Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Identidades Geométricas e Resultados de Rigidez em Variedades do Tipo Estática

por

Allan George de Carvalho Freitas

Belo Horizonte

2016

Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Identidades Geométricas e Resultados de Rigidez em Variedades do Tipo Estática

por

Allan George de Carvalho Freitas *

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Belo Horizonte, 08 de julho de 2016

Comissão Examinadora:

Ezequiel Rodrigues Barbosa (Orientador)

Emerson Alves Mendonça de Abreu

Márcio Henrique Batista da Silva

Marcos da Silva Montenegro

Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante

Rodney Josué Biezuner

*O autor foi bolsista da Fapemig durante a elaboração deste trabalho.

"O Maria sine labe originali concepta ora pro nobis qui confugimus ad te."

Agradecimentos

Sem dúvidas, uma grande realização em nossa vida perpassa pelos numerosos esforços que compõem as vitórias diárias, lampejos que constroem a passos de luta o reconhecimento da gênese de um sonho. Gostaria de agradecer a todos que contribuíram direta e indiretamente para a conclusão de meu doutorado, que teve como ponto final esta tese.

Primordialmente a Deus, uno e trino, fonte e fim de todas as graças depositadas integralmente durante todos os momentos desta fase em minha vida, cuja paz, saúde, fé e perseverança foram dons concedidos e sentidos diariamente.

À Mãe de Deus e nossa, Nossa Senhora, Virgem das Graças e Mãe Aparecida, tão presente e fazendo-me sentir-se cuidado, mesmo fisicamente, em todos os momentos e em todas minhas ações. Como em minhas orações diárias, "não desprezou as súplicas que em nossa necessidade vos dirigi, mas livrou-me sempre de todos os perigos, ó Virgem, gloriosa e Bendita". Pelas mãos de Maria, ofereço, sem reservas, este trabalho e todos os esforços dispendidos pela glória de Deus.

À minha família, a fonte que não finda em presença de amor e apoio em todos esses anos. Sei que concluo um sonho de muitos passos e a vitória é de vocês, que participaram com papel principal em todos os momentos desta construção. À minha mãe Leide, pelas ligações diárias repletas de um amor incondicional, livre das distâncias, superior a todos os percalços. Ao meu pai Alexandre, pela sua preocupação constante com meu bem estar que fez romper os limites de distância geográfica para me dar a melhor estrutura física e emocional que poderia ter. À minha irmã Alexandra, pela torcida e incentivo constantes.

À minha namorada Carol, por ser a minha inspiração e vida em todos os momentos que teve a oportunidade de me ajudar. Sua presença em minha vida, coroou com a virtude do amor a felicidade de realizar esse sonho.

Ao meu orientador Ezequiel Barbosa, pela amizade e confiança depositada em mim, constituídas de uma motivação sempre constante e uma orientação técnica de grandeza. Com você, aprendi de forma louvável, o que é ser um profissional de excelência em minha área, onde o crescimento acadêmico e pessoal estão intrisecamente ligados, onde o trabalho sério deve caminhar unido a humildade de ensinar e colaborar com o desenvolvimento pessoal mútuo.

À banca examinadora desta tese, os professores Marcos Petrúcio, Márcio Batista, Marcos Montenegro, Rodney Biezuner e Emerson Abreu, pela disponibilidade e ótimas sugestões que engradecem o resultado final desta tese. Em especial, agradeço a Marcos Petrúcio pelas edificantes discussões acerca de nomenclaturas em minha tese e observações referentes a generalização disposta na Seção 3.1.

A todos os professores do Departamento de Matemática da UFMG, em especial aos professores Marcelo Terra, Marcos Montenegro, Emerson Abreu, Ezequiel Barbosa, Rogério Mol e Mário Jorge pelos cursos a nível de excelência ministrados, me dispondo a uma formação pessoal sólida como professor e pesquisador. Agradeço ao Professor Marcos Montenegro pela disponibilidade em receber-me como seu aluno no início de meu doutorado e por sua condução ótima do tenso período de qualificação do doutorado ao início da produção de minha tese.

Aos amigos do Departamento de Matemática da UFMG, a quem tive por família nessas terras distantes. Em especial, ao Felipe que me acompanhou in loco desde a chegada numa cidade desconhecida até a finalização deste sonho. Aos amigos da Sala 1001, Sávio, Rodrigo Botelho, Eliza, Javier, Leonardo, Eduardo Cabrera, Carlos Salazar, Gilberto, Edir, Moacir e a todos alunos da pós pelo ambiente de companheirismmo, amizade e alegria dispostos como cruciais a este tempo de aprendizado em muitos sentidos.

Não obstante a todo apoio familiar à distância que tive, encontrei em Belo Horizonte muitos amigos a quem hoje posso considerar como família de berço. Em especial, agradeço à família de Seu Eduardo e Dona Andrea, meus pais mineiros, que desde o momento que cheguei em sua casa me ensinaram muitos valores de confiança, amizade e ajuda ao próximo, testamentos que hoje levo para minha vida. Aos amigos da Legião de Maria, por todo o apoio de fé e pessoal que tive, em especial a Dona Geni, mais uma mãe mineira que ganhei.

A Eliane Andrea e Eliane Kelly, as exímias secretárias do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMG, pela atenção constante, pronta e competente em todos os momentos que necessitei.

Ao Fundo de Amparo à Pesquisa em Minas Gerais(Fapemig), cujo apoio financeiro tornou viável todo o percurso de meu doutorado, junto ao desenvolvimento e contribuições científicas e pessoais que obtive nestes anos.

A todos os familiares e amigos de Alagoas e Pernambuco que, mesmo de longe, torceram e me enviaram muitas mensagens de ânimo.

Enfim, hoje percebo que uma grande realização na vida parametra novos e maiores sonhos. Com este dever cumprido, permito almejar, com a força que vem de Deus, novas vitórias que se tornarão sentidos de vida e luz para a minha história, vitórias sentidas e compartilhadas com a presença destas pessoas especiais.

Resumo

Nesta tese, obtemos alguns resultados de rigidez em variedades que satifazem uma equação do tipo estática como, por exemplo, as variedades estáticas, os Ricci Solitons, os Solitons generalizados, as variedades V-estáticas e as variedades Einstein com uma S^1-ação estática. Os métodos utilizados para obter nossos diversos resultados são baseados na análise de identidades integrais na Geometria Riemanniana, tais como a Identidade de Pohozǎev-Schöen e a Identidade de Reilly, e em técnicas variacionais inspiradas na Análise Geométrica.

Palavras-Chaves: Variedades Estáticas; Variedades V-estáticas; Identidade de Pohozǎev-Schöen; Ricci solitons.

Abstract

In this thesis, we obtain some results of rigidity in manifolds which satisfies an equation of static type, for example, the static manifolds, the Ricci Solitons, the generalized Solitons, the V-static manifolds and the Einstein manifolds with a S^1-static action. The methods used in ours various results are based in the analysis of integral identities in Riemannian geometry, such as Pohozǎev-Schöen Identity and Reilly Identity, and in the variational techniques inspired by the Geometric Analysis.

Key-Words: Static Manifolds; V-static manifolds; Pohozǎev-Schöen Identity; Ricci solitons.

Sumário

Introdução

Teoremas de rigidez em Geometria Riemanniana surgem como uma salutar inspiração de propensos esforços na área, bem como abragem ferramentas da mais diversa natureza. Exemplos de belos teoremas neste escopo na literatura não nos faltam, indo desde os clássicos Teorema de Bonnet-Myers, Teorema de Toponogov e o Teorema de Obata às muito recentes resoluções da Conjectura de Poincaré por Perelman, e conjectura de Willmore por Marques-Neves, além do Teorema da Esfera Diferenciável por Brendle-Schöen. Além disso, técnicas utilitárias a suas resoluções traduzem a riqueza e abrangência destes esforços, perpassando da teoria de comparação a análise de Identidades Integrais, como as de Reilly, Minkowski e Kazdan-Warner, e indo ao encontro de teorias variacionais como os fluxos geométricos de Ricci e da curvatura média, e a técnica do mini-max.

Neste sentido, um problema que envolve rigidez e permeia a história recente da Relatividade Geral se refere à solução das equações de Einstein como fins de modelagem da forma do universo. O objeto base desta área de estudo reside numa $(n+1)$-dimensional variedade Lorentz (L, h) que é um espaço tempo com assinatura $(-,+,+,\ldots,+)$ satisfazendo a equação de Einstein

$$Ric_h - \frac{1}{2}R_h h + \Lambda h = \frac{8\pi G}{C^4}T_h,$$

onde Ric_h é o tensor de Ricci de h, Λ é a constante cosmológica, G é a constante gravitacional, C é a velocidade da luz e T_h é o tensor momento. Neste trabalho, invocarems ao problema no vácuo, onde $T_h = 0$. O espaço tempo (L, h) é dito estático se existe um campo de Killing K do tipo tempo e globalmente definido, cuja distribuição ortogonal é integrável (cf. Seção 3.4 de [43]). A existência de tal campo de Killing determina uma estrutura de produto warped em L como

$$L = \mathbb{R} \times M, \quad h = -f^2dt^2 + g, \tag{1}$$

onde (M^n, g) é uma variedade Riemanniana de dimensão n compacta, conexa e $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave denominada de potencial estático. O campo $\frac{\partial}{\partial t}$ será o campo de Killing em questão. Com um cálculo simples a produtos warped (cf. [10], Proposição 9.106), a condição de estaticidade de L é traduzida no seguinte Problema Sobredeterminado em M

$$D^2 f - fRic_g + \Lambda f g = 0, \quad \text{e} \quad \Delta f = -\Lambda g, \tag{2}$$

onde consideramos D^2 e Δ, o Hessiano e o Laplaciano advindos da métrica g. Denotamos (M^n, g, f) de tripla estática. Uma observação importante desta formulação elíptica se deve a verificação que M tem curvatura escalar constante $R_g = \Lambda(n-1)$. Além disso, $\Sigma = f^{-1}(0)$ é uma hiperfície fechada e mergulhada em M, possivelmente com várias componentes conexas (cf. estas afirmações no Teorema 1.1). Do ponto de vista físico, as hiperfícies $\mathbb{R} \times \Sigma$ são chamadas de horizontes de eventos e tem importância no estudo de buracos negros(cf. [43] e [45], por exemplo).

O exemplo modelo de rigidez para variedades estáticas com constante cosmológica $\Lambda > 0$ é dado pelo hemisfério canônico de raio $r = \sqrt{\frac{n}{\Lambda}}$, representado por $(\mathbb{S}^n_+(\sqrt{\frac{n}{\Lambda}}), g_{st})$. Considerando a função altura h nesta variedade pode-se verificar que a mesma satisfaz (2). Desta forma, o correspondente espaço-tempo

$$(L_+, h) = (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n_+, -h^2 dt^2 + g_{st})$$

é uma solução da Equação de Einstein no vácuo. Este é o exemplo de uma família de variedades, soluções exatas da Equação de Einstein, chamadas de espaços de De Sitter (cf. Seção 5.3 de [43]). Além disso, é um componente de rigidez para uma famosa conjectura formulada por Boucher-Gibbons-Horowitz([14]) e aclamada como *No-Hair Conjecture*:

Conjectura 0.1 (No-Hair Conjecture)**.** *O único espaço-tempo estático com constante cosmológica $\Lambda > 0$ e horizonte cosmológico de eventos conexo é o espaço de De Sitter de raio $\sqrt{\frac{n}{\Lambda}}$. Em outras palavras, a única tripla estática (M^n, g, f) com bordo conexo e constante cosmológica $\Lambda > 0$ é dada pelo hemisfério canônico $(\mathbb{S}^n_+(\sqrt{\frac{n}{\Lambda}}), g_{st})$, onde o potencial estático f é dado pela função altura.*

Salientamos que a conexidade na conjectura acima é essencial (cf. [57]). A partir deste momento da história, vários trabalhos na direção de demonstrar a unicidade do espaço de De Sitter tem almejado esforços com a adição de novas hipóteses que corroboram positivamente para a assertiva da No-Hair Conjecture. Boucher, Gibbons e Horowitz ([14]) provaram uma desigualdade para o caso de curvatura escalar positiva ($\Lambda > 0$), onde uma rigidez é obtida pela igualdade (cf. Teorema 1.6). Além disso, eles obtiveram no mesmo trabalho a unicidade do espaço-tempo (chamado de espaço anti-de Sitter) para o caso de curvatura escalar negativa (isto é $\Lambda < 0$). Boucher ([12]) e Friedrich ([32]) demonstraram o resultado asssumindo uma compactificação de Penrose do espaço tempo unido a certas condições nos fins conformes. Galloway([34]) demonstrou o resultado quando o espaço tempo contém uma null line. Chrúsciel ([26]) demonstrou o resultado numa dimensão qualquer $n \geq 3$ com algumas condições sobre a fronteira.

Como limbo à motivação física dada, ainda temos muitos entes na geometria que satifazem uma equação similar à (2) como, por exemplo, os Ricci Solitons, os almost Ricci solitons, as variedades quasi-Einstein e, mais recentemente, as variedade V-estáticas (conferir descrições nos capítulos de nosso trabalho). Em comum, há um interesse em estabelecer modelos para rigidez e novos resultados nesta direção sob condições na geometria intríseca para indicar tais modelos.

Parametrado por tais motivações, nossa tese se compromete a dar contribuições a uma recente gama de trabalhos de classificação e rigidez no trato de variedades do tipo estática e correlatas, inferindo técnicas que residem, especialmente, na utilização de Identidades geométricas, como a Identidade de Pohozăev-Schöen e a Identidade de Reilly, à utilização de métodos de existência de superfícies estáveis. Nossa tese é organizada em 4 capítulos cujo avanço em relação à literatura existente descrevemos a seguir.

O capítulo 1 é introdutório às notações e resultados preliminares a serem utilizados ao decorrer de nosso texto. Além disso, visitamos as definições prévias de alguns entes cujas notáveis propriedades relatadas serão integrantes em nosso desenvolvimento, em especial, as variedades estáticas e V-estáticas.

O capítulo 2 é devotado à aplicação da Identidade de Pohozăev-Schoen com fins de obter novos resultados de rigidez, generalizar resultados obtidos e dar demonstrações consideravelmente mais simples das descritas na literatura existente. Em especial, consideramos uma versão generalizada desta Identidade clássica para definir entes mais genéricos, e obter demonstrações que utilizam diretamente a identidade. Por exemplo, generalizamos a noção de almost Ricci soliton para obter uma generalização junto a uma prova distinta e bem mais direta do seguinte resultado, anunciado primordialmente por Barros et. al em [7] e conosco obtido como corolário.

Teorema 0.1. *Considere (M^n, g, X, λ) , $n \geq 3$, um almost Ricci soliton não trivial fechado e orientado com curvatura escalar constante. Então (M^n, g) é isométrico à esfera Euclideana $(\mathbb{S}^n, g_{st})$ e (M^n, g, X, λ) é um Ricci soliton gradiente.*

Salientamos ainda que nosso método propõe uma maior abrangência das identidades obtidas no trabalho supracitado. Seguindo a mesma direção também obtemos uma generalização junto a uma demonstração mais simples de um resultado para h-almost Ricci solitons obtido por Xia et. al em [37].

Também aplicaremos a Identidade de Pohozǎev-Schoen generalizada para obter alguns resultados na direção de generalizar o Lema de Almost-Schur para tensores mais genéricos e variedades com fronteira. Além disso, obtemos o seguinte resultado que toma a direção de um teorema do tipo Alexandrov para hiperfícies imersas.

Teorema 0.2. *Considere (Σ^n, g_Σ) uma hiperfície fechada e imersa numa variedade Einstein (M^{n+1}, g), com g_Σ a sua métrica induzida. Suponha que existem funções suaves $\lambda : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ e $f : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$\mathbb{II} + D^2_\Sigma f = \lambda g_\Sigma, \tag{3}$$

onde $\mathbb{II}$ é a segunda forma fundamental de Σ. Se a curvatura média de Σ é constante, então Σ é uma hiperfície totalmente umbílica.

Uma seção do capítulo 2 é dedicada a mostrar a eficácia no trato da Identidade de Pohozǎev-Schoen aplicada as variedades V-estáticas, as quais podem ser vistas como uma generalização natural das variedades estáticas. Desta forma, generalizaremos a esta classe de variedades alguns célebres resultados abordados na literatura de variedades estáticas, caminhando na direção de uma desigualdade do tipo Boucher-Gibbons-Horowitz([14]) para V-estáticas:

Teorema 0.3. *Considere (M^n, g) uma variedade compacta, V-estática positiva com fronteira $\partial M = \bigcup_{\alpha=1}^{l} \Sigma_\alpha$, e curvatura escalar $R_g = \varepsilon n(n-1)$, onde $\varepsilon = -1, 0, 1$. Considere as constantes $\kappa_i = |\nabla \lambda||_{\Sigma_i}$. Então, a seguinte desigualdade ocorre*

$$\sum_{\alpha=1}^{l} \int_{\Sigma_\alpha} \kappa_\alpha \left(R_{g_\alpha} - \varepsilon(n-2)(n-1) - \frac{n-2}{n-1} H^2 \right) dV_{\Sigma_\alpha} \geq 0 \,.$$

Além do mais, a igualdade ocorre se, e somente se, (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica em um dos espaços $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{H}^n$.

Teorema 0.4. *Considere (M^3, g) uma variedade Riemanniana V-estática positiva com fronteira conexa e curvatura escalar $R_g = 6\varepsilon$, onde $\varepsilon = -1, 0, 1$. Se $\varepsilon = -1$, assuma adicionalmente que $H \geq 2$. Então*

$$4\pi \geq \left(\varepsilon + \frac{1}{4} H^2 \right) Area(\partial M) \,.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, (M^3, g) *é isométrica a uma bola geodésica em um dos espaços* $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$ *ou* $\mathbb{H}^3$.

Por fim, neste capítulo obtemos uma generalização de um resultado aclamado por Miao e Tam([64]), junto a uma demonstração distinta que novamente utiliza a Identidade de Pohozăev-Schöen. De fato, sua ultilização irá se mostrar um catalisador à sua resolução junto a uma subtração das hipóteses do problema inicialmente proposto. Salientamos que o resultado obtido por [64] difere do descrito abaixo por sua restrição à dimensão da variedade e a hipótese de que a curvatura é não positiva. Tais hipóteses são explicadas pela forma distinta da nossa em tratar o mesmo problema, já que o resultado deles infere a técnicas advindas ao Teorema da Massa Positiva.

Teorema 0.5. *Considere* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana compacta de dimensão* n *com curvatura escalar constante* $R_g = \varepsilon n(n-1)$. *Suponha que* M *possui uma fronteira conexa e suave* Σ, *tal que* g *é um ponto crítico do funcional volume em* $\mathcal{M}_\gamma^K$, $K = \varepsilon n(n-1)$. *Suponha que* (Σ, γ) *é isométrica a uma hiperfície totalmente umbílica* Σ_ε *em* E_ε*(onde* E_ε *é uma variedade Einstein com curvatura escalar* $\varepsilon n(n-1)$ *e* $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$*). Então,*

$$H_\varepsilon \geq H\,,$$

onde H *e* H_ε *são as curvaturas médias de* Σ *e* Σ_ε, *respectivamente. A igualdade ocorre se, e somente se,* (M, g) *é isométrica a um bola geodésica em* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ *ou* $\mathbb{H}^n$.

O capítulo 3, tem a seu início alguns teoremas de rigidez para variedades estáticas e V-estáticas obtidos por uma condição de pinching. A observação crucial à primeira seção deste capítulo se deve a notar que através de uma computação algébrica é possível reduzir uma condição de pinching à condição de curvatura de Ricci não negativa. A partir disso, utilizaremos resultados conhecidos para variedades com curvatura de Ricci não negativa para demonstrar novos resultados e inferir provas mais simples de resultados já aclamados. Por exemplo, em [3] L. Ambrozio obtem um resultado de rigidez para variedades estáticas tridimensionais sob uma condição de pinching fazendo o uso de uma robusta Fórmula do tipo Böchner em uma direção técnica. De uma maneira consideravelmente mais simples, utilizando a gênese da curvatura de Ricci não negativa, estendemos este resultado:

Teorema 0.6. *Considere* (M^3, g) *uma variedade Riemanniana orientável, compacta e estática com fronteira* $\Sigma \neq \emptyset$. *Assuma que* $R_g = 6$ *e*

$$|\mathring{Ric}_g|^2 \leq \frac{R_g^2}{6}\,.$$

Então M possui curvatura de Ricci não negativa e uma das mutuamente exclusivas opções deve ocorrer:

(i) (M^3, g) é isométrica ao hemisfério unitário com a métrica padrão $(\mathbb{S}^3_+, g_{st})$.

(ii) (M^3, g) é isométrica ao cilindro $(\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{3}}) \times [0, \frac{\pi}{\sqrt{3}}]), g_0)$, onde g_0 é a métrica produto.

Além disso, o nosso método propõe uma generalização deste teorema para dimensões altas:

Teorema 0.7. *Considere (M^n, g) uma variedade estática com curvatura escalar positiva. Se*

$$|\overset{\circ}{Ric}_g|^2 \leq \frac{R_g^2}{n(n-1)}$$

então (M^n, g) tem curvatura de Ricci não negativa. Em particular, uma das seguintes possibilidades devem ocorrer:

(i) A aplicação $i_* : \Pi(\partial M) \to \Pi(M)$ é sobrejetora.

(ii) A variedade (M^n, g) é isométrica ao quociente de um cilindro.

Também obtemos teoremas do mesmo calibre para variedades V-estáticas:

Teorema 0.8. *Considere (M^3, g) uma variedade V-estática positiva com curvatura escalar positiva. Se*

$$|\overset{\circ}{Ric}_g|^2 \leq \frac{R_g^2}{6}$$

então (M^3, g) é difeomorfa a uma bola geodésica em $\mathbb{S}^3$.

Teorema 0.9. *Considere (M^n, g) uma variedade Riemanniana V-estática positiva com curvatura escalar não negativa. Se*

$$|\overset{\circ}{Ric}_g|^2 \leq \frac{R_g^2}{n(n-1)}$$

então (M^n, g) tem curvatura de Ricci não negativa. Em particular ∂M é conexa. Se ∂M é simplesmente conexa, então M é simplesmente conexa.

Ainda no capítulo 3, faremos o uso de outra importante identidade integral da geometria, a Identidade de Reilly, com fins de obter extesões de resultados recentes inferidos acerca de desigualdades sobre a fronteira de variedades estáticas (vide [55], [76] e [61]). Desta forma, trataremos o caso V-estático para obter resultados correlatos, como por exemplo o seguinte:

Teorema 0.10. *Considere (M, g) uma n-variedade Riemanniana compacta e V-estática com fronteira Σ e potencial V-estático positivo λ. Considere H e $\mathbb{II}$ como sendo a curvatura media e a segunda forma fundamental de Σ em (M, g), respectivamente. Se $H > 0$ e $k \leq 0$ é uma constante não positiva tal que $Ric \geq (n-1)kg$, então temos a seguinte desigualdade integral sobre Σ*

$$\int_{\Sigma} \lambda \left[\frac{[\Delta_{\Sigma}\eta + (n-1)k\eta^2]}{H} - \mathbb{II}(\nabla_{\Sigma}\eta, \nabla_{\Sigma}\eta) \right] d\sigma \geq \int_{\Sigma} \lambda_{,\nu}[|\nabla_{\Sigma}\eta|^2 - (n-1)k\eta^2] d\sigma, \quad (4)$$

para qualquer função η em Σ. Além disso, a igualdade em (3.6) ocorre se, e somente se, ocorre uma das opções

(i) $k = 0$ e η é a restrição a Σ de uma função u em M satisfazendo que $D^2u = 0$. ou

(ii) $k < 0$ e g é uma métrica Einstein com $Ric = (n-1)kg$, e η é a restrição a Σ de uma função u definida em M satisfazendo que $D^2u + kug = 0$.

O capítulo 4 tem como principal objetivo inferir novos resultados relacionados a variedades estáticas de dimensão alta. A partir da descrição pioneira de Seshadri [82] acerca de variedade Einstein munidas de uma $\mathbb{S}^1$-ação isométrica estática, que a um certo modo particulariza a descrição de variedade estática abordada nos capítulos anteriores, podem ser obtidos alguns teoremas de rigidez quando temos em mãos uma hipótese sob a curvatura escalar do bordo da variedade estática. Particularmente, Seshadri emprega em seu trabalho o caso de variedades estáticas tridimensionais.

Preliminarmente, através de uma aplicação de um Teorema de Gursky (cf. Teorema 4.2), conseguimos uma considerável melhora a um Teorema de H. Seshadri considerando a dimensão $n = 3$:

Teorema 0.11. *Considere (N^4, h) uma variedade Einstein estática, fechada e normalizada de forma que $Ric_h = 3h$. Considere (M^3, g) a variedade estática associada(cf. Definição 4.1). Se $K \leq 3$ em ∂M, então (N^4, h) é isométrica a $(\mathbb{S}^4, g_0)$(caso ∂M seja conexa) ou (N^4, h) é isométrica a $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2, g_{st})$(caso ∂M tenha mais que uma componente conexa).*

Após isto, concetraremos em estudar os problemas de [82] em dimensões altas. Dividimos a atenção às ideias de generalizar [82] ao considerarmos os casos onde o bordo da variedade estática é conexo ou desconexo. Observa-se uma distinção real entre os métodos tratados. Ao inspirar da fórmula de Böchner e da Fórmula de Reilly, conseguimos um resultado de rigidez para as variedades tratadas com bordo conexo numa dimensão qualquer:

Teorema 0.12. *Considere (N, h) uma $(n+1)$-variedade fechada, simplesmente conexa e Einstein estática com variedade estática associada (M, g). Se $R_g = (n-1)(n-2)$ para todos os pontos de ∂M, então (N, h) é isométrica a $(\mathbb{S}^{n+1}, g_{\mathbb{S}^{n+1}})$.*

Veremos que o caso do bordo desconexo nos propõe uma abordagem bem distinta do caso anterior, que reside fortemente na teoria de existência de hiperfícies mínimas estáveis e nos acarreta uma limitação à dimensão. De fato, conseguimos o seguinte resultado:

Teorema 0.13. *Considere N^{n+1} uma variedade Einstein estática, fechada e simplesmente conexa. Considere (M^n, g) a variedade estática associada a N. Se $3 \leq n \leq 7$, ∂M tem mais de uma componente conexa e $R_g(p) \leq n(n-1)$, para todo $p \in \partial M$, então existe uma hiperfície quase-Einstein, homóloga à ∂M e propriamente mergulhada em M.*

Salientamos que o Teorema acima generaliza fielmente para dimensões $3 \leq n \leq 7$ o teorema que propomos a generalizar de [82]. No caso proposto por Seshadri, a dimensão 3 propõe a classificação completa da variedade quasi-Einstein obtida e, por conseguinte, a classificação da variedade estática em questão.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Notações, terminologia e conceitos básicos

Ao curso deste trabalho, salvo mencionado de outra forma, (M^n, g) denotará uma variedade Riemannina compacta e suave de dimensão n e métrica suave g. D denotará a conexão de Levi Civita associada à variedade (M, g). A um ponto $x \in M$, denotamos por T_xM o espaço tangente de M em x e $\mathfrak{X}(M)$ o espaço de todos campos vetoriais suaves em M. Utilizaremos em nosso texto a consagrada notação de Einstein, segundo a qual omitimos o símbolo de somatório ao intepretar indíces repetidos num mesmo termo como indicador deste somatório.

Nas próximas subseções, estabeleceremos algumas notações e resultados preliminares de Geometria Riemanniana, importantes ao curso de nosso texto. A maioria das notações e demonstrações dos resultados podem ser encontradas em alguns consagrados livros da matéria como, por exemplo, [29], [59] e[72].

1.1.1 A geometria intrínseca

Dados $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ campos suaves, definimos o $(1, 3)$ Tensor Curvatura Riemanniana, denotando-o por R, como

$$R(X, Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]} Z,$$

e ao tensor $(0, 4)$ de curvatura também denotado por R por

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W).$$

Dados $x \in M$ e $\pi \subset T_xM$ um plano bidimensional, definimos a curvatura seccional de π por

$$K(\pi) = \frac{R(X,Y,X,Y)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2},$$

onde $\{X,Y\}$ é uma base de π. A definição de curvatura seccional independe da base $\{X,Y\}$ escolhida.

Fixado $x \in M$, considere $\{e_1,\ldots,e_n\}$ uma base ortonormal de T_xM. A curvatura de Ricci de (M,g) é um tensor do tipo $(0,2)$, definido por

$$Ric_g(X,Y) = \sum_{k=1}^{n} R(X,e_k,Y,e_k),$$

e a curvatura escalar é uma função suave em M definida por

$$R_g(x) = \sum_{k=1}^{n} Ric_g(e_k,e_k)(x).$$

Por fim, o tensor de Ricci sem traço de (M,g) é definido por

$$\overset{\circ}{Ric}_g(X,Y) = Ric_g(X,Y) - \frac{1}{n}R_g \cdot g(X,Y).$$

1.1.2 A geometria extrínseca

Considere $\Sigma^{n-1} \subset M$ uma hipersuperfície completa, imersa e 2-sided em (M^n,g). Para cada $x \in \Sigma$, considere $T_x\Sigma \subset T_xM$ o espaço tangente a x e $\nu \in \mathfrak{X}(\Sigma)^{\perp} \subset \mathfrak{X}(M)$ um campo normal exterior unitário à Σ. O operador de forma de Σ é definido como

$$S(X) := D_X\nu,$$

onde $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. A Segunda Forma Fundamental de Σ é uma forma bilinear e simétrica em $\mathfrak{X}(\Sigma)$, definida como

$$\mathrm{I\!I}(X,Y) := g(D_X\nu, Y).$$

A curvatura média de Σ num ponto $x \in \Sigma$ é denotada por $H(x)$ e definida como o traço do operador forma

$$\begin{aligned} H(x) &:= \text{traço}\,\{Y(x) \to D_Y\nu(x)\} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{I\!I\!I}(e_i, e_i), \end{aligned}$$

onde $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ uma base ortonormal de $T_x\Sigma$.

Considere campos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Existe uma importante relação entre a curvatura ambiente e a curvatura intrínseca da hiperfície Σ dada pela Equação de Gauss

$$R(X, Y, Z, W) = R^{\Sigma}(X, Y, Z, W) - \mathrm{I\!I\!I}(X, W)\mathrm{I\!I\!I}(Y, Z) + \mathrm{I\!I\!I}(X, Z)\mathrm{I\!I\!I}(Y, W),$$

onde R e R^{Σ} denotam a curvatura de M e Σ, respectivamente. Tomando duas vezes o traço da equação acima, temos que

$$R_g - 2Ric_g(\nu, \nu) = R_g^{\Sigma} - H^2 + |\mathrm{I\!I\!I}|^2,$$

onde $Ric(\nu, \nu)$ é o tensor de Ricci de M evaluado na direção normal à Σ e $|\mathrm{I\!I\!I}|$ denota a norma da segunda forma fundamental de Σ.

1.1.3 Identidades Riemannianas

Considere uma variedade Riemanniana (M^n, g) e $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Denominaremos por ∇f ao campo que satisfaz

$$g(\nabla f, X) = df(X),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Definimos o Hessiano de f, segundo a métrica g, como o seguinte 2-tensor

$$D^2 f(X, Y) = D_X D_Y f - D_{D_X Y} f,$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Dado $x \in M$, o Laplaciano de f é definido por

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} D^2 f(e_i, e_i),$$

onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base ortonormal de $T_x M$.

A seguir, retrataremos algumas importantes identidades utilizadas no decorrer de nosso texto, indicando referências para suas demonstrações.

Teorema 1.1 (Identidades de Biachi). *O tensor Curvatura Riemanniana R satisfaz as seguintes propriedades de permutação cíclicas:*

(i) A primeira Identidade de Bianchi:

$$R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0,$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$;

(ii) A Segunda Identidade de Bianchi:

$$(D_X R)(Y,Z)W + (D_Z R)(X,Y)W + (D_Y R)(Z,X)W = 0,$$

onde $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Tomando o traço desta identidade, chegamos na Segunda Identidade de Bianchi contraída:

$$divRic_g = \frac{1}{2}\nabla R_g.$$

Demonstração. Veja, por exemplo, a página 33 de [72]. □

Teorema 1.2 (Fórmula de Bochner-Weitzenböck). *Considere (M,g) uma variedade Riemanniana. Dada um função suave $u : M \longrightarrow \mathbb{R}$, temos que*

$$\frac{1}{2}\Delta|du|^2 = |D^2u|^2 + \langle \nabla\Delta u, \nabla u\rangle + Ric_g(\nabla u, \nabla u).$$

Demonstração. Veja, por exemplo, o Capítulo 7 de [72]. □

Para finalizar esta seção, lembraremos da famosa Fórmula de Reilly e algumas de suas aplicações em resultados de rigidez.

Teorema 1.3 (Fórmula de Reilly, [78]). *Considere $(M, \langle,\rangle)$ uma variedade Riemanniana com fronteira Σ e $u : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Então, temos a Identidade*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_M \left[(\Delta u)^2 - |D^2u|^2\right] dVol &= \frac{1}{2}\int_M Ric(\nabla u, \nabla u)dV + \int_\Sigma \Delta_\Sigma u \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu}dS \\ &+\frac{1}{2}\int_\Sigma H\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 dS + \frac{1}{2}\int_\Sigma \langle \mathrm{I\!I}(\nabla_\Sigma u, \nabla_\Sigma u)\rangle dS,\end{aligned}$$

onde ν é o campo normal exterior, $\mathbb{II}(\cdot,\cdot)$ e H são a Segunda Forma Fundamental e a curvatura média de Σ, respectivamente. Além do mais, o indíce Σ sob ∇ e Δ indica que estamos considerando estes entes intrisecamente a Σ.

Teorema 1.4 (Reilly, [78]). *Considere (M, g) uma variedade Riemanniana compacta com fronteira não vazia ∂M. Assuma que $Ric_g \geq (n-1)g$ e que a curvatura média de ∂M é não-negativa(∂M é mean convex). Então o primeiro autovalor λ_1 de $-\Delta$ satisfaz a desigualdade $\lambda_1 \geq n$. Além do mais, $\lambda_1 = n$ se, e somente se, M é isométrica ao hemisfério fechado da esfera euclidiana $\mathbb{S}^n$.*

Teorema 1.5 (Reilly, [79]). *Considere (M, g) uma variedade n-dimensional compacta, orientada, conexa com fronteira não vazia. Suponha que, para alguma constante $c \neq 0$, M admite uma função não constante $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

(a) $D^2 f = -cfg$;

(b) f é constante sobre ∂M.

Então, a métrica g em M tem curvatura seccional constante c.

1.2 Variedades estáticas

Como já comentamos na introdução, o estudo de variedades estáticas parametra um importante componente na avaliação das soluções das equações de Einstein no vácuo. De fato, dada uma (N^{n+1}, h) variedade Lorentz que é uma solução estática da equação de Einstein no vácuo, pode-se caracterizar N como um espaço tempo que é um produto warped de uma variável temporal por uma variedade estática. Nesta seção, relembramos o conceito de variedade estática e estabeleceremos propriedades notáveis das mesmas, bem como alguns conhecidos resultados de rigidez que caminham na direção da veracidade da No-Hair Conjecture.

Definição 1.1. *Considere (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa com bordo ($\partial M \neq \emptyset$). Dizemos que (M^n, g) é uma variedade estática se existe uma função suave não negativa $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ e uma constante Λ, tal que $\partial M = f^{-1}(0)$, $\Delta f = -\Lambda f$ e*

$$fRic_g - (\Lambda f)g - D^2 f = 0, \tag{1.1}$$

em M.

Segundo o considerado na definição anterior, denominaremos (M^n, g, f) de tripla estática, f de potencial estático e a equação (1.1) de equação de estaticidade. Em nosso trabalho, estaremos interessados no caso de variedades estáticas com curvatura escalar positiva, o que nos levará a supor que $\Lambda = n$.

Exemplo 1.1. *Considere a semi-esfera tridimensional $(\mathbb{S}^3_+, g_{st})$ munida da métrica canônica induzida do $\mathbb{R}^4$. Com esta métrica são fatos de verificação direta que a curvatura seccional $K = 1$ e o tensor de Ricci $Ric_{g_{st}} = 2g_{st}$. Além disso, $\partial\mathbb{S}^3_+ = \mathbb{S}^2$. Considerando a função altura em $\mathbb{R}^4$ onde, mais precisamente, $h(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4$, temos que esta função satisfaz as seguintes propriedades*

(a) $Ric_{g_{st}} = \frac{D^2 h}{h} + 3g_{st}$;

(b) $\Delta h = -3h$;

(c) $h = 0$ *em* $\partial\mathbb{S}^3_+$.

Desta forma, $(\mathbb{S}^3_+, g_{st})$ é uma variedade estática.

No que segue, identificamos algumas propriedades importantes das variedades estáticas.

Proposição 1.1. *Considere a tripla estática (M^n, g, f) com $\Lambda = n$ e denote por $\Sigma = \partial M$.*

(i) A curvatura escalar de g é constante, com $R_g = n(n-1)$;

(ii) Temos que $|\nabla f|(x) \neq 0$, para todo $x \in \partial M$;

(iii) Σ é uma hiperfície totalmente geodésica;

(iv) $|\nabla f|$ é constante ao longo de cada componente conexa de Σ;

(v) (Desigualdade de Chruściel) Considerando Σ_α as componentes conexas de Σ, $\kappa_\alpha = |\nabla f||_{\Sigma_\alpha}$ e R^{Σ_α} a curvatura escalar intrínseca de Σ_α, temos

$$\sum_\alpha \kappa_\alpha \int_{\Sigma_\alpha} \big(R^{\Sigma_\alpha} - (n-1)(n-2)\big)\, d\sigma_\alpha \geq 0. \tag{1.2}$$

(vi) Sob as mesmas notações e hipóteses do item (v), temos que para uma variedade tridimensional estática, ocorre a desigualdade

$$0 < \sum_\alpha \kappa_\alpha \leq 2\pi\chi(\Sigma_\alpha).$$

Em particular, obtemos que existe pelo menos uma componente conexa de Σ que é uma esfera topológica.

Demonstração. (i) Tomando o traço segundo a métrica g da equação , temos que $fR_g = \Delta f + n^2 f = n(n-1)f$. Assim, chegamos que $R_g = n(n-1)$ em $M \setminus \partial M$(onde $f \neq 0$). Como ∂M tem medida nula em $\bar{M}$, nossa assertiva segue por um argumento de continuidade.

(ii) Seja $x_0 \in \partial M$. Desta forma, $f(x_0) = 0$. Considere uma geodésica em M, $\sigma : [0,1] \longrightarrow M$, de forma que $\sigma(0) = x_0$, e considere a função real $\beta : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\beta(t) = f(\sigma(t))$. Desta forma, temos

$$\begin{aligned} \beta''(t) &= D^2 f(\sigma'(t), \sigma'(t)) \\ &= (Ric_g(\sigma'(t), \sigma'(t)) - n|\sigma'(t)|^2)\beta(t) \\ &= a(t)\beta(t). \end{aligned}$$

Desta forma, se supormos que $|\nabla f(x_0)| = 0$, teríamos que $\beta''(t) = a(t)\beta(t)$, $\beta(0) = 0$ e $\beta'(0) = 0$, o que implicaria que $\beta \equiv 0$. Disto teríamos que $f = 0$ ao longo de $\sigma(t)$ o que consiste num absurdo.

(iii) Primeiramente, segue do fato que $\partial M = \Sigma = f^{-1}(0)$ que o vetor normal exterior unitário de Σ é $\nu = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$. Considere dois campos $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Como f é constante sobre Σ segue que $D^2 f(X,Y) = 0$ sobre Σ. Por outro lado,

$$\begin{aligned} 0 = D^2 f(X,Y) &= -\langle D_X Y, \nabla f \rangle \\ &= |\nabla f| \langle D_X Y, \nu \rangle \\ &= -|\nabla f| \mathrm{I\!I}(X,Y) \end{aligned}$$

Utilizando o item (ii), obtemos que $\mathrm{I\!I}(X,Y) = 0$, para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Portanto, Σ é uma hiperfície totalmente geodésica.

(iv) Dado $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, temos

$$\begin{aligned} X(|\nabla f|^2) &= X(\langle \nabla f, \nabla f\rangle) \\ &= 2\langle \nabla_X \nabla f, \nabla f\rangle \\ &= -2|\nabla f|\langle\langle \nabla_X \nabla f, \nu\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde utilizamos o mesmo argumento do item (iii).

(v) Inicialmente, observe que

$$\begin{aligned} \langle D^2 f, Ric_g\rangle &= \langle fRic_g - nfg, Ric_g\rangle \\ &= f|Ric_g|_g^2 - nfR_g \\ &= f|Ric_g|_g^2 - n^2(n-1)f \\ &= f\left|Ric_g - \frac{R_g}{n}g\right|_g^2 - n(n-1)f \\ &= f\left|Ric_g - \frac{R_g}{n}g\right|_g^2 + (n-1)\Delta f \end{aligned}$$

Desta forma, utilizando integração por partes,

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_M f\left|Ric_g - \frac{R_g}{n}g\right|_g^2 dV_g &= \int_M \langle D^2 f, Ric_g\rangle dV_g \\ &\quad -(n-1)\int_M \Delta f dV_g \\ &= -\int_M \langle df, div(Ric_g)\rangle dV_g + \int_\Sigma Ric(\nu, \nabla f) d\sigma_g \\ &\quad -(n-1)\int_\Sigma \frac{\partial f}{\partial \nu} d\sigma_g \\ &= -\int_\Sigma |\nabla f|_g Ric(\nu,\nu) d\sigma_g + (n-1)\int_\Sigma |\nabla f| d\sigma_g \\ &= \sum_\alpha \kappa_\alpha \int_{\Sigma_\alpha} ((n-1) - Ric(\nu,\nu)) d\sigma_g \\ &= \sum_\alpha \kappa_\alpha \int_{\Sigma_\alpha} \frac{1}{2}[R^{\Sigma_\alpha} - (n-1)(n-2)] d\sigma. \end{aligned}$$

Na segunda igualdade, utilizamos integração por partes. Na terceira igualdade, utilizamos a Segunda Identidade de Bianchi e o fato que R_g é constante para inferir que $div(Ric) = \frac{1}{2}dR_g = 0$. Além disso, utilizamos o fato que $\Sigma = f^{-1}(0)$ para inferir que $\nu = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$, o vetor normal exterior. Por fim, na última igualdade utilizamos a fórmula de Gauss junto ao fato que Σ é totalmente geodésica, o que implica que $R - 2Ric(\nu,\nu) = R^{\Sigma}$. Da desigualdade acima, concluímos nossa assertiva.

(vi) Basta utilizar o item (v) para o caso em que $n = 3$ e o Teorema de Gauss-Bonnet.

□

Com a nomenclatura do Teorema anterior, as constantes $|\nabla f|_{\Sigma_i}$ são denominadas de surface gravity.

Caminhando à direção de demonstrar a No-Hair Conjecture, Boucher, Gibbons e Horowitz estabeleram no mesmo artigo em que propõem a conjectura, o teorema a seguir que estabelece que se há uma identidade sobre a área do bordo, a conjectura é verdadeira. A inspiradora demonstração que realizamos nesse teorema é alternativa à demonstração original e reside na observação do item (vi) do Teorema anterior por Chruściel ([26]).

Teorema 1.6 (Boucher-Gibbons-Horowitz [14])**.** *Considere (M^3, g) uma variedade estática, com bordo conexo Σ e curvatura escalar positiva. Então*

$$Area(\Sigma) \leq 4\pi.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, (M^3, g) é isométrica à $(\mathbb{S}^3_+, g_{st})$.

Demonstração. Segue diretamente do item (vi) do Teorema anterior que, no caso de bordo conexo, Σ é uma esfera bidimensional topológica e, da mesma forma, vale a desigualdade mencionada acima. Se ocorrer a igualdade isto implicará, pela demonstração do item (v) do teorema anterior, que $Ric_g = 2g$. Como 3 é autovalor de $-\Delta$, segue do Teorema 1.4 que $\lambda_1(M, g) = 3$. Utilizando novamente o Teorema 1.4, concluímos que (M^3, g) é isométrica ao hemisfério $(\mathbb{S}^3_+, g_{st})$. □

1.3 Variedades V-estáticas

Considere M uma variedade Riemanniana conexa de dimensão $n \geq 3$, com fronteira Σ (possivelmente desconexa). Considere γ uma métrica suave em Σ. Seja M_γ o conjunto de todas as métricas Riemannianas em M tais que $g|_{T\Sigma} = \gamma$. A partir de agora, considere o funcional de volume definido em M_γ, $V : M_\gamma \longrightarrow \mathbb{R}$, que é sabidamente um funcional suave em M_γ. Seja K uma constante e definamos o conjunto M^K_γ das métricas $g \in M_\gamma$ com curvatura escalar constante $R_g = K$. Para $K \neq 0$, os pontos críticos do funcional volume restrito a M_γ^K são precisamente os pontos estacionários do funcional curvatura escalar total $\mathcal{R}(g) = \int_M R(g)d\mu_g$ restrito a M_γ^K. Isto implica que as métricas críticas para o funcional volume V admitem soluções não triviais (f, κ) do Problema Sobredeterminado $L_g^* f = \kappa g$, onde L_g é a linearização do operador curvatura escalar e L_g^* é seu adjunto formal. Ver descrição pioneira em [27](Teorema 2.3). Lembramos que $L_g^* f = D^2\lambda - \lambda Ric_g - (\Delta\lambda)g$(cf. [10]). Neste trabalho, Corvino, et al. ([27]) denominam tais métricas de V-estáticas, e a função f, solução do Problema Sobredeterminado, de um potencial V-estático. Salientamos que tal condição é uma generalização do conceito de metrica estática, que pressupõe a existência de uma função potencial estático f satisfazendo o problema $L_g^* f = 0$(vide Definição 1.1).

Em [64], Miao e Tam propõem uma descrição particular ao abordado acima. Eles verificam (cf. Teorema 5 em [64]) que uma métrica $g \in M_\gamma^K$ tal que seu primeiro autovalor de Dirichlet de $(n-1)\Delta + K$ é positivo, é um ponto crítico do funcional volume V definido em M_γ^K se, e somente se, existe uma função suave λ definida em M tal que

$$\lambda = D^2\lambda - \lambda Ric_g - (\Delta\lambda)g = g, \quad \text{no int(M)}, \tag{1.3}$$

e $\lambda|_\Sigma = 0$. Se o primeiro autovalor de Dirichlet de $(n-1)\Delta + K$ é positivo, então $\lambda \geq 0$ e $\lambda^{-1}(0) = \Sigma$. Isto também ocorre no caso em que $K = 0$ e, quando $K > 0$, λ não pode mudar de sinal. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\lambda \geq 0$ e $\lambda^{-1}(0) = \Sigma$. Quando $K < 0$, nós assumimos que o primeiro autovalor de Dirichlet de $(n-1)\Delta + K$ é positivo. Em suma, sempre consideraremos que $\lambda \geq 0$ e $\lambda^{-1}(0) = \Sigma$ e utilizaremos a definição a seguir:

Definição 1.2. *Uma métrica V-estática é uma 3-upla (M^n, g, λ), onde (M^n, g), é uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$ com uma fronteira suave Σ e $\lambda : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave de forma que $\lambda^{-1}(0) = \Sigma$ e λ satisfaz o seguinte problema elíptico sobredeterminado*

$$D^2\lambda - \lambda Ric_g - (\Delta\lambda)g = g, \quad \textit{no int(M)}.$$

Quando $\lambda \geq 0$, diremos que a métrica g é uma métrica V-estática positiva.

Abordaremos, no que segue, alguns exemplos de métricas V-estáticas.

Exemplo 1.2. *Considere M uma bola Euclideana de raio r em $(\mathbb{R}^n, \delta)$, onde δ é a métrica canônica de $\mathbb{R}^n$. Além do mais, considere a função definida em M*

$$\lambda(x) = \frac{1}{2(n-1)}r^2 - \frac{1}{2(n-1)}|x|^2.$$

É um exercício simples verificar que $\lambda^{-1}(0) = \partial M$, $\lambda \geq 0$ *e* λ *é um potencial* V*-estático, isto é, satisfaz a equação (1.2). Desta forma,* δ *é uma métrica* V*-estática.*

Exemplo 1.3. *Considere* M *uma bola geodésica de raio* $\tilde{r} \neq \frac{\pi}{2}$ *em* $(\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n})$ *centrada no polo norte, onde* $g_{\mathbb{S}^n}$ *é a métrica canônica de* $\mathbb{S}^n$*. Além disso, considere a função definida em* M

$$\lambda(x) = \frac{1}{n-1}\left(\frac{\cos r}{\cos \tilde{r}} - 1\right),$$

onde r *é a distâcia geodésica de* x *ao polo norte de* $\mathbb{S}^n$*. Pode ser verificado que* $\lambda^{-1}(0) = \partial M$, λ *é um potencial* V*-estático e, desta forma,* $g_{\mathbb{S}^n}$ *é uma métrica* V*-estática.*

Exemplo 1.4. *Considere* M *uma bola geodésica de raio* $\tilde{r}$ *em* $(\mathbb{H}^n, g_{\mathbb{H}^n})$ *centrada em* $(0, 0, \ldots, 1)$*, onde* $g_{\mathbb{H}^n}$ *é a métrica canônica de* $\mathbb{H}^n$*. Além do mais, considere a função definida em* M

$$\lambda(x) = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{\cosh r}{\cosh \tilde{r}}\right),$$

onde r *é a distâcia geodésica de* x *ao ponto* $(0, 0, \ldots, 1)$*. Pode ser verificado que* $\lambda^{-1}(0) = \partial M$, λ *é um potencial* V*-estático e, desta forma,* $g_{\mathbb{H}^n}$ *é uma métrica* V*-estática.*

Uma questão interessante e atual é a pergunta se os exemplos postos acima são os únicos de métricas V-estáticas. Em [65], Miao e Tam demonstratram resultados que nos dão uma resposta parcial a esta questão para os casos onde a variedade V-estática é Einstein ou localmente conformemente plana.

Teorema 1.7 (Miao-Tam, [65])**.** *Considere* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana conexa, compacta e Einstein, com uma fronteira suave* Σ*. Suponha que* g *é uma métrica* V*-estática. Então* (M^n, g) *é isométrica a uma bola geodésica na forma espacial simplesmente conexa* $\mathbb{R}^n$*,* $\mathbb{H}^n$ *ou* $\mathbb{S}^n$*.*

Teorema 1.8 (Miao-Tam, [65])**.** *Considere* (M^n, g) *uma variedade conexa, compacta e localmente conformemente plana, com fronteira suave* Σ*. Suponha que* g *é uma métrica* V*-estática e o primeiro autovalor de Dirichlet de* $(n-1)\Delta + R_g$ *é não-negativo, onde* R_g *é a curvatura escalar de* g*. Então*

(i) Se Σ *é desconexa, então* Σ *tem exatamente duas componentes conexas, e* (M, g) *é isométrico a um cilindro* $(I \times N, ds^2 + r^2 h)$*, onde* I *é um intervalo finito na*

reta contendo a origem, (N, h) é uma variedade fechada com curvatura seccional constante κ_0, r é uma função positiva em I tal que $r'(0) = 0$ e

$$r'' + \frac{R_g}{n(n-1)} r = ar^{1-n},$$

para alguma constante $a > 0$, e a constante κ_0 satisfaz

$$(r')^2 + \frac{R_g}{n(n-1)} r^2 + \frac{2a}{n-2} r^{2-n} = \kappa_0.$$

(ii) Se Σ é conexa, então (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica na forma espacial simplesmente conexa $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$, ou (M^n, g) é recoberta por um produto warped como descrito em (i).

Relembramos que o tensor de Bach de uma n-variedade Riemanniana (M^n, g), $n \geq 4$, é dado em termos das componentes do tensor de Weyl pela expressão

$$B_{ij} = \frac{1}{n-3} D^k D^l W_{ikjl} + \frac{1}{n-2} Ric_{kl} W_{ikjl},$$

enquanto que para $n = 3$, é dado por

$$B_{ij} = D^k C_{kij},$$

onde

$$C = D^k Ric_{ij} - D^j Ric_{ik} + \frac{1}{2(n-1)} (D^j R g_{ik} - D^k R g_{ij})$$

é o tensor de Cotton. Diremos que a variedade é Bach-flat se $B_{ij} = 0$. É uma observação simples que métricas Einstein e localmente conformemente planas são exemplos de métricas Bach-flat. Inspirados nas ideias desenvolvidas por Cao e Chen em [17], A. Barros, R. Diogenes e E. Ribeiro [6] melhoraram os Teoremas 1.7 e 1.8 em dimensões 3 e 4, conseguindo os seguintes resultados.

Teorema 1.9. *([6]) Considere (M^4, g) uma variedade Riemanniana Bach flat, simplesmente conexa, compacta e V-estática com fronteira isométrica a 3-esfera standard $\mathbb{S}^3$. Então (M^4, g) é isométrica a uma bola geodésica na forma espacial simplesmente conexa $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{H}^4$ ou $\mathbb{S}^4$.*

Teorema 1.10. *([6]) Considere (M^3, g) uma variedade Riemanniana simplesmente conexa, compacta, V-estática com tensor de Bach divergence-free e cuja fronteira de M é* *isométrica a 2-esfera padrão $\mathbb{S}^2$. Então (M^3, g) é isométrica a uma bola geodésica na forma espacial simplesmente conexa $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{H}^3$ ou $\mathbb{S}^3$.*

Uma observação preliminar é que nos Teoremas 1.9 e 1.10, não é necessário assumir que a fronteira é isométrica a esfera $\mathbb{S}^{n-1}$(Corolário 4.1 de [65]).

No que segue, discutiremos algumas propriedades usuais das chamadas variedades V-estáticas, seguindo ao mesmo espírito tomado para variedades estáticas ao notar semelhanças e divergências nas respectivas caracterizações.

Teorema 1.11 (Miao-Tam, [64])**.** *Considere (M^n, g) uma variedade Riemanniana suave, e conexa. Suponha que existe uma função suave $\lambda : M \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$D^2\lambda - \lambda Ric_g - (\Delta\lambda)g = g.$$

Então, a variedade possui as seguintes propriedades:

(i) $\Delta\lambda = -\frac{R_g+n}{n-1}$.

(ii) g possui curvatura escalar constante.

(iii) Se M é um conjunto compacto sem fronteira e g possui curvatura escalar negativa, então g é uma métrica Einstein.

(iv) Se M é compacta, com uma fronteira(possivelmente desconexa) suave Σ tal que $\lambda = 0$ em Σ, e o primeiro autovalor de Dirichlet de $(n-1)\Delta + R_g$ é não negativo, onde R_g é a curvatura escalar de g, então ao longo de cada componente conexa Σ_i de Σ, a curvatura média de Σ_i com respeito ao vetor normal exterior ν é uma constante positiva. Isto significa que cada Σ_i é umbílica e sua segunda forma fundamental satisfaz $\mathbb{II}_i = a_i g|_{T(\Sigma_i)}$, para constantes $a_i > 0$.

(v) Sob as mesmas condições de (iii), a equação de Gauss nos faz obter que em cada ponto de Σ

$$2Ric(\nu, \nu) + R^{\Sigma} = R_g + \frac{n-2}{n-1}H^2, \tag{1.4}$$

onde R^{Σ} é a curvatura escalar de Σ e H é a curvatura média de Σ.

1.4 Métricas quasi-Einstein

A seguir, expomos algumas ideias acerca de uma generalização para variedades Einstein abordadas amplamente, por exemplo, em [18], [52] [72]. Os resultados expostos aqui são descritos em [18].

Uma extensão natural para o tensor de Ricci é o tensor de Bakry-Emery Ricci, Ric_f^m, que é definido por

$$Ric_f^m = Ric + D^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df,$$

onde $f : M \longrightarrow R$ é uma função suave e m é uma constante tal que $0 < m \leq \infty$. Diremos que uma tripla (M, g, f), onde (M, g) é uma variedade Riemannniana e $f : M \longrightarrow R$ é uma função suave, é quasi-Einstein se satisfaz a equação:

$$Ric_f^m = Ric + D^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df = \lambda g, \tag{1.5}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Um caso interessante desta equação dá-se quando $m = \infty$, onde chegamos que M é um Ricci soliton gradiente. Também quando f é a função constante, a equação descreve uma métrica de Einstein. Denominamos a métrica de quasi-Einstein trivial se f é constante.

Se $0 < m < \infty$, considere $u = e^{-\frac{f}{m}}$. Desta forma, um cálculo simples mostrará que

$$\nabla u = -\frac{1}{m} e^{-\frac{f}{m}} \nabla f \quad \text{e} \quad D^2 u = -\frac{u}{m} D^2 f + \frac{u}{m^2} df \otimes df.$$

Portanto, a equação (1.5), torna-se

$$Ric - \frac{m}{u} D^2 u = \lambda g \tag{1.6}$$

Proposição 1.2 ([18]). *Uma variedade Riemanniana (M, g) satisfaz (1.6) se, e somente se, o produto warped $M \times_u F^m$ é Einstein, onde F^m é uma variedade Einstein m-dimensional com constante de Einstein μ satisfazendo*

$$\mu = u\Delta u + (m-1)|\nabla u|^2 + \lambda u^2.$$

Teorema 1.12 ([18]). *Se (M, g) é uma variedade compacta quasi-Einstein bidimensional, então ela é trivial.*

Proposição 1.3 ([18]). *Seja (M, g) uma variedade quasi-Einstein com curvatura escalar constante. Então ela é trivial.*

Capítulo

2

A Identidade de Pohozǎev-Schöen e Aplicações Geométricas

Na literatura, existem várias importantes identidades integrais na Geometria Riemanniana, que se tornaram regras ativas no estudo de EDPs geométricas, bem como têm aplicações em resultados de rigidez relacionados. Exemplos frutuosos disto se devem a Identidade de Reilly e a Identidade de Pohozǎev.

Em [75], Pohozǎev obteve uma importante identidade que foi utilizada para demonstrar resultados de não-existência de soluções numa certa classe de variantes semi-lineares de um problema de autovalor na fronteira, sendo o ambiente uma variedade M estrelada e com fronteira suave ∂M. No trabalho supracitado, Pohozǎev considerou o problema $\nabla u + \lambda f(u) = 0$, com $u|_{\partial M} = 0$, onde f é uma função não linear e $f(0) = 0$. A clássica identidade de Pohozǎev utilizada para obter estes resultados é a seguinte:

$$\lambda n \int_M F(u) + \frac{2-n}{2}\lambda \int_M f(u)u = \frac{1}{2}\int_{\partial M}(x\cdot\nu)(\nabla_\nu u)^2, \tag{2.1}$$

onde x é o campo de Euler, ν é o vetor normal exterior, ∇_ν é a derivada direcional ao longo de ν, e $F(u) = \int_0^u f(t)dt$.

Posteriormente, Bourguignon e Ezin ([15]) provaram que qualquer campo vetorial conforme X numa variedade fechada (M, g) (isto é, $\mathcal{L}_X g = 2\rho g$ para alguma função $\rho \neq 0$) satisfaz a seguinte identidade

$$\int_M X(R_g)dV_g = 0, \tag{2.2}$$

onde R_g é a curvatura escalar de (M, g). Salientamos que a demonstração deste resultado requer definir uma ação do grupo das transformações conformes no espaço de funções. Neste trabalho, eles mostraram que a função curvatura escalar relaciona esta ação com a ação padrão.

Uma crucial relação entre as identidades (2.1) e (2.2) foi alcançada por um célebre trabalho de R. Schöen([81]) onde obteve-se uma identidade que as contém como casos especiais. Esta é a célebre Identidade de Pohozǎev-Schöen:

Teorema 2.1 (Identidade de Pohozǎev-Schöen, [81])**.** *Considere (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta (possivelmente com fronteira não-vazia) e X um campo vetorial definido em M. Então*

$$\int_M X(R_g)dV_g = -\frac{n}{n-2}\int_M \left\langle \overset{\circ}{Ric}, \mathcal{L}_X g \right\rangle dV_g + \frac{2n}{n-2}\int_{\partial M} \overset{\circ}{Ric}(X,\nu)d\sigma_g,$$

onde R_g é a curvatura escalar, $\overset{\circ}{\mathrm{Ric}}$ é o tensor de Ricci sem traço, $\mathcal{L}_X g$ é a derivada de Lie de g e ν é o vetor normal exterior.

A principal aplicação obtida por Schöen com esta identidade em [81] foi conseguir uma condição de balanceamento para soluções aproximadas de uma Equação Diferencial Parcial ligada ao Problema de Yamabe. Outra aplicação direta desta identidade é que se consideramos que $\partial M = \emptyset$ e X é um campo conforme, reobtém-se a identidade (2.2). Além disso, observamos que é possível reobter desta, a Identidade de Pohozǎev (2.1) como foi feito, por exemplo, em [38].

O ponto crucial na prova da Identidade de Pohozǎev-Schöen remonta a uma aplicação da segunda identidade de Bianchi contraída. Em poucas palavras, revisitaremos tal demonstração. Considere $\overset{\circ}{\mathrm{Ric}}_{\mathrm{g}} = \mathrm{Ric}_{\mathrm{g}} - \frac{R_g}{n}g$ o tensor de Ricci sem traço. Pela Segunda Identidade de Bianchi, $(Ric_g)_{ij,j} = \frac{1}{2}(R_g)_{,i}$, temos

$$\overset{\circ}{R}_{ij,j} = R_{ij,j} - \frac{1}{n}R_{,i} = \frac{1}{2}R_{,i} - \frac{1}{n}R_{,i} = \frac{n-2}{2n}R_{,i}.$$

Utilizando integração por partes e esta observação acima, temos

$$\int_M X(R_g)dV_g = \int_M X_i R_{,i} dV_g = \frac{2n}{n-2}\int_M \overset{\circ}{R}_{ij,j} X_i dV_g$$

$$= \frac{2n}{n-2}\left(-\int_M \overset{\circ}{R}_{ij} X_{i,j} dV_g + \int_{\partial M} \overset{\circ}{R}_{ij} X_i \nu_j dV_g\right).$$

Utilizando que $\overset{\circ}{R}_{ij}$ é um tensor simétrico, podemos inferir que

$$\overset{\circ}{R}_{ij} X_{i,j} = \frac{1}{2}\overset{\circ}{R}_{ij}(X_{i,j} + X_{j,i}) = \frac{1}{2}\overset{\circ}{R}_{ij}(\mathcal{L}_X g)_{ij}.$$

Unindo estes cálculos, obtém-se a Identidade desejada.

A visível e frutuosa importância das aplicações destas três supracitadas equações em diversos trabalhos em áreas como Análise Não-Linear e Análise Geométrica, inspiram-nos a obter novas identidades e aplicações mais genéricas. Em [38], por exemplo, Gover e Orsted, com uma forte inspiração na observação das leis de conservação da física e da relatividade geral, perguntam-se para quais invariantes escalares V (como forma de generalizar a curvatura escalar R_g) é esperado obter identidades e resultados análogos aos acima. Como observado que o ponto chave na demonstração da Identidade de Pohozăev-Schöen é a segunda identidade de Bianchi unida a fórmula de Integração por partes, pode-se pensar em definir tensores mais genéricos que o Ric_g que gozem de uma propriedade similar ao que ocorre ao tensor de Ricci pela Identidade de Bianchi. A este tipo de tensor, que será um tensor livre de divergência e, por questões físicas, foi denominado pelos autores de *localmente conservativo*, é plausível obter identidades mais genéricas que as acima. A partir disto, é possível obter novos resultados e simplificar muito outros, em problemas que envolvem Q-curvatura, curvatura média de uma imersão conforme, tensores de Einstein-Lovelock, curvaturas de Gauss-Bonnet, entre outros.

Neste capítulo, apresentaremos a Identidade de Pohozăev-Schöen generalizada, obtida por Gover e Orsted ([38]) e comprovaremos a sua eficácia quanto a generalização de alguns resultados de rigidez, bem como demonstrações mais simples de alguns resultados aclamados recentemente. A primeira seção deste capítulo é dedicada à apresentação da Identidade Pohozăev-Schöen generalizada, bem como a exemplos para o decurso do texto e a reobtenção da Identidade de Pohozăev-Schöen clássica. Na segunda seção, através da generalização de alguns entes geométricos para tensores mais genéricos, trataremos de algumas aplicações da identidade em solitons, lema de Almost-Schur e um teorema do tipo Alexandrov. A terceira seção é devotada a algumas novas aplicações da Identidade no alcance de desigualdades e resultados de rigidez em variedades estáticas e V-estáticas. No que compete a este capítulo, salvo mencionado de outra forma, as variedades em questão são consideradas conexas e orientadas.

2.1 Uma generalização da identidade de Pohozăev-Schöen

Esta seção tem como finalidade considerar um caso mais genérico da Identidade de Pohozăev-Schöen descrita preliminarmente. Na demonstração da identidade clássica há uma notória necessidade de dois ingredientes principais: a segunda identidade de Bianchi e uma fórmula de integração por partes. Caminhando a este sentido e inspirado em leis da conservação da física e da Relatividade geral, Gover e Orsted ([38]) descrevem seu trabalho em tensores mais genéricos, onde continuará a valer uma fórmula de integração por partes e cuja propriedade adicional de ser livre de divergência simulará à utilização da segunda identidade de Bianchi. Para fins da nomenclatura dada em [38], vamos considerar que um 2-tensor B será dito *localmente conservativo* se ele é livre de divergência, isto é, se $B_{ij,j} = 0$.

Utilizando identidades conhecidas da geometria Riemanniana, a dizer a segunda identidade de Bianchi e a equação de Codazzi, podemos produzir interessantes e aplicáveis exemplos de tensores locally conserved.

Exemplo 2.1. *Dada uma variedade Riemanniana (M, g), segue da Segunda Identidade de Bianchi contraída em Geometria Riemanniana (ou Lorentziana) que o tensor de Einstein*

$$E_g = Ric_g - \frac{R_g}{2} \cdot g$$

é um tensor localmente conservativo.

Exemplo 2.2. *Considere o tensor $B = P - Jg$, onde P é o tensor de Schouten, a saber*

$$P = \frac{1}{n-2}\left(Ric - \frac{R}{2(n-1)}g\right),$$

e J é o traço de P segundo a métrica g, isto é, $J = g^{ij}P_{ij}$. Segue de um simples cálculo e da Segunda Identidade de Bianchi contraída, $(Ric_g)_{ij,j} = \frac{1}{2}(R_g)_{,i}$, que B é um tensor localmente conservativo.

Exemplo 2.3. *Considere (Σ, g) como sendo uma hiperfície de um espaço Euclideano $\mathbb{E}^{n+1}$, $\mathbb{II}$ a segunda forma fundamental de Σ, e H sua curvatura média. Temos que $\mathbb{II}$ satisfaz a equação de Codazzi contraída*

$$\mathbb{II}_{ij,j} = nH_{,i},$$

e, desta forma, o 2-tensor simétrico $B = \mathbb{II} - nHg$ é um tensor localmente conservativo.

Salientamos, que a mesma observação do exemplo 2.3 é válida quando consideramos Σ como uma hiperfície imersa numa variedade Einstein ao invés do espaço Euclideano $\mathbb{E}^{n+1}$ (para detalhes disto veja a demonstração do Teorema 2.11).

Utilizando uma fórmula de integração por partes para tensores, pode-se almejar uma identidade do tipo Pohozǎev-Schöen para tensores localmente conservativos. Isto foi feito em [38] e será abordado a seguir.

Teorema 2.2 (Identidade de Pohozǎev-Schöen generalizada - Gover e Orsted, [38]). *Considere (M, g) uma variedade Riemanniana suave e compacta. Se B é um 2-tensor simétrico e localmente conservativo, e X é um campo suave definido em M, então*

$$\int_M X(V)dV_g = \frac{n}{2}\int_M \left\langle \overset{\circ}{B}, \mathcal{L}_X g \right\rangle dV_g - n\int_{\partial M} \overset{\circ}{B}(X,\nu)d\sigma_g, \tag{2.3}$$

onde V é o traço de B segundo a métrica g,isto é $V = g^{ij}B_{ij}$, $\overset{\circ}{B} = B - \frac{1}{n}Vg$ o tensor B sem traço, $\mathcal{L}_X g$ é a derivada de Lie de g e ν é o vetor normal exterior.

Demonstração. Utilizando a fórmula de integração por partes para tensores, temos

$$\int_{\partial M} B(X,\nu)d\sigma_g = \int_M (B_{ij}X^j)_{,i}dV_g\,.$$

Como B é um tensor localmente conservativo e simétrico, inferimos que

$$(B_{ij}X^j)_{,i} = B_{ij}X_{j,i} = \frac{1}{2}B_{ij}(X_{j,i} + X_{i,j}) = \frac{1}{2}\langle B, \mathcal{L}_X g\rangle\,.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} B(X,\nu)d\sigma_g &= \frac{1}{2}\int_M \langle B, \mathcal{L}_X g\rangle dV_g \\
&= \frac{1}{2}\int_M \langle \overset{\circ}{B}, \mathcal{L}_X g\rangle dV_g + \frac{1}{2n}\int_M V\langle g, \mathcal{L}_X g\rangle dV_g \\
&= \frac{1}{2}\int_M \langle \overset{\circ}{B}, \mathcal{L}_X g\rangle dV_g + \frac{1}{n}\int_M V\mathrm{div}X dV_g \\
&= \frac{1}{2}\int_M \langle \overset{\circ}{B}, \mathcal{L}_X g\rangle dV_g + \frac{1}{n}\left(-\int_M X(V)dV_g + \int_{\partial M} Vg(X,\nu)d\sigma_g\right),
\end{aligned}$$

onde, na última linha, utilizamos novamente a fórmula de integração por partes. Arranjando convenientemente os termos em questão, chegaremos a identidade desejada. □

A seguir, damos duas implicações simples e interessantes desta Identidade generalizada

Corolário 2.1. *Se M é uma variedade fechada, isto é, $\partial M = \emptyset$, então*

$$\int_M X(V)dV_g = \frac{n}{2}\int_M \left\langle \overset{\circ}{B}, \mathcal{L}_X g \right\rangle dV_g.$$

Corolário 2.2. *Se X é um campo vetorial conforme, isto é, $\mathcal{L}_X g = fg$ para alguma* *função f em M, então*

$$\int_M X(V)dV_g = -n\int_{\partial M} \overset{\circ}{B}(X,\nu)d\sigma_g,$$

Em particular, $\int_M X(V) = 0$, se M é fechada.

Observação 2.1.1. *Como esperado, é possível reobter a Identidade de Pohozǎev-Schöen clássica, utilizando o Teorema 2.2. De fato, considerando $B = P - Jg$, onde P é tensor de Schouten, já abordamos que este é um tensor localmente conservativo. Além disso,*

$$V = (1-n)J, \quad e \quad \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{P} = \frac{\overset{\circ}{Ric}}{n-2}.$$

Desta forma, utilizando a Identidade de Pohozǎev-Schöen generalizada e substituindo as expressões acima, temos

$$(1-n)\int_M X(J)dV_g \;=\; \frac{n}{2(n-2)}\int_M \left\langle \overset{\circ}{Ric}, \mathcal{L}_X g\right\rangle dV_g - \frac{n}{n-2}\int_M \overset{\circ}{Ric}(X,\nu)d\sigma_g\,.$$

Como podemos verificar que $R_g = 2J(n-1)$, é possível reobter a Identidade de Pohozǎev-Schöen clássica.

Esta mesma verificação pode ser feita se consideramos $B = E_g$.

Além dos exemplos citados, existe uma grande classe de tensores na Geometria Riemanniana que satisfazem uma condição que os torna localmente conservativos. Para um ótimo survey destes exemplos, consulte [38].

2.2 Algumas aplicações geométricas

Como citado anteriormente, a Identidade de Pohozǎev-Schöen possui aplicações diversas no sentido de obter novos resultados de rigidez, bem como simplicar drasticamente resultados já obtidos. No que segue, utilizaremos o Teorema 2.2 para generalizar e simplicar demonstrações de alguns resultados na literatura de variedades que satisfazem uma equação do tipo estática.

2.2.1 Solitons generalizados

Nossa primeira aplicação se deve a generalizar e obter provas mais simples de alguns resultados recentes sobre Ricci solitons obtidos por Barros, Batista e Ribeiro Jr.([7]) e

Gomes, Wang e Xia ([37]). Antes de mais nada, generalizamos as ideias de almost Ricci soliton e h-almost Ricci soliton utilizadas em [7] e [37], considerando, ao invés do tensor de Ricci, tensores localmente conservativos.

A gênese do estudo dos almost Ricci Solitons se deve ao trabalho pioneiro de Pigola, et. al., [74], onde os autores modificam a noção de Ricci Soliton, generalizando a condição de forma que o parâmetro λ seja uma função. Mais precisamente, eles consideram o seguinte:

Definição 2.1. *Uma variedade Riemanniana compacta (M^n, g) é um **almost Ricci soliton** se existe um campo vetorial X definido em M e uma função suave $\lambda : M^n \to \mathbb{R}$ satisfazendo a equação*

$$Ric_g + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g,$$

onde Ric_g é o tensor de Ricci e $\mathcal{L}_X g$ é a derivada de Lie de g em relação ao campo X.

Convenientemente, nós denotamos λ de função Soliton e (M^n, g, X, λ) o almost Ricci soliton. Da mesma forma como abordado nos casos de Ricci solitons, denominamos o almost Ricci Soliton como sendo expanding, steady ou shrinking se $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda > 0$, respectivamente. Quando o campo X for tal que $\mathcal{L}_X g = \mathcal{L}_{\nabla u} g$ para alguma função diferenciável $u : M \longrightarrow \mathbb{R}$, diremos que a variedade é um almost Ricci soliton gradiente. Se temos que $\mathcal{L}_X g \equiv 0$, o campo X será dito trivial e o Ricci soliton será chamado de trivial.

No que segue, generalizaremos a noção de Ricci soliton, considerando, ao invés do tensor de Ricci, um tensor simétrico qualquer.

Definição 2.2. *Uma variedade Riemanniana compacta (M^n, g) é um **almost soliton generalizado** se existe um tensor simétrico B, um campo vetorial X definido em M e uma função suave $\lambda : M^n \to \mathbb{R}$ satisfazendo a equação*

$$B + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g,$$

onde $\mathcal{L}_X g$ é a derivada de Lie de g em relação ao campo X.

Caminhando ao mesmo sentido, Gomes, Wang e Xia ([37]) generalizam o conceito de almost Ricci Soliton, definindo a ideia de h-almost Ricci soliton

Definição 2.3. *Um **h-almost Ricci soliton** é uma variedade Riemanniana completa (M^n, g) com um campo vetorial suave X sobre M, duas funções suaves $\lambda : M^n \to \mathbb{R}$ e $h : M^n \to \mathbb{R}$ satisfazendo a equação*

$$Ric_g + \frac{h}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g\,.$$

onde Ric_g é o tensor de Ricci e $\mathcal{L}_X g$ é a derivada de Lie de g em relação ao campo X.

Convenientemente, nós denotamos λ de função Soliton e (M^n, g, X, h, λ) o h-almost Ricci soliton. Quando o campo X for tal que $\mathcal{L}_X g = \mathcal{L}_{\nabla u} g$ para alguma função diferenciável $u : M \longrightarrow \mathbb{R}$, diremos que a variedade é um h-almost Ricci soliton gradiente, e denominaremos u a sua função potencial.

No que segue, generalizamos a noção de h-almost Ricci soliton, a considerar um tensor genérico ao invés do *Ric*.

Definição 2.4. *Um **h-almost soliton generalizado** é uma variedade Riemanniana completa (M^n, g) com um tensor simétrico B, um campo vetorial X sobre M, duas funções suaves $\lambda : M^n \to \mathbb{R}$ e $h : M^n \to \mathbb{R}$ satisfazendo a equação*

$$B + \frac{h}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g\,.$$

onde $\mathcal{L}_X g$ é a derivada de Lie de g em relação ao campo X.

No que segue, demonstraremos resultados de rigidez para Almost solitons generalizados e h-almost solitons generalizados entendendo-os como uma aplicação direta da Identidade de Pohozăev-Schöen generalizada. Como uma consequência primordial de nosso resultado, vamos obter a existência de um campo vetorial conforme na variedade em questão, o que somado a hipóteses adicionais nos conduzirá a alguns resultados de rigidez.

O célebre Teorema de Obata ([69]) nos afirma que para uma dada variedade Riemanniana completa (M, g), se existe uma função não constante f satisfazendo que $\nabla^2 f = -fg$, então (M, g) é isométrica à esfera unitária canônica. Caminhando ao sentido de generalizar este resultado, Bishop and Goldberg [11], Goldberg e Kobayashi [36], Lichnerowicz [60], Yano e Obata [70], Yano [89] e Yano e Nagano [67], entre outros, obtiveram novos resultados supondo apenas a existência de um campo conforme na variedade em questão. A seguir compilamos alguns destes resultados, cujas demonstrações e descrição mais genérica podem ser encontradas em [88](Capítulo 3, Seção 4):

Teorema 2.3 ([11],[36],[60], [70], [89],[67])**.** *Considere (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 2$, fechada, que admite um campo vetorial conforme não trivial X (isto é, $\mathcal{L}_X g = 2\rho g$ para alguma função $\rho \neq 0$) e possui curvatura escalar constante. Se houver, em adição, a hipótese de um dos itens a seguir, a variedade (M, g) é isométrica a uma esfera canônica.*

(i) $\mathcal{L}_X Ric = \alpha g$, *para alguma função* α;

(ii) $\int_M \overset{\circ}{Ric}\,(\nabla\rho, \nabla\rho) \geq 0$;

(iii) $n > 2$ *e* M *é uma variedade Einstein.*

(iv) $n > 2$ *e* M *é uma variedade homogênea;*

(v) $n > 2$ *e* $\mathcal{L}_X(|Ric|^2) = 0$*;*

Seguindo esta mesma linha, H. Alodan ([2]) também demonstrou o seguinte resultado

Teorema 2.4 ([2])**.** *Considere* (M, g) *uma* n*-dimensional variedade Riemanniana compacta e conexa de curvatura escalar constante positiva* $n(n-1)c$*,* $c > 0$*. Se* M *admite um campo gradiente conforme não nulo, então* M *é isométrico à* n*-esfera canônica* $\mathbb{S}^n(c)$*.*

Com a indumentária que possuímos, anunciamos nosso resultado:

Teorema 2.5. *Considere* (M, g) *uma* n*-variedade Riemanniana fechada que é um almost soliton generalizado, com função soliton* $\lambda : M^n \to \mathbb{R}$*, e 2-tensor simétrico* B *localmente conservativo. Se o traço de* B*,* $V = g^{ij}B_{ij}$*, é constante, então* X *é um campo vetorial conforme. Além disso, se* X *não é trivial, e tivermos adicionalmente que* M *tem curvatura escalar constante e satisfaz alguma das hipóteses abaixo, a variedade* (M, g) *é isométrica à esfera canônica.*

(i) $\mathcal{L}_X Ric = \alpha g$*, para alguma função* α*;*

(ii) $\int_M \overset{\circ}{Ric}\,(\nabla\rho, \nabla\rho) \geq 0$*;*

(iii) $n > 2$ *e* M *é uma variedade Eisntein.*

(iv) $n > 2$ *e* M *é uma variedade homogênea;*

(v) $n > 2$ *e* $\mathcal{L}_X(|Ric|^2) = 0$*;*

(vi) A curvatura escalar é positiva e X *é um campo gradiente.*

Demonstração. Utilizando a definição de almost Soliton generalizado, segue que $\mathcal{L}_X g = -2\overset{\circ}{B} + 2\psi g$, onde $\psi : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave. Desta forma, utilizamos a Identidade de Pohozăev-Schöen generalizada, o fato que M é fechada e V é constante para inferir que

$$\int_M \left\langle \overset{\circ}{B}, \mathcal{L}_X g \right\rangle dV_g = 0 \Longrightarrow \int_M |\overset{\circ}{B}|^2 dV_g = 0 \Longrightarrow \overset{\circ}{B} = 0\,.$$

Retornando à definição de almost Soliton generalizado, concluiremos que $\mathcal{L}_X g = 2\psi g$ e, portanto, X é um campo vetorial conforme. Ao caso que X é não trivial, utilizamos os Teoremas 2.3 e 2.4 para concluir as especificidades dos itens dispostos. $\square$

Devemos salientar que o resultado demonstrado acima concede uma generalização de um resultado que abordaremos a seguir, obtido primordialmente Barros et al.([7]), na direção que consideramos um tensor B localmente conservativo ao invés do tensor de Ricci. Além disso, há um ganho considerável quanto a simplicidade da demonstração, bem como nosso método propõe uma maior abrangência das identidades obtidas no trabalho supracitado.

Corolário 2.3. *[7] Considere (M^n, g, X, λ) , $n \geq 3$, um almost Ricci soliton não trivial fechado e orientado com curvatura escalar constante. Então (M^n, g) é isométrico à esfera Euclideana $(\mathbb{S}^n, g_{st})$ e (M^n, g, X, λ) é um Ricci soliton gradiente.*

Demonstração. Utilizando a Identidade de Pohozǎev-Schöen clássica, como na demonstração do Teorema anterior, vamos obter de forma similar que $\overset{\circ}{Ric}= 0$. Isto implicará, pela equação do almost Ricci soliton, que X é um campo conforme, digamos $\mathcal{L}_X g = 2\psi g$, para alguma função ψ. Recorrendo novamente a equação de almost Ricci Soliton, teremos que $Ric = (\lambda - \psi)g$. Daí, concluímos que $\lambda - \psi = \frac{R}{n}$ é constante. Portanto,

$$\mathcal{L}_X Ric = (\lambda - \psi)\mathcal{L}_X g = 2(\lambda - \psi)\psi g.$$

Desta forma, utilizamos o item (i) do Teorema 2.3 para concluir que M é isométrica à uma esfera canônica.

Para finalizar o argumento de que o Ricci soliton é gradiente, utilizaremos uma abordagem de [88](Teorema 6.1). Utilizando o fato de que $\mathcal{L}_X g = 2\psi g$, temos

$$\mathcal{L}_X Ric_g = -(n-2)D^2\psi + \Delta\psi g \tag{2.4}$$

e

$$\mathcal{L}_X R_g = 2(n-1)\Delta\psi - 2\psi R_g. \tag{2.5}$$

Como R_g é constante, temos de (2.5) que

$$\Delta\psi = \frac{1}{n-1} R_g \psi. \tag{2.6}$$

Agora, como (M, g) é Einstein, isto é, $Ric_g = \frac{R_g}{n} g$, segue de (2.4) e (2.6) que

$$\frac{R_g}{n}\mathcal{L}_X g = \mathcal{L}_X Ric_g = -(n-2)D^2\psi + \frac{1}{n-1} R_g \psi g.$$

Utilizando novamente que $\mathcal{L}_X g = 2\psi g$, concluímos que

$$D^2\psi = -\frac{R_g}{n(n-1)}\psi g.$$

Portanto, definindo $u = -\frac{n(n-1)}{R_g}\psi$, segue que

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\nabla u}g = D^2u = -\frac{n(n-1)}{R_g}D^2\psi = \psi g = \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g,$$

o que demonstra que (M,g) é um Ricci soliton gradiente com função soliton gradiente u.

□

Utilizando um argumento similar ao descrito anteriormente, nós conseguimos um resultado envolvendo h-almost solitons generalizados.

Teorema 2.6. *Considere (M^n,g) uma variedade Riemanniana fechada que é um h-almost soliton generalizado, com um 2-tensor simétrico B localmente conservativo, e duas funções suaves $\lambda : M^n \to \mathbb{R}$ e $h : M^n \to \mathbb{R}$. Se $V = g^{ij}B_{ij}$ é constante, e h tem sinal definido, isto é, $h > 0$ ou $h < 0$, então X é um campo vetorial conforme. Além disso, se X não é trivial, e tivermos adicionalmente que M tem curvatura escalar constante e satisfaz alguma das hipóteses abaixo, a variedade (M,g) é isométrica à esfera canônica.*

(i) $\mathcal{L}_X Ric = \alpha g$, *para alguma função* α;

(ii) $\int_M \overset{\circ}{Ric}\,(\nabla\rho,\nabla\rho) \geq 0$;

(iii) $n > 2$ *e* M *é uma variedade Einstein.*

(iv) $n > 2$ *e* M *é uma variedade homogênea;*

(v) $n > 2$ *e* $\mathcal{L}_X(|Ric|^2) = 0$;

(vi) A curvatura escalar é positiva e X é um campo gradiente.

No mesmo sentido que descrito anteriormente, o Teorema acima é um modo de generalizar e simplificar drasticamente a demonstração do seguinte resultado obtido primordialmente por Gomes et al.([37]):

Corolário 2.4. *[37] Um h-almost Ricci soliton (M^n,g,X,h,λ) compacto e não trivial de curvatura escalar contante com h tendo sinal definido, isto é, $h > 0$ ou $h < 0$, é isométrico à esfera canônica $\mathbb{S}^n(r)$. Além disso, ele é gradiente e a função potencial é uma autofunção correspondendo ao primeiro autovalor de $\mathbb{S}^n(r)$.*

Observação 2.1. *Observando que o cerne das demonstrações dos resultados desta seção residem na utilização da Identidade de Pohozăev-Schöen a qual por sua vez tem como ingrediente chave de sua demonstração uma Fórmula de Integração por partes, podemos* *definir almost solitons generalizados em variedades com fronteira e utilizar a mesma identidade de forma a obter resultados de rigidez similares à direção tomada. É da mesma maneira plausível que é possível demonstrar resultados em Ricci solitons em variedades completas mas não compactas, se nestas for válida uma fórmula de integração por partes.*

2.2.2 O Lema de Almost-Schur generalizado

O famoso Lema de Schur nos diz que toda variedade fechada e Einstein de dimensão $n \geq 3$ tem curvatura escalar constante. Em [28], De Lellis e Topping discutiram resultados de estabilidade e ridídez para o Lema de Schur em variedades Riemannianas fechadas. Neste trabalho, eles demonstraram o seguinte resultado, aclamado como Lema de Almost-Schur.

Teorema 2.7 (Lema de Almost-Schur, [28])**.** *Se (M^n, g) é uma variedade Riemanniana fechada de dimensão $n \geq 3$, com curvatura de Ricci não negativa, então*

$$\int_M (R - \bar{R})^2 \leq \frac{4n(n-1)}{(n-2)^2} \int_M \left| Ric - \frac{R}{n} g \right|^2,$$

ou, equivalentemente,

$$\int_M \left| Ric - \frac{\bar{R}}{n} g \right|^2 \leq \frac{n^2}{(n-2)^2} \int_M \left| Ric - \frac{R}{n} g \right|^2,$$

onde denotamos por $\bar{R}$ a média de R sobre M, isto é, $\bar{R} = \frac{1}{VolM} \int_M RdV$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, a variedade M é Einstein.

Observamos que um passo central na demonstração deste teorema se deve à utilização da seguinte identidade integral

$$-\int_M \langle dR, df \rangle dV = \frac{2n}{n-2} \int_M \langle \overset{\circ}{Ric}, D^2 f \rangle,$$

onde f é a solução de uma dada EDP. De fato, esta identidade integral é a Identidade de Pohozăev-Schöen, se considerarmos $X = \nabla f$ e $\partial M = \emptyset$. Observando isto, nós obtemos uma generalização do Lema de Almost-Schur considerando tensores mais genéricos que o tensor de Ricci e utilizando a Identidade de Pohozăev-Schöen generalizada.

Teorema 2.8. *Considere (M^n, g) uma variedade Riemanniana fechada de dimensão $n \geq 3$, B um tensor localmente conservativo e simétrico, e V o traço de B em relação à métrica g, isto é, $V = g^{ij} B_{ij}$. Além disso, suponha que M tem curvatura de Ricci não* *negativa. Então*

$$\int_M (V-\bar{V})^2 dV_g \leq n(n-1)\int_M \|\overset{\circ}{B}\|^2 dV_g, \tag{2.7}$$

onde $\bar{V}$ é a média de V sobre M, isto é, $\bar{V} = \frac{1}{Vol\ M}\int_M V dV_g$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $\overset{\circ}{B}= 0$.

Demonstração. Considere $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ como sendo a solução da seguinte equação

$$\begin{cases} \Delta f & = & V-\bar{V} \\ \displaystyle\int_M f & = & 0. \end{cases}$$

A existência desta solução é garantida porque $\int_M (V-\bar{V})dV_g = 0$ (veja o Teorema 5.9.1 em [44]). Agora, nós computamos

$$\begin{aligned} \int_M (V-\bar{V})^2 dV_g &= \int_M (V-\bar{V})\Delta f dV_g \\ &= -\int_M \langle dV, df\rangle dV_g \\ &= -n\int_M \langle \overset{\circ}{B}, D^2 f\rangle dV_g \\ &= -n\int_M \left\langle \overset{\circ}{B}, D^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right\rangle dV_g \\ &\leq n\|\overset{\circ}{B}\|_{L^2}\left\| D^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right\|_{L^2} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Na segunda igualdade nós utilizamos Integração por partes. Na terceira igualdade, nós utilizamos a Identidade de Pohozăev-Schöen generalizada com $X = \nabla f$ e $\partial M = \emptyset$. Na última desigualdade, nós utilizamos a desigualdadede Cauchy-Schwartz. Utilizando a Fórmula de Böchner e integração por partes, podemos calcular

$$\begin{aligned} \int_M |D^2 f|^2 dV_g &= -\int_M \langle \nabla\Delta f, \nabla f\rangle dV_g - \int_M Ric(\nabla f, \nabla f) dV_g \\ &= \int_M (\Delta f)^2 dV_g - \int_M Ric(\nabla f, \nabla f) dV_g. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}\int_M \left|D^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 dV_g &= \int_M |D^2 f|^2 - \frac{1}{n}(\Delta f)^2 dV_g \\ &= \frac{n-1}{n}\int_M (\Delta f)^2 dV_g - \int_M Ric(\nabla f, \nabla f) dV_g \\ &= \frac{n-1}{n}\int_M (V - \bar{V})^2 dV_g - \int_M Ric(\nabla f, \nabla f) dV_g.\end{aligned}$$

Como M possui curvatura de Ricci não negativa, temos

$$\left\| D^2 f - \frac{\Delta f}{n} g \right\|_{L^2} \leq \left(\frac{n-1}{n} \int_M (V - \bar{V})^2 dV_g \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.9}$$

Unindo as informações de (2.9) com (2.8), nós obtemos a desigualdade desejada.

Suponhamos agora que a igualdade ocorre. Desta forma, nós teremos uma igualdade em (2.8) and (2.9). Como utilizamos a desigualdade de Cauchy-Schwartz, segue que a igualdade em (2.8) ocorre se, e somente se $\overset{\circ}{B}$ e $D^2 f - \frac{\Delta f}{n} g$ são linearmente dependentes. Se um dos dois tensores se anula segue de (2.8) que V é constante e, da igualdade em (2.7), teremos que $\overset{\circ}{B} = 0$. Suponha agora que exista um $\lambda > 0$ tal que $\lambda \overset{\circ}{B} = D^2 f - \frac{\Delta f}{n} g$. Então,

$$\frac{n-1}{n} d\Delta f = \nabla^i \left((D^2 f)_{ij} - \frac{\Delta f}{n} g_{ij} \right) = \lambda \nabla^i \overset{\circ}{B}_{ij} = -\frac{\lambda}{n} dV. \tag{2.10}$$

Lembrando que $\Delta f = V - \bar{V}$, nós temos

$$\left(\frac{n-1+\lambda}{n} \right) dV = 0.$$

Como $n - 1 + \lambda > 2$, nós concluímos que V é constante e,da igualdade em 2.7, $\overset{\circ}{B} = 0$.

□

Observação 2.2. *Devemos observar que o Teorema anterior retorna à desigualdade clássica de Almost-Schur (Teorema 2.7) quando consideramos $B = E_g$, onde E_g é o tensor de Einstein. De fato, neste caso, teríamos,*

$$V = \frac{2-n}{2} R_g,$$

$$\bar{V} = \frac{2-n}{2} \bar{R}_g$$

e

$$\overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{Ric}\,.$$

Substituindo isto no Teorema anterior, chegamos à identidade clássica.

Inspirados no recente trabalho de P. T. Ho, [47], onde é obtido um lema de almost-Schur para variedades com fronteira, também obtemos uma desigualdade do tipo almost-Schur para tensores mais genéricos em variedades com fronteira. Um ponto crucial de nosso resultado se deve que, além de generalizar a identidade obtida por [47] para tensores mais genéricos, nossa demonstração subtrai a hipótese originalmente proposta em [47] sobre a fronteira da variedade ser totalmente geodésica a uma hipótese da fronteira ser convexa. Como veremos a seguir, isto se deve a nossa proposta na utilização da Identidade de Reilly na demonstração,diferentemente dos métodos utilizados no trabalho que generalizamos.

Teorema 2.9. *Considere (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta (possivelmente com fronteira) com $n \geq 3$, B um tensor localmente conservativo e simétrico, e V o traço de B segundo a métrica g, isto é, $V = g^{ij}B_{ij}$. Suponha que M tem curvatura de Ricci não negativa, fronteira convexa (isto é, $\mathbb{II} \geq 0$ em ∂M), e $B(\nu, \cdot) \leq 0$ em ∂M, onde ν é o vetor normal unitário exterior. Então*

$$\int_M (V - \bar{V})^2 dV_g \leq n(n-1) \int_M \|\overset{\circ}{B}\|^2 dV_g, \tag{2.11}$$

onde $\bar{V}$ é a média de V sobre M, isto é, $\bar{V} = \frac{1}{Vol\ M}\int_M V dV_g$. Além do mais, a igualdade ocorre em (2.11) se, e somente se, $\overset{\circ}{B} = 0$.

Demonstração. Esta demonstração segue os mesmos moldes de nosso teorema anterior. Considere $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma solução do Problema de Neumann

$$\begin{cases} \Delta f &= V - \bar{V}, \quad \text{in} \quad M \\ \frac{\partial f}{\partial \nu} &= 0, \quad \text{on} \quad \partial M \end{cases}$$

A existência desta solução é garantida porque $\int_M (V - \bar{V}) dV_g = 0$. Agora, calculamos

$$
\begin{aligned}
\int_M (V-\bar{V})^2 dV_g &= \int_M (V-\bar{V})\Delta f dV_g \\
&= -\int_M \langle dV, df\rangle dV_g + \int_{\partial M} (V-\bar{V})\frac{\partial f}{\partial \nu} d\sigma_g \\
&= -\int_M \langle dV, df\rangle dV_g \\
&= -n\int_M \langle \mathring{B}, D^2 f\rangle dV_g + n\int_{\partial M} \mathring{B}(\nabla f, \nu) d\sigma_g \\
&= -n\int_M \langle \mathring{B}, D^2 f\rangle dV_g + n\int_{\partial M} B(\nabla f, \nu) d\sigma_g \\
&\leq -n\int_M \langle \mathring{B}, D^2 f\rangle dV_g \\
&= -n\int_M \left\langle \mathring{B}, D^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right\rangle dV_g \\
&\leq n\|\mathring{B}\|_{L^2}\left\| D^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right\|_{L^2} \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

Na segunda igualdade, nós utilizamos a fórmula de integração por partes. Na terceira e quinta igualdades, nós utilizamos a condição $\frac{\partial f}{\partial \nu} = 0$ em ∂M. Na quarta igualdade nós utilizamos a Identidade Pohozǎev-Schöen generalizada com $X = \nabla f$. Na primeira desigualdade, nós utilizamos a hipótese de que $B(\nu, \cdot) \leq 0$ em ∂M. Na última desigualdade, utilizamos a desigualdade de Cauchy-Schwartz. Agora, utilizando a Fórmula de Reilly, nós computamos

$$
\begin{aligned}
\int_M |D^2 f|^2 dV_g &= \int_M (\Delta f)^2 dV_g - \int_M Ric(\nabla f, \nabla f) dV_g - \int_{\partial M} 2\frac{\partial f}{\partial \nu}(\Delta f)^2 d\sigma_g \\
&\quad - \int_{\partial M} (n-1)H\left(\frac{\partial f}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma_g - \int_{\partial M} \mathrm{I\!I}(\nabla f, \nabla f) d\sigma_g \\
&\leq \int_M (\Delta f)^2 dV_g,
\end{aligned}
$$

onde nós utilizamos que M tem curvatura de Ricci não negativa, $\frac{\partial f}{\partial \nu} = 0$ em ∂M, e M tem fronteira convexa. Desta forma,

$$
\begin{aligned}
\int_M \left| D^2 f - \frac{\Delta f}{n} g \right|^2 dV_g &= \int_M |D^2 f|^2 - \frac{1}{n}(\Delta f)^2 dV_g \\
&\leq \frac{n-1}{n} \int_M (\Delta f)^2 dV_g - \int_M Ric(\nabla f, \nabla f) dV_g \\
&= \frac{n-1}{n} \int_M (V - \bar{V})^2 dV_g - \int_M Ric(\nabla f, \nabla f) dV_g.
\end{aligned}
$$

Como M possui curvatura de Ricci não negativa, temos

$$
\left\| D^2 f - \frac{\Delta f}{n} g \right\|_{L^2} \leq \left(\frac{n-1}{n} \int_M (V - \bar{V})^2 dV_g \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.13}
$$

Combinando (2.13) com (2.12), obtemos a desigualdade desejada. A observação sobre a rigidez no caso da igualdade ocorre analogamente ao feito no Teorema anterior. □

Como uma interessante aplicação do Teorema anterior, anunciamos o corolário a seguir que considera a escolha de um tensor localmente conservativo específico. Tal resultado generaliza o trabalho de X. Cheng e D. Zhou em [23] ao considerarmos hiperfícies com fronteira imersas em variedades Einstein a deriva do trabalho original que considera hiperfícies fechadas.

Corolário 2.5. *Considere $(\tilde{M}^n, \tilde{g})$, $n \geq 3$, uma variedade Einstein. Seja Σ uma hiperfície conexa com fronteira suave $\partial\Sigma \neq \emptyset$ imersa em M com métrica induzida g. Suponha além disso, que Σ tem curvatura de Ricci não negativa, $\partial\Sigma$ é convexa (isto é, $0 \leq \mathrm{I\!I}^{\partial\Sigma}$) e $\mathrm{I\!I}^{\Sigma} \leq Hg$ em $\partial\Sigma$. Então, ocorre a desigualdade*

$$
\int_\Sigma (H - \bar{H})^2 dV_g \leq \frac{n}{n-1} \int_\Sigma \left| \mathrm{I\!I} - \frac{H}{n} g \right|^2 dV_g,
$$

onde consideramos que $\bar{H}$ é a média de H sobre Σ, isto é, $\bar{H} = \frac{1}{Vol\Sigma} \int_\Sigma H dV_g$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, Σ é uma hiperfície totalmente umbílica.

Demonstração. Como será feito mais explicitamente na demonstração do Teorema 2.11, segue das hipóteses de que M é uma variedade Einstein e Σ é uma hiperfície imersa em M, que o tensor simétrico $B = \mathrm{I\!I}^{\Sigma} - Hg$ definido em Σ é localmente conservativo, com $trB = (1-n)H$ e $\mathring{B} = \mathring{\mathrm{I\!I}}$. Além disso, sobre $\partial\Sigma$, temos a hipótese da convexidade (pois $\mathrm{I\!I}^{\partial\Sigma} \geq 0$) e que $B \leq 0$ em $\partial\Sigma$ (pois $\mathrm{I\!I}^{\Sigma} \leq Hg$ em $\partial\Sigma$). Utilizando o Teorema anterior, concluímos nosso resultado. □

X. Cheng obteve uma generalização do Lema de almost-Schur em [22] ao enfraquecer a hipótese da curvatura de Ricci ser não negativa à uma hipótese da curvatura de Ricci ser apenas limitada por baixo. Na mesma direção, P. Ho ([47]) obteve um resultado similar para variedades com fronteira totalmente geodésica e curvatura de Ricci limitada por baixo. O Teorema a seguir propõe seguir esta mesma linha, generalizando estes resultados pra tensores mais genéricos em variedades com fronteira convexa. Convém ainda observar que fazendo $K = 0$ no próximo teorema, reobtemos o Teorema 2.9.

Teorema 2.10. *Considere (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$ e fronteira convexa ∂M. Seja B um tensor localmente conservativo e simétrico, e V o traço de B segundo a métrica g, isto é, $V = g^{ij}B_{ij}$. Suponha que existe uma constante não negativa K de forma que $Ric_g \geq -(n-1)K$. Além disso, considere que $B(\nu, \cdot) \leq 0$ em ∂M. Então*

$$\int_M (V - \bar{V})^2 dV_g \leq n(n-1)\left(1 + \frac{nK}{\lambda_1}\right)\int_M \|\mathring{B}\|^2 dV_g, \tag{2.14}$$

onde $\bar{V}$ é a média de V sobre M, isto é, $\bar{V} = \frac{1}{Vol\ M}\int_M V dV_g$ e λ_1 denota o primeiro autovalor não nulo do Problema de Neumann para o operador de Laplace em (M, g). A igualdade ocorre em (2.14) se, e somente se, $\mathring{B} = 0$.

Demonstração. Como na prova do Teorema 2.9, considere f como sendo a solução do Problema de Neumann

$$\begin{cases} \Delta f &= V - \bar{V}, \quad \text{in} \quad M \\ \frac{\partial f}{\partial \nu} &= 0, \quad \text{on} \quad \partial M \end{cases}$$

Seguindo a similaridade das hipóteses do Teorema 2.9, chegaremos a seguinte desigualdade

$$\int_M (V - \bar{V})^2 dV_g \leq n\|\mathring{B}\|_{L^2}\left\|D^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right\|_{L^2} \tag{2.15}$$

Se tivéssemos $f \equiv 0$, então $V = \bar{V}$ e disto a desigualdade surge trivialmente. Desta forma suponha que $f \not\equiv 0$. O primeiro autovalor positivo λ_1 do Problema de Neumann para o operador Laplaciano é caracterizado da seguinte forma

$$\lambda_1 = \min\left\{\frac{\int_M |\nabla\varphi|^2}{\int_M \varphi^2}; \varphi \in C^\infty(M), \varphi \not\equiv 0, \int_M \varphi = 0\right\}.$$

Desta forma, temos que

$$
\begin{aligned}
\int_M |\nabla f|^2 dV_g &= -\int_M f\Delta f + \int_{\partial M} f\frac{\partial f}{\partial \nu} \\
&= -\int_M f(V-\bar{V}) \\
&\leq \left(\int_M f^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_M (V-\bar{V})^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{\int_M |\nabla f|^2}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_M (V-\bar{V})^2\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

onde utilizamos integração por partes, a desigualdade de Hölder e a caracterização de λ_1. Portanto,

$$
\int_M |\nabla f|^2 dV_g \leq \frac{1}{\lambda_1}\int_M (V-\bar{V})^2 \tag{2.16}
$$

Utilizando a Identidade de Reilly como na demonstração do Teorema 2.9 junto à hipótese que M tem fronteira convexa e $Ric \geq -(n-1)K$, teremos que

$$
\int_M |D^2 f|^2 \leq \int_M (\Delta f)^2 + (n-1)K\int_M |\nabla f|^2. \tag{2.17}
$$

Unindo os cálculos tomados em (2.16) e (2.17), inferimos que

$$
\begin{aligned}
\int_M \left|D^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 dV_g &= \int_M [|D^2 f|^2 - \frac{1}{n}(\Delta f)^2] dV_g \\
&\leq \frac{n-1}{n}\int_M (\Delta f)^2 dV_g + (n-1)K\int_M |\nabla f|^2 dV_g \\
&\leq \frac{n-1}{n}\int_M (V-\bar{V})^2 dV_g + \frac{(n-1)K}{\lambda_1}\int_M (V-\bar{V})^2 dV_g \\
&= \frac{n-1}{n}\left(1+\frac{nK}{\lambda_1}\right)\int_M (V-\bar{V})^2 dV_g
\end{aligned}
$$

Substituindo a desigualdade acima em (2.15), encontramos a desigualdade almejada.

□

Observação 2.3. *É salutar que as mesmas ideias de demonstrações realizadas nesta seção propõem generalizações para o caso de tensores localmente conservativos e variedades com fronteira de alguns recentes trabalhos tidos em variedades mais genéricas, como por exemplo variedades CR (como o proposto em [20]) e variedades com peso (como proposto por [87]).*

2.2.3 Um teorema do tipo Alexandrov

Um dos mais famosos teoremas de rigidez para hipersuperfícies no espaço Eucildeano é o Teorema de Alexandrov que atesta que as únicas hiperfícies fechadas, conexas e de curvatura média constante, mergulhadas no espaço euclideano são as esferas. A hipótese de existir um mergulho não é artificial visto que, por exemplo, existe uma famosa construção devido a H.Wente ([86]) de um toro (conhecido como Toro de Wente) que é hiperfície imersa em $\mathbb{R}^3$ que não é uma esfera.

Como mais uma aplicação da Identidade de Pohozǎev-Schöen, apresentaremos um Teorema do tipo Alexandrov para hiperfícies compactas Σ imersas em variedades Einstein (M, g) as quais satisfazem a uma identidade do tipo

$$\mathbb{II} + D^2_\Sigma f = \lambda g_\Sigma,$$

onde $\lambda : \Sigma \to \mathbb{R}$ e $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ são funções suaves, $\mathbb{II}$ é a segunda forma fundamental de Σ e g_Σ é a métrica induzida em Σ. É importante observar que este é um exemplo de gradiente almost soliton generalizado.

Teorema 2.11. *Considere (Σ^n, g_Σ) uma hiperfície fechada e imersa numa variedade Einstein (M^{n+1}, g) com g_Σ a sua métrica induzida. Suponha que existem funções suaves $\lambda : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ e $f : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$\mathbb{II} + D^2_\Sigma f = \lambda g_\Sigma. \tag{2.18}$$

Se a curvatura média de Σ é constante, então Σ é uma hiperfície totalmente umbílica. Se, em particular, M é o espaço Euclideano $\mathbb{R}^{n+1}$, o hemisfério S^{n+1}_+ ou espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$, então Σ é uma esfera geodésica nestes espaços.

Demonstração. Num primeiro plano, nós construiremos um tensor localmente conservativo em Σ. Para isto, considere $\{e_i\}$, $1 \le i \le n$, um referencial ortonormal em Σ ao qual é possível extender a um referencial ortonormal em M, $\{e_i\}$, $1 \le i \le n+1$, de forma que $e_{n+1} = \nu$, o vetor normal exterior a Σ. Considere $h_{ij} = \mathbb{II}(e_i, e_j)$, $1 \le i, j \le n$. Segue da Equação de Codazzi que

$$\nabla^k h_{ij} - \nabla^j h_{ik} = R_{n+1ijk}, 1 \le i, j, k \le n,$$

onde R é o tensor de curvatura em (M, g). Tomando $j = i$ na identidade acima e somando os índices i de 1 até n, teremos

$$\nabla^k H = \sum_{i=1}^{n} h_{ii,k} = \sum_{i=1}^{n} \nabla^i h_{ik} + \sum_{i=1}^{n} R_{n+1iik} = \nabla^i h_{ik} + Ric_{n+1k},$$

onde Ric_{ij} representa as componentes do tensor de Ricci de M. Da hipótese de que M é Einstein, temos que $Ric_{n+1k} = \frac{R}{n} g_{n+1k} = 0$, para cada $k = 1, \ldots, n$ e, portanto, $\nabla^i h_{ik} = \nabla^k H$. Portanto, definindo o tensor $B = \mathbb{II} - Hg$, segue, em nosso caso, que este é localmente conservativo, $trB = (1-n)H$ e $\overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{\mathbb{II}}$. Então, utilizando a Identidade de Pohozǎev-Schöen generalizada e (2.18), temos a identidade

$$\int_{\Sigma} \langle \nabla H, \nabla f \rangle = \frac{n}{n-1} \int_{\Sigma} |\overset{\circ}{\mathbb{II}}|^2.$$

Desta forma, se Σ tem curvatura média constante, então $\overset{\circ}{\mathbb{II}}= 0$, isto é, Σ é totalmente umbílica. No caso em que M é uma forma espacial, concluímos que Σ é uma esfera geodésica contida na respectiva forma espacial. □

2.3 Aplicações em variedades estáticas e V-estáticas

Considere uma variedade estática (M^n, g) com potencial estático f. Após normalização, podemos considerar que $R_g = \varepsilon n(n-1)$, com $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$ (cf. a Definição 1.1). Suponha que $\partial M = \Sigma = \bigcup_{\alpha=1}^{l} \Sigma_\alpha$, onde Σ_α são as componentes conexas de ∂M. Considerando os casos $\varepsilon = 0, 1$ e utilizando um princípio do máximo, Chruściel demonstrou em [26] a seguinte desigualdade

$$\sum_{\alpha=1}^{l} \kappa_\alpha \int_{\Sigma_\alpha} \left(R^{\Sigma_\alpha} - \varepsilon(n-1)(n-2)\right) d\sigma_\alpha \geq 0, \tag{2.19}$$

onde $\kappa_\alpha = |\nabla_g f||_{\Sigma_\alpha}$ e R^{Σ_α} é a curvatura escalar intrínseca de Σ_α.

Uma demonstração alternativa deste resultado que não utiliza um argumento de princípio do máximo e estende a desigualdade de Chruściel para o caso $\varepsilon = -1$ pode ser obtida através da aplicação da Identidade de Pohozǎev-Schöen. De fato, como a curvatura escalar de (M, g) é constante, consideramos o campo $X = \nabla f$ e lembramos que $\mathcal{L}_{\nabla f} g = 2D^2 f$, para obter, da Identidade de Pohozǎev-Schöen, que

$$\frac{n}{n-2} \int_M \langle \overset{\circ}{\mathrm{Ric}}_{\mathrm{g}}, 2D_g^2 f \rangle = \frac{2n}{n-2} \int_{\partial M} \overset{\circ}{\mathrm{Ric}}_{\mathrm{g}}\,(\nabla_g f, \nu).$$

Utilizando a equação de estaticidade $D^2 f - fRic_g - (\Delta_g f) g = 0$, e o fato que o vetor normal exterior é $\nu = -\frac{\nabla_g f}{|\nabla_g f|}$ em ∂M (pois $\partial M = f^{-1}(0)$), teremos que

$$0 \leq \int_M f|\overset{\circ}{\mathrm{Ric}}_{\mathrm{g}}|^2 dV_g = -\int_{\partial M} |\nabla_g f| \overset{\circ}{\mathrm{Ric}}_{\mathrm{g}}(\nu,\nu) d\sigma = -\int_{\partial M} |\nabla_g f|(\mathrm{Ric}_{\mathrm{g}}(\nu,\nu) - \varepsilon(n-1)) d\sigma$$

Como ∂M é totalmente geodésica, segue da equação de Gauss que $\varepsilon n(n-1) - 2Ric(\nu,\nu) = R^{\Sigma}$. Unindo isto ao fato de que $f \geq 0$ em M, encontramos a desigualdade almejada (2.19).

Salientamos que a igualdade implica que M é uma variedade Einstein e, no caso $\varepsilon = 1$, o Teorema de Reilly (cf. Teorema 1.4) nos mostra que M é um hemisfério. Como já observamos, esta desigualdade possui importantes aplicações. Como exemplo, temos que se $n = 3$ e ∂M é conexa, pode-se obter facilmente a famosa desigualdade de Boucher-Gibbons-Horowitz([14]) que atesta que

$$Area(\partial M) \leq 4\pi.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, M é isométrica ao hemisfério canônico $\mathbb{S}^3_+$.

Baseados na desigualdade (2.19) e em suas iminentes e produtivas consequências, nós obtemos uma desigualdade correlata considerando agora métricas V-estáticas. Tais empregos de esforços tem o sentido de abordar os supracitados resultados de variedades estáticas à direção de conseguir novos teoremas de rigidez para variedades V-estáticas.

Teorema 2.12. *Considere (M^n, g) uma variedade compacta, V-estática positiva com fronteira $\partial M = \bigcup_{i=1}^{l} \Sigma_\alpha$, e curvatura escalar $R_g = \varepsilon n(n-1)$, onde $\varepsilon = -1, 0, 1$. Considere as constantes $\kappa_i = |\nabla_g \lambda||_{\Sigma_i}$. Então, a seguinte desigualdade ocorre*

$$\sum_{i=1}^{l} \int_{\Sigma_i} \kappa_i \left(R_{g_i} - \varepsilon(n-2)(n-1) - \frac{n-2}{n-1} H^2 \right) dV_{\Sigma_i} \geq 0\,.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica em um dos espaços $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{H}^n$.

Demonstração. Como já abordamos acima, a Identidade de Pohozăev-Schöen, a equação de V-estaticidade $-(\Delta_g \lambda) g + \nabla^2_g \lambda - \lambda Ric_g = g$, e o fato de $\nu = -\frac{\nabla_g \lambda}{|\nabla_g \lambda|_g}$, inferem que

$$\int_M \lambda |\overset{\circ}{\mathrm{Ric}}_{\mathrm{g}}|^2 dv_g = -\int_{\Sigma} |\nabla_g \lambda|_g (Ric_g(\nu,\nu) - \varepsilon(n-1)) dv_{\Sigma}. \tag{2.20}$$

Lembrando do fato que Σ é uma hiperfície totalmente umbílica, segue da equação de

Gauss que

$$2Ric_g(\nu,\nu) + R_\Sigma = \varepsilon n(n-1) + \frac{n-2}{n-1}H^2\,,$$

onde R_Σ e H são a curvatura escalar e a curvatura média de Σ, respectivamente. Portanto, da equação acima, temos

$$2Ric_g(\nu,\nu) - 2\varepsilon(n-1) = \varepsilon(n-2)(n-1) + \frac{n-2}{n-1}H^2 - R_\Sigma\,.$$

Então, utilizando a equação (2.20), a observação acima e que $\lambda \geq 0$ em M, nós obtemos que

$$\int_\Sigma |\nabla_g\lambda| \left(\varepsilon(n-2)(n-1) + \frac{n-2}{n-1}H^2 - R_\Sigma\right) dv_\Sigma \leq 0\,.$$

Isto é suficiente para obtermos a desigualdade almejada. Note que, se

$$\int_\Sigma \left(\varepsilon(n-2)(n-1) + \frac{n-2}{n-1}H^2 - R_\Sigma\right) dv_\Sigma = 0\,,$$

nós obtemos de (2.20) que

$$\int_M \lambda|\overset{\circ}{\mathrm{Ric}}_{\mathrm{g}}|^2 dv_g = 0\,,$$

donde $\overset{\circ}{\mathrm{Ric}}_{\mathrm{g}} = 0$ e, portanto, (M,g) é uma variedade Einstein. Desta forma, como (M,g) é uma variedade V-estática e Einstein, utilizamos o Teorema 1.7 para obter que (M,g) é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{H}^n$. □

É novamente salutar a frutuosa aplicação da Identidade de Pohozăev-Schöen em duas direções na demonstração acima. Por um lado, ela nos orienta a obter a desigualdade que generaliza o resultado obtido originalmente por Cruściel (2.19) para variedades estáticas, a considerar uma variedade V-estática. Por outro lado, também obtemos um importante resultado de rigidez para a igualdade em dimensão qualquer onde, através da descoberta que a variedade em questão é Einstein, utilizamos o Teorema de classificação de Miao e Tam (cf. Teorema 1.7) para concluir nossos resultados.

Com mais uma hipótese que indique a igualdade no Teorema anterior, podemos conseguir um resultado de rigidez como o realizado a seguir:

Corolário 2.6. *Considere (M,g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n, V-estática positiva, com fronteira suave $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{l} \Sigma_i$ e curvatura escalar constante $R_g = \varepsilon n(n-1)$. Se*

$$Ric_g(\nu) \geq \varepsilon(n-1)\,,$$

onde ν é o campo normal exterior em Σ, então (M,g) é isométrica a uma bola geodésica *em um dos espaços* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ *ou* $\mathbb{H}^n$.

Demonstração. De fato, como Σ é totalmente umbílica, utilizamos a equação de Gauss e a hipótese de que $Ric_g(\nu) \geq \varepsilon(n-1)$, para obter que

$$\sum_{i=1}^{l} \int_{\Sigma_i} \kappa_i \left(R_{g_i} - \varepsilon(n-2)(n-1) - \frac{n-2}{n-1} H^2 \right) dV_{\Sigma_i} \leq 0\,.$$

Como já temos a desigualdade contrária do Teorema 2.12, segue que

$$\sum_{i=1}^{l} \int_{\Sigma_i} \kappa_i \left(R_{g_i} - \varepsilon(n-2)(n-1) - \frac{n-2}{n-1} H^2 \right) dV_{\Sigma_i} = 0\,.$$

Utizando novamente o Teorema 2.12 para o caso da igualdade, concluímos nosso resultado.

□

Munidos dos resultados de rigidez abordados anteriormente, nós podemos obter, ao mesmo sentido do já observado para variedades estáticas, novos resultados de classificação topológica para a fronteira de variedades V-estáticas positivas de dimensões 3 e 5 utilizando os Teoremas de Gauss-Bonnet e Gauss-Bonnet-Chern.

Teorema 2.13. *Considere* (M^3, g) *uma variedade Riemanniana compacta,* V*-estática positiva com fronteira conexa, e curvatura escalar* $R_g = 6\varepsilon$*, onde* $\varepsilon = -1, 0, 1$.

(i) Se $\varepsilon = 0, 1$*, então* ∂M *é homeomorfa a esfera* $\mathbb{S}^2$.

(ii) Se $\varepsilon = -1$ *e* $H \geq 2$*, então* ∂M *é homeomorfa a esfera* $\mathbb{S}^2$.

Demonstração. Considerando a desigualdade obtida no Teorema 2.12, o fato de ∂M ser conexa e $R_\Sigma = 2K$, onde K é a curvatura seccional de ∂M, temos que

$$\int_{\partial M} 2K - 2\varepsilon - \frac{1}{2} H^2 \geq 0.$$

Utilizando o Teorema de Gauss Bonnet e o fato que $H > 0$ é constante, temos que

$$4\pi\chi(\partial M) \geq \left(2\varepsilon + \frac{1}{2} H^2 \right) Area(\partial M)\,.$$

onde $\chi(\partial M)$ é a característica de Euler de ∂M.

(i) Se $\varepsilon = 0$ ou 1, então $\chi(\partial M) > 0$, pois $H > 0$ (∂M é totalmente umbílica). Neste caso, obtemos que ∂M é homeomorfa à esfera $\mathbb{S}^2$.

(ii) Se $\varepsilon = -1$ e $H \geq 2$, obtemos que $\chi(\partial M) \geq 0$. Note que, se $H > 2$, então já obtemos que $\chi(\partial M) > 0$ e, desta forma, ∂M é homeomorfa à $\mathbb{S}^2$.

Supondo que $H = 2$, nós obtemos que $\chi(\partial M) \geq 0$. Neste caso, afirmamos que não podemos ter $\chi(\partial M) = 0$. De fato, se $\chi(\partial M) = 0$ então

$$4\pi\chi(\partial M) = \left(2\varepsilon + \frac{1}{2}H^2\right) Area(\partial M)$$

e isto implicaria, pelo Teorema de Gauss-Bonnet, que

$$\int_{\partial M} \left(\varepsilon(n-2)(n-1) + \frac{n-2}{n-1}H^2 - R_\Sigma\right) dv_\Sigma = 0\,.$$

Então, segue do Teorema 2.12 que (M^3, g) é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$ ou $\mathbb{H}^3$. Nesta situação, é impossível para ∂M ter que $\chi(\partial M) = 0$. Então, em qualquer caso, teremos que $\chi(\partial M) > 0$ e ∂M é homeomorfa à esfera $\mathbb{S}^2$.

□

Uma consequência direta da demonstração do teorema anterior é o seguinte resultado que, a um certo sentido, leva a mesma abordagem da desigualdade de Boucher-Gibbons-Horowitz (cf. Teorema 1.6) para variedades V-estáticas tridimensionais:

Teorema 2.14. *Considere (M^3, g) uma variedade Riemanniana V-estática positiva com fronteira convexa e curvatura escalar $R_g = 6\varepsilon$, onde $\varepsilon = -1, 0, 1$. Se $\varepsilon = -1$, assuma adicionalmente que $H \geq 2$. Então*

$$4\pi \geq \left(\varepsilon + \frac{1}{4}H^2\right) Area(\partial M)\,.$$

Além disso, a igualdade na desigualdade acima ocorre se, e somente se, (M^3, g) é isométrica a uma bola geodésica em um dos espaços $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$ ou $\mathbb{H}^3$.

Utilizando a Fórmula de Gauss-Bonnet-Chern para 4-variedades compactas, aplicamos novamente o Teorema 2.12 para obter o resultado a seguir.

Teorema 2.15. *Considere (M^5, g) uma variedade Riemanniana compacta, V-estática positiva com fronteira convexa e curvatura escalar $R_g = 20\varepsilon$, onde $\varepsilon = -1, 0, 1$. Se $\varepsilon = -1$, assuma adicionalmente que $H \geq 4$. Suponha ainda que ∂M é Einstein. Então*

$$8\pi^2\chi(\partial M) \geq \frac{1}{24}\left(12\varepsilon + \frac{3}{4}H^2\right)^2 Area(\partial M)\,.$$

Em particular, $\chi(\partial M) > 0$. Além do mais, se $\chi(\partial M) = 2$ temos que

$$\frac{8\pi^2}{3} \geq \left(\varepsilon + \frac{1}{16}H^2\right)^2 Area(\partial M)$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, (M^5, g) é isométrica a uma bola geodésica numa forma espacial simplesmente conexa $\mathbb{R}^5$, $\mathbb{S}^5$ ou $\mathbb{H}^5$.

Demonstração. Segue do Teorema 2.12 para $n = 5$, e do fato que $H > 0$ é constante em ∂M, que

$$\left(12\varepsilon + \frac{3}{4}H^2\right) Area(\partial M) \leq \int_{\partial M} R_{\partial M} dv_{\partial M}\,.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder junto à desigualdade acima, obtemos que

$$\left(12\varepsilon + \frac{3}{4}H^2\right)^2 Area(\partial M) \leq \int_{\partial M} R^2_{\partial M} dv_{\partial M}. \tag{2.21}$$

Lembre que a identidade de Gauss-Bonnet-Chern em ∂M infere que

$$8\pi^2\chi(\partial M) = \frac{1}{4}\int_{\partial M} |W|^2 dv_{\partial M} + \frac{1}{24}\int_{\partial M} R^2_{\partial M} dv_{\partial M} - \frac{1}{2}\int_{\partial M} |\overset{\circ}{\mathrm{Ric}}_{\mathrm{g}}|^2 dv_{\partial M}$$

Desta forma, utilizando a hipótese que ∂M é Einstein (e, portanto, $\overset{\circ}{\mathrm{Ric}}_{\mathrm{g}} = 0$ em ∂M), a desigualdade (2.21) e a identidade de Gauss-Bonnet-Chern, teremos que

$$8\pi^2\chi(\partial M) \geq \frac{1}{24}\left(12\varepsilon + \frac{3}{4}H^2\right)^2 Area(\partial M).$$

O caso da igualdade novamente remonta à rigidez obtida pela igualdade do Teorema 2.12. □

Como último resultado desta seção, vamos obter mais um Teorema de rigidez para variedades V-estáticas com fronteira conexa. Um importante Teorema demonstrado no pioneiro artigo de Miao-Tam ([64]) sobre variedades V-estáticas é o resultado a seguir.

Teorema 2.16 (Miao-Tam, [64]). *Considere (M^n, g) uma n-dimensional variedade Riemanniana compacta com fronteira conexa e suave Σ. Considere γ uma métrica em Σ e seja $K = 0$ ou $-n(n-1)$. Suponha $g \in M^K_\gamma$ uma métrica suave em M que é um ponto crítico do funcional volume $V(\cdot)$ em M^K_γ. Considere ν o vetor normal exterior a Σ.*

(i) Se $K = 0$, (Σ, γ) é isométrica a uma esfera geodésica em $\mathbb{R}^n$ e M é spin(caso $n \geq 8$), então $Ric(\nu, \nu)$ é uma constante não positiva ao longo de Σ, e $Ric(\nu, \nu) = 0$ se, e somente se, (M, g) é isométrica a um bola geodésica em $\mathbb{R}^n$.

(ii) Se $n = 3$, $K = 0$, M é orientada e $Ric(\nu, \nu) = 0$ ao longo de Σ, então (M, g) é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{R}^3$.

(iii) Se $n = 3$, $K = -6$ e (Σ, γ) é isométrica a uma esfera geodésica em $\mathbb{H}^3$, então $Ric(\nu, \nu)$ é uma constante satisfazendo que $Ric(\nu, \nu) \leq -2$ ao longo de Σ, e $Ric(\nu, \nu) = -2$ se, e somente se, (M, g) é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{H}^3$.

De fato, duas hipóteses cruciais a demonstração dos autores se devem à visível limitação na dimensão e ao fato de se tratar de variedades com curvatura escalar não positiva. Estes componentes são explicado pela utilização de uma generalização do Teorema da Massa Positiva por Shi-Tam (cf. [83]) na demonstração.

O resultado que retraremos a seguir generaliza o Teorema anterior ao subtrair as hipóteses sobre a dimensão e a não positividade da curvatura escalar. De fato, nossa demonstração se mostra alterniva junto a utilização da Identidade de Pohozǎev-Schöen.

Vamos denotar por E_k uma variedade Riemanniana Einstein com $Ric_{g_k} = k(n-1)g_k$.

Teorema 2.17. *Considere (M, g) uma n-dimensional variedade Riemanniana compacta com curvatura escalar constante $R_g = \varepsilon n(n-1)$. Suponha que M possui uma fronteira conexa e suave Σ, tal que g é um ponto crítico do funcional volume em $\mathcal{M}_\gamma^K$, $K = \varepsilon n(n-1)$. Suponha que (Σ, γ) é isométrica a uma hiperfície totalmente umbílica Σ_k em E_k. Então,*

$$H_k \geq H\,,$$

onde H e H_k são as curvaturas médias de Σ e Σ_k, respectivamente. A igualdade ocorre se, e somente se, (M, g) é isométrica a um bola geodésica em $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{H}^n$.

Demonstração. Utilizando a Identidade de Pohozǎev-Schöen, temos que

$$-\int_M \lambda |Ric_g - \frac{R_g}{n} g|^2 dv_g = \int_\Sigma |\nabla_g \lambda|_g (Ric_g(\nu, \nu) - k(n-1)) dv_\Sigma\,.$$

Desta forma,

$$\int_\Sigma (Ric_g(\nu, \nu) - k(n-1)) dv_\Sigma \leq 0, \tag{2.22}$$

pois $\lambda \geq 0$. Denote por R_Σ e H_Σ as curvaturas escalar e média de Σ, respectivamente. Denote por R_{Σ_k} e H_{Σ_k} as curvaturas escalar e média de Σ_k, respectivamente. Segue da Equação de Gauss que

$$2Ric_g(\nu, \nu) + R_\Sigma = kn(n-1) + \frac{n-2}{n-1} H_\Sigma^2$$

e

$$R_{\Sigma_k} = k(n-2)(n-1) + \frac{n-2}{n-1} H^2_{\Sigma_k}\,.$$

Como Σ é isométrica a Σ_k, nós obtemos que $R_\Sigma = R_{\Sigma_k}$. Portanto, subtraindo as igualdades acima, obtemos

$$2Ric_g(\nu,\nu) - 2k(n-1) = \frac{n-2}{n-1}(H^2_\Sigma - H^2_{\Sigma_k})\,.$$

Então, substituindo isto na desigualdade (2.22), inferimos que

$$\int_\Sigma (H^2_\Sigma - H^2_{\Sigma_k}) =\leq 0,$$

de, onde concluímos que

$$H_{\Sigma_k} \geq H_\Sigma,$$

já que H_Σ e H_{Σ_k} são constantes positivas e $\int_\Sigma dv_\Sigma = \int_{\Sigma_k} dv_{\Sigma_k}$.

Note que, se $H_\Sigma = H_{\Sigma_k}$, nós obtemos dos cálculos acima que (M,g) é Einstein, pois teríamos

$$\int_M \lambda |Ric_g - \frac{R_g}{n} g|^2 dv_g = 0\,.$$

Então, segue do Teorema 1.7 que (M,g) é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{H}^n$. □

Corolário 2.7. *Se Ω é um domínio limitado com fronteira suave contido numa forma espacial simplesmete conexa $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{H}^n$, então a correspondente métrica canônica da forma espacial é uma métrica crítica em Ω se, e somente se, Ω é uma bola geodésica (se $\Omega \subset \mathbb{S}^n$, assuma adicionalmente que $V(\Omega) < \frac{1}{2}Vol(\mathbb{S}^n)$).*

Teorema 2.18. *Considere (M,g) uma variedade Riemanniana n-dimensional, compacta com curvatura escalar constante $R_g = n(n-1)$, com uma fronteira suave e conexa Σ, tal que g é um ponto crítico do funcional volume em $\mathcal{M}^K_\gamma$, $K = n(n-1)$. Então (Σ,γ) não pode ser isométrica a uma $(n-1)$-esfera.*

Demonstração. De fato, se supôssemos que (Σ,γ) fosse isométrica à uma $(n-1)$-esfera, o Teorema 2.17 nos diria que $H = 0$, o que é uma contradição ao fato que Σ é totalmente umbílica. □

Capítulo 3

Desigualdades e Resultados de Rigidez em Variedades Estáticas e V-estáticas

Neste capítulo, abordaremos novos resultados sobre rigidez e desigualdades em variedades estáticas e V-estáticas. Inicialmente, consideramos uma hipótese de pinching sobre o tensor de Ricci sem traço para obter generalizacões dos resultados de L. Ambrozio ([3]). Posteriormente, munidos de uma generalização da Identidade de Reilly, buscaremos obter algumas desigualdades para variedades V-estáticas, inspirados em resultados já existentes em variedades estáticas (cf. [55] e [61]).

3.1 Resultados de rigidez sob uma hipótese de pinching

Ao início desta seção, comentaremos alguns resultados de rigidez em variedades estáticas e V-estáticas envolvendo um pinching da norma do tensor de Ricci sem traço. Mais especificamente, para uma variedade n-dimensional (M^n, g) compacta, consideraremos o seguinte pinching sobre o tensor de Ricci sem traço:

$$|\overset{\circ}{Ric}_g|_g^2 \leq \frac{R_g^2}{n(n-1)}.$$

Tal pinching será utilizado como forma de obter alguns teoremas de rigidez. De fato, recentes resultados na literatura propõem esta abordagem em variedades estáticas ([3]) e V-estáticas ([8]).

Um ingrediente importante e canalizador dos trabalhos que faremos a seguir será a utilização de um lema algébrico que aclamará nossa condição de pinching do tensor de Ricci sem traço à uma condição de curvatura de Ricci não negativa. O seguinte lema algébrico é um resultado anunciado em [19].

Lema 3.1. *Considere* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *e* b, $(n+1)$ *números reais* $(n > 1)$ *satisfazendo a seguinte desigualdade*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \geq (n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + b \tag{3.1}$$

Então, ocorre a desigualdade

$$2a_ia_j \geq \frac{b}{n-1}, \tag{3.2}$$

para quaisquer i *e* j *distintos.*

Demonstração. Partindo da desigualdade (3.1), temos que

$$C = (n-2)a_n^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)a_n + [(n-2)\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 - 2\sum_{i<j\leq n-1} a_ia_j + b] \leq 0$$

Como a_n é um número real, a equação quadrática

$$(n-2)a_n^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)a_n + [(n-2)\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 - 2\sum_{i<j\leq n-1} a_ia_j + b - C] = 0,$$

possui discriminante positivo, o que implica que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^2 &\geq (n-2)\left[(n-2)\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 - 2\sum_{i<j\leq n-1} a_ia_j + b - C\right]\\ &\geq (n-2)\left[(n-1)\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^2 + b\right],\end{aligned}$$

onde também utilizamos que $C \leq 0$. Desta forma, produzimos uma desigualdade do mesmo tipo de (3.1), a dizer

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^2 \geq (n-2)\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 + \frac{n-2}{n-1}b.$$

Realizando $(n-2)$ vezes o mesmo processo vamos obter que $2a_1a_2 \geq \frac{b}{n-1}$ o que, sem perda de generalidade, demonstra nosso lema. $\square$

Uma crucial aplicação do supracitado lema algébrico ao nosso trabalho se deve ao fato que pode-se resgatar a propriedade de não negatividade do tensor de Ricci de uma variedade Riemanniana com curvatura escalar não negativa a partir de uma condição de pinching sobre o tensor de Ricci sem traço. Isso será feito no Lema a seguir.

Lema 3.2. *Considere (M^n, g) uma variedade Riemanniana com curvatura escalar não negativa e tal que*

$$|\overset{\circ}{Ric}_g|^2 \leq \frac{R_g^2}{n(n-1)}.$$

Então, (M^n, g) possui curvatura de Ricci não negativa.

Demonstração. Um breve cálculo mostra que a condição de pinching sobre o tensor de Ricci sem traço é equivalente a

$$R_g^2 \geq (n-1)|Ric_g|^2. \tag{3.3}$$

Considerando $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ o conjunto dos autovalores do tensor de Ricci, a condição (3.3) pode ser traduzida como

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^2 \geq (n-1)\sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

Utilizando o Lema 3.1 inferimos que $\lambda_i\lambda_j \geq 0$ para $i \neq j$. Esta observação junto a condição que M tem curvatura escalar não negativa ($\sum \lambda_i \geq 0$), implica que $\lambda_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, e portanto $Ric_g \geq 0$.

□

A gênese da condição de curvatura de Ricci não negativa nos dá indumentárias para utilizá-la em alguns resultados de rigidez já conhecidos da literatura. O Teorema a seguir, por exemplo, é um importante resultado para variedades com curvatura de Ricci não negativa obtido como caso especial de Teoremas em [49] e [50]. Exporemos este resultado como retratado por F. Hang e X. Wang([42]).

Lema 3.3 (F. Hang, X. Wang [42]). *Considere (M^n, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n, compacta e conexa com fronteira mean convex Σ e curvatura de Ricci não negativa. Então Σ tem no máximo duas componentes. Além disso, se Σ tem exatamente duas componentes, então ambas são totalmente geodésicas e M é isométrico a $\Gamma \times [0, a]$ para alguma variedade Riemanniana compacta Γ com curvatura de Ricci não negativa e $a > 0$.*

Outros importantes resultados de rigidez que pressupõem a curvatura de Ricci não negativa foram abordados por G. Galloway em [33], em dois interessantes lemas que exprimem resultados para tais variedades considerando os casos onde a fronteira é conexa ou desconexa.

Lema 3.4 (G. Galloway, [33]). *Considere M uma variedade Riemanniana completa e conexa com fronteira mean convex ∂M com no mínimo duas componentes conexas Σ_1 e Σ_2. Se M tem curvatura de Ricci não negativa e Σ_1 é compacta, então M é isométrica à $[0, L] \times \Sigma_1$, com a isometria sendo dada pela exponencial normal de Σ_1 a Σ_2. Em particular, Σ_1 e Σ_2 são isométricas.*

Lema 3.5 (G. Galloway, [33]). *Considere M uma variedade Riemanniana completa e conexa com fronteira conexa e compacta Σ. Assuma que M tem curvatura de Ricci não negativa e Σ é mean convex. Então, apenas uma das opções é satifeita*

(i) *O homomorfismo entre os grupos fundamentais $i_* : \Pi(\Sigma) \longrightarrow \Pi(M)$ induzido pela aplicação de inclusão $i : \Sigma \hookrightarrow M$ é sobrejetor.*

(ii) $\Pi(M)/i_*(\Pi(\Sigma)) = \mathbb{Z}_2$, *e M tem recobrimento duplo orientável isométrico à $[0, L] \times \Sigma$. Em particular, Σ é uma hiperfície totalmente geodésica e a curvatura de Ricci se anula em todos os vetores ortogonais a Σ.*

Como parâmetro à utilização da condição de que as variedades V-estáticas possuem fronteira totalmente umbílica, o recente resultado a seguir classifica variedades com curvatura de Ricci não negativa que tem a supracitada condição no caso tridimensional.

Lema 3.6 (A. Fraser and P. Li, [31]). *Considere (M^3, g) uma variedade Riemanniana compacta com fronteira não vazia. Assuma que M possui curvatura de Ricci não-negativa. Se ∂M é estritamente convexa, então M^3 é difeomorfa a uma bola B^3.*

Munidos da indumentária retratada anteriormente, apresentaremos alguns novos teoremas de rigidez para variedades estáticas e V-estáticas sob uma condição de pinching.

Teorema 3.1. *Considere (M^3, g) uma variedade V-estática positiva com curvatura escalar positiva. Se*

$$|\overset{\circ}{Ric}_g|^2 \leq \frac{R_g^2}{6}$$

então (M^3, g) é difeomorfa a uma bola geodésica em $\mathbb{S}^3$.

Demonstração. Pela observação posterior ao Lema 3.1, a condição de pinching implica que $Ric_g \geq 0$. Utilizando o Lema 3.3, podemos concluir que ∂M é conexa. De fato, se M fosse desconexa teríamos pelo supracitado lema que ∂M seria totalmente geodésica, o que não ocorre em variedades V-estáticas. Utilizando o Lema 3.6, isto é suficiente para obter que (M^3, g) é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{S}^3$. $\square$

A seguir, daremos uma demonstração de um resultado obtido recentemente por L. Ambrozio [3] de uma maneira consideravelmente mais simples e almenjando resultados em dimensões altas, onde utilizamos novamente nossas observações e resultados preliminares acerca da nossa conclusão sobre a gênese da hipótese da curvatura de Ricci não negativa. A demonstração do autor supracitado ([3]) ao resultado a seguir recorre a uma Fórmula do tipo Böchner para variedades estáticas tridimensionais:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}div(f\nabla|\overset{\circ}{\mathrm{Ric}}|^2)\\ =\;&\left(|\nabla\overset{\circ}{\mathrm{Ric}}|^2+\frac{|C|^2}{2}\right)f+\left(R|\overset{\circ}{\mathrm{Ric}}|^2+18det(\overset{\circ}{\mathrm{Ric}})\right)f,\end{aligned}$$

onde f é o potencial estático e C é o tensor de Cotton da variedade. Em [3], ele observa que a condição de pinching aplicada na Identidade acima, implica que a variedade estática é localmente conformemente plana e, a partir disto, recorre a teoremas de classificação de Kobayashi ([53]) e Lafontaine ([56]).

Salientamos que temos como vantagem primordial a nossa abordagem o fato que as técnicas podem ser mais amplamente utilizadas na direção de conseguir generalizações dos resultados em dimensão alta.

Teorema 3.2. *Considere (M^3,g) uma variedade Riemanniana orientável, compacta e estática com fronteira $\Sigma\neq\emptyset$. Assuma que $R_g=6$ e*

$$|\overset{\circ}{Ric}_g|^2\leq\frac{R_g^2}{6}\,.$$

Então uma das mutuamente exclusivas opções deve ocorrer:

(i) (M^3,g) *é isométrica ao hemisfério unitário com a métrica padrão* $(\mathbb{S}^3_+,g_{st})$.

(ii) (M^3,g) *é isométrica ao cilindro* $(\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{3}})\times[0,\frac{\pi}{\sqrt{3}}]),g_0)$, *onde* g_0 *é a métrica produto.*

Demonstração. Pela observação após o Lema 3.1 temos que $Ric_g\geq0$. Se ∂M não é conexa, segue do Lema 3.4 que (M^3,g) é isométrica ao cilindro $(\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{3}})\times[0,\frac{\pi}{\sqrt{3}}]),g_0)$, onde g_0 é a métrica produto.

Assuma que $\Sigma=\partial M$ é conexa e, portanto, Σ é uma esfera topológica (vide Desigualdade de Chruśchiel). Neste caso, como o feito por exemplo em [14] e [3](cf. também esta descrição no início do Capítulo 4), pode-se obter uma 4-variedade compacta $(N,\hat{g})$ a partir de M satisfazendo que:

(a) $\chi(N) = 2$ e $\tau(N) = 0$, onde $\chi(N)$ é a característica de Euler de N e $\tau(N)$ é a sua assinatura.

(b) $Ric_{\hat{g}} = 3\hat{g}$.

(c) Pelo Teorema de Bishop, temos que $V_4(N) \leq \frac{8}{3}\pi^2$, onde $V_4(N)$ é o volume 4-dimensional de N, com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $\hat{g}$ é uma métrica de curvatura seccional constante.

(d) Por um argumento do tipo Fubini, é possível inferir que $V_4(N) = \frac{2\pi}{3} Area(\Sigma)$.

Como $Ric \geq 0$ em M e Σ é uma esfera topológica e totalmente geodésica, segue da equação de Gauss e do teorema de Gauss-Bonnet que $Area(\Sigma) \geq \frac{4\pi}{3}$. De fato,

$$0 \geq -2Ric(\nu, \nu) = 2K - 6,$$

onde K é a curvatura seccional de Σ. Desta forma,

$$4\pi = 2\pi\chi(\Sigma) = \int_{\Sigma} K \leq 3Area(\Sigma)$$

Desta forma, o item (c) nos infere que $V_4(N) \geq \frac{8}{9}\pi^2$. Tendo essa limitação sobre o volume de uma variedade Einstein nosso argumento segue do Teorema de Gursky ([39], cf. descrição no Teorema 4.2), pelo qual concluímos que $V_4(N) = \frac{8}{3}\pi^2$. Isto é suficiente para concluir que (M^3, g) é isométrica ao hemisfério munido de sua métrica padrão $(\mathbb{S}^3_+, g_{st})$. $\square$

Como já salientamos anteriormente, nosso método propõe uma nova visão quanto à generalização de resultados de pinching para dimensões altas. Desta forma, se consideramos dimensões mais altas, também podemos obter com o auxílio dos Lemas 3.4 e 3.5 alguns resultados para variedades estáticas e V-estáticas.

Teorema 3.1. *Considere (M^n, g) uma variedade Riemanniana V-estática positiva com curvatura escalar não negativa. Se*

$$|\overset{\circ}{Ric}_g|^2 \leq \frac{R_g^2}{n(n-1)}$$

então (M^n, g) tem curvatura de Ricci não negativa. Em particular ∂M é conexa. Se ∂M é simplesmente conexa, então M é simplesmente conexa.

Demonstração. Pela observação após o Lema 3.1, temos que $Ric_g \geq 0$. Utilizando o Lema 3.3 e o fato de ∂M ser totalmente umbílica (pois M é V-estática), concluímos que ∂M é conexa. Utilizando o Lema 3.5 e fato que $H > 0$ em ∂M (o que elimina a possibilidade (ii)), concluímos da sobrejetividade do mapa $i_* : \Pi(\partial M) \longrightarrow \Pi(M)$ que, se ∂M é simplesmente conexa, então M é simplesmente conexa. $\square$

No mesmo espírito do realizado anteriormente, temos um teorema de rigidez para variedades estáticas de dimensão alta com a mesma condição de pinching no tensor de Ricci sem traço.

Teorema 3.3. *Considere (M^n, g) uma variedade estática com curvatura escalar positiva. Se*

$$|\overset{\circ}{Ric}_g|^2 \leq \frac{R_g^2}{n(n-1)}$$

então (M^n, g) tem curvatura de Ricci não negativa. Em particular, uma das seguintes possibilidades devem ocorrer:

(i) A aplicação $i_* : \Pi(\partial M) \to \Pi(M)$ é sobrejetora.

(ii) A variedade (M^n, g) é isométrica ao quociente de um cilindro.

3.2 A Identidade de Reilly e aplicações em métricas V-estáticas

Em [77], Reilly estabeleceu uma série de identidades integrais no espaço Euclideano que posteriormente foram extendidas por ele mesmo a variedades Riemannianas em [78]. No decorrer de nosso texto, já salientamos a importância e aplicabilidade em resultados de rigidez para Análise Geométrica de algumas identidades geométricas, como visto para a Identidade de Pohozǎev-Schöen no Capítulo 2.

A famosa Identidade de Reilly obtida em [78] nos afirma que dada uma variedade Riemanniana $(M, \langle,\rangle)$ com fronteira Σ e $u : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_M \left[(\Delta u)^2 - |D^2 u|^2\right] dVol &= \frac{1}{2}\int_M Ric(\nabla u, \nabla u) dV + \int_\Sigma \Delta_\Sigma u \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} dS \\ &+ \frac{1}{2}\int_\Sigma H \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 dS + \frac{1}{2}\int_\Sigma \langle \mathbb{II}(\nabla_\Sigma u, \nabla_\Sigma u)\rangle dS, \end{aligned}$$

onde ν é o campo normal exterior, $\mathbb{II}(\cdot,\cdot)$ e H são a Segunda Forma Fundamental e a curvatura média de Σ, respectivamente. Além disso, o indíce Σ sob ∇ e Δ indica que estamos considerando estes entes intrinsecamente a Σ.

Esta fórmula possui numerosas e frutuosas aplicações. Como exemplo, no supracitado trabalho [78], através da identidade acima, Reilly obteve um limite inferior ótimo para o primeiro autovalor de Lichnerowitz do Laplaciano em variedades com fronteira, demonstrando com isto um Teorema do tipo Obata para variedades com fronteira (cf. Teorema 1.4). Outra aplicação foi reobter o Teorema de Alexandrov para hiperfícies mergulhadas em $\mathbb{R}^n$, cuja curvatura média da fronteira é constante (cf. Teorema 5 em [78]). Outras aplicações desta identidade podem ser vistas em [24], [73] e [80]. Salientamos ainda que tal identidade já foi algumas vezes utilizada em nosso próprio texto como ferramenta primordial à resolução de problemas para variedades com curvatura de Ricci limitada inferiormente(cf. os Teoremas 2.9, 2.10 e o Lema 3.3).

A gama de latentes aplicações da Identidade de Reilly também inspira atualmente algumas extensões da mesma como finalidade de obter novos resultados do tipo Alexandrov ([76] e [61]) e aplicações em desigualdades e resultados de rigidez para variedades estáticas([55], [61] e [21]).

Ao decorrer desta seção, vamos recorrer a um recente trabalho de LI e Xia([61]) na obtenção de uma identidade do tipo Reilly. A partir desta identidade, vamos estender resultados obtidos por [55] e [61] em variedades estáticas para o caso de variedades V-estáticas.

3.2.1 Uma Identidade de Reilly generalizada

A partir de agora, descreveremos uma fórmula Integral que generaliza a Fórmula de Reilly. Como já retratado, a Fórmula de Reilly (3.4) é particularmente utilizada na literatura em problemas que pressupõem uma hipótese de curvatura de Ricci não-negativa. Ao restante dos casos, a fórmula não possui grandes avanços e, desta forma, inspira a generalizações para sua utilidade. Trabalhos a esta direção atendem a obtenção de novas fórmulas do tipo Reilly para conseguir novas aplicações em variedades com curvatura negativa como feito, por exemplo, em [76], [61], [55], [66], [21], entre outros.

A seguir, retrataremos uma generalização da Fórmula de Reilly obtida muito recentemente por [61], donde advém-se como casos particulares importantes aplicações para as seções posteriores.

Teorema 3.4 ([61]). *Considere (M, g) uma variedade Riemanniana n-dimensional e $\Omega \subset M$ um domínio limitado com fronteira suave Σ. Considere P_{ij} um 2-tensor simétrico e suave em Ω, e denote por P seu traço com respeito à métrica g. Defina o 2-tensor $A_{ij}(f) := (D^2 f)_{ij} + \frac{1}{n-1} P f g_{ij} - f P_{ij}$ e seu traço com respeito à métrica g, $A(f) = \Delta f + \frac{P}{n-1} f$. Então, para quaisquer funções suaves V, $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ocorre a identidade*

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega V[A(f)^2 - |A_{ij}(f)|^2] \\
= &\int_\Sigma V\mathbb{II}(\nabla_\Sigma z, \nabla_\Sigma z) + 2Vu\Delta_\Sigma z + VHu^2 + \frac{\partial V}{\partial \nu}|\nabla_\Sigma z|^2 \\
&+ \int_\Sigma 2Vzf_{,i}P_{i\nu} - z^2 V_{,i}P_{i\nu} - z^2 VP_{\nu i,i} \\
&+ \int_\Omega [(V_{,ij} - \Delta V g_{ij} - VP_{ij}) + V(R_{ij} - P_{ij})]f_{,i}f_{,j} \\
&+ \int_\Omega \left[P_{ij}\left(V_{,ij} + \frac{1}{n-1}PVg_{ij} - VP_{ij}\right) + VP_{ij,ji} + 2V_{,i}P_{ij,j}\right] f^2.
\end{aligned}
$$

Aqui, ν é o campo normal exterior, $z = f|_\Sigma$, $u = \nabla_\nu f$, $\mathbb{II}(\cdot,\cdot)$ e H são a Segunda Forma Fundamental e a curvatura média de Σ, respectivamente. O indíce Σ sob ∇ e Δ indica que estamos considerando estes entes intrisecamente a Σ.

O teorema anterior é uma clara extensão da Identidade de Reilly, pois se consideramos $P_{ij} = 0$ e $V \equiv 1$, reobtemos a Identidade de Reilly clássica. Também como um caso particular do Teorema 3.4, obtemos uma identidade do tipo Reilly que utilizaremos na subseção a seguir e já foi vastamente aplicada nos trabalhos [55] e [76].

Corolário 3.1. *Considere (M, g) uma variedade Riemanniana compacta n-dimensional com fronteira Σ. Dadas duas funções f, V em M e uma constante K, temos*

$$
\begin{aligned}
&\int_M V\left[(\Delta f + Knf)^2 - |D^2 f + Kfg|^2\right] \\
= &\int_M [D^2V - (\Delta V)g - 2(n-1)KVg + VRic](\nabla f, \nabla f)d\Omega \\
&+(n-1)K\int_M (\Delta V + nKV)f^2 + \int_\Sigma V_{,\nu}[|\nabla_\Sigma f|^2 - (n-1)Kf^2]d\sigma \\
&+ \int_\Sigma V\left[2f_{,\nu}\Delta_\Sigma f + H(f_{,\nu})^2 + \mathbb{II}(\nabla_\Sigma f, \nabla_\Sigma f) + 2(n-1)Kf_{,\nu}f\right]d\sigma
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Demonstração. Basta considerar $P_{ij} = (n-1)Kg_{ij}$ no Teorema 3.4. $\square$

3.2.2 Uma desigualdade integral sobre a fronteira de variedades V-estáticas

Em [66], Miao, Tam e Xie, demonstraram uma desigualdade integral para a fronteira de domínios limitados contidos no espaço Euclideano $\mathbb{R}^n$ que tem aplicações importantes (para o caso $n = 3$) na Teoria de estabilidade da Energia de Wang-Yau. De fato, eles obtiveram o seguinte resultado (cf. Corolário 3.1 em [66]):

Teorema 3.5 ([66]). *Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira suave Σ. Considere H e $\mathbb{II}$ a curvatura média e a segunda forma fundamental de Σ com respeito ao vetor normal exterior, respectivamente. Se $H > 0$, então*

$$\int_\Sigma \left[\frac{(\Delta_\Sigma \eta)^2}{H} - \mathbb{II}(\nabla_\Sigma \eta, \nabla_\Sigma \eta)\right] d\sigma \geq 0, \tag{3.5}$$

para qualquer função suave η definida em Σ. Acima, denotamos ∇_Σ e Δ_Σ o gradiente e o laplaciano intrísecos a Σ, respectivamente. Além disso, a igualdade em (3.5) ocorre se, e somente se, $\eta = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i$ para constantes reais $a_0, a_1, \dots, a_n$ e $\{x_1, \dots, x_n\}$ denotam as funções coordenadas em $\mathbb{R}^n$.

De fato, quando $n = 3$ e Σ é convexo, os autores ([66]) mostram que o funcional ao lado esquerdo da desigualdade (3.5) representa a segunda variação ao longo de η da Energia quasi-local de Wang-Yau sobre a superfície Σ e, desta forma, a desigualdade obtida no problema pode ser interpretada como uma desigualdade de estabilidade para energia de Wang-Yau em Σ.

Em [55], Kwong e Miao adotaram um ponto de vista mais geométrico ao considerar uma desigualdade sobre a fronteira de variedades Riemannianas compactas cujas métricas são estáticas. De fato, eles generalizam o Teorema 3.5 ao caso de hiperfícies que são a fronteira de um domínio limitado contido numa forma espacial. Um ponto forte a observar neste Teorema é a utilização da fórmula do tipo Reilly apresentada no Corolário 3.1, que pressupõe sua utilização a uma hipótese mais fraca de curvatura de Ricci limitada por baixo, a deriva da utilização da fórmula clássica.

A seguir, inspirados nos trabalhos supracitados, realizamos o mesmo escopo das ideias e aplicações da Identidade de Reilly como forma de obter novos resultados para o caso de variedades V-estáticas.

Teorema 3.6. *Considere (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta e V-estática com fronteira Σ e potencial V-estático não-negativo λ, tal que $Ric_g \geq (n-1)kg$ para alguma constante $k \leq 0$. Se $H > 0$ em Σ, então temos a seguinte desigualdade integral* *sobre* Σ

$$\int_\Sigma \lambda \left[\frac{[\Delta_\Sigma \eta + (n-1)k\eta^2]}{H} - \mathbb{II}(\nabla_\Sigma \eta, \nabla_\Sigma \eta) \right] d\sigma \geq \int_\Sigma \lambda_{,\nu} [|\nabla_\Sigma \eta|^2 - (n-1)k\eta^2] d\sigma, \quad (3.6)$$

para qualquer função η *em* Σ*. Além disso, a igualdade em (3.6) ocorre se, e somente se, ocorre uma das opções*

(i) $k = 0$ *e* η *é a restrição a* Σ *de uma função* u *em* (M, g) *satisfazendo que* $D^2u = 0$*. ou*

(ii) $k < 0$ *e* g *é uma métrica Einstein com* $Ric_g = (n-1)kg$*, e* η *é a restrição a* Σ *de uma função* u *definida em* (M, g) *satisfazendo que* $D^2u + kug = 0$*.*

Demonstração. Como $k \leq 0$, segue da teoria de existência de soluções clássicas para equações elípticas que existe uma única solução u do seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u + nku = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \eta & \text{on } \Sigma. \end{cases}$$

Como g é uma métrica $V-$estática com potencial V-estático λ, temos

$$\Delta\lambda + \frac{R_g}{n-1}\lambda + \frac{n}{n-1} = 0$$

Substituindo $V = \lambda$, $f = u$ e $K = k$ no Corolário 3.1, utilizamos a identidade acima, a equação V-estática e que u é uma solução do Problema de Dirichlet acima para inferir que

$$
\begin{aligned}
& -\int_M \lambda|D^2u+kug|^2dV \\
= & \int_M |\nabla u|^2dV+2\int_M \lambda-(n-1)kg](\nabla u,\nabla u)dV \\
& +k(kn(n-1)-R_g)\int_M \lambda u^2-kn\int_M u^2 \\
& +\int_\Sigma \lambda_{,\nu}[|\nabla_\Sigma\eta|^2-(n-1)k\eta^2]d\sigma \\
& +\int_\Sigma \lambda\left[2u_{,\nu}\Delta_\Sigma\eta+H(u_{,\nu})^2+\mathbb{II}(\nabla_\Sigma\eta,\nabla_\Sigma\eta)+2(n-1)ku_{,\nu}\eta\right]d\sigma \\
\geq & \int_\Sigma \lambda_{,\nu}[|\nabla_\Sigma\eta|^2-(n-1)k\eta^2]d\sigma \\
& +\int_\Sigma \lambda\left[2u_{,\nu}\Delta_\Sigma\eta+H(u_{,\nu})^2+\mathbb{II}(\nabla_\Sigma\eta,\nabla_\Sigma\eta)+2(n-1)ku_{,\nu}\eta\right]d\sigma
\end{aligned}
$$

onde utilizamos que $\lambda>0$, $Ric)g\geq k(n-1)g$, $R_g\geq n(n-1)k$, e $k\leq 0$. Então,

$$
\begin{aligned}
& \int_\Sigma \lambda\left[\frac{(\Delta_\Sigma\eta+(n-1)k\eta)^2}{H}-\mathbb{II}(\nabla_\Sigma\eta,\nabla_\Sigma\eta)\right]d\sigma \\
\geq & \int_M \lambda|D^2u+kug|^2dV+\int_\Sigma \lambda_{,\nu}[|\nabla_\Sigma\eta|^2-(n-1)k\eta^2]d\sigma \qquad (3.7)\\
& \int_\Sigma \lambda\left[\sqrt{H}u_{,\nu}+\frac{\Delta_\Sigma\eta+(n-1)k\eta}{\sqrt{H}}\right]^2 d\sigma.
\end{aligned}
$$

Portanto, obtemos que

$$
\begin{aligned}
& \int_\Sigma \lambda\left[\frac{(\Delta_\Sigma\eta+(n-1)k\eta)^2}{H}-\mathbb{II}(\nabla_\Sigma\eta,\nabla_\Sigma\eta)\right]d\sigma \\
\geq & \int_\Sigma \lambda_{,\nu}[|\nabla_\Sigma\eta|^2-(n-1)k\eta^2]d\sigma. \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

Além disso, segue das desigualdades utilizadas acima que se ocorre a igualdade em (3.6), então

$$k[kn(n-1)-R_g]=0, \tag{3.9}$$

$$D^2u+kug=0, \tag{3.10}$$

e

$$Hu_{,\nu} + \Delta_\Sigma \eta + (n-1)k\eta = 0. \tag{3.11}$$

Segue de (3.9) que $k = 0$ ou $R_g = kn(n-1)$.

(i) Se $k = 0$, segue de (3.10) que $D^2 u = 0$;

(ii) Se $k < 0$, então $R_g = kn(n-1)$. Isto, unido a hipótese que $Ric_g \geq (n-1)kg$, implica que $Ric_g = (n-1)kg$. Portanto, M é Einstein e concluímos as assertivas de nosso Teorema.

□

Corolário 3.2. *Suponha que, em adição às hipóteses do Teorema 3.6, temos que M é uma variedade Einstein com $Ric_g = (n-1)kg$. Então, mesmo sem condições sobre o sinal de k, as mesmas assertivas do Teorema 3.6 ocorrem.*

Demonstração. Basta observar que utilizamos a não negatividade de k no Teorema acima apenas para demonstrar a existência de uma solução de uma EDP e na desigualdade que $k[n(n-1)k - R_g] \geq 0$. Se M é Einstein já temos que $k[n(n-1)k - R_g] = 0$. Além disso, segue do Teorema de Reilly(cf. Teorema 1.4) que a solução da EDP do Teorema anterior ainda existe para $k > 0$. □

Teorema 3.7. *Suponha que $(\tilde{M}, \tilde{g})$ é uma bola geodésica de raio $\tilde{r}$ numa forma espacial (M, g), a dizer $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$ munidas com suas métricas padrão. Considere λ como sendo uma função positiva em $\tilde{M}$ dada por*

$$\lambda(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(n-1)}\tilde{r}^2 - \frac{1}{2(n-1)}|x|^2, & se \quad M = \mathbb{R}^n \\ \frac{1}{n-1}\left(\frac{\cos r}{\cos \tilde{r}} - 1\right), & se \quad M = \mathbb{S}^n \\ \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{\cosh r}{\cosh \tilde{r}}\right), & se \quad M = \mathbb{H}^n \end{cases}$$

onde r é a distâcia geodésica em $\mathbb{S}^n$ de x ao polo norte se $M = \mathbb{S}^n$, e onde r é a distâcia geodésica em $\mathbb{H}^n$ de x ao ponto $(0, 0, \ldots, 1)$ se $M = \mathbb{H}^n$. Seja $\Omega \subset \tilde{M}$ um domínio limitado com fronteira suave Σ. Se $H > 0$ em Σ, então dada qualquer função suave η em Σ, temos a desgualdade

$$\int_\Sigma \lambda \left[\frac{[\Delta_\Sigma \eta + (n-1)k\eta^2]}{H} - \mathbb{II}(\nabla_\Sigma \eta, \nabla_\Sigma \eta) \right] d\sigma \geq \int_\Sigma \lambda_{,\nu} [|\nabla_\Sigma \eta|^2 - (n-1)k\eta^2] d\sigma, \tag{3.12}$$

onde k é a curvatura seccional de $(\tilde{M}, \tilde{g})$.

Demonstração. Basta observamos que cada função positiva λ como definida no enunciado é um potencial V-estático em cada uma das respectivas variedades V-estáticas colocadas e, notando que cada uma destas é Einstein, utilizamos o corolário 3.2. $\square$

Capítulo

4

Alguns Avanços em Variedades Estáticas de Dimensão Alta

Considere (M^n, g) uma variedade estática com potencial estático f, isto é, f é uma função positiva tal que $f^{-1}(0) = \partial M$ e é solução do seguinte Problema Sobredeterminado

$$fRic_g + (\Delta f)g - D^2 f = 0, \tag{4.1}$$

em M. É possível obter uma variedade Einstein associada a M, construída de forma intuitiva através da rotação de M ao redor de ∂M. Precisamente falando, considere U uma vizinhança tubular de ∂M difeomorfa a $[0, 1) \times \partial M$. Se $p \in U$, identificamos $p = (r, x) \in [0, 1) \times \partial M$. Denotando por B_1 a bola aberta centrada na origem de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{S}^1$ o círculo unitário, definimos uma $(n + 1)$-variedade N pelo conjunto quociente

$$((\mathbb{S}^1 \times (M \setminus \partial M)) \cup (B_1 \times \partial M)/ \sim,$$

onde foi considerada a relação de equivalência $\sim$ que identifica $(\theta, p) \in (\mathbb{S}^1 \times (U \setminus \partial M))$ com $(r \cos\theta, r \sin\theta, x) \in (B_1\setminus\{0\})\times\partial M$. Dessa forma, N tem uma estrutura de variedade suave e podemos identificar $\{0\} \times \partial M = \partial M$ como uma subvariedade de codimensão 2 de N. Esta construção foi abordada no recente trabalho de L. Ambrozio ([3]). Como f é uma função positiva em $M\setminus\partial M$, podemos definir uma métrica suave em $N\setminus\partial M$(que está identificado com $\mathbb{S}^1 \times (M \setminus \partial M)$) por $h = f^2 d\theta^2 + g$, onde f é o potencial estático de M, e g é a sua métrica. Lembrando que M possui curvatura escalar constante $R_g = \varepsilon n(n - 1)$ (após normalização), com $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$, podemos enxergar $N \setminus \partial M$ como um produto warped e através de uma computação direta para produtos warped(confira, por exemplo, a Proposição 9.106 na página 266 de [10]) podemos inferir que $Ric_h = \varepsilon nh$.

Existem aplicações muito relevantes desta construção, como, por exemplo, N é simplesmente conexa se, e somente se, M e ∂M são simplesmente conexas(via Teorema de Van-Kampf). Além disso, se consideramos Σ_i, $1 \leq i \leq l$ as componentes conexas de $\Sigma = \partial M$, segue que se $\kappa_i = |\nabla f||_{\Sigma_i} = 1$, $\forall i$, então é possível estender suavemente a métrica h para todo N (este é um caso particular que será tratado, por exemplo, na Seção 4.3 de nosso texto). Para um robusto trato destas afirmações, consulte [3].

Considerando a variedade Einstein associada (N^{n+1}, h) a uma variedade estática (M^n, g) compacta e orientada com curvatura escalar positiva $R_g = n(n-1)$, uma importante relação entre os elementos de volumes das métricas h e g pode ser obtido. De fato, pela construção, segue que o elemento de volume de h é dado por $d\mu_h = fd\theta \wedge d\mu_g$. Utilizando o Teorema de Fubini e a equação de estaticidade, temos

$$
\begin{aligned}
Vol(N) = \int_0^{2\pi}\int_M f d\mu_h &= -\frac{2\pi}{n}\int_M \Delta f d\mu_g \\
&= \frac{2\pi}{n}\int_{\partial M} g\left(\nabla f, \frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right) d\sigma_g = \frac{2\pi}{n}\sum_{i=1}^{l} Vol(\partial_i M),
\end{aligned}
$$

onde l é o número de componentes conexas de ∂M.

O caso $n = 3$ ainda indica uma observação importante. De fato, se consideramos N^4 orientada, é possível definir W como o endomorfismo de Weyl no espaço das 2-formas e considerar a decomposição usual $W = W^+ + W^-$. Novamente utilizando a construção de M, pode ser mostrado que

$$
|W^+|_h^2 = |W^-|_h^2 = |\overset{o}{Ric}_g|_g^2.
$$

Em particular, isto implica que a assinatura de N, $\sigma(N)$, se anula.

A seguir, utilizando a construção da variedade Einstein associada, obtemos um interessante resultado de gap sobre o volume. Nossa demonstração é inspirada nas ideias de Aviles e Escobar ([5]) as quais utilizam elementos da teoria de convergência de métricas.

Teorema 4.1. *Considere (M^n, g) uma variedade Riemanniana orientável e estática com curvatura escalar positiva e variedade Einstein associada (N^{n+1}, h). Existe um $\varepsilon(n) > 0$ tal que se $Vol(\partial M) > Vol(\mathbb{S}^{n-1}) - \varepsilon(n)$ então (N, h) é isométrica a $(n+1)$-esfera canônica $(\mathbb{S}^{n+1}, g_{st})$.*

Demonstração. Como já abordado, o volume das variedades N e M satisfazem a seguinte relação $Vol(N) = \frac{2\pi}{n} Vol(\partial M)$. Além disso, relembramos que existe uma importante relação de recorrência entre volumes de esferas dada por $Vol(\mathbb{S}^{n+1}) = \frac{2\pi}{n}Vol(\mathbb{S}^{n-1})$. Unindo estes fatos, demonstrar a assertiva de nosso teorema é equivalente a demontrar que existe um $\varepsilon'(n) > 0$ tal que se $Vol(N) > Vol(\mathbb{S}^n) - \varepsilon'(n)$ então (N, h) é isométrica a $(n+1)$-esfera canônica $(\mathbb{S}^{n+1}, g_{st})$. Suponha que isto é falso. Então existe uma sequência de variedades Einstein (N_i^{n+1}, h_i) que não são isométricas à $(n+1)$-esfera canônica $(\mathbb{S}^{n+1}, g_{st})$ e $Vol(N_i)$ converge a $Vol(\mathbb{S}^{n+1})$ quando $i \to \infty$. Neste ponto, usaremos um argumento de convergência de métricas devido a M. Anderson ([4], Theorem 1.1) para ver que a sequência (N_i^{n+1}, h_i) converge a uma variedade Riemanniana (N, h) que é isométrica à $(\mathbb{S}^{n+1}, g_{st})$. Isto será uma contradição ao fato que a métrica canônica na esfera (a menos de difeomorfismos) é uma métrica de Einstein isolada. No que segue, descreveremos o argumento de convergência.

Pela prova do Teorema 1.2 em [4], temos que $r_h(N_i) \geq r_0 > 0$, onde r_h é o raio harmônico. Então, após normalizarmos a métrica, temos que $Ric_{h_i} = (n-1)h_i$. Desta forma, temos uma sequência de variedades compactas (N_i, h_i) com limites uniformes na curvatura de Ricci, no raio harmônico e no diâmetro (pelo Teorema de Bonnet-Myers). Isto implica por um resultado de compacidade em [4](cf. Teorema 1.1), que uma subsequência de (N_i, h_i) converge, na topologia $C^{1,\alpha}$, a uma variedade suave (N, h), onde h é uma métrica $C^{1,\alpha}$. Além disso, para i suficientemente grande, as variedades N_i são difeomorfas a N, de forma que podemos assumir que as métricas h_i estão definidas em N, para i grande. A métrica h, que será um limite de métricas Einstein, é uma solução fraca $C^{1,\alpha}$ da equação de Einstein $Ric_h = (n-1)h$. Portanto, da teoria de Regularidade para equações elíticas, temos que h é suave. Além disso, $Vol(N) = Vol(\mathbb{S}^{n+1})$. Utilizando o Teorema de Comparação de Bishop, concluímos que(N, h) é isométrica a $(\mathbb{S}^{n+1}, g_{st})$ o que, como já adiantamos, é uma contradição. $\square$

A tônica deste capítulo será, como o inspirado acima, desenvolver novos resultados de gap e rigidez em dimensões altas para variedades Einstein. Parametrando as nossas discussões, vamos melhorar e estender a dimensões altas alguns resultados de H. Seshadri [82] para variedades Einstein com uma $\mathbb{S}^1$-ação isométrica estática (cf. Definição 4.1). Na primeira seção, comentaremos sobre um teorema obtido por Gursky em [39] a ser aplicado posteriormente, e trataremos a novos resultados de gap obtidos a partir do mesmo na esfera de dimensão 4 e no espaço projetivo $\mathbb{C}P^2$. A última seção deste trabalho é devotada à extensão dos resultados de H. Seshadri para dimensões altas. Em particular, sob hipóteses de limitação da curvatura escalar no bordo da variedade estática M, obtemos um resultado de rigidez para o caso onde a fronteira ∂M é conexa e, no caso onde ∂M é desconexa, a partir de resultados de existência de mínimas estáveis, demonstraremos a existência de uma hiperfície quase-Einstein mergulhada em M.

4.1 Um teorema de Gursky - aplicações e um resultado de gap na 4-esfera

O estudo de variedades Einstein permeia um conhecimento central na Geometria Riemanniana moderna. Em dimensão 4, o mais simples exemplo de variedades Einstein são $\mathbb{S}^4$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ munidos de suas métricas padrão. Outros exemplos de métricas Einstein 4-dimensionais são as somas conexas $\mathbb{C}P^2 \# k\overline{\mathbb{C}P}^2$.

O problema de classificar as variedades Einstein encontra um gama de emprego de esforços ao longo dos tempos. Em particular, o caso 4-dimensional deste problema inspira algumas notáveis observações devido à algumas propriedades notáveis. Para uma discussão pertinente deste assunto, recomendamos o excelente paper de C. Lebrun [58]. Como exemplo, se M^4 é uma 4-variedade Riemanniana orientada, o fibrado das 2-formas se decompõe invariantemente como $\Lambda = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$ onde, se nós consideramos o $*$-operador de De Hodge, Λ^2_+ e Λ^2_- são os autoespaços associados aos autovalores 1 e -1, respectivamente. Isto permite diagonilzar a matriz que representa a Curvatura de Weyl W como

$$\begin{pmatrix} W^+ & 0 \\ 0 & W^-. \end{pmatrix}$$

Além do mais, se consideramos $\sigma(M)$ a assinatura de Hirzebauch definida por

$$\sigma(M) = \frac{1}{12\pi^2}\int_M (|W^+|^2 - |W^-|^2) d\mu_g,$$

além da Fórmula de Gauss-Bonnet-Chern em dimensão 4, nós podemos obter uma estimativa do volume de uma 4- dimensional variedade Einstein:

$$Vol(g) \leq \frac{2}{3}\pi^2 \left(2\chi(M^4) - 3|\sigma(M^4)|\right), \tag{4.2}$$

onde $\chi(M)$ é a característica de Euler de M.

Em [39], M. Gursky demonstra, entre outros resultados, um interessante resultado de rigidez que, a um certo sentido, pode ser visto como um melhoramento de (4.2):

Teorema 4.2 (M. Gursky, [39]). *Considere (M^4, g) uma variedade fechada, compacta, orientada e Einstein, normalizada de tal forma que $Ric_g = 3g$. Então, uma das seguintes (e mutuamente exclusivas) possibilidades deve ocorrer*

(i) (M^4, g) é isométrico a $(\mathbb{S}^4, g_{st})$, onde g_{st} é a métrica canônica.

(ii) (M^4, g) é uma variedade Kähler, ou é o quociente de uma variedade Kähler por uma

involução livre, isométrica e anti-holomorfa. Além disso, quando dada a orientação natural, temos

$$Vol(g) = \frac{2}{9}\pi^2(2\chi(M^4) + 3\sigma(M^4))$$

(iii) (M^4, g) *não é uma variedade Kähler e satisfaz*

$$Vol(g) < \frac{2}{9}\pi^2(2\chi(M^4) - 3|\sigma(M^4)|)$$

Uma aplicação muito bonita deste Teorema reside num considerável melhoramento de um resultado de rigidez obtido do famoso Teorema de Bishop. Lembre que, pelo Teorema de Bishop, se a esfera admite uma métrica Einstein positiva não isométrica à métrica canônica então, após normalização, o seu volume deve ser menor que o volume advindo da métrica canônica, isto é, menor que $\frac{8\pi^2}{3}$. A partir do Teorema 4.2, obtem-se um resultado de gap que melhora esta afirmação. Mais especificamente, M. Gursky obteve o seguinte resultado:

Teorema 4.3 (M. Gursky, [39])**.** *Suponha que* $\mathbb{S}^4$ *admite uma métrica Einstein positiva* g *que não é isométrica à métrica canônica da esfera* g_0*, e normalizada de forma que* $Ric_g = 3g$*. Então*

$$Vol_g(\mathbb{S}^4) < \frac{8\pi^2}{9}\,.$$

Seguindo o mesmo sentido das ideias, M. Gursky e C. Lebrun [40] demonstraram o seguinte resultado de gap considerando agora o espaço projetivo:

Teorema 4.4 (M. Gursky- C.Lebrum, [40])**.** *Suponha* $\mathbb{CP}_2$ *admite uma métrica Einstein e positiva* g *a qual não é isométrica à métrica canônica* g_1 *em* $\mathbb{CP}_2$*, e normalizada de forma que* $Ric_g = Ric_{g_1}$*. Então*

$$Vol_g(\mathbb{CP}_2) < \frac{1}{3}Vol_{g_1}(\mathbb{CP}_2)\,.$$

Além de resguardar a importância destes teoremas para aplicações posteriores, tomamos como objetivo desta seção conseguir um melhoramento dos mesmos. Como inspiração para a melhora que proporemos a seguir observe que, pelo Teorema 4.3, ao perturbar a métrica g_0 em $\mathbb{S}^4$, podemos construir variedades cujo volume continua próximo de $\frac{1}{3}$ do volume da esfera canônica unitária. A partir desta observação, usaremos algumas ideias de convergência que Aviles e Escobar utilizaram em [5], para melhorar o gap de uma consequência do Teorema de Bishop. Salientamos que um ingrediente chave para a nossa demonstração reside na convergência para a pertubação das métricas, o que será feito utilizando um Teorema de convergência para métricas de M. Anderson [4].

Uma importante relação entre o volume e o raio de injetividade é dada pelo famoso Teorema de Berger:

Teorema 4.5 (M. Berger, [9]). *Considere (M^n, g) uma variedade Riemanniana. Então*

$$Vol_g(M) \geq \omega_n \left(\frac{inj_g(M)}{\pi} \right)^n ,$$

onde $inj_g(M)$ denota o raio de injetividade de (M, g) e ω_n denota o volume da n-esfera canônica unitária.

Note que, unindo o Teorema 4.3 ao Teorema 4.5, podemos inferir que qualquer métrica Einstein g na esfera 4-dimensional $\mathbb{S}^4$ satisfazendo que $Ric_g = 3g$ e $inj_g(\mathbb{S}^4) \geq \frac{\pi}{\sqrt[4]{3}}$ é isométrica à métrica canônica. O resultado a seguir melhora suavemente a afirmação acima. Nossa prova será por contradição. Como veremos a seguir, se a conclusão não for verdadeira, será possível construir uma sequência de métricas Einstein em $\mathbb{S}^4$ as quais convergem à métrica canônica em $\mathbb{S}^4$. Como a métrica canônica é uma métrica de Einstein isolada em $\mathbb{S}^4$ a contradição ocorre. A hipótese sobre o raio de injetividade se torna importante devido a utilização de um resultado de compacidade para métricas por M. Anderson ([4]).

Teorema 4.6. *Existe um número universal i_0 tal que qualquer métrica g na esfera 4-dimensional $\mathbb{S}^4$ satisfazendo que $Ric_g = 3g$ e $inj_g(\mathbb{S}^4) \geq \frac{\pi}{\sqrt[4]{3}} - i_0$ é isométrica à métrica canônica.*

Demonstração. Assuma, por contradição, que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma métrica não canônica g_ε em $\mathbb{S}^4$ tal que $Ric_{g_\varepsilon} = 3g_\varepsilon$ e $inj_{g_\varepsilon}(\mathbb{S}^4) \geq \frac{\pi}{\sqrt[4]{3}} - \varepsilon$. Como g_ε é não canônica, segue do Teorema 4.3 que $\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^4, g_\varepsilon) < \frac{8}{9}\pi^2$. Portanto, utilizando o Teorema de Berger,

$$\frac{8}{9}\pi^2 - f(\varepsilon) \leq \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^4, g_\varepsilon) < \frac{8}{9}\pi^2,$$

onde $f(\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Desta forma, existe uma sequência de métricas não canônicas, Einstein, nas 4-variedades simplesmente conexas $(\mathbb{S}^4, h_i)$ com $Ric_{h_i} = 3h_i$. Tais métricas satisfazem que $diam_{h_i}(\mathbb{S}^4) \leq \pi$(pelo Teorema de Bonnet-Myers) e

$$Vol(\mathbb{S}^4, h_i) \to \frac{8}{9}\pi^2$$

quando i tende a ∞. Como temos limite uniforme para a curvatura de Ricci, para o diâmetro, convergência para o volume, e um limite inferior para o raio de injetividade, segue do Teorema 1.1 em [4] que uma subsequência converge, na topologia $C^{1,\alpha}$, a uma variedade $(\mathbb{S}^4, h)$ onde h é uma métrica Riemanniana $C^{1,\alpha}$. É fácil ver que a métrica h como sendo a métrica limite de métrica Einstein é uma solução $C^{1,\alpha}$ fraca da equação de Einstein $Ric_h = 3h$. A teoria de regularidade elíptica implica que h é suave. Além disso, $Vol(\mathbb{S}^4, h) = \frac{8}{9}\pi^2$. Isto é uma contradição visto o Teorema 4.3. □

Assumindo uma condição de curvatura seccional positiva, nós podemos dar uma nova versão deste Teorema com hipótese apenas sobre o volume.

Teorema 4.7. *Existe um $\varepsilon > 0$ universal tal que qualquer métrica g na esfera 4-dimensional $\mathbb{S}^4$ com curvatura seccional não negativa, $Ric_g = 3g$ e $\frac{8}{9}\pi^2 - \varepsilon \leq Vol(\mathbb{S}^4, g)$ é isométrica à esfera munida de sua métrica canônica.*

Demonstração. Como $Ric_g = 3g$, segue da definição de curvatura de Ricci e do fato que $\mathbb{S}^4$ tem curvatura seccional não negativa que $0 \leq K(P) \leq 3$. Por outro lado, o Teorema de Gursky-Leblum's [40] nos dá que

$$Vol(\mathbb{S}^4, h) \geq \frac{8}{15}\pi^2 .$$

□

Fica da mesma forma salutar que, utilizando-se o mesmo sentido das ideias, é possível obter novos resultados considerando o espaço projetivo $\mathbb{CP}_2$:

Teorema 4.8. *Existe um número universal i_0 tal que qualquer métrica g sobre a 4-variedade $\mathbb{CP}_2$ satisfazendo que $Ric_g = Ric_{g_1}$ e $inj_g(\mathbb{CP}_2) \geq \frac{\pi}{\sqrt[4]{3}} - i_0$ é isométrica a métrica canônica g_1.*

Teorema 4.9. *Existe um $\varepsilon > 0$ universal tal que para qualquer métrica g sobre a 4-variedade $\mathbb{CP}_2$ se g possui curvatura seccional não negativa, $Ric_g = Ric_{g_1}$ e $\frac{8}{9}\pi^2 - \varepsilon \leq Vol(\mathbb{CP}_2)$, então g é isométrica a métrica canônica g_1.*

4.2 Sobre $\mathbb{S}^1$-ações estáticas em variedades Einstein $(n+1)$-dimensionais

Em [82], H. Seshadri descreve uma ideia correlata e particular à definição de variedade estática tridimensional, encontrando um caminho a certo ponto oposto do descrito ao início deste capítulo. De fato, H. Seshadri considera a seguinte definição (onde aqui consideramos uma dimensão qualquer):

Definição 4.1. *Uma variedade (N^{n+1}, h) será chamada **Einstein estática** se for uma variedade Einstein munida de uma $\mathbb{S}^1$-ação isométrica satisfazendo as condições*

(i) A $\mathbb{S}^1$-ação é semi-livre (isto significa que para todo $x \in N$, o subgrupo estabilizador $Stb(x) = \{y \in \mathbb{S}^1; yx = x\}$ é a identidade ou o grupo inteiro $\mathbb{S}^1$)

(ii) Se $F = \{x \in N; gx = x, \forall g \in \mathbb{S}^1\}$ é o conjunto dos pontos fixos da $\mathbb{S}^1$-ação, existe uma isometria

$$\Phi : (N \setminus F, h) \longrightarrow (U \times \mathbb{S}^1, g + f^2 d\theta^2),$$

onde (U, g) é uma n-variedade Riemanniana, $(\mathbb{S}^1, d\theta^2)$ é o círculo unitário munido da métrica induzida e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave e positiva.

A ação sobre N será denominada uma $\mathbb{S}^1$-ação estática. Salientamos que o artigo [82] propõe, entre outros interesses, o estudo deste tipo especial de variedade estática em dimensão $n = 3$, seguindo os quais, obtém-se resultados de rigidez sob condições de curvatura no conjunto dos pontos fixos F. De fato, o reuso do termo estática advém de que a variedade M é estática segundo a definição formalmente utilizada.

No que segue, abordaremos dois exemplos importantes de variedades Einstein estáticas construídos por H. Seshadri em [82].

(a) Considere o seguinte conjunto quociente

$$N = \frac{\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1}{\sim}, \quad h = dt^2 + \operatorname{sen}^2(t) g_{\mathbb{S}^{n-1}} + \cos^2(t) d\theta^2,$$

onde as classes de equivalência são dadas por $\{0\} \times \mathbb{S}^{n-1} \times \{y\}$, $\left\{\frac{\pi}{2}\right\} \times \{x\} \times \mathbb{S}^1$ e $\left\{(t, x, y), t \neq 0, \frac{\pi}{2}\right\}$. (N, h) é claramente isométrica a $(\mathbb{S}^{n+1}, g_{\mathbb{S}^{n+1}})$, sendo a isometria dada por $(t, x, y) \mapsto (\operatorname{sen}(t)x, \cos(t)y)$. Considere a $\mathbb{S}^1$-ação em N dada pela rotação no último fator. Desta forma, veremos que o conjunto dos pontos fixos da $\mathbb{S}^1$-ação será $F = \frac{\left\{\frac{\pi}{2}\right\} \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1}{\sim}$. Além disso,

$$(N \setminus F, h) = \left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1, dt^2 + \operatorname{sen}^2(t) g_{\mathbb{S}^{n-1}} + \cos^2(t) d\theta^2\right)$$

Desta forma, vemos que (N, h), e portanto $(\mathbb{S}^{n+1}, g_{\mathbb{S}^{n+1}})$, é uma variedade estática. Observe também que, neste caso, o conjunto dos pontos fixos F é isométrico à esfera $(\mathbb{S}^{n-1}, g_{\mathbb{S}^{n-1}})$.

(b) Considere o conjunto quociente

$$N = \frac{[0,\pi] \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1}{\sim}, \quad h = dt^2 + g_{\mathbb{S}^{n-1}} + \sin^2(t)d\theta^2,$$

que é isométrico à $N = (\mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{S}^2, g_{\mathbb{S}^{n-2}} \times g_{\mathbb{S}^2})$. Acima, consideramos as classes de equivalência $\{0\} \times \{x\} \times \mathbb{S}^1$, $\{\pi\} \times \{x\} \times \mathbb{S}^1$ e $\{(t,x,y), t \neq 0, \pi\}$. A isometria dá-se ao enviar $(t,x,y) \in N$ a $(x, \cos(t), \text{sen}(t)y) \in \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. A $\mathbb{S}^1$-ação em N será dada pela rotação no último fator. O conjunto dos pontos fixos da ação será

$$F = \frac{\{0\} \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1 \cup \{\pi\} \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1}{\sim}.$$

A ação tomada será estática, pois

$$(N \setminus F, h) = ((0,\pi) \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1, dt^2 + +g_{\mathbb{S}^{n-1}} + \sin^2(t)d\theta^2).$$

Tais exemplos tornam-se importantes ao servir como modelos ao tratar alguns teoremas de rigidez propostos em [82].

A seguir, comentaremos algumas propriedades básicas advindas desta ação estática que recorrem em observações simples do caso $n = 3$ já abordado em [82].

Proposição 4.1 ([82]). *Considere (N,h) uma $(n+1)$-variedade Einstein estática que é isométrica à $(U \times S^1, g + u^2 d\theta^2)$ e F o conjunto dos pontos fixos da ação $\mathbb{S}^1$-estática (vide Definição 4.1). Considere M o completamento segundo a métrica g de (U,g). Temos as seguintes propriedades:*

(i) F é a união de subvariedades totalmente geodésicas de codimensão par de N. No caso de dimensão $n = 3$, F consiste de uma união de esferas $\mathbb{S}^2$;

(ii) M é uma n-variedade com fronteira, analítica e compacta com $\partial M = M \setminus U$;

(iii) A métrica g extende-se analiticamente à M;

(iv) A função f extende-se analiticamente à M.

(v) ∂M é isométrica ao conjunto dos pontos fixos da ação F e, além disso, $f = 0$ sobre ∂M e $|\nabla f| = 1$ sobre ∂M.

Como já adiantado, a variedade (M,g) obtida como completamento por g de (U,g), possui uma estrutura de variedade estática de curvatura escalar positiva, com as importantes propriedades adicionais de que $f^{-1}(0) = \partial M$ e $|\nabla f| = 1$ sobre ∂M (item (v) do teorema anterior). A proposição a seguir é uma observação ao fato de N ser vista como um produto warped:

Proposição 4.2. *Considere (N^{n+1}, h) uma variedade Einstein estática normalizada de tal forma que $Ric_h = nh$. Então a variedade (M, g) obtida da Proposição 4.1 satisfaz o seguinte problema sobredeterminado*

$$\begin{cases} \frac{D^2 f}{f} = & Ric_g - ng \\ \Delta f = & -nf \end{cases}$$

Demonstração. De fato, como $N = M \times_{f^2} \mathbb{S}^1$, segue de uma computação para produtos warped (ver Proposição 9.106 em [10]) que dados campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$ng(X,Y) = nh(X,Y) = Ric_h(X,Y) = Ric_g(X,Y) - \frac{1}{f}D^2 f(X,Y),$$

e, considerando ν vetor vertical e unitário em N,

$$n = Ric_h(\nu, \nu) = -\frac{1}{f}\Delta_g f.$$

□

Os principais resultados de H. Seshadri em [82] se devem a rigidez na classificação da variedade Einstein estática no caso $n = 3$ segundo condições de curvatura em F e, portanto, pela Proposição 4.1, condições de curvatura em ∂M. Em suma, os teoremas abaixo representam tais resultados

Teorema 4.10 ([82])**.** *Considere (N^4, h) uma variedade fechada, e Einstein estática. Então a curvatura Gaussiana de ∂M satisfaz $K(p) \geq 1$, para todo $p \in F$.*

Teorema 4.11 ([82])**.** *Considere (N^4, h) uma variedade fechada, simplesmente conexa e Einstein estática. Se a curvatura de Gauss $K = 1$ em todo ponto de ∂M, então (N^4, h) é isométrica à (S^4, g_{st}).*

Teorema 4.12 ([82])**.** *Considere (N^4, h) uma variedade fechada, simplesmente conexa e Einstein estática, normalizada de tal forma que $Ric_h = 3h$. Se $K \leq 3$ em todo ponto de ∂M, e ∂M tem mais de uma componente conexa, então (N^4, h) é isométrica ao produto $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2, g_{\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{3}})} \times g_{\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{3}})})$*

Andaremos ao sentido de buscar generalizações em dimensões altas para tais resultados, bem como inferir novas técnicas na demonstração dos mesmos.

4.2.1 Um resultado de rigidez em dimensão 3

Nesta seção apresentaremos uma aplicação do Teorema de Gursky (cf. Teorema 4.2) para inferir uma versão mais genérica do Teorema 4.11 em dimensão 3, bem como tomamos uma direção distinta à demonstração de [82].

Teorema 4.13. *Considere (N^4, h) uma variedade Riemanniana Einstein estática, fechada. e normalizada de forma que $Ric_h = 3h$. Considere (M^3, g) a variedade estática associada. Se $K \leq 3$ em ∂M, então (N^4, h) é isométrica a $(\mathbb{S}^4, g_0)$(caso ∂M seja conexa) ou (N^4, h) é isométrica a $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2, g_{st})$(caso ∂M tenha mais que uma componente conexa).*

Demonstração. Lembrando que as l componentes conexas de ∂M são esferas topológicas, segue do teorema de Gauss-Bonnet e das nossas hipóteses que

$$4\pi l = \sum_{i=1}^{l} \int_{\partial_i M} K dVol \quad \leq \quad 3 \sum_{i=1}^{l} Vol(\partial_i M) \tag{4.3}$$

Por outro lado, utilizando a descrição de comparação pelo Teorema de Fubini que descrevemos anteriormente, segue que $Vol(N) = \frac{2\pi}{3} \sum_{i=1}^{l} Vol(\partial_i M)$. Portanto,

$$Vol(N) \geq \frac{8\pi^2 l}{9} \tag{4.4}$$

Para finalizar a demonstração, concluiremos nossas assertivas utilizando o Teorema 4.2. Como $\chi(N) = 2l$ e $\sigma(N) = 0$, a opção (iii) do Teorema 4.3 não pode ocorrer. A opção (ii) implicará que a variedade N será isométrica a $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, $\mathbb{C}P^2$ ou $\mathbb{C}P^2 \# k\overline{\mathbb{C}P}^2)$, $3 \leq k \leq 8$. Como $\sigma(\mathbb{C}P^2) = 1$ e $\sigma(\mathbb{C}P^2 \# k\overline{\mathbb{C}P}^2) = 1 - k$, podemos descartar estas opções. Finalmente, como $\chi(\mathbb{S}^4) = 2$, $\chi(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2) = 4$ e $\chi(N) = 2l$, onde l é o número de componentes conexas de ∂M, nós concluímos nossa assertiva.

□

4.2.2 Resultados de rigidez sob uma limitação da curvatura escalar no bordo

A partir de agora, andaremos ao sentido de generalizar os resultados de [82] para dimensões altas. Começamos com um lema crucial aos encargos posteriores. No que segue, sempre consideramos (M, g) como a variedade estática associada a uma variedade Einstein estática (N, h) e cujas relevantes propriedades devem ser relembradas nas Proposições 4.1 e 4.2.

Lema 4.1. *Considere* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana estática, com fronteira* ∂M *e considere sua função potencial* $f : M \to [0, \infty)$ *de forma que* $f^{-1}(0) = \partial M$*. Isso significa que* g *e* f *satisfazem o seguinte problema sobredeterminado*

$$\begin{cases} \frac{D^2 f}{f} = & Ric_g - ng \\ \Delta f = & -nf. \end{cases}$$

Então, a função $\varphi = f^2 + |df|^2$ *não pode atingir seu máximo global em* ∂M*, a não ser que* φ *seja constante e, dessa forma,* M *seja uma variedade Einstein.*

Demonstração. Antes de mais nada lembre que, sobre ∂M, temos que $\varphi \equiv 1$.

Considerando a fórmula de Böchner-Weitzenböck e a equação estática, nós inferimos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|df|^2 &= |D^2 f|^2 - n|\nabla f|^2 + \mathrm{Ric}_g(\nabla f, \nabla f) \\ &= |D^2 f|^2 - n|\nabla f|^2 + \frac{D^2 f(\nabla f, \nabla f)}{f} + n|\nabla f|^2 \\ &= |D^2 f|^2 + \frac{1}{f}\langle \nabla_{\nabla f}\nabla f, \nabla f\rangle \\ &= |D^2 f|^2 + \frac{1}{2f}\nabla f(|\nabla f|^2) \\ &= |D^2 f|^2 + \frac{1}{2f}\langle \nabla f, \nabla |df|^2\rangle. \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\frac{1}{2} div\left(\frac{\nabla|df|^2}{f}\right) = \frac{\Delta|\nabla f|^2}{2f} - \frac{1}{2f^2}\langle \nabla|df|^2, \nabla f\rangle = \frac{|D^2 f|^2}{f}. \tag{4.5}$$

Utilizando novamente a equação de estaticidade, temos

$$\frac{1}{2}\Delta f^2 = f\Delta f + |df|^2 = -nf^2 + |df|^2,$$

e, portanto,

$$\frac{1}{2} div\left(\frac{\nabla f^2}{f}\right) = \frac{\Delta f^2}{2f} - \frac{1}{2f^2}\langle \nabla f^2, \nabla f\rangle = \frac{\Delta f^2}{2f} - \frac{1}{f}|\nabla f|^2 = \frac{-nf^2}{f}. \tag{4.6}$$

Considerando a definição de φ, somamos as equações (4.5) com (4.6), e temos

$$\frac{1}{2} div\left(\frac{\nabla \varphi}{f}\right) = \frac{1}{f}(|D^2 f|^2 - nf^2) \geq 0, \tag{4.7}$$

pois, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz e pela equação de estaticidade,

$$n^2f^2 = (\Delta f)^2 = |\langle D^2f, g\rangle|^2 \leq |D^2f|^2 n.$$

Pelo Princípio do máximo de Hopf, visto a desigualdade (4.7), concluímos que $\nabla\varphi$ atinge o máximo no interior de M, a não ser que seja contante. Caso φ atinja o máximo na fronteira, teremos que $\varphi = 1$ em M e, de (4.7), temos que $|D^2f|^2 = nf^2$ em M. Portanto,

$$n = \frac{|D^2f|^2}{f^2} = |Ric_g - ng|^2 = |Ric_g|^2 - 2n^2(n-1) + n^2 \Longrightarrow |Ric_g - (n-1)g|^2 = 0,$$

onde utilizamos que $R_g = n(n-1)$. Desta forma, concluímos que $Ric_g = (n-1)g$ em M e, por conseguinte, (M, g) é uma variedade Einstein. $\square$

Com a utilização do Lema anterior, demonstraremos nosso próximo resultado que é uma generalização do Teorema 4.10.

Teorema 4.14. *Considere (N^{n+1}, h) uma variedade fechada e Einstein estática. Então a curvatura escalar de ∂M satisfaz $R_g(p) \geq (n-1)(n-2)$, para todos pontos $p \in \partial M$.*

Demonstração. Considere a função $\varphi = f^2 + |df|^2$ previamente abordada no Lema anterior. Se φ atinge seu máximo no interior, segue do Lema 4.1 que M é uma variedade Einstein com $Ric_g = (n-1)g$. Lembrando que ∂M é uma subvariedade totalmente geodésica, a Equação de Gauss nos informa que

$$R^{\partial M} = R_g - 2Ric_g(\nu,\nu) = n(n-1) - 2(n-1) = (n-1)(n-2).$$

Agora, suponha que φ atinge seu máximo em ∂M. Considere $p \in \partial M$. Como f atinge seu mínimo em ∂M, e f e φ são constantes em ∂M, teremos que $\langle\nabla\varphi, \nabla f\rangle(x) \leq 0$, para todo x suficiente próximo de p. Consideramos o campo $\nu(x) = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}(x)$, o campo normal interior à hiperfície de nível $\Sigma^x = f^{-1}(f(x))$ em x. Em particular, $\nu(p)$ é o vetor normal interior a ∂M. Temos que

$$\begin{aligned}
0 \geq \langle\nabla\varphi, \nabla f\rangle(x) &= \langle 2f\nabla f + 2|\nabla f|\nabla|\nabla f|, \nabla f\rangle = 2f|\nabla f|^2 + 2|\nabla f|\langle\nabla|\nabla f|, \nabla f\rangle \\
&= 2f|\nabla f|^2\left(1 + \frac{\nu(|\nabla f|)}{f}\right) \\
&= 2f|\nabla f|^2\left(1 + \frac{\nu(\nu(f))}{f}\right),
\end{aligned}$$

onde, nas últimas identidades, utilizamos a definição de ν. Como $f > 0$ no interior de M, temos que

$$\frac{\nu(\nu(f))}{f} \leq -1 \tag{4.8}$$

Utilizando a definição de ν, temos

$$\nabla_\nu \nu(f) = |\nabla f|\langle \nabla_\nu \nu, \nu\rangle = \frac{1}{2}|\nabla f|\nu(|\nu|^2) = 0 \tag{4.9}$$

Unindo as equações (4.8), (4.9), a equação estática e a equação de Gauss, temos

$$\begin{aligned}
R_g^{\Sigma_x} &= n(n-1) - 2Ric_g(\nu(x),\nu(x)) - |\mathbb{II}^{\Sigma_x}|^2 + (H^{\Sigma_x})^2 \\
&= n(n-1) - 2n - 2\frac{D^2 f(\nu(x),\nu(x))}{f} - |\mathbb{II}^{\Sigma_x}|^2 + (H^{\Sigma_x})^2 \\
&= n(n-1) - 2n - 2\frac{\nu(\nu(f))}{f} - |\mathbb{II}^{\Sigma_x}|^2 + (H^{\Sigma_x})^2 \\
&\geq n(n-1) - 2n - 2 - |\mathbb{II}^{\Sigma_x}|^2 + (H^{\Sigma_x})^2 \\
&= (n-1)(n-2) - |\mathbb{II}^{\Sigma_x}|^2 + (H^{\Sigma_x})^2,
\end{aligned}$$

onde $R_g^{\Sigma_x}$, $\mathbb{II}^{\Sigma_x}$ e H^{Σ_x} representam a curvatura escalar, a segunda forma fundamental e a curvatura média da hiperfície Σ_x. Fazendo $x \to p$ e utilizando que ∂M é totalmente geodésica, chegamos ao resultado almejado. $\square$

Salientamos que a limitação da curvatura escalar obtida no Teorema anterior para o problema das variedades estáticas tratadas no escopo desta seção nos dá uma importante aplicação de rigidez que nos remete ao célebre Teorema de Llarull. Tal teorema pressupõe uma hipótese de limitação pontual da métrica. A seguir, relembramos este resultado de rigidez obtido por Llarull em [62]:

Teorema 4.15 (Llarull, [62]). *Considere uma métrica g qualquer e g_0 a métrica canônica na esfera $\mathbb{S}^n$ de raio r. Se pontualmente temos que $g \geq g_0$, então*

$$\inf R_g \leq \frac{n(n-1)}{r},$$

e a igualdade ocorre se, e somente $g = g_0$.

A partir deste resultado, conseguimos um Teorema que generaliza, para nosso caso particular de variedade estática, um Teorema de Hizagi, Montiel e Raulot ([45]).

Teorema 4.16. *Considere (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta, estática tal que $3 \leq n \leq 7$ ou $n \geq 3$ e M é spin. Se f é o potencial estático, suponha que $|df| = 1$ em ∂M. Suponha que existe uma componente conexa Σ_0 de ∂M que é difeomorfa à uma $(n-1)$-dimensional esfera $\mathbb{S}^{n-1}$. Se o tensor métrico induzido g_{Σ_0} é pontualmente maior ou igual que o tensor métrico da esfera padrão de raio r, então $r \leq 1$. Se ocorre a igualdade, então ∂M é conexa e (M^n, g) é isométrica ao hemisfério canônico $\mathbb{S}^n_+ \subset \mathbb{R}^{n+1}$.*

Demonstração. Primordialmente, temos pelo Teorema 4.14 que $R_{g_{\Sigma_0}} \geq (n-2)(n-1)$. Por outro lado, o Teorema de Llarull nos dá que

$$\min_{\Sigma} R_{g_{\Sigma_0}} \leq \frac{(n-2)(n-1)}{r},$$

pois g_{Σ_0} é pontualmente maior ou igual que g_0, a métrica standard numa esfera de raio r, cuja curvatura escalar é $\frac{(n-2)(n-1)}{r}$. Portanto,

$$r \leq \frac{(n-2)(n-1)}{\min\limits_{\Sigma} R_{g_{\Sigma_0}}} \leq 1 \leq \frac{\max \kappa_i}{k_0}.$$

Isto nos dá a desigualdade almejada. Se $r = \frac{\max \kappa_i}{k_0}$, nós obtemos que $r = 1$. Então, g_{Σ_0} é pontualmente é pontualmente menor ou igual a métrica canônica na $(n-1)$-esfera unitária. Novamente segue do Teorema de Llarull que (Σ_0, g_{Σ_0}) é isométrico a $(n-1)$-esfera canônica unitária. Para finalizar esta demonstração, utilizamos a desigualdade de Chrúsciel. $\square$

O último resultado desta seção se detém a generalizar o Teorema 4.11 para dimensões quaisquer. De fato, veremos que sob uma hipótese de curvatura escalar constante sobre a fronteira da variedade estática, é possível obter a rigidez da variedade Einstein estática associada.

Teorema 4.17. *Considere (N, h) uma $(n+1)$-variedade fechada, simplesmente conexa e Einstein estática. Se $R_g(p) = (n-1)(n-2)$ para todos os pontos de ∂M, então (N, h) é isométrica a $(\mathbb{S}^{n+1}, g_{\mathbb{S}^{n+1}})$.*

Demonstração. Seguindo as notações dos resultados anteriores, a demonstração do Lema 4.1(vide (4.7) e o final da demonstração) nos infere que

$$\frac{1}{2} div\left(\frac{\nabla\varphi}{f}\right) = f|Ric_g - (n-1)g|^2. \tag{4.10}$$

Considere $\varepsilon > 0$ sufucientemente pequeno e seja $M_\varepsilon = M \setminus u^{-1}[0, \varepsilon)$ a variedade com fronteira $u^{-1}(\varepsilon)$. O vetor normal unitário exterior à ∂M_ε será $\nu_\varepsilon = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$. Utilizando o

Teorema da divergência, temos

$$\begin{aligned}\int_{M_\varepsilon} f|Ric_g-(n-1)g|^2dV &= \frac{1}{2}\int_{M_\varepsilon} div\left(\frac{\nabla\varphi}{f}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\int_{\partial M_\varepsilon}\frac{\langle\nabla\varphi,\nabla f\rangle}{f|\nabla f|}\end{aligned} \tag{4.11}$$

Utilizando os cálculos do Teorema anterior, temos que

$$\begin{aligned}\frac{\langle\nabla\varphi,\nabla f\rangle}{f|\nabla f|} &= 2|\nabla f|\left[1+\frac{D^2f(\nu,\nu)}{f}\right]\\ &= |\nabla f|\left[(n-1)(n-2)-R_g^{\partial M_\varepsilon}-|\mathbb{II}^{\partial M_\varepsilon}|^2+(H^{\partial M_\varepsilon})^2\right].\end{aligned} \tag{4.12}$$

Fazendo $\varepsilon\to 0$, lembrando que $|\nabla f|=1$ em ∂M que é totalmente geodésica, e utilizando a hipótese que $R_g^{\partial M}=(n-1)(n-2)$, concluiremos de (4.11) e (4.12) que $Ric=(n-1)g$ em M, isto é, M é uma variedade Einstein. Utilizando o Teorema 1.4 concluímos que M é isométrica ao hemisfério canônico $(\mathbb{S}^n_+,g_{st})$. De fato, temos que M é Einstein, as componentes conexas de ∂M são totalmente geodésicas e, da equação de estaticidade, o primeiro autovalor de $-\Delta$ é $\lambda_1\geq n$. Por outro lado, $\lambda_1\leq n$ pois $-\Delta f=nf$. Dessa forma, $\lambda_1=n$ e, portanto, pelo Teorema 1.4 M é isométrica à $(\mathbb{S}^n_+,g_{st})$.

Para finalizar, utilizamos o Teorema 4.1 para concluir que, como ∂M é isométrica à $\mathbb{S}^{n-1}$, N será isométrica à $\mathbb{S}^{n+1}$. □

4.2.3 O caso do bordo desconexo

A partir de agora, andaremos na direção de generalizar resultados de rigidez para as variedades Einstein estáticas abordadas em [82] sob limitação da curvatura escalar no bordo que é desconexo. Com técnicas distintas das utilizadas no caso do bordo conexo, inferimos a utilização de resultados de existência de hiperfícies mínimas mergulhadas em variedades de dimensões $3\leq n\leq 7$ para obter, neste caso, a existência de uma hiperfície quase-Einstein no interior da variedade estática em questão.

Antes de mais nada, relembraremos algumas importantes definições no trato de superfícies mínimas.

Definição 4.2. *Uma hiperfície Σ de uma variedade M é dita ser 2-sided se existe um mergulho*

$$\psi:\Sigma\times[-1,1]\longrightarrow M$$

,

com $\psi(x,0) = x$, para todo $x \in \Sigma$ e

$$\psi(\Sigma \times [-1,1]) \cap \partial M = \psi(\partial\Sigma \times [-1,1]).$$

Em outras palavras, isto significa que o fibrado normal da hiperfície Σ é trivial. Caso isto não ocorra, a hiperfície Σ é denominada 1-sided.

Considere $F : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ uma variação de Σ com fronteira fixa. Isto significa que $F(\Sigma, 0) = \Sigma$ e, para todo $x \in \partial\Sigma$, $F(x,t) = x$.

Definição 4.3. *Diremos que uma hiperfície $\Sigma \subset M$ mínima é estável se para qualquer variação com fronteira fixa F, ocorre que*

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} Area(F(\Sigma,t)) \geq 0.$$

Uma hiperfície mínima Σ será dita locally area minimizing se $Area(\Sigma) \leq Area(\Sigma_t)$, para qualquer variação de Σ e t suficientemente pequeno.

É uma observação simples que locally area minimizing é uma condição que implica estabilidade. Um célebre resultado de Meeks, Simon e Yau (cf. [63]) garante a exitência de hiperfícies mínimas estáveis segundo algumas condições.

Teorema 4.18 ([63])**.** *Considere (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa com fronteira $\partial M \neq \emptyset$, de dimensão $3 \leq n \leq 7$. Suponha que ∂M é mean convex e possui mais que uma componente conexa. Então existe uma hiperfície Σ homóloga a ∂M, mínima, estável e propriamente mergulhada em M.*

Observamos que na demonstração do Teorema anterior em [63] fica ainda subscrito que a hiperfície encontrada é de fato locally area minimizing.

É interessante notar também que uma hiperfície fechada, mínima estável Σ contida no interior de uma variedade estática M, é totalmente geodésica. De fato, a estabilidade de Σ implica que, para qualquer função $\psi \in C^1(\Sigma)$, ocorre a não positividade para a segunda variação da área:

$$\int_\Sigma (\psi^2 |\mathrm{I\!I}|^2 + \psi^2 Ric_g(\nu,\nu) - |\nabla^\Sigma \psi|^2) dA \leq 0. \tag{4.13}$$

Em particular, considere $\psi = f$ como sendo o potencial estático de M. Desta forma, temos que

$$f Ric(\nu) = D^2 f(\nu,\nu) - \Delta f \tag{4.14}$$

Por outro lado, como Σ é mínima, temos que

$$\Delta f = \Delta^{\Sigma} f + D^2 f(\nu,\nu). \tag{4.15}$$

De (4.14) e (4.15), teremos que

$$fRic(\nu) = -\Delta^{\Sigma} f,$$

de onde, ao substituir em (4.13), concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma} f^2 |\mathbb{II}|^2 dA &= -\int_{\Sigma} f^2 Ric(\nu) dA + \int_{\Sigma} |\nabla^{\Sigma} f|^2 dA \\
&= \int_{\Sigma} f \Delta^{\Sigma} f dA + \int_{\Sigma} |\nabla^{\Sigma} f|^2 dA \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde na última igualdade utilizamos integração por partes junto ao fato que Σ é fechada. Como $f > 0$ no interior de M, segue que $\mathbb{II} \equiv 0$ em Σ.

O Lema a seguir é uma extensão de um resultado de Cai e Galloway ([16])para dimensões quaisquer e será utilizado na demonstração do teorema principal desta seção.

Lema 4.2. *Considere (M^n, g) uma variedade Riemanniana com curvatura escalar constante não negativa R_g e suponha Σ uma hiperfície totalmente geodésica e estável com curvatura escalar intríseca $R_g^{\Sigma} = R_g$. Dada uma variação normal de Σ, digamos $\{\Sigma_t\}$, temos que*

$$(|\mathbb{II}_{\Sigma_t}|^2)^n(0,x) = 0$$

Demonstração. Segue da Equação de Evolução de Ricatti que

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -Ric(\nu) - |\mathbb{II}|^2$$

Isto junto à Equação de Gauss nos dará que

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{2}R_g - \frac{1}{2}|\mathbb{II}|^2 - \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{2}R_g^{\Sigma} \tag{4.16}$$

Considerando $A(t)$ a àrea de Σ_t, temos a primeira e segunda fórmula de variação da área

$$A'(t) = \int_{\Sigma_t} H d\Sigma_t$$

$$A''(t) = \int_{\Sigma_t} (Ric(\nu) + |\mathbb{II}|^2 - H^2) d\Sigma_t.$$

A segunda Fórmula da variação da área junto à equação (4.16) nos infere que

$$A''(t) = -\frac{1}{2}\int_{\Sigma_t} (R - R^{\Sigma} + |\mathbb{II}|^2 - H^2) d\Sigma_t \tag{4.17}$$

A medida de área $d\Sigma_t$ de Σ está relacionada com a medida de área de Σ por $d\Sigma_t = \mu(x,t)d\Sigma$, onde μ é uma função positiva satisfazendo que $\mu(0,x) = 1$. Podemos escolher $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de forma que

$$\frac{1}{2} \leq \mu(x,t) \leq 2,$$

para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e $x \in \Sigma$. Esta observação permite reescrever a identidade (4.17) como

$$A''(t) = -\frac{1}{2}\int_{\Sigma} (R - R^{\Sigma} + |\mathbb{II}|^2 - H^2)\mu d\Sigma. \tag{4.18}$$

Para finalizar a prova, procederemos com um argumento de indução para demonstrar que as n-ésimas derivadas

$$(H^2)^{(n)}(0,x) = (R - R^{\Sigma})^{(n)}(0,x) = (|\mathbb{II}|^2)^{(n)}(0,x) = 0.$$

Pelas hipóteses do Teorema fica claro que as identidades acima são válidas para $n = 0$. Supondo as Identidades válidas para $0 \leq k \leq m-1$, diferenciando a equação (4.16) $m-1$ vezes, já concluímos que $H^{(m)}(0,x) = 0$. Utilizando a regra do produto, vê-se que $(H^2)^{(m)}(0,x) = 0$. Desta forma, utilizando-se extensão de Taylor, existe uma função limitada $f(t,x)$ com $|f(t,x)| \leq C$ e tal que

$$R_g - R^{\Sigma} - H^2 = \frac{(R_g - R^{\Sigma})^{(m)}(0,x)}{m!} + f(t,x)t^{m+1}$$

Portando, utilizando (4.18), temos

$$\begin{aligned} A''(t) &\leq -\frac{1}{2}\int_{\Sigma} (R_g - R^{\Sigma} - H^2)\mu d\Sigma \\ &\leq -\frac{t^m}{2m!}\int_{\Sigma} (R_g - R^{\Sigma})^{(m)}(0,x)\mu(t,x) d\Sigma + \frac{t^{m+1}}{2}\int_{\Sigma} |f(t,x)|\mu(t,x) d\Sigma \\ &\leq -\frac{t^m}{4m!}\int_{\Sigma} (R_g - R^{\Sigma})^{(m)}(0,x) d\Sigma + C \cdot A(\Sigma)t^{m+1} \end{aligned}$$

Se tivéssemos que $\int_\Sigma (R_g - R^\Sigma)^{(m)}(0,x)d\Sigma > 0$, a desigualdade acima implicaria que para t suficientemente pequeno, digamos $t \in (0,\delta)$, $A''(t) < 0$. Isto contradiria a hipótese de que Σ é estável. Portanto, $(R_g - R^\Sigma)^{(m)}(0,x) = 0$, para todo $x \in \Sigma$. Utilizando a mesma ideia de expansão a séries de Taylor, concluiremos que $(|\mathbb{II}|^2)^{(n)}(0,x) = 0$, para todo $x \in \Sigma$. $\square$

Finalizando nossos resultados, vamos propor uma generalização fiel do Teorema 4.12, a partir da teoria variacional proposta anteriormente. De fato, nosso Teorema generaliza o Teorema 4.12 para dimensões $3 \leq n \leq 7$. Salientamos que no caso proposto por H. Seshadri, a dimensão 3 propõe a classificação completa da variedade quasi-Einstein obtida e, por conseguinte, a classificação da variedade estática em questão.

Teorema 4.19. *Considere N^{n+1} uma variedade Einstein estática, fechada e simplesmente conexa. Considere (M^n, g) a variedade estática contida em N. Se $3 \leq n \leq 7$, ∂M tem mais de uma componente conexa e $R_g(p) \leq n(n-1)$, para todo $p \in \partial M$, então existe uma hiperfície quase-Einstein, homóloga à ∂M e propriamente mergulhada em M.*

Demonstração. O Teorema 4.18, garante a existência de uma hiperfície Σ mínima, locally area minimizing e propriamente mergulhada em M. Neste ponto temos dois casos a considerar.

(A) Σ está no interior de M;

(B) Σ intersecta ∂M e portanto, via princípio do máximo (já que Σ e ∂M são hiperfícies mínimas), Σ é uma componente de ∂M.

No segundo caso, utilizaremos o lema 4.2 para conseguir uma hiperfície estável e propriamente mergulhada no interior de M, e daí recorrer novamente ao caso (A).

(A) Podemos assumir que Σ é uma hiperfície 2-sided no interior de M e, desta forma $f > 0$ numa vizinhança de Σ, onde f é o potencial estático de M. Considerando ν o campo normal exterior à Σ e $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ onde necessitarmos sentido, defina uma variação normal $\{\Sigma_t\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$, percorrendo a partir de Σ na direção normal ν o comprimento t ao longo das geodésicas da métrica $f^2 g$. Em Σ_t denote por H_t a sua curvatura média, $\mathbb{II}_t$ a sua segunda forma fundamental e ν_t seu vetor normal exterior. Temos a seguinte evolução para a a Segunda Formal fundamental:

$$\frac{\partial \mathbb{II}_{tij}}{\partial t} = (D^2 f)_{ij} + f\mathbb{II}_i^m \mathbb{II}_{mj} + f^{-1}R_{injn}, \tag{4.19}$$

onde $1 \leq i, j \leq n-1$ e $(\mathrm{II}_t)_{ij}$ e $(D^2u)_{ij}$ são as componentes dos respectivos tensores. Tomando o traço da equação acima, temos a seguinte equação de evolução para a curvatura média

$$\frac{\partial H_t}{\partial t} f Ric(\nu_t, \nu_t) + f|\mathrm{II}_t|^2 + \Delta_{\Sigma_t} f, \tag{4.20}$$

onde $\Delta_{\Sigma_t} f$ é o Laplaciano de f com respeito à métrica induzida de M em Σ_t. Se considerarmos $A(t)$ a área de Σ_t, a fórmula da primeira variação da área nos dá que

$$\frac{d}{dt} A(t) = -\int_{\Sigma_t} f H_t dA \tag{4.21}$$

A relação entre o Laplaciano intríseco e extríseco de Σ_t é dado pela fórmula

$$\Delta f = \Delta_{\Sigma_t} f + D^2 f(\nu, \nu) - \frac{H_t}{u} \frac{\partial f}{\partial t},$$

o que junto à equação de estaticidade nos dá que

$$\Delta_{\Sigma_t} f = -nf - D^2 f(\nu, \nu) + \frac{H_t}{f} \frac{\partial f}{\partial t} \tag{4.22}$$

Unindo (4.20), (4.22) e a equação de estaticidade, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_t}{\partial t} &= D^2 f(\nu, \nu) + nf + f|\mathrm{II}|^2 - nf - D^2 f(\nu, \nu) + \frac{H_t}{f} \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= u|\mathrm{II}|^2 + \frac{H_t}{f} \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned}$$

Isto implica que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{H_t}{f} \right) = \frac{1}{f} \frac{\partial H_t}{\partial t} - \frac{H_t}{f^2} \frac{\partial f}{\partial t} = |\mathrm{II}|^2 \geq 0$$

Assim, $\frac{H_t}{f}$ é uma função não decrescente com $H_0 = 0$. Como também $f > 0$, segue que $H_t \geq 0$ em $[0, \varepsilon)$. Isto unido à equação (4.21) nos dará que $\frac{d}{dt} A(t) \leq 0$. Se $A'(t) < 0$ para algum $t \in (0, \varepsilon)$ isto nos daria uma contradição ao fato de que Σ é locally area minimizing. Portanto, temos que $H_t = 0$, para todo $t \in [0, \varepsilon)$, isto é

$$|\mathrm{II}_t|^2 = 0, \forall t \in [0, \varepsilon).$$

Fica salutar que ao utilizarmos a mesma variação agora com respeito ao vetor $-\nu$, a identidade acima ocorre para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, isto é as hiperfícies geradas pela variação são todas totalmente geodésicas. Desta forma, dados campos $X, Y \in T\Sigma$, unindo as informações acima com a equação de estaticidade e (4.19) temos

$$f^{-1}D^2_\Sigma f(X,Y) = Ric_g(X,Y) - ng(X,Y) = -g(R(X,\nu)\nu, Y). \tag{4.23}$$

Agora, considere $e_1 \in T_p\Sigma$ um vetor tangente unitário. Por (4.23) temos que

$$K(e_1,\nu) = n - Ric_g(e_1,e_1), \tag{4.24}$$

onde denotamos por $K(X,Y)$ a curvatura seccional do 2-plano gerado pelos campos X e Y. Complete a base de forma que $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ seja uma base de $T_p\Sigma$ e $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, \nu\}$ seja uma base de T_pM. Assim, segue da definição de curvatura de Ricci e de (4.24) que

$$\begin{aligned} Ric_g(e_1,e_1) &= \sum_{i=2}^{n-1} K(e_1,e_i) + K(e_1,\nu) \\ &= Ric^\Sigma(e_1,e_1) + n - Ric_g(e_1,e_1), \end{aligned}$$

onde Ric^Σ denota a curvatura de Ricci intríseca a Σ. Portanto,

$$Ric_g(e_1,e_1) = \frac{1}{2}(n + Ric^\Sigma(e_1,e_1)) \tag{4.25}$$

Por fim, procederemos um argumento de polarização junto à identidade (4.25). Considerando $X, Y \in T_p\Sigma$ quaisquer temos

$$\begin{aligned}
Ric_g(X,Y) &= \frac{1}{4}\|X+Y\|^2 Ric\left(\frac{X+Y}{\|X+Y\|},\frac{X+Y}{\|X+Y\|}\right)\\
&\quad -\frac{1}{4}\|X-Y\|^2 Ric\left(\frac{X-Y}{\|X-Y\|},\frac{X-Y}{\|X-Y\|}\right)\\
&= \frac{1}{4}\|X+Y\|^2\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}Ric^{\Sigma}\left(\frac{X+Y}{\|X+Y\|},\frac{X+Y}{\|X+Y\|}\right)\right)\\
&\quad -\frac{1}{4}\|X-Y\|^2\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}Ric^{\Sigma}\left(\frac{X-Y}{\|X-Y\|},\frac{X-Y}{\|X-Y\|}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}n\left(\frac{1}{4}\|X+Y\|^2-\frac{1}{4}\|X-Y\|^2\right)\\
&\quad +\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}Ric^{\Sigma}(X+Y,X+Y)-\frac{1}{4}Ric^{\Sigma}(X-Y,X-Y)\right)\\
&= \frac{1}{2}(ng^{\Sigma}(X,Y)+Ric^{\Sigma}(X,Y)).
\end{aligned}$$

Salientamos que nos cálculos acima desconsideramos os casos trivialmente verificáveis onde $X=Y$ e $X=-Y$. Também denotamos $g(\cdot,\cdot)=\|\cdot\|^2$. Portanto, utilizando a identidade inferida acima e (4.23), temos

$$D^2_{\Sigma}f(X,Y)=f\left[\frac{1}{2}(ng^{\Sigma}(X,Y)+Ric^{\Sigma}(X,Y))\right]-nfg^{\Sigma}(X,Y),$$

e, finalmente,

$$D^2_{\Sigma}f(X,Y)=\frac{f}{2}[Ric^{\Sigma}-ng^{\Sigma}](X,Y),$$

para quaisquer campos $X,Y\in T\Sigma$. Tal identidade confirma nossa assetiva de que Σ, a hiperfície locally area minimizing contida em M, é uma variedade quase-Einstein.

(B) Agora, assumamos que uma das componentes conexas de ∂M, digamos Σ, é uma hiperfície estável. Provaremos que a partir disto é possível obter uma hiperfície estável no interior de M, o que nos recorrerá a observação do item (A) e, portanto, a demonstração deste teorema. Considerando o vetor normal ν de Σ, escolhemos $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno de forma que uma vizinhança tubular U de Σ é difeomorfa à $(-\varepsilon,\varepsilon)\times\Sigma$ com o difeomorfismo sendo dado pela aplicação exponencial normal. Identifique U com $(-\varepsilon,\varepsilon)\times\Sigma$.

A estabilidade de Σ implica que, para qualquer função $\psi\in C^1(\Sigma)$, ocorre que a segunda variação da área

$$\int_\Sigma (\psi^2|\mathrm{I\!I}|^2 + \psi^2 Ric_g(\nu,\nu) - |\nabla\psi|^2)dA \leq 0.$$

Em particular, se tomamos $\psi \equiv 1$, teremos

$$\int_\Sigma Ric_g(\nu,\nu) \leq 0.$$

Lembrando a Equação de Gauss para a componente da fronteira Σ e a hipótese inicial, temos

$$2Ric_g(\nu,\nu) = n(n-1) - R_g^\Sigma \geq 0,$$

de onde junto à desigualdade integral concluímos que $R_g^\Sigma = n(n-1)$. Segue do Lema 4.2 e do fato que g é analítica, que $\mathrm{I\!I}_t = 0$, para todo t. Utilizando (4.21), concluímos que a àrea de Σ é constante ao longo da variação que propomos e, portanto, através dessa variação é possível encontrar uma hiperfície locally area minimizing no interior de M.

□

Se tivermos alguma informação sobre a limitação da curvatura escalar na hiperfície Σ obtida pelo teorema anterior, podemos obter uma classificação mais robusta da mesma.

Corolário 4.1. *Considere Σ a hiperfície locally area minimizing e quase-Einsten obtida segundo as hipóteses do Teorema anterior. Se a curvatura escalar R^Σ de Σ satisfaz uma das desigualdades a seguir, a hiperfície Σ é Einstein:*

(i) $R^\Sigma(p) \geq n(n-1)$, *para todo* $p \in \Sigma$.

(ii) $R^\Sigma(p) \leq n(n-1)$, *para todo* $p \in \Sigma$.

Demonstração. Lembre-se de que pela demonstração do Teorema anterior, a hiperfície Σ satisfaz a seguinte identidade

$$D^2_\Sigma f = \frac{f}{2}[Ric^\Sigma - ng^\Sigma] \tag{4.26}$$

(i) Tomando o traço de (4.26), utilizando a hipótese deste item e a positividade de f, temos que

$$\Delta_\Sigma f = \frac{f}{2}(R^\Sigma - n(n-1)) \geq 0 \tag{4.27}$$

Desta forma,

$$0 \geq -\int_\Sigma f\Delta_\Sigma f = \int_\Sigma |\nabla_\Sigma f|^2,$$

o que implica $\nabla_\Sigma f = 0$ e, portanto, f é constante sobre Σ. Substituindo esta observação na identidade (4.26), concluímos que Σ é Einstein.

(ii) Como feito na demonstração do Teorema 4.19, segue do fato que Σ é estável que

$$\int_\Sigma Ric_g(\nu) \leq 0. \tag{4.28}$$

Por outro lado, como uma hiperfície estável contida numa variedade estática é totalmente geodésica, segue da Equação de Gauss que $2Ric(\nu) = n(n-1) - R_g^\Sigma \geq 0$, de onde concluímos junto à (4.28) que $R_g^\Sigma = n(n-1)$. Portanto,

$$\Delta_\Sigma f = \frac{f}{2}(R^\Sigma - n(n-1)) = 0,$$

de onde, analogamente ao feito no item anterior, concluímos que

$$0 = \int_\Sigma |\nabla_\Sigma f|^2.$$

Isto implica que f é constante sobre Σ e, desta forma, Σ é Einstein.

□

Referências Bibliográficas

[1] Alexandrov, A. D. - *Uniqueness Theorems for Surfaces in the Large V*, Vestnik Leningrad University **13** (1958) no. 19, 5-8.

[2] Alodan, H. - *Conformal gradient vector fields.* Differ. Geom. Dyn. Syst. 12 (2010), 1-3.

[3] Ambrozio, L.-*On static three-manifolds with positive scalar curvature.* arXiv:1503.03803v1[math.DG] (2015).

[4] Anderson, M. T. - *Convergence and rigidity of manifolds under Ricci curvature bounds.* Invent. Math. 102 (1990), no. 2, 429-445

[5] Aviles, P., Escobar, J. F. - *On the Sobolev quotient of an Einstein manifold.* Indiana Univ. Math. J. 41 (1992), no. 2, 435-438.

[6] Barros, A., Diogenes, R. and Ribeiro, E., Jr. - *Bach-flat critical metrics of the volume functional on 4-dimensional manifolds with boundary*, The Journal of Geometric Analysis, Vol. 25, Issue 4 (2015), 2698-2715.

[7] Barros, A., Batista, R., and, Ribeiro, E., Jr. - *Compact almost Ricci solitons with constant scalar curvature are gradient.* Monatsh. Math. (2014). doi:10.1007/s00605-013-0581-3

[8] Batista, R., Diógenes, R., Ranieri, M. and Ribeiro, E., Jr. *Critical metrics on the volume functional on compact three-manifolds with smooth boundary.* arXiv:1603.05456[math.DG]

[9] Berger, M. - *Une borne inférieure pour le volume d'une variété riemannienne en function du rayon d'injectivité.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, Vol. 30 (1980), 259-265.

[10] Besse, A. L. - *Einstein Manifolds*. Springer-Verlag (1987).

[11] Bishop, R. L., and S. I. Goldberg *A characterization of the Euclidean sphere.* Bull. Am. Math. Soc, 72 (1966), 122-124.

[12] Boucher, W. - *Cosmic no-hair theorems. Classical general relativity* (London, 1983), 43-52, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.

[13] Boucher, W. and Gibbons, G. W. *Cosmic baldness. The very early universe*(Cambridge, 1982), 273-278, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1983.

[14] Boucher, W., Gibbons, G. W., and Horowitz, G. T., *Uniqueness theorem for anti-de Sitter spacetime*, Phisical Review D (3) 30 (1984), no. 12, 2447-2451.

[15] Bourguignon, J.-P. and Ezin, J.-P. - *Scalar curvature functions in a conformal class of metrics and conformal transformations.* Trans. Amer. Math. Soc. 301 (1987), 723-736.

[16] Cai, M. and Galloway, G. J. - *Least area tori and 3-manifolds of nonnegative scalar curvature.* Math. Z. 223 (1996), no. 3, 387-395.

[17] Cao, H-D. and Chen, Q. - *On Bach-flat gradient shrinking Ricci solitons.* Duke Math. J. 162 (2013) 1149-1169.

[18] Case, J., Shu, Y.-J., and Wei, G. - *Rigidity of quasi-Einstein metrics. Differential.* Geom. Appl. 29 (2011), no. 1, 93-100.

[19] Chen, B. Y., *Geometry of submanifolds.* New York: Marcel Dekker, INC. (1973).

[20] Chen, J.-T., Saotome, T., and Wu, C.-T. *The CR almost Schur lemma and Lee conjecture.* Kyoto J. Math. 52 (2012), no. 1, 89?98

[21] Chen, P.-N., Wang, M.-T., Wang, Y.-K., and Yau, S.-T. - *Quasi-local energy with respect to a static spacetime.* arXiv:1604.02983 [math.DG]

[22] Cheng, X., *A generalization of almost-Schur lemma for closed Riemannian manifolds.* Ann. Global Anal. Geom. 43 (2013), no. 2, 153-160.

[23] Cheng, X., and Zhou, D. - *Rigidity for closed totally umbilical hypersurfaces in space forms.* J. Geom. Anal. 24 (2014), no. 3, 1337-1345

[24] Choi, H.-I. and Wang, A.-N. *A first eigenvalue estimate for minimal hypersurfaces.* J. Differential Geom. 18 (1983), no. 3, 559-562.

[25] Chow, B., Lu, P., and Ni, L. -*Hamilton's Ricci flow*, Graduate Studies in Mathematics 77, Providence, RI: Science Press, New York (2006)

[26] Chruściel, P. T., *Remarks on rigidity of the de Sitter metric*, [homepage.univie.ac.at/piotr.chrusciel/papers/deSitter/deSitter2.pdf]

[27] Corvino, J., Eichmair, M. and Miao, P. - *Deformation of scalar curvature and volume.* Mathematische Annalen. 357 (2013) 551-584

[28] De Lellis, C., Topping, P.T.: *Almost-Schur lemma.* Calc. Var. Partial Differ. Equ. 43 (2012) 347-354.

[29] Do Carmo, M., *Geometria Riemanniana.* 4^a edição. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro (2008).

[30] Frankel, T. - *On the fundamental group of a compact minimal submanifold.* Ann. of Math. (2) 83 (1966) 68-73

[31] Fraser, A., Li, M. M.-C. - *Compactness of the space of embedded minimal surfaces with free boundary in three-manifolds with nonnegative Ricci curvature and convex boundary.* J. Differential Geom. 96 (2014), no. 2, 183-200.

[32] Friedrich, H. - *Existence and structure of past asymptotically simple solutions of Einstein's field equations with positive cosmological constant.* J. Geom. Phys. 3 (1986), no. 1, 101-117.

[33] Galloway, G. J. - *A note on the fundamental group of a compact minimal hypersurface.* Pacific J. Math. 126 (1987), no. 2, 243-251.

[34] Galloway, G. J. - *Some global results for asymptotically simple space-times. The conformal structure of space-time.* Lecture Notes in Phys. 604(2002), 51-60.

[35] Galloway, G. J. *On the opology of black holes.* Commun. Math. Phys. 151 (1993), 53-66.

[36] Goldberg, S. I., and Kobayashi, S. - *The conformal transformation group of a compact Riemannian manifold*, Am. J. Math. 84(1962), 170-174.

[37] Gomes, J. N., Wang, Q., and Xia, C.: *On the h-almost Ricci Soliton.* arXiv:1411.6416.

[38] Gover, A. R., Orsted, B. - *Universal principles for Kazdan-Warner and Pohozaev-Schoen type identities.* Commun. Contemp. Math. 15 (2013), no. 4, 1350002, 27 pp.

[39] Gursky, M. - *Four-manifolds with* $\delta W^+ = 0$ *and Einstein constant of the sphere*, *Math. Ann.*, 318 (2000), 417-431.

[40] Gursky, M. and Lebrun, C. - *On Einstein manifolds of positive sectional curvature.* Ann. Global Anal. Geom. 17 (1999), no. 4, 315-328.

[41] Greene, R. E., and Wu, H. - *Lipschitz convergence of Riemannian manifolds*, Pacific J. Math. 131 (1988), 119-141.

[42] Hang, F. and Wang, X - *Vanishing sectional curvature on the boundary and a conjecture of Schroeder and Strake.* Pacific J. Math. 232 (2007), no. 2, 283-287.

[43] Hawking, S. W. and Ellis, G. F. R. - *The Large Scale Structure of Space-Time.* Cambridge University Press (1973).

[44] Hebey, E.: *Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés.* Diderot, Paris (1997).

[45] Hizagi, O., Montiel, S. and Raulot, S. - *Uniqueness of the de Sitter spacetime among static vacua with positive cosmological constant.* Ann. Glob. Anal. Geom. 47 (2014) 167-178.

[46] He, C., Petersen, P., and, Wylie, W. - *On the classification of warped product Einstein metrics.* Comm. Anal. Geom. 20 (2012), no. 2, 271-311.

[47] Ho, P. T. *Almost Schur lemma for manifolds with boundary.* Differential Geom. Appl. 32 (2014), 97-112.

[48] Huisken, G., and Polden, A. *Geometric Evolution Equations for Hypersurfaces.* Springer, Lecture Notes in Math. 1713 (1999), 45-84.

[49] Ichida, R. - *Riemannian manifolds with compact boundary.* Yokohama Math. J. 29 (1981), no. 2, 169-177.

[50] Kasue, A - *Ricci curvature, geodesics and some properties of Riemannian manifolds with boundary.* J. Math. Soc. Japan 35 (1983), no. 1, 117-131.

[51] Kazdan, J.L. and Warner, F.W. *Curvature functions for compact 2-manifolds*, Ann. of Math.(2) 99 (1974), 14-47.

[52] Kim, D.-S., and Kim, Y.H. -*Compact Einstein warped product spaces with nonpositive scalar curvature.* Proc. Amer. Math. Soc., 131(2003), no. 8, 2573?2576.

[53] Kobayashi, O. - *Fixed points of isometries,* Nagoya Math. J. 13 (1958), 63-68.

[54] Kuiper, N. H. - *On conformally-flat spaces in the large*, Ann. of Math. 50 (1949), no. 4, 916-924.

[55] Kwong, K.-K., and Miao, P. *A functional inequality on the boundary of static manifolds,* to appear in Asian J. Math.

[56] Lafontaine, J. - *Sur la geometrie d'une generalisation de l'equation d'Obata,* J. Math. Pures Appliquees 62 (1983), 63-72.

[57] Lafontaine, J. *A remark about static space times.* J. Geom. Phys. 59 (2009), no. 1, 50-53.

[58] LeBrun, C. - *Four-dimensional Einstein manifolds, and beyond.* Surveys in differential geometry: essays on Einstein manifolds, 247-285, Surv. Differ. Geom., VI, Int. Press, Boston, MA, 1999.

[59] Lee, J., *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature.* Graduate Texts in Mathematics 176, Springer-Verlag (1997).

[60] Lichnerowitz, A. - *Sur les transformations conformes d'une variete riemannienne compacte.* Compt. Rend. 259 (1964), 697-700.

[61] Li, J., and Xia, C. - *An Integral formula and its applications on sub-static manifolds.* arXiv:1603.02201 [math.DG]

[62] Llarull, M. - *Sharp estimates and the Dirac operator.* Math. Ann. 310 (1998), 55-71.

[63] Meeks, W., Simon, L., and Yau, S.-T. - *Embedded Minimal Surfaces, Exotic Spheres and manifolds with positive Ricci Curvature.* Ann. of Math. 116(1982), 621-659.

[64] Miao, P. and Tam, L.-F - *On the volume functional of compact manifolds with boundary with constant scalar curvature.* Calc. Var. PDE. 36 (2009) 141-171.

[65] Miao, P. and Tam, L.-F. - *Einstein and conformally flat critical metrics of the volume functional.* Trans. Amer. Math. Soc. 363 (6), 2907-2937 (2011).

[66] Miao, P., Tam, L.-F., and Xie, N. *Critical points of Wang-Yau quasi-local energy.* (English summary). Ann. Henri Poincaré 12 (2011), no. 5, 987-1017

[67] Nagano, T. and Yano, K., *Einstein spaces admitting a one-parameter group of conformal transformations.* Ann. Math. 69 (1959), 451-46l.

[68] Obata, M. - *The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds*, J. Differential Geometry 6 (1971-1972), 247-258.

[69] Obata, M. - *Certain conditions for a Riemannian manifold isometric with a sphere.* J. Math. Soc. Japan, 14 (1962) 333-340.

[70] Obata, M. and, Yano, K.*Sur le groupe de transformations conformes d'une variety de Riemann dont le scalaire de courbure est constant*, Compt. Rend. 260 (1965), 2698-2700.

[71] Peters, S. - *Convergence of Riemannian manifolds*, Comp. Math. 62 (1987), 3-16.

[72] Petersen, P., *Riemannian Geometry.* Second Edition. Graduate Texts in Mathematics 171, Springer-Verlag (2006).

[73] Pigola, S., Rigoli, M., and Setti, A. G. - *Some applications of integral formulas in Riemannian geometry and PDE's.* Milan J. Math. 71 (2003), 219-281.

[74] Pigola, S., Rigoli, M., Rimoldi, M., and Setti, A. G. - *Ricci almost solitons.* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 10, no.4, 757-799 (2011)

[75] Pohozǎev, S. - *On the eigenfunctions of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. Dokl. Akad. Nauk. SSSR 165 (1965) 36-39. (Translation: Soviet Math. Dokl.6(1965), 1408-1411]).

[76] Qiu, G. and Xia, C. - *A generalization of Reilly's formula and its applications to a new Heintze-Karcher type inequality.* Int. Math. Res. Not. IMRN 2015, no. 17, 7608-7619.

[77] Reilly, R. C. - *On the Hessian of a function and the curvatures of its graph.* Michigan Math. J. 20 (1973), 373-383.

[78] Reilly, R. C. - *Applications of the Hessian operator in a Riemannian manifold.* Indiana Univ. Math. J. 26 (1977), no. 3, 459-472.

[79] Reilly, R. C. -*Geometric Applications of the Solvability of Neumann Problems on a Riemannian Manifold.* Archive for Rational Mechanics and Analysis, Volume 75 (1980), 23-29.

[80] Ros, A. *Compact hypersurfaces with constant higher order mean curvatures.* Rev. Mat. Iberoamericana 3 (1987), no. 3-4, 447?453.

[81] Schoen, R. - *The existence of weak solutions with prescribed singular behavior for a conformally invariant scalar equation.* Comm. Pure Appl. Math. 41 (1988), no. 3, 317-392.

[82] Seshadri, H. - *On Einstein four-manifolds with S^1-actions*, Math. Z. 247 (2004), no. 3, 487-503.

[83] Shi, Y.-G., Tam, L.-F. -*Positive mass theorem and the boundary behaviors of compact manifolds with nonnegative scalar curvature.* J. Diff. Geom. 62, 79-125 (2002)

[84] Tashiro, Y. - *Complete Riemannian manifolds and some vector fields.* Trans. Amer. Math. Soc. 117 (1965), 251-275.

[85] Viaclovsky, J. A. - *Conformal geometry, contact geometry, and the calculus of variations.* Duke Math. J. 101 (2000), no. 2, 283-316.

[86] Wente, H. - *Counterexemple to a Conjecture of H. Hopf.* Pacific Journal of Math. **121** (1986), 193-243.

[87] Wu, J.-Y. - *De Lellis-Topping type inequalities for smooth metric measure spaces.* Geom. Dedicata 169 (2014), 273-281.

[88] Yano, K. - *Integral formulas in Riemannian Geometry.* Marcel Dekker, Inc., New York, 1970.

[89] Yano, K. - *On Riemannian manifolds with constant scalar curvature admitting a conformal transformal transformations group.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 55 (1966) 472-476.