_0^* = 0 \text{ mas } \eta_\infty^*(x) = 1; \\ \overline{0}^*, \text{ se } \eta_\infty^* = 0. \end{cases} \tag{3-34}$$

Defina agora $\kappa_x = \sum_{y \in \vec{N}_x^*} 1_{\{\xi^*(y)=1 \text{ ou } \underline{0}^*\}}$ e façamos

$$\tilde{\xi}(x) = \begin{cases} \xi^*, \text{ se } \xi^*(x) = 1 \text{ ou } \underline{0}^*; \\ \underline{0}, \text{ se } \xi^*(x) = \overline{0}^* \text{ e } \kappa(x) = \theta - 1; \\ \overline{\overline{0}}, \text{ se } \xi^*(x) = \overline{0}^* \text{ e } \kappa(x) < \theta - 1. \end{cases} \tag{3-35}$$

Perceba que agora estamos classificando como $\underline{0}$ aqueles vértices que ficariam vagos em $\vec{\mathbb{T}}^*$ mas que não vão ficar no processo não orientado. Isso porque se ele tem $\theta - 1$ vizinhos ocupados ou fracamente vagos abaixo dele, eventualmente o seu vizinho de cima se ocupará e aí então no processo orientado ele passará a ter θ vizinhos ocupados e se ocupará também.

Segue então que

$$\eta_\infty(x) = 0 \text{ se } \tilde{\xi} = \overline{\overline{0}}. \tag{3-36}$$

E, para $x \neq R$,

$$\eta_\infty(x) = 1 \text{ se } \tilde{\xi}(x) = \underline{0} \text{ e } \eta_\infty(x^{*,-}) = 1. \tag{3-37}$$

Tomemos agora um vértice x de $C \neq \emptyset$ e o caminho auto-evitante $R = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = x$, com $x_i \in \vec{N}_{x_{i-1}}^*$ que o conecta a R. Afirmamos que $x_i \in \hat{C}$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Provaremos esse fato usando indução em i.

Usando um argumento similar ao usado no último parágrafo da Proposição 2-13, temos que $\eta_\infty(R) = \eta_\infty^*(R)$. Suponhamos agora que a afirmação seja falsa para algum $0 < i \leq n$ e tome $i_0 = \min\{i = 1, \ldots, n : x_i \notin \hat{C}\}$. Devemos ter então $\tilde{\xi}(x_{i_0}) = \overline{\overline{0}}$. Isso porque, pela definição de i_0, temos que $x_{i_0}^{*,-} \in \hat{C}$ e portanto $\eta_\infty(x_{i_0}^{*,-}) = 1$. Logo, $\tilde{\xi}(x) \neq \underline{0}$ e, se x_{i_0} terminasse ocupado teríamos $\eta_\infty(x_{i_0}) = 1$ e, por (3-37), concluiríamos que $x_{i_0} \in \hat{C}$. Além disso, note também que x_{i_0} não pode começar ocupado pois, como $x_{i_0}^{*,-}$ está ocupado, se x_{i_0} também estivesse, então teríamos $x_{i_0} \in \hat{C}$. Por outro lado, se $\tilde{\xi}(x_{i_0}) = \overline{\overline{0}}$, então, por (3-36), teríamos que $\eta_\infty(x_{i_0}) = 0$ o que não ocorre pois $x_{i_0} \in C$. Logo, $x \in \hat{C}$ e $C \subset \hat{C}$.

$\square$

A proposição a seguir agrega os principais resultados dessa seção.

Proposição 3.7 *Temos que:*

1. *O ponto crítico de percolação é dado por*

$$p_c = inf\{p \in [0, p_f] : \sigma(p) = 1\} \in (0, \vec{p}_c); \tag{3-38}$$

2. *Para $p < p_c$, $\mathbb{P}_p$, existem constantes $c_1, c_2 \in (0, \infty)$ tais que $\forall k \geq 0$*

$$\mathbb{P}_p(|C| > k) \leq c_1 e^{-c_2 k}; \tag{3-39}$$

3. *Em $p = p_c$, $\mathbb{P}_p(|C| > k) \to 0$ quando $k \to \infty$ e $\mathbb{E}_p(|C|) = \infty$;*
4. *Para $p > p_c$, existem constantes c'_1, c'_2 tais que $\forall k \geq 0$*

$$\mathbb{P}_p(k < |C| < \infty) \leq c'_1 e^{-c'_2 k}. \tag{3-40}$$

Prova. A demonstração dos três primeiros ítens dessa proposição será feita de maneira análoga àquela feita para a Proposição 3.5 trocando-se $b\nu$ por σ, $\vec{C}$ por C, O_0 por $\tilde{X}$ e o decaimento exponencial de $\hat{O}$ por aqueles de X e $\tilde{X}$ (esses decaimentos seguem também da Proposição 3.5).

Temos que $\{|C| = \infty\} \Leftrightarrow \{S \text{ sobrevive}\}$. Ou seja, devemos ter

$$\mathbb{E}_p(X|\xi(x_0) = \overline{0}) = \sigma > 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}_p(|C| = \infty) > 0. \tag{3-41}$$

Pelo decaimento exponencial de X e $\tilde{X}$ em $(0, \vec{p}_c)$, e invocando novamente a Proposição (B.1), temos que

$$\sigma(p) = 1 \Rightarrow \mathbb{E}_p(|C|) = \infty \Rightarrow \mathbb{E}_{p_c}(|C|) = \infty. \tag{3-42}$$

Temos ainda que

$$\sigma(p) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}_p(|C| = \infty) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_{p_c}(|C| = \infty). \tag{3-43}$$

Mostraremos agora que

$$\sigma(p) < 1, p < p_c \Rightarrow \mathbb{P}_p(|C| > k) \leq c_1 e^{-c_2 k} \tag{3-44}$$

com $c_1, c_2 \in (0, \infty)$.

O decaimento exponencial da distribuição de descendentes do processo de ramificação $(S_n)_{n \geq 0}$ segue do Lema 3.3. Como estamos na fase subcrítica, já que $\sigma < 1$, podemos aplicar a Proposição 3.3 e concluir o decaimento exponencial de Z, o tamanho total de sua família. Da Proposição 3.4, temos que $|C| \leq 2|\partial^* C| \leq 2Z$ onde $\partial^* C = \{x \in C : |\vec{N}_x \setminus C| > b - \theta\}$. Ou seja, $\mathbb{P}_p(|C| > k) \leq c_1 e^{-c_2 k}$ com $c_, c_2 \in (0, \infty)$.

Defina agora

$$p^* = inf\{p \in [0, p_f] : \sigma(p) = 1\}.$$

Do Lema 3.5, temos que σ é analítica em $[0, \vec{p})$. Em particular, portanto, ela é contínua naquele intervalo. Além disso, temos que $\sigma(p) \longrightarrow \infty$ quando $p \uparrow p_c$ e $\sigma(p) \longrightarrow 0$ quando $p \downarrow 0$. Sendo assim, segue então que deve existir um valor de p para o qual $\sigma(p) = 1$. Tome então p^* como sendo o ínfimo desses valores. Temos ainda que $0 < p^* < \vec{p}_c \leq p_f$ e, ainda pela continuidade de σ, que $\sigma(p^*) = 1$.

Note que, pela analiticidade da função σ, devem existir valores $p > p^*$ arbitrariamente próximos de p^* tais que $\sigma(p) \neq 1$. De (3-42), temos que $\mathbb{E}_{p^*}(|C|) = \infty$. Por mononicidade da esperança do tamanho do aglomerado em p, segue também que $\mathbb{E}_p(|C|) = \infty, \forall p \geq p^*$.

De (3-43) temos que $\sigma(p) \geq 1$ para $p > p^*$. Isso porque, se tivéssemos $\sigma(p) < 1$, então $\mathbb{P}_p(|C| > k)$ teria decaimento exponencial e portanto não poderíamos ter $\mathbb{E}_p(|C|) = \infty$ ali. Portanto, existem valores de $p > p^*$ arbitrariamente próximos de p^* para os quais $\sigma(p) > 1$. Ou seja, de (3-41) segue que $p_c \leq p^*$. Note que p^* é o ínfimo dos valores de p para os quais $\sigma(p) = 1$. Temos então de (3-41) novamente que, $\forall p < p^*$, $\mathbb{P}_p(|C| = \infty) = 0$. Logo, $p_c \geq p^*$. Sendo assim, temos que $p_c = p^*$.

Demonstremos agora o item 4. Primeiramente, note que se $\mathbb{P}_p(\eta_\infty \equiv 1) = 1$, ou seja, todos os sítios estão ocupados no limite, então a afirmação é óbvia já que, nesse caso, $\mathbb{P}_p(k < |C| < \infty) = 0$. Pelas desigualdades que relacionam o volume e o perímetro de conjuntos conexos finitos, Proposição 3.4, podemos substituir C por Z, o tamanho total da família do $S-$processo de ramificação. Portanto, é suficiente mostrar que

$$\mathbb{P}_p(k < Z < \infty) \leq c_1'' e^{-c_2'' k} \tag{3-45}$$

com $c_1'', c_2'' \in (0, +\infty)$.

Da demonstração dos ítens 1 até 3, temos que se $p_c < p \leq \vec{p}_c$ então $(|S_n|)_{n \geq 0}$ é um processo de ramificação supercrítico começando em $\tilde{X}$. Podemos então escrever:

$$|S_n| = V_n^{(1)} + V_n^{(2)} + \ldots + V_n^{(\tilde{X})} \tag{3-46}$$

onde $V_n^{(1)}, V_n^{(2)}, \ldots$ são cópias i.i.d. de um processo de ramificação $(V_n)_{n \geq 0}$ começando do 1. Note que em S_0 temos, em média, $\tilde{X}$ descendentes. Temos que cada um desses elementos gera um processo de ramificação. Nesse caso, $V_n^{(i)}$ é a n-ésima geração do processo de ramificação que começou com o único elemento i. O processo tem probabilidade de extinção dada por

$$\gamma = \gamma(p) < 1. \tag{3-47}$$

Considere agora que tenhamos $p > \vec{p}_c$. Se $|S_n| < \infty$, então a construção de $|S_{n+1}|$ ainda está bem definida. Contudo, $|S_n|$ pode tomar o valor ∞ para algum n porque pode ser que tenhamos um sítio abaixo da raiz cujo aglomerado de sítios ocupados é infinito e nesse caso teríamos S_n infinito. Assumamos então que ∞ é uma armadilha para o processo $(|S_n|)_{n\geq 0}$, isto é, se em algum momento temos $|S_n| = \infty$, então o processo termina ali. Nesse caso, observe que $(|S_n|)_{n\geq 0}$ também é um processo de ramificação, nesse caso começando de $\tilde{X}$ e que (3-46) e (3-47) valem para $\{\tilde{X} < \infty\}$.

Suponha agora que tenhamos $\mathbb{P}_p(V_1 = 0) = 0$. Nesse caso, todos os processos $V_n^{(i)}$, com $i = 1, 2, \ldots, \tilde{X}$, teriam uma primeira geração com, pelo menos um elemento. Afirmamos que, nesse caso, todo os vértices em S_0 estariam ocupados na configuração final do processo não orientado. De fato: tome $x \in S_0$ e suponha que $\eta_\infty(x) = 0$. Nesse caso, $C_x^+ = \emptyset$ já que não existiria nenhum $y \in \vec{\mathbb{T}}^{*,+,x}$ ligado a x por um caminho composto inteiramente por sítios ocupados. Ora, mas se o aglomerado C_x^+ é vazio, sua fronteira $\overline{C}_x^+$ também é. Ou seja, teríamos que $V_1^x = \emptyset$ o que contradiz nossa hipótese de que $\mathbb{P}_p(V_1 = 0) = 0$. Logo, todo $x \in S_0$ se torna ocupado pelo processo não orientado. Tome então $x' \in S_1$ arbitrário. Podemos considerar o processo de ramificação começando de x', aplicar o mesmo raciocínio feito acima e concluir que $\eta_\infty(x') = 1$, $\forall x' \in S_1$. Repetindo esse processo mostramos que, para todo n, todos os vértices de S_n estarão ocupados na configuração final. Ora, mas esse fato então implicaria que a rede toda se ocupa na configuração final já que todos os vértices da árvore pertenceriam ou a $\hat{C}_n$ ou a S_n, para algum n, o que é absurdo pois estamos supondo desde o início da demonstração que $\mathbb{P}_p(\eta_\infty \equiv 1) = 0$. Logo, devemos ter $\mathbb{P}_p(V_1 = 0) > 0$. Além disso, temos a seguinte inclusão de eventos: $\{V_1 = 0\} \subset \{\text{extinção do processo}\}$. Sendo asism, segue que

$$\gamma \geq \mathbb{P}_p(V_1 = 0) > 0.$$

Tome agora

$$\varphi_p(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_p(|S_{n+1}| = k \,|\, |S_n| = 1)s^k, s \geq 0 \tag{3-48}$$

a função geradora de probabilidades da distribuição de descendentes de $(|S_n|)_{n\geq 0}$ e $(V_n)_{n\geq 0}$. Temos que

$$\varphi_p(s) < 1 \text{ para } 0 \leq s < 1 \tag{3-49}$$

pois, nesse caso, $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_p(|S_{n+1}| = k \,|\, |S_n| = 1)s^k < \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_p(|S_{n+1}| = k \,|\, |S_n| = 1) = 1$.

Note que o evento $\{\sum_{n=0}^{\infty} S_n = Z < \infty\}$ é, precisamente, o evento $\{(|S_n|)_{n\geq 0}$ se extingue$\}$. Condicionado a $\{Z < \infty\}$, portanto, temos que $(|S_n|)_{n\geq 0}$ se torna um processo de ramificação subcrítico. Isso é provado como teorema em [Durrett 2007]. A função geradora de probabilidades passa a ser

$$\overline{\varphi}_p(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_p(|S_{n+1}| = k \,|\, |S_n| = 1, Z < \infty) s^k. \tag{3-50}$$

Podemos então reescrevê-la como sendo

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}_p(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{P}_p(|S_{n+1}| = k, |S_n| = 1, Z < \infty)}{\mathbb{P}_p(|S_n| = 1, Z < \infty)} s^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{P}_p(|S_{n+1}| = k, Z < \infty \,|\, |S_n| = 1)}{\mathbb{P}_p(Z < \infty \,|\, |S_n| = 1)} s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{P}_p(|S_{n+1}| = k, Z < \infty \,|\, |S_n| = 1)}{\gamma} s^k
\end{aligned} \tag{3-51}$$

Perceba que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_p(|S_{n+1}| = k, Z < \infty \,|\, |S_n| = 1) &= \frac{\mathbb{P}_p(|S_{n+1}| = k, Z < \infty, |S_n| = 1)}{\mathbb{P}_p(|S_n| = 1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}_p(Z < \infty \,|\, |S_{n+1}| = k, |S_n| = 1)\mathbb{P}_p(|S_{n+1}| = k, |S_n| = 1)}{\mathbb{P}_p(|S_n| = 1)} \\
&= \gamma^k \, \mathbb{P}_p(|S_{n+1}| = k \,|\, |S_n| = 1).
\end{aligned}$$

Substituindo então em (3-51):

$$\overline{\varphi}_p(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{P}_p(|S_{n+1}| = k \,|\, |S_n| = 1)}{\gamma} \gamma^k s^k \tag{3-52}$$

$$= \frac{\varphi_p(\gamma s)}{\gamma}. \tag{3-53}$$

Note que, de (3-47), podemos tomar $s = \frac{1}{\gamma} - \varepsilon > 1$ para algum ε. Nesse caso, temos $s\gamma = 1 - \varepsilon\gamma < 1$ e, de (3-49), $\varphi_p(s\gamma) < 1$. Assim, $\frac{\varphi_p(s\gamma)}{\gamma} < \infty$. Nesse caso, existe $M > 0$ tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{P}_p(|S_{n+1}| = k \,|\, |S_n| = 1)}{\gamma} \gamma^k s^k < M.$$

Ou seja, para todo k,

$$\frac{\mathbb{P}_p(|S_{n+1}| = k \,|\, |S_n| = 1)}{\gamma} \gamma^k s^k < M$$

donde $\frac{\mathbb{P}_p(|S_{n+1}|=k||S_n|=1)}{\gamma}\gamma^k < Ms^{-k}$. Mas perceba que $\mathbb{P}_p(|S_{n+1}| = k||S_n| = 1)\gamma^k = \mathbb{P}_p(\tilde{X} = k)\gamma^k$ e que $\mathbb{P}_p(Z, \infty) = \gamma$. Sendo assim,

$$\frac{\mathbb{P}_p(\tilde{X})\gamma^k}{\mathbb{P}_p(Z < \infty)} = \mathbb{P}_p(\tilde{X} = k|Z < \infty) < Ms^{-k},$$

donde $\mathbb{P}_p(\tilde{X} = k|Z < \infty)$ possui decaimento exponencial. Aplicando então a Proposição 3.3, concluimos que o tamanho total família Z do S-processo de ramificação também possui cauda com decaimente exponencial, o que conclui a demonstração.

$\square$

Referências Bibliográficas

[Balogh, Peres e Pete 2006]BALOGH, J.; PERES, Y.; PETE, G. Bootstrap percolation on infinite trees and non-amenable groups. *Combinatorics, Probability and Computing*, Cambridge Univ Press, v. 15, n. 05, p. 715–730, 2006.

[Chalupa, Leath e Reich 1979]CHALUPA, J.; LEATH, P. L.; REICH, G. R. Bootstrap percolation on a bethe lattice. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, IOP Publishing, v. 12, n. 1, p. L31, 1979.

[Durrett 2007]DURRETT, R. *Random graph dynamics*. [S.l.]: Cambridge university press Cambridge, 2007.

[Enter 1987]ENTER, A. C. van. Proof of straley's argument for bootstrap percolation. *Journal of Statistical Physics*, Springer, v. 48, n. 3, p. 943–945, 1987.

[Enter, Adler e Duarte 1990]ENTER, A. V.; ADLER, J.; DUARTE, J. Finite-size effects for some bootstrap percolation models. *Journal of Statistical Physics*, Springer, v. 60, n. 3-4, p. 323–332, 1990.

[Fontes e Schonmann 2008]FONTES, L.; SCHONMANN, R. Bootstrap percolation on homogeneous trees has 2 phase transitions. *Journal of Statistical Physics*, Springer, v. 132, n. 5, p. 839–861, 2008.

[Grimmett 1999]GRIMMETT, G. R. *Percolation*. [S.l.]: Springer, 1999.

[Hofstad 2009]HOFSTAD, R. V. D. Random graphs and complex networks. *Available on http://www. win. tue. nl/rhofstad/NotesRGCN. pdf*, 2009.

[Schonmann 1992]SCHONMANN, R. H. On the behavior of some cellular automata related to bootstrap percolation. *The Annals of Probability*, JSTOR, p. 174–193, 1992.

APÊNDICE A

Lista de Símbolos

Lista de símbolos usados na Seção 2.1		
Símbolo	**Definição**	**Página**
$\mathbb{T}_b$	Árvore homogênea não orientada de grau $b+1$	10
$\vec{\mathbb{T}}_b$	Árvore homogênea orientada de grau $b+1$	10
$\mathbb{V}_b$	Conjunto de vértices de $\mathbb{T}_b$ e $\vec{\mathbb{T}}_b$	10
N_x	Conjunto de primeiros vizinhos não orientados de $x \in \mathbb{V}_b$	10
$\vec{N}_x$	Conjunto de primeiros vizinhos orientados de $x \in \mathbb{V}_b$	10
x^-	Único elemento de $N_x \backslash \vec{N}_x$	10
R	Raiz da árvore	10
$\mathbb{T}_b^{+,x}$	Árvore não orientada composta por x e todos os vértices abaixo de x	10
$\vec{\mathbb{T}}_b^{+,x}$	Árvore orientada composta por x e todos os vértices abaixo de x	10
$\mathbb{V}_b^{+,x}$	Conjunto de vértices de $\mathbb{T}_b^{+,x}$ e $\vec{\mathbb{T}}_b^{+,x}$	10
η	Configuração do sistema: $\eta \in \{0,1\}^{\Lambda}$, com $\Lambda \subset \mathbb{V}_b$	11
θ	Limiar do processo	11
$(\eta_n)_{n\geq 0}$	Dinâmica bootstrap não orientada	12
$(\vec{\eta}_n)_{n\geq 0}$	Dinâmica bootstrap orientada	12
η_∞	Configuração final do processo não orientado: $\eta_\infty := \lim_{n\to\infty} \eta_n$	12
$\vec{\eta}_\infty$	Configuração final do processo orientado: $\vec{\eta}_\infty := \lim_{n\to\infty} \vec{\eta}_n$	12
p_n	$p_n = \mathbb{E}_p(\eta_n(R)),$ para $n = 0,1,2,\ldots,\infty$	12
$\vec{p}_n$	$\vec{p}_n = \mathbb{E}_p(\vec{\eta}_n(R)),$ para $n = 0,1,2,\ldots,\infty$	12
p_f	$p_f := \inf\{p \in [0,1] : \mathbb{P}_p(\eta_\infty \equiv 1) = 1\} = \inf\{p \in [0,1] : p_\infty = 1\}$	13
$\vec{p}_f$	$\vec{p}_f := \inf\{p \in [0,1] : \mathbb{P}_p(\vec{\eta}_\infty \equiv 1) = 1\} = \inf\{p \in [0,1] : \vec{p}_\infty = 1\}$	13
C_x	Aglomerado de sítios ocupados em η_∞ contendo x	21
$\vec{C}_x$	Aglomerado de sítios ocupados em $\vec{\eta}_\infty$ contendo x	21
p_c	$p_c = inf\{p \in [0,1] : \mathbb{P}_p(\|C\| = \infty) > 0\}$	21
$\vec{p}_c$	$\vec{p}_c = inf\{p \in [0,1] : \mathbb{P}_p(\|\vec{C}\| = \infty) > 0\}$	21

Lista de símbolos usados na Seção 3.1		
Símbolo	**Definição**	**Página**
$\xi(x)$	Configuração de vértices ocupados, fracamente vagos e fortemente vagos	23
$\overline{W}_x$	Aglomerado de sítios fracamente fracos contendo x	23
L_x	Aglomerado local de vértices ocupados de $\vec{\eta}$ contendo x	25
$\hat{O}_x$	Fronteira de vértices inicialmente ocupados de $\overline{W}_x$	25
$\bar{\partial}\Lambda$	Fronteira orientada exterior: $\bar{\partial}\Lambda = \{y \notin \Lambda : y \in \vec{N}_z$ para algum $z \in \Lambda\}$	25
ν	$\nu = \nu(p) = \mathbb{E}_p(\lvert\hat{O}\rvert)$	26
M	$M = M(p) = q\sum_{k=\theta}^{b} k\binom{b}{k}\vec{p}_\infty^{\,k-1}\vec{q}_\infty^{\,b-k}$	26
$\tilde{p}$	$\tilde{p} = inf\{p \in [0, p_f] : M(p) = 1\}$	27
$\partial^* C$	$\partial^* C = \{x \in C : \lvert\vec{N}_x \setminus C\rvert > b-\theta\}$	34

Lista de símbolos usados na Seção 3.6		
Símbolo	**Definição**	**Página**
$\vec{\mathbb{T}}_b^*$	Árvore obtida revertendo-se todos os elos de $\vec{\mathbb{T}}_b$ que apontam para R	38
$\vec{N}_x^*$	Conjunto de vizinhos orientados de x em $\vec{\mathbb{T}}_b^*$	38
$x^{*,-}$	O único elemento de $N_x \setminus \vec{N}_x^*$	38
$\vec{\mathbb{T}}_b^{*,+,x}$	Árvore orientada composta por x e todos os vértices de $\vec{\mathbb{T}}_b^*$ abaixo de x	38
$\mathbb{V}_b^{*,+,x}$	Conjunto de vértices de $\vec{\mathbb{T}}_b^{*,+,x}$	38
$(\eta_n^*, n \geq 0)$	Dinâmica bootstrap orientada em $\vec{T}_b^*$	39
C^*	Aglomerado de vértices ocupados de η_∞^* contendo R	39
$(\eta_n^{+,x}, n \geq 0)$	Dinâmica bootstrap em $\vec{\mathbb{T}}_b^{*,+,x}$ adicionando a seguinte perturbção: o limiar somente do vértice x será agora $\theta-1$ em vez de θ	39
$C_y^{+,x}$	Aglomerado de vértices ocupados de $\eta_\infty^{+,x}$ contendo y	39
C_x^+	$C_x^+ := C_x^{+,x}$	39
C^+	$C^+ = C_{x_0}^+$, onde x_0 é um elemento fixo de $\vec{N}_R$	39
X	$X := \lvert\bar{\partial}C^+\rvert$	39
$\tilde{\partial}C^*$	$\tilde{\partial}C^* = \{y \notin C^* : y \in \vec{N}_z^*$ para algum $z \in C^*\}$ e $\tilde{\partial}\emptyset = \emptyset$	39
$\tilde{X}$	$\tilde{X} := \lvert\tilde{\partial}C^*\rvert$	39
σ	$\sigma = \sigma(p) := \mathbb{E}_p(X \vert \xi(x_0) = \bar{0})$	39
ρ	$\rho = \rho(p) := \mathbb{E}_p(\lvert\bar{\partial}\vec{C}\rvert)$	39

APÊNDICE B

Processos de Ramificação

Sendo um assunto de fundamental importância em matemática e, em particular, no estudo desenvolvido nesse trabalho, nesse apêndice trazemos os principais resultados e definições que dizem respeito a processos de ramificação. A principal referência utilizada é [Hofstad 2009].

Um processo de ramificação diz respeito à evolução temporal de uma certa população e é definido da seguinte maneira. Para cada indivíduo da família, supomos que

1. esse indivíduo origina um número de descendentes com a mesma distribuição de outros indivíduos e
2. esse indivíduo gera descendentes de maneira independente aos outros indivíduos.

Defina, então, para todo $i \in \mathbb{N}$

$$p_i = \mathbb{P}(\text{o indivíduo possui } i \text{ fihos}). \tag{B-1}$$

$(p_i)_{i \geq 0}$ será definido como sendo a *distribuição de descendentes* desse processo de ramificação.

Seja Z_n, $n \geq 0$, uma variável aleatória que conta o número de indivíduos da geração n do processo e suponha que $Z_0 = 1$. Seja também X uma variável aleatória com distribuição de probabilidades dada por (B-1), *i.e.*,

$$\mathbb{P}(X = i) = p_i. \tag{B-2}$$

Temos então que Z_n satisfaz a seguinte relação de recursão:

$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_{n,i} \tag{B-3}$$

onde $(X_{n,i})_{n,i \geq 0}$ são variáveis aletórias tais que, $\forall i \geq 0$ e $\forall n \geq 0$, X_{n-i} tem a mesma distribuição de X.

Dado um processo de ramificação $(Z_n)_{n\geq 0}$, chamaremos de *extinção do processo* o evento

$$\bigcup_{n\geq 1}\{Z_n = 0\}$$

cuja probabilidade será dada por

$$\varepsilon = \mathbb{P}(\exists n : Z_n = 0). \tag{B-4}$$

O seguinte teorema é de fundamental importância no estudo dos processos de ramificação e diz respeito à transição de fase existente quando consideramos o valor da probabilidade de extinção do processo.

Teorema B.1*Seja* $(Z_n)_{n\geq 0}$ *um processo de ramificação com descendência i.i.d.* X. *Temos então que*

1.se $\mathbb{E}(X) < 1$, *então* $\varepsilon = 1$;
2.se $\mathbb{E}(X) > 1$, *então* $\varepsilon < 1$;
3.se $\mathbb{E}(X) = 1$ *e* $\mathbb{P}(X = 1) < 1$, *então* $\varepsilon = 1$.

Além disso, ε *é a menor solução em* $[0,1]$ *de*

$$\varepsilon = G_X(\varepsilon) \tag{B-5}$$

onde $s \mapsto G_X(s)$ *é a função geradora de probabilidade da distribuição de descendentes* X*, ou seja,*

$$G_X(s) = \mathbb{E}(s^X).$$

Prova. Seja

$$\varepsilon_n = \mathbb{P}(Z_n = 0).$$

Note que se não temos indivíduos na geração n do processo, então certamente não teremos indvíduos na geração $n+1$ dele. Sendo assim, podemos concluir que

$$\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}.$$

Para todo n, portanto, teremos um sequênca crescente de conjuntos e, desse modo, segue que $\varepsilon_n \uparrow \varepsilon$. Tome agora a função geradora de probabilidades do número de indivíduos na n-ésima geração do processo definida como

$$G_n(s) = \mathbb{E}(s^{Z_n}).$$

Note que, se X é uma variavel aleatória que toma valores inteiros, temos que $\mathbb{E}(s^X) = \sum_{k=0} s^k \mathbb{P}(X = k)$. Ou seja, se tomamos $s = 0$, temos que $G_X(0) = \mathbb{P}(X = 0)$. Sendo assim, temos que

$$\varepsilon_n = G_n(0).$$

Note agora que $\mathbb{P}(Z_1 = i) = \mathbb{P}(X = i) = p_i$. Note também que podemos escrever:

$$\mathbb{P}(Z_n = k \mid Z_1 = i) = \frac{\mathbb{P}(Z_n = k \cap Z_1 = i)}{\mathbb{P}(Z_1 = i)}.$$

Sendo assim, temos que

$$\mathbb{P}(Z_1 = i)\mathbb{P}(Z_n = k \mid Z_1 = i) = \mathbb{P}(Z_n = k \cap Z_1 = i)$$

donde

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} p_i \mathbb{P}(Z_n = k \mid Z_1 = i) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = k \cap Z_1 = i) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup (Z_n = k \cap Z_1 = i)\right) \\ &= \mathbb{P}(Z_n = k). \end{aligned}$$

Logo, observe que, condicionando na primeira geração do processo, ficamos com

$$G_n(s) = \mathbb{E}(s^{Z_n}) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \mathbb{E}(s^{Z_n} \mid Z_1 = i).$$

Como $Z_1 = i$, podemos tomar qualquer um desses i indivíduos e observar o processo abaixo dele. Repare que, nesse caso, olhar para o número de indivíduos na n-ésima geração do processo equivale a olhar para o número de indivíduos na $(n-1)$-ésima geração do processo que começa em cada um dos elementos de Z_1. Ou seja, como as descendências de cada um desses i indivíduos é independente das outras, temos que

$$\mathbb{E}(s^{Z_n} \mid Z_1 = i) = \mathbb{E}((s^{Z_{n-1}})^i) = \mathbb{E}(s^{Z_n})^i = G_{n-1}(s)^i,$$

donde:

$$G_n(s) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i G_{n-1}(s)^i.$$

Denote então $G_X(s) = G_1(s)$ a função geradora de probabilidades de $X_{1,1}$. Segue, pelo que acabamos de mostrar que temos

$$G_n(s) = G_X(G_{n-1}(s)).$$

Para $s = 0$, origina-se da equação acima a seguinte relação de recorrência para ε_n:

$$\varepsilon_n = G_X(\varepsilon_{n-1}). \tag{B-6}$$

Como já foi discutido anteriormente, temos que $\varepsilon_n \uparrow \varepsilon$ quando $n \to \infty$. Sendo assim, como a função $G_X(s)$ é contínua em s, temos que

$$\varepsilon = \lim \varepsilon_n = G_X(\lim \varepsilon_{n-1}) = G_X(\varepsilon).$$

Suponha que $\mathbb{P}(X = 1) = 1$. Nesse caso, cada um dos indivíduos terá exatamente um descendente e, portanto, quase certamente, $Z_n = 1$. Suponha agora que $\mathbb{P}(X \leq 1) = 1$ mas $p = \mathbb{P}(X = 0) > 0$. Nesse caso, segue que $\mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - (1-p)^n \to 1$, já que $1 - p \in [0, 1)$. Já tendo mostrado o comportamento dos dois casos anteriores, resta estudarmos o que acontece no único caso que sobrou. Suponha agora, portanto, pelo resto dessa demonstração, que tenhamos $\mathbb{P}(X \leq 1) < 1$.

Primeiramente, vamos mostrar que ε é, de fato a menor solução de (B-5). Para isso, tome $\psi \in [0, 1]$ e suponha que $\psi = G_x(\psi)$. Afirmamos que $\varepsilon \leq \psi$. Mais especificamente, vamos mostra que $\varepsilon_n \leq \psi$ para todo n. Procedemos então por indução em n. Observe que, como sempre começamos o processo de ramificação com um indivíduo, então $\varepsilon_0 = 0 \leq \psi$ e isso prova o caso base. Suponha agora que, dado $n \in \mathbb{N}$ arbitrário, tenhamos $\varepsilon_n \leq \psi$. Note que a função $G_X(s)$ é crescente no intervalo $[0, 1]$. Nesse caso, aplicando (B-6), e o que acabamos de descutir, temos que

$$\varepsilon_{n+1} = G_X(\varepsilon_n) \leq G_X(\psi) = \psi.$$

Sendo assim, temos provado que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n \leq \psi$. Como $\varepsilon_n \uparrow \varepsilon$, temos que $\varepsilon \leq \psi$. Segue disso que ε é, de fato, a menor solução de (B-5).

Note agora que, como temos $G_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} s^k \mathbb{P}(Z_n = k)$, então

$$G_X''(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)s^{k-2}\mathbb{P}(Z_n = k) = \mathbb{E}(X(X-1)s^{X-2}) \geq 0. \tag{B-7}$$

Segue, portanto, que $G_X(s)$ é crescente e convexa para $s \geq 0$. Mas perceba agora que, se consideramos $\mathbb{P}(X \leq 1) < 1$, então, a probabilidade de que X seja maior ou igual a dois é um número estritamente positivo. Como os dois únicos valores que zeram a última igualdade de (B-7) são $X = 0$ e $X = 1$, temos que $G_X''(s)$ é estritamente crescente e estritamente convexa para $s > 0$. Ou seja, a função $G_X(s)$ só pode intersectar a reta $y = s$ em, no máximo, dois pontos no intervalo $[0, 1]$. Note então que 1 é sempre um desses pontos, *i.e.*, $G_X(1) = \mathbb{E}(s^{Z_n}) = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k \mathbb{P}(Z_n = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) = 1$. Como

$G_x(0) > 0$, repare também que se $G_X^{'}(1) < 1$, então só existe uma solução para a equação (B-5) e se $G_X^{'}(1) > 1$, então existem duas soluções. Observe que

$$G_X^{'}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} ks^{k-1}\mathbb{P}(X=k) \Rightarrow G_X^{'}(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k1^{k-1}\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{E}(X). \tag{B-8}$$

Unindo toda a discussão que acabamos de fazer acima, e considerando a equação (B-8), segue, portanto que

$$\text{se } G_X^{'}(1) = \mathbb{E}(X) < 1, \text{ então } \varepsilon = 1 \text{ e}$$

$$\text{se } G_X^{'}(1) = \mathbb{E}(X) > 1, \text{ então } \varepsilon < 1.$$

Por fim, suponha que $G_X^{'}(1) = 1$. Afirmamos que, tirando o caso em que $G_X(s) = s$, $\forall s \in [0,1]$, teremos também exatamente uma solução. De fato, suponha que tivéssemos outra solução $s' < 1$. Nesse caso, como $G_X(0) > 0$, o gráfico de G_X teria de tocar a reta $y = s$ com inclinação menor ou igual a 1 no ponto s'. Como $G^{''}(s) > 0$, segue que a função $G^{'}(s)$ é estritamente crescente. Sendo assim, como $G^{'}(1) = 1$, não poderíamos ter $G^{'}(s') = 1$. Logo, a única possibilidade é que tenhamos $G^{'}(s') < 1$. Mas nesse caso, existiria $\delta > 0$ tal que $G_X(s'+\delta) < s'+\delta$, *i.e.*, $G_X(s'+\delta)$ estaria abaixo da reta $y = s$. Nesse caso, a fim de que o gráfico de G_X toque a reta no ponto 1, deveríamos ter algum ponto s'' para o qual $G_X^{'}(s'') > 1$. Mas isso é absurdo pois a função $G_X^{'}(s)$ é estritamente crescente e $G^{'}(1) = 1$. Desse modo, vemos que se $G^{'}(1) = 1$, então, tirando o caso em que $G_X(s) = s$, teremos apenas 1 como solução. Mas perceba agora que

$$G_X(s) = s \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} s^k \mathbb{P}(X=k) = s \Leftrightarrow \mathbb{P}(X=1) = 1.$$

$\square$

Isso posto, podemos passar agora à caracterização dos processos de ramificação com respeito ao valor esperado da variável aleatória X. Dado um processo de ramificação $(Z_n)_{n\geq 0}$, diremos que o processo será :

•*subcrítico* se $\mathbb{E}(X) < 1$,
•*crítico* se $\mathbb{E}(X) = 1$ e $\mathbb{P}(X=1) < 1$ e
•*supercrítico* se $\mathbb{E}(X) > 1$.

Da mesma forma como definimos a probabilidade de extinção do processo podemos definir agora sua *probabilidade de sobrevivência*. Faremos isso definindo

$$\zeta = 1 - \varepsilon \text{ ou equivalentemente } \zeta = \mathbb{P}(Z_n > 0 \forall n \geq 0),$$

ou seja, essa é a probabilidade de que o processo de ramificação sobreviva para sempre. Podemos definir ainda o *tamanho total da família* ou *tamanho total da descendência* como sendo

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n.$$

A próxima proposição é de fundamental importância para a demonstração dos principais resultados desse trabalho por nos fornecer uma expressão para a média do tamanho da família até a geração n.

Proposição B.1*Tome um processo de ramificação começando com um indivíduo e suponha que esse processo seja crítico, isto é, $\mathbb{E}_p(X) = 1$. Defina*

$$Y_n := \sum_{i=0}^{n} Z_n$$

o tamanho total da família desse processo até o instante n. Então, temos que

$$\mathbb{E}_p(Y_n) = n + 1.$$

Prova. Primeiramente, note que, para todo k,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_p(Z_k) &= \mathbb{E}_p\left(\mathbb{E}_p(Z_k \mid Z_{k-1})\right) \\
&= \mathbb{E}_p(Z_{k-1}\mathbb{E}_p(X_{k,i} \mid Z_{k-1})).
\end{aligned}$$

Como as variáveis aleatórias $X_{k,i}$ e Z_{k-1} são independentes, temos então que

$$\mathbb{E}_p(Z_{k-1}\mathbb{E}_p(X_{k,i} \mid Z_{k-1})) = \mathbb{E}_p(Z_{k-1}\mathbb{E}_p(X_{k,i})).$$

Logo, portanto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_p(Z_k) &= \mathbb{E}_p(Z_{k-1}\mathbb{E}_p(X_{k,i})) \\
&= \mathbb{E}_p(Z_{k-1}.1) = \mathbb{E}_p(Z_{k-1}).
\end{aligned}$$

Como isso vale para todo $0 \leq k \leq n$ e como $\mathbb{E}_p(Z_0) = 1$, temos então que

$$\mathbb{E}_p(Y_n) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{E}_p(Z_i) = \sum_{i=0}^{n} 1 = n + 1.$$

$\square$

Perceba também que se definimos $Y_\infty := \sum_{i=0}^{\infty} Z_i$ o tamanho total da família, então podemos aplicar o Teorema da Convergência Monótona e concluir que

$$\mathbb{E}_p(Y_\infty) = \mathbb{E}_p\left(\lim_n Y_n\right) = \lim_n \mathbb{E}_p(Y_n) = \lim_n n+1 = \infty.$$