Universidade de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Comportamento Assintótico de Constantes Ótimas em Desigualdades de Sobolev

por

Gilberto de Assis Pereira

Belo Horizonte

2017

Universidade de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de matemática

Comportamento Assintótico de Constantes Ótimas em Desigualdades de Sobolev

por

Gilberto de Assis Pereira *

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Minas Gerais, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Belo Horizonte, data de 2016

Comissão Examinadora:

Dr. Grey Ercole - UFMG - Orientador

Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki

Dr[a]. Liliane de Almeida Maia

Dr. Claudianor Oliveira Alves

Dr. Ezequiel Rodrigues Barbosa

*O autor foi bolsista do Capes durante a elaboração deste trabalho.

"Se pude enxergar mais longe foi porque estava sobre os ombros de gigantes"
Isaac Newton

Agradecimentos

Primeiramente, a Deus todo poderoso, que se humilha, toma a forma de servo, e nos pergunta: 'O que queres que Eu te faça?'. Ele busca atender às nossas necessidades, mesmo sendo maior que nós.

Aos meus familiares, a minha eterna gratidão por sua presença em todos os momentos de minha vida, dando-me força, auxiliando-me, compreendendo-me e me fortalecendo nas horas difíceis.

Ao meu orientador e amigo, *Prof. Grey Ercole* por aceitar a orientação, por sempre me apoiar, pela confiança, pelos ensinamentos, por se tornar uma grande referência de pessoa e por sempre estar de bem com a vida.

Ao *Prof. Hamilton Prado Bueno* pelo incetivo e por sempre perguntar se tudo está bem.

À minha orientadora de mestrado, *Profª. Liliane* pela amizade e carinho.

Obrigado aos professores do Departamento de Matemática da UFV, em que fiz minha graduação. Em especial ao professor Paulo Tadeu, pela amizade e pelos ensinamentos. Ao professor Olímpio Hiroshi Miyagaki pelos conselhos, atenção e amizade.

Aos amigos que fiz na UnB, Edimilson dos Santos da Silva, Clodomir Neto e Aristóteles Júnior.

Sou eternamente grato ao meu amigo Artur Fassoni pelos quatros anos de convivência na graduação, pelas conversas, por ser meu irmão de consideração, e aos meus colegas do apartamento 1911.

Aos meus amigos Roberto, Gilberto Corrêa e Renato pela acolhida em Belo Horizonte.

A minha família do Bairro Ouro Preto, Laur, Kênia, Robério e Laurita .

Aos meus colegas de pós-graduação da UFMG pelas agradáveis conversas.

Um agradecimento especial gostaria de fazer a duas pessoas: José Geraldo Teixeira, que me acolheu como filho em Viçosa e por se preocupar comigo, e a meu professor do ensino fundamental e médio, Claúdio, que sempre me ajudou.

Sou grato a todos que rezaram por mim e peço desculpas a todos que não pude citar.

Agradeço ao *CAPES* pelo apoio financeiro a este trabalho.

Resumo

Seja Ω um domínio suave e limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Na primeira parte deste trabalho, desenvolvida no Capítulo 2, consideramos

$$\Lambda_p(\Omega) := \lim_{q \to \infty} \lambda_q(\Omega),\ p > N,$$

em que

$$\lambda_q(\Omega) := \inf \left\{ \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ e } \|u\|_{L^q(\Omega)} = 1 \right\},\ q \geq 1.$$

Primeiramente, mostramos que

$$\Lambda_p(\Omega) = \min \left\{ \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ e } \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = 1 \right\},$$

sendo o mínimo atingido por uma função positiva $u_p = \lim_{q_n \to \infty} w_{q_n}$ (convergência em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e também em $C(\overline{\Omega})$), em que w_q denota um minimizador positivo de $\lambda_q(\Omega)$. Também provamos que todo minimizador u_p de $\Lambda_p(\Omega)$ satisfaz

$$-\Delta_p u_p = u_p(x_p)\Lambda_p(\Omega)\delta_{x_p},$$

em que δ_{x_p} é a distribuição delta Dirac concentrada no ponto único ponto de máximo de $|u_p|$.

Logo em seguida, mostramos que

$$\lim_{p \to \infty} \Lambda_p(\Omega)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\|\rho\|_{L^\infty(\Omega)}},$$

em que ρ denota a função distância até a fronteira $\partial\Omega$. Então, mostramos que existe $p_n \to \infty$ e $u_\infty \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ tal que: $u_{p_n} \to u_\infty$ uniformemente em $\overline{\Omega}$, $0 < u_\infty \leq \frac{\rho}{\|\rho\|_{L^\infty(\Omega)}}$ em Ω, e

$$\begin{cases} \Delta_\infty u_\infty = 0 & \text{em } \Omega \setminus \{x_*\} \\ u_\infty = \frac{\rho}{\|\rho\|_{L^\infty(\Omega)}} & \text{em } \partial\Omega \cup \{x_*\}, \end{cases}$$

no sentido de viscosidade, em que $x_* := \lim x_{p_n}$ é um ponto de máximo de ρ.

Verificamos também que x_* é único ponto de máximo de u_∞ e damos condições em Ω sob as quais $u_\infty = \frac{\rho}{\|\rho\|_{L^\infty(\Omega)}}$.

Na segunda parte deste trabalho, desenvolvida na Seção 3, fixamos $p > 1$ e estendemos $\lambda_q(\Omega)$ para $q \in (0,1)$ de modo que

$$\lambda_q(\Omega) := \inf \left\{ \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}^p : v \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ e } \int_\Omega |v|^q \, \mathrm{d}x = 1 \right\}.$$

Então, mostramos que

$$0 < \mu(\Omega) := \lim_{q \to 0^+} \lambda_q(\Omega) \, |\Omega|^{\frac{p}{q}} < \infty,$$

em que $|\Omega| = \int_\Omega \mathrm{d}x$, e provamos que

$$\mu(\Omega) = \min \left\{ \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}^p : v \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ e } \lim_{q \to 0^+} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |v|^q \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} = 1 \right\}$$

e que $\mu(\Omega)$ é atingido por uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, que é positiva em Ω, pertence a $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ para algum $\alpha \in (0,1)$, e satisfaz

$$-\Delta_p u := \mu(\Omega) \, |\Omega|^{-1} \, u^{-1} \quad \text{em} \quad \Omega \quad \text{e} \quad \int_\Omega \log u \mathrm{d}x = 0.$$

Provamos também que $\mu(\Omega)^{-1}$ é a melhor constante C na seguinte desigualdade tipo log-Sobolev

$$\exp\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \log |v|^p \, \mathrm{d}x \right) \leq C \, \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}^p \,, \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

e que essa desigualdade se torna uma igualdade se, e somente se, v é múltiplo escalar de u e $C = \mu(\Omega)^{-1}$.

Palavras-Chave: Comportamento assintótico, delta de Dirac, desigualdade log-Sobolev, infinito Laplaciano, melhor constante de Sobolev, p-Lapaciano, problema singular, solução de viscosidade.

Abstract

Let Ω be a bounded and smooth domain in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. In the first part of this work, developed in Section 2, we consider

$$\Lambda_p(\Omega) := \lim_{q\to\infty} \lambda_q(\Omega),\ p > N,$$

where

$$\lambda_q(\Omega) := \inf\left\{\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ and } \|u\|_{L^q(\Omega)} = 1\right\},\ q \geq 1.$$

First we show that

$$\Lambda_p(\Omega) = \min\left\{\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ and } \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = 1\right\},$$

the minimum being achieved by a positive function $u_p = \lim_{q_n\to\infty} w_{q_n}$ (convergence in $W_0^{1,p}(\Omega)$ and also in $C(\overline{\Omega})$), where w_q denotes a positive minimizer of $\lambda_q(\Omega)$. We also prove that any minimizer u_p of $\Lambda_p(\Omega)$ satisfies

$$-\Delta_p u_p = u_p(x_p)\Lambda_p(\Omega)\delta_{x_p},$$

where δ_{x_p} is the Dirac delta distribution concentrated at the unique maximum point of $|u_p|$.

We proceed by proving that

$$\lim_{p\to\infty} \Lambda_p(\Omega)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\|\rho\|_{L^\infty(\Omega)}},$$

where ρ denotes the distance function to the boundary $\partial\Omega$. Then, we show that there exist $p_n \to \infty$ and $u_\infty \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ such that: $u_{p_n} \to u_\infty$ uniformly in $\overline{\Omega}$, $0 < u_\infty \leq \frac{\rho}{\|\rho\|_{L^\infty(\Omega)}}$ in Ω, and

$$\begin{cases} \Delta_\infty u_\infty = 0 & \text{in } \Omega\setminus\{x_*\} \\ u_\infty = \frac{\rho}{\|\rho\|_{L^\infty(\Omega)}} & \text{on } \partial\Omega \cup \{x_*\}, \end{cases}$$

in the viscosity sense, where $x_* := \lim x_{p_n}$ is a maximum point of ρ.

We also prove that x_* is the unique maximum point of u_∞ and give conditions on Ω, under which $u_\infty = \frac{\rho}{\|\rho\|_{L^\infty(\Omega)}}$.

In the second part of this work, developed in Section 3, we fix $p > 1$ and extend $\lambda_q(\Omega)$ for $q \in (0,1)$ so that

$$\lambda_q(\Omega) := \inf\left\{\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}^p : v \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ and } \int_\Omega |v|^q \,\mathrm{d}x = 1\right\}.$$

We show that

$$0 < \mu(\Omega) := \lim_{q\to 0^+} \lambda_q(\Omega)\,|\Omega|^{\frac{p}{q}} < \infty,$$

where $|\Omega| = \int_\Omega \mathrm{d}x$. Then, we prove that

$$\mu(\Omega) = \min\left\{\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}^p : v \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ and } \lim_{q\to 0^+}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |v|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} = 1\right\}$$

and that $\mu(\Omega)$ is reached by a function $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, which is positive in Ω, belongs to $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, for some $\alpha \in (0,1)$, and satisfies

$$-\Delta_p u = \mu(\Omega)\,|\Omega|^{-1}\,u^{-1} \quad \text{in} \quad \Omega \quad \text{and} \quad \int_\Omega \log u \mathrm{d}x = 0.$$

We also show that $\mu(\Omega)^{-1}$ is the best constant C in the following log-Sobolev type inequality

$$\exp\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}\log|v|^p\,\mathrm{d}x\right)\leq C\,\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}^p\,,\quad v\in W_0^{1,p}(\Omega)$$

and that this inequality becomes an equality if, and only if, v is a scalar multiple of u and $C=\mu(\Omega)^{-1}$.

Keywords: Asymptotic behavior, best Sobolev constants, Dirac delta function, infinity Laplacian, log-Sobolev inequality, p-Laplacian, singular problem, viscosity solutions.

Notações

No que segue, Ω sempre denotará um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$.

- $|A|$ ou med$A$ ambas denotam a medida de Lebesgue do conjunto A, que também pode ser chamada de volume.
- B_1 : bola aberta de $\mathbb{R}^N$ com centro na origem e raio 1 .
- $|B_1| = \omega_N = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)}$, em que $\Gamma(t) = \int_0^\infty s^{t-1}e^{-s}ds$ é a Função Gama.
- O expoente crítico de Sobolev, p^*, é dado por
$$p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p}, & \text{se } 1 \leq p < N, \\ \infty, & \text{se } p \geq N. \end{cases}$$
- ∇ é o operador gradiente: $\nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2}, ..., u_{x_N})$.
- $L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ é mensurável e } ||u||_{L^p(\Omega)} < \infty\right\}$, $1 \leq p < \infty$, em que $||u||^p_{L^p(\Omega)} := \int\limits_\Omega |u|^p dx$.
- $L^\infty(\Omega) := \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ é mensurável e } ||u||_{L^\infty(\Omega)} < \infty\right\}$, em que
$$||u||_{L^\infty(\Omega)} := \inf\{a > 0 : |\{x \in \Omega : |u(x)| > a\}| = 0\},$$
em que $||u||_{L^\infty(\Omega)}$ é o supremo essencial, alternativamente denotado por $\operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)|$.
- $\|\cdot\|_s$ denota a norma padrão de $L^s(\Omega)$, $1 \leq s \leq \infty$: $\|u\|_s = ||u||_{L^s(\Omega)}$.
- $W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)$; para todo multiíndice $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe e $D^\alpha u \in L^p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty\}$.
- $||u||_{W^{1,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u|^p dx + \int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ é a norma padrão de $W^{1,p}(\Omega)$.
- $u = u^+ - u^-$, em que $u^+ := \max\{u, 0\}$ e $u^- := \max\{-u, 0\}$
- $W_0^{1,p}(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma do espaço $W^{1,p}(\Omega)$.
- $\lambda_q = \inf\limits_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \dfrac{\int_\Omega |\nabla u|^p dx}{\left(\int_\Omega |u|^q dx\right)^{\frac{p}{q}}}$.
- $||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ é a norma de $W_0^{1,p}(\Omega)$ adotada neste trabalho.
- q.t.p quase todo ponto
- $\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)'$: dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$
- A imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínua para $q \in [1, p^*]$ e compacta para $q \in [1, p^*)$.

Sumário

Introdução

Os principais resultados deste trabalho estão contidos nos Capítulos 2 e 3. No Capítulo 1, apresentamos definições e resultados já conhecidos e que serão utilizados nos capítulos seguintes.

Seja Ω um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. É bem conhecido que a imersão de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é compacta se

$$1 \leq q < p^\star := \begin{cases} \frac{Np}{N-p} & \text{se } 1 < p < N \\ \infty & \text{se } p \geq N. \end{cases}$$

Como consequência deste fato, para cada $q \in [1, p^\star)$ existe $w_q \in L^q(\Omega)$ tal que $\|w_q\|_q = 1$ e

$$\lambda_q(\Omega) := \inf\left\{ \|\nabla u\|_p^p : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ e } \|u\|_q = 1 \right\} = \|\nabla w_q\|_p^p . \tag{1}$$

O valor $\lambda_q(\Omega)$ é, portanto, a melhor constante c na desigualdade Sobolev

$$c \|u\|_q^p \leq \|\nabla u\|_p^p ; \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

e w_q é uma função extremal correspondente (ou minimizador). A formulação de Euler-Lagrange associada ao problema de minimização (1) é

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda_q(\Omega) |u|^{q-2} u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

em que $\Delta_p u := \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right)$ é o operador p-Laplaciano. Uma vez que $|w_q|$ é um minimizador não-negativo e não trivial de $\lambda_q(\Omega)$, o princípio máximo (ver [39]) assegura que w_q não muda de sinal em Ω.

No que se segue, vamos denotar por w_q qualquer função extremal positiva de $\lambda_q(\Omega)$, ou seja, qualquer função satisfazendo as seguintes propriedades

$$\|w_q\|_q = 1, \;\; \|\nabla w_q\|_p^p = \lambda_q(\Omega) \;\; \text{e} \;\; \begin{cases} -\Delta_p w_q = \lambda_q(\Omega) w_q^{q-1} & \text{em } \Omega \\ w_q = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ w_q > 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Pode ser verificado (ver [15, Lemma 4.2]), como uma aplicação simples da desigualdade Hölder, que a função

$$q \in [1, p^\star) \mapsto \lambda_q(\Omega) |\Omega|^{\frac{p}{q}} \tag{3}$$

é decrescente para qualquer fixo $p > 1$. Esta monotonicidade guarante que

$$\Lambda_p(\Omega) := \lim_{q \to p^\star} \lambda_q(\Omega) \tag{4}$$

está bem definido e também que

$$0 \leq \Lambda_p(\Omega) = \inf_{q\geq 1} \left(\lambda_q(\Omega)\, |\Omega|^{\frac{p}{q}}\right) \left(\lim_{q\to p^\star} |\Omega|^{-\frac{p}{q}}\right) \leq \lambda_1(\Omega)\, |\Omega|^p \left(\lim_{q\to p^\star} |\Omega|^{-\frac{p}{q}}\right).$$

É conhecido que

$$\Lambda_p(\Omega) = \begin{cases} S_{N,p} & \text{se } 1 < p < N \\ 0 & \text{se } p = N, \end{cases} \tag{5}$$

em que

$$S_{N,p} := \pi^{\frac{p}{2}} N \left(\frac{N-p}{p-1}\right)^{p-1} \left(\frac{\Gamma(N/p)\Gamma(1+N-N/p)}{\Gamma(1+N/2)\Gamma(N)}\right)^{\frac{p}{N}} \tag{6}$$

é a constante de Sobolev ([4, 37]), isto é, a melhor constante S na desigualdade Sobolev

$$S\, \|u\|^p_{L^{p^\star}(\mathbb{R}^N)} \leq \|\nabla u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \quad u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

O caso $1 < p < N$ em (5) pode ser visto em [14], enquanto que o caso $p = N$ é consequência do seguinte resultado provado em [34]

$$\lim_{q\to\infty} q^{N-1}\lambda_q(\Omega) = \frac{N^{2N-1}\omega_N}{(N-1)^{N-1}} e^{N-1},$$

Como podemos ver a partir de (5) o valor $\Lambda_p(\Omega)$ não depende de Ω, quando $1 < p \leq N$. Esta propriedade não se mantém quando $p > N$. De fato, por um simples argumento de escalonamento pode-se mostrar que

$$\Lambda_p(B_R) = \Lambda_p(B_1)R^{N-p}.$$

Na primeira parte deste trabalho, desenvolvida no Capítulo 2, estudamos os comportamentos de $w_q(\Omega)$ e $\Lambda_p(\Omega)$ quando $q \to \infty$ e $p \to \infty$, respectivamente. Na Seção 2.1 mostramos que

$$\Lambda_p(\Omega) = \inf\left\{\|\nabla u\|_p^p : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \ \text{ e } \ \|u\|_\infty = 1\right\}. \tag{7}$$

Assim, $\Lambda_p(\Omega)$ é a constante ótima associada com a imersão (compacta) de Sobolev

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}), \quad p > N,$$

no sentido de que ela é o melhor valor para uma constante c satisfazendo

$$c\, \|u\|^p_\infty \leq \|\nabla u\|^p_p, \quad \text{para toda } \ u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Mostramos também que existe $q_n \to \infty$ tal que w_{q_n} converge fortemente, em ambos os espaços de Banach $C(\overline{\Omega})$ e $W_0^{1,p}(\Omega)$, para uma função positiva u_p satisfazendo $\|u_p\|_\infty = 1$. Além disso, provamos que esta função atinge o ínfimo em (7):

$$\|\nabla u_p\|_p^p = \Lambda_p(\Omega) = \min\left\{\|\nabla u\|_p^p : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \ \text{ e } \ \|u\|_\infty = 1\right\}. \tag{8}$$

No entanto, nosso principal resultado na Seção 2.1 é a caracterização completa dos minimizadores em (8), que chamamos funções extremais de $\Lambda_p(\Omega)$ e denotamos por u_p. Mais precisamente, provamos que se $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é tal que

$$\|u_p\|_\infty = 1 \ \text{ e } \ \|\nabla u_p\|_p^p = \Lambda_p(\Omega)$$

então u_p não muda de sinal em Ω, atinge o seu valor máximo em um único ponto $x_p \in \Omega$ e é solução fraca da equação

$$-\Delta_p u_p = u_p(x_p)\Lambda_p(\Omega)\delta_{x_p},$$

em que δ_{x_p} é a distribução delta Dirac concentrada em x_p.

No caso particular em que $\Omega = B_R$ é uma bola de raio R, mostramos que

$$\Lambda_p(B_R) = \frac{N\omega_N}{R^{p-N}}\left(\frac{p-N}{p-1}\right)^{p-1} \tag{9}$$

e que

$$\lim_{q\to\infty} w_q(x) = u_p(x) := 1 - \left(\frac{|x|}{R}\right)^{\frac{p-N}{p-1}}; \quad 0 \le |x| \le R. \tag{10}$$

Além disso, provamos que a função u_p definida em (10) é o único de minimizador $\Lambda_p(B_R)$. Uma vez que $x_p = 0$, nosso principal resultado na Seção 2.1 implica

$$-\Delta_p u_p = \Lambda_p(B_R)\delta_0.$$

É conveniente recordar a seguinte consequência do Teorema 2.E de [36], devido a Talenti:

$$N(\omega_N)^{\frac{p}{N}}\left(\frac{p-N}{p-1}\right)^{p-1}|\Omega|^{1-\frac{p}{N}}\|u\|_\infty^p \le \|\nabla u\|_p^p, \quad \text{para toda } u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{11}$$

Ressaltamos que, tendo em conta (7), essa desigualdade permite concluir que

$$N(\omega_N)^{\frac{p}{N}}\left(\frac{p-N}{p-1}\right)^{p-1}|\Omega|^{1-\frac{p}{N}} \le \Lambda_p(\Omega). \tag{12}$$

Note que quando $\Omega = B_R$ o lado esquerdo de (12) coincide com o lado direto de (9). Assim, a igualdade em (11) segue quando Ω é uma bola e u é um múltiplo escalar da função definida em (10), como salientado em [36]. Como consequência simples dos nossos resultados, concluímos que a desigualdade em (11) deve ser estrita quando Ω não é uma bola. Este fato não foi observado em [36].

Um outro fato interessante, que segue de (9), é a seguinte limitação superior para $\Lambda_p(\Omega)$:

$$\Lambda_p(\Omega) \le N(\omega_N)^{\frac{p}{N}}\left(\frac{p-N}{p-1}\right)^{p-1}|B_{R_\Omega}|^{1-\frac{p}{N}},$$

em que R_Ω denota o 'inradius' de Ω, isto é, o raio da maior bola inscrita em Ω. Utilizando (9), juntamente com a estimativa (12) e a expressão explicíta de S_p em (6), mostramos que a função $p \mapsto \Lambda_p(\Omega)$ é contínua em $p = N$.

Na Seção 2.2, estudamos o comportamento assintótico, quando $p \to \infty$, do par $(\Lambda_p(\Omega), u_p)$, em que $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ denota uma função extremal positiva de $\Lambda_p(\Omega)$. Primeiramente, provamos que

$$\lim_{p\to\infty} \Lambda_p(\Omega)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\|\rho\|_\infty},$$

em que

$$\rho(x) := \inf_{y\in\partial\Omega} |y-x|, \quad x \in \Omega,$$

é a função distância até a fronteira. Aqui é interessante enfatizar o seguinte fato, bem conhecido:

$$\frac{1}{\|\rho\|_\infty} = \min\left\{\frac{\|\nabla\phi\|_\infty}{\|\phi\|_\infty} : \phi \in W_0^{1,\infty}(\Omega)\backslash\{0\}\right\}. \tag{13}$$

Em seguida, provamos que existe uma seqüência $p_n \to \infty$, um ponto $x_* \in \Omega$ e uma função $u_\infty \in W_0^{1,\infty}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que: $x_{p_n} \to x_*$, $\|\rho\|_\infty = \rho(x_*)$, $u_\infty \le \frac{\rho}{\|\rho\|_\infty}$ e $u_{p_n} \to u_\infty$, uniformemente em $\overline{\Omega}$ e fortemente em $W_0^{1,r}(\Omega)$ para todo $r > N$. Além disso, x_* é o único ponto de máximo de u_∞. Também verificamos que esta função é um minimizador de (13) e satisfaz

$$\begin{cases} \Delta_\infty u_\infty = 0 & \text{em } \Omega\backslash\{x_*\} \\ u_\infty = \frac{\rho}{\|\rho\|_\infty} & \text{em } \partial(\Omega\backslash\{x_*\}) = \{x_*\} \cup \partial\Omega \end{cases}$$

no sentido de viscosidade, em que Δ_∞ denota o bem conhecido operador ∞-Laplaciano (ver [7, 12, 30]), definido formalmente por

$$\Delta_\infty u := \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Ainda na Seção 2.2 caracterizamos os domínios Ω para os quais $u_\infty = \frac{\rho}{\|\rho\|_\infty}$ em $\overline{\Omega}$ e mostramos que cada ponto de máximo da função distância ρ dá origem a um minimizador de (13). Usamos este fato para concluir que, no caso em que Ω é um anel, existem infinitos minimizadores positivos e não radias de (13).

Na segunda parte deste trabalho, desenvolvida no Capítulo 3, assumimos que Ω é um domínio com fronteira Lipschitz e estendemos $\lambda_q(\Omega)$ para os valores de q no intervalo $(0, 1)$. Ou seja, para $p > 1$ fixado, consideramos

$$\lambda_q(\Omega) := \inf\left\{\|\nabla u\|_p^p : v \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ and } \int_\Omega |v|^q \, \mathrm{d}x = 1\right\}. \tag{14}$$

Em [2] os autores mostraram que o valor $\lambda_q(\Omega)$ é atigindo por uma função postiva $u_q \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ e que esta função é solução do problema singular de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \lambda_q(\Omega)\,|v|^{q-2}\,v & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{15}$$

no sentido sentido distribucional, isto é, considerando as funções teste apenas em $C_c^\infty(\Omega)$. Entretanto, utilizando o Lema de Fatou e a densidade de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ é possível mostrar que u_q é solução do problema acima no sentido fraco usual, isto é, com as funções teste em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Sendo assim, segue de [20, Teorema 1.1 (i)] que $u_q \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum$\alpha \in (0, 1)$. Além disso, u_q é o único minimizador positivo de $\lambda_q(\Omega)$ (verificamos esta unicidade no início do Capítulo 3, uma vez que ela não foi provada em [2]).

Na Seção 3.1 definimos

$$\mu(\Omega) := \lim_{q\to 0^+} \lambda_q(\Omega)\,|\Omega|^{\frac{p}{q}} \tag{16}$$

e

$$\mathcal{M}(\Omega) := \left\{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : \lim_{q\to 0^+}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |v|^q \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} = 1\right\}.$$

Então, provamos que

$$\mu(\Omega) = \min\left\{\|\nabla v\|_p^p : v \in \mathcal{M}(\Omega)\right\} \tag{17}$$

e que o mínimo é atingido por uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, positiva em Ω, pertencente a $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, algum $\alpha \in (0, 1)$, e tal que:

(i) $u = \lim_{q\to 0^+} |\Omega|^{\frac{1}{q}}\, u_q$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$;

(ii) $-\Delta_p u = \mu(\Omega)\,|\Omega|^{-1}\,u^{-1}$ em Ω; e

(iii) $\int_\Omega \log u \mathrm{d}x = 0$.

Explorando (17) também provamos que $\mu(\Omega)^{-1}$ é a melhor constante C na seguinte desigualdade tipo log-Sobolev

$$\exp\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \log|v|^p \, \mathrm{d}x\right) \le C\,\|\nabla v\|_p^p, \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{18}$$

e que $\mu(\Omega)^{-1}$ é atinginda se, e somente se, v é múltipla escalar de u; o único caso em que a desigualdade torna-se uma igualdade.

Por um simples argumento de escalonamento pode-se mostrar que para cada $\lambda > 0$ fixado a função $u_\lambda :=$

$\left(\frac{\lambda|\Omega|}{\mu(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} u$ é uma solução fraca positiva do problema singular

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \lambda v^{-1} & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{19}$$

A função u_λ é, de fato, a única solução positiva de (19). Este resultado de unicidade decorre de uma desigualdade simples e bem conhecida envolvendo vetores de $\mathbb{R}^N$. Existência e regularidade das soluções fracas para (19) foram estudadas em primeiro lugar no caso particular $p = 2$ (ver [11, 26, 35]). O caso $p > 1$ tem recebido mais atenção na última década (ver [10, 19, 20, 33] e referências presentes).

Observamos que a diferenciabilidade do funcional $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \mapsto \lambda \int_\Omega \log|v|\,\mathrm{d}x \in [-\infty, \infty)$ é uma questão delicada, o que torna difícil a aplicação de métodos variacionais para obter a solução positiva de (19). Assim, u_λ tem sido geralmente obtida por métodos não variacionais, principalmente o método de sub-super soluções. Quanto à regularidade, sabe-se de [20, Teorema 2.2 (ii)] que $u_\lambda \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$.

Ressaltamos que, além de proporcionar uma nova prova de existência de u_λ, mostramos que

$$\int_\Omega \log u_\lambda \mathrm{d}x = \frac{|\Omega|}{p} \log\left(\frac{\lambda\,|\Omega|}{\mu(\Omega)}\right) \in (-\infty, \infty).$$

Assim como a caracterização da melhor constante na desigualdade (18), esta propriedade de u_λ não era conhecida até então. Ela vem da conexão entre (19) e o problema de minimização (17).

Ainda na Seção 3.1, mostramos que o funcional energia associado a (19),

$$J_\lambda(v) := \begin{cases} \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p\,\mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega \log|v|\,\mathrm{d}x, & \text{se } \int_\Omega \log|v|\,\mathrm{d}x \in (-\infty, \infty) \\ \infty, & \text{se } \int_\Omega \log|v|\,\mathrm{d}x = -\infty, \end{cases}$$

atinge o seu valor mínimo $\frac{\lambda|\Omega|}{p}\left(1 - \log\left(\frac{\lambda|\Omega|}{\mu(\Omega)}\right)\right)$ apenas nas funções u_λ e $-u_\lambda$.

Concluímos o Capítulo 3, na Seção 3.2, com a descrição do comportamento assintótico do par $(\lambda_q(\Omega), \|u_q\|_\infty)$, quando $q \to 0^+$. Isto é, determinamos quando essas quantidades vão para 0 ou para ∞ ou ficam limitadas por cima e por baixo, quando $q \to 0^+$. Mais precisamente, obtemos diretamente de (16) que

$$\lim_{q\to 0^+} \lambda_q(\Omega) = \begin{cases} \infty & \text{se } |\Omega| < 1 \\ \mu(\Omega) & \text{se } |\Omega| = 1 \\ 0 & \text{se } |\Omega| > 1, \end{cases} \tag{20}$$

e aplicamos estimativas deduzidas na Seção 3.1 para mostrar que

$$\lim_{q\to 0^+} \|u_q\|_\infty = \begin{cases} \infty & \text{se } |\Omega| < 1 \\ 0 & \text{se } |\Omega| > 1 \end{cases} \tag{21}$$

e que

$$0 < A\mu(\Omega)^{\frac{1}{p}} \le \lim_{q\to 0^+} \|u_q\|_\infty \le B\mu(\Omega)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{se } |\Omega| = 1, \tag{22}$$

em que A e B são constantes positivas que dependem somente de N e p.

O resultado em (20) para o caso $|\Omega| < 1$ foi recentemente obtido em [2]. Os casos $|\Omega| \ge 1$ em (20) assim como (21) e (22) são contribuições desta tese.

Assim, (20), (21) e (22) fornecem informações complementares sobre a forma como a função $q \in (0, p^\star) \mapsto (\lambda_q(\Omega), \|u_q\|_\infty) \in \mathbb{R}^2$ comporta-se nos pontos finais de seu domínio. Recordemos, que o comportamento desta função quando $q \to p^\star$ é bem conhecido:

$$\lim_{q \to p^\star} \lambda_q(\Omega) = \begin{cases} S_{N,p}, & \text{se} \quad 1 < p < N \\ 0, & \text{se} \quad p = N > 1 \\ \Lambda_p(\Omega), & \text{se} \quad p > N, \end{cases} \tag{23}$$

e

$$\lim_{q \to p^\star} \|u_q\|_\infty = \begin{cases} \infty, & \text{se} \quad 1 < p < N \\ C_N, & \text{se} \quad p = N > 1 \\ 1, & \text{se} \quad p > N, \end{cases} \tag{24}$$

em que C_N é uma constante positiva que não depende Ω (veja [34]).

Capítulo

1

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos algumas definições e resultados conhecidos que serão utilizados nos capítulos seguintes. Assumimos que Ω é um domínio (aberto e conexo) limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, e denotamos a norma de $L^s(\Omega)$, $1 \leq s \leq \infty$, por $||u||_s$

1.1 Desigualdade de Hölder

A desigualdade de Hölder, que enunciaremos a seguir, tem papel muito importante neste trabalho, especialmente no caso em que ela se torna igualdade.

Teorema 1.1. *Seja $1 < p < \infty$ e seja q o expoente conjugado definido por*

$$q = \frac{p}{p-1}, \quad \textit{isto é,} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

que também satisfaz $1 < q < \infty$. Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, então $uv \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq ||u||_p ||v||_q.$$

A igualdade ocorre se, e somente, se $|u|^p$ e $|v|^q$ são proporcionais q.t.p em Ω.

Demonstração. Ver Teorema 2.4 [1]. □

Vale ressaltar que se $0 < p < 1$, então $q < 0$ e a desigualdade se inverte. Para maiores detalhes veja Teorema 2.12 [1].

Teorema 1.2. *Suponha que $1 \leq p < q \leq \infty$. Se $u \in L^q(\Omega)$, então $u \in L^p(\Omega)$ e*

$$|u||_p \leq |\Omega|^{(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} ||u||_q.$$

Assim, a imersão $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ é contínua.

Se $L^\infty(\Omega)$, então

$$\lim_{p \to \infty} ||u||_p = |u||_\infty.$$

Demonstração. Ver Teorema 2.14 [1]. □

Corolário 1.1. *A função*

$$q \in (0, \infty) \longmapsto \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |v|^q \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}}$$

é crescente para cada $v \in L^1(\Omega)$ fixada.

Demonstração. Sejam $0 < q_1 < q_2 < \infty$. Da desigualde de Hölder

$$\int_\Omega |v|^{q_1} \, \mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega (|v|^{q_1})^{\frac{q_2}{q_1}} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{q_1}{q_2}} |\Omega|^{1-\frac{q_1}{q_2}} = \left(\int_\Omega |v|^{q_2} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{q_1}{q_2}} |\Omega|^{1-\frac{q_1}{q_2}},$$

ou seja,

$$\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |v|^{q_1} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |v|^{q_2} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q_2}}.$$

□

1.2 O operador p-Laplaciano

Consideremos o seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

em que $p > 1$, $f \in (W_0^{1,p}(\Omega))'$ e $\Delta_p u$ é o operador p-Laplaciano, definido por

$$\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u).$$

Dizemos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é solução (fraca) de (1.1) se

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \phi dx = \int_\Omega f \phi dx \quad \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

em que $\cdot$ denota o produto interno no $\mathbb{R}^N$. A seguir, apresentamos alguns resultados bem conhecidos operador p-laplaciano, que são regularidade e princípio de comparação fraca.

Lema 1.1. ***(Lieberman [28], Tolksdorf [38])*** *Suponha que o domínio limitado Ω é de classe $C^{2,\beta}$, $0 < \beta < 1$. Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que $\Delta_p u \in L^\infty(\Omega)$. Então $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para algum $\alpha \in (0,1)$ e $||u||_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C$, em que C depende apenas de $N, \Omega, p, ||u||_\infty$ e $||\Delta_p u||_\infty$.*

Antes de enunciar o princípio de comparação fraca, vamos apresentar uma desigualdade bem conhecida do $\mathbb{R}^N$.

Proposição 1.3. *Seja $1 < p < \infty$. Existe constante positiva c_p tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$ tem-se*

$$(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y) \cdot (x - y) \geq \begin{cases} c_p |x-y|^p, & \text{se } \; p \geq 2 \\ c_p \dfrac{|x-y|^2}{\{|x|+|y|\}^{2-p}}, & \text{se } \; 1 < p < 2. \end{cases} \tag{1.2}$$

Demonstração. Ver [29]. □

Como consequência da desigualdade obtida em (1.2) temos a seguinte proposição.

Proposição 1.4. *Sejam $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $p > 1$, então*

$$\int_\Omega (|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2)\cdot(\nabla u_1 - \nabla u_2)dx \geq \begin{cases} c_p \displaystyle\int_\Omega |\nabla(u_1-u_2)|^p dx, & \text{se} \quad p \geq 2 \\ c_p \dfrac{\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla(u_1-u_2)|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}}{\left(\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u_1| + \nabla u_2)|)^p dx\right)^{\frac{2-p}{p}}}, & \text{se} \quad 1 < p < 2, \end{cases} \tag{1.3}$$

Demonstração. O caso $p \geq 2$ decorre diretamente de (1.2).
Tomando, no caso $1 < p < 2$, $r = \frac{2}{p}$ e $s = \frac{2}{2-p}$ temos $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$. Logo, da Desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla(u_1-u_2)|^p dx &= \int_\Omega \frac{|\nabla(u_1-u_2)|^p}{(|\nabla u_1| + \nabla u_2)|)^{\frac{p(2-p)}{2}}} (|\nabla u_1| + \nabla u_2)|)^{\frac{p(2-p)}{2}} dx \\ &\leq \left(\int_\Omega \left(\frac{|\nabla(u_1-u_2)|^p}{(|\nabla u_1| + \nabla u_2)|)^{\frac{p(2-p)}{2}}}\right)^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_\Omega (|\nabla u_1| + \nabla u_2)|)^{\frac{p(2-p)}{2}s} dx\right)^{\frac{1}{s}} \\ &= \left(\int_\Omega \frac{|\nabla(u_1-u_2)|^2}{(|\nabla u_1| + \nabla u_2)|)^{(2-p)}} dx\right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_\Omega (|\nabla u_1| + \nabla u_2)|)^p dx\right)^{\frac{2-p}{2}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla(u_1-u_2)|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}}{\left(\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u_1| + \nabla u_2)|)^p dx\right)^{\frac{2-p}{p}}} \leq \int_\Omega \frac{|\nabla(u_1-u_2)|^2}{(|\nabla u_1| + \nabla u_2)|)^{(2-p)}} dx. \tag{1.4}$$

Pela desigualdade (1.2) temos

$$\int_\Omega \frac{|\nabla(u_1-u_2)|^2}{(|\nabla u_1| + \nabla u_2)|)^{(2-p)}} dx \leq \int_\Omega (|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2)\cdot(\nabla u_1 - \nabla u_2)dx. \tag{1.5}$$

O resultado segue, então, das desigualdades (1.4) e (1.5). □

No próximo resultado, a desigualdade $-\Delta_p u_1 \leq -\Delta_p u_2$ em Ω deve ser entendida no sentido fraco:

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 \cdot \nabla\phi dx \leq \int_\Omega |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 \cdot \nabla\phi dx \quad \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega), \phi \geq 0. \tag{1.6}$$

Proposição 1.5. ***(Princípio de comparação na forma fraca)*** *Sejam $u_1, u_2 \in W^{1,p}(\Omega)$ tais que*

$$\begin{cases} -\Delta_p u_1 \leq -\Delta_p u_2 & \text{em } \Omega \\ u_1 \leq u_2 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então

$$u_1 \leq u_2 \;\; q.t.p \text{ em } \Omega.$$

Demonstração. Escolhendo $\phi = (u_1 - u_2)^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$ em (1.6) temos

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_\Omega (|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2)\cdot\nabla(u_1-u_2)^+ dx \\ &= \int_{\{u_1-u_2\geq 0\}} (|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2)\cdot\nabla(u_1-u_2) dx. \end{aligned}$$

Usando a Proposição 1.4 temos

$$0 = \int_{\{u_1-u_2\geq 0\}} |\nabla(u_1-u_2)|^p dx = \int_\Omega |\nabla(u_1-u_2)^+|^p dx.$$

Assim,

$$(u_1 - u_2)^+ = 0 \quad \text{q.t.p em} \quad \Omega,$$

ou seja,

$$u_1 \leq u_2 \quad \text{q.t.p em} \quad \Omega.$$

□

1.3 Simetrização de Schwarz

Simetrização de Shwarz é um tipo especial de rearranjamento de uma função real definida em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Dada uma tal função, construímos uma função associada, definida na bola centrada na origem e com o mesmo volume de Ω, que mantém os valores da função original (em módulo) e preserva algumas quantidades especiais ligadas à integrais. Em particular, desejamos que esta nova função seja radial e decrescente radialmente. A fim definir a simetrização de Schwarz, primeiramente construímos o rearranjamento decrescente unidimensional de uma função dada.

Seja Ω um domínio limitado e mensurável. Seja $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Para todo $t \in \mathbb{R}$, o conjunto de nível $\{u > t\}$ é definido como

$$\{u > t\} := \{x \in \Omega : u(x) > t\}.$$

Os conjuntos $\{u < t\}$, $\{u \geq t\}$, $\{u = t\}$ são definidos por analogia. Então, a função distribuição de u é dada por

$$\mu_u(t) := |\{u > t\}|.$$

Esta função é uma função monótona decrescente de t e, para $t \geq \operatorname{ess\,sup}(u)$, temos $\mu_u(t) = 0$, enquanto para $t \leq \operatorname{ess\,inf}(u)$, temos $\mu_u(t) = |\Omega|$. Assim, a imagem de μ_u está no intervalo $[0, |\Omega|]$.

Definição 1.6. *Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. O rearranjamento (unidimensional) decrescente de u, denotado por $u^{\#}$, é definido em $[0, |\Omega|]$ por*

$$u^{\#}(s) = \begin{cases} \inf\{t : \mu_u(t) < s\} & \text{se} \quad s > 0 \\ \operatorname{ess\,sup}(u) & \text{se} \quad s = 0. \end{cases}$$

Definição 1.7. *O domínio simetrizado Ω^* é a bola centrada na origem que tem a mesma medida (volume) que Ω. Ou seja,*

$$\Omega^* := \left\{ x \in \mathbb{R}^N : |x| < R := \left(\frac{|\Omega|}{\omega_N} \right)^{\frac{1}{N}} \right\}.$$

Definição 1.8. *Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. A Simetrizada de Schwarz (ou o Rearrajamento Simétrico Decrescente de u), denotada por u^*, é a função $u^* : \Omega^* \to \mathbb{R}$, positiva, radialmente simétrica e decrescente, definida por*

$$u^*(x) = u^{\#}(\omega_N |x|^N), \quad x \in \Omega^*.$$

Enuciaremos a seguir algumas propriedades e resultados importantes sobre a Simetrização de Schwarz. Para uma abordagem mais deltalhada ver [27, 23, 8, **?**, 24].

Proposição 1.9. *Valem as seguintes propriedades :*

(i) *Se $0 \leq u \leq v$ em Ω, então $u^* \leq v^*$ em Ω^**

(ii) *Para cada $t \geq 0$, $(tu)^* = tu^*$*

(iii) $(u^*)^* = u^*$.

Demonstração. Prova de (i) ver [27] Proposição 16.6 (iv). Para provar (ii) basta considerar $h(x) = tx$ na proposição seguinte. Prova de (iii) é consequência do Lema 1.1.1 de [24]. □

Proposição 1.10. *Sejam $u \in L^1(\Omega)$ tal que $u \geq 0$ e $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua crescente. Então*

$$(h(u))^* = h(u^*)$$

Demonstração. Ver [24] Proposição 1.1.4. □

O teorema a seguir nos fornece resultados importantes sobre a Simetrização de Schwarz .

Teorema 1.11. *Seja $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função Lebesgue integrável, então*

(i) Para cada função real f contínua em R e positiva, temos

$$\int_\Omega f(|u|)dx = \int_{\Omega^*} f(u^*)dx.$$

Em particular, se $u \in L^r(\Omega)$ então $u^* \in L^r(\Omega^*)$ para $1 \leq r \leq \infty$, e assim

$$||u||_{L^r(\Omega)} = ||u^*||_{L^r(\Omega^*)} \text{ e } \int_\Omega |u|^s dx = \int_{\Omega^*} (u^*)^s dx \text{ para } s \geq 0.$$

(ii) ***(Desigualdade de Hardy-Littlewood)*** *Para cada $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, em que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem-se*

$$\int_\Omega uv dx \leq \int_{\Omega^*} u^* v^* dx.$$

(iii) ***(Desigualdade de Pólya-Szegö)*** *Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $u \geq 0$, então $u^* \in W_0^{1,p}(\Omega^*)$ e*

$$\int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^p dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^p dx.$$

Demonstração. Prova de (i) ver [27] Teorema 16.10 e de (ii) ver Teorema 16.9 do mesmo.
Prova de (iii) ver [24] Teorema 2.3.1 . □

No seguinte corolário, utilizamos a notação

$$\lambda_q(D) := \inf \left\{ \int_D |\nabla u|^p dx : u \in W_0^{1,p}(D) \text{ e } \int_D |u|^q dx = 1 \right\},$$

em que $q > 0$ e D é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$.

Corolário 1.12. *Tem-se $\lambda_q(\Omega^*) \leq \lambda_q(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\int_\Omega |u|^q \, dx = 1$. Então, pelo Teorema 1.11 temos

$$\int_{\Omega^*} |u^*|^q \, dx = 1 \quad \text{e} \quad \int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^p \, dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx.$$

Logo, da definição de $\lambda_q(\Omega^*)$ temos

$$\lambda_q(\Omega^*) \leq \int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^p \, dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx.$$

Isto mostra que $\lambda_q(\Omega^*)$ é uma cota inferior para o conjunto cujo ínfimo é $\lambda_q(\Omega)$. Logo, $\lambda_q(\Omega^*) \leq \lambda_q(\Omega)$. □

Capítulo

2

Comportamento assintótico de constantes ótimas e de suas funções extremais

Uma simples consequência da desigualdade de Hölder é que a função

$$q \in (0,\infty) \longmapsto \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |v|^q \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}}$$

é crescente, para cada $v \in L^1(\Omega)$ fixada (veja Corolário 1.1).

Por causa dessa monotonicidade, podemos concluir (veja [15, Lemma 4.2]) que a função

$$q \in (0,\infty) \longmapsto \lambda_q(\Omega)\, |\Omega|^{\frac{p}{q}} \tag{2.1}$$

é decrescente, para cada $p > 1$ fixado, em que

$$\lambda_q(\Omega) := \inf \left\{ \|\nabla u\|_p^p : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{e} \quad \int_\Omega |v|^q \, \mathrm{d}x = 1 \right\}.$$

Esta última monotonicidade guarante que o número real

$$\Lambda_p(\Omega) := \lim_{q \to p^\star} \lambda_q(\Omega) \tag{2.2}$$

está bem definido e também que

$$\begin{aligned} 0 \leq \Lambda_p(\Omega) = \lim_{q \to p^\star} \lambda_q(\Omega) &= \lim_{q \to p^\star} \left(\lambda_q(\Omega)\, |\Omega|^{\frac{p}{q}} \right) \left(\lim_{q \to p^\star} |\Omega|^{-\frac{p}{q}} \right) \\ &= \inf_{q \geq 1} \left(\lambda_q(\Omega)\, |\Omega|^{\frac{p}{q}} \right) \left(\lim_{q \to p^\star} |\Omega|^{-\frac{p}{q}} \right) \\ &\leq \lambda_1(\Omega)\, |\Omega|^p \left(\lim_{q \to p^\star} |\Omega|^{-\frac{p}{q}} \right). \end{aligned}$$

2.1 $\Lambda_p(\Omega)$ e suas funções extremais

Nesta seção assumimos $q \geq 1$ e denotaremos por $w_q \in W_0^{1,p}(\Omega)$ qualquer função extremal de $\lambda_p(\Omega)$, cuja existência decorre da compacidade da imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ e do princípio do máximo, conforme mencionado na Introdução.

Assumiremos também neste capítulo que $p > N \geq 2$ e utilizaremos a conhecida desigualdade Morrey, válida para este caso:

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \text{para toda } u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

em que $\gamma := 1 - \frac{N}{p}$ e C depende somente de Ω, p e N. Esta desigualdade implica diretamente que a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ é compacta.

Teorema 2.1. *Tem-se*

$$\Lambda_p(\Omega) = \inf\left\{\|\nabla u\|_p^p : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad e \quad \|u\|_\infty = 1\right\}. \tag{2.3}$$

Demonstração. Seja

$$\mu := \inf\left\{\|\nabla u\|_p^p : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \ \text{ e } \ \|u\|_\infty = 1\right\}.$$

Tomemos $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\|u\|_\infty = 1$. Visto que $\lim_{q\to\infty} \|u\|_q = \|u\|_\infty = 1$ temos

$$\Lambda_p(\Omega) = \lim_{q\to\infty} \lambda_q(\Omega) \leq \lim_{q\to\infty} \frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_q^p} = \|\nabla u\|_p^p,$$

implicando $\Lambda_p(\Omega) \leq \mu$.

Agora, sejam $q \geq 1$ e $w_q \in W_0^{1,p}(\Omega)$ uma função extremal positiva de $\lambda_q(\Omega)$. Já que

$$\mu \leq \left\|\nabla(w_q/\|w_q\|_\infty)\right\|_p^p = \frac{\lambda_q(\Omega)}{\|w_q\|_\infty^p},$$

a fim de verificar a desigualdade $\mu \leq \Lambda_p(\Omega)$, precisamos somente checar que

$$\lim_{q\to\infty} \|w_q\|_\infty = 1. \tag{2.4}$$

Uma vez que $1 = \|w_q\|_q \leq |\Omega|^{\frac{1}{q}} \|w_q\|_\infty$, $\|\nabla w_q\|_p^p = \lambda_q(\Omega)$ e $\Lambda_p(\Omega) \leq \mu$ temos

$$|\Omega|^{-\frac{p}{q}} \leq \|w_q\|_\infty^p \leq \frac{\|\nabla w_q\|_p^p}{\mu} \leq \frac{\lambda_q(\Omega)}{\Lambda_p(\Omega)},$$

o que leva a (2.4), ao se tomar o limite $q \to \infty$. □

Levando-se em conta (2.3), faremos a seguinte definição:

Definição 2.2. *Dizemos que $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma função extremal de $\Lambda_p(\Omega)$ se*

$$\|\nabla v\|_p^p = \Lambda_p(\Omega) \quad e \quad \|v\|_\infty = 1.$$

Na sequência mostraremos que uma função extremal de $\Lambda_p(\Omega)$ pode ser obtida como limite de w_{q_n} para alguma sequência $q_n \to \infty$, em que w_{q_n} é uma função extremal de $\lambda_{q_n}(\Omega)$.

Teorema 2.3. *Existem $q_n \to \infty$ e uma função não negativa $w \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tais que $w_{q_n} \to w$ fortemente em $C(\overline{\Omega})$ e também em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso, w é uma função extremal de $\Lambda_p(\Omega)$.*

Demonstração. Visto que w_q é limitada uniformemente em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e também em $C^{0,1-\frac{N}{p}}(\overline{\Omega})$, existem $q_n \to \infty$ e uma função não negativa $w \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tais que $w_{q_n} \to w$ fracamente em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e fortemente em $C(\overline{\Omega})$.

Assim, $\|w\|_\infty = \lim \|w_{q_n}\|_\infty = 1$ (por causa de (2.4)) e portanto

$$\Lambda_p(\Omega) \le \|\nabla w\|_p^p \le \liminf \|\nabla w_{q_n}\|_p^p = \lim \lambda_{q_n}(\Omega) = \Lambda_p(\Omega).$$

Isto implica $\Lambda_p(\Omega) = \lim \|\nabla w_{q_n}\|_p^p = \|\nabla w\|_p^p$, de modo que $w_{q_n} \to w$ fortemente em $W_0^{1,p}(\Omega)$, e também que w é uma função extremal de $\Lambda_p(\Omega)$. □

Observação 2.1. *Como será visto na sequência, toda função extremal não negativa de $\Lambda_p(\Omega)$ deve ser estritamente positiva em Ω.*

Recordamos um fato bem conhecido: $(-\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \mapsto W_0^{1,p}(\Omega)$ é bijetiva. Assim, se $p > N$ a equação

$$-\Delta_p u = c\delta_y \tag{2.5}$$

tem solução única $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para todo $y \in \Omega$ fixado e $c \in \mathbb{R}$.
Lembremos que se $p > N$ a função delta de Dirac δ_y é bem definida, como um funcional linear contínuo, por

$$\langle \delta_y, \phi \rangle := \phi(y), \quad \forall\, \phi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

uma vez que

$$|\delta_y(\phi)| = |\phi(y)| \le \|\phi\|_\infty \le \Lambda_p(\Omega)^{-\frac{1}{p}} \|\nabla \phi\|_p, \quad \forall\, \phi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Assim, equação em (2.5) deve ser interpretada em $W^{-1,p'}(\Omega)$:

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \phi \mathrm{d}x = c\phi(y), \quad \forall\, \phi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Teorema 2.4. *Seja $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ uma função extremal de $\Lambda_p(\Omega)$ e seja $x_p \in \Omega$ tal que*

$$|u_p(x_p)| = \|u_p\|_\infty = 1.$$

Afirmamos que

(i) $-\Delta_p u_p = u_p(x_p)\Lambda_p(\Omega)\delta_{x_p}$ em Ω,

(ii) x_p é o único ponto de máximo global de $|u_p|$,

(iii) u_p não muda de sinal em Ω, e

(iv) Para cada $0 < t < 1$, existe $\alpha_t \in (0,1)$ tal que $u_p \in C^{1,\alpha_t}(\overline{E_t})$, em que $E_t = \{x \in \Omega : 0 < |u_p(x)| < t\}$.

Demonstração. Para simplificar a apresentação, assumiremos em toda esta prova que $u_p(x_p) = 1$ (caso contrário, se $u_p(x_p) = -1$, trocamos u_p por $-u_p$).

Seja $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$-\Delta_p v = \Lambda_p(\Omega)\delta_{x_p} \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Uma vez que $u_p(x_p) = 1$,

$$\Lambda_p(\Omega) = \int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \cdot \nabla u_p \mathrm{d}x \le \int_\Omega |\nabla v|^{p-1} |\nabla u_p| \, \mathrm{d}x. \tag{2.6}$$

Consequentemente, já que $\Lambda_p(\Omega) = \|\nabla u_p\|_p^p$ e

$$\|\nabla v\|_p^p = \int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \cdot \nabla v \mathrm{d}x = \Lambda_p(\Omega) v(x_p) \tag{2.7}$$

aplicamos desigualdade de Hölder para (2.6) a fim de obter

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p-1} |\nabla u_p| \, \mathrm{d}x \le \|\nabla v\|_p^{p-1} \|\nabla u_p\|_p = (\Lambda_p(\Omega) v(x_p))^{\frac{p-1}{p}} \Lambda_p(\Omega)^{\frac{1}{p}} = \Lambda_p(\Omega) \left(v(x_p)\right)^{\frac{p-1}{p}}. \tag{2.8}$$

Segue de (2.6) e (2.8) que $1 \le v(x_p) \le \|v\|_\infty$.

Por outro lado, (2.3) e (2.7) produzem

$$\Lambda_p(\Omega) \le \frac{\|\nabla v\|_p^p}{\|v\|_\infty^p} = \frac{\Lambda_p(\Omega)v(x_p)}{\|v\|_\infty^p} \le \frac{\Lambda_p(\Omega)}{\|v\|_\infty^{p-1}}. \tag{2.9}$$

Visto que $v(x_p) \le \|v\|_\infty \le 1$, concluímos que

$$1 = v(x_p) = \|v\|_\infty. \tag{2.10}$$

Combinando (2.10) com (2.9) obtemos

$$\Lambda_p(\Omega) = \|\nabla v\|_p^p,$$

mostrando, assim, que v é uma função extremal de $\Lambda_p(\Omega)$.

A fim de provar que $u_p = v$, combinamos (2.10) com (2.8) e (2.6) e obtemos

$$\Lambda_p(\Omega) = \int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \cdot \nabla u_p \mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla v|^{p-1} |\nabla u_p| \,\mathrm{d}x = \|\nabla v\|_p^{p-1} \|\nabla u_p\|_p. \tag{2.11}$$

A terceira igualdade em (2.11) é examente o caso de igualdade na desigualdade de Hölder. Isto significa que

$$|\nabla v| = |\nabla u_p| \quad \text{q.t.p em } \Omega. \tag{2.12}$$

(Note que $\|\nabla v\|_p = \|\nabla u_p\|_p$.)

Ainda obtemos de (2.11) que

$$0 = \int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \left(|\nabla v| \, |\nabla u_p| - \nabla v \cdot \nabla u_p\right) \mathrm{d}x.$$

Visto que $|\nabla v| \, |\nabla u_p| \ge \nabla v \cdot \nabla u_p$ isto fornece

$$\nabla v \cdot \nabla u_p = |\nabla v| \, |\nabla u_p| \quad \text{q.t.p em } \Omega. \tag{2.13}$$

Note-se que esta igualdade ocorre mesmo nos pontos em que $|\nabla v|^{p-2} = 0$. Resulta de (2.13) e (2.12) que

$$\nabla v = \nabla u_p \quad \text{q.t.p em } \Omega,$$

implicando que $\|\nabla(v - u_p)\|_p = 0$. Uma vez que tanto v como e u_p pertencem a $W_0^{1,p}(\Omega)$ concluímos que

$$v = u_p \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Logo, $-\Delta_p u_p = \Lambda_p(\Omega)\delta_{x_p}$ e a prova de (i) está completa.

O item (ii) segue diretamente de (i). De Fato, a existência de outro ponto de máximo global, denotado por x_1, conduziria ao seguinte absurdo: $\Lambda_p(\Omega)\delta_{x_p} = -\Delta_p u_p = \Lambda_p(\Omega)\delta_{x_1}$.

Agora, provemos (iii). Em primeiro lugar, observamos que $u_p \ge 0$ em Ω. Isto é uma consequência do princípio de comparação na forma fraca, uma vez que

$$\int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla \phi \mathrm{d}x = \Lambda_p(\Omega)\phi(x_p) \ge 0, \quad \forall\, \phi \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \phi \ge 0.$$

Agora, argumentamos que u_p é p-harmonica em $\Omega\backslash\{x_p\}$. Com efeito, para cada bola $B \subset \Omega\backslash\{x_p\}$ e cada $\phi \in W_0^{1,p}(B) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ (aqui estamos considerando $\phi = 0$ em $\Omega\backslash B$) temos

$$\int_B |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla \phi \mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla \phi \mathrm{d}x = \Lambda_p(\Omega)\phi(x_p) = 0,$$

implicando que u_p é p-harmonica em B.

Vamos considerar o seguinte subconjunto $Z := \{x \in \Omega : u_p(x) = 0\}$ de Ω. Obviamente, Z é fechado em Ω. Além disso, Z é também aberto em Ω. De fato, se $z \in Z$ então $z \in B$ para alguma bola $B \subset \Omega \backslash \{x_p\}$. Já que u_p é não negativa em B podemos concluir que u_p restrita a B assume valor mínimo 0 em $z \in B$. Uma vez que u_p é p-harmonica em B o seu valor mínimo deve ser assumido apenas na fronteira ∂B, a menos que u_p seja constante em B (ver [31]). Então, concluímos que u_p é nula em B, provando que $B \subset Z$. Já que Ω é conexo (porque é um domínio) a única possibilidade para Z é ser vazio. Este fato implica $u_p > 0$ em Ω.

Afim de provar (iv), tomemos $0 < t < 1$ e consideremos o conjunto $E_t = \{x \in \Omega : 0 < u_p(x) < t\}$, que é aberto, pois u_p contínua. Observamos que u_p é constante em ∂E_t. Além disso, seguindo o raciocínio feito na prova do terceiro item, u_p é p-harmonica em E_t porque este conjunto está longe de $\{x_p\}$ (recordamos que $t < u_p(x_p)$). Assim, u_p é constante em ∂E_t e satisfaz $-\Delta_p u_p = 0$ em E_t. Este fato nos permite aplicar o resultado regularidade de Liebermann (ver [28, Teorema 1]) para cada componente conexa de E_t para concluir que existe $\alpha_t \in (0,1)$ tal que $u_p \in C^{1,\alpha_t}(\overline{E_t})$. □

O próximo teorema está contido em Teorema 2.E de [36].

Teorema 2.5. *Seja $R > 0$ e considere a função*

$$u_p(|x|) := 1 - \left(\frac{|x|}{R}\right)^{\frac{p-N}{p-1}} ; \quad 0 \le |x| \le R. \tag{2.14}$$

Então,

$$\|\nabla u_p\|_p^p = \frac{N\omega_N}{R^{p-N}} \left(\frac{p-N}{p-1}\right)^{p-1} = \Lambda_p(B_R). \tag{2.15}$$

Demonstração. Por cálculo direto obtemos

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_p\|_p^p &= \int_{B_R} |\nabla u_p(|x|)|^p \, \mathrm{d}x \\
&= N\omega_N \int_0^R r^{N-1} \left|u_p'(r)\right|^p \mathrm{d}r \\
&= N\omega_N \left(\frac{p-N}{p-1}\right)^p R^{-(\frac{p-N}{p-1})p} \int_0^R r^{N-1+(\frac{p-N}{p-1}-1)p} \mathrm{d}r \\
&= N\omega_N \left(\frac{p-N}{p-1}\right)^p R^{-(\frac{p-N}{p-1})p} \frac{p-1}{p-N} R^{\frac{p-N}{p-1}} = \frac{N\omega_N}{R^{p-N}} \left(\frac{p-N}{p-1}\right)^{p-1},
\end{aligned}$$

o que dá a primeira em igualdade (2.15).

Note que $u_p(|\cdot|) \in W_0^{1,p}(B_R)$. Já que $\|u_p\|_\infty = 1$, segue do Teorema 2.1 que

$$\Lambda_p(B_R) \le \|\nabla u_p\|_p^p = \frac{N\omega_N}{R^{p-N}} \left(\frac{p-N}{p-1}\right)^{p-1}.$$

Por outro lado, segue de (11) que se $v \in W_0^{1,p}(B_R)$ e $\|v\|_\infty = 1$ então

$$\frac{N\omega_N}{R^{p-N}} \left(\frac{p-N}{p-1}\right)^{p-1} = N(\omega_N)^{\frac{p}{N}} \left(\frac{p-N}{p-1}\right)^{p-1} |B_R|^{1-\frac{p}{N}} \le \|\nabla v\|_p^p.$$

Tendo em vista o Teorema 2.1, isso significa que

$$\frac{N\omega_N}{R^{p-N}} \left(\frac{p-N}{p-1}\right)^{p-1} \le \Lambda_p(B_R) \tag{2.16}$$

completando a prova. □

Corolário 2.6. *Vale a seguinte estimativa para* $\Lambda_p(\Omega)$

$$N(\omega_N)^{\frac{p}{N}}\left(\frac{p-N}{p-1}\right)^{p-1}|\Omega|^{1-\frac{p}{N}} \le \Lambda_p(\Omega) \le N(\omega_N)^{\frac{p}{N}}\left(\frac{p-N}{p-1}\right)^{p-1}|B_{R_\Omega}|^{1-\frac{p}{N}}, \tag{2.17}$$

em que R_Ω *é o inradio de* Ω *(isto é, o raio da maior bola inscrita em* Ω*).*

Demonstração. A limitação inferior em (2.17) segue de (11). Seja $B_{R_\Omega}(x_0) \subset \Omega$ uma bola centrada no ponto $x_0 \in \Omega$ com raio R_Ω. É simples verificar, a partir do Teorema 2.1, que

$$\Lambda_p(\Omega) \le \Lambda_p(B_{R_\Omega}(x_0)) = \Lambda_p(B_{R_\Omega})$$

Portanto, a limitação superior em (2.17) segue de (2.15) com $R = R_\Omega$. □

Observação 2.2. *Resulta de (2.17) que* $\limsup_{p\to\infty} \Lambda_p(\Omega)^{\frac{1}{p}} \le R_\Omega^{-1}$. *Como veremos na Seção 2.2,* $\Lambda_p(\Omega)^{\frac{1}{p}}$ *cresce a medida que* p *aumenta e realmente converge para* R_Ω^{-1}*, quando* $p \to \infty$*. Isso mostra que o limite superior em (2.17) aproxima de* $\Lambda_p(\Omega)$ *quando* p *cresce.*

Corolário 2.7. *A igualdade em (11) ocorre para alguma* $0 \not\equiv u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *se, e somente se,* Ω *é uma bola.*

Demonstração. Quando $\Omega = B_R$ a igualdade segue verdadeira em (11) para a função u_p definida em (2.14), como mostra (2.15). Por outro lado, se a igualdade em (11) é verificada para alguma $0 \not\equiv v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, por homogeneidade podemos assumir que $\|v\|_\infty = 1$. Assim,

$$N(\omega_N)^{\frac{p}{N}}\left(\frac{p-N}{p-1}\right)^{p-1}|\Omega|^{1-\frac{p}{N}} = \|\nabla v\|_p^p.$$

Porém,

$$N(\omega_N)^{\frac{p}{N}}\left(\frac{p-N}{p-1}\right)^{p-1}|\Omega|^{1-\frac{p}{N}} = \frac{N\omega_N}{(R^*)^{p-N}}\left(\frac{p-N}{p-1}\right)^{p-1} = \Lambda_p(B_{R^*})$$

em que, $R^* = (|\Omega|/\omega_N)^{\frac{1}{N}}$ é tal que $|B_{R^*}| = |\Omega|$. Segue que $\Lambda_p(B_{R^*}) = \|\nabla v\|_p^p$.

Seja $v^* \in W_0^{1,p}(B_R)$ a simetrização de Schwarz de v. Temos $\|v^*\|_\infty = \|v\|_\infty = 1$ e

$$\Lambda_p(B_{R^*}) \le \|\nabla v^*\|_p^p \le \|\nabla v\|_p^p = \Lambda_p(B_{R^*}),$$

levando-nos a concluir que $\|\nabla v^*\|_p = \|\nabla v\|_p$. Este fato implica que Ω é uma bola, conforme [8, Lema 3.2]. □

Corolário 2.8. *Tem-se*

$$\lim_{p\to N^-}\frac{\Lambda_p(\Omega)}{|p-N|^{p-1}} = \frac{N\omega_N}{(N-1)^{N-1}} = \lim_{p\to N^+}\frac{\Lambda_p(\Omega)}{|p-N|^{p-1}}.$$

Em particular, a função $p \in (1,\infty) \mapsto \Lambda_p(\Omega)$ *é contínua em* $p = N$.

Demonstração. Uma vez que $\omega_N = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)}$, resulta de (5) e (6) que

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to N^-}\frac{\Lambda_p(\Omega)}{|p-N|^{p-1}} &= \lim_{p\to N^-}\frac{\pi^{\frac{p}{2}}N}{(p-1)^{p-1}}\left(\frac{\Gamma(N/p)\Gamma(1+N-N/p)}{\Gamma(1+N/2)\Gamma(N)}\right)^{\frac{p}{N}} \\
&= \frac{\pi^{\frac{p}{2}}N}{(N-1)^{N-1}}\frac{1}{\Gamma(1+N/2)} = \frac{N\omega_N}{(N-1)^{N-1}}.
\end{aligned}$$

Agora, usando (2.17) obtemos

$$\frac{N\omega_N}{(N-1)^{N-1}} = \lim_{p\to N^+}\frac{N(\omega_N)^{\frac{p}{N}}}{(p-1)^{p-1}}|\Omega|^{1-\frac{p}{N}} \le \lim_{p\to N^+}\frac{\Lambda_p(\Omega)}{|p-N|^{p-1}}$$

e

$$\lim_{p\to N^+}\frac{\Lambda_p(\Omega)}{|p-N|^{p-1}} \le \lim_{p\to N^+}\frac{N(\omega_N)^{\frac{p}{N}}}{(p-1)^{p-1}}\,|B_{R_\Omega}|^{1-\frac{p}{N}} = \frac{N\omega_N}{(N-1)^{N-1}}.$$

A continuidade segue, visto que

$$\lim_{p\to N}\Lambda_p(\Omega) = \lim_{p\to N}|p-N|^{p-1}\lim_{p\to N}\frac{\Lambda_p(\Omega)}{|p-N|^{p-1}} = 0 = \Lambda_N(\Omega).$$

□

O Teorema 2.5 diz que a função $u_p(|x|)$ definida em (2.14) é uma função extremal positiva de $\Lambda_p(B_R)$. Provaremos que ela é a única.

Teorema 2.9. *Seja $R>0$. A função $u_p(|x|)$ definida em (2.14) é a única função extremal positiva de $\Lambda_p(B_R)$.*

Demonstração. Segue do Teorema 2.4 que

$$-\Delta_p u_p = \Lambda_p(B_R)\delta_0.$$

Agora, vamos supor que $v\in W_0^{1,p}(B_R)$ seja uma função positiva e extremal de $\Lambda_p(B_R)$. Seja $v^*\in W_0^{1,p}(B_R)$ a simetrização de Schwarz v. Resulta que v^* é radial e radialmente descrente e, por outro lado, ela satisfaz $\|v^*\|_\infty = \|v\|_\infty$ e $\|\nabla v^*\|_p^p \le \|\nabla v\|_p^p$. Portanto, $v^*(|0|) = \|v^*\|_\infty = \|v\|_\infty = 1$ e

$$\Lambda_p(B_R) \le \|\nabla v^*\|_p^p \le \|\nabla v\|_p^p = \Lambda_p(B_R).$$

Assim, v^* também é uma função extremal não negativa de $\Lambda_p(B_R)$.
Pelo Teorema 2.4 temos, $-\Delta_p v^* = \Lambda_p(B_R)\delta_0 = -\Delta_p u_p$, o que implica que $v^* = u_p$. Uma vez que

$$|\nabla v^*(x)| = |\nabla u_p(|x|)| = \frac{p-N}{p-1}R^{-\frac{p-N}{p-1}}\,|x|^{-\frac{N-1}{p-1}} > 0,\ 0<|x|\le R$$

o conjunto $\{x\in B_R : \nabla v^* = 0\}$ tem medida de Lebesgue zero. Consequentemente, podemos aplicar um resultado bem conhecido (ver [8, Teorema 1.1]) para concluir que $v = v^*$ $(= u_p)$. □

Corolário 2.10. *Seja w_q uma função extremal de $\lambda_q(B_R)$. Temos*

$$\lim_{q\to\infty} w_q(|x|) = 1 - (|x|/R)^{\frac{p-N}{p-1}}, \tag{2.18}$$

fortemente em $C(\overline{B_R})$ e também em $W_0^{1,p}(B_R)$. Além disso, a convergência (2.18) também acontece no espaço $C^1(\overline{B_{\epsilon,R}})$ para cada $\epsilon\in(0,R)$, em que $B_{\epsilon,R} := \{\epsilon<|x|<R\}$.

Demonstração. Resulta do Teorema 2.9 que $1-(|x|/R)^{\frac{p-N}{p-1}}$ é a única função limite da família $\{w_q(|\cdot|)\}$, quando $q\to\infty$. Logo, a convergência dada pelo Teorema 2.3 é válida para qualquer sequência $q_n\to\infty$ e isso garante que (2.18) acontece fortemente em $C(\overline{B_R})$ e também em $W_0^{1,p}(B_R)$.

A convergência em $C^1(\overline{B_{\epsilon,R}})$ é uma consequência do seguinte fato

$$\lim_{q\to\infty}\lambda_q w_q(|x|)^{q-1} = 0,\ \text{uniformemente em } \overline{B_{\epsilon,R}},$$

que ocorre devido à convergência uniforme de $w_q(|x|)$ para $1-(|x|/R)^{\frac{p-N}{p-1}}$. (Note que $0\le w_q(|x|)\le k<1$ para algum k, e para todo $x\in\overline{B_{\epsilon,R}}$ e todo q suficientemente grande). Portanto, podemos aplicar o resultado de Liebermann (ver [28, Teorema 1]) para garantir que, para todo q suficientemente grande, w_q é uniformemente limitada no espaço de Hölder $C^{1,\alpha}(\overline{B_{\epsilon,R}})$, para algum $\alpha\in(0,1)$ que não depende de q. Então, obtemos a convergência (2.18) da compacidade da imersão $C^{1,\alpha}(\overline{B_{\epsilon,R}}) \hookrightarrow C^1(\overline{B_{\epsilon,R}})$, tendo em vista que a função de limite é sempre a mesma: $1-(|x|/R)^{\frac{p-N}{p-1}}$. □

2.2 Comportamento assintótico de $\Lambda_p(\Omega)$ e u_p, quando $p \to \infty$

Nesta seção, $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{0,1-\frac{N}{p}}(\overline{\Omega})$ denotará uma função extremal positiva de $\Lambda_p(\Omega)$ e $\rho \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ denotará a função distância até a fronteira $\partial\Omega$. Assim, $0 < u_p(x) \leq \|u_p\|_\infty = 1$ para todo $x \in \Omega$,

$$\Lambda_p(\Omega) = \min\left\{\|\nabla u\|_p^p : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ and } \|u\|_\infty = 1\right\} = \|\nabla u_p\|_p^p \tag{2.19}$$

e

$$\rho(x) = \inf_{y\in\partial\Omega} |y - x|\,, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Como mostrado na Seção 2.1, u_p tem um único ponto de máximo, denotado por x_p, e

$$\begin{cases} -\Delta_p u_p = \Lambda_p(\Omega)\delta_{x_p} & \text{in } \Omega \\ u_p = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

É conveniente recordar algumas propriedades bem conhecidas da função distância:

(P1) $\rho \in W_0^{1,r}(\Omega)$ para todo $1 \leq r \leq \infty$,

(P2) $|\nabla\rho| = 1$ quase sempre em Ω,

(P3) $\|\rho\|_\infty = R_\Omega$ é o raio da maior bola contida em Ω,

(P4) $\frac{1}{||\rho||_\infty} \leq \frac{||\nabla\phi||_\infty}{||\phi||_\infty}$ para toda $0 \not\equiv \phi \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$,

e mais detalhes são encontrados em [40].
Vamos, por um momento, considerar $\Omega = B_R$. Para este domínio

$$\rho(x) = R - |x|\,; \quad 0 \leq |x| \leq R$$

e, de acordo com (2.15) e (2.14): $x_p = 0$ para todo $p > N$,

$$\lim_{p\to\infty} \Lambda_p(B_R)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p\to\infty} \left(\frac{N\omega_N}{R^{p-N}}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{p-N}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p}} = \frac{1}{R} = \frac{1}{\|\rho\|_\infty} \tag{2.20}$$

e

$$\lim_{p\to\infty} u_p(x) = \lim_{p\to\infty} 1 - \left(\frac{|x|}{R}\right)^{\frac{p-N}{p-1}} = 1 - \frac{|x|}{R} = \frac{\rho(x)}{\|\rho\|_\infty}; \quad 0 \leq |x| \leq R. \tag{2.21}$$

Como veremos na sequência, (2.20) vale para qualquer domínio limitado, enquanto (2.21) vale apenas para alguns domínios especiais.

Lema 2.11. *A função $p \in (N, \infty) \longmapsto \Lambda_p(\Omega)^{\frac{1}{p}} |\Omega|^{-\frac{1}{p}}$ é crescente.*

Demonstração. Sejam $N < p_1 < p_2$ e, para cada $i \in \{1, 2\}$ seja $u_{p_i} \in W_0^{1,p_i}(\Omega)$ uma função extremal positiva de $\Lambda_{p_i}(\Omega)$.

Notando que $W_0^{1,p_2}(\Omega) \subset W_0^{1,p_1}(\Omega)$ temos, da Desigualdade de Hölder

$$\Lambda_{p_1}(\Omega) \leq \int_\Omega |\nabla u_{p_2}|^{p_1}\,dx \leq \left(\int_\Omega |\nabla u_{p_2}|^{p_2}\,dx\right)^{\frac{p_1}{p_2}} |\Omega|^{1-\frac{p_1}{p_2}} = \Lambda_{p_2}(\Omega)^{\frac{p_1}{p_2}} |\Omega|^{1-\frac{p_1}{p_2}}\,,$$

de modo que

$$\Lambda_{p_1}(\Omega)^{\frac{1}{p_1}} |\Omega|^{-\frac{1}{p_1}} \leq \Lambda_{p_2}(\Omega)^{\frac{1}{p_2}} |\Omega|^{-\frac{1}{p_2}}\,.$$

□

Uma consequência imediata deste lema é que a função $p \in (N, \infty) \longmapsto \Lambda_p(\Omega)$ é crescente. Para isto, basta lembrar que se f e g são crescentes, então $k(f \circ g)$ é crescente para $k > 0$. Daí o resultado segue, pois $\Lambda_p(\Omega) = |\Omega| f(g(p))$ em que $g(p) = \Lambda_p(\Omega)^{\frac{1}{p}} |\Omega|^{-\frac{1}{p}}$, $f(x) = x^p$ e $k = |\Omega|$.

Teorema 2.12. *Tem-se*

$$\lim_{p\to\infty} \Lambda_p(\Omega)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p\to\infty} \Lambda_p(\Omega)^{\frac{1}{p}} |\Omega|^{-\frac{1}{p}} = \frac{1}{\|\rho\|_\infty}.$$

Demonstração. É suficiente provar que

$$\lim_{p\to\infty} \Lambda_p(\Omega)^{\frac{1}{p}} |\Omega|^{-\frac{1}{p}} = \frac{1}{\|\rho\|_\infty}.$$

Resulta de (2.19) que

$$\Lambda_p(\Omega)^{\frac{1}{p}} |\Omega|^{-\frac{1}{p}} \le \frac{\|\nabla\rho\|_p}{\|\rho\|_\infty} |\Omega|^{-\frac{1}{p}} = \frac{1}{\|\rho\|_\infty}, \quad p > N.$$

Assim, a monotonicidade no Lema 2.11 guarante que

$$\Lambda_p(\Omega)^{\frac{1}{p}} |\Omega|^{-\frac{1}{p}} \le L := \lim_{s\to\infty} \Lambda_s(\Omega)^{\frac{1}{s}} |\Omega|^{-\frac{1}{s}} = \lim_{s\to\infty} \Lambda_s(\Omega)^{\frac{1}{s}} \le \frac{1}{\|\rho\|_\infty}, \quad \forall p > N.$$

Agora vamos verificar que $L \ge \frac{1}{\|\rho\|_\infty}$. Para isto, fixemos $r > N$. Visto que

$$\|\nabla u_p\|_r \le \|\nabla u_p\|_p |\Omega|^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}} = \Lambda_p(\Omega)^{\frac{1}{p}} |\Omega|^{-\frac{1}{p}} |\Omega|^{\frac{1}{r}} \le L |\Omega|^{\frac{1}{r}}, \quad p > r$$

a família $\{u_p\}_{p>r}$ é uniformemente limitada em $W_0^{1,r}(\Omega)$. Segue que existem $p_n \to \infty$ e $u_\infty \in W_0^{1,r}(\Omega)$ tais que

$$u_{p_n} \rightharpoonup u_\infty \text{ (fracamente) em } W_0^{1,r}(\Omega).$$

Assim,

$$\|\nabla u_\infty\|_r \le \liminf_n \|\nabla u_{p_n}\|_r \le L |\Omega|^{\frac{1}{r}}.$$

Passando para uma subsequência, se necessário, a compacidade da imersão $W_0^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ garante que

$$u_{p_n} \to u_\infty \text{ (fortemente) em } C(\overline{\Omega}).$$

Note que $\|u_\infty\|_\infty = 1$ já que $\|u_p\|_\infty = 1$ para todo $p > N$.

A convergência uniforme $u_{p_n} \to u_\infty$ implica que u_∞ é também o limite fraco em $W_0^{1,s}(\Omega)$ de uma subsequência de $\{u_{p_n}\}$, se $s > r$. Logo, $u_\infty \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ e

$$\|\nabla u_\infty\|_s \le L |\Omega|^{\frac{1}{s}}, \quad \forall s > r,$$

mostrando que $\|\nabla u_\infty\|_\infty \le L$.

Combinando este fato com a propriedade P4 (recordamos que $\|u_\infty\|_\infty = 1$) concluímos que

$$\|\nabla u_\infty\|_\infty \le L \le \frac{1}{\|\rho\|_\infty} \le \|\nabla u_\infty\|_\infty.$$

Consequentemente,

$$L = \frac{1}{\|\rho\|_\infty} = \|\nabla u_\infty\|_\infty.$$

□

É interessante notar que $\Lambda_p(\Omega)^{\frac{1}{p}}$ e $\lambda_p(\Omega)^{\frac{1}{p}}$ possuem o mesmo comportamento assintótico quando $p \to \infty$, visto que

$$\lim_{p\to\infty} \lambda_p(\Omega)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\|\rho\|_\infty},$$

como provado em [17, 22], em que o problema de autovalor para o infinito Laplaciano foi estudado como um problema limite do problema de autovalor padrão para o p-Laplaciano, quando $p \to \infty$.

Teorema 2.13. *Existem $p_n \to \infty$, $x_* \in \Omega$ e $u_\infty \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ tais que:*

(i) u_{p_n} converge para u_∞ fracamente em $W_0^{1,r}(\Omega)$, para todo $r > N$, e uniforme em $\overline{\Omega}$;

(ii) $\|\nabla u_\infty\|_\infty = \frac{1}{\|\rho\|_\infty}$;

(iii) $0 \leq u_\infty \leq \frac{\rho}{\|\rho\|_\infty}$ q.t.q em Ω;

(iv) $x_{p_n} \to x_*$;

(v) $u_\infty(x_*) = 1 = \|u_\infty\|_\infty$ e $\rho(x_*) = \|\rho\|_\infty$.

Demonstração. Os itens (i) e (ii) seguem a partir da prova do teorema anterior. Em particular, (ii) diz que a constante de Lipschitz de $\|\rho\|_\infty u_\infty$ é $\left\|\nabla(\|\rho\|_\infty u_\infty)\right\|_\infty = 1$. Assim,

$$0 < \|\rho\|_\infty u_\infty(x) \leq |x - y|\,, \text{ para quase todo } x \in \Omega \text{ e } y \in \partial\Omega$$

e, consequentemente, obtemos $\|\rho\|_\infty u_\infty \leq \rho$ q.t.p em Ω, como afirmado em (iii). De forma natural, $\{p_n\}$ pode ser escolhida tal que $x_{p_n} \to x_*$ para algum $x_* \in \Omega$, produzindo (iv). Visto que $u_{p_n}(x_{p_n}) = 1$, a convergência uniforme $u_{p_n} \to u_\infty$ implica $u_\infty(x_*) = 1$. Portanto, (iii) implica $\|\rho\|_\infty = \rho(x_*)$, o que conclui a prova de (v). □

Observação 2.3. *Vamos provar na sequência que x_* é o único ponto de máximo de u_∞ e que u_∞ é ∞-harmônica no domínio perfurado $\Omega \backslash \{x_*\}$.*

Observação 2.4. *O item (ii) do Teorema 2.13 e a propriedade (P4) implicam que u_∞ minimiza o quociente de Rayleigh $\frac{\|\nabla u\|_\infty}{\|u\|_\infty}$ entre todas as funções não triviais u em $W_0^{1,\infty}(\Omega)$. Essa propriedade também é compartilhada com a função distância ρ e as primeiras autofunções do ∞-Laplaciano (ver [22]). Na sequência (ver Teorema 2.22) provamos que $u_\infty = \frac{\rho}{\|\rho\|_\infty}$ para alguns domínios especiais. Para tais domínios u_∞ é também a primeira autofunção do ∞-Laplaciano, de acordo com [40, Teorema 2.7].*

A fim de ganhar alguma clareza na equação que u_∞ satisfaz, voltamos ao caso $\Omega = B_R$. Resulta de (2.21) que

$$u_\infty = \frac{\rho}{\|\rho\|_\infty} = 1 - \frac{|x|}{R},$$

$x_* = 0$ e $u_\infty(0) = 1 = \frac{\rho(0)}{\|\rho\|_\infty}$. Além disso, é fácil verificar que $u_\infty \in C(\overline{B_R}) \cap C^2(B_R \backslash \{0\})$, $\nabla u_\infty \neq 0$ em $B_R \backslash \{0\}$ e

$$\Delta_\infty u_\infty(x) = 0,\ x \in B_R \backslash \{0\}\,,$$

em que Δ_∞ denota o ∞-Laplaciano (ver [3, 7, 12, 13, 30]), definido por

$$\Delta_\infty \phi := \frac{1}{2}\left\langle \nabla\phi, \nabla|\nabla\phi|^2 \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Note que $\Delta_\infty\phi(x_0) = \left\langle D^2\phi(x_0)\nabla\phi(x_0), \nabla\phi(x_0)\right\rangle$, sendo $D^2\phi(x_0) = \left(\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right)_{n\times n}$ é a matriz Hessiana calculada no ponto x_0.

Suponha que $\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave dada e assuma que $v \in C^2(\Omega)$ toca ϕ por baixo em algum ponto $x_0 \in \Omega$, isto é

$$\begin{cases} \phi(x_0) = v(x_0) \\ \phi(x) \geq v(x). \end{cases}$$

Então a função $w(x) = v(x) - \phi(x)$ assume valor mínimo em x_0. Segue pelo cálculo infinitesimal que

$$\begin{cases} \nabla w(x_0) = 0 \\ D^2 w(x_0) \geq 0, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \nabla v(x_0) = \nabla \phi(x_0) \\ D^2\phi(x_0) \geq D^2 v(x_0). \end{cases}$$

Para uma matriz simétrica $A = (a_{ij})_{n\times n}$, escrevemos

$$A \geq 0 \iff \langle A\xi, \xi\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\xi_i\xi_j \geq 0 \text{ para todo } \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n).$$

No caso acima, $A = D^2(\phi - v)(x_0) = D^2\phi(x_0) - D^2 v(x_0) \geq 0$ e, tomando $\xi = e_j = (0, ..., 1, ..., 0)$, temos

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2}(x_0) = \phi_{xjxj}(x_0) = \left\langle D^2\phi(x_0)e_j, e_j\right\rangle \geq \left\langle D^2 v(x_0)e_j, e_j\right\rangle = \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}(x_0) = v_{xjxj}(x_0),$$

assim,

$$\Delta\phi(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \phi_{xjxj}(x_0) \geq \sum_{j=1}^{n} v_{xjxj}(x_0) = \Delta v(x_0).$$

Tomando $\xi = \nabla\phi(x_0) = \nabla v(x_0)$ temos

$$\begin{aligned} \Delta_\infty\phi(x_0) &= \left\langle D^2\phi(x_0)\nabla\phi(x_0), \nabla\phi(x_0)\right\rangle \\ &\geq \left\langle D^2 v(x_0)\nabla\phi(x_0), \nabla\phi(x_0)\right\rangle \\ &= \left\langle D^2 v(x_0)\nabla v(x_0), \nabla v(x_0)\right\rangle = \Delta_\infty v(x_0). \end{aligned}$$

Assim, para $p \geq 2$ temos

$$\begin{aligned} \Delta_p\phi(x_0) = \operatorname{div}\left(|\nabla\phi|^{p-2}\nabla\phi\right)(x_0) &= \left[|\nabla\phi(x_0)|^{p-2}\Delta\phi(x_0) + (p-2)|\nabla\phi(x_0)|^{p-4}\Delta_\infty\phi(x_0)\right] \\ &\geq \left[|\nabla v(x_0)|^{p-2}\Delta v(x_0) + (p-2)|\nabla v(x_0)|^{p-4}\Delta_\infty v(x_0)\right] \\ &= \Delta_p v(x_0). \end{aligned}$$

Após esta motivação, vamos demonstrar que a função u_∞ dada pela Teorema 2.13 é ∞-harmônica em $\Omega\setminus\{x_*\}$, isto é, que ela satisfaz $\Delta_\infty u = 0$ em $\Omega\setminus\{x_*\}$ no sentido de viscosidade. Primeiramente precisamos recordar algumas definições sobre a abordagem de viscosidade para a equação $\Delta_p u = 0$, em que $N < p \leq \infty$.

Definição 2.14. *Sejam $u \in C(\overline{\Omega})$, $x_0 \in \Omega$ e $\phi \in C^2(\Omega)$. Dizemos que ϕ toca u de forma estrita em x_0 por baixo se*

$$\phi(x) - u(x) < 0 = \phi(x_0) - u(x_0), \quad \forall\, x \in \Omega\setminus\{x_0\}.$$

Analogamente, dizemos ϕ toca u de forma estrita em x_0 por cima se

$$\phi(x) - u(x) > 0 = \phi(x_0) - u(x_0), \quad \forall\, x \in \Omega\setminus\{x_0\}.$$

Alguns comentários importantes

- Muitas vezes é conveniente substituir a condição de tocar por baixo pela exigência

  $$v - \phi \text{ tem um mínimo (estrito) em } x_0.$$

  Isto dá uma definição equivalente.
- O operador diferencial é avaliado apenas no ponto x_0.
- Cada ponto tem a sua própria família de funções teste (que pode ser vazia).
- Se não existe qualquer função em $C^2(\Omega)$ tocando no ponto x_0, então não existe qualquer requerimento.

- Exigimos a desigualdade estrita quando $x \neq x_0$. Mas, usando, por exemplo,

$$\phi(x) - |x - x_0|^4,$$

pode-se chegar a isso a partir da exigência $\phi(x) \leq v(x)$. Em algumas provas, a seguir, será necessário que o toque seja estrito.

Na Definição 2.15, a seguir

$$\Delta_p \phi(x_0) := |\nabla\phi(x_0)|^{p-4} \left\{ |\nabla\phi(x_0)|^2 \Delta\phi(x_0) + (p-2)\Delta_\infty \phi(x_0) \right\}, \quad N < p < \infty$$

e

$$\Delta_\infty \phi(x_0) := \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x_0)\frac{\partial\phi}{\partial x_j}(x_0)\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}(x_0).$$

Definição 2.15. *Sejam $N < p \leq \infty$ e $u \in C(\overline{\Omega})$. Dizemos que u é p-subharmônica em Ω no sentido de viscosidade, se*

$$\Delta_p \phi(x_0) \geq 0$$

sempre que $x_0 \in \Omega$ e $\phi \in C^2(\Omega)$ são tais que ϕ toca u por acima em x_0. Analogamente, dizemos que u é p-superharmônica em Ω no sentido de viscosidade, se

$$\Delta_p \phi(x_0) \leq 0$$

sempre $x_0 \in \Omega$ e $\phi \in C^2(\Omega)$ são tais que ϕ toca u por baixo em x_0.

Definição 2.16. *Sejam $N < p \leq \infty$ e $u \in C(\overline{\Omega})$. Dizemos que u é p-harmônica em Ω, no sentido de viscosidade, se u é tanto p-subharmônica quanto p-superharmônica em Ω, no sentido de viscosidade. Escrevemos $\Delta_\infty u = 0$ em Ω para significar que u é ∞-harmônica em Ω, no sentido de viscosidade.*

Os dois lemas seguintes podem ser encontrados em [30], mas para melhor compreensão, exibiremos as provas.

Lema 2.17. *Suponha $u \in C(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ satisfaz $\Delta_p u \leq 0$ (resp. $\Delta_p u \geq 0$) em Ω, no sentido fraco, isto é,*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\eta dx \geq 0,$$

para toda $\eta \geq 0$ e $\eta \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Então, u é p-superharmônica (resp. p-subharmônica) em Ω, no sentido de viscosidade.

Demonstração. A prova é feita por contradição. Assim, vamos supor que a afirmação não é verdadeira. Então, existem $x_0 \in \Omega$ e ϕ tais que $\phi(x_0) = u(x_0)$, $\phi(x) < u(x), x \neq x_0$, e $\Delta_p\phi(x_0) > 0$.

Por continuidade,

$$\Delta_p \phi(x) > 0 \text{ quando } |x - x_0| < r$$

para algum raio $r > 0$ pequeno. Defina

$$\psi(x) = \phi(x) + \frac{1}{2}\min_{\partial B(x_0,r)}\{u - \phi\} = \phi(x) + \frac{1}{2}m.$$

Claramente, $\psi(x_0) = \phi(x_0) + \frac{1}{2}m > u(x_0)$ e $\Delta_p\psi(x) = \Delta_p\phi(x)$.

Se $x \in \partial B(x_0, r)$, temos

$$\psi(x) = \phi(x) + \frac{1}{2}m \leq \phi(x) + \frac{1}{2}(u(x) - \phi(x)) = \frac{u(x) + \phi(x)}{2} < u(x).$$

Logo,

$$\psi < u \quad \text{em} \quad \partial B(x_0, r).$$

Como $\Delta_p \psi(x) = \Delta_p \phi(x) > 0$ em $B(x_0, r)$, multiplicando e integrando por partes temos

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{B(x_0,r)} \Delta_p \psi (\psi - u)^+ dx &= -\int_{B(x_0,r)} |\nabla \psi|^{p-2} \nabla \psi \cdot \nabla (\psi - u)^+ dx \\ &= -\int_{B(x_0,r)\cap\{\psi > u\}} |\nabla \psi|^{p-2} \nabla \psi \cdot \nabla (\psi - u) dx. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Por outro lado, estendo a função $(\psi - u)^+$ como zero fora de $B(x_0, r)$ e observando que (por hipótese) $\Delta_p u \leq 0$ no sentido fraco, obtemos

$$0 \leq \int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla (\psi - u)^+ dx = \int_{B(x_0,r)\cap\{\psi > u\}} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla (\psi - u) dx. \tag{2.23}$$

De (2.22) e (2.23) temos

$$\int_{B(x_0,r)\cap\{\psi > u\}} \left(|\nabla \psi|^{p-2} \nabla \psi - |\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) \cdot \nabla (\psi - u) dx \leq 0.$$

Como o integrando é não negativo, temos $\psi \leq u$ em $B(x_0, r)$, o que é uma contradição, pois $u(x_0) < \psi(x_0)$. □

Lema 2.18. *Suponha que $f_n \to f$ uniformemente em $\overline{\Omega}$, f_n, $f \in C(\overline{\Omega})$. Se $\phi \in C^2(\Omega)$ toca f por baixo em x_0 de forma estrita, então existe $x_{n_j} \to x_0$ tal que*

$$f(x_{n_j}) - \phi(x_{n_j}) = \min_{\Omega} \left\{ f_{n_j} - \phi \right\}.$$

Demonstração. Seja $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset \Omega$. Como o toque é estrito, temos $\inf_{\Omega \setminus B(x_0,r)} \{f - \phi\} > 0$.
Por hipótese $f_n \longrightarrow f$ uniforme, daí tomando $\varepsilon = \frac{1}{2} \inf_{\Omega \setminus B(x_0,r)} \{f - \phi\}$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > N_1$ então

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2} \inf_{\Omega \setminus B(x_0,r)} \{f - \phi\} \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Assim, se $n > N_1$

$$-\frac{1}{2} \inf_{\Omega \setminus B(x_0,r)} \{f - \phi\} < f_n(x) - f(x) < \frac{1}{2} \inf_{\Omega \setminus B(x_0,r)} \{f - \phi\} \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Assim, se $x \in \Omega \setminus B(x_0, r)$ e $n > N_1$ temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \inf_{\Omega \setminus B(x_0,r)} \{f - \phi\} &\leq (f(x) - \phi(x)) - \frac{1}{2} \inf_{\Omega \setminus B(x_0,r)} \{f - \phi\} \\ &\leq (f(x) - \phi(x)) + (f_n(x) - f(x)) \\ &= f_n(x) - \phi(x). \end{aligned}$$

O que nos dá, se $n > N_1$

$$\inf_{\Omega \setminus B(x_0,r)} \{f_n - \phi\} \geq \frac{1}{2} \inf_{\Omega \setminus B(x_0,r)} \{f - \phi\} > 0.$$

Como $\lim_{n\to\infty} (f_n(x_0) - \phi(x_0)) = 0$. Existe $N_r \in \mathbb{N}$ tal que $N_r \geq N_1$ e

$$\inf_{\Omega \setminus B(x_0,r)} \{f_n - \phi\} > f_n(x_0) - \phi(x_0)$$

para $n > N_r$. Assim, para cada $n > N_r$, o valor no centro é menor que o ínfimo sobre $\Omega \setminus B(x_0, r)$. Portanto, existe um ponto $x_{n_1} \in \overline{B(x_0, r)}$ tal que

$$\inf_{\Omega}\{f_{n_1} - \phi\} = f_{n_1}(x_{n_1}) - \phi(x_{n_1}),$$

quando $n_1 > N_r$.
Repetindo o mesmo argumento para $\frac{r}{2}$, podemos encontrar $N_{\frac{r}{2}} \in \mathbb{N}$ (pode ser escolhido $N_{\frac{r}{2}} \geq n_r$) tal que se $n > N_{\frac{r}{2}}$, então

$$\inf_{\Omega \setminus B(x_0, \frac{r}{2})}\{f_n - \phi\} > f_n(x_0) - \phi(x_0)$$

para $n > N_{\frac{r}{2}}$. Assim, existe um ponto $x_{n_2} \in \overline{B(x_0, \frac{r}{2})}$ tal que

$$\inf_{\Omega}\{f_{n_2} - \phi\} = f_{n_2}(x_{n_2}) - \phi(x_{n_2}),$$

quando $n_2 > N_{\frac{r}{2}}$.
Para finalizar a prova, definimos $r_j = \frac{r}{j}$. Assim, temos $r_j \to 0$ quando $j \to \infty$ e $x_{n_j} \longrightarrow x_0$.

□

De agora em diante, u_∞ e x_* são como no Teorema 2.13.

Teorema 2.19. *A função u_∞ satisfaz*

$$\begin{cases} \Delta_\infty v = 0 & em\ \Omega \setminus \{x_*\} \\ v = \frac{\rho}{\|\rho\|_\infty} & em\ \{x_*\} \cup \partial\Omega \end{cases} \tag{2.24}$$

no sentido de viscosidade.

Demonstração. Uma vez que $u_\infty = \frac{\rho}{\|\rho\|_\infty}$ em $\{x_*\} \cup \partial\Omega$, resta verificar que $\Delta_\infty u_\infty = 0$ em $\Omega \setminus \{x_*\}$. Seja $\xi \in \Omega \setminus \{x_*\}$ e tome $\phi \in C^2(\Omega \setminus \{x_*\})$ tocando u_∞ por baixo em ξ. Assim,

$$\phi(x) - u_\infty(x) < 0 = \phi(\xi) - u_\infty(\xi), \text{ if } x \neq \xi.$$

Se $|\nabla\phi(\xi)| = 0$ então facilmente obtemos

$$\Delta_\infty \phi(\xi) = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(\xi)\frac{\partial\phi}{\partial x_j}(\xi)\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) = 0.$$

Caso contrário, se $|\nabla\phi(\xi)| \neq 0$ vamos tomar uma bola $B_\epsilon(\xi) \subset \Omega \setminus \{x_*\}$ tal que $|\nabla\phi| > 0$ em $B_\epsilon(\xi)$. Seja $n_0 > N$ tal que $x_{p_n} \notin B_\epsilon(\xi)$ para todo $n > n_0$. Isto é possível porque $x_{p_n} \to x_* \neq \xi$. Segue que u_{p_n} é p_n-harmônica em $B_\epsilon(\xi)$ no sentido de viscosidade.

De acordo com o Lema 2.18, seja $\{\xi_{n_j}\} \subset B_\epsilon(\xi)$ tal que $\xi_{n_j} \to \xi$ e

$$m_j := \min_{B_\epsilon(\xi)} \left\{u_{p_{n_j}} - \phi\right\} = u_{p_{n_j}}(\xi_{n_j}) - \phi(\xi_{n_j}) \leq u_{p_{n_j}}(x) - \phi(x), \quad x \neq \xi_{n_j}.$$

A função $\psi(x) := \phi(x) + m_j - |x - \xi_{n_j}|^4$ pertence a $C^2(B_\epsilon(\xi))$ e toca u_{n_j} por baixo em ξ_{n_j}. De fato,

$$\begin{aligned} \psi(x) - u_{p_{n_j}}(x) &= \phi(x) - u_{p_{n_j}}(x) + m_j - |x - \xi_{n_j}|^4 \\ &\leq -|x - \xi_{n_j}|^4 < 0 = \psi(\xi_{n_j}) - u_{p_{n_j}}(\xi_{n_j}), \quad x \neq \xi_{n_j}. \end{aligned}$$

Assim, $\Delta_{p_{n_j}}\psi(\xi_{n_j}) \leq 0$, uma vez que $u_{p_{n_j}}$ é p_{n_j}-harmônica em $B_\epsilon(\xi)$. Assim,

$$0 \geq \Delta_{p_{n_j}}\psi(\xi_{n_j}) = |\nabla\psi(\xi_{n_j})|^{p_{n_j}-4}\left\{|\nabla\psi(\xi_{n_j})|^2 \Delta\psi(\xi_{n_j}) + (p_{n_j} - 2)\Delta_\infty\psi(\xi_{n_j})\right\}$$

a partir do que obtemos

$$\Delta_\infty \phi(\xi_{n_j}) = \Delta_\infty \psi(\xi_{n_j}) \leq -\frac{\left|\nabla \psi(\xi_{n_j})\right|^2}{p_{n_j} - 2} \Delta \psi(\xi_{n_j}).$$

Então, fazendo $j \to \infty$ concluímos que $\Delta_\infty \phi(\xi) \leq 0$.

Provamos que u_∞ é ∞-superharmônica em $\Omega \backslash \{x_*\}$, no sentido de viscosidade. Analogamente, podemos provar que u_∞ é também ∞-subharmônica em $\Omega \backslash \{x_*\}$, no sentido de viscosidade. □

Recordamos que u_∞ é a única solução do problema de Dirichlet (2.24). Este resultado de unicidade é uma consequência do seguinte princípio de comparação (ver [6, 21]):

Teorema 2.20 (Princípio de Comparação). *Seja D um domínio limitado e sejam $u, v \in C(\overline{D})$ satisfazendo $\Delta_\infty u \geq 0$ em D e $\Delta_\infty v \leq 0$ em D. Se $u \leq v$ em ∂D, então $u \leq v$ em D.*

Teorema 2.21. *A função u_∞ é estritamente positiva em Ω e atinge o seu valor máximo 1 somente em x_*.*

Demonstração. Seja $D := \Omega \backslash \{x_*\}$. Uma vez que $u_\infty(x_*) > 0$ e u_∞ é não negativa e ∞-harmônica em D, resulta da desigualdade Harnack para as funções infinito harmônicas (ver [32]) que $Z_\infty := \{x \in \Omega : u_\infty(x) = 0\}$ é aberto em Ω. Uma vez que Z_∞ é também fechado e $Z_\infty \neq \Omega$, concluímos que Z_∞ é vazio. Portanto, $u > 0$ em Ω.

Sejam $m := \max\{|x - x_*| : x \in \partial\Omega\}$ e $v(x) := 1 - \frac{1}{m}|x - x_*|$, $x \in \Omega$. É fácil verificar que $\Delta_\infty v = 0$ em D e que $v \geq u_\infty$ on $\partial D = \{x_*\} \cup \partial\Omega$. Portanto, pelo princípio de comparação acima, temos

$$u_\infty(x) \leq v(x) = 1 - \frac{1}{m}|x - x_*| < 1 = \|u_\infty\|_\infty, \quad \text{para todo } x \in \Omega \backslash \{x_*\}.$$

□

Visto que x_* é também um ponto de máximo da função distância ρ, uma conseqüência imediata do teorema anterior é que se Ω é tal que ρ tem um único ponto de máximo, então a família $\{u_p\}_{p>N}$ converge, quando $p \to \infty$, para a única solução u_∞ do problema de Dirichlet (2.24). No entanto, esta propriedade de Ω, por si só, não garante que $u_\infty = \frac{\rho}{\|\rho\|_\infty}$. Por exemplo, para o quadrado $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\right\}$ a origem é o único ponto de máximo da função distância ρ, mas pode-se verificar a partir de [22, Proposição 4.1], ou da Proposição 4.3 do Apêndice, que ρ não é ∞-harmônica nos pontos de Ω nos eixos coordenados. De fato, para um domínio limitado geral Ω a função falha em ser ∞-harmônica exatamente no *Ridge de* Ω, a saber, o conjunto $\mathcal{R}(\Omega)$ de todos pontos em Ω cuja distância até a fronteira é atingida em pelo menos dois pontos de $\partial\Omega$. Este fato bem conhecido pode ser provado através da combinação de Corolários 3.4 e 4.4 de [13], como apontado em [40, Lema 2.6]. Note que $\mathcal{R}(S)$ é um conjunto dos pontos em S que estão sobre os eixos coordenados. Como veremos a seguir, a condição complementar para garantir que $u_\infty = \frac{\rho}{\|\rho\|_\infty}$ é que o Ridge de Ω seja um conjunto unitário: $\mathcal{R}(\Omega) = \{x_0\}$, em que x_0 indica o único ponto de máximo de ρ.

Teorema 2.22. *Tem-se $u_\infty = \frac{\rho}{\|\rho\|_\infty}$ em $\overline{\Omega}$ se, e somente se:*

(i) ρ tem um único ponto de máximo, digamos x_0, e

(ii) para cada $x \in \Omega \backslash \{x_0\}$ existe um único $y_x \in \partial\Omega$ tal que $|x - y_x| = \rho(x)$.

Demonstração. Se $u_\infty = \frac{\rho}{\|\rho\|_\infty}$ então x_* é o único ponto de máximo da função de distância ρ, de acordo com os Teoremas 2.13 e 2.21. Segue do Teorema 2.19 que $\Delta_\infty \rho = 0$ em $\Omega \backslash \{x_*\}$. Assim, $\mathcal{R}(\Omega) = \{x_0\}$, condição que é equivalente a (ii).

Reciprocamente, o item (i) do Teorema 2.13 implica que $x_0 = x_*$, enquanto que o item (ii) implica que $\mathcal{R}(\Omega) = \{x_0\}$. Segue que $\frac{\rho}{\|\rho\|_\infty}$ satisfaz (2.24). Assim, a unicidade de solução de viscosidade do problema de Dirichlet que garante $u_\infty = \frac{\rho}{\|\rho\|_\infty}$. □

Bolas, elipses e outros domínios convexos satisfazem as condições (i) e (ii).

2.3 Multiplicidade de minimizadores do quociente $\frac{\|\nabla\phi\|_\infty}{\|\phi\|_\infty}$ em $W_0^{1,\infty}(\Omega)\setminus\{0\}$.

Nesta seção, vamos mostrar que cada ponto de máximo x_0 da função distância ρ dá origem a uma função positiva $u \in W_0^{1,\infty}(\Omega)\setminus\{0\}$ satisfazendo

$$\|u\|_\infty = 1 \quad \text{e} \quad \|\nabla u\|_\infty = \frac{1}{\|\rho\|_\infty} = \min\left\{\frac{\|\nabla\phi\|_\infty}{\|\phi\|_\infty} : \phi \in W_0^{1,\infty}(\Omega)\setminus\{0\}\right\}. \tag{2.25}$$

Além disso, tal função alcança seu valor máximo somente em x_0. Em particular, podemos concluir que se Ω é um anel, existem infinitas funções positivas e não radiais que satisfazendo (2.25).

Proposição 2.23. *Seja $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e seja $u_\infty \in C(\overline{\Omega})$ a única solução de viscosidade do seguinte problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta_\infty u = 0 & \text{em } \Omega\setminus\{x_0\} \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ u(x_0) = 1. \end{cases} \tag{2.26}$$

Então,

(i) $0 < u_\infty(x) < 1$ para todo $x \in \Omega\setminus\{x_0\}$.

(ii) se x_0 é um ponto de máximo da função distância ρ, então $\|u_\infty\|_\infty = 1$ e

$$\|\nabla u_\infty\|_\infty = \frac{1}{\|\rho\|_\infty}. \tag{2.27}$$

Demonstração. Seguindo a prova do Teorema 2.21, obtemos o item (i) combinando a desigualdade Harnack e princípio de comparação em $D := \Omega\setminus\{x_0\}$.

A fim de provar (ii) vamos mostrar primeiramente que

$$u_\infty = \lim_{p\to\infty} u_p, \text{ uniformemente em } \overline{\Omega}$$

em que

$$\begin{cases} -\Delta_p u_p = \Lambda_p(\Omega)\delta_{x_0} & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

É fácil verificar que $-\Delta_p u_p \geq 0$ in Ω, no sentido fraco. Assim, de acordo com o princípio de comparação na forma fraca, $u_p \geq 0$ em Ω.

Uma vez que

$$\Lambda_p(\Omega)\|u_p\|_\infty^p \leq \|\nabla u_p\|_p^p = \Lambda_p(\Omega)u_p(x_0) \leq \Lambda_p(\Omega)\|u_p\|_\infty$$

concluímos que

$$u_p(x_0) \leq \|u_p\|_\infty \leq 1 \quad \text{e} \quad \|\nabla u_p\|_p \leq \Lambda_p(\Omega)^{\frac{1}{p}}.$$

Seja $r \in (N, p)$. Visto que

$$\|\nabla u_p\|_r \leq \|\nabla u_p\|_p |\Omega|^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}} \leq \Lambda_p(\Omega)^{\frac{1}{p}} |\Omega|^{-\frac{1}{p}} |\Omega|^{\frac{1}{r}} \leq \frac{|\Omega|^{\frac{1}{r}}}{\|\rho\|_\infty}, \quad p > r$$

a família $\{u_p\}_{p>r}$ é uniformemente limitada em $W_0^{1,r}(\Omega)$. Segue, como na prova da Proposição 2.12, que existem $p_n \to \infty$ e $U_\infty \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ tais que $u_{p_n} \to U_\infty$ (fortemente) em $C(\overline{\Omega})$ com

$$\|\nabla U_\infty\|_\infty \leq \frac{1}{\|\rho\|_\infty} \quad \text{e} \quad U_\infty \leq \frac{\rho}{\|\rho\|_\infty} \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{2.28}$$

Agora vamos mostrar que $U_\infty(x_0) = \|U_\infty\|_\infty = 1$.

Uma vez que

$$\begin{aligned}\Lambda_p(\Omega)\rho(x_0) &= \int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p\cdot\nabla\rho \mathrm{d}x\\ &\leq \|\nabla u_p\|_p^{p-1}\|\nabla\rho\|_p = (\Lambda_p(\Omega)u_p(x_0))^{\frac{p-1}{p}}|\Omega|^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

temos

$$\rho(x_0)\leq \Lambda_p(\Omega)^{-\frac{1}{p}}(u_p(x_0))^{\frac{p-1}{p}}|\Omega|^{\frac{1}{p}}.$$

Assim, fazendo $p\to\infty$, obtemos

$$\rho(x_0)\leq \|\rho\|_\infty U_\infty(x_0).$$

A segunda desigualdade em (2.28) implica, então, que $\rho(x_0)=\|\rho\|_\infty U_\infty(x_0)$. Assim, se $\rho(x_0)=\|\rho\|_\infty$ concluímos que $U_\infty(x_0)=1$. Portanto, (2.27) se verifica para U_∞, visto que

$$\|\nabla U_\infty\|_\infty \leq \frac{1}{\|\rho\|_\infty}\leq \frac{\|\nabla U_\infty\|_\infty}{\|U_\infty\|_\infty} = \|\nabla U_\infty\|_\infty.$$

Repetindo os argumentos na prova do Teorema 2.19 podemos verificar que U_∞ é uma solução de viscosidade de (2.26), de modo que $U_\infty = u_\infty$, provando (2.27). □

O seguinte corolário é uma consequência imediata do Teorema 2.23.

Corolário 2.24. *Suponha que a função distância de Ω tem um número infinito de pontos de máximos. Então, existem infinitas funções positivas $u\in C(\overline{\Omega})\cap W_0^{1,\infty}(\Omega)$ satisfazendo*

$$0<u(x)\leq 1=\|u\|_\infty \quad e \quad \|\nabla u\|_\infty = \min\left\{\|\nabla\phi\|_\infty : \phi\in W_0^{1,\infty}(\Omega) \quad e \quad \|\phi\|_\infty = 1\right\}. \tag{2.29}$$

Além disso, cada uma destas funções assume o seu valor máximo 1 somente em um ponto, que também é um ponto de máximo da função distância ρ.

Em particular, existem um número infinito de funções não radiais que satisfazem (2.29) para o anel $\Omega_{a,b} := \left\{x\in\mathbb{R}^N : 0<a<|x|<b\right\}$.

Demonstração. Para cada ponto x_0 no centro do anel, seja $u\in C(\overline{\Omega})\cap W_0^{1,\infty}(\Omega)$ solução de

$$\begin{cases}\Delta_\infty u = 0 & \text{em } \Omega\setminus\{x_0\}\\ u=0 & \text{em } \partial\Omega\\ u(x_0)=1.\end{cases}$$

Pela Proposição 2.23, temos

$$0<u(x)\leq 1=\|u\|_\infty \quad , \quad \|\nabla u\|_\infty = \min\left\{\|\nabla\phi\|_\infty : \phi\in W_0^{1,\infty}(\Omega) \text{ e } \|\phi\|_\infty=1\right\}$$

e $0<u(x)<1$ para todo $x\in\Omega\setminus\{x_0\}$, daí u não pode ser radial. □

Capítulo

3

Um problema de minimização singular

Neste capítulo vamos considerar o problema de minimizar o funcional $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \mapsto \|\nabla u\|_p^p \in [0, \infty)$ sobre o conjunto

$$\mathcal{M}(\Omega) := \left\{ v \in W_0^{1,p}(\Omega) : \lim_{q \to 0^+} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |v|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} = 1 \right\},$$

exigindo somente que $p > 1$.
Como veremos, este problema de minimização está diretamente relacionado ao seguinte problema de Dirichlet singular

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \lambda v^{q-1} & \text{em } \Omega, \quad 0 \le q < 1, \quad \lambda > 0 \\ v > 0 & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

e à determinação da melhor constante C na seguinte desigualdade do tipo log-Sobolev

$$\exp\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \log |v|^p \, dx \right) \le C \, \|\nabla v\|_p^p, \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.2}$$

3.1 Preliminares

Nesta seção, apresentamos algumas propriedades das soluções fracas do problema de Dirichlet singular (3.1) que serão utilizadas neste capítulo. Uma solução fraca de (3.1) é uma função $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\operatorname{ess\,inf}_K v > 0$ em cada compacto $K \subset \Omega$ e

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \cdot \nabla \varphi dx = \lambda \int_\Omega v^{q-1} \varphi dx, \quad \forall \, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.3}$$

A seguir, apresentamos uma simples prova da unicidade de soluções para (3.1), que faz uso da seguinte desigualdade bem conhecida (veja [29]):

$$(|x|^{p-2} \, x - |y|^{p-2} \, y) \cdot (x - y) \ge 0, \quad \forall \, x, y \in \mathbb{R}^N. \tag{3.4}$$

Proposição 3.1. *Sejam $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ soluções fracas de (3.1). Então, $u_2 = u_1$ q. t. p. em Ω.*

Demonstração. Como u_1 e u_2 são soluções fracas de (3.1) temos

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 \cdot \nabla \varphi dx = \lambda \int_\Omega u_1^{q-1} \varphi dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{3.5}$$

e

$$\int_\Omega |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 \cdot \nabla\varphi \mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega u_2^{q-1}\varphi \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.6}$$

Subtraindo as equações (3.6) e (3.5) temos

$$\int_\Omega (|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 - |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1)\cdot \nabla\varphi \mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega \left(u_2^{q-1} - u_1^{q-1}\right)\varphi \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.7}$$

Fazendo $\varphi = u_2 - u_1$ em (3.7) obtemos

$$\int_\Omega (|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 - |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1)\cdot \nabla(u_2-u_1) \mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega \left(u_2^{q-1} - u_1^{q-1}\right)(u_2-u_1) \mathrm{d}x. \tag{3.8}$$

Segue de (3.4) que o integrando no lado esquerdo de (3.8) é não negativo. É fácil ver que o integrando do lado direito de (3.8) não pode ser positivo. Assim, ambos devem ser nulos em quase todo Ω, o que implica que $u_2 = u_1$ q. t. p. em Ω. □

A seguir, obtemos estimativas para as soluções fracas de (3.1) que dependem explicitamente de $q \in [0,1)$.

Recordamos que (veja Corolário 1.12)

$$\lambda_q(D^*) \le \lambda_q(D), \quad 0 < q < p^\star \tag{3.9}$$

em que D é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ e D^* é a bola centrada na origem e com mesmo volume de D, isto é, $|D^*| = |D|$.

A desigualdade (3.9), entre outras importantes utilidades, fornece uma cota inferior para $\lambda_q(D)$ em termos de $|D|$ and $\lambda_q(B_1)$, em que B_1 denota a bola unitária de $\mathbb{R}^N$. Realmente, um argumento de escalonamento simples mostra que

$$\lambda_q(D^*) = \lambda_q(B_1)\left(\frac{|D^*|}{\omega_N}\right)^{1-\frac{p}{N}-\frac{p}{q}}, \quad 0 < q < p^\star \tag{3.10}$$

em que $\omega_N = |B_1|$.

Assim, da combinação entre (3.9) e (3.10) obtém-se a seguinte versão da conhecida desigualdade de Poincaré-Sobolev

$$\left(\int_D |v|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{q}} \le \frac{|D|^{\frac{p}{q}+\frac{p}{N}-1}}{\lambda_q(B_1)\,|B_1|^{\frac{p}{q}+\frac{p}{N}-1}} \|\nabla v\|^p_{L^p(D)}, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(D) \text{ e } 0 < q < p^\star.$$

Quando $q = p$ temos

$$\int_D |v|^p \mathrm{d}x \le \frac{|D|^{\frac{p}{N}}}{C_{N,p}} \int_D |\nabla v|^p \,\mathrm{d}x, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(D), \tag{3.11}$$

em que $C_{N,p} = \lambda_p(B_1)\,|B_1|^{\frac{p}{N}}$, uma constante positiva que depende apenas de p e N.

O seguinte lema é uma adaptação de [15, Teorema 4.1] que, por sua vez, é baseado em uma técnica clássica (ver [5, 25]).

Lema 3.2. *Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma solução fraca de (3.1), então $u \in L^\infty(\Omega)$ e*

$$\|u\|_\infty \le K_{N,p}\,|\Omega|^{\frac{p}{N(p-q)}}\,\lambda^{\frac{1}{p-q}}, \tag{3.12}$$

em que $K_{N,p}$ é uma constante positiva que depende apenas de N and p.

Demonstração. Para cada $t > 0$, seja

$$E_t := \{x \in \Omega : u > t\} \text{ e } (u-t)_+ := \max\{u-t, 0\} \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Suponhamos $|E_t| > 0$. Uma vez que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla(u-t)_+ \,\mathrm{d}x = \int_{E_t} |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x$$

e

$$\int_\Omega u^{q-1}(u-t)_+\,\mathrm{d}x = \int_{E_t} u^{q-1}(u-t)\,\mathrm{d}x \le t^{q-1}\int_{E_t}(u-t)\,\mathrm{d}x,$$

(note que $q-1<0$) obtemos de (3.3) que

$$\int_{E_t}|\nabla u|^p\,\mathrm{d}x \le \lambda t^{q-1}\int_{E_t}(u-t)\,\mathrm{d}x. \tag{3.13}$$

Agora, estimamos $\int_{E_t}|\nabla u|^p\,\mathrm{d}x$ por baixo. Para isto, aplicamos desigualdade de Hölder e a estimativa (3.11) com $D=E_t$ para obter

$$\left(\int_{E_t}(u-t)\,\mathrm{d}x\right)^p \le |E_t|^{p-1}\int_{E_t}(u-t)^p\,\mathrm{d}x \le \frac{|E_t|^{p-1}|E_t|^{\frac{p}{N}}}{C_{N,p}}\int_{E_t}|\nabla u|^p\,\mathrm{d}x.$$

Assim,

$$C_{N,p}|E_t|^{-\frac{p}{N}+1-p}\left(\int_{E_t}(u-t)\,\mathrm{d}x\right)^p \le \int_{E_t}|\nabla u|^p\,\mathrm{d}x$$

e, tendo em conta (3.13), temos

$$C_{N,p}|E_t|^{-\frac{p}{N}+1-p}\left(\int_{E_t}(u-t)\,\mathrm{d}x\right)^p \le \lambda t^{q-1}\int_{E_t}(u-t)\,\mathrm{d}x,$$

o que equivale a

$$\left(\int_{E_t}(u-t)\,\mathrm{d}x\right)^{p-1} \le \frac{\lambda}{C_{N,p}}t^{q-1}\,|E_t|^{\frac{p+N(p-1)}{N}}.$$

Esta última desigualdade pode ser reescrita como

$$\left(\int_{E_t}(u-t)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{N(p-1)}{p+N(p-1)}} \le \left(\frac{\lambda}{C_{N,p}}t^{q-1}\right)^{\frac{N}{p+N(p-1)}}|E_t|. \tag{3.14}$$

Vamos definir

$$f(t) := \int_{E_t}(u-t)\,\mathrm{d}x = \int_t^\infty |E_s|\,\mathrm{d}s,$$

em que a segunda igualdade decorre do princípio de Cavalieri.

Já que $f'(t) = -|E_t|$ a desigualdade em (3.14) pode ser reescrita como

$$t^{\frac{(1-q)N}{p+N(p-1)}} \le -\left(\frac{\lambda}{C_{N,p}}\right)^{\frac{N}{p+N(p-1)}} f(t)^{-\frac{N(p-1)}{p+N(p-1)}}f'(t). \tag{3.15}$$

Integração de (3.15) fornece

$$\begin{aligned}\frac{p+N(p-1)}{p+N(p-q)}t^{\frac{p+N(p-q)}{p+N(p-1)}} &\le \left(\frac{\lambda}{C_{N,p}}\right)^{\frac{N}{p+N(p-1)}}\frac{p+N(p-1)}{p}\left[f(0)^{\frac{p}{p+N(p-1)}} - f(t)^{\frac{p}{p+N(p-1)}}\right]\\ &\le \left(\frac{\lambda}{C_{N,p}}\right)^{\frac{N}{p+N(p-1)}}\frac{p+N(p-1)}{p}\left(\|u\|_1\right)^{\frac{p}{p+N(p-1)}} < \infty.\end{aligned}$$

Concluímos que se $|E_t|>0$ então $t\le K$, em que K é uma constante positiva que não depende de t. Obviamente, isto implica $\|u\|_\infty<\infty$.

Assim, temos

$$\begin{aligned}\frac{p+N(p-1)}{p+N(p-q)}t^{\frac{p+N(p-q)}{p+N(p-1)}} &\le \left(\frac{\lambda}{C_{N,p}}\right)^{\frac{N}{p+N(p-1)}}\frac{p+N(p-1)}{p}\left(\|u\|_1\right)^{\frac{p}{p+N(p-1)}}\\ &\le \left(\frac{\lambda}{C_{N,p}}\right)^{\frac{N}{p+N(p-1)}}\frac{p+N(p-1)}{p}\left(\|u\|_\infty|\Omega|\right)^{\frac{p}{p+N(p-1)}}\end{aligned}$$

e, em seguida, fazendo $t \to \|u\|_\infty$, obtemos

$$\|u\|_\infty \leq \left(\frac{\lambda}{C_{N,p}}\right)^{\frac{1}{p-q}} \left(\frac{p+N(p-q)}{p}\right)^{\frac{p+N(p-1)}{N(p-q)}} |\Omega|^{\frac{p}{N(p-q)}}$$

o que leva a (3.12) com

$$K_{N,p} := \sup_{0\leq q\leq 1} C_{N,p}^{-\frac{1}{p-q}} \left(\frac{p+N(p-q)}{p}\right)^{\frac{p+N(p-1)}{N(p-q)}}.$$

□

No próximo lema, $\phi_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ denota a função p-torção de Ω, isto é, a solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p v = 1 & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

É bem conhecido que a função ϕ_p é positiva em Ω e pertence a $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$.

Lema 3.3. *Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma solução fraca de (3.1), então*

$$0 < \left(K_{N,p} |\Omega|^{\frac{p}{N(p-q)}}\right)^{\frac{q-1}{p-1}} \lambda^{\frac{1}{p-q}} \phi_p(x) \leq u(x), \quad \text{para quase todo } x \in \Omega. \tag{3.16}$$

Demonstração. Sejam $0 \leq \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $c := \left(\lambda \|u\|_\infty^{q-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}$. Uma vez que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \mathrm{d}x &= \lambda \int_\Omega u^{q-1} \varphi \mathrm{d}x \\ &\geq \lambda \|u\|_\infty^{q-1} \int_\Omega \varphi \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega c^{p-1} \varphi \mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla(c\phi_p)|^{p-2} \nabla(c\phi_p) \cdot \nabla\varphi \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

o princípio de comparação na forma fraca garante que

$$c\phi_p(x) \leq u(x), \quad \text{para quase todo } x \in \Omega.$$

Isto leva a (3.16) visto que (3.12) implica

$$c \geq \lambda^{\frac{1}{p-1}} (K_{N,p} |\Omega|^{\frac{p}{N(p-q)}} \lambda^{\frac{1}{p-q}})^{\frac{q-1}{p-1}} = \left(K_{N,p} |\Omega|^{\frac{p}{N(p-q)}}\right)^{\frac{q-1}{p-1}} \lambda^{\frac{1}{p-q}}, \quad \text{para quase todo } x \in \Omega.$$

□

Observação 3.1. *Resulta do Lema 3.2 e Lema 3.3 que se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma solução de (3.1) então*

$$0 < A\lambda^{\frac{p-1}{p-q}} \leq \lambda u(x)^{q-1} \leq B\lambda^{\frac{p-1}{p-q}} \phi_p(x)^{q-1}, \quad \text{para quase todo } x \in \Omega,$$

em que A e B são constantes positivas que dependem apenas de N, p e $|\Omega|$. Este fato implica que se Ω' é um subdomínio de Ω tal que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, então a função λu^{q-1} fica limitada em $\overline{\Omega'}$.

3.2 Uma desigualdade do tipo log-Sobolev

Como vimos anteriormente (Corolário 1.1), para cada $v \in L^1(\Omega)$ a função $q \in (0,1] \mapsto \left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |v|^q \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$ é crescente. Este fato implica que

$$0 \leq \lim_{q\to 0^+} \left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |v|^q \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} = \inf_{0<s\leq 1} \left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |v|^s \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}} \leq \frac{\|v\|_1}{|\Omega|}, \quad v \in L^1(\Omega)$$

e também que a função $q \in (0,1] \mapsto \lambda_q(\Omega)\,|\Omega|^{\frac{p}{q}}$ é decrescente, de modo que podemos definir

$$\mu(\Omega) := \lim_{q\to 0^+} \lambda_q(\Omega)\,|\Omega|^{\frac{p}{q}} = \sup_{0<s\leq 1} \lambda_s(\Omega)\,|\Omega|^{\frac{p}{s}}.$$

Claramente,

$$0 < \lambda_1(\Omega)\,|\Omega|^p \leq \mu(\Omega) \leq \infty. \tag{3.17}$$

Nosso primeiro objetivo nesta seção é mostrar que $\mu(\Omega) < \infty$.

Lema 3.4. *Tem-se*

$$\lim_{q\to 0^+} \left(\int_0^1 (1 - t^{\frac{1}{q}})^N \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} = e^{-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{N}}, \quad N \geq 2.$$

Demonstração. Temos

$$\lim_{q\to 0^+} \left(\int_0^1 (1 - t^{\frac{1}{q}})^N \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} = \lim_{s\to\infty} \left(\int_0^1 (1 - t^{s})^N \mathrm{d}t\right)^{s} = e^L.$$

em que

$$\begin{aligned} L \quad &:= \quad \lim_{s\to\infty} \frac{\ln\left(\int_0^1 (1-t^s)^N \mathrm{d}t\right)}{s^{-1}} \\ &\overset{L'Hospital}{=} \quad \lim_{s\to\infty} \frac{s^2 N \int_0^1 (1-t^s)^{N-1} t^s \ln t \mathrm{d}t}{\int_0^1 (1-t^s)^N \mathrm{d}t} = \lim_{s\to\infty} s^2 N \int_0^1 (1-t^s)^{N-1} t^s \ln t \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Depois de fazer a mudança de variável $\tau = t^s$ na última integral, obtemos

$$L = N \lim_{s\to\infty} \int_0^1 (1-\tau)^{N-1} \tau^{\frac{1}{s}} \ln\tau \mathrm{d}\tau = N\int_0^1 (1-\tau)^{N-1} \ln\tau \mathrm{d}\tau.$$

A fim de concluir a prova, é suficiente verificar que

$$N\int_0^1 (1-\tau)^{N-1} \ln\tau \mathrm{d}\tau = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{N}, \quad N \geq 2. \tag{3.18}$$

Para isto, seja $I(N) := N\int_0^1 (1-\tau)^{N-1} \ln\tau \mathrm{d}\tau$. Após alguns cálculos simples pode-se mostrar que

$$I(N+1) = I(N) - \frac{1}{N+1}, \quad N \geq 2. \tag{3.19}$$

É fácil verificar que $I(2) = -1 - \frac{1}{2}$. Assim, usando a fórmula recursiva (3.19), chegamos a (3.18). □

Lema 3.5. *Suponha que o domínio limitado Ω seja estrelado com respeito a $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Existe $\rho \in C(\overline{\Omega})$ tal que: $0 < \rho \leq 1$ em Ω, $\rho(x_0) = 1$, $\rho = 0$ em $\partial\Omega$ e*

$$\lim_{q\to 0^+} \left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |\rho|^q \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} = e^{-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{N}}.$$

Em particular, qualquer função $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $v \geq \rho$ em Ω satisfaz

$$\lim_{q \to 0^+} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |v|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \geq e^{-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{N}} > 0.$$

Demonstração. Vamos supor nesta prova, sem perda de generalidade, que $x_0 = 0$.

Para cada $0 \neq x \in \overline{\Omega}$, seja $r(x)$ o único número positivo tal que

$$r(x)x \in \partial\Omega.$$

Claramente, $r(x) \geq 1$ e $r(x) \to \infty$ quando $x \to 0$. Além disso, se $x \in \Omega$ e $\alpha > 0$ é tal que $\alpha x \in \Omega$, então $r(\alpha x)\alpha x = r(x)x$, de modo que

$$r(\alpha x) = \frac{r(x)}{\alpha}.$$

Vamos definir $\rho : \overline{\Omega} \mapsto [0,1]$ por

$$\rho(x) := \begin{cases} 1 - \frac{1}{r(x)} & \text{se} \quad x \in \overline{\Omega} \quad , \quad x \neq 0. \\ 1 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

O gráfico de ρ em $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ é um cone de base Ω, altura 1 e vértice no ponto $(0,1) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$.

Para cada $t \in [0,1)$ a mudança de variável $x = (1-t)y$ fornece

$$|\{\rho(x) > t\}| = \int_{\{\rho(x)>t\}} dx = \int_{\{\rho(y)>0\}} (1-t)^N dy = (1-t)^N \, |\Omega| \, . \tag{3.20}$$

Com efeito, fazendo $\alpha = (1-t)$ vale o seguinte

$$\rho(\alpha y) = 1 - \frac{1}{r(\alpha y)} = 1 - \frac{\alpha}{r(y)} = 1 - \alpha + \alpha \left(1 - \frac{1}{r(y)}\right) = 1 - \alpha + \alpha\rho(y).$$

Segue que

$$t < \rho((1-t)y) = t + (1-t)\rho(y) \Longleftrightarrow 0 < \rho(y).$$

Assim, (3.20) e o princípio de Cavalieri mostram que

$$\int_\Omega \rho^q dx = \int_0^1 |\{\rho(x)^q > t\}| \, dt = \int_0^1 \left| \left\{ \rho(x) > t^{\frac{1}{q}} \right\} \right| dt = \int_0^1 (1 - t^{\frac{1}{q}})^N \, |\Omega| \, dt,$$

de modo que

$$\lim_{q \to 0^+} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \rho^q dx \right)^{\frac{1}{q}} = \lim_{q \to 0^+} \left(\int_0^1 (1 - t^{\frac{1}{q}})^N dt \right)^{\frac{1}{q}} = e^{-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{N}}.$$

□

Observação 3.2. *Se $\Omega = B_R$ é a bola centrada na origem de raio R, então $\rho(x) = 1 - \frac{|x|}{R}$ e*

$$\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} \rho^q dx = \int_0^1 (1 - t^{\frac{1}{q}})^N dt.$$

Na prova do teorema seguinte vamos escrever Ω como união finita de subdomínios estrelados. Esta decomposição é bastante geral no sentido em que é válida para os domínios limitados com baixa regularidade como, por exemplo, aqueles com fronteira Lipschitz (ver [18, Lema II.1.3]).

Teorema 3.6. *Existe $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $v > 0$ em Ω e*

$$\lim_{q \to 0^+} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |v|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} = 1.$$

Além disso,

$$\mu(\Omega) \leq \|\nabla v\|_p^p. \tag{3.21}$$

Demonstração. Sejam $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_m$ subdomínios estrelados de Ω tal que $\Omega = \bigcup_{j=1}^{m} \Omega_j$ (não necessariamente disjuntos).

De acordo com o Lema 3.5, para cada $j \in \Lambda := \{1, 2, \ldots, m\}$ podemos tomar $v_j \in W_0^{1,p}(\Omega_j)$ tal que $v_j > 0$ em Ω_j e

$$e^{-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{N}} \leq \lim_{q\to 0^+} \left(\frac{1}{|\Omega_j|} \int_{\Omega_j} |v_j|^q \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} = \inf_{0<s\leq 1} \left(\frac{1}{|\Omega_j|} \int_{\Omega_j} |v_j|^s \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Assim,

$$e^{-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{N}} \leq \left(\frac{1}{|\Omega_j|} \int_{\Omega_j} |v_j|^q \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}}, \quad j \in \Lambda, \quad 0 < q \leq 1.$$

Estendendo v_j a zero fora de Ω_j podemos considerar que v_j pertence a $W_0^{1,p}(\Omega)$. Assim,

$$V := \sum_{j=1}^{m} v_j \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Agora, fazendo $q_n \to 0^+$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $j_n \in \Lambda$ tal que

$$\frac{1}{|\Omega_{j_n}|} \int_{\Omega_{j_n}} |v_{j_n}|^{q_n} \,\mathrm{d}x = \min \left\{ \frac{1}{|\Omega_j|} \int_{\Omega_j} |v_j|^{q_n} \,\mathrm{d}x : j \in \Lambda \right\}.$$

Em seguida, para cada fixado $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |V|^{q_n} \,\mathrm{d}x &= \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{|\Omega_j|} \int_{\Omega_j} |v_j|^{q_n} \,\mathrm{d}x \right) |\Omega_j| \\
&\geq \frac{1}{|\Omega_{j_n}|} \int_{\Omega_{j_n}} |v_{j_n}|^{q_n} \,\mathrm{d}x \sum_{j=1}^{m} |\Omega_j| \\
&\geq \frac{|\Omega|}{|\Omega_{j_n}|} \int_{\Omega_{j_n}} |v_{j_n}|^{q_n} \,\mathrm{d}x \geq |\Omega| \, (e^{-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{N}})^{q_n},
\end{aligned}$$

e daí podemos concluir que

$$\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |V|^{q_n} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q_n}} \geq e^{-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{N}} > 0.$$

Segue que

$$\theta := \lim_{q\to 0^+} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |V|^q \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} \geq e^{-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{N}} > 0.$$

Portanto, a função $v := \theta^{-1} V$ pertence a $W_0^{1,p}(\Omega)$, é positiva em Ω e satisfaz

$$\lim_{q\to 0^+} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |v|^q \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} = 1.$$

Uma vez que

$$\mu(\Omega) = \lim_{q\to 0^+} \lambda_q(\Omega) \, |\Omega|^{\frac{p}{q}} \leq \lim_{q\to 0^+} \frac{\|\nabla v\|_p^p}{\left(\int_\Omega |v|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{q}}} \, |\Omega|^{\frac{p}{q}} = \|\nabla v\|_p^p,$$

obtemos (3.21). $\square$

Pode ser interessante saber um limite inferior explícito para um mínimo abstrato como $\mu(\Omega)$. Assim, através da combinação (3.17) com (3.9) temos

$$\lambda_1(\Omega^*)\,|\Omega|^p \leq \lambda_1(\Omega)\,|\Omega|^p \leq \mu(\Omega), \tag{3.22}$$

em que Ω^* denota a bola centrada na origem e com raio $R = (|\Omega|/\omega_N)^{\frac{1}{N}}$, tal que $|\Omega^*| = |\Omega|$. É um fato conhecido (ver [14]) que $\lambda_1(D) = \|\phi_{p,D}\|_1^{1-p}$, em que D é um domínio limitado e $\phi_{p,D}$ denota a sua p-função de torção. Visto que a p-função de torção da bola B_R de raio R é explicitamente dada por

$$\phi_{p,B_R}(x) = \frac{p-1}{p} N^{-\frac{1}{p-1}} (R^{\frac{p}{p-1}} - |x|^{\frac{p}{p-1}}), \quad 0 \leq |x| \leq R,$$

podemos calcular $\lambda_1(\Omega^*)$ explicitamente e então obter, a partir de (3.22), a seguinte estimativa

$$N\left(N + \frac{p}{p-1}\right)^{p-1} (\omega_N)^{\frac{p}{N}}\,|\Omega|^{1-\frac{p}{N}} \leq \mu(\Omega). \tag{3.23}$$

Observação 3.3. *Note-se que quando $p = N$, a limitação inferior acima não depende de Ω. Este fato é de se esperar, uma vez que um argumento de escalonamento simples mostra que se $p = N$ então $\mu(\Omega)$ não depende de Ω.*

Por uma questão de clareza, vamos fazer uso da seguinte propriedade na próxima prova:

$$\lambda_q(\Omega)\,|\Omega|^{\frac{p}{q}} = |\Omega|^{1-\frac{N}{p}}\,\lambda_q(\Omega_1) \tag{3.24}$$

em que $\Omega_1 := \left\{|\Omega|^{-\frac{1}{N}}\,x : x \in \Omega\right\}$ é tal que $|\Omega_1| = 1$. Assim,

$$\mu(\Omega) = |\Omega|^{1-\frac{N}{p}}\,\mu(\Omega_1). \tag{3.25}$$

(Pode-se facilmente verificar (3.24) por escalonamento.)

Vamos definir,

$$\mathcal{M}(\Omega) := \left\{ v \in W_0^{1,p}(\Omega) : \lim_{q\to 0^+} \left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |v|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} = 1 \right\}.$$

É fácil verificar que $\mathcal{M}(\Omega)$ tem um número infinito de elementos, por meio da combinação do Lema 3.5 com a construção na prova do Teorema 3.6.

Como apontado na Introdução, para cada $q \in (0,1)$ existe $\alpha_q \in (0,1)$ e $u_q \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha_q}(\overline{\Omega})$ tal que

$$u_q > 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \quad \lambda_q(\Omega) = \|\nabla u_q\|_p^p, \quad \int_\Omega |u_q|^q \,\mathrm{d}x = 1 \tag{3.26}$$

e

$$\int_\Omega |\nabla u_q|^{p-2}\,\nabla u_q \cdot \nabla\varphi \mathrm{d}x = \lambda_q(\Omega) \int_\Omega u_q^{q-1}\varphi \mathrm{d}x \quad \text{para toda } \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.27}$$

A existência de u_q satisfazendo (3.26) e (3.27) está provada em [2], enquanto a Hölder regularidade de u_q segue diretamente de [20, Teorema 2.2 (i)]. Observemos que a prova de (3.27) apresentada em [2] é restrita às funções $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\mathrm{supp}\varphi \subset \Omega$. No entanto, esta restrição pode ser eliminada através da utilização de argumentos baseados no Lema de Fatou e a densidade de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Estes argumentos, que podem ser encontrados em [19, 33], serão empregados na próxima prova.

Teorema 3.7. *Para cada $q \in (0,1)$, seja $u_q \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha_q}(\overline{\Omega})$ satisfazendo (3.26) e (3.27). Existe $u \in \mathcal{M}(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$, tal que:*

(a) $u = \lim_{q\to 0^+} (|\Omega|^{\frac{1}{q}}\,u_q)$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$;

(b) $\mu(\Omega) = \|\nabla u\|_p^p = \min\left\{\|\nabla v\|_p^p : v \in \mathcal{M}(\Omega)\right\}$;

(c) $-\Delta_p u = \frac{\mu(\Omega)}{|\Omega|} u^{-1}$, em Ω;

(d) $0 < A\mu(\Omega)^{\frac{1}{p}} \phi_p(x) \leq u(x) \leq B\mu(\Omega)^{\frac{1}{p}}$, *para quase todo* $x \in \Omega$, *em que* A *e* B *são constantes positivas que dependem somente de* N, p *e* $|\Omega|$.

Demonstração. Levando-se em conta (3.25), assumimos nesta prova, sem perda de generalidade, que $|\Omega| = 1$. Assim,

$$\lim_{q\to 0^+} \lambda_q(\Omega) = \lim_{q\to 0^+} \|\nabla u_q\|_p^p = \mu(\Omega) \in (0,\infty). \tag{3.28}$$

Visto que

$$\lambda_q(\Omega) \left(\int_\Omega |v|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{q}} \leq \|\nabla v\|_p^p \quad \text{para toda } v \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{3.29}$$

temos

$$\mu(\Omega) \leq \|\nabla v\|_p^p \quad \text{para toda } v \in \mathcal{M}(\Omega). \tag{3.30}$$

Segue de (3.28) que existem $q_n \to 0^+$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tais que $u \geq 0$ em Ω, $u_{q_n} \rightharpoonup u$ (fracamente) em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $u_{q_n} \to u$ e pontualmente em quase todo Ω. Daí,

$$\|\nabla u\|_p \leq \liminf_{n\to\infty} \|\nabla u_{q_n}\|_p = \lim_{n\to\infty} \|\nabla u_{q_n}\|_p = \lim_{n\to\infty} \lambda_{q_n}(\Omega)^{\frac{1}{p}} = \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.31}$$

Notamos de (3.29), com $v = u$, que

$$\mu(\Omega) \lim_{q\to 0^+} \left(\int_\Omega |u|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{q}} \leq \|\nabla u\|_p^p.$$

Combinando esta estimativa com (3.31) obtemos

$$\lim_{q\to 0^+} \left(\int_\Omega |u|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \leq 1. \tag{3.32}$$

Por outro lado, para cada $s \in (0,1)$ e todo n grande o suficiente (tal que $q_n < s$), temos

$$1 = \left(\int_\Omega |u_{q_n}|^{q_n} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q_n}} \leq \left(\int_\Omega |u_{q_n}|^s \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Daí,

$$1 \leq \lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega |u_{q_n}|^s \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}} = \left(\int_\Omega |u|^s \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}},$$

em que usamos o Teorema da Convergência Dominada, uma vez que

$$0 \leq u_{q_n} \leq K_{N,p} \lambda_{q_n}(\Omega)^{\frac{1}{p-q_n}} \leq K_{N,p} \mu(\Omega)^{\frac{1}{p-q_n}}$$

de acordo com o Lema 3.2. Assim, concluímos que

$$1 \leq \lim_{s\to 0^+} \left(\int_\Omega |u|^s \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}}. \tag{3.33}$$

Combinando (3.32) e (3.33) obtemos

$$\lim_{q\to 0^+} \left(\int_\Omega |u|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} = 1.$$

Segue que $u \in \mathcal{M}(\Omega)$ e, assim , combinando (3.30) e (3.31) concluímos que

$$\mu(\Omega)^{\frac{1}{p}} = \|\nabla u\|_p = \lim_{n\to\infty} \|\nabla u_{q_n}\|_p, \tag{3.34}$$

o que finaliza a prova da afirmação de (b).

Tendo em vista a convergência fraca $u_{q_n} \rightharpoonup u$, a segunda igualdade em (3.34) implica que $u_{q_n} \to u$ (fortemente) em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Conforme (3.27) temos

$$\int_\Omega |\nabla u_{q_n}|^{p-2} \nabla u_{q_n} \cdot \nabla \varphi \mathrm{d}x = \lambda_{q_n}(\Omega) \int_\Omega u_{q_n}^{q_n-1} \varphi \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

A convergência forte $u_{q_n} \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ garante que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_{q_n}|^{p-2} \nabla u_{q_n} \cdot \nabla \varphi \mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \mathrm{d}x, \quad \text{para} \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{3.35}$$

e (3.28) garante que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{q_n}(\Omega) \int_\Omega u_{q_n}^{q_n-1} \varphi \mathrm{d}x = \mu(\Omega) \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_{q_n}^{q_n-1} \varphi \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.36}$$

Suponhamos primeiramente que supp $\varphi \subset \Omega$. Então, Teorema da Convergência Dominada garante que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_{q_n}^{q_n-1} \varphi \mathrm{d}x = \int_\Omega u^{-1} \varphi \mathrm{d}x, \tag{3.37}$$

Uma vez que os Lema 3.2 e Lema 3.3 implicam que $0 < c_1 \leq u_{q_n}^{q_n-1} \varphi \leq c_2$ em supp φ, em que as constantes c_1 e c_2 são uniformes com respeito a n. Daí,pela junção de (3.35), (3.36) e (3.37) temos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \mathrm{d}x = \mu(\Omega) \int_\Omega \varphi u^{-1} \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{3.38}$$

Assim, a fim de provar (c) precisamos mostrar que (3.38) vale, na verdade, para qualquer $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, o que reduz a provar que (3.37) é válido para qualquer $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Provamos isso seguindo os argumentos de [19, 33]. Assim, para $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ arbitrária seja $\{\xi_n\} \subset C_c^\infty(\Omega)$ uma sequência de funções não negativas tais que $\xi_n \to |w|$, fortemente em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e pontualmente em quase todo em Ω. Daí, pela aplicação do Lema de Fatou, (3.38) e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega w u^{-1} \mathrm{d}x \right| &\leq \int_\Omega |w| \, u^{-1} \mathrm{d}x \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \xi_n u^{-1} \mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \xi_n \mathrm{d}x \leq \|\nabla u\|_p^p \lim_{n\to\infty} \|\nabla \xi_n\|_p = \|\nabla u\|_p^p \|\nabla w\|_p . \end{aligned}$$

Agora, seja φ uma função arbitrária em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e tome $\{\varphi_n\} \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_n \to \varphi$ fortemente em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Então, usando $\varphi_n - \varphi$ no lugar de w, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_\Omega (\varphi_n - \varphi) u^{-1} \mathrm{d}x \right| \leq \|\nabla u\|_p^p \lim_{n\to\infty} \|\nabla(\varphi_n - \varphi)\|_p = 0,$$

o que nos dá

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi_n u^{-1} \mathrm{d}x = \int_\Omega \varphi u^{-1} \mathrm{d}x. \tag{3.39}$$

Uma vez que $\varphi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ obtemos de (3.38) que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi_n u^{-1} \mathrm{d}x = \mu(\Omega)^{-1} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi_n \mathrm{d}x = \mu(\Omega)^{-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \mathrm{d}x. \tag{3.40}$$

Portanto, pela combinação de (3.39) com (3.40) concluímos que (3.37) vale para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, o que prova a afirmação (c).

Afirmação (d) agora segue depois de combinar Lema 3.2 com Lema 3.3. O Teorema 2.2 (ii) de [20] implica que $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ para algum $\alpha \in (0,1)$.

Afirmação (a) segue da unicidade da solução de

$$\begin{cases} -\Delta_p w = \frac{\mu(\Omega)}{|\Omega|} w^{-1} & \text{em } \Omega, \\ w > 0 & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.41}$$

combinada com a convergência forte $u_{q_n} \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Na verdade, esses fatos juntos implicam u é a única função de limite da família $\{u_q\}$, quando $q \to 0^+$. □

Nosso próximo objetivo é provar que a solução u de (3.41) satisfaz

$$\int_\Omega \log |u| \mathrm{d}x = 0.$$

Proposição 3.8. *Seja $v \in L^1(\Omega)$. Então $\log |v|$ é Lebesgue measurável em Ω e*

$$-\infty \leq \lim_{q \to 0^+} \int_\Omega |v|^q \log |v| \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \log |v| \, \mathrm{d}x \leq 2e^{-1} \|v\|_1 .$$

Demonstração. Para todo $x \in \Omega$ tal que $|v(x)| \leq 1$ a função $q \in (0,1] \mapsto -|v(x)|^q \log |v(x)| \in [0,\infty]$ é decrescente e

$$\lim_{q \to 0^+} [-|v(x)|^q \log |v(x)|] = -\log |v(x)| .$$

Portanto, segue diretamente do Teorema da Convergência Dominada que $\log |v|$ é Lebesgue measurável no conjunto $\{x \in \Omega : |v(x)| \leq 1\}$ e

$$-\infty \leq \lim_{q \to 0^+} \int_{\{|v| \leq 1\}} |v|^q \log |v| \, \mathrm{d}x = \int_{\{|v| \leq 1\}} \log |v| \, \mathrm{d}x \leq 0.$$

Agora, para todo $x \in \Omega$ tal que $|v(x)| \geq 1$ a função $q \in (0,1] \mapsto |v(x)|^q \log |v(x)| \in [0,\infty]$ é crescente e

$$\lim_{q \to 0^+} |v(x)|^q \log |v(x)| = \log |v(x)| .$$

Além disso, para todo $q \in (0, \frac{1}{2})$ tem-se

$$0 \leq |v(x)|^q \log |v(x)| \leq |v(x)|^{\frac{1}{2}} \log |v(x)| \leq 2e^{-1} |v(x)|^{\frac{1}{2}} |v(x)|^{\frac{1}{2}} = 2e^{-1} |v(x)| \in L^1(\Omega),$$

uma vez que $\max_{t \geq 1} t^{-\frac{1}{2}} \log t = 2e^{-1}$. Portanto, o Teorema da Convergência Dominada implica que $\log |v|$ é integrável no conjunto $\{x \in \Omega : |v(x)| \geq 1\}$ e que

$$0 \leq \lim_{q \to 0^+} \int_{\{|v| \geq 1\}} |v|^q \log |v| \, \mathrm{d}x = \int_{\{|v| \geq 1\}} \log |v| \, \mathrm{d}x \leq 2e^{-1} \|v\|_1 .$$

Assim, temos que $\log |v|$ é Lebesgue measurável em Ω e

$$\begin{aligned} \lim_{q \to 0^+} \int_\Omega |v|^q \log |v| \, \mathrm{d}x &= \lim_{q \to 0^+} \int_{\{|v| \leq 1\}} |v|^q \log |v| \, \mathrm{d}x + \lim_{q \to 0^+} \int_{\{|v| > 1\}} |v|^q \log |v| \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\{|v| \leq 1\}} \log |v| \, \mathrm{d}x + \int_{\{|v| > 1\}} \log |v| \, \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \log |v| \, \mathrm{d}x \leq 2e^{-1} \|v\|_1 . \end{aligned}$$

□

Proposição 3.9. *Para* $v \in L^1(\Omega)$ *defina*

$$\theta_v := \lim_{q\to 0^+} \left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |v|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \in [0,\infty) \text{ and } \beta_v := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \log|v|\,\mathrm{d}x \in [-\infty,\infty).$$

Então

$$\beta_v = \log\theta_v. \tag{3.42}$$

Demonstração. Da regra de L'Hôpital e da Proposição 3.8 temos

$$\lim_{q\to 0^+}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |v|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} = \exp\left(\frac{1}{|\Omega|}\lim_{q\to 0^+}\int_\Omega |v|^q\log|v|\,\mathrm{d}x\right) = \exp\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \log|v|\,\mathrm{d}x\right),$$

que é (3.42). □

O seguinte corolário é uma consequência imediata da proposição anterior.

Corolário 3.10. *Seja* $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$*. Então* $v \in \mathcal{M}(\Omega)$ *se, e somente se,*

$$\int_\Omega \log|v|\,\mathrm{d}x = 0.$$

Em particular, $\int_\Omega \log|u|\,\mathrm{d}x = 0$*, em que* u *é a solução de(3.41).*

Mostramos que a solução u de (3.41) minimiza o funcional $v \mapsto \|\nabla v\|_p^p$ em $\mathcal{M}(\Omega)$. Vamos mostrar que u é única, a menos de valor de valor absoluto, com esta propriedade.

Teorema 3.11. *Seja* $v \in \mathcal{M}(\Omega)$ *tal que* $\mu(\Omega) = \|\nabla v\|_p^p$*. Então,* $|v| = |u|$ q.t.p *em* Ω.

Demonstração. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $u, v \geq 0$ q. t. p. em Ω. Levando em conta que $0 < q < 1$, podemos verificar que

$$\left(\int_\Omega \left(\frac{u+v}{2}\right)^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(\int_\Omega \left(\frac{u}{2}\right)^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_\Omega \left(\frac{v}{2}\right)^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Assim,

$$h := \lim_{q\to 0^+}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \left(\frac{u+v}{2}\right)^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \tag{3.43}$$

Claramente, $\frac{u+v}{2h} \in \mathcal{M}(\Omega)$. Assim,

$$\mu(\Omega) \leq \left\|\nabla\left(\frac{u+v}{2h}\right)\right\|_p^p \leq \frac{1}{(2h)^p}\left(\|\nabla u\|_p + \|\nabla v\|_p\right)^p = \frac{\left(2\mu(\Omega)^{\frac{1}{p}}\right)^p}{(2h)^p} = \frac{\mu(\Omega)}{h^p}, \tag{3.44}$$

o que implica $h \leq 1$. Portanto, (3.43) e (3.44) implicam que $h = 1$, e este fato em (3.44) fornece

$$\|\nabla(u+v)\|_p = \|\nabla u\|_p + \|\nabla v\|_p.$$

Concluímos, a partir desta igualdade, que $u = v$ q. t. p. em Ω. □

O próximo corolário mostra que $\mu(\Omega)^{-1}$ é a melhor constante C na seguinte desigualdade do tipo log-Sobolev

$$\exp\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \log|v|^p\,\mathrm{d}x\right) \leq C\,\|\nabla v\|_p^p, \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{3.45}$$

e que, quando $C = \mu(\Omega)^{-1}$ essa desigualdade torna-se uma igualdade se, e somente se, $|v|$ é um múltiplo de escalar $|u|$.

Corolário 3.12. *Tem-se*

$$\mu(\Omega) = \min \left\{ \frac{\|\nabla v\|_p^p}{\exp\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \log|v|^p \,\mathrm{d}x\right)} : v \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ e } \int_\Omega \log|v|^p \,\mathrm{d}x > -\infty \right\}.$$

Além disso, se v atinge o mínimo, então $|v|$ é por múltiplo escalar de $|u|$.

Demonstração. Seja $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\int_\Omega \log|v|^p \,\mathrm{d}x > -\infty$. Uma vez que

$$\lambda_q(\Omega)\,|\Omega|^{\frac{p}{q}} \leq \frac{\|\nabla v\|_p^p}{\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |v|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{q}}}$$

obtemos

$$\mu(\Omega) = \lim_{q\to 0^+} \lambda_q(\Omega)\,|\Omega|^{\frac{p}{q}} \leq \frac{\|\nabla v\|_p^p}{\lim\limits_{q\to 0^+}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |v|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{q}}} = \frac{\|\nabla v\|_p^p}{\exp\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \log|v|^p \,\mathrm{d}x\right)}.$$

Visto que $\int_\Omega \log|u| \,\mathrm{d}x = 0$, temos

$$\frac{\|\nabla u\|_p^p}{\exp\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \log|u|^p \,\mathrm{d}x\right)} = \|\nabla u\|_p^p = \mu(\Omega).$$

Obviamente, se $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é tal que

$$\frac{\|\nabla v\|_p^p}{\exp\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \log|v|^p \,\mathrm{d}x\right)} = \mu(\Omega),$$

então $\theta_v^{-1} v \in \mathcal{M}(\Omega)$, em que

$$\theta_v = \lim_{q\to 0^+}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |v|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} = \exp\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \log|v|^p \,\mathrm{d}x\right) > 0,$$

e $\left\|\nabla(\theta_v^{-1} v)\right\|_p^p = \mu(\Omega)$. Logo, $\theta_v^{-1}|v| = |u|$, implicando que $|v|$ é um múltiplo escalar de $|u|$. □

Observação 3.4. *Juntando (3.23) e (3.45), com $C = \mu(\Omega)^{-1}$, obtemos*

$$\exp\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \log|v|^p \,\mathrm{d}x\right) \leq C_{N,p,|\Omega|}\,\|\nabla v\|_p^p, \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

em que $C_{N,p,|\Omega|} := N^{-1}\left(N + \frac{p}{p-1}\right)^{1-p}(\omega_N)^{-\frac{p}{N}}\,|\Omega|^{\frac{p}{N}-1}$.

Agora, vamos definir $J : W_0^{1,p}(\Omega) \mapsto (-\infty,\infty]$, o funcional energia (formal) por

$$J(v) := \begin{cases} \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p \,\mathrm{d}x - \frac{\mu(\Omega)}{|\Omega|}\int_\Omega \log|v| \,\mathrm{d}x, & \text{se } \int_\Omega \log|v| \,\mathrm{d}x \in (-\infty,\infty) \\ \infty, & \text{se } \int_\Omega \log|v| \,\mathrm{d}x = -\infty. \end{cases}$$

Vamos mostrar que u é o único ponto de mínimo de J em $W_0^{1,p}(\Omega)$, a menos de valor absoluto.

Lema 3.13. *Tem-se*

$$J(v) \geq \frac{\mu(\Omega)}{p} - \frac{\mu(\Omega)}{p}\log\left(\frac{\mu(\Omega)}{\|\nabla v\|_p^p}\right) - \frac{\mu(\Omega)}{|\Omega|}\int_\Omega \log|v| \,\mathrm{d}x \quad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.46}$$

Demonstração. Seja $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e considere a função

$$g(t) := \frac{t^p}{p}\|\nabla v\|_p^p - \mu(\Omega)\log t - \frac{\mu(\Omega)}{|\Omega|}\int_\Omega \log|v|\,\mathrm{d}x, \quad t>0.$$

É fácil verificar que $J(tv) = g(|t|)$ e que $\min_{t>0} g(t)$ é o lado direito de (3.46). O resultado segue, uma vez que $J(v) = g(1) \geq \min_{t>0} g(t)$. □

Teorema 3.14. *Tem-se*

$$J(u) = \frac{\mu(\Omega)}{p} = \min_{v\in W_0^{1,p}(\Omega)} J(v).$$

Demonstração. Uma vez que

$$\mu(\Omega) = \int_\Omega |\nabla v|^p\,\mathrm{d}x \text{ e } \int_\Omega \log|u|\,\mathrm{d}x = 0,$$

temos $J(u) = \frac{\mu(\Omega)}{p}$. Assim, precisamos apenas provar que

$$J(v) \geq \frac{\mu(\Omega)}{p}, \quad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.47}$$

Sejam $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e θ_v como na Proposição 3.9. Se $\theta_v = 0$, então $J(v) = \infty$ e (3.47) segue trivialmente. Se $\theta_v > 0$ então $\theta_v^{-1}v \in \mathcal{M}(\Omega)$ e

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \log\left|\theta_v^{-1}v\right|\mathrm{d}x = 0 \text{ e } \mu(\Omega) \leq \left\|\nabla(\theta_v^{-1}v)\right\|_p^p = \theta_v^{-p}\|\nabla v\|_p^p,$$

implicando, respectivamente, que

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \log|v|\,\mathrm{d}x = \log\theta_v$$

e

$$\begin{aligned} J(v) &\geq \frac{\mu(\Omega)}{p} - \frac{\mu(\Omega)}{p}\log\left(\frac{\mu(\Omega)}{\|\nabla v\|_p^p}\right) - \mu(\Omega)\log(\theta_v) \\ &\geq \frac{\mu(\Omega)}{p} - \frac{\mu(\Omega)}{p}\log\left(\theta_v^{-p}\right) - \mu(\Omega)\log(\theta_v) = \frac{\mu(\Omega)}{p}. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.15. *Se $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ minimiza J, então $|w| = \theta_w|u|$* q.t.p *em Ω, em que*

$$\theta_w := \lim_{q\to 0^+}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |w|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstração. Segue do Lema 3.13 que

$$\frac{\mu(\Omega)}{p} = J(w) \geq \frac{\mu(\Omega)}{p} - \frac{\mu(\Omega)}{p}\log\left(\frac{\mu(\Omega)}{\|\nabla w\|_p^p}\right) - \frac{\mu(\Omega)}{|\Omega|}\int_\Omega \log|w|\,\mathrm{d}x,$$

o que implica que

$$\frac{1}{p}\log\left(\frac{\mu(\Omega)}{\|\nabla w\|_p^p}\right) + \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \log|w|\,\mathrm{d}x \geq 0. \tag{3.48}$$

Claro que, $\theta_w \in (0,\infty)$, de modo que $\theta_w^{-1}w \in \mathcal{M}(\Omega)$. Assim, de acordo com o Corolário 3.10,

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \log\left|\theta_w^{-1}w\right|\mathrm{d}x = 0,$$

de modo que

$$\log \theta_w = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \log |w| \, dx.$$

Assim, (3.48) garante que

$$\frac{1}{p} \log \left(\frac{\mu(\Omega)}{\|\nabla w\|_p^p} \right) + \log \theta_w = \log \left(\frac{\mu(\Omega)}{\left\|\nabla(\theta_w^{-1} w)\right\|_p^p} \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0,$$

o que equivale a $\mu(\Omega) \geq \left\|\nabla \theta_w^{-1} w\right\|_p^p$.

Uma vez que $\mu(\Omega) \leq \left\|\nabla \theta_w^{-1} w\right\|_p^p$ (lembramos que $\theta_w^{-1} w \in \mathcal{M}(\Omega)$), concluímos que $\mu(\Omega) = \left\|\nabla(\theta_w^{-1} w)\right\|_p^p$. Assim, Teorema 3.11 garante que $\theta_w^{-1}|w| = |u|$. □

Finalizamos esta seção observando que, para cada $\lambda > 0$, um simples argumento de escalonamento mostra que a função

$$u_\lambda := \left(\frac{\lambda \, |\Omega|}{\mu(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} |u|$$

é a única solução do problema singular

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \lambda v^{-1} & \text{em } \Omega, \\ v > 0 & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso, uma vez que $\int_\Omega \log |u| dx = 0$ e $\mu(\Omega) = \|\nabla u\|_p^p$, a igualdade em (3.45) (com $C = \mu(\Omega)^{-1}$) fornece

$$\int_\Omega \log u_\lambda dx = \frac{|\Omega|}{p} \log \left(\mu(\Omega)^{-1} \left(\frac{\lambda \, |\Omega|}{\mu(\Omega)} \right) \|\nabla u\|_p^p \right) = \frac{|\Omega|}{p} \log \left(\frac{\lambda \, |\Omega|}{\mu(\Omega)} \right).$$

Observamos também que a menos de valor absoluto u_λ é único minimizador do funcional

$$J_\lambda(v) := \begin{cases} \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla v|^p \, dx - \lambda \int_\Omega \log |v| \, dx, & \text{se } \int_\Omega \log |v| \, dx \in (-\infty, \infty) \\ \infty, & \text{se } \int_\Omega \log |v| \, dx = -\infty, \end{cases}$$

sendo

$$J_\lambda(u_\lambda) = \frac{\mu(\Omega)}{p} - \frac{\lambda \, |\Omega|}{p} \log \left(\frac{\lambda \, |\Omega|}{\mu(\Omega)} \right).$$

3.3 Comportamento assintótico do par $(\lambda_q(\Omega), \|u_q\|_\infty)$, quando $q \to 0^+$

Nesta seção, descreveremos o comportamento assintótico de $\lambda_q(\Omega)$, quando $q \to 0^+$. Claro que, se $|\Omega| = 1$, então $\lim_{q\to 0^+} \lambda_q(\Omega) = \mu(\Omega)$ e, de acordo com os itens (a) e (d) do Teorema 3.7

$$0 < A\mu(\Omega)^{\frac{1}{p}} \|\phi_p\|_\infty \leq \lim_{q\to 0^+} \|u_q\|_\infty \leq B\mu(\Omega)^{\frac{1}{p}},$$

em que A e B são constantes positivas que dependem somente de N e p. Se $|\Omega| \neq 1$ temos

$$\lim_{q\to 0^+} \lambda_q(\Omega) = \lim_{q\to 0^+} (\lambda_q(\Omega) \, |\Omega|^{\frac{p}{q}}) \left(\lim_{q\to 0^+} |\Omega|^{-\frac{p}{q}} \right) = \mu(\Omega) \left(\lim_{q\to 0^+} |\Omega|^{-\frac{p}{q}} \right).$$

Portanto, neste caso, obtemos prontamente

$$\lim_{q\to 0^+} \lambda_q(\Omega) = \begin{cases} \infty & \text{se} \quad |\Omega| < 1 \\ 0 & \text{se} \quad |\Omega| > 1. \end{cases} \tag{3.49}$$

Assim, combinando (3.49) com os Lemas 3.2 e 3.3 concluímos que

$$\lim_{q\to 0^+} \|u_q\|_\infty = \begin{cases} \infty & \text{se} \quad |\Omega| < 1 \\ 0 & \text{se} \quad |\Omega| > 1. \end{cases}$$

Observamos que (3.49) também é simples de provar sem usar Teorema 3.7. De fato, no caso $|\Omega| < 1$ a monotonicidade da função $q \mapsto \lambda_q(\Omega)\,|\Omega|^{\frac{p}{q}}$ implica que

$$\lim_{q\to 0^+} \lambda_q(\Omega) = \lim_{q\to 0^+} \lambda_q(\Omega)\,|\Omega|^{\frac{p}{q}}\,|\Omega|^{-\frac{p}{q}} \geq \lambda_1(\Omega)\,|\Omega|^p \lim_{q\to 0^+} |\Omega|^{-\frac{p}{q}} = \infty.$$

Esta é a prova dada em [2]. Para o caso $|\Omega| > 1$, tome $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $v > 0$ em Ω e defina $\Omega_\epsilon := \{x \in \Omega : v(x) \geq \epsilon\}$, em que $\epsilon > 0$ é tal que $|\Omega_\epsilon| > 1$. Então,

$$0 < \lambda_q(\Omega) \leq \frac{\int_\Omega |\nabla v|^p \,\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega |v|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{q}}} \leq \frac{\int_\Omega |\nabla v|^p \,\mathrm{d}x}{\left(\int_{\Omega_\epsilon} \epsilon^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{q}}} = \frac{\int_\Omega |\nabla v|^p \,\mathrm{d}x}{\epsilon^p\,|\Omega_\epsilon|^{\frac{p}{q}}}.$$

Assim, fazendo $q \to 0^+$, obtemos $\lim\limits_{q\to 0^+} \lambda_q(\Omega) = 0$, já que $\lim\limits_{q\to 0^+} |\Omega_\epsilon|^{-\frac{p}{q}} = 0$.

Capítulo 4

Apêndice

Lema 4.1. *Sejam $a, b \geq 0$ e $q \in (0, 1]$. Então*

$$(a+b)^q \leq a^q + b^q. \tag{4.1}$$

Demonstração. Considere $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = (1+t)^q - (1+t^q).$$

Note que, $f'(t) = q(1+t)^{q-1} - qt^{q-1} \leq 0$ em $(0, +\infty)$. Logo, f é não crescente, isto é

$$(1+t)^q - (1+t^q) = f(t) \leq f(0) = 0 \quad \forall t \in [0, +\infty). \tag{4.2}$$

Se $b = 0$, então a desigualdade 4.1 é satisfeita. Caso $b > 0$, tome $t = \dfrac{a}{b}$ em 4.2 e temos

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^q \leq 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^q \Longleftrightarrow (a+b)^q \leq a^q + b^q.$$

□

Lema 4.2. *Considere $N_p(\xi, \eta) = \{|\xi| + |\eta|\}^{p-2}|\xi - \eta|^2$, em que $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$.*
Seja $1 < p < +\infty$. Existem duas constantes positivas c_p, C_p tais que para todo $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ tem-se

$$c_p N_p(\xi, \eta) \leq \left(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta\right) \cdot (\xi - \eta) \leq C_p N_p(\xi, \eta). \tag{4.3}$$

Demonstração. Ver Proposição 17.3 de [9] □

Proposição 4.3. *Ao longo do Ridge de $\Omega = \{(x, y) : |x| + |y| < 1\}$ a função distância*

$$\rho(x, y) = \frac{1 - (|x| + |y|)}{\sqrt{2}}$$

não é uma subsolução de viscosidade de

$$min\{|\nabla u| - \sqrt{2}u, -\Delta_\infty u\} = 0$$

Demonstração. Selecione um ponto do Ridge, por exemplo, o ponto $(0, \frac{1}{2})$. Considere

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}(y - \frac{1}{2}) - x^2 + 64\left(x^4 + (y-\frac{1}{2})^4\right).$$

Assim,

$$\rho(0, \frac{1}{2}) = \phi(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Vamos verificar os seguintes itens

1. $\rho(x,y) < \phi(x,y)$ para $(x,y) \neq (0, \frac{1}{2})$.
2. $\min\{|\nabla\phi(0, \frac{1}{2})| - \sqrt{2}\phi(0, \frac{1}{2}), -\Delta_\infty \phi(0, \frac{1}{2})\} > 0$.

Isto mostra que $\rho(x,y)$ não pode ser uma subsolução de viscosidade de

$$\min\{|\nabla u| - \sqrt{2}u, -\Delta_\infty u\} = 0.$$

Verificando 1 : Dados $(x,y) \in \Omega = \{(x,y) : |x| + |y| < 1\}$ temos

$$\begin{aligned} \frac{1 - (|x|+|y|)}{\sqrt{2}} &\leq \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}(y - \frac{1}{2}) - x^2 + 64\left(x^4 + (y-\frac{1}{2})^4\right) \\ \Longleftrightarrow 1 - (|x|+|y|) &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - (y - \frac{1}{2}) - \sqrt{2}x^2 + 64\sqrt{2}\left(x^4 + (y-\frac{1}{2})^4\right) \\ \Longleftrightarrow -(|x|+|y|) &\leq \frac{1}{2}x - y - \sqrt{2}x^2 + 64\sqrt{2}\left(x^4 + (y-\frac{1}{2})^4\right) \\ \Longleftrightarrow |x|+|y| &\geq -\frac{1}{2}x + y + \sqrt{2}x^2 - 64\sqrt{2}\left(x^4 + (y-\frac{1}{2})^4\right). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Note que

$$|y| \geq y - 64\sqrt{2}(y - \frac{1}{2})^4, \text{ sendoo a desigualdade estrita se } \; y \neq \frac{1}{2}.$$

Assim, para obter 4.4 é suficiente mostrar que

$$|x| \geq -\frac{x}{2} + \sqrt{2}x^2 - 64\sqrt{2}x^4.$$

Se $x \geq 0$, então

$$x \geq -\frac{x}{2} + \sqrt{2}x^2 \Longleftrightarrow x \leq \frac{3}{2\sqrt{2}},$$

Logo,

$$x \geq -\frac{x}{2} + \sqrt{2}x^2 \geq -\frac{x}{2} + \sqrt{2}x^2 - 64\sqrt{2}x^4.$$

Para $x < 0$, queremos provar que

$$-x \geq -\frac{x}{2} + \sqrt{2}x^2 - 64\sqrt{2}x^4 \Longleftrightarrow -\frac{x}{2} \geq \sqrt{2}x^2 - 64\sqrt{2}x^4.$$

Note que se $x \geq -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, então $-\frac{x}{2} \geq \sqrt{2}x^2 \geq \sqrt{2}x^2 - 64\sqrt{2}x^4$.
Agora se $x \in (-1, -\frac{1}{2\sqrt{2}})$, então temos

$$\sqrt{2}x^2 \leq 64\sqrt{2}x^4 \Longrightarrow -\frac{x}{2} \geq \sqrt{2}x^2 - 64\sqrt{2}x^4.$$

Portanto 1 se verifica.
Verificando 2:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{2}} - 2x + 256x^3 \Longrightarrow \frac{\partial\phi}{\partial x}(0, \tfrac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + 256(y - \tfrac{1}{2})^3 \Longrightarrow \frac{\partial\phi}{\partial x}(0, \tfrac{1}{2}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

e

$$D^2\phi\left(0,\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\end{pmatrix}\left(0,\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Assim

$$\Delta_\infty\phi(0,\frac{1}{2})=\langle D^2\phi\nabla\phi,\nabla\phi\rangle(0,\frac{1}{2})=\langle(-\sqrt{2},0),(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})\rangle=-1$$

e

$$|\nabla\phi(0,\frac{1}{2})|-\sqrt{2}\phi(0,\frac{1}{2})=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}-\sqrt{2}\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}.$$

Logo,

$$\min\{|\nabla\phi(0,\frac{1}{2})|-\sqrt{2}\phi(0,\frac{1}{2}),-\Delta_\infty\phi(0,\frac{1}{2})\}=\frac{1}{2}>0.$$

□

Observação 4.1. *Note que ϕ toca acima ρ em $(0,\frac{1}{2})$ e $\Delta_\infty\phi(0,\frac{1}{2})=-1$, daí ρ não é uma subsolução de viscosidade de $\Delta_\infty u=0$.*

Referências Bibliográficas

[1] R. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York 1975.

[2] G. Anello, F. Faraci and A. Iannizzotto, *On a problem of Huang concerning best constants in Sobolev embeddings*, Ann. Mat. Pura Appl. **194** (2015) 767–779.

[3] G. Aronsson, *Extension of functions satisfying Lipschitz conditions.* Arkiv för Matematik **6** (1967) 551–561.

[4] T. Aubin, *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*, J. Differ. Geom. **11** (1976) 573–598.

[5] C. Bandle, *Rayleigh-Faber-Krahn inequalities and quasilinear elliptic boundary value problems*, Nonlinear analysis and applications: to V. Lakshmikantham on his 80th birthday. Vol. 1,2, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003, p.p 227–240.

[6] G. Barles and J. Busca, *Existence and comparison results for fully nonlinear degenerate elliptic equations without zeroth-order term*, Comm. Partial Differential Equations **26** (2001) 2323–2337.

[7] T. Bhatthacharya, E. Dibenedetto and J. Manfredi, *Limits as $p \to \infty$ of $\Delta_p u_p = f$ and related extremal problems*, Rendiconti del Sem. Mat., Fascicolo Speciale Non Linear PDE's, Univ. Torino (1989) 15–68.

[8] J. E. Brothers and W. P. Ziemer, *Minimal rearrangements of Sobolev functions*, J. Reine Angew. Math. **384** (1988) 153–179.

[9] M. Chipot, *Elliptic Equations: An Introductory Course*, Birkhäuser, 2009.

[10] Y. Chu and W. Gao, *Existence of solutions to a class of quasilinear elliptic problems with nonlinear singular terms.* Boundary Value Problems, **2013**:229 (2013).

[11] M.G. Crandall, P.H. Rabinowitz and L. Tartar, *On a Dirichlet problem with singular nonlinearity*, Comm. Partial Differential Equations **2** (1977) 193–222.

[12] M. G. Crandall, *"A visit with the ∞-Laplace equation."* In Calculus of Variations and Nonlinear Partial Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics vol. 1927. Berlin: Springer, 2008.

[13] M. G. Crandall, L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Optimal Lipschitz extensions and the infinity Laplacian*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **13** (2001) 123–139.

[14] G. Ercole, *Absolute continuity of the best Sobolev constant.* J. Math. Anal. Appl. **404** (2013) 420–428.

[15] G. Ercole, *On the resonant Lane-Emden problem for the p-Laplacian.* Comm. Contemp. Math. **16** (2014) 1350023 (22 pages).

[16] G. Ercole and G. A. Pereira, *Asymptotics for the best Sobolev constants and their extremal functions*, arXiv:1506.00922 [math.AP].

[17] N. Fukagai, M. Ito and K. Narukawa, *Limit as $p \to \infty$ of p-Laplace eigenvalue problems and L^∞-inequality of the Poincaré type*, Diff. Int. Equ. **12** (1999) 183–206.

[18] G. P. Galdi, *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations*, Springer, New York 2011.

[19] J. Giacomoni, I. Schindler and P. Takáč, *Sobolev versus Hölder local minimizers and existence of multiple solutions for a singular quasilinear equation*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **6** (2007) 117–158.

[20] J. Giacomoni, I. Schindler and P. Takáč, *Singular quasilinear elliptic equations and Hölder regularity*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **350** (2012) 383–388.

[21] R. Jensen, *Uniqueness of Lipschitz extensions: minimizing the sup norm of the gradient*, Arch. Rational Mech. Anal. **123** (1993) 51–74 .

[22] P. Juutinen, P. Lindqvist and J. Manfredi, *The ∞-eigenvalue problem*, Arch. Rat. Mech. Anal. **148** (1999) 89–105.

[23] B. Kawohl, *Rearrangements and Convexity of Level Sets in PDE*, Lecture Notes in Math., vol. 1150, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[24] S. Kesavan, *Symmetrization & Applications*, world scientific Vol. 3, India 2006.

[25] O. Ladyzhenskaya and N. Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Academic Press, New York-London, 1968.

[26] A. C. Lazer and P. J. Mckenna, *On a singular nonlinear elliptic boundary value problem.* Proc. Am. Math. Soc. **111** (1991) 721–730.

[27] G. Leoni, *A First Course in Sobolev Space*, vol. 105 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

[28] G. M. Lieberman, *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations.* Nonlinear Anal. **12** (1988) 1203–1219.

[29] P. Lindqvist, *A nonlinear eigenvalue problem, Topics in mathematical analysis*, Ser. Anal. Appl. Comput., World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 3 (2008), 175–203.

[30] P. Lindqvist, *Notes on the infinity-Laplace Equation*, arXiv:1411.1278v2 [math.AP].

[31] P. Lindqvist, *Notes on the p-Laplace equation.* Report. University of Jyväskylä Department of Mathematics and Statistics **102** (2006). University of Jyväskylä, Jyväskylä, ii+80 pp. ISBN: 951-39-2586-2.

[32] P. Lindqvist and J. Manfredi, *The Harnack inequality for ∞-harmonic functions*, Electron. J. Differential Equations 1995 No. 4 (1995) 1–5.

[33] A. Mohammed, *Positive solutions of the p-Laplace equation with singular nonlinearity*, J. Math. Anal. Appl. **352** (2009) 234–245.

[34] X. Ren and J. Wei: *Counting peaks of solutions to some quasilinear elliptic equations with large exponents,* J. Differential Equations **117** (1995) 28–55.

[35] C. A. Stuart, *Existence and approximation of solutions of nonlinear elliptic equations*, Math. Z. **147** (1976) 53–63.

[36] G. Talenti, *Inequalities in rearrangement invariant function spaces.* Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications, vol. 5. Prometheus Publishing House, Prague, 1994.

[37] G. Talenti, *Best constant in Sobolev inequality.* Ann. Mat. Pura Appl. **110** (1976) 353–372.

[38] P. Tolksdorff, *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations* J.of Diff. Equations **51** (1984), 126-150.

[39] J. L. Vázquez, *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations. Appl. Math. Optim.* **12** (1984) 191–202.

[40] Y. Yu, *Some properties of the ground states of the infinity Laplacian*, Indiana Univ. Math. J. **56** (2007) 947–964.