Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas – ICEX
Pós Graduação

ESTUDO INTERDISCIPLINAR SOBRE FUNÇÕES

ARLINDO FERNANDES DOS SANTOS

Orientadora: Sônia Pinto de Carvalho

BELO HORIZONTE
2016

ARLINDO FERNANDES DOS SANTOS

Estudo interdisciplinar sobre funções

Orientadora: Sônia Pinto de Carvalho

Belo Horizonte

2016

Sumário

Introdução

Como professor de matemática, busquei fazer um trabalho que estivesse relacionado à minha pratica em sala de aula e que contribuísse para reflexão e aprimoramento das minhas aulas, visando assim o aprendizado do educando.

Trabalhando com o conceito de função em turmas do 1º ano médio percebi as dificuldades encontradas pelos educandos em reconhecer função como um tipo específico de relação entre conjuntos, com características próprias, bem como, a relação e aplicação desse aprendizado nas demais áreas do conhecimento. O conceito de função é de grande relevância para construção do conhecimento matemático e para compreensão e análise de outros fenômenos estudados em outras áreas do conhecimento, aparecendo na forma de tabelas, gráficos ou fórmulas matemáticas.

A forma como este conteúdo é abordado nos livros didáticos de matemática nem sempre permite compreender a amplitude de aplicações que ele pode alcançar. Nesses livros o estudo de função é limitado ao estudo de funções reais de variável real, abordando os conceitos de função afim, quadrática, modular, exponencial, logarítmica.

O objetivo, nesse trabalho, é identificar nas áreas História e Geografia a idéia de função e suas representações, bem como as dificuldades que o educando encontra na hora de fazer relação entre o estudo de função e a forma como é apresentado nestas áreas de conhecimento.

A primeira parte do trabalho consistiu numa pesquisa em livros de História e Geografia do ensino médio sobre conteúdos ou formas de apresentação dos conteúdos que utilizassem função e suas representações. Uma vez identificados, utilizamos essas informações para elaboração de um questionário.

Esperamos que tanto o questionário quanto os resultado apresentados possam contribuir para reflexão dos educadores de matemática no que tange o ensino de função, seja no ensino fundamental ou médio.

Importância e contexto do estudo de função

Além dos diálogos com a professora Sônia, li alguns artigos que me ajudaram a refletir sobre a importância do ensino de função e o contexto em que esse ensino se insere no currículo de Matemática, como é tratado o ensino de função nas escolas brasileiras. Faço uma breve apresentação desses artigos antes de dissertar sobre o tema:

a) O conceito de função no currículo de Matemática, João Pedro Ponte, nesse artigo Ponte fala sobre a evolução histórica do conceito de função. Associa o conceito de função e o estudo de fenômenos Físicos: “A noção de função está assim associada na sua origem à noção de lei natural. A ideia de ‘regularidade’ era um dos seus elementos constitutivos mais determinantes”. (Educação e Matemática nº 15, pag. 5). No tópico sobre ‘As funções no currículo de Matemática’, em que o autor descreve a ensino da Matemática em Portugal, cito “Num aspecto a tradição de portuguesa no ensino de função tem sido particularmente pobre: na dificuldade em dar um lugar de relevo à ligação da Matemática com a realidade”. (Educação Matemática nº 15, pag. 6).
b) A construção histórica do conceito de função, Rafael Bueno e Lori Viali, nesse artigo os autores fazem “uma investigação acerca da construção histórica do conceito de função rumo à sua definição atual” (EMRS – ano 10 – 2009 – número 10 – v.1 – pp. 37 a 47), cita vários matemáticos e suas contribuições. Cito um trecho das considerações finais pertinente ao trabalho aqui apresentado: “evidenciando-se o papel das representações na construção do conceito de função e a sua importância no processo de construção do conhecimento matemático escolar, destaca-se a necessidade de explorar cada uma dessas representações para se alcançar uma aprendizagem efetiva e para que a construção do conceito de função seja sólida e que, como consequência, o pensamento funcional, caracterizado como a capacidade de pensar por intermédio de relações, seja desenvolvido” (EMR-RS – ano 10 – 2009 – nº 10 – v. 1, pag. 46).

c) Construção do conceito de função no ensino fundamental por meio da metodologia de resolução de problemas, Alex Leão e Vanilde Bisognin, nesse os autores descrevem "os resultados de uma pesquisa realizada com alunos da oitava serie do ensino fundamental de uma escola pública municipal localizada no Rio Grande do Sul, Brasil, utilizando-se a resolução de problemas como metodologia de ensino. A pesquisa teve como objetivo analisar a contribuição dessa metodologia para o estudo de funções, tendo como referencial teórico a teoria do Conceito Imagem e conceito Definição de Tall e Vinner (1981)" (EMR-RS – Ano 10 – 2009 – nº 10 – v.1 – pp. 27 a 35, pag. 27). Na metodologia de resolução de problemas "o trabalho na sala de aula passa a estar centrado no aluno, que participa ativamente da construção do conhecimento, sob a supervisão do professor, e somente no final do processo os conceitos trabalhados são formalizados na linguagem matemática". (EMR-RS – Ano 10 – 2009 – nº 10 – v.1 – pp. 27 a 35, pag. 30).

Logo, a matemática tem grande importância no desenvolvimento intelectual e social do homem. Têm contribuído na criação de novas tecnologias e em várias áreas do conhecimento como saúde, educação, engenharias, economia e computação. Possibilita a compreensão de fenômenos naturais e sociais. Permite prever acontecimentos, por exemplo, de natureza econômica com isso auxilia a tomada de decisões.

Um dos ramos da matemática que nos dá uma ampla possibilidade de compreender a realidade é o estudo de função, graças às variadas formas de representação que nos permitem fazer de um objeto em estudo. Podemos utilizar tabelas, gráficos, diagramas ou fórmulas (ou todos em conjunto) para representar, conhecer, analisar, generalizar, compreender, julgar, prever e emitir juízo sobre fenômenos naturais (físicos, químicos, ecológicos) ou sociais (de natureza econômica ou humana).

Na forma de tabela, por exemplo, podemos ter uma visão estática onde cada valor se relaciona ao seu par correspondente. Na representação dessa tabela num plano cartesiano podemos ter uma ideia dinâmica do fenômeno modelado podendo mais facilmente inferir sobre valores que não estarão lá representados. Ainda assim teríamos presente sua representação ponto a ponto.

O diagrama nos permitiria perceber a relação entre as variáveis. Com as fórmulas, podemos generalizar uma situação concreta, por exemplo, a velocidade de um móvel, e expressá-la algebricamente, possibilitando determinar outros valores relacionados.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, também apontam a importância do estudo de função; quando fala dos “Conhecimentos de Matemática” propõe a importância de uma educação voltada “para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente” (PCNs, Matemática EM, pag. 40).

Destaca ainda sobre o estudo de função: “Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre função para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática” (PCNs, Matemática EM, pag. 43 e 44).

Na parte de competências e habilidades descritas nos PCNs (PCNs, Matemática EM, pag. 46) podemos destacar em relação ao estudo de função:

Quanto à representação e comunicação:

- Ler e interpretar textos de Matemática.
- Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc.).
- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa.

Quanto à Investigação e compreensão:

- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc.).
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
- Formular hipóteses e prever resultados.
- Selecionar estratégias de resolução de problemas.
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
- Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
- Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Quanto à contextualização sociocultural:

- Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.
- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento (PCNs, Matemática EM, pag. 46).

Com o apresentado até aqui, não podemos ignorar a importância do estudo de função e o cuidado que devemos ter na abordagem desse assunto com nosso educando.

A função como é apresentada no ensino médio

O estudo de função nas escolas de ensino médio, na sua maioria, segue a sequência sugerida pelos livros didáticos. Esses na exploram adequadamente a ligação entre função e relação e não justificam a necessidade de uma definição de função. Os temas são tratados separadamente e de forma independente, dificultando o reconhecimento da relação entre eles. Alguns livros didáticos tentam partir do conceito intuitivo de função através de problema contextualizados e interdisciplinares, mas após a definição, dividem o estudo em tópicos, tais como, função afim, função quadrática, função modular, função exponencial e função logarítmica. Essa ruptura faz com que dificilmente o educando consiga estabelecer as relações entre estes tópicos. Felizmente, graças à forma como são elaboradas as provas do ENEM, em consonância com os parâmetros curriculares, essa realidade vem mudando, exigindo dos professores maiores cuidados não apresentação desses conteúdos.

Na preparação das minhas aulas utilizo três livros de autores diferentes que, apesar de algumas pequenas diferenças, apresentam função seguindo o mesmo caminho. Faço agora uma breve descrição da forma como eles ensinam função:

No livro "**Giovanni – Giovanni Jr. – Bonjorno (livro didático adotado na escola)**, **Ensino Fundamental uma nova abordagem - Ensino Médio, volume único – FTD**, **1ª edição – SP**", no item "ideia de função" (pag. 80 a 85), os autores apresentam exemplos para falar da relação entre grandezas variáveis, um dos exemplos utiliza tabela, outro gráfico e outro formula matemática. Para descrever função como relação especial faz três exemplos relacionados aos anteriores, e define domínio como variável independente e imagem da função como variável dependente. Após resolverem três problemas propostos, propõe uma lista de problemas envolvendo gráficos, tabelas e formulas. Apesar de interessantes, são apresentados de forma muito rápida não favorecendo a construção do conhecimento sobre função pelo educando.

Os autores apresentam, na pag. 86, a seguinte definição: "sejam A e B dois conjuntos não vazios e f uma relação de A em B. Essa relação f é uma função de A em B quando a cada elemento x do conjunto A está associado um e apenas um elemento y do conjunto B". A partir daí faz alguns exemplos, utilizando principalmente o diagrama para ajudar a reconhecer uma função. Cita modelos de gráficos de função (gráfico de setores, gráfico de barras e gráfico de linhas), propõe construção e interpretação de gráficos, trabalhando crescimento de decrescimento de função. Divide o estudo de funções em tópicos: função polinomial, função polinomial do 1º grau, função polinomial do 2º grau, função modular, função exponencial e função logarítmica. A maioria dos exercícios são problemas contextualizados, como os cobrados no ENEM.

No livro: **“Curso prático de Matemática, Paulo Bucchi, Editora Moderna, 1ª edição”,** o autor dedica o capítulo 3 ao estudo das relações, define par ordenado e a representação geométrica de pares ordenados. Mostra através de exemplos as formas de representação de uma relação: conjuntos, diagrama e gráfico. Define domínio e imagem. No capitulo 4, intitulado “Estudo das Funções”, antes de dar a definição ele explica lei de formação através de dois problemas e utiliza o diagrama para mostrar as características de uma função. A definição dada pelo autor “Se A e B são conjuntos não vazios, dizemos que uma relação de A em B é função de A em B se, e somente se, a todo elemento x de A, estiver associado a um, e somente um, elemento y de B” (pag. 64). Trabalha construção de gráficos e divide o estudo de função em: função do 1º grau ou função afim, função do 2º grau ou função quadrática, função modular, composição de função e função inversa, função exponencial e função logarítmica. Tem poucos problemas contextualizados e utiliza muito a linguagem algébrica e gráfica. Esse livro é anterior às provas do ENEM.

No livro: **“Matemática: Contexto & Aplicações, vol. 1, Luiz Roberto Dante, Editora ática, 3ª edição”** o autor inicia a estudo de função “Explorando intuitivamente a noção de função” (pág. 36) através de 4 problemas contextualizados utilizando tabelas e representação algébrica, ele explica nesse variável dependente e variável independente, propõe 6 problemas contextualizados como exercício. No tópico seguinte “A noção de função via conjuntos” usa diagramas para caracterizar função, após alguns exemplos, define função: “Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função de A em B é uma regra que diz associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$” (pag. 40). Após a definição utiliza muito a representação gráfica e algébrica, utiliza menos os problemas contextualizados. Divide o estudo de funções em tópicos: função afim, função quadrática, função modular, função exponencial e função logarítmica. Nesses tópicos utiliza muito a representação algébrica. Essa é uma edição mais atualizada dentro da proposta da ENEM e dos PCNs.

Apresentação do questionário para pesquisa

A elaboração do questionário se deu a partir de duas vertentes:

1. Os livros de Matemática do ensino médio exploram mal a relação entre função e relação entre conjuntos, não possibilitam a compreensão de função como um tipo de relação entre conjuntos e não justificam a necessidade de uma definição de função.

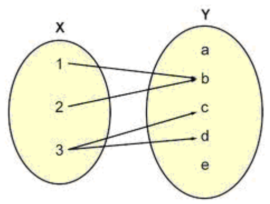
2. Pesquisa feita nos livros de História e Geografia do Ensino médio. Nesses livros localizei tabelas e gráficos que estavam relacionados ao estudo de função. Com os modelos retirados dos livros foram elaboradas algumas questões que visavam identificar se o estudante, tendo estudado função, era capaz de relacionar esse aprendizado aos modelos apresentados.

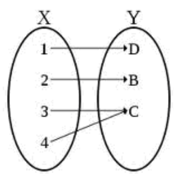
O questionário foi aplicado para alunos do 1º e 2º ano médio do Colégio Marista Champagnat de Contagem, onde lecionei de 2011 a 2014, totalizando 80 estudantes. Os educandos do 1º ano médio já haviam estudado funções.

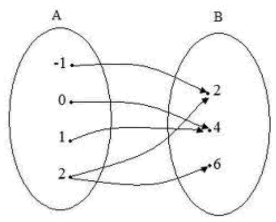
Apresento a seguir cada questão com o objetivo pretendido em cada uma delas:

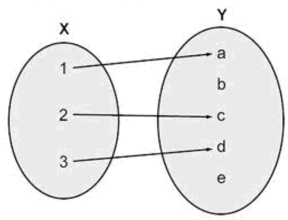
Questão 1

Escreva ao lado do diagrama de Venn se a relação representa função. Justifique sua resposta em cada caso.









O objetivo desta questão era verificar se o educando lembrava o conceito de função. Se ele conseguia aplicar o conceito de função no modelo. Ou seja, para cada valor $x \in A$ existe um único valor $y \in B$.

Esperava-se que relembrando o conceito de função neste modelo favoreceria a identificação nos modelos seguintes. Antes de aplicar o questionário foi feita a explicação da definição.

Questão 2

Representar, no plano cartesiano, cada item da questão anterior que você considerou como função.

Identificando os modelos que representavam função queríamos verificar se ele conseguia usar outras formas de representar função no caso no plano cartesiano.

Os livros de História e Geografia apresentam informações na forma de gráficos de setores, barra, coluna e linha, além das tabelas. Uma das qualidades do estudo de função é a possibilidade de representação. O objetivo das questões 3, 4 e 5 era verificar se o educando conseguia relacionar essas formas ao estudo de função.

Questão 3

A atividade pesqueira no mundo emprega 30 milhões de pessoas, sendo que 95% dos pescadores vivem nos países pobres. Na Ásia, principalmente na China, na Índia, no Vietnã, na Indonésia, em Bangladesh e nas Filipinas, essa atividade econômica apresenta crescimento graças ao aumento de suas frotas pesqueiras. Veja tabela.

Maiores Produtores de Pescado do Mundo

País	Porcentagem sobre o total
1º China	33,3%
2º Peru	6,6%
3º Índia	4,5%
4º Estados Unidos	4,1%
5º Indonésia	4,1%
6º Japão	4,0%
7º Chile	3,6%
8º Tailândia	3,3%
9º Rússia	2,5%
10º Noruega	2,5%

Fonte: Images économiques du monde 2005. Paris: Armand Colin, 2004

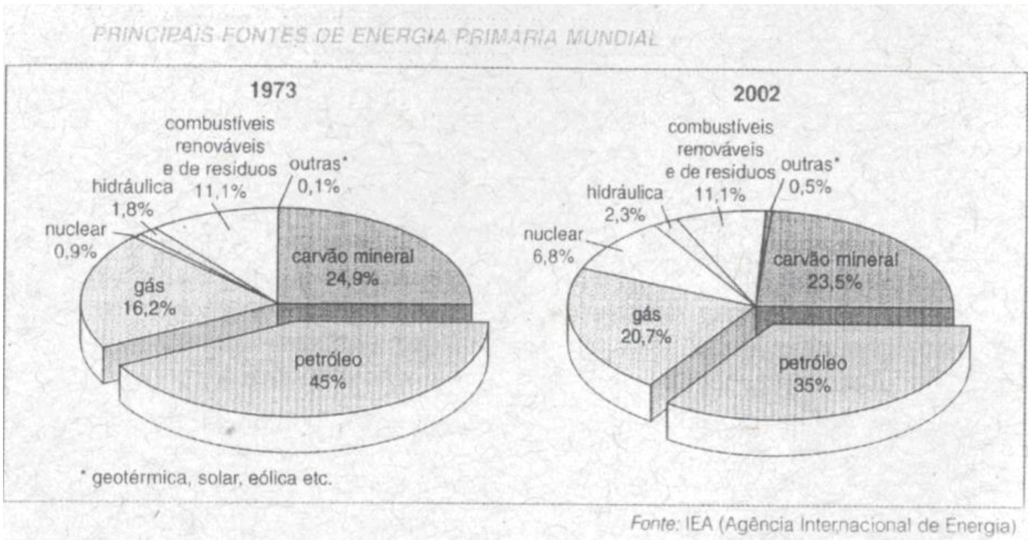
(Moraes, Paulo R. M., Geografia Geral e do Brasil, ed. Harbra, 3ª edição).

A partir das informações dadas responda:
a) represente as informações na tabela no diagrama de Venn.
b) Podemos afirmar que está relação é função? Por quê?
c) Represente também no plano cartesiano?
d) Qual é o domínio da relação? Qual é a imagem?
e) Se os valores "porcentagem sobre o total" forem colocados no eixo x, a relação é função? Por quê?

A tabela é forma de representação de funções, mas nem sempre o aluno faz essa associação. As perguntas elaboradas remetiam o aluno a esta associação através da representação no diagrama e no plano. Aprofundando a conceito de função pedimos que ele identificasse domínio e imagem da função.

Questão 4

As fontes de energia podem ser classificadas como primarias e secundarias. As primárias são os produtos energéticos gerados pela natureza na sua forma direta, como petróleo, gás natural, carvão mineral, urânio; as secundarias são produtos de uso direto, obtidos de uma fonte primária. Exemplos; gasolina, óleo diesel e querosene são classificados com fonte de energia secundária, obtidos do petróleo, que é considerado energia primária. Veja no gráfico abaixo: Principais fontes de energia primária Mundial.



(Moraes, Paulo R. M., Geografia Geral e do Brasil, ed. Harbra, 3ª edição).

A partir das informações dadas, responda:

a) Represente os dados do gráfico (2002), no diagrama de Venn.

b) Podemos afirmar que está relação é uma função? Por quê?

c) Represente também no plano cartesiano?

d) Qual é a variável independente?

e) Qual é a variável dependente?

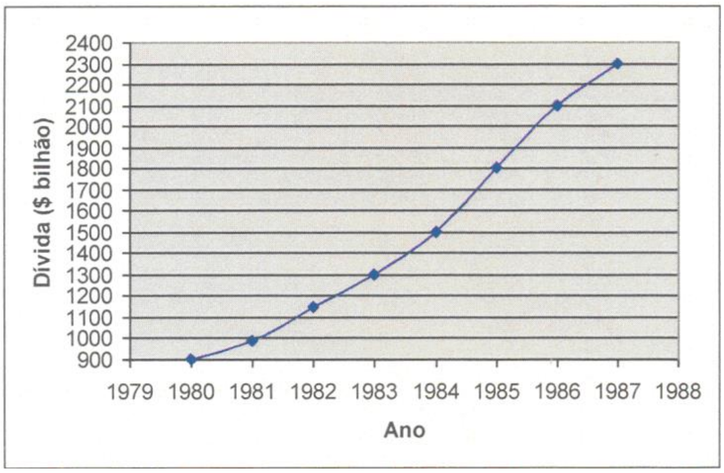
f) Escreva o conjunto imagem?

g) Se invertermos as variáveis teremos uma função? Por quê?

O texto e o gráfico foram retirados do livro de geografia do ensino médio Fazendo uso do diagrama e do plano cartesiano, como na questão anterior conduzimos o aluno a associar essa forma de representação ao estudo de funções.

Questão 5

A dívida publica dos Estados Unidos (em bilhões de dólares) para alguns anos encontra-se no gráfico abaixo:



(http://miltonborba.org/Calculo_I/calculo1_1lista.pdf)

A partir das informações dadas, responda:

a) Represente as informações do gráfico usando o diagrama de Venn.

b) Podemos afirmar que está relação é função? Por quê?

c) Qual é a variável independente?

d) Qual é a variável dependente?

e) Qual é domínio da função?

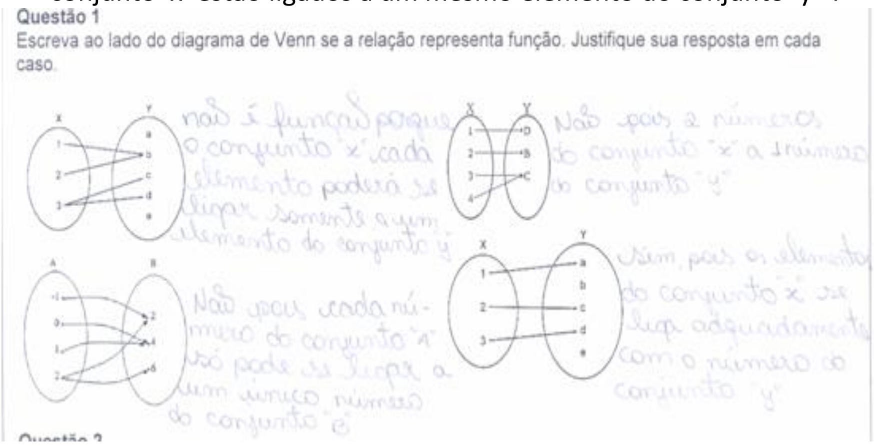
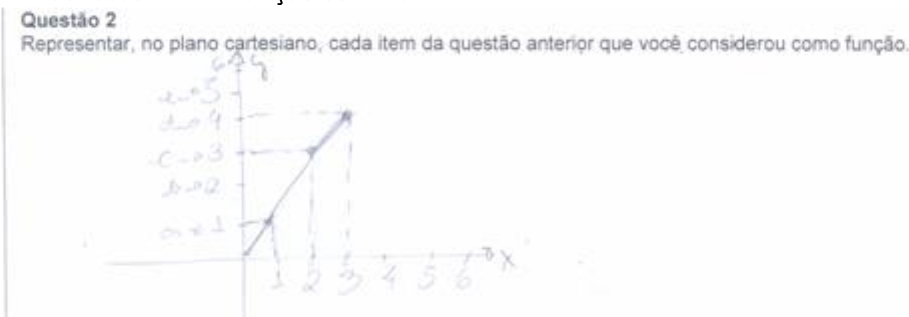
f) Qual é a imagem?

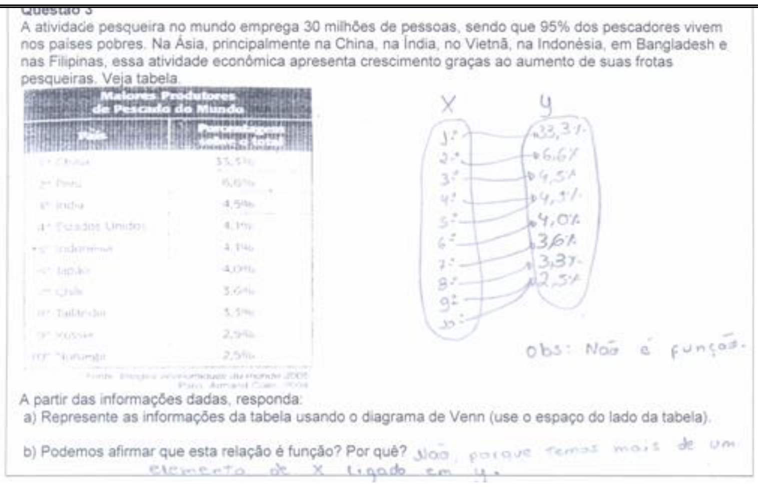
g) Se invertermos as variáveis teremos uma função? Por quê?

Questão elaborada a partir de texto e gráfico retirado do livro de geografia do ensino médio, nesta introduzimos a compreensão de variável independente e variável dependente.

Resultados obtidos após aplicação do questionário

Na tabela abaixo apresento os erros cometidos pelos educandos e a frequência com que ocorreram. O questionário foi aplicado a 80 educandos.

Erro cometido	Frequência
1.0) No diagrama superior direito: “não (é função), pois dois elementos do conjunto ‘x’ estão ligados a um mesmo elemento do conjunto ‘y’”. 	3
1.1) Na representação cartesiana de uma função discreta, ligar os pontos como se fossem uma função continua. 	10
1.2) Idem ao erro 1.0	3



Questão 3

A atividade pesqueira no mundo emprega 30 milhões de pessoas, sendo que 95% dos pescadores vivem nos países pobres. Na Ásia, principalmente na China, na Índia, no Vietnã, na Indonésia, em Bangladesh e nas Filipinas, essa atividade econômica apresenta crescimento graças ao aumento de suas frotas pesqueiras. Veja tabela.

Maiores Produtores de Pescado do Mundo	
País	Porcentagem sobre o total
1º China	33,5%
2º Peru	6,6%
3º Índia	4,5%
4º Estados Unidos	4,1%
5º Indonésia	4,1%
6º Japão	4,0%
7º Chile	3,6%
8º Tailândia	3,3%
9º Rússia	2,9%
10º Noruega	2,5%

Fonte: Imagens econômicas do mundo 2005. Paris: Armand Colin, 2004.

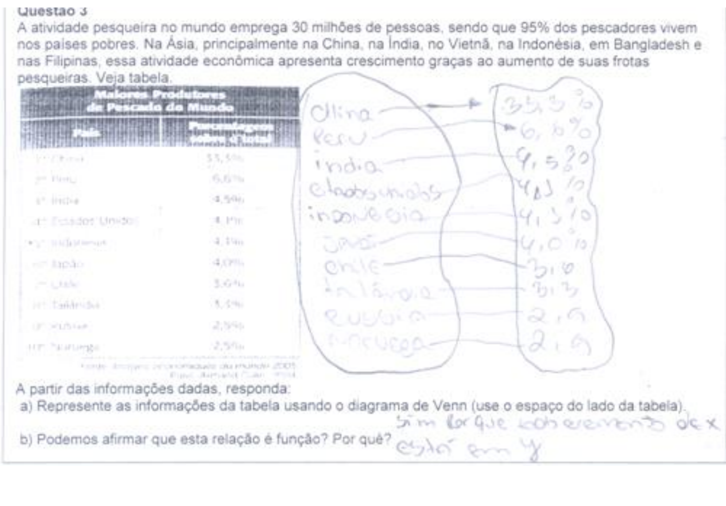
A partir das informações dadas, responda:

a) Represente as informações da tabela usando o diagrama de Venn (use o espaço do lado da tabela).

b) Podemos afirmar que esta relação é função? Por quê? Não, porque temos mais de um elemento de X ligado em y.

1.3) Na representação dos valores da tabela para o diagrama repetiu os valores que aparecem repetidos na tabela. Observe que os valores 2,5% e 4,1% aparecem duas vezes no diagrama.

18



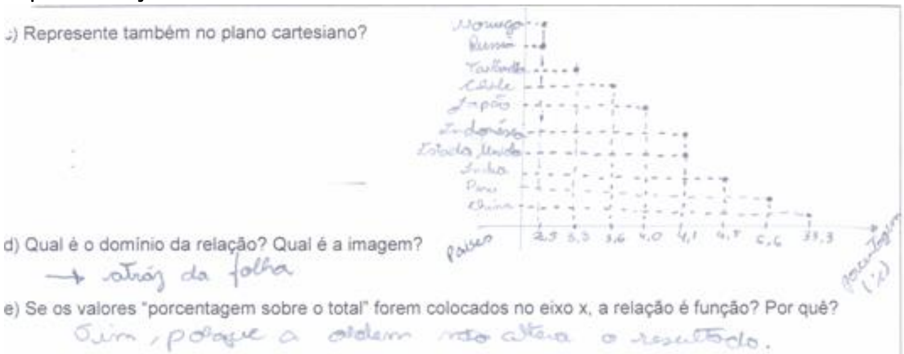
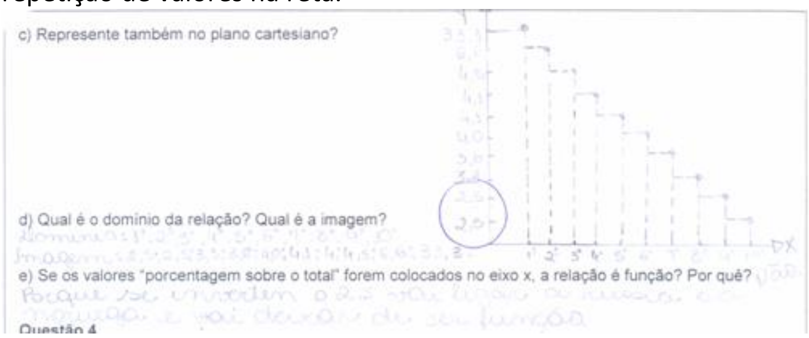
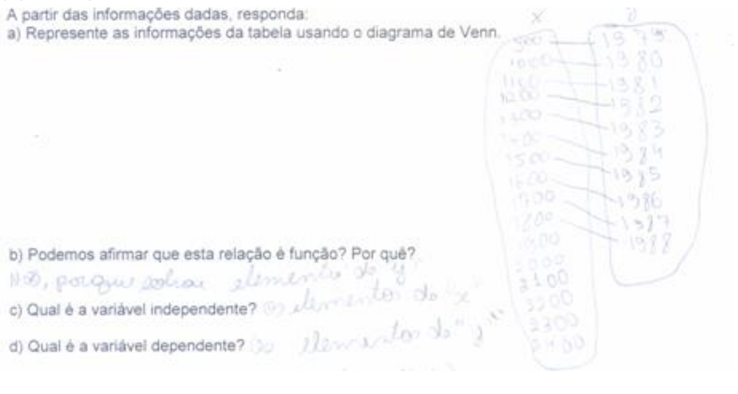
Questão 3

A atividade pesqueira no mundo emprega 30 milhões de pessoas, sendo que 95% dos pescadores vivem nos países pobres. Na Ásia, principalmente na China, na Índia, no Vietnã, na Indonésia, em Bangladesh e nas Filipinas, essa atividade econômica apresenta crescimento graças ao aumento de suas frotas pesqueiras. Veja tabela.

A partir das informações dadas, responda:

a) Represente as informações da tabela usando o diagrama de Venn (use o espaço do lado da tabela).

b) Podemos afirmar que esta relação é função? Por quê? Sim porque todos elementos de x estão em y

1.4) No item c da questão 3. Inverte conjunto domínio e conjunto imagem na representação cartesiana. 	9
1.5) O mesmo erro do item 1.3 cometido na representação cartesiana, repetição de valores na reta. 	4
1.6) No item 'e' da questão 3. Considerar a inversão dos conjuntos imagem e domínio com sendo função, mas neste caso a função não tem inversa.	28
1.7) Na questão 5 o gráfico apresenta vários valores nos eixos x e y, mas nem todos pertencem ao domínio e à imagem. Dificuldade em definir imagem e domínio. 	10

Observações:

Na questão 4 os alunos não apresentaram dificuldade em representar os dados do gráfico de Pizza para diagrama ou em responder as questões propostas. Apenas 2 alunos inverteram domínio e imagem. O conjunto que haviam definido como domínio no diagrama se tornou imagem quando representado no plano cartesiano.

A dificuldade maior na ‘questão 5’ foi determinar os elementos do domínio e da imagem. O gráfico cartesiano apresenta no eixo x, valores que vão de 1979 a 1988. Mas só os valores 1980 a 1987 pertencem ao domínio. O gráfico da questão dificultou ou impediu a associação de valores.

Outras observações:

Nas Questões 3, 4 e 5 apaceram as seguintes dificuldades:

- Identificar que variavel ocuparia o eixo x e o eixo y.
- Valores que apareceram duas vezes na tabela também foram repetidos no diagrama e no plano cartesiano.
- Os erros cometidos na questão 1 quanto à definição de função foram cometidos também nestas questões.
- Dificuldade em identificar os elementos que pertencem ao domínio e imagem. Esse erro ocorreu principalmente na questão 5.
- O conjunto que haviam definido como domínio no diagrama se tornou imagem quando representado no plano cartesiano.
- Compreensão de função com domínio contínuo ou discreto.

Proposta para o ensino de função: Conjunto, Relação e Função.

Identificando as dificuldades enfrentadas pelos educandos na compreensão de funções me dedico, nesse capitulo, à apresentação da definição de função, antes, porém destaco alguns pré-requisitos para alcançar esse objetivo.

Inicio, então, com noção sobre Conjuntos, é importante que o estudante compreenda, reconheça e represente Conjuntos.

Conjuntos

Definição

Um conjunto é uma coleção de objetos, seres ou números com uma ou mais características comuns. Usualmente utilizam-se letras maiúsculas A, B, S,… X para representar conjuntos. Os objetos que constituem um conjunto são chamados de elementos.

Relação de pertença

Num conjunto está implicitamente definida a relação de pertença de um elemento, utilizando-se o símbolo $\in$ para designá-la.

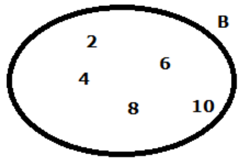
Considere $a \in A$ significa que "a pertence ao conjunto A" ou "a é um elemento do conjunto A". Se dissermos que $a \in A$, então 'a' possui as mesmas propriedades dos outros elementos do conjunto A.

Enquanto que $b \notin A$ significa que "b não pertence ao conjunto A" ou "b não é um elemento do conjunto A". .

Modos de representar um conjunto

Podemos representar um conjunto de maneiras diferentes:

- Por extensão (enumerando seus elementos, se possível).
  Exemplo: B= {2, 4, 6, 8, 10} observe que os elementos são representados entre chaves.
- Podemos ainda escrever dentro de uma região limitada por uma linha curva fechada os elementos – Diagrama de Venn.



- Por suas propriedades, por exemplo:

  B = {x; x é um inteiro, x > 0}, lê-se “B é o conjunto dos x tais que x é inteiro e x é maior do que zero”. Uma letra, comumente x, é usada para denotar um elemento arbitrário do conjunto; os dois pontos é lido como “tal que” e a vírgula como “e”.

O conjunto B acima também pode ser escrito como B = {x | x é um inteiro e x > 0}. A barra | significa “tal que”.

Na matemática os números são agrupados em conjuntos de acordo com suas propriedades são os Conjuntos Numéricos:

O conjunto dos números naturais (N) é formado pelos números 0, 1, 2,...

N = {0, 1, 2, 3,...}.

O conjunto dos números inteiros (Z) é formado pelos números naturais acrescido dos números - 1, -2, -3,... .

Z = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...}

O conjunto dos números racionais (Q) é formado pelos números na forma a/b, onde a e b são inteiros com b≠0.

$$Q = \left\{ ...;-3;-\frac{5}{2};-2;-1{,}23;-1;-\frac{1}{3};0;\frac{1}{2};1;\frac{4}{3};\ 2{,}777...;3,... \right\}$$

Utilizando o elemento genérico, podemos escrever de modo mais simples,

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} / a \in Z\ e\ b \in Z^{*} \right\}$$

O conjunto dos números irracionais (I) é formado pelos números cuja representação decimal infinita não é periódica. Exemplo:

$\sqrt{2}$ = 1,4142136...

$\sqrt{3}$ = 1,7320508...

π = 3,1415926...

O conjunto dos números reais (R) é formado pelos números racionais e pelos números irracionais.

R = Q U I, sendo Q $\cap$ I = ϕ.

Observando os elementos desses conjuntos notamos que os elementos do conjunto N são também elementos do conjunto Z, diz-se que N é um subconjunto do conjunto Z, esse é outro conceito importante no estudo de conjuntos. Para indicar essa relação usamos a notação $N \subset Z$.

A relação $N \subset Z$ chama-se relação de inclusão, todos os elementos do conjunto N pertencem ao conjunto Z, sem exceção.

Relações e Função

Considere os conjuntos A= {1, 3,5} e B= {0, 2, 4,6} o conjunto Axb, chamado produto cartesiano entre A e B, é conjunto formado por todos os pares ordenados onde o primeiro elemento do par pertence ao conjunto A e o segundo elemento do par pertence ao conjunto B. Portanto:

AxB= {(1,0); (1,2); (1,4); (1,6); (3,0); (3,2); (3,4); (3,6); (5,0); (5,2); (5,4); (5,6)}

Relação é qualquer subconjunto de AxB (A cartesiano B), esses subconjuntos podem ser tomados aleatoriamente ou a partir de uma lei ou regra.

A função é tipo um de Relação entre Conjuntos que possui características bem definidas, vamos identificar tais caraterísticas através dos exemplos a seguir.

A ideia de Função

Nesse tópico vamos procurar compreender funções através de problemas.

Problema 1

Calcule a área de um circulo que chamaremos de y, em relação ao raio que chamaremos de x, sabemos que $y = \pi . x^2$.

Observe que:

- A área(y) depende do raio(x) essa dependência está bem definida pela lei (fórmula ou regra) $y = \pi . x^2$.
- y e x são variáveis;

Observando a tabela a seguir podemos ver alguns valores gerados nessa relação:

x	$y = \pi . x^2$	y
1	$y = \pi . 1^2$	3,14
2	$y = \pi . 2^2$	12,56
3	$y = \pi . 3^2$	28,26

- Verificamos assim que para cada valor do raio(x) teremos uma única área(y).
- Por conseguinte dizemos que a relação existente entre os elementos conjunto y (área do circulo) e os elementos do conjunto x (raio da circunferência) é uma função. A variável y é uma função da variável x.

Problema 2

O canto dos grilos é um som familiar no campo numa noite quente. O ritmo no qual os grilos cantam depende da temperatura: quando esta quente eles cricrilam mais do que em qualquer outro tempo. A tabela abaixo mostra como o ritmo no qual os grilos cantam está relacionado à temperatura.

Temperatura em Graus Fahrenheit	50	60	70	80
Número de Cricrilos em quinze segundos	10	20	30	40

Observe que:

- A temperatura e o número de cricrilos são variáveis;
- Para cada temperatura existe um único número correspondente de cricrilos em quinze segundos;
- Para cada quantidade de cricrilos existe uma única temperatura correspondente;
- Se chamarmos F o conjunto das temperaturas em graus Fahrenheit e n o conjunto dos números de cricrilos em 15 segundos, podemos escrever:
  $n = F - 40$ ou $F = n + 40$.
  Ou seja, a relação entre a temperatura e o número de cricrilos em 15 segundos está bem definida;
- Como no exemplo anterior, chamamos essa relação entre a temperatura e os cricrilos de função;
- Na formula $n = F - 40$, n varia de acordo com F, então n é função de F.
- Na formula $F = n + 40$, F varia de acordo com n, então F é função de n.

Tanto a formula como a tabela são formas de representação de função.

Problema 3

Com 80 metros de cerca um fazendeiro deseja circundar uma área retangular junto a um rio para confinar alguns animais. Quanto de área ele pode obter?
Os lados do retângulo serão c e (c – 40).
O valor da área pode ser obtido pela formula $A = 40c - c^2$, onde A é a área e c é o comprimento do terreno.
Escrevendo alguns valores, teremos:

Comprimento do terreno (c) m	5	10	15	20	25	30	35
Área do terreno (A) m²	175	300	375	400	375	300	175

Observamos que:

- O comprimento do terreno e a área do terreno são variáveis;
- Existe uma relação bem definida entre a área do terreno e o comprimento do terreno, pois $A = 40c - c^2$.

- Temos o conjunto dos possíveis comprimentos do terreno e o conjunto das possíveis áreas do terreno;
- Para cada comprimento temos uma única área correspondente, não acontece o mesmo para área e comprimento, tem área que possui mais de um correspondente no comprimento. Exemplo: a área 175 m² corresponde ao comprimento 5m e 35m. Por isso dizemos que a área do terreno é função do comprimento, mas o comprimento não é função da área. Existe a relação comprimento – área, mas essa relação não é função.

Pudemos observar a partir dos exemplos que função é uma relação entre conjuntos que apresenta as seguintes caraterísticas:

- Existe uma associação bem definida entre os conjuntos, essa associação é dada por uma regra ou lei;
- Se dissermos que o conjunto Y é função do conjunto X, quer dizer que para cada elemento do conjunto X existe um, e somente um, elemento correspondente no conjunto Y.

Após essa primeira ideia sobre função vamos agora formalizar essa definição como é estudada na Matemática.

Definição de função

Utilizo aqui a definição dada no livro “A Matemática do Ensino Médio, Volume 1, da Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática”:

“Dados os conjuntos X, Y, uma função (lê-se “uma função de X em Y”) é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$, um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama-se domínio e o conjunto Y é o contradomínio da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se imagem de x pela função f , ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \rightarrow f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em $f(x)$”.

Para melhor compreender essa definição vamos retornar aos exemplos anteriores.

Problema 1
Calcule a área de um circulo que chamaremos de y, em relação ao raio que chamaremos de x, sabemos que $y = \pi.x^2$, para $\pi = 3{,}14$, temos:

x	$y = \pi.x^2$	y= $f(x)$
1	$y = \pi.1^2$	3,14
2	$y = \pi.2^2$	12,56
3	$y = \pi.3^2$	28,26

Considerando que a área do circulo depende do seu raio:
Temos $f : X \rightarrow Y$
Conjunto X são os possíveis valores do raio (x), chamado domínio da função f;
Conjunto Y são os valores da área do circulo (y ou $f(x)$), chamado contradomínio da função f;
Os valores 3,14; 12,56; 28,26 e $f(x)$ são chamados imagem pela função f;
Se $y = f(x)$, então $f(x) = \pi.x^2$, logo $f(1) = 3{,}14$; $f(2) = 12{,}56$ e $f(3) = 28{,}26$.

Problema 2
O canto dos grilos é um som familiar no campo numa noite quente. O ritmo no qual os grilos cantam depende da temperatura: quando esta quente eles cricrilam mais do que em qualquer outro tempo. A tabela abaixo mostra como o ritmo no qual os grilos cantam está relacionado à temperatura.

Temperatura em Graus Fahrenheit	50	60	70	80
Número de Cricrilos em quinze segundos	10	20	30	40

Considerando que o "número de cricrilos em quinze segundos" depende da temperatura n = F – 40, é a situação mais lógica do ponto de vista científico, o som dos grilos não influencia a temperatura.

Temos $f : X \rightarrow Y$
O conjunto X é "temperatura em graus Fahrenheit", chamado domínio da função f;
O conjunto Y é "número de cricrilos em quinze segundos", chamado contradomínio da função f;
Os valores 10, 20, 30, 40 e $f(x)$ são chamados imagem pela função f;
Para $x \in X$ e $y = f(x) \in Y$ temos que $f(x) = x - 40$, repare que trocamos a variáveis F (temperatura em graus Fahrenheit) por x e n (número de cricrilos em quinze segundos) por $f(x)$.

Podemos escrever assim alguns valores da função:

x	$f(x) = x - 40$	$f(x)$
50	$f(50) = 50 - 40$	10
60	$f(60) = 60 - 40$	20
70	$f(70) = 70 - 40$	30
80	$f(80) = 80 - 40$	40

Como podemos ver na tabela um valor x passa pela lei da função e gera um valor $y\, ou\ f(x)$. Como vimos na definição: “Escreve-se $x \to f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em $f(x)$”.

Espero que esta breve apresentação aplicada junto à “proposta de atividades para introdução do estudo de função” que apresento a seguir, sejam de utilidade para compreender e aprofundar o estudo desse conteúdo tão vasto e importante. A muito a ser estudado, por exemplo não tratei aqui do plano cartesiano.

Bom trabalho!!!!

Proposta de atividades para introdução do estudo de função

Plano de aula
Objetivo:
Compreender e definir função;
Compreender função como instrumento para compreensão da realidade;
Reconhecer gráficos e tabelas como representação de função.

Conteúdo
Função

Anos
9º ano ou 1º ano médio

Tempo estimado
10 aulas

Material necessário

Cópia da lista de problemas para as primeiras aulas
Jornais, revistas e livros didáticos de História, Geografia, Química e Física.
Sala de informática
Software de planilha eletrônica (Usamos como exemplo a Microsoft Excel)

Desenvolvimento
1º Etapa
Explique aos alunos que a atividade tem por objetivo conhecer e definir um conteúdo matemático muito importante para compreensão da realidade, além de permitir que uma mesma situação possa ser representada na forma de tabela, gráfico ou fórmula matemática, favorecendo conhecer melhor e inferir sobre a realidade.
É importante que eles já saibam construir o gráfico cartesiano.
Nessa atividade ele vai explorar as várias formas de representar um mesmo problema.
Dividir a turma em grupos de 4 a 6 alunos. Incentivá-los a buscar soluções e a discutir as soluções encontradas para os problemas propostos.

Pré-requisito:
Conhecer o plano cartesiano para construção de gráficos.

Lista de problemas

Questão 1

ENEM 2011 - Questão 152 – Prova Azul. (adaptada)

As frutas que antes se compravam por dúzias, hoje em dia, podem ser compradas por quilogramas, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção.
Considere que, independente da época ou variação de preço, certa fruta custa R$ 1,75 o quilograma.

a) Construa uma tabela relacionando os conjuntos: peso (em kg) e custo (R$).
b) Construa o gráfico cartesiano: o eixo dos x serão os elementos do conjunto peso.
c) Escreva a lei que associa os elementos do conjunto peso (x) aos elementos do conjunto custo (y).
d) Qual é o custo (y) a ser pago se forem adquiridos 23,4 kg de frutas?
e) Quantos kg de frutas se podem adquirir com R$ 50?
f) Represente a situação no diagrama.
g) Qual das formas de apresentação (tabela, gráfico ou fórmula) você achou mais interessante? Por quê?

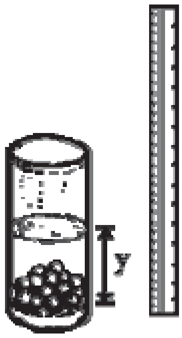
Questão 2

(Unicamp-SP\questão adaptada) A troposfera, que é a primeira camada da atmosfera, estende-se do nível do mar até a altitude de 40000 pés; nela, a temperatura diminui 2º C a cada aumento de 1000 pés na altitude. Suponha que em um ponto A, situado ao nível do mar, a temperatura seja 20ºC.

a) Construa uma tabela para representar a situação problema.
b) Escreva a lei que associa temperatura e altitude.
c) Esboce o gráfico cartesiano.
d) Em que altitude, acima do ponto A, a temperatura é de 0ºC?
e) Qual é a temperatura a 35000 pés acima do mesmo ponto A?

Questão 3

ENEM 2009 - Questão 159 – Prova Azul. (questão adaptada)
Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.



O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

número de bolas (x)	nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Disponível em: www.penta.ufrgs.br.
Acesso em: 13 jan. 2009 (adaptado).

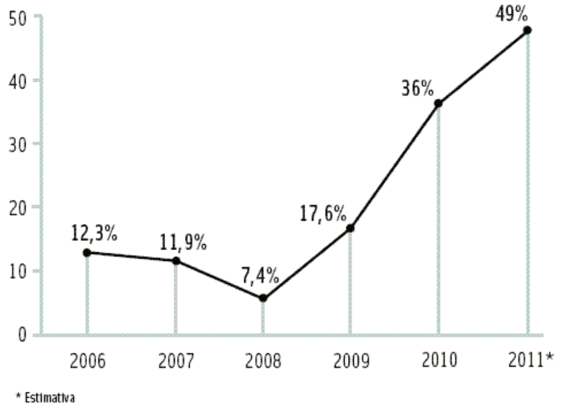
Perguntas:

a) Qual o nível da água (y) para 20 bolas?
b) Qual o número de bolas (x) se o nível da água for 8,10 cm?
c) Esboce o gráfico cartesiano a partir das informações dadas?
d) Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x)?
e) Represente a situação no diagrama.

Questão 4

Enem 2010 (questão adaptada)

O gráfico abaixo apresenta a taxa de crescimento dos voos domésticos no Brasil, por ano, em relação ao ano anterior, entre 2006 e 2011. Verifica-se que a estimativa para a taxa de 2011 em relação a 2010 é de 49%.



* Estimativa

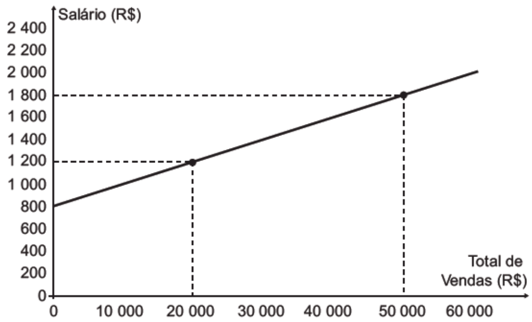
Crescimento dos voos domésticos no Brasil, por ano, em relação ao ano anterior, no período de 2006 a 2011.

"Entre o céu e o inferno". VEJA, São Paulo, nº 2.159, 7 de abril de 2010, pág. 70 (adaptado)

a) A que se referem os valores do eixo x? E do eixo y?
b) Escreva os valores do gráfico em forma de tabela.

Questão 5

No comércio é comumente utilizado o salário mensal comissionado. Além de um valor fixo, o vendedor tem um incentivo, geralmente um percentual sobre as vendas. Considere um vendedor que tenha salário comissionado, sendo sua comissão dada pelo percentual do total de vendas que realizar no período. O gráfico expressa o valor total de seu salário, em reais, em função do total de vendas realizadas, também em reais.



a) Construa uma tabela com os valores do gráfico cartesiano.
b) Os valores do eixo x representa qual conjunto? E os valores do eixo y?
c) Qual o total de vendas necessário para obter um salário de R$ 1600?
d) Para receber um salário de R$ 2200 quantos deverá vender em R$?
e) Qual é a lei que associa o total em vendas (x) com o valor do salário (y)?

Questão 6

Em uma experiência sobre deterioração de alimentos, constatou-se que a população de certo tipo de bactéria dobrava a cada hora. No instante em que começaram as observações, havia 50 bactérias na amostra.

a) Construa uma tabela relacionando tempo de observação e população da bactéria.
b) Qual é a população de bactérias após 2 horas do início da experiência? E após 4 horas?
c) Obtenha a lei que relaciona o número de bactérias (y) em função do tempo (x).
d) O gráfico cartesiano para essa situação é uma reta? Esboce o gráfico.
e) Dê uma estimativa do número de bactérias após 1 dia de observação. (use a aproximação: $2^{10} \cong 10^3$)

Questão 7

A atividade pesqueira no mundo emprega 30 milhões de pessoas, sendo que 95% dos pescadores vivem nos países pobres. Na Ásia, principalmente na China, na Índia, no Vietnã, na Indonésia, em Bangladesh e nas Filipinas, essa atividade econômica apresenta crescimento graças ao aumento de suas frotas pesqueiras. Veja tabela.

Maiores Produtores de Pescado do Mundo

País	Porcentagem sobre o total
1º China	33,3%
2º Peru	6,6%
3º Índia	4,5%
4º Estados Unidos	4,1%
5º Indonésia	4,1%
6º Japão	4,0%
7º Chile	3,6%
8º Tailândia	3,3%
9º Rússia	2,5%
10º Noruega	2,5%

Fonte: Images économiques du monde 2005. Paris: Armand Colin, 2004

A partir das informações dadas responda:
a) Represente as informações na tabela no diagrama de Venn.
b) Represente também no plano cartesiano.

2ª Etapa
Solicitar aos grupos que apresente os resultados para o restante da turma. Incentivar o debate e discursão da solução apresentada.

3ª Etapa
Apresentar a definição de função e solicitar que, em grupo, identifiquem os problemas que são modelos de função.
Pedir que escrevessem, a partir dos trabalhos realizados, a importância do estudo das funções.

4ª Etapa
Realizar essa atividade em grupos.
Identificar em revistas e nos livros didáticos de História, Geografia, Física, Química e Biologia modelos de função.

5ª Etapa
Construção de gráficos de funções utilizando o software Geogebra.
Verificar que gráfico é gerado quando inserimos uma função afim, ou quadrática, ou exponencial, ou logarítmica.
Aproveitar essa atividade analisar pontos de crescimento ou decrescimento da função, pontos de interseção com eixo x ou eixo y.

Conclusão

O trabalho realizado tem sido de grande valor na minha prática. As conversas com a Prof.ª Sônia, sempre animadoras, me provocaram sempre mais a investigação. Após encontrar-lhe saia contente por ver a empolgação e olhar que tinha sobre o material que eu trazia para lhe apresentar, valorizando cada informação e me ensinado a olhar assim também.

As visitas á Biblioteca Nacional à procura de informações nos livros de Geografia e História ampliou meu horizonte para preparação das aulas, pois exigiram que eu buscasse mais informações e relações além daquelas apresentadas pelos livros didáticos de matemática. Não deixei de usar o livro didático, mas enriqueci mais minhas aulas trazendo informações novas e discutindo com os educandos.

A leitura de textos, monografias, periódicos em busca da fundamentação teórica propiciou uma discussão mais rica com educandos, ampliou horizontes e um olhar mais investigativo para o processo de ensino e aprendizagem.

Na minha prática em sala de aula e nos resultados após a aplicação do questionário identifiquei algumas dificuldades que apresento em tópicos:

- ✓ Confusão entre domínio e imagem;
- ✓ Não consegue relacionar tabelas e gráficos como forma de representação de função
- ✓ Dificuldade em identificar a variáveis (conjuntos) que participam da relação;
- ✓ Não entendem que uma mesma informação pode ser representada na forma de tabela, gráfico cartesiano ou conjuntos.
- ✓ Na representação no plano cartesiano tem dificuldade em identificar a variável x e a variável y.
- ✓ Dificuldade em entender função como sendo uma relação.
- ✓ Que funções de domínio discreto são pouco enfatizadas e raramente são apresentados exemplos que as relacionem com situações não matemáticas.

Compreendendo um pouco mais as dificuldades apresentadas pelos educandos, os limites que tem os livros didáticos e meus próprios em apresentar a funcionalidade do estudo de funções, estabeleci alguns objetivos no planejamento e na dinâmica da minha prática em sala de aula:

- ✓ Propor mais exemplos antes de apresentar o conhecimento formal proposto nos livros.
- ✓ Propor mais atividades investigativas.
- ✓ Elaborar atividades voltadas à elaboração e resolução de problemas propiciando ao educando conhecer, julgar e inferir na meio em que vive.

Objetivando com essas propiciar ao educando a construção do seu conhecimento para que possa confrontá-lo com o conhecimento formal apresentado nos livros. Entre tantos textos lidos me deparei com a teoria “imagem de conceito e definição de conceito” que tem como precursores os pesquisadores David Tall e Shlomo Vinner (TALL; VINNER, 1981), os quais defendem que um determinado conceito não deve ser trabalhado a partir de sua definição formal, ou seja, aquela definição aceita, em geral, pela comunidade matemática, em um determinado momento histórico e contida nos livros didáticos. Para que um determinado conceito seja entendido, os autores defendem a necessidade de o aluno ter uma familiaridade anterior a sua formalização.

Entendo a pequena contribuição que ofereço com este trabalho ante a abrangência do tema proposto e às dificuldades vividas hoje na educação brasileira, mas reconheço também a importância dessa reflexão para continuar a buscar formas para ensinar e fazer aprender a Matemática de uma forma mais interessante.

Referências Bibliográficas

Ponte, J.P(1990). O conceito de função no currículo de Matemática. Educação Matemática, 15, 3 – 9.

Gomes Leão, A.S.; Bisognin, V. Construção do conceito de Função no Ensino Fundamental por meio da Metodologia de Resolução de Problemas. EMRS – ANO 10 – 2009 – número 10 – v.1 – pp. 27 a 35

Silva Bueno, R. W.; Viali, L. A construção histórica do conceito de Função. EMRS – ANO 10 – 2009 – número 10 – v.1 – pp. 37 a 47

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio, Brasília: Ministério da Educação e Cultura/SEMTEC, 1998.

Vicentino, C. História Geral – Ensino Médio – Volume único, Coleção Novos Tempos, Ed. Scipione.

Vicentino, C.; Dorigo, G. Série Parâmetros – História Geral e do Brasil, Ed. Scipine, 1ª edição, 6ª impressão.

Sene, E.; Moreira, J.C. Geografia Geral e do Brasil – Espaço Geográfico e Globalização – Ensino Médio. Ed. Scipione, Ed. Atualizada

Moraes, P. R. Geografia Geral e do Brasil. Ed. Harbra, 3ª edição

Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado – Temas e Problemas – Coleção do professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, RJ.

Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado – A Matemática do Ensino Médio, vol. 1 – Coleção do professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, RJ.