Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas - ICEX
Departamento de Matemática

Existência e unicidade de soluções para um problema elíptico singular

Viviane Mendes Magalhães
Orientador: Prof. Grey Ercole

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

BELO HORIZONTE
MINAS GERAIS - BRASIL
JULHO/2016

Agradecimentos

Aos meus pais Ana e Vanderlei. Em especial, à minha mãe pelo amor que sempre mostrou através das palavras ao telefone, abraços de conforto, consolo, incentivo, alegria e saudade.

Aos amigos que sempre torceram por mim. Em em especial, aos que conheci na vida estudantil e, em particular, os amigos do mestrado e da graduação. Obrigada pela companhia nos estudos, pelas brincadeiras e pela amizade. Sucesso a todos!

Ao meu orientador Grey Ercole, pela paciência e pelos conhecimentos transmitidos.

A todos professores e funcionários do Departamento de Matemática da UFMG que fizeram parte dessa jornada.

À CAPES pelo apoio financeiro.

A todos que não se incluem nos já citados, mas que direta ou indiretamente me ajudaram nessa conquista.

Resumo

Neste trabalho estudamos existência, unicidade e propriedades de minimização de soluções do seguinte problema de Dirichlet singular

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \dfrac{f(x)}{u^\alpha} & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

em que Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ com fronteira suave $\partial\Omega$, $f \geq 0,\ f \not\equiv 0$ e $0 < \alpha \leq 1 < p < \infty$.

Abstract

In this work we study existence, uniqueness and minimizing properties of the solutions of the following singular Dirichlet problem

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \dfrac{f(x)}{u^\alpha} & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

where Ω is bounded domain of $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ with smooth boundary $\partial\Omega$, $f \geq 0$, $f \not\equiv 0$ and $0 < \alpha \leq 1 < p < \infty$.

Sumário

1 Introdução **8**

2 Alguns resultados sobre o operador p-Laplaciano **11**

3 Existência e unicidade de soluções do problema singular **18**

4 Minimização do funcional energia **30**

Apêndice A Diferenciabilidade de funcionais de Nemytskii **42**

Apêndice B Solução do problema de Dirichlet para a equação de Poisson radial **45**

Apêndice C O inverso do operador p-Laplaciano **48**

Notações

- $p' = \frac{p}{p-1}$;
- $W^{1,p}(\Omega)$ - espaço de Sobolev;
- $C_0(\Omega)$ funções contínuas com suporte compacto em Ω;
- $C^k(\Omega)$ funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω, $k \in \mathbb{N}$;
- $C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega)$;
- $C_0^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_0^k(\Omega)$;
- $W_0^{k,p}(\Omega)$ fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$;
- $W^{-1,p'}(\Omega)$ espaço dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$;
- $u^+ = \max\{0, u\}$;
- $u^- = \max\{0, -u\}$;
- $\Omega' \subset\subset \Omega$ - Ω' está compactamente contido em Ω, isto é, $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ e $\overline{\Omega'}$ é compacto;
- $\|\cdot\|_E$ norma no espaço E;
- $\|\cdot\|_p$ norma padrão em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$;

- $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ norma do espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$;

- $\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ $\quad$ p-Laplaciano de u.

Capítulo 1

Introdução

Nesta dissertação estudaremos o seguinte problema de Dirichlet singular

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \frac{f(x)}{u^\alpha} & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

em que:

- Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ com fronteira $\partial\Omega$ suave,
- $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o p-Laplaciano[1] de u, também conhecido como operador p-Laplace,
- $f \geq 0,\ f \not\equiv 0,\ 1 < p < \infty$ e $0 < \alpha \leq 1$.

O problema (1.1) foi inicialmente estudado no caso particular $p = 2$ (ver [9, 17, 25]), enquanto o caso $1 < p \neq 2$ tem recebido maior atenção na última década (ver [7, 8, 15, 16, 21]). Este problema tem aplicações envolvendo, por

[1] Talvez o correto fosse escrever p-Laplaceano em lugar de p-Laplaciano porque o operador deriva do nome do matemático, físico e astrônomo francês Pierre Simon Marquis de Laplace. Entretanto, seguindo a tradição, manteremos, neste texto, a grafia p-Laplaciano.

exemplo, catalisadores químicos heterogêneos, transferências de calor não lineares e padrões biológicos [4, 5, 20].

Para obter a existência de uma solução para (1.1) seguimos a abordagem desenvolvida no artigo de Boccardo e Orsina [3] em que o caso $p = 2$ é estudado. Esta abordagem, para $p > 1$, também foi empregada nos artigos [8, 7], para os casos $\alpha = 1$ e $\alpha \geq 1$, respectivamente.

No Capítulo 2 apresentamos alguns resultados sobre o operador p-Laplaciano que serão utilizados no texto. Estes resultados podem ser encontrados em [1, 6, 13, 19, 22]. Alguns deles, como o princípio da comparação, serão demontrados no capítulo.

No Capítulo 3, começamos considerando $f \in L^1(\Omega)$ e usamos o teorema do ponto fixo de Schaefer (Teorema 3.1) para mostrar que o seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = \frac{f_n(x)}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\alpha} & \text{em } \Omega, \\ u_n \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$, possui uma única solução $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, isto é, existe uma única função u_n, positiva em Ω, que satisfaz

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi \, dx = \int_\Omega \frac{f_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\alpha}\varphi \, dx, \quad \forall\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Posteriormente, mostramos que, para $f \in L^{\frac{1}{\alpha}}(\Omega)$, a sequência (u_n) converge para uma função u em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e esta é a única solução do problema inicial.

No Capítulo 4, apresentamos alguns resultados adicionais para $0 < \alpha < 1$ e $f \in L^{\frac{1}{\alpha}}(\Omega)$. Mais precisamente, provamos nesse capítulo que o funcional energia associado a (1.1) possui um único minimizador e que este minimizador é a solução fraca u de (1.1). Esta última conclusão não é imediata, uma vez que o funcional energia em questão não é derivável.

Também vamos mostrar no Capítulo 4 que a solução u minimiza o quociente

$$\frac{\|\nabla v\|_p^p}{\left(\int_\Omega |v|^{1-\alpha} f \; dx\right)^{\frac{p}{1-\alpha}}}, \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\}.$$

Capítulo 2

Alguns resultados sobre o operador p-Laplaciano

Neste capítulo vamos apresentar alguns resultados envolvendo o operador p-Laplaciano. Estes resultados serão utilizados no próximo capítulo.

Daqui em diante, Ω denota um domínio (aberto e conexo) limitado de $\mathbb{R}^N$ e $1 < p < \infty$.

Definição 2.1. *O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é definido por*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists\ g_1, ..., g_N \in L^p(\Omega) \ \textit{tal que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \ \forall i = 1, ..., N \end{array} \right\}$$

Temos que g_i é única q.t.p. e definimos $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$. O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p .$$

Definição 2.2. *Para $1 \leq p < \infty$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ denota o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$.*

Demonstrações dos próximos resultados podem ser encontradas em [6].

Proposição 2.3. *O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ equipado com a norma de $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach separável.*

Teorema 2.4 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |fg| \; dx \;\; \leq \;\; \|f\|_p \; \|g\|_{p'}.$$

Teorema 2.5 (Rellich-Kondrachov)**.** *Suponha que Ω seja de classe C^1. Então as seguintes imersões são compactas:*

$$\begin{array}{ll} W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \ \forall q \in [1, p^*), \ \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, & \textit{se } p < N, \\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \ \forall q \in [p, +\infty), & \textit{se } p = N, \\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}), & \textit{se } p > N. \end{array}$$

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ é uma imersão compacta para todo p e para todo N.

Proposição 2.6 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Suponha $1 \leq p < \infty$. Então existe uma constante C (dependendo de Ω e p) tal que*

$$\|u\|_p \leq C\|\nabla u\|_p, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em particular, a expressão $\|\nabla u\|_p$ é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$ equivalente à norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Vamos denotar por $W^{-1,p'}(\Omega)$ o espaço dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Uma demostração do próximo teorema pode ser encontrada em [1, Teorema 3.5, p. 47].

Teorema 2.7. *O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ é uniformemente convexo (e, portanto, reflexivo) se $1 < p < \infty$.*

Teorema 2.8 (Princípio da comparação fraco)**.** *Sejam $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tais que*

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 \nabla\varphi \; dx \leq \int_\Omega |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 \nabla\varphi \; dx, \quad \forall\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \varphi \geq 0.$$

Então, $u_1 \leq u_2$ q.t.p. em Ω.

Demonstração. Considere $(u_1 - u_2)^+ = \max\{u_1 - u_2, 0\}$. Então $(u_1 - u_2)^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$, pois $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Temos também

$$\nabla(u_1 - u_2)^+ = \begin{cases} \nabla(u_1 - u_2), & \text{se} \quad u_1 > u_2; \\ 0, & \text{se} \quad u_1 \leq u_2. \end{cases}$$

Usando a hipótese para $\varphi = (u_1 - u_2)^+$ obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_\Omega (|\nabla u_1|^{p-2}u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}u_2) \cdot \nabla(u_1 - u_2)^+ \; dx \\ &= \int_{u_1 > u_2} (|\nabla u_1|^{p-2}u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}u_2) \cdot \nabla(u_1 - u_2) \; dx. \end{aligned}$$

Mas, por (C.3) temos

$$\big(|\nabla u_1|^{p-2}u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}u_2\big) \cdot \nabla(u_1 - u_2) \geq 0.$$

Portanto, $\Omega_0 := \{x \in \Omega; u_1(x) > u_2(x)\}$ tem medida nula ou

$$\big(|\nabla u_1|^{p-2}u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}u_2\big) \cdot \nabla(u_1 - u_2) = 0, \quad q.t.p. \text{ em } \Omega_0.$$

A última condição não pode ocorrer. De fato, caso contrário teríamos de (C.3) que $u_1 - u_2 = 0$ q.t.p. em Ω_0, o que contradiz a definição de Ω_0. Portanto, Ω_0 tem medida nula. □

Corolário 2.9 (Princípio do máximo fraco)**.** *Suponha que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é tal que*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi \; dx \;\; \geq \;\; 0, \quad \forall\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \varphi \geq 0.$$

Então $u \geq 0$ em Ω.

Vamos usar também o princípio da comparação forte [10, Teorema 2.2, p. 507].

Teorema 2.10 (Princípio da comparação forte). *Sejam* $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ *tais que*

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 \nabla\varphi \, dx \leq \int_\Omega |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 \nabla\varphi \, dx, \quad \forall\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \varphi \geq 0$$

e

$$u_1 \leq u_2 \ \ em \ \Omega.$$

Então ocorre exatamente uma das seguintes possibilidades:

$$u_1 \equiv u_2 \ em \ \Omega \ ou \ u_1 < u_2 \ em \ \Omega.$$

Corolário 2.11 (Princípio do máximo forte). *Se* $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi \, dx \geq 0, \quad \forall \ \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \varphi \geq 0$$

e

$$u \geq 0 \ \ em \ \Omega.$$

Então, ocorre exatamente uma das seguintes possibilidades:

$$u \equiv 0 \ em \ \Omega \ ou \ u > 0 \ em \ \Omega.$$

Mais adiante vamos utilizar o princípio da comparação para provar uma estimativa para a solução fraca do seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x), & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

em que $\Delta_p u$ é o operador p-Laplaciano calculado em u, formalmente dado pela expressão

$$\Delta_p u := \text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u).$$

Aqui vale observar que a equação $-\Delta_p u = f(x)$ é conhecida como **equação de Poisson para o p-Laplaciano**. Observamos que esta denominação não se aplica ao caso em que a função f depende de outras variáveis (além de x). Por exemplo, no caso em que $f = f(x,u)$. No caso particular $f \equiv 1$ o problema de Dirichlet para equação de Poisson é conhecido como **problema de torção para o p-Laplaciano** e a sua solução é conhecida como ***p*-função de torção de** Ω .

Utilizando a expressão formal do p-Laplaciano e o Teorema da Divergência, pode-se obter a motivação para o seguinte conceito de solução fraca para o problema de Dirichlet (2.1).

Definição 2.12. *Uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é chamada solução fraca do problema (2.1) se*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi \, dx \;=\; \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Na proposição seguinte e, eventualmente em outras partes desta dissertação, a desigualdade

$$-\Delta_p u \leq -\Delta_p v, \quad \text{no sentido fraco,}$$

para funções $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, significará

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi \, dx \leq \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \varphi \geq 0.$$

Proposição 2.13. *Seja u solução fraca do problema de Dirichlet (2.1), com $f \in L^\infty(\Omega)$. Então, $u \in L^\infty(\Omega)$ e*

$$|u| \;\leq \parallel f \parallel_\infty^{\frac{1}{p-1}} \phi,$$

em que ϕ é a p-função de torção de Ω.

Demonstração. Seja ϕ a p-função de torção de Ω, isto é, a solução de

$$\begin{cases} -\Delta_p \phi = 1, & \text{em } \Omega \\ \phi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como Ω é limitado, existe uma bola $B = B_R(0)$ centrada em 0 de raio R tal que $\Omega \subset B$. Seja Φ a p-função de torção da bola B. Como a função 1 é radial, segue do Teorema B.1 (Apêndice B) que Φ é radial e usando as funções $\psi_p(t) = |t|^{p-2}t$ e $\psi_{p'}(t) = |t|^{p'-2}t$ temos

$$\begin{aligned}
\Phi(r) &= \int_r^R \psi_{p'}\left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{N-1} ds\right) d\theta \\
&= \int_r^R \psi_{p'}\left(\frac{\theta}{N}\right) d\theta \\
&= \int_r^R \left(\frac{\theta}{N}\right)^{p'-1} d\theta \\
&= \frac{N}{p'}\left(\frac{R}{N}\right)^{p'} - \frac{N}{p'}\left(\frac{r}{N}\right)^{p'} \\
&= \frac{N^{1-p'}}{p'}\left(R^{p'} - r^{p'}\right),
\end{aligned}$$

isto é,

$$\Phi(x) = \frac{N^{1-p'}}{p'}\left(R^{p'} - |x|^{p'}\right), \quad x \in B.$$

Estendendo ϕ como zero fora de Ω e observando que $\Phi \geq 0$ em B, temos que $\psi := (\phi - \Phi)^+ \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(B)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla\phi|^{p-2}\nabla\phi\nabla\psi\, dx &= \int_\Omega \psi\, dx \\
&= \int_{B_R} \psi\, dx \\
&= \int_{B_R} |\nabla\Phi|^{p-2}\nabla\Phi\nabla\psi\, dx \\
&= \int_\Omega |\nabla\Phi|^{p-2}\nabla\Phi\nabla\psi\, dx,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_{\Omega} (|\nabla \phi|^{p-2}\nabla \phi - |\nabla \Phi|^{p-2}\nabla \Phi)\nabla \psi \; dx = 0.$$

Logo,

$$\int_{\Omega} (|\nabla \phi|^{p-2}\nabla \phi - |\nabla \Phi|^{p-2}\nabla \Phi)\nabla (\phi - \Phi)^{+} \; dx = 0,$$

o que implica

$$\int_{\phi \geq \Phi} (|\nabla \phi|^{p-2}\nabla \phi - |\nabla \Phi|^{p-2}\nabla \Phi)\nabla (\phi - \Phi) \; dx = 0.$$

Assim, segue de (C.3) que

$$\nabla \phi - \nabla \Phi = 0 \;\text{ q.t.p. em }\; \{x \in \Omega, \phi(x) \geq \Phi(x)\}.$$

Daí, $\nabla(\phi - \Phi)^{+} = 0$ q.t.p. em Ω e então $(\phi - \Phi)^{+} = 0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Portanto, $\phi \leq \Phi$ q.t.p. em Ω. Além disso, segue do princípio do máximo fraco que $\phi \geq 0$. Assim, $0 \leq \phi \leq \Phi$ e, como Φ é limitada, temos que $\phi \in L^{\infty}(\Omega)$.

Em Ω temos também

$$-\Delta_p u \; = \; f \; \leq \| \, f \, \|_{\infty} = \; - \| \, f \, \|_{\infty}^{\frac{p-2}{p-1}} \| \, f \, \|_{\infty}^{\frac{1}{p-1}} \; \Delta_p \phi = \; -\Delta_p \left(\| \, f \, \|_{\infty}^{\frac{1}{p-1}} \; \phi \right)$$

no sentido fraco e, analogamente,

$$-\Delta_p(-u) \; = \; |-1|^{p-2}(-1)(-\Delta_p) \; = \; \Delta_p u \; = \; -f \; \leq -\Delta_p \left(\| \, f \, \|_{\infty}^{\frac{1}{p-1}} \; \phi \right)$$

no sentido fraco. Assim, pelo princípio da comparação fraco segue que

$$|u| \; \leq \| \, f \, \|_{\infty}^{\frac{1}{p-1}} \; \phi$$

e, como $f, \phi \in L^{\infty}(\Omega)$, concluímos que $u \in L^{\infty}(\Omega)$. $\square$

Capítulo 3

Existência e unicidade de soluções do problema singular

Neste capítulo estudamos a existência de soluções fracas para o seguinte problema quasilinear elíptico

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \frac{f(x)}{u^\alpha} & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

em que Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ com fronteira suave $\partial\Omega$, $1 < p < \infty$, $0 < \alpha \leq 1$, $f \in L^{\frac{1}{\alpha}}(\Omega)$, $f \geq 0$ e $f \not\equiv 0$.

Para provar a existência de soluções utilizamos o seguinte teorema de ponto fixo, cuja demonstração pode ser encontrada em [12, Teorema 4, página 504].

Teorema 3.1 (Teorema de Schaefer)**.** *Sejam X um espaço de Banach real e $A : X \to X$ uma aplicação contínua e compacta. Suponha que conjunto*

$$\{u \in X; u = \lambda A(u),\ \textit{para algum } 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

seja limitado. Então A possui um ponto fixo.

Definição 3.2. *Uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é chamada solução fraca do problema (3.1) se $u > 0$ em Ω e vale a seguinte identidade*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi \, dx \;=\; \int_\Omega \frac{f}{u^\alpha}\varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.2}$$

Proposição 3.3. *Se $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, então*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla\varphi \, dx = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx, \quad \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Demonstração. Pela desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} & \left|\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi \, dx - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi \, dx\right| \\ \leq \;& \||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\|_{p'} \|\nabla\varphi\|_p \end{aligned}$$

Assim, se $1 < p \leq 2$ então segue da desigualdade (C.2) que

$$||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u| \leq c_p |\nabla u_n - \nabla u|^{p-1}$$

o que implica

$$\begin{aligned} & \left|\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi \, dx - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi \, dx\right| \\ \leq \;& c_p \left[\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^{(p-1)p'} | \, dx\right]^{\frac{1}{p'}} \; \|\nabla\varphi\|_p \\ = \;& c_p \|\nabla(u_n - u)\|_p^{p-1} \; \|\nabla\varphi\|_p \\ = \;& c_p \|u_n - u\|_{W_0^{1,p}}^{p-1} \; \|\varphi\|_{W_0^{1,p}} \end{aligned} \tag{3.3}$$

e, portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla\varphi \, dx - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx\right| \;=\; 0.$$

Temos também que se $p > 2$ então

$$\begin{aligned}
& \left|\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi \ dx - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi \ dx\right| \\
\leq \ & c_p \int_\Omega (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{p-2} \ |\nabla u_n - \nabla u| \ |\nabla\varphi| \ dx, && \text{por (C.2)} \\
\leq \ & c_p \ \left[\int_\Omega (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{p'(p-2)} \, |\nabla u_n - \nabla u|^{p'} \ dx\right]^{\frac{1}{p'}} \ \|\nabla\varphi\|_p, && \text{pela desigualdade de Hölder} \\
\leq \ & c_p \ \| \, (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{p'(p-2)} \, \|_{\frac{p-1}{p-2}}^{\frac{1}{p'}} \ \||\nabla u_n - \nabla u|^{p'}\|_{p-1}^{\frac{1}{p'}} \ \|\nabla\varphi\|_p, && \text{pela desigualdade de Hölder} \\
= \ & c_p \ \left[\int_\Omega (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^p \ dx\right]^{\frac{p-2}{p}} \ \|\nabla u_n - \nabla u\|_p \ \|\nabla\varphi\|_p \\
= \ & c_p \ \||\nabla u_n| + |\nabla u|\|_p^{p-2} \ \|\nabla u_n - \nabla u\|_p \ \|\nabla\varphi\|_p \\
\leq \ & c_p \ (\|\nabla u_n\|_p + \|\nabla u\|_p)^{p-2} \ \|\nabla u_n - \nabla u\|_p \ \|\nabla\varphi\|_p, && \text{pela desigualdade triangular}
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
& \left|\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi \ dx - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi \ dx\right| \\
\leq \ & c_p \ (\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)})^{p-2} \ \|u_n - u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \ \|\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla\varphi \ dx = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi \ dx.$$

□

Considere o seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = \frac{f_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\alpha} & \text{em } \Omega, \\ u_n \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.5}$$

em que $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$.

Lema 3.4. *Sejam $f \in L^1(\Omega)$ e $\alpha > 0$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, o problema (3.5) tem uma única solução fraca não negativa $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, isto é,*

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi \ dx \ = \ \int_\Omega \frac{f_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\alpha}\varphi \ dx, \quad \forall\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. **Existência**

Para cada $w \in L^p(\Omega)$ temos

$$\left|\frac{f_n}{\left(|w| + \frac{1}{n}\right)^\alpha}\right| \leq \frac{n}{\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha} = n^{\alpha+1}$$

e, então,

$$\frac{f_n}{\left(|w| + \frac{1}{n}\right)^\alpha} \in L^\infty(\Omega) \subset L^{p'}(\Omega).$$

Logo, pelo Teorema C.4, o seguinte problema tem uma única solução fraca $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \frac{f_n}{\left(|w|+\frac{1}{n}\right)^\alpha} & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

Assim, podemos definir a aplicação $\Gamma : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ como $\Gamma(w) = v$. Portanto,

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega \frac{f_n}{\left(|w| + \frac{1}{n}\right)^\alpha}\varphi \, dx, \qquad \forall\ \varphi \in w_0^{1,p}(\Omega) \tag{3.7}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla v|^p \, dx &= \int_\Omega \frac{f_n}{\left(|w|+\frac{1}{n}\right)^\alpha} v \, dx \\ &\leq \frac{n}{\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha} \int_\Omega |v| \, dx \\ &= n^{\alpha+1} \int_\Omega |v| \, dx \end{aligned}$$

Como a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ é contínua, temos

$$\begin{aligned} \|v\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} &\leq n^{\alpha+1}\|v\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq Cn^{\alpha+1}\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}, \end{aligned}$$

o que implica

$$\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \left(Cn^{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

isto é,

$$\|\Gamma(w)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \left(Cn^{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Como a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ é compacta, segue da desigualdade anterior que se $(w_n) \subset L^p(\Omega)$ é uma sequência limitada então $(\Gamma(w_n))$ possui uma subsequência convergente em $L^p(\Omega)$. Portanto, $\Gamma : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ é um operador compacto. Além disso, se $u = \lambda\Gamma(u)$ para algum $0 \leq \lambda \leq 1$ então

$$\|u\|_p \;=\; \|\lambda\Gamma(u)\|_p \;\leq C_1\|\lambda\Gamma(u)\|_{W^{1,p}(\Omega)} \;\leq C_1\;|\lambda|\left(Cn^{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Assim, o conjunto $\{u \in L^p(\Omega);\; u = \lambda\Gamma(u) \text{ para algum } 0 \leq \lambda \leq 1\}$ é limitado. Portanto, pelo teorema do ponto fixo de Schaefer (Teorema 3.1) existe $u_n \in W_0^{1,p}$ tal que $u_n = \Gamma(u_n)$. Note que, para mostrarmos que u_n é uma solução fraca para o problema (3.5) é suficiente mostrarmos que $u_n \geq 0$. Observe, de (3.7), com $v = u_n$ e $w = u_n$, que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\phi\; dx = \int_\Omega \frac{f_n(x)}{\left(|u_n| + \frac{1}{n}\right)^\alpha}\phi\; dx \geq 0, \quad \forall\; \phi \in W_0^{1,p}(\Omega), \phi \geq 0. \tag{3.8}$$

Assim, pelo princípio do máximo fraco (Corolário 2.9), temos que $u_n \geq 0$. Portanto, u_n é uma solução fraca para o problema (3.5). Além disso, como $\frac{f_n}{\left(|u_n|+\frac{1}{n}\right)^\alpha} \in L^\infty(\Omega)$, pela Proposição 2.13 temos $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Unicidade

Sejam $u_n, v_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ soluções fracas do problema (3.5). Escolhendo $\varphi = u_n - v_n$ como função teste temos

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_\Omega (|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n)\cdot\nabla(u_n - v_n)\; dx = \\
=\;& \textstyle\int_\Omega \frac{f_n}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\alpha}\;(u_n - v_n)\; dx - \int_\Omega \frac{f_n}{\left(v_n+\frac{1}{n}\right)^\alpha}\;(u_n - v_n)\; dx \\
=\;& \textstyle\int_\Omega f_n\left[\frac{1}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\alpha} - \frac{1}{\left(v_n+\frac{1}{n}\right)^\alpha}\right](u_n - v_n)\; dx \\
\leq\;& 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, de (C.3) segue que

$$(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n)\cdot\nabla(u_n - v_n) \;\geq\; 0. \tag{3.9}$$

Portanto,

$$\int_\Omega (|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n)\cdot \nabla(u_n - v_n)\ dx = 0$$

Daí, usando (3.9) novamente obtemos

$$(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n)\cdot \nabla(u_n - v_n) \ = \ 0, \quad q.t.p.\ em\ \Omega.$$

Logo, segue de (C.3) que $\nabla(u_n - v_n) = 0$ q.t.p. em Ω, o que implica $u_n - v_n = 0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Portanto, $u_n = v_n$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. □

Lema 3.5. *Sejam $f \in L^1\Omega$ e $\alpha > 0$.*

a) A sequência $\{u_n\}$ é crescente em relação a n;

b) se $\Omega' \subset\subset \Omega$ então $u_n > 0$ em Ω' e existe uma constante positiva $C_{\Omega'}$ (independente de n) tal que para todo $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n \geq C_{\Omega'} > 0, \quad \forall x \in \Omega'. \tag{3.10}$$

Demonstração. a) Observe que se $u_n(x) - u_{n+1}(x) \geq 0$ então

$$u_{n+1}(x) + \frac{1}{n+1} \ \leq \ u_n(x) + \frac{1}{n}$$

e, assim,

$$\left(u_{n+1}(x) + \frac{1}{n+1}\right)^\alpha \ - \ \left(u_n(x) + \frac{1}{n}\right)^\alpha \ \leq \ 0.$$

Temos também

$$0 \ \leq \ f_n \ = \ \min\{f, n\} \ \leq \ \min\{f, n+1\} \ = \ f_{n+1}.$$

Portanto, escolhendo $(u_n - u_{n+1})^+ = \max\{u_n - u_{n+1}, 0\}$ como função teste temos

$$\begin{aligned}
& \textstyle\int_\Omega (|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_{n+1}|^{p-2}\nabla u_{n+1})\cdot \nabla(u_n - u_{n+1})^+\ dx = \\
= \ & \textstyle\int_\Omega \frac{f_n}{(u_n + \frac{1}{n})^\alpha}\ (u_n - u_{n+1})^+\ dx - \int_\Omega \frac{f_{n+1}}{(u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^\alpha}\ (u_n - u_{n+1})^+\ dx \\
\leq \ & \textstyle\int_\Omega f_{n+1} \left[\frac{1}{(u_n + \frac{1}{n})^\alpha} - \frac{1}{(u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^\alpha}\right] (u_n - u_{n+1})^+\ dx \\
\leq \ & 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, de (C.3) segue que

$$(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_{n+1}|^{p-2}\nabla u_{n+1}) \cdot \nabla(u_n - u_{n+1})^+ \ \geq \ 0. \tag{3.11}$$

Portanto,

$$\int_\Omega (|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_{n+1}|^{p-2}\nabla u_{n+1}) \cdot \nabla(u_n - u_{n+1})^+ \, dx = 0$$

Daí, usando (3.11) novamente, obtemos

$$(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_{n+1}|^{p-2}\nabla u_{n+1}) \cdot \nabla(u_n - u_{n+1})^+ \ = \ 0, \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

o que implica, por (C.3), que

$$\nabla(u_n - u_{n+1})^+ \ = \ 0, \quad q.t.p. \ em \ \Omega,$$

isto é,

$$\|(u_n - u_{n+1})^+\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \ = \ 0.$$

Logo, $(u_n - u_{n+1})^+ = 0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, o que implica $u_n - u_{n+1} \leq 0$ q.t.p. em Ω, ou seja, $u_n \leq u_{n+1}$ q.t.p. em Ω.

b) Como a sequência u_n é crescente em relação a n, precisamos provar somente que u_1 satisfaz (3.10). Pela Proposição 2.13 , existe C_1 (dependendo somente de Ω, N, p) tal que

$$\|u_1\|_{L^\infty(\Omega)} \ \leq \ C_1\|f_1\|_\infty^{\frac{1}{p-1}} \ =: \ C. \tag{3.12}$$

Logo, para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, temos

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 \nabla\varphi \, dx = \int_\Omega \frac{f_1}{(u_1+1)^\alpha}\varphi \, dx \geq \int_\Omega \frac{f_1}{(C+1)^\alpha}\varphi \ \geq \ 0$$

pois $u_1 \leq C$, o que implica $(u_1+1)^\alpha \leq (C+1)^\alpha$ e então, como $f_1 \geq 0$, obtemos

$$\frac{f_1}{(u_1+1)^\alpha} \geq \frac{f_1}{(C+1)^\alpha}.$$

Temos por hipótese $f \not\equiv 0$. Assim, $\frac{f_1}{(u_1+1)^\alpha} \not\equiv 0$ e então $u_1 \not\equiv 0$. Como $u_1 \in L^\infty(\Omega)$, temos por [18] que $u_1 \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, para uma constante β apropriada. Em particular, $u_1 \in C^0(\overline{\Omega})$. Portanto, o princípio da comparação forte (Teorema 2.10) implica que $u_1 > 0$. Como u_1 é contínua, concluímos que vale (3.10). □

O lema seguinte permite usar as funções teste em $C_0^\infty(\Omega)$ para mostrar que uma função é solução fraca.

Lema 3.6. *Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ não negativa, satisfazendo*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi \, dx \;=\; \int_\Omega \frac{f}{u^\alpha}\varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.13}$$

Então u é uma solução fraca do problema (3.1).

Demonstração. Seja w uma função arbitrária em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e tome $\{\xi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\xi_n \to |w|$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Logo, $\xi_n \to |w|$ em $L^p(\Omega)$ e passando a uma subsequência, se necessário, temos também a convergência q.t.p. em Ω. Assim,

$$\begin{array}{rcll}
\left|\int_\Omega \frac{fw}{u^\alpha}\, dx\right| & \leq & \int_\Omega \frac{f|w|}{u^\alpha}\, dx, & \text{pois } u, f \geq 0 \\
& \leq & \liminf \int_\Omega \frac{f\xi_n}{u^\alpha}\, dx, & \text{pelo Lema de Fatou} \\
& = & \lim \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla \xi_n \, dx, & \text{pois } \xi_n \in C_0^\infty(\Omega) \\
& \leq & \|\nabla u\|_p^{p-1} \lim\limits_{n\to\infty} \|\nabla \xi_n\|_p & \text{pela desigualdade de Hölder} \\
& = & \|\nabla u\|_p^{p-1} \|\nabla |w|\|_p & \\
& = & \|\nabla u\|_p^{p-1} \|\nabla w\|_p. &
\end{array} \tag{3.14}$$

Agora, seja $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Logo, existe uma sequência $(\varphi_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_n \to \varphi$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Portanto, usando (3.14) para $w = \varphi_n - \varphi$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_\Omega \frac{f}{u^\alpha}(\varphi_n - \varphi)\, dx \right| \;\leq\; \|\nabla u\|_p^{p-1} \lim_{n\to\infty} \|\nabla(\varphi_n - \varphi)\|_p \;=\; 0. \tag{3.15}$$

Portanto,
$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{f}{u^\alpha}\varphi_n\, dx = \int_\Omega \frac{f}{u^\alpha}\varphi\, dx \tag{3.16}$$
Por outro lado, temos $\varphi_n \in C_0^\infty(\Omega)$ e, pela desigualdade de Hölder, temos
$$\left|\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla(\varphi_n-\varphi)\, dx\right| \;\leq\; \|\nabla u\|_p^{p-1}\;\|\nabla(\varphi_n-\varphi)\|_p$$
. Assim, segue da hipótese que
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{f}{u^\alpha}\varphi_n\, dx &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi_n\, dx\\ &= \textstyle\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi\, dx.\end{aligned} \tag{3.17}$$
Combinando (3.16) e (3.17), obtemos
$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi\, dx \;=\; \int_\Omega \frac{f}{u^\alpha}\varphi\, dx.$$
Portanto, u é uma solução fraca do problema (3.1). □

Teorema 3.7. *Suponha que f é uma função não negativa em $L^{\frac{1}{\alpha}}(\Omega)$ e $0<\alpha\leq 1$. Então a equação (3.1) possui uma única solução $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Demonstração. **Existência**

Note que u_n é solução de
$$\begin{cases} -\Delta_p w = g & \text{em } \Omega\\ w=0 & \text{sobre } \partial\Omega\end{cases}$$
em que $g=\frac{f_n}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\alpha}$. Portanto, pela demonstração do Teorema C.4 temos que u_n minimiza o funcional $J_n : W_0^{1,p}(\Omega)\to\mathbb{R}$ definido por
$$J_n(w)=\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla w|^p\, dx - \int_\Omega \frac{f_n w}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\alpha}\, dx.$$

Pelo Lema 3.4, $\{u_n\}$ é crescente. Logo,
$$0 \;\leq\; u_n(x) \;\leq\; u(x) \;:=\; \lim u_n(x) \;\leq\; \infty.$$

Além disso, fazendo $\varphi = u_n$ em (3.8) obtemos

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u_n|^p \, dx &= \int_\Omega \frac{f_n u_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\alpha} \, dx \\
&\leq \int_\Omega \frac{f u_n}{u_n^\alpha} \, dx \\
&= \int_\Omega f u_n^{1-\alpha} \, dx \\
&\leq \|f\|_{\frac{1}{\alpha}} \, \|u_n^{1-\alpha}\|_{\frac{1}{1-\alpha}} \\
&= \|f\|_{\frac{1}{\alpha}} \, \|u_n\|_1^{1-\alpha} \\
&\leq \|f\|_{\frac{1}{\alpha}} \, (C\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)})^{1-\alpha} \\
&= C^{1-\alpha} \|f\|_{\frac{1}{\alpha}} \, \|u_n\|^{1-\alpha}_{W_0^{1,p}(\Omega)}
\end{aligned}$$

isto é,

$$\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C^{\frac{1-\alpha}{p-(1-\alpha)}} \|f\|_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{p-(1-\alpha)}}.$$

Logo, $\{u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Daí, como $W_0^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo, passando possivelmente a uma subsequência, temos que existe $\overline{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup \overline{u} \text{ fraco em } W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.18}$$

Assim, passando a uma subsequência, se necessário, temos $u_n \to \overline{u}$ em $L^1(\Omega)$ e então, passando novamente a uma subsequência, temos $u_n \to \overline{u}$ q.t.p. em Ω. Portanto, $u = \overline{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Segue também de (3.18) que

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \liminf \|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}. \tag{3.19}$$

Como u_n minimiza o funcional J_n, temos $J_n(u_n) \leq J_n(u)$, isto é,

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_n|^p \, dx - \int_\Omega \frac{f_n u_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\alpha} \, dx \;\leq\; \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx - \int_\Omega \frac{f_n u}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\alpha} \, dx,$$

o que implica

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_n|^p \, dx &\leq \tfrac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \;+\; \int_\Omega \tfrac{u_n - u}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\alpha} f_n \, dx \\
&\leq \tfrac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx,
\end{aligned}$$

uma vez que $u_n \leq u$ q.t.p. em Ω. Logo,

$$\limsup \|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}. \tag{3.20}$$

Portanto, segue de (3.19) e (3.20) que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}. \tag{3.21}$$

Como $W_0^{1,p}(\Omega)$ é uniformemente convexo, segue de (3.18) e (3.21) que $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Portanto, pela Proposição 3.3, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla\phi \, dx = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\phi \, dx, \quad \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.22}$$

Por outro lado, para cada $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ obtemos de (3.10) que

$$0 \leq \left| \frac{f_n\phi}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\alpha} \right| \leq \frac{\|\phi\|_{L^\infty}}{(C_{\Omega'})^\alpha} f$$

em que $\Omega' = \{x \in \Omega; \phi \neq 0\}$. Além disso, $\{f_n\}$ converge para f q.t.p. e, como a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ é compacta, passando possivelmente a uma subsequência, temos $u_n \to u$ forte em $L^p(\Omega)$ e q.t.p. em Ω. Assim, aplicando o teorema da convergência dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{f_n\phi}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\alpha} \, dx = \int_\Omega \frac{f\phi}{u^\alpha} \, dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.23}$$

Temos também que u_n é solução fraca de (3.5) e então

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla\phi \, dx = \int_\Omega \frac{f_n\phi}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\alpha} \, dx, \quad \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.24}$$

Portanto, segue de (3.22), (3.23) e (3.24) que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\phi \, dx = \int_\Omega \frac{f\phi}{u^\alpha} \, dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Logo, pelo Lema 3.6 u é solução fraca de (3.1).

Unicidade

Sejam $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ soluções fracas de (3.1). Considerando $\varphi = u_1 - u_2$, temos

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 \cdot \nabla(u_1 - u_2)\ dx = \int_\Omega \frac{f}{u_1^\alpha}(u_1 - u_2)\ dx$$

e

$$\int_\Omega |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 \cdot \nabla(u_1 - u_2)\ dx = \int_\Omega \frac{f}{u_2^\alpha}(u_1 - u_2)\ dx.$$

Logo,

$$\int_\Omega (|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2)\cdot\nabla(u_1 - u_2)\ dx = \int_\Omega (u_1 - u_2)\left(\frac{1}{u_1^\alpha} - \frac{1}{u_2^\alpha}\right) f\ dx$$

Segue de (C.3) que o lado esquerdo dessa igualdade é não negativo. Temos também que o lado direito é menor ou igual a 0. Portanto,

$$\int_\Omega (|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2)\cdot\nabla(u_1 - u_2)\ dx = 0.$$

Assim, segue de (C.3) que $\nabla(u_1 - u_2) = 0$ q.t.p. Logo, $\|\nabla(u_1 - u_2)\|_p = 0$, isto é, $\|u_1 - u_2\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 0$. Portanto, $u_1 = u_2$. $\square$

Capítulo 4

Minimização do funcional energia

Neste capítulo vamos assumir $0 < \alpha < 1$ e $f \in L^{\frac{1}{\alpha}}(\Omega)$. Vamos mostrar inicialmente que a solução fraca de (3.1) minimiza o funcional $J_\alpha : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J_\alpha(v) = \frac{1}{p}\|\nabla v\|_p^p - \frac{1}{1-\alpha}\int_\Omega (v^+)^{1-\alpha} f \, dx$$

e conhecido como o **funcional energia** associado ao problema (3.1). Uma vez que $0 < \alpha < 1$, este funcional não é derivável. Portanto, não podemos usar recursos de derivação para concluir que seus possíveis minimizadores são pontos críticos.

Posteriormente, mostraremos que a solução u minimiza o quociente

$$\frac{\|\nabla v\|_p^p}{\left(\int_\Omega |v|^{1-\alpha} f \, dx\right)^{\frac{p}{1-\alpha}}}, \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega) \backslash \{0\}.$$

Na demonstração do próximo lema vamos usar a seguinte observação:

Observação 4.1. Sejam $0 < \beta < 1$, $\gamma > 1$ e $a, b \geq 0$ tais que $a + b = 1$. Então a função $t \mapsto t^\beta$ é estritamente côncava e a função $t \mapsto t^\gamma$ é estritamente convexa, isto é,

$$(ax+by)^\beta \;\geq\; ax^\beta + by^\beta, \quad \forall\ x,y \in \mathbb{R},$$

$$(ax+by)^\gamma \;\leq\; ax^\gamma + y^\gamma, \quad \forall\ x,y \in \mathbb{R},$$

e essas desigualdades são estritas nos pontos em que $x \neq y$.

Como $0 < 1-\alpha < 1$ e $p > 1$, para $w_1, w_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, temos

$$(aw_1 + bw_2)^{1-\alpha} \;\geq\; aw_1^{1-\alpha} + bw_2^{1-\alpha},$$

$$(a|\nabla w_1| + b|\nabla w_2|)^p \;\leq\; a|\nabla w_1|^p + |\nabla w_2|^p$$

e a primeira desigualdade é estrita nos pontos em que $w_1(x) \neq w_2(x)$.

Lema 4.2. *O funcional $J_\alpha : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ possui um único minimizador, o qual é não negativo.*

Demonstração. **Existência**

Note que o funcional J_α está bem definido, pois

$$\begin{aligned}
|J_\alpha(v)| &\leq \tfrac{1}{p}\|\nabla v\|_p^p + \|f\|_{\frac{1}{\alpha}}\|(v^+)^{1-\alpha}\|_{\frac{1}{1-\alpha}}, && \text{pela desigualdade de Hölder}\\
&= \tfrac{1}{p}\|v\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|f\|_{\frac{1}{\alpha}}\|v^+\|_1^{1-\alpha}\\
&\leq \tfrac{1}{p}\|v\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|f\|_{\frac{1}{\alpha}}\|v\|_1^{1-\alpha}\\
&\leq \tfrac{1}{p}\|v\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + C\|f\|_{\frac{1}{\alpha}}\|v\|^{1-\alpha}_{W_0^{1,p}(\Omega)}, && \text{pois } W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Temos também de modo análogo

$$J_\alpha(v) \geq \frac{1}{p}\|v\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - C\|f\|_{\frac{1}{\alpha}}\|v\|^{1-\alpha}_{W_0^{1,p}(\Omega)}. \tag{4.1}$$

Logo, como $0 < 1-\alpha < 1 < p$, segue que a função $p(t) = \frac{1}{p}t^p - C\|f\|_{\frac{1}{\alpha}}t^{1-\alpha}$ é limitada inferiormente em $\mathbb{R}^+$ e então

$$\mu \;:=\; \inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} J_\alpha(v) \;>\; -\infty. \tag{4.2}$$

É interessante observar que $\mu < 0$. De fato, fixando $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega (v^+)^{1-\alpha} f \, dx > 0$$

temos

$$J_\alpha(tv) = t^{1-\alpha} \left[\frac{t^{p-(1-\alpha)}}{p} \|\nabla v\|_p^p - \frac{1}{1-\alpha} \int_\Omega (v^+)^{1-\alpha} f \, dx \right],$$

para todo $t \geq 0$. Como a função $t \mapsto J_\alpha(tv)$ é negativa para valores de t entre suas duas raízes, podemos concluir que o funcional J_α assume valores negativos.

Agora, tomemos uma sequência minimizante correspondente a μ, isto é, uma sequência $\{w_k\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\lim_{k \to +\infty} J_\alpha(w_k) = \mu. \tag{4.3}$$

Logo, a sequência $(J(w_k))_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada em $\mathbb{R}$ e então segue de (4.1) que existe $M > 0$ tal que

$$\frac{1}{p} \|w_k\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - C \|f\|_{\frac{1}{\alpha}} \|w_k\|^{1-\alpha}_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq M, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $\{w_k\}$ é uma sequência limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, pois

$$\lim_{t \to +\infty} p(t) = +\infty.$$

Como $W_0^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo, (w_k) possui uma subsequência, que vamos continuar denotando por (w_k), fracamente convergente em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Passando possivelmente a uma subsequência, temos que existe $w \in L^1(\Omega)$ tal que $w_k \to w$ em $L^1(\Omega)$. Note que,

$$w_k^+ = \frac{1}{2}(|w_k| + w_k) \ \to \ \frac{1}{2}(|w| + w) = w^+ \ \text{ em } L^1(\Omega) \tag{4.4}$$

quando $k \to \infty$. Como

$$|a^\beta - b^\beta| \leq |a - b|^\beta, \quad \forall \, a, b \geq 0, \ 0 < \beta \leq 1, \tag{4.5}$$

temos

$$
\begin{aligned}
& \left|\int_\Omega [(w_k^+)^{1-\alpha} - (w^+)^{1-\alpha}]\ f\ dx\right| \\
\leq\ & \int_\Omega |(w_k^+)^{1-\alpha} - (w^+)^{1-\alpha}|\ |f|\ dx \\
\leq\ & \int_\Omega |w_k^+ - w^+|^{1-\alpha}\ |f|\ dx, && \text{por (4.5)} \\
\leq\ & \|(w_k^+ - w^+)^{1-\alpha}\|_{\frac{1}{1-\alpha}}\ \|f\|_{\frac{1}{\alpha}}, && \text{pela desigualdade de Hölder} \\
=\ & \|w_k^+ - w^+\|_1^{1-\alpha}\ \|f\|_{\frac{1}{\alpha}}.
\end{aligned}
$$

Logo, segue de (4.4) que

$$
\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega (w_k^+)^{1-\alpha} f\ dx \ = \ \int_\Omega (w^+)^{1-\alpha} f\ dx. \tag{4.6}
$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
J_\alpha(w) &= \tfrac{1}{p}\|w\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \tfrac{1}{1-\alpha}\int_\Omega (w^+)^{1-\alpha} f\ dx \\
&\leq \tfrac{1}{p}\left(\liminf_{k\to\infty} \|w_k\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right)^p - \tfrac{1}{1-\alpha}\int_\Omega (w^+)^{1-\alpha} f\ dx \\
&= \tfrac{1}{p}\liminf_{k\to\infty} \|w_k\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \frac{1}{1-\alpha}\int_\Omega (w^+)^{1-\alpha} f\ dx \\
&= \liminf_{k\to\infty}\left(\frac{1}{p}\|w_k\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \frac{1}{1-\alpha}\int_\Omega (w_k^+)^{1-\alpha} f\ dx\right) \\
&+ \tfrac{1}{1-\alpha}\ \lim_{k\to\infty}\ \left(\int_\Omega (w_k^+)^{1-\alpha} f\ dx - \int_\Omega (w^+)^{1-\alpha} f\ dx\right) \\
&= \liminf_{k\to\infty} J_\alpha(w_k)\ + \frac{1}{1-\alpha}\lim_{k\to\infty}\ \left(\int_\Omega (w_k^+)^{1-\alpha} f\ dx - \int_\Omega (w^+)^{1-\alpha} f\ dx\right) \\
&= \mu + 0 \ = \ \mu,
\end{aligned}
$$

ou seja

$$
J_\alpha(w) \leq \mu.
$$

Por outro lado,

$$
\mu = \inf_{v\in W_0^{1,p}(\Omega)} J_\alpha(v) \ \leq \ J_\alpha(w).
$$

Logo, $J_\alpha(w) = \mu$ e então w minimiza J_α.

w é não negativo

Sabemos que

$$
\nabla w^+ = \begin{cases} \nabla w, & \text{em} \quad w \geq 0, \\ 0, & \text{em} \quad w < 0, \end{cases}
$$

e

$$\nabla w^- = \begin{cases} 0, & \text{em} \quad w \geq 0, \\ -\nabla w, & \text{em} \quad w < 0. \end{cases}$$

Logo, se $\nabla w^- \not\equiv 0$

$$\begin{aligned} \|\nabla w\|_p &= \left(\int_\Omega \|\nabla w^+\|_{\mathbb{R}^N}^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega \|\nabla w^-\|_{\mathbb{R}^N}^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &> \left(\int_\Omega \|\nabla w^+\|_{\mathbb{R}^N}^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|\nabla w^+\|_p \end{aligned}$$

e, então,

$$J_\alpha(w^+) < J_\alpha(w), \tag{4.7}$$

o que contradiz o fato de w ser um minimizador de J_α. Portanto,

$$w^- \equiv 0. \tag{4.8}$$

Assim, $w \geq 0$.

Unicidade

Sejam w_1 e w_2 minimizadores de J_α e suponhamos que

$$D := \{x \in \Omega \ / \ w_1(x) \neq w_2(x)\}$$

tem medida positiva. Como já mostramos w_1 e w_2 são não negativos. Sejam $a, b \geq 0$ são tais que $a + b = 1$. Logo,

$$\begin{aligned} \mu &\leq J_\alpha(aw_1 + bw_2) \\ &= \tfrac{1}{p}\textstyle\int_\Omega |a\nabla w_1 + b\nabla w_2|^p \, dx - \tfrac{1}{1-\alpha}\int_\Omega (aw_1 + bw_2)^{1-\alpha} f \, dx \\ &\leq \tfrac{1}{p}\textstyle\int_\Omega (a|\nabla w_1| + b|\nabla w_2|)^p \, dx - \tfrac{1}{1-\alpha}\int_\Omega (aw_1 + bw_2)^{1-\alpha} f \, dx, && \text{pela des. triangular} \\ &< \tfrac{1}{p}\textstyle\int_\Omega (a|\nabla w_1|^p + b|\nabla w_2|^p) \, dx - \tfrac{1}{1-\alpha}\int_\Omega (aw_1^{1-\alpha} + bw_2^{1-\alpha}) f \, dx, && \text{pela observação 4.1} \\ &= aJ_\alpha(w_1) + bJ_\alpha(w_2) \\ &= (a+b)\ \mu, && \text{por (4.2)} \\ &= \mu \end{aligned}$$

Assim, chegamos ao absurdo $\mu < \mu$. Logo, $|D| = 0$ e $w_1 = w_2$ q.t.p. em Ω.

$\square$

Lema 4.3. *A solução u_n encontrada no Lema 3.4 é o único minimizador positivo do funcional*

$$H_n(v) = \frac{1}{p}\|\nabla v\|_p^p - \int_\Omega G_n(v(x))\ f_n(x)\ dx$$

em que

$$\begin{aligned} G_n(t) &= \int_0^t \left(s^+ + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha} ds \quad (4.9)\\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left(t+\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}, & \textit{se} \quad t \geq 0,\\ \left(\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} t, & \textit{se} \quad t < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Demonstração. H_n **é de classe** C^1

Defina

$$g(x,s) = \frac{f_n(x)}{\left(s^+ + \frac{1}{n}\right)^\alpha}. \tag{4.10}$$

Note que, para todo $s \in \mathbb{R}$, a função $x \mapsto g(x,s)$ é Lebesgue mensurável, pois $f_n \in L^1(\Omega)$. Temos também que para quase todo $x \in \Omega$ a função $s \mapsto g(x,s)$ é contínua em $\mathbb{R}$. Portanto, g definida em (4.10) é uma função de Carathéodory.

Temos que g satisfaz a condição de crescimento

$$|g(x,s)| \leq C|s|^{q-1} + b(x), \quad x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R} \tag{4.11}$$

em que $C \geq 0$ é uma constante, $1 < q < p^*$ e $b \in L^{q'}(\Omega)$, pois

$$\begin{aligned} |g(x,s)| &= \frac{f_n(x)}{\left(s^+ + \frac{1}{n}\right)^\alpha}\\ &\leq \frac{n}{\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha}\\ &= n^{\alpha+1}. \end{aligned}$$

Portanto, segue da Observação A.4 que o funcional $H_n : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e

$$\langle H_n'(v), \phi \rangle = \int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \phi \; dx - \int_\Omega g(x,v)\phi \; dx, \quad \forall \; \phi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

H_n **possui um minimizador**

Note que

$$\begin{array}{rcll} G_n(v(x)) & = & \frac{1}{1-\alpha}\left(v(x)+\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} \leq \frac{1}{1-\alpha}\left(v^+(x)+\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}, & \text{para } v(x) \geq 0, \\ G_n(v(x)) & = & \left(\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} v(x) \;\leq\; 0 \;\leq\; \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(v^+(x)+\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}, & \text{para } v(x) \leq 0. \end{array}$$

Assim,

$$G_n(v) \leq \frac{1}{1-\alpha}\left(v^+ + \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha},$$

o que, pela desigualdade de Hölder e a imersão de Sobolev, implica

$$\begin{aligned} \int_\Omega G_n(v) f_n \; dx & \leq \frac{1}{1-\alpha}\int_\Omega \left(v^+ + \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} f \; dx \\ & \leq \frac{1}{1-\alpha}\int_\Omega \left(v^+ + 1\right)^{1-\alpha} f \; dx \\ & \leq \frac{1}{1-\alpha}\| f\|_{\frac{1}{\alpha}} \; \|v+1\|_1^{1-\alpha} \\ & \leq \frac{1}{1-\alpha}\| f\|_{\frac{1}{\alpha}} \; (\|v\|_1 + |\Omega|)^{1-\alpha} \\ & \leq \frac{1}{1-\alpha}\| f\|_{\frac{1}{\alpha}} \; (C\|\nabla v\|_p + |\Omega|)^{1-\alpha} \\ & = C_1(\|\nabla v\|_p + C_2)^{1-\alpha}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Logo,

$$\begin{aligned} H_n(v) & = \frac{1}{p}\|\nabla v\|_p^p \; - \; \int_\Omega G_n(v(x)) \; f_n(x) \; dx \\ & \geq \frac{1}{p}\|\nabla v\|_p^p - C_1(\|\nabla v\|_p + C_2)^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Uma vez que a função $t \in [0, +\infty) \mapsto \frac{t^p}{p} - C_1(t+C_2)^{1-\alpha}$ é limitada inferiormente, temos que

$$\lambda \; := \inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} H_n(v) \; > \; -\infty.$$

Portanto, existe uma sequência $\{w_k\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$H_n(w_k) \to \lambda \text{ quando } k \to \infty. \tag{4.13}$$

Segue de (4.13) que w_k é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, pois

$$\lim_{t\to+\infty} \left[\frac{t^p}{p} - C_1(t + C_2)^{1-\alpha} \right] = +\infty.$$

Como $W_0^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo, passando a uma subsequência se necessário, $\{w_k\}$ é fracamente convergente em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Passando novamente a uma subsequência, existe $w \in L^1(\Omega)$ tal que

$$w_k \to w \text{ em } L^1(\Omega), \text{ quando } k \to \infty.$$

Note que

$$G_n'(t) = \left(t^+ + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha} \le \left(\frac{1}{n} \right)^{-\alpha} = n^\alpha, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{4.14}$$

Assim, G_n é Lipschitziana e, então,

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega G_n(w_k) f_n \, dx - \int_\Omega G_n(w) f_n \, dx \right| &\le n \int_\Omega |G_n(w_k) - G_n(w)| \, dx, && \text{pois } |f_n| \le n \\
&\le n^{\alpha+1} \int_\Omega |w_k - w| \, dx, && \text{por (4.14)} \\
&= n^{\alpha+1} \|w_k - w\|_1 \\
&\le n^{\alpha+1} C \|w_k - w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}, && \text{pela imersão de Sobolev.}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega G_n(w_k) f_n \, dx = \int_\Omega G_n(w) f_n \, dx,$$

o que implica

$$\begin{aligned}
H_n(w) &\le \frac{1}{p} \liminf_{k\to\infty} \|\nabla w_k\|_p^p - \int_\Omega G_n(w) f_n \, dx \\
&= \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{p} \left(\|\nabla w_k\|_p^p - \int_\Omega G_n(w_k) f_n \, dx \right) \\
&= \liminf_{k\to\infty} H_n(w_k) \\
&= \lambda
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Logo, w minimiza H_n.

Uma vez que $G_n(w) \leq G_n(w^+)$, podemos concluir que $\nabla w^- \equiv 0$, ou seja, $w \geq 0$.

Como H_n é de classe C^1 e w é um minimizador, concluímos que w é um ponto crítico de H_n. Portanto, w é solução de (3.5), implicando que $w = u_n$ e, então, u_n minimiza H_n.

Unicidade

Já mostramos que H_n é de classe C^1 e, portanto, todo minimizador de H_n é um ponto crítico. Mostramos também que todo ponto crítico de H_n é uma solucão de (3.5). Logo, todo minimizador de H_n é uma solucão de (3.5). Além disso, segue do Lema 3.4 que o problema (3.5) possui uma única solução. Portanto, H_n possui um único minimizador, o qual é u_n. $\square$

Teorema 4.4. *A solução u encontrada no Teorema 3.7 minimiza J_α.*

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} G_n(t) &= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha}, & \text{se} \quad t \geq 0, \\ 0, & \text{se} \quad t < 0. \end{cases} \\ &= \frac{(t^+)^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) G_n(u_n(x)) = \frac{1}{1-\alpha} f(x) u(x)^{1-\alpha}, \quad x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Além disso, como $u_n \leq u$ e G_n é crescente, temos

$$\begin{aligned} |f_n(x) G_n(u_n(x))| &\leq f(x)\, |G_n(u_n(x))| \\ &\leq f(x)\, |G_n(u(x))| \\ &\leq \tfrac{f(x)}{1-\alpha} \left(u(x) + \tfrac{1}{n}\right)^{1-\alpha} \\ &\leq \tfrac{f(x)}{1-\alpha} \left(u(x) + 1\right)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|(u+1)^{1-\alpha} f\|_1 &\leq \|u+1\|_1^{1-\alpha} \ \|f\|_{\frac{1}{\alpha}} \\
&\leq (\|u\|_1 + |\Omega|)^{1-\alpha} \ \|f\|_{\frac{1}{\alpha}} \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x) G_n(u_n(x)) \ dx = \frac{1}{1-\alpha} \int_\Omega f(x) u^{1-\alpha} \ dx. \tag{4.16}$$

Analogamente, se $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$|f_n(x) G_n(v(x))| \ \leq \ f(x) \ |G_n(v^+(x))| \ \leq \ \frac{f(x)}{1-\alpha} \left(v^+(x) + \frac{1}{n} \right)^{1-\alpha} \ \in \ L^1(\Omega)$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x) G_n(v(x)) \ dx = \frac{1}{1-\alpha} \int_\Omega f(x) (v^+(x))^{1-\alpha} \ dx. \tag{4.17}$$

Como $u_n \geq 0$ e u_n é um minimizador de H_n, temos

$$\frac{1}{p} \|\nabla u_n\|_p^p - \int_\Omega f_n(x) G_n(u_n(x)) \ dx \ \leq \ \frac{1}{p} \|\nabla v\|_p^p - \int_\Omega f_n(x) G_n(v(x)) \ dx.$$

Daí, como sabemos que $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ - veja demonstração do Teorema 3.7 - temos de (4.16) e (4.17) que

$$\frac{1}{p} \|\nabla u\|_p^p - \frac{1}{1-\alpha} \int_\Omega f(x) u^{1-\alpha} \ dx \ \leq \ \frac{1}{p} \|\nabla v\|_p^p - \int_\Omega f(x) (v^+(x))^{1-\alpha} \ dx$$

ou seja,

$$J_\alpha(u) \leq J_\alpha(v), \quad \forall \ v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

$\square$

Agora mostraremos que u minimiza o quociente

$$\frac{\|\nabla v\|_p^p}{\left(\int_\Omega |v|^{1-\alpha} f \ dx \right)^{\frac{p}{1-\alpha}}}, \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega) \backslash \{0\}.$$

Note que isto é equivalente a provar o seguinte teorema, em que

$$u_\alpha := \frac{u}{\left(\int_\Omega |u|^{1-\alpha} f \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

e

$$\mathcal{M} := \left\{ v \in W_0^{1,p}(\Omega) : \int_\Omega |v|^{1-\alpha} f \mathrm{d}x = 1 \right\}.$$

Teorema 4.5. *Temos*

$$\|\nabla u_\alpha\|_p^p = \min \left\{ \|\nabla v\|_p^p : v \in \mathcal{M} \right\}.$$

Demonstração. Usando (3.2) para $\varphi = u$ obtemos

$$\|\nabla u\|_p^p = \int_\Omega u^{1-\alpha} f \; dx. \tag{4.18}$$

Portanto,

$$J_\alpha(u) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{1-\alpha} \right) \int_\Omega u^{1-\alpha} f \; dx.$$

Fixe $v \in \mathcal{M}$. Para cada $t > 0$ temos

$$J_\alpha(u) \leq J_\alpha(t\,|v|) = \frac{t^p}{p} \|\nabla v\|_p^p - \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

e, por (4.18), essa desigualdade equivale a

$$t^{1-\alpha} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{t^{p-(1-\alpha)} \|\nabla v\|_p^p}{p} \right) \leq \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{p} \right) \int_\Omega u^{1-\alpha} f \; dx. \tag{4.19}$$

Para

$$t = \|\nabla v\|_p^{-\frac{p}{p-(1-\alpha)}}$$

temos

$$t^{1-\alpha} \leq \int_\Omega u^{1-\alpha} f \; dx,$$

isto é,

$$\|\nabla v\|_p^{-\frac{p(1-\alpha)}{p-(1-\alpha)}} \leq \int_\Omega u^{1-\alpha} f \; dx,$$

ou ainda

$$\|\nabla v\|_p^p \geq \left(\int_\Omega u^{1-\alpha} f \; dx \right)^{1-\frac{p}{1-\alpha}}.$$

Portanto, segue de (4.18) que

$$\|\nabla u_\alpha\|_p^p = \left(\int_\Omega u^{1-\alpha} f \; dx \right)^{1-\frac{p}{1-\alpha}} \leq \|\nabla v\|_p^p,$$

o que finaliza a prova, uma vez que $u_\alpha \in \mathcal{M}$.

$\square$

Apêndice A

Diferenciabilidade de funcionais de Nemytskii

Neste apêndice apresentamos um resultado de diferenciabilidade para funcionais de Nemytskii, ou seja, para funcionais da forma

$$\Phi(u) = \int_\Omega F(x, u(x))\ dx$$

em que

$$F(x, s) = \int_0^s f(x, \tau)\ d\tau.$$

Estes resultados podem ser encontrados em [11, 14].

Definição A.1. *Um funcional Φ em um espaço de Banach X é (Fréchet) diferenciável em $u \in X$ se existe uma aplicação linear limitada $\Phi'(u) \in X^*$ tal que*

$$\frac{|\Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi'(u)v|}{\|v\|_X} \to 0$$

quando $\|v\|_X \to 0$. O funcional Φ é de classe C^1 se a aplicação $u \mapsto \Phi'(u)$ é contínua. $\Phi'(u)$ é a derivada de Fréchet de Φ em u.

Usualmente, a expressão $\langle \Phi'(u), v \rangle$ é utilizada para denotar $\Phi'(u)v$, a ação de $\Phi'(u)$ em v.

Definição A.2. *Uma função* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é chamada função de Carathéodory se satisfaz as seguintes condições:*
(i) para cada $s \in \mathbb{R}$, *a função* $x \mapsto f(x,s)$ *é Lebesgue mensurável em* Ω;
(ii) para $x \in \Omega$ *q.t.p. a função* $s \mapsto f(x,s)$ *é contínua em* $\mathbb{R}$.

A proposição seguinte pode ser encontrada em [11, Proposição 6].

Proposição A.3. *Suponha que* $f : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função de Carathéodory e satisfaz a seguinte condição de crescimento:*

$$|f(x,s)| \le C|s|^{q-1} + b(x), \quad x \in \Omega, s \in \mathbb{R},$$

em que $C \ge 0$ *é uma constante,* $q > 1$, $b \in L^{q'}(\Omega)$. *Seja* $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,\tau)\ d\tau.$$

Então:
(i) F *é uma função de Carathéodory e existem* $C_1 \ge 0$ *e* $c \in L^{q'}(\Omega)$ *tais que*

$$|F(x,s)| \le C_1|s|^q + c(x), \quad x \in \Omega, s \in \mathbb{R};$$

(ii) o funcional $\Phi : L^q(\Omega) \to \mathbb{R}$ *definido por*

$$\Phi(u) = \int_\Omega F(x,u(x))\ dx$$

é de classe C^1 *e a derivada de Fréchet de* Φ *em* u *é o funcional definido por*

$$\langle \Phi'(u), v\rangle = \int_\Omega f(x,u(x))\ v(x)\ dx, \quad u \in L^q(\Omega), v \in L^{q'}(\Omega). \tag{A.1}$$

Observação A.4. Para $1 < q < p^*$, as soluções de

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u), & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{A.2}$$

são pontos críticos de um funcional de classe C^1 em $W_0^{1,p}(\Omega)$. De fato, por definição, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é solução fraca de (A.2) se

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \; dx = \int_\Omega f(x,u(x)) \; v(x) \; dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Além disso, segue de [11, Teoremas 7 e 9] que o funcional $\psi(u) := \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p$ é de classe C^1 em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e

$$\langle \psi'(u), v\rangle := \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \; dx.$$

Por outro lado, como a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínua, segue da proposição anterior que o funcional energia associado ao problema (A.2), definido por

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p - \int_\Omega F(x,u(x)) \; dx,$$

é de classe C^1 em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e sua derivada é dada pela expressão

$$\langle \mathcal{F}'(u), v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \; dx - \int_\Omega f(x,u(x)) \; v(x) \; dx, \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Assim, as soluções do problema (A.2) são os pontos críticos de $\mathcal{F}$.

Apêndice B

Solução do problema de Dirichlet para a equação de Poisson radial

Nesta seção vamos deduzir uma expressão para a solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x), & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{B.1}$$

em que Ω é a bola de raio R centrada na origem e $f \in L^\infty(\Omega)$ é radial, isto é, $f(x) = f(r)$, em que $r = |x|$.

Para simplificar a expressão da solução, utilizaremos a função

$$\psi_p(t) := |t|^{p-2}t.$$

Note que

$$\psi_p^{-1} = \psi_{p'}. \tag{B.2}$$

De fato, se $s \geq 0$ e $s = \psi_p(t) = |t|^{p-2}t$ então $t \geq 0$ e, assim, $s = t^{p-1}$. Logo, $t = s^{\frac{1}{p-1}} = s^{p'-1} = \psi_{p'}(s)$. Por outro lado, se $s < 0$ e $s = \psi_p(t) =$

$|t|^{p-2}t$ então $t < 0$ e, assim, $s = (-t)^{p-2}t = (-1)^{p-2}t^{p-1}$ o que implica que $t^{p-1} = (-1)^{2-p}s$, que pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$t = (-1)^{\frac{2-p}{p-1}} s^{\frac{1}{p-1}} = (-1)^{p'-2} s^{p'-1} = (-s)^{p'-2}s = \psi_{p'}(s).$$

Teorema B.1. *Suponha que em (B.1) tenhamos* $\Omega = B_R(0)$ *e* $f(x) = f(r)$*, em que* $r = |x|$*. Então a única solução de (B.1) é dada por*

$$u(r) = \int_r^R \psi_{p'} \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{N-1} f(s)\ ds \right)\ d\theta \tag{B.3}$$

em que $\psi_{p'}$ *é a inversa de* $\psi_p(t) = |t|^{p-2}t$.

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(u(r)) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u\left(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \right)\right) \\ &= u'(r) \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}} 2x_i \\ &= u'(r)\frac{x_i}{r} \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} |\nabla u|^{p-2}\nabla u &= \left| u'(r)\ \frac{x}{r} \right|^{p-2} u'(r)\ \frac{x}{r} \\ &= |u'(r)|^{p-2} u'(r)\ \frac{x}{r} \\ &= \psi_p(u'(r))\ \frac{x}{r}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta_p u &= div\left(\psi_p(u'(r))\ \frac{x}{r} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dr}\left[\psi_p(u'(r))\right] \frac{\partial r}{\partial x_i}\ \frac{x_i}{r}\ +\ \psi_p(u'(r))\ \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r}\right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dr}\left[\psi_p(u'(r))\right] \frac{x_i}{r}\ \frac{x_i}{r}\ +\ \psi_p(u'(r))\ \left(\frac{1}{r}\ -\ \frac{x_i^2}{r^3} \right) \right] \\ &= \frac{d}{dr}\left[\psi_p(u'(r))\right]\ +\ \psi_p(u'(r))\ \frac{N-1}{r}. \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever a equação (B.1) da seguinte forma radial:

$$-\left(\frac{d}{dr}\left[\psi_p(u'(r))\right] \; + \; \psi_p(u'(r))\,\frac{N-1}{r}\right) = f(r)$$

que pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$-\left[r^{N-1}\psi_p(u'(r))\right]' = r^{N-1}f(r).$$

Como a solução f é limitada, segue de [18] que $u \in C^{1,\beta}(\Omega)$. Além disso, f é radial, o que implica que u é radial. Temos então

$$\begin{aligned}
u'(0) &= \lim_{t\to 0}\frac{u(t)-u(0)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0^-}\frac{u(-t)-u(0)}{-t}, \quad \text{trocando } t \text{ por } -t\\
&= -\lim_{t\to 0^-}\frac{u(t)-u(0)}{t}, \quad \text{pois } u(t)=u(-t)\\
&= -u'(0)
\end{aligned}$$

Logo, $u'(0)=0$ e , portanto, $\psi_p(u'(0))=0$. Integrando de 0 a r obtemos

$$-\psi_p(u'(r)) = \int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{N-1} f(s)\;ds.$$

Como ψ_p é ímpar e então $(\psi_p)^{-1}$ também é ímpar, segue que

$$-u'(r) = \psi_p^{-1}\left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{N-1} f(s)\;ds\right).$$

Portanto, segue de (B.2) que

$$-u'(r) = \psi_{p'}\left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{N-1} f(s)\;ds\right).$$

Finalmente, como $u(R)=0$, pois $u=0$ em $\partial\Omega$, integrando de r a R concluímos que

$$u(r) = \int_r^R \psi_{p'}\left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{N-1} f(s)\;ds\right)\;d\theta.$$

Portanto, a única solução de (2.1) é dada por (B.3). $\square$

Apêndice C

O inverso do operador p-Laplaciano

Nesta seção estudamos o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g(x) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{C.1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $g \in L^{p'}(\Omega)$, $0 < p < 1$ e $p' = \frac{p}{p-1}$. A condição de fronteira será entendida como $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Definição C.1. *Uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é chamada solução fraca do problema (C.1) se vale a seguinte identidade*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega g\varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstrações do próximo lema podem ser obtidas em [10, Lema 2.1] ou em [26, Lema 1]. Nele, utilizaremos a seguinte função vetorial

$$\begin{array}{rccc} \psi_p : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x & \longmapsto & |x|^{p-2}x \end{array}$$

em que $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Lema C.2. *Sejam x, y vetores de $\mathbb{R}^N$. Então existem constantes positivas c_p e C_p, que dependem apenas de p, tais que:*

$$|\psi_p(x) - \psi_p(y)| \leq c_p \begin{cases} |x-y|^{p-1}, & se \quad 1 < p \leq 2 \\ (|x|+|y|)^{p-2}|x-y|, & se \quad p \geq 2 \end{cases} \tag{C.2}$$

e

$$(\psi_p(x) - \psi_p(y)) \cdot (x-y) \geq C_p \begin{cases} \frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}}, & se \quad 1 < p \leq 2 \\ |x-y|^p, & se \quad p \geq 2 \end{cases} \tag{C.3}$$

para todos x, $y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

Lema C.3. *O funcional $J : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por*

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx - \int_\Omega gu \, dx, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

é de classe C^1 e

$$\langle J'(u), \phi\rangle = \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\phi - g\phi) \, dx, \qquad \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

A prova da diferenciabilidade do primeiro termo do funcional pode ser encontrada em [11, Teoremas 7 e 9]. A diferenciabilidade do segundo termo é imediata.

Teorema C.4. *Suponha $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e $g \in L^{p'}(\Omega)$. Então o problema (C.1) possui uma única solução $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ no sentido fraco.*

Demonstração. Primeiramente, provaremos a existência de uma solução. Note que o funcional

$$J(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx - \int_\Omega gu \, dx, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

está bem definido, pois pelas desigualdades de Hölder e de Poincaré temos

$$|J(u)| \;\leq\; \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p + \|g\|_{p'}\|u\|_p \;\leq\; \frac{1}{p}\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + C\|g\|_{p'}\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

Assim, segue das desigualdades de Hölder e de Poincaré que

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \tfrac{1}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \|g\|_{p'}\|u\|_p \\ &\geq \tfrac{1}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - C\|g\|_{p'}\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{C.4}$$

Logo, como a função $p(t) = \frac{1}{p}t^p - C\|g\|_{p'}t$ é limitada inferiormente, segue que

$$\mu \;:=\; \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)} J(u) \;>\; -\infty.$$

Temos que existe uma sequência $\{u_k\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\lim_{k\to+\infty} J(u_k) = \mu. \tag{C.5}$$

Logo, a sequência $(J(u_k))_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathbb{R}$ e então segue de (C.4) que existe $M > 0$ tal que

$$\frac{1}{p}\|u_k\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - C\|f\|_{p'}\|u_k\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq M, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $\{u_k\}$ é uma sequência limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, pois

$$\lim_{t\to+\infty} p(t) = +\infty.$$

Como $W_0^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo, passando possivelmente a uma subsequência, temos que existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_k \rightharpoonup u$ fraco em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Note que, definindo

$$F(w) = \int_\Omega gw\ dx, \quad w \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

segue da desigualdade de Hölder que

$$|F(w)| \;\leq\; \|g\|_{p'}\|w\|_p$$

e então $F \in W^{-1.p'}(\Omega)$. Logo, $F(u_k) \to F(u)$, isto é,

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega gu_k\ dx \;=\; \int_\Omega fu\ dx. \tag{C.6}$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
J(u) &= \tfrac{1}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \textstyle\int_\Omega gu\ dx \\
&\le \tfrac{1}{p}\left(\liminf_{k\to\infty}\|u_k\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right)^p - \textstyle\int_\Omega gu\ dx \\
&= \tfrac{1}{p}\liminf_{k\to\infty}\|u_k\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega gu\ dx \\
&= \liminf_{k\to\infty}\left(\frac{1}{p}\|u_k\|^p - \int_\Omega gu_k\ dx\right) + \lim_{k\to\infty}\left(\int_\Omega gu_k\ dx - \int_\Omega gu\ dx\right) \\
&= \liminf_{k\to\infty} J(u_k) + \lim_{k\to\infty}\left(\int_\Omega gu_k\ dx - \int_\Omega gu\ dx\right).
\end{aligned}
$$

Fazendo $k\to\infty$ nessa última desigualdade, seque de (C.5) e (C.6) que

$$J(u)\le\mu.$$

Por outro lado,

$$\mu = \inf_{w\in W_0^{1,p}(\Omega)} \le J(u).$$

Logo, $J(u)=\mu$ e então u minimiza J_n. Portanto, segue do Lema C.3 que u é solução fraca do problema (C.1).

Agora, provemos a unicidade. Sejam $u_1,u_2\in W_0^{1,p}(\Omega)$ soluções fracas do Problema (C.1) para $g=g_1$ e $g=g_2$, respectivamente. Assim,

$$\langle -\Delta_p u_1 - (-\Delta_p u_2), u_1-u_2\rangle \ = \ \langle g_1-g_2, u_1-u_2\rangle.$$

e então segue da desigualdade (C.3) que

$$
\begin{aligned}
&\langle -\Delta_p u_1 - (-\Delta_p u_2), u_1-u_2\rangle \\
=\ & \textstyle\int_\Omega \langle |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2, \nabla(u_1-u_2)\rangle\ dx \\
\ge\ & C_p\begin{cases} \int_\Omega |\nabla(u_1-u_2)|^p\ dx & \text{se } p>2, \\ \int_\Omega \frac{|\nabla(u_1-u_2)|^2}{(|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)^{2-p}}\ dx & \text{se } 1<p\le 2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Então para $p>2$ temos

$$
\begin{aligned}
\textstyle\int_\Omega |\nabla(u_1-u_2)|^p\ dx &\le \tfrac{1}{C_p}\langle g_1-g_2, u_1-u_2\rangle \\
&\le \tfrac{1}{C_p}\|g_1-g_2\|_{p'}\|u_1-u_2\|_p \\
&\le S_p\tfrac{1}{C_p}\|g_1-g_2\|_{p'}\|u_1-u_2\|_{W_0^{1,p}(\Omega)},
\end{aligned}
$$

o que implica

$$\|u_1 - u_2\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \left(\frac{S}{C_p}\right)^{\frac{1}{p-1}} \|g_1 - g_2\|_{p'}^{\frac{1}{p-1}}. \tag{C.7}$$

Para $1 < p < 2$ temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{|\nabla(u_1-u_2)|^2}{(|\nabla u_1|-|\nabla u_2|)^{2-p}} \, dx &\leq \frac{1}{C_p} \langle g_1 - g_2, u_1 - u_2 \rangle \\ &\leq \frac{1}{C_p} \|g_1 - g_2\|_{p'} \|u_1 - u_2\|_p \\ &\leq S_p \frac{1}{C_p} \|g_1 - g_2\|_{p'} \|u_1 - u_2\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^p \, dx &= \int_\Omega \frac{|\nabla(u_1-u_2)|^p}{(|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)^{\frac{p(2-p)}{2}}} (|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{\frac{p(2-p)}{2}} \, dx \\ &\leq \left\| \frac{|\nabla(u_1-u_2)|^p}{(|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)^{\frac{p(2-p)}{2}}} \right\|_{\frac{2}{p}} (\||\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{\frac{p(2-p)}{2}} \|_{\frac{2}{2-p}} \\ &= \left(\int_\Omega \frac{|\nabla(u_1-u_2)|^2}{(|\nabla u_1|-|\nabla u_2|)^{2-p}} \, dx\right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_\Omega (\||\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^p \, dx\right)^{\frac{2-p}{2}}. \end{aligned}$$

Combinando essas duas últimas desigualdades obtemos

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^p \, dx \\ \leq\ & \left(S_p \frac{1}{C_p} \|g_1 - g_2\|_{p'} \|u_1 - u_2\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_\Omega (\||\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^p \, dx\right)^{\frac{2-p}{2}} \\ =\ & \left(S_p \frac{1}{C_p} \|g_1 - g_2\|_{p'} \|u_1 - u_2\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right)^{\frac{p}{2}} (\||\nabla u_1| + |\nabla u_2|\|_p)^{\frac{p(2-p)}{2}} \\ \leq\ & \left(S_p \frac{1}{C_p} \|g_1 - g_2\|_{p'} \|u_1 - u_2\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right)^{\frac{p}{2}} (\|\nabla u_1\|_p + \|\nabla u_2\|_p)^{\frac{p(2-p)}{2}} \end{aligned}$$

e então

$$\frac{\|u_1 - u_2\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{\frac{p}{2}}}{\left(\|u_1\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u_2\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right)^{\frac{p(2-p)}{2}}} \leq \left(S_p \frac{1}{C_p} \|g_1 - g_2\|_{p'}\right)^{\frac{p}{2}}. \tag{C.8}$$

De (C.7) e (C.8) segue que se $g_1 = g_2$ então $u_1 = u_2$. $\square$

Observação C.5. Para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned} |\langle -\Delta_p u, \phi \rangle| &= \left| \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi \, dx \right| \\ &\leq \||\nabla u|^{p-1}\|_{p'} \, \|\nabla \phi\|_p \\ &= \|\nabla u\|_p^{p-1} \, \|\nabla \phi\|_p \end{aligned}$$

e então $-\Delta_p u \in W^{-1,p'}(\Omega)$. Assim, temos $-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$. Observe que para $g \in W^{-1,p'}(\Omega)$, como

$$|g(u)| \leq \|g\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \, \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

concluímos que o teorema anterior continua válido. Portanto, o operador $-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ é bijetivo.

Teorema C.6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado.*
A) $-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ é uniformemente contínuo em conjuntos limitados.
B) $(-\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$ é contínuo.
C) O operador

$$(-\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

é compacto se $1 \leq q < p^*$, em que

$$p^* = \begin{cases} \frac{pN}{N-p} & \text{se } p < N, \\ \infty & \text{se } p \geq N. \end{cases} \tag{C.9}$$

Demonstração. A) Considere $C \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ um conjunto limitado, isto é, existe $M > 0$ tal que

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq M, \quad \forall u \in C.$$

Vamos mostrar que $-\Delta_p$ é uniformemente contínua em C. De fato, seja $u, v \in C$. Assim,

$$\begin{aligned} \|-\Delta_p u - (-\Delta_p v)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} &= \sup_{\|\phi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} \int_\Omega < \Delta_p u - \Delta_p v, \nabla\phi > \, dx \\ &\leq \sup_{\|\phi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} \int_\Omega ||\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla u| \, |\nabla\phi| \, dx. \end{aligned}$$

Logo, se $1 < p \leq 2$ então de modo análogo a (3.3) obtemos

$$\begin{aligned}
\| -\Delta_p u - (-\Delta_p v)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} &\leq c_p \sup_{\|\phi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} \int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^{p-1} |\nabla \phi| \, dx \\
&\leq c_p \sup_{\|\phi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} \| |\nabla u - \nabla v|^{p-1} \|_{p'} \|\nabla \phi\|_p \\
&= c_p \left(\int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= c_p \|\nabla u - \nabla v\|_p^{p-1}
\end{aligned}$$

Além disso, para $p > 2$ de modo análogo a (3.4) temos

$$\begin{aligned}
& \| -\Delta_p u - (-\Delta_p v)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \\
\leq & \sup_{\|\phi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} c_p \left[\|u\|_{W_0^{1,p}} + \|v\|_{W_0^{1,p}} \right]^{p-2} \|u - v\|_{W_0^{1,p}} \|\phi\|_{W_0^{1,p}} \\
= & \; c_p \left[\|u\|_{W_0^{1,p}} + \|v\|_{W_0^{1,p}} \right]^{p-2} \|u - v\|_{W_0^{1,p}} \\
\leq & \; c_p \, (2M)^{p-2} \, \|u - v\|_{W_0^{1,p}}^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Portanto, $-\Delta_p$ é uniformemente contínuo em C.

B) De (C.7) e (C.8) segue que $(-\Delta_p)^{-1}$ é contínuo.

C) Como a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é compacta e a composição de um operador contínuo com um operador compacto é compacto, segue como conseqência imediata de B. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] R. A. Adams: *Sobolev Spaces*, New York: Academic Press, 1975.

[2] G. Anello, F. Faraci, A Iannizzotto: *On a problem of Huang concerning best constants in Sobolev embeddings*, Ann. Mat. Pura Appl. **194**, 767-779, 2015.

[3] L. Boccardo, L. Orsina: Semilinear elliptic equations with singular nonlinearities, *Calc. Var. Partial Differ. Equ.* **37** (2010) 363-380.

[4] L. Boccardo, T. Gallouet: Non linear elliptic equations with right hand side measures, Commun. Partial Differ. Equ. **17**,364 (1992) 641-655.

[5] L. Boccardo, T. Gallouet: Non linear elliptic and parabolic equations involving measure data, J. Funct. Anal. **87** (1989) 149-169.

[6] H. Brézis: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, New York: Springer, 2011.

[7] A. Canino, B. Sciunze, A. Trombeta: *Existence and uniqueness for p-Laplace equations involving singular nonlinearities*, NoDEA. Nonlinear Differ. Equ. Appl. 1-18, 23:8, 2016.

[8] Y. Chu, W. Gao: *Existence of solutions to a class of quasilinear elliptic problems with nonlinear singular terms*, Boundary Value Problems, 1-8, 2013:229, 2013.

[9] M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz, L. Tartar: On a Dirichlet problem with singular nonlinearity, *Comm. Partial Differential Equations* **2** (1977) 193-222.

[10] L. Damascelli: *Comparison theorems for some quasilinear degenerate elliptic operators and applications to symmetry and monotonicity results*, Ann. Scuola Norm. Pisa CI. Sci, **26**(4), 689-707, 1998.

[11] G. Dinca, P. Jebelean, J. Mawhin: *Variational and topological methods for Dirichlet problems with p-Laplacian*, Portugaliae Mathematica, **58**, 340-378, 2001.

[12] L. C. Evans: *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, American Mathematical Society, 1998.

[13] W. M. Ferreira: *Existência de Soluções Positivas para o p-Laplaciano com Dependência do Gradiente*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-graduação em Matemática. Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

[14] D. G. de Figueiredo: *Lectures on The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*, Springer, Berlin, 1989.

[15] J. Giacomomi, I. Schindler, P. Takac: *Sobolev versus Hölder local minimizers and existence of multiple solutions for a singular quasilinear equation, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **6** (2007) 117-158.

[16] J. Giacomomi, I. Schindler, P. Takac: *Singular quasilinear elliptic equations and Hölder regularity, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **350** (2012) 383-388.

[17] A. C. Lazer, P. J. Mckenna: *On a singular nonlinear elliptic boundary value problem. Proc. Am. Math. Soc.* **111** (1991) 721-730.

[18] G. Lieberman: *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations* , Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, **12**, 1203-1219, 1988.

[19] E. M. Martins: *Obtenção do Primeiro Autovalor para o p-Laplaciano via Método das Potências Inverso.* Tese de Doutorado. Programa de Pós-graduação em Matemática. Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.

[20] G. D. Maso, F. Murat, L. Orsina, A. Prignet: *Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci.* **28** (1999) 741-808.

[21] A. Mohammed: *Positive solutions of the p-Laplace equation with singular nonlinearity, J. Math. Anal. Appl.* **352** (2009) 234-245.

[22] I. Peral, *Multiplicity for the p-Laplacian*: Lecture Notes at the Second School on Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations at ICTP, Trieste, 1997.

[23] J. Simon, *Regularité de la solution d'une equation non lineaire dans* $\mathbb{R}^N$*: Lectures Notes in Math*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.

[24] M. Struwe, *Variational Methods*, Zürich: Springer, 2000.

[25] C. A. Stuart: Existence and approximation of solutions of nonlinear elliptic equations, *Math. Z.* **147** (1976) 53-63.

[26] P. Tolksdorf: *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, J. Diff. Eqs, **51**, 126-150, 1984.