UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Instituto de Ciências Exatas – ICEx

Departamento de Matemática

O TRIÂNGULO DE PASCAL

Guilherme Guimarães Laborão

Belo Horizonte

2016

Guilherme Guimarães Laborão

Dissertação de Especialização:

TRIÂNGULO DE PASCAL

Dissertação submetida à coordenação do curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do grau de Especialista em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Helder Cândido Rodrigues

Belo Horizonte

2016

FOLHA DE APROVAÇÃO

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Francisco Dutenhefner – UFMG

Prof. Dr. Grey Ercole – UFMG

Prof. Dr. Helder Cândido Rodrigues – UFMG
(Orientador)

Belo Horizonte, 25 de julho de 2016.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter possibilitado a execução e conclusão deste trabalho.

Aos meus pais Adnir e Ana Maria que sempre me incentivaram, apoiaram e estiveram ao meu lado quando mais precisei.

A minha esposa Viviane Marques pelo amor, companheirismo e apoio em todos os momentos dessa caminhada.

A minha família e amigos, pelo apoio e por compreenderem os momentos de ausência.

Ao professor Helder Cândido Rodrigues, por me orientar, pela disponibilidade e pela confiança depositada em mim em todos os momentos deste trabalho.

A todos os professores e colegas do curso pelo companheirismo durante todo o curso.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar o triângulo de Pascal, algumas de suas propriedades e curiosidades a seu respeito.

Apesar de levar o nome de Blaise Pascal (1623-1662), matemático, físico e filósofo francês do século XVII, esse triângulo já havia sido estudado na China pelo matemático Yang Hui (1238-1298), três séculos antes. Contudo, foi Pascal que sistematizou algumas das propriedades que estudaremos ao longo deste trabalho.

O triângulo de Pascal, também conhecido como Triângulo de Tartaglia (pseudônimo de Niccolò Fontana, 1500 – 1557, matemático italiano), é um triângulo construído por coeficientes binomiais (números combinatórios).

Os números combinatórios podem ser dispostos numa forma triangular, chamada de Triângulo de Pascal. Em cada linha, temos os elementos de mesmo numerador n; e em cada coluna, os de mesmo denominador k.

O triângulo de Pascal apresenta diversas propriedades e relações, por exemplo, podemos observar no triângulo de Pascal a Sequência de Fibonacci e a expansão binomial de um polinômio de grau n, conhecida como Binômio de Newton.

Palavras-chave: Triângulo de Pascal, Expansão Binomial e Combinações Simples.

“O Binômio de Newton é tão belo quanto a Vênus de Milo. O que há é pouca gente para dar por isso. ”

Álvaro de Campos (Heterónimo de Fernando Pessoa)

SUMÁRIO

1. Introdução

O triângulo de Pascal é um triângulo aritmético formado por números que têm diversas relações entre si. Muitas dessas relações foram descobertas pelo próprio Pascal, o que justifica o nome que lhe é dado.

Para construirmos o triângulo de Pascal, será necessário que o leitor possua conhecimentos prévios sobre a teoria combinatória - fatorial e o conceito de combinação simples de n elementos.

O número total de combinações simples de n elementos tomados k a k, ou seja, $C_{n,k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, pode ser representado pelo símbolo $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, sendo n e k números naturais, com $n \geq k$.

Definem-se, também, números combinatórios de denominador zero. Para calculá-los, utilizamos a fórmula de combinações simples, com o uso do fatorial, lembrando que $0! = 1$.

O triângulo é infinito e simétrico, e seus lados, esquerdo e direito, sempre devem possuir o número 1. Cada linha possui um número a mais que a linha anterior. Além disso, o triângulo também possui várias propriedades interessantes que permitem construir com facilidade a linha seguinte.

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1 \\
1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1
\end{array}
$$

2. Definição

O triângulo de Pascal é um triângulo numérico infinito formado por números binomiais $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, onde n representa o número da linha e k

representa o número da coluna , com $n \geq k$, iniciando a contagem a partir do zero.

3. Propriedades Elementares

3.1 Simetria

O triângulo de Pascal apresenta simetria em relação à altura, se for escrito da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

Isto se deve ao fato de que:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

De onde concluímos que:

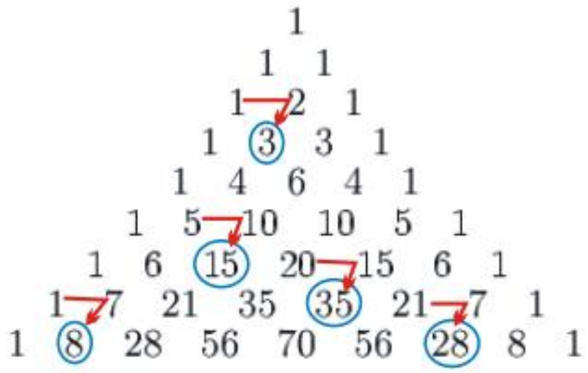
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

3.2 Relação de Stifel[1]

"A soma de dois números binominais de mesmo numerador e denominadores consecutivos é um número binominal cujo numerador possui uma unidade a mais que os numeradores das parcelas e o denominador é o maior dos denominadores das parcelas."

[1] Michael Stifel (1487 - 1567), matemático alemão.

Observar a Relação de Stifel analisando os números binomiais não é algo trivial, porém se observarmos no triângulo de Pascal essa relação tem compreensão imediata.



Daí, observamos a propriedade: todo termo é a soma dos dois elementos diretamente acima. Como esses elementos são $\binom{n}{k}$ e $\binom{n}{k+1}$, conclui-se que $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

A expressão acima corresponde justamente à relação de Stifel.

Note que através da Relação de Stifel podemos construir facilmente o Triangulo de Pascal.

Demonstração:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}+\frac{n!}{[n-(k+1)]\,!\,(k+1)!}$$

$$=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}+\frac{n!}{(n-k-1)!\,(k+1)!}$$

$$=\frac{n!}{(n-k)(n-k-1)!\,k!}+\frac{n!}{(n-k-1)!\,(k+1)k!}$$

$$=\frac{(k+1)n!+(n-k)n!}{(n-k)(n-k-1)!\,(k+1)k!}$$

$$= \frac{(k+1+n-k)n!}{(n-k)!(k+1)!}$$

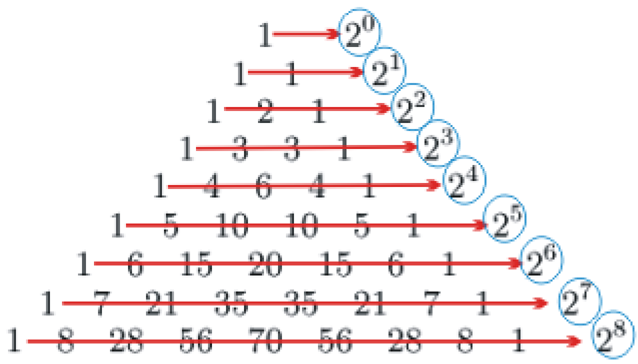
$$= \frac{(n+1)n!}{(n-k)!(k+1)!}$$

$$= \binom{n+1}{k+1}$$

c.q.d.

3.3 Potências de 2

"A soma de todos os números de uma linha é igual a 2 elevado àquele número que associamos à linha. "



Demonstração: Consideremos, por hipótese de indução, que a soma dos números da linha n do triângulo de Pascal seja 2^n, ou seja, $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$.

Vamos provar que a soma dos números da linha $n+1$ do triângulo de Pascal é 2^{n+1}, ou seja, $\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\cdots+\binom{n+1}{n+1}=2^{n+1}$.

Observe que os extremos $\binom{n+1}{0}$ e $\binom{n+1}{n+1}$ são iguais 1. Os outros elementos serão expressos através da relação de Stifel: $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

$$\binom{n+1}{0} = 1 = \binom{n}{0}$$
$$\binom{n+1}{1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}$$
$$\binom{n+1}{2} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$$
$$\vdots$$
$$\binom{n+1}{n-1} = \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1}$$
$$\binom{n+1}{n} = \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$
$$\binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n} = 1$$

Observe que à esquerda das igualdades acima temos todos os números da linha $n+1$ e à direita todos os números da linha n, repetidos duas vezes.

Pela hipótese de indução a soma da linha é igual a n, logo:

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \cdots + \binom{n+1}{n+1} = 2 \cdot \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} \right]$$
$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \cdots + \binom{n+1}{n+1} = 2 \cdot 2^n$$
$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \cdots + \binom{n+1}{n+1} = 2^{n+1}$$

c.q.d.

3.4 Teorema das Colunas

“Se somarmos os primeiros números de uma coluna qualquer até determinada linha, esta soma será igual ao número na próxima linha e próxima coluna. ”

$$
\begin{array}{llllllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
1 & 7 & \boxed{21} & 35 & \boxed{35} & 21 & 7 & 1
\end{array}
$$

Essa propriedade pode ser resumida pela seguinte fórmula combinatória:

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{k+n}{k} = \binom{k+n+1}{k+1}$$

Demonstração: Vamos aplicar a relação de Stifel aos elementos da coluna $k+1$, a partir da primeira linha desta coluna

$$
\begin{aligned}
\binom{k+1}{k+1} &= \binom{k}{k} \\
\binom{k+2}{k+1} &= \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1} \\
\binom{k+3}{k+1} &= \binom{k+2}{k} + \binom{k+2}{k+1} \\
&\vdots \\
\binom{k+n-1}{k+1} &= \binom{k+n-2}{k} + \binom{k+n-2}{k+1} \\
\binom{k+n}{k+1} &= \binom{k+n-1}{k} + \binom{k+n-1}{k+1} \\
\binom{k+n+1}{k+1} &= \binom{k+n}{k} + \binom{k+n}{k+1}
\end{aligned}
$$

Somando todas essas igualdades e cancelando os termos iguais, teremos:

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\cdots+\binom{k+n}{k}=\binom{k+n+1}{k+1}$$

c.q.d.

Vamos somar, por exemplo, os 6 primeiros números da coluna 2, isto é, da terceira coluna:

1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56

Veja que 56 é justamente o número na linha 8, coluna 3, uma coluna após a coluna somada e uma linha abaixo.

Exatamente o valor do número binomial nesta posição:

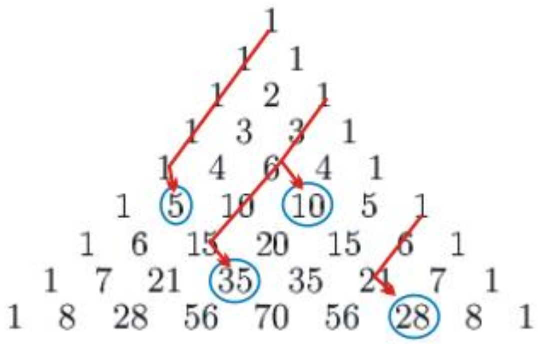
$$\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!(8-3)!}=56$$

3.5 Teorema das Diagonais

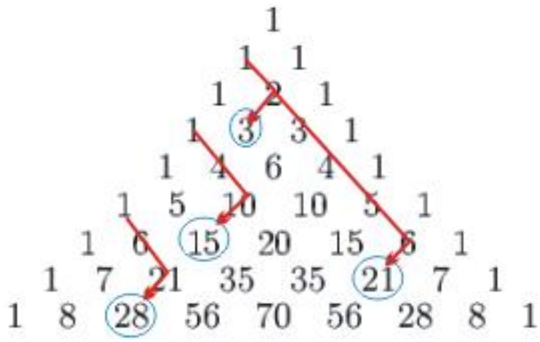
Se somarmos os primeiros números de uma diagonal qualquer até certa linha, como fizemos no triângulo abaixo, o total obtido será igual ao número na próxima linha e coluna da última coluna somada:

1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15

Note que a partir de qualquer linha, temos que começar a totalização dos números na primeira coluna e a cada número somado avançamos para a próxima coluna e descemos para a próxima linha.



A propriedade continua válida se as somas começarem do lado esquerdo do triângulo, conforme a imagem a seguir:



Essa propriedade pode ser resumida pela seguinte fórmula combinatória:

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\binom{n+3}{3}+\cdots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}$$

Para demonstrar o resultado vamos utilizar indução matemática e a Relação de Stifel.

Para $k=0$, temos: $\binom{n}{0}=\binom{n+0+1}{0}=\binom{n+1}{0}=1.$

Supondo que o resultado vale para k, queremos provar que é válido para $k+1$, ou seja,

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+k}{k}+\binom{n+k+1}{k+1}=\binom{n+k+2}{k+1}$$

Supondo $\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\binom{n+3}{3}+\cdots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}$ e somando $\binom{n+k+1}{k+1}$ aos dois lados da igualdade acima, temos:

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+k}{k}+\binom{n+k+1}{k+1}=\binom{n+k+1}{k}+\binom{n+k+1}{k+1}$$

Aplicando a Relação de Stifel no segundo membro da igualdade acima, temos:

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+k}{k}+\binom{n+k+1}{k+1}=\binom{n+k+2}{k+1}$$

Portanto pelo princípio da indução, a afirmação é verdadeira para todo n inteiro não negativo.

4. Binômio de Newton[2]

O teorema do binômio de Newton se escreve como segue:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

Expandido a formula acima para alguns valores pequenos de n, temos:

$$\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1\\
(x+y)^1 &= 1x+1y\\
(x+y)^2 &= 1x^2+2xy+1y^2\\
(x+y)^3 &= 1x^3+3x^2y+3xy^2+1x^3\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Note que os termos da linha n do triângulo de Pascal representam os coeficientes da expansão binomial de $(x+y)^n$.

Demonstração: Considere a expansão binomial de $(x+y)^n$

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\cdot y^k\\
&= \binom{n}{0}x^{n-0}\cdot y^0+\binom{n}{1}x^{n-1}\cdot y^1+\ldots+\binom{n}{n-1}x^1\cdot y^{n-1}+\binom{n}{n}x^0\cdot y^n
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que o resultado é válido para $n=1$.

[2] Sir Isaac Newton, cientista inglês (1643 - 1727).

Do lado esquerdo da igualdade, temos:

$$(x+y)^1 = x+y\,.$$

Do lado direito da igualdade, temos:

$$\binom{1}{0} x^{1-0}\cdot y^0 + \binom{1}{1} x^{1-1}\cdot y^1 = \frac{1!}{0!\cdot(1-0)!}\cdot x + \frac{1!}{1!\cdot(1-1)!}\cdot y$$
$$= 1\cdot x + 1\cdot y$$
$$= x+y$$

Logo, o resultado é válido para $n=1$.

Se o resultado é válido para n, então será válido para $n+1$. Seja então,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^{n-k}\cdot y^k$$

Vamos multiplicar a igualdade acima por $(x+y)$

$$(x+y)\cdot(x+y)^n = (x+y)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^{n-k}\cdot y^k$$
$$(x+y)^{n+1} = x\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^{n-k}\cdot y^k + y\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^{n-k}\cdot y^k$$
$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^{n-k+1}\cdot y^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^{n-k}\cdot y^{k+1}$$

Calculando o 0-ésimo termo do primeiro somatório e em seguida retirando-o do somatório, tem-se:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^{n-k+1}\cdot y^k = x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} x^{n-k+1}\cdot y^k$$

Calculando o n-ésimo termo do segundo somatório e retirando-o do somatório, tem-se:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\cdot y^{k+1}=x^{n-n}\cdot y^{n+1}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}\cdot y^{k+1}$$
$$=y^{n+1}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}\cdot y^{k+1}$$

Redefiniremos $k=k-1$, no segundo somatório.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\cdot y^{k+1}=y^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^{n-k+1}\cdot y^{k}$$

Dessa forma, obtém-se:

$$(x+y)^{n+1}=x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k+1}\cdot y^{k}+y^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^{n-k+1}\cdot y^{k}$$

Colocando em evidência o termo $x^{n-k+1}\cdot y^{k}$ nos dois somatórios, temos:

$$(x+y)^{n+1}=x^{n+1}+y^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]x^{n-k+1}\cdot y^{k}$$

Aplicando a relação de Stifel $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$, temos:

$$(x+y)^{n+1}=x^{n+1}+y^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n+1}{k}\right]x^{n-k+1}\cdot y^{k}$$

Como o $(k+1)$-ésimo termo do somatório é igual a y^{n+1} e o 0-ésimo termo é igual a x^{n+1}, podemos incorporar esses dois termos ao somatório com os índices $k=0$ e $k=n+1$.

$$(x+y)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n-k+1}\cdot y^{k}$$

c.q.d.

Observe que podemos justificar a propriedade das potências de 2 através do Binômio de Newton.

Considere $x=1$ e $y=1$ na fórmula do Binômio de Newton.

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k$$

Quando variarmos os valores de n e k, teremos:

$$(1+1)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k = \binom{0}{0} 1^0 \cdot 1^0 \quad \Rightarrow \quad 2^0$$

$$(1+1)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k = \binom{1}{0} 1^{1-0} \cdot 1^0 + \binom{1}{1} 1^{1-1} \cdot 1^1 \quad \Rightarrow \quad 2^1 = 1+1$$

$$(1+1)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k = \binom{2}{0} 1^{2-0} \cdot 1^0 + \binom{2}{1} 1^{2-1} \cdot 1^1 + \binom{2}{2} 1^{2-2} \cdot 1^2 \quad \Rightarrow \quad 2^2 = 1+2+1$$

$$\vdots$$

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k$$

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} x^{n-0} \cdot y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot y^1 + \ldots + \binom{n}{n-1} x^1 \cdot y^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 \cdot y^n \quad \Rightarrow \quad 2^n$$

5. Curiosidades no Triângulo de Pascal

5.1 Números de Fibonacci[3] nas Diagonais do Triângulo de Pascal

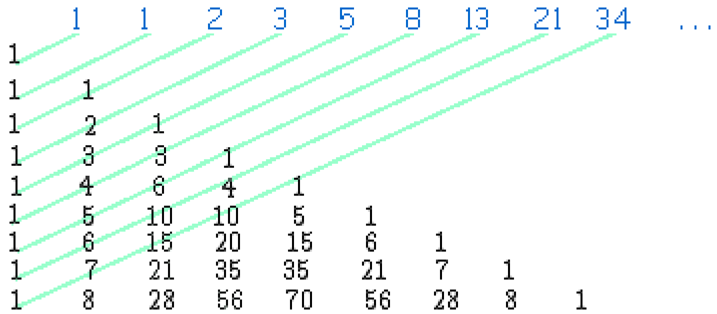
Os números de Fibonacci F_n formam uma sequência numérica infinita, onde a partir do terceiro número os números são obtidos através da soma dos dois números anteriores. Matematicamente, podemos representar a sequência por $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, com $n \geq 2$, $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$.

Os dois primeiros números da sequência de Fibonacci são iguais a 1 e todos os demais números são obtidos a partir da soma dos dois números anteriores, assim temos:

1, **1**, **2**, **3**, **5**, **8**, **13**, **21**, **34**, **55**, **89**, **144**, **233**, ...

[3] Leonardo Fibonacci, também conhecido como Leonardo de Pisa, matemático italiano (1170 – 1250).

Observe no triângulo abaixo que ao somarmos os números nas diagonais conforme mostrado, as somas obtidas vão formando a sequência de Fibonacci.



Esse fato se deve ao matemático francês Édouard Lucas[4], que, em 1876, determinou o termo geral da sequência de Fibonacci usando coeficientes binomiais.

Teorema: $F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots + \binom{n-j}{j}$, onde j é o maior inteiro menor ou igual a $\frac{n}{2}$.

Demonstração: Vamos demonstrar utilizando indução sobre n. Observe que para $n = 0, 1\, e\, 2$, o resultado é válido. Suponha que para todo inteiro k, com $0 \le k < n$, a afirmação seja verdadeira. Queremos mostrar que ela vale para $k+1 = n$.

Sabemos que $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$. Pela hipótese de indução, temos:

$$
\begin{aligned}
F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} \\
&= \left[\binom{k-1}{0} + \binom{k-2}{1} + \binom{k-3}{2} + \ldots + \binom{k-j-1}{j}\right] \\
&\quad + \left[\binom{k-2}{0} + \binom{k-3}{1} + \binom{k-4}{2} + \ldots + \binom{k-j-1}{j-1}\right]
\end{aligned}
$$

[4] François Édouard Anatole Lucas, matemático francês (1842-1891).

$$\begin{aligned}
&=\binom{k-1}{0}+\left[\binom{k-2}{0}+\binom{k-2}{1}\right]+\left[\binom{k-3}{1}+\binom{k-3}{2}\right] \\
&\quad+\ldots+\left[\binom{k-j-1}{j}+\binom{k-j-1}{j-1}\right] \\
&=\binom{k-1}{0}+\binom{k-1}{1}+\binom{k-2}{2}+\ldots+\binom{k-j}{j}
\end{aligned}$$

Logo, $F_{k+1}=\binom{k-1}{0}+\binom{k-1}{1}+\binom{k-1}{2}+\ldots+\binom{k-j}{j}$. Onde utilizarmos a Relação de Stifel.

Assim, concluímos que $F_{k+1}=\binom{k}{0}+\binom{k-1}{1}+\binom{k-2}{2}+\ldots+\binom{k-j}{j}$, lembrando que $\binom{k-1}{0}=\binom{k}{0}$.

Portanto pelo princípio da indução, a afirmação é verdadeira para todo n inteiro não negativo.

c.q.d.

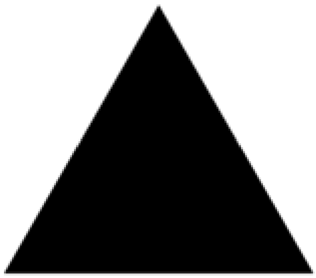
5.2 O triângulo de Sierpinski[5]

O Triângulo de Sierpinski é uma figura geométrica obtida através de um processo recursivo. Ele é uma das formas elementares da geometria fractal por apresentar algumas propriedades, tais como: ter tantos pontos como o do conjunto dos números reais; ter área igual a zero; ser auto semelhante (as partes da figura são cópias reduzidas de toda a figura); não perder a sua definição inicial à medida que é ampliado.

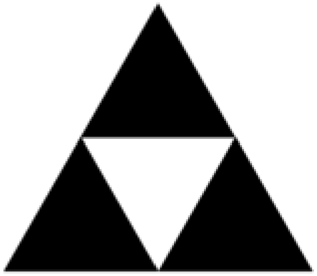
Uma das maneiras de se obter um triângulo de Sierpinski é através do seguinte algoritmo:

[5] Waclaw Sierpinski (1882 - 1969), matemático polonês.

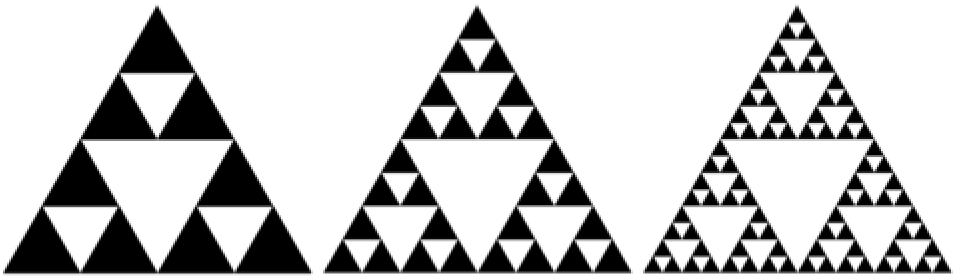
1. Comece com qualquer triângulo em um plano. O triângulo de Sierpinski canônico utilizava um triângulo equilátero com a base paralela ao eixo horizontal, mas qualquer triângulo pode ser usado.



2. Encolha o triângulo pela metade (cada lado deve ter metade do tamanho original), faça três copias, e posicione cada triângulo de maneira que encoste nos outros dois em um canto.



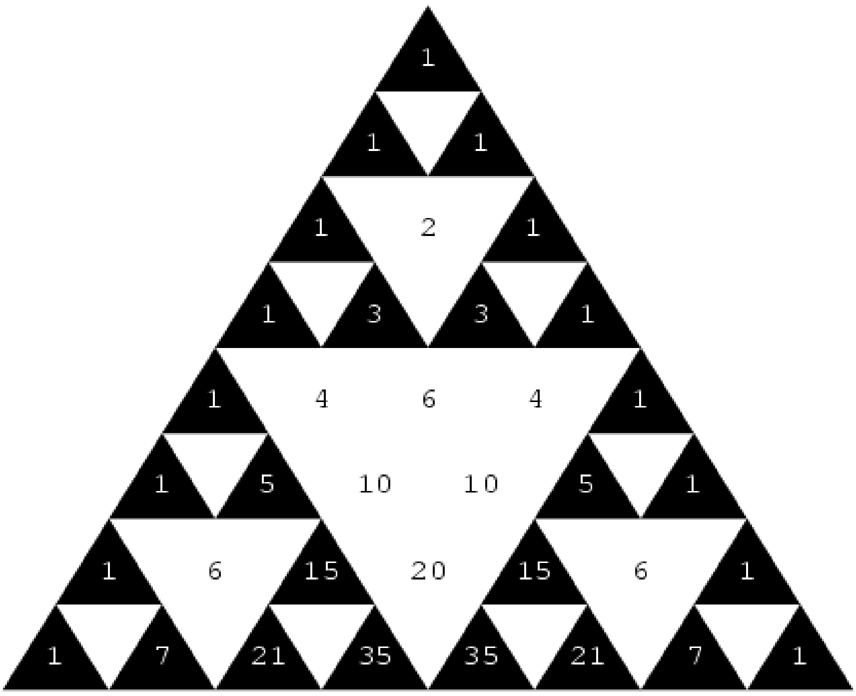
3. Repita o passo 2 para cada figura obtida, indefinidamente.



O fractal propriamente dito só é obtido quando o processo do algoritmo é repetido infinitas vezes, mas conforme o número de iterações aumenta, a imagem obtida tende a se tornar cada vez mais parecida com o fractal.

Qual a relação com o triângulo de Pascal?

Se retirarmos os números pares e colorirmos de preto os números impares, obtemos a seguinte imagem:



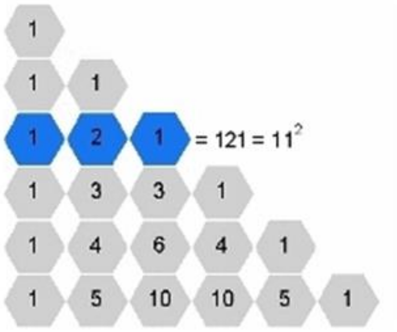
Dessa maneira, o triângulo de Pascal "transforma-se" no triângulo de Sierpinski.

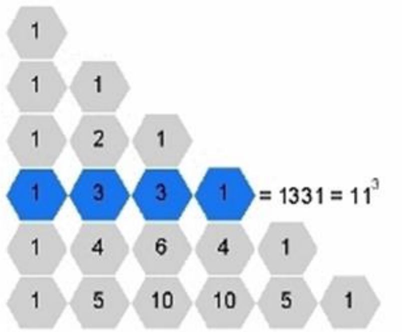
5.3 Potências de 11

As potências de 11 podem ser obtidas a partir dos elementos das linhas do triângulo de Pascal. Veja a figura abaixo: até a linha 4, todos os números do triângulo têm apenas um algarismo e as potências de 11 são obtidas diretamente, ou seja:

$$
\begin{aligned}
11^0 &= (10+1)^0 = 1\cdot 10^0 = 1\\
11^1 &= (10+1)^1 = 1\cdot 10^1 + 1\cdot 10^0 = 11\\
11^2 &= (10+1)^2 = 1\cdot 10^2 + 2\cdot 10^1 + 1\cdot 10^0 = 121\\
11^3 &= (10+1)^3 = 1\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2 + 3\cdot 10^1 + 1\cdot 10^0 = 1331\\
11^4 &= (10+1)^4 = 1\cdot 10^4 + 4\cdot 10^3 + 6\cdot 10^2 + 4\cdot 10^1 + 1\cdot 10^0 = 14641
\end{aligned}
$$

A partir da linha 5, que equivale à quinta potência de 11, já aparecem números com mais de um algarismo. Os algarismos que não correspondem à unidade podem ser acrescentados à próxima potência de 10, de forma que, ao final, os coeficientes de todas as potências de 10 serão formados por um único algarismo. Vamos ver alguns exemplos:





Considere os elementos da linha 5 do triângulo de Pascal: 1; 5; 10; 10; 5; 1. Cada um destes elementos é o coeficiente da potência de 10 na representação de 11^5 no sistema decimal, isto é:

$$\begin{aligned} 11^5 = (10+1)^5 &= 1\cdot 10^5 + 5\cdot 10^4 + 10\cdot 10^3 + 10\cdot 10^2 + 5\cdot 10^1 + 1\cdot 10^0 \\ &= 100\,000 + 50\,000 + 10\,000 + 1000 + 50 + 1 \\ &= 161\,051 \end{aligned}$$

Mas note que podemos fazer sequencialmente as seguintes simplificações, indicadas em sublinhado:

$$\begin{aligned} 11^5 &= 1\cdot 10^5 + 5\cdot 10^4 + 10\cdot 10^3 + \underline{10\cdot 10^2} + 5\cdot 10^1 + 1\cdot 10^0 \\ &= 1\cdot 10^5 + 5\cdot 10^4 + \underline{10\cdot 10^3} + \underline{1\cdot 10^3} + 5\cdot 10^1 + 1\cdot 10^0 \\ &= 1\cdot 10^5 + 5\cdot 10^4 + \underline{(10+1)\cdot 10^3} + 0\cdot 10^2 + 5\cdot 10^1 + 1\cdot 10^0 \\ &= 1\cdot 10^5 + 5\cdot 10^4 + \underline{1\cdot 10^4} + \underline{1\cdot 10^3} + 0\cdot 10^2 + 5\cdot 10^1 + 1\cdot 10^0 \\ &= 1\cdot 10^5 + \underline{(5+1)\cdot 10^4} + 1\cdot 10^3 + 0\cdot 10^2 + 5\cdot 10^1 + 1\cdot 10^0 \\ &= 1\cdot 10^5 + 6\cdot 10^4 + 1\cdot 10^3 + 0\cdot 10^2 + 5\cdot 10^1 + 1\cdot 10^0 \\ &= 100\,000 + 60\,000 + 1000 + 0 + 50 + 1 \\ &= 161\,051 \end{aligned}$$

Na penúltima linha, todos os coeficientes das potências de 10 são formados por um único algarismo.

6. O Teorema de Lucas

Se p é um número primo, e n é representado na base p na forma $(a_j,\ldots,a_1,a_0)$ e k é representado na base p na forma $(b_j,\ldots,b_1,b_0)$ então $\binom{n}{k}$ é congruente $(\bmod\ p)$ ao produto

$$\binom{a_j}{b_j}\cdots\binom{a_1}{b_1}\binom{a_0}{b_0}$$

Vamos adotar aqui a seguinte convenção: $\binom{n}{k}=0$, se $k>n$.

Exemplo 1: Vamos supor $n=17,\ k=13,\ p=3$.

Note que:

$$17=1\cdot 3^2+2\cdot 3^1+2\cdot 3^0$$
$$13=1\cdot 3^2+1\cdot 3^1+1\cdot 3^0$$

$n=17$ tem representação na base 3 dada por (122).

$k=13$ tem representação na base 3 dada por (111).

Assim, pelo Teorema de Lucas, $\binom{17}{13}$ é congruente $(\bmod 3)$ a

$$\binom{1}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}=$$

$=1\cdot 2\cdot 2=4$ que é igual a 1 $(\bmod 3)$.

Note que $\binom{17}{13}=\dfrac{17!}{13!\cdot(17-13)!}=\dfrac{17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13!}{13!\cdot(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}=\dfrac{57\,120}{24}=2\,380$.

Como $2\,380=3\cdot 793+1$, temos que 2 380 é congruente a $1\,(\bmod 3)$.

Exemplo 2: Vamos supor $n = 588, k = 277, p = 5$.

Note que:

$$588 = 4 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0$$
$$277 = 2 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0$$

$n = 588$ tem representação na base 5 dada por (4323).

$k = 277$ tem representação na base 5 dada por (2102).

Assim, pelo Teorema de Lucas, $\binom{588}{277}$ é congruente $(\mathrm{mod}\, 5)$ a

$\binom{4}{2} \binom{3}{1} \binom{2}{0} \binom{3}{2}$ = $6 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 = 54$ que é igual a 4 $(\mathrm{mod}\, 5)$.

Exemplo 3: Vamos supor $n = 1\,357\,932, k = 978\,537, p = 5$.

Note que:

$$1\,357\,932 = 3 \cdot 5^8 + 2 \cdot 5^7 + 1 \cdot 5^6 + 4 \cdot 5^5 + 2 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0$$
$$962\,902 = 2 \cdot 5^8 + 2 \cdot 5^7 + 1 \cdot 5^6 + 3 \cdot 5^5 + 0 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0$$

$n = 1\,357\,932$ tem representação na base 5 dada por (321 423 212).

$k = 962\,902$ tem representação na base 5 dada por (221 303 102).

Assim, pelo Teorema de Lucas, $\binom{1\,357\,932}{962\,902}$ é congruente $(\mathrm{mod}\, 5)$ a

$$\binom{3}{2} \binom{2}{2} \binom{1}{1} \binom{4}{3} \binom{2}{0} \binom{3}{3} \binom{2}{1} \binom{1}{0} \binom{2}{2} =$$

$= 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24$ que é igual a 4 $(\mathrm{mod}\, 5)$.

Para chegarmos ao resultado desejado precisamos demonstrar o seguinte resultado:

Lema 1: $(1+x)^{p^n} = 1+x^{p^n} \pmod p$, sendo p um número primo e $n>0$.

Demonstração: Se $0<k<p^n$, temos:

$$\binom{p^n}{k} = \frac{p^n!}{k!(p^n-k)!}$$

$$\binom{p^n}{k} = \frac{p^n(p^n-1)!}{k(k-1)!(p^n-k)!}$$

$$\binom{p^n}{k} = \frac{p^n}{k}\binom{p^n-1}{k-1} \qquad obs: \quad [(p^n-1)-(k-1)]! = (p^n-k)!$$

$$k\binom{p^n}{k} = p^n\binom{p^n-1}{k-1}$$

Da última igualdade podemos concluir que no mínimo n potências de p dividem $p^n\binom{p^n-1}{k-1}$, e no máximo $n-1$ potências de p dividem k. Assim p divide $\binom{p^n}{k}$ e então $\binom{p^n}{k} = 0 \pmod p$.

Quando $k=0$ ou $k=p^n$, então $\binom{p^n}{k} = 1$.

Desta forma concluímos que na expansão binomial $(1+x)^{p^n}$, apenas o primeiro coeficiente $(k=0)$ e o último coeficiente $(k=p^n)$ são diferentes de zero $\pmod p$, de onde segue o resultado desejado.

c.q.d.

Antes de demonstrarmos o teorema de Lucas, vamos dar uma ideia da demonstração com o seguinte exemplo:

Exemplo 4: Vamos supor $n=482, k=176 \; e \; p=5$.

Note que:

$$482 = 3\cdot 5^3 + 4\cdot 5^2 + 1\cdot 5^1 + 2\cdot 5^0 = 3412 \ (\text{mod } 5)$$
$$176 = 1\cdot 5^3 + 2\cdot 5^2 + 0\cdot 5^1 + 1\cdot 5^0 = 1201 \ (\text{mod } 5)$$

Calculando

$$(1+x)^{482} = (1+x)^{3(125)+4(25)+1(5)+2(1)}$$
$$(1+x)^{482} = (1+x)^{3(125)}\cdot(1+x)^{4(25)}\cdot(1+x)^{1(5)}\cdot(1+x)^{2(1)}$$

Utilizando o lema 1, temos:

$$(1+x)^{482} = (1+x^{125})^3\cdot(1+x^{25})^4\cdot(1+x^5)\cdot(1+x^1)^2 \quad \text{mod } 5$$

Usando o binômio de Newton, temos:

$$(1+x)^{482} = \left[\binom{3}{0}x^{125\cdot 0} + \binom{3}{1}x^{125\cdot 1}\cdot 1 + \binom{3}{2}x^{125\cdot 2} + \binom{3}{3}x^{125\cdot 3}\right]\cdot$$
$$\cdot\left[\binom{4}{0}x^{25\cdot 0} + \binom{4}{1}x^{25\cdot 1} + \binom{4}{2}x^{25\cdot 2} + \binom{4}{3}x^{25\cdot 3} + \binom{4}{4}x^{25\cdot 4}\right]\cdot\left[\binom{1}{0}x^{5\cdot 0} + \binom{1}{1}x^{5\cdot 1}\right]\cdot$$
$$\cdot\left[\binom{2}{0}x^{1\cdot 0} + \binom{2}{1}x^{1\cdot 1} + \binom{2}{2}x^{1\cdot 2}\right]$$

No lado esquerdo da igualdade acima, o coeficiente de x^{176} será $\binom{482}{176}$ mod 5. A única maneira de obtermos x^{176} no produto do lado direito da referida igualdade será utilizando um termo x^{125}, dois termos x^{25}, é um termo x^1, da seguinte forma:

$$x^{176} = \left[\binom{3}{1}x^{125}\right]\cdot\left[\binom{4}{2}x^{25\cdot 2}\right]\cdot\left[\binom{1}{0}x^{5\cdot 0}\right]\cdot\left[\binom{2}{1}x^{1\cdot 1}\right]$$

Do produto acima vemos que o coeficiente de x^{176} será $\binom{3}{1}\binom{4}{2}\binom{1}{0}\binom{2}{1}$. Logo $\binom{482}{176} = \binom{3}{1}\binom{4}{2}\binom{1}{0}\binom{2}{1} \ (\text{mod } 5)$.

$$\binom{482}{176} = \binom{3}{1} \binom{4}{2} \binom{1}{0} \binom{2}{1}$$
$$= \left(\frac{3!}{2!\cdot 1!}\right)\cdot\left(\frac{4!}{2!\cdot 2!}\right)\cdot\left(\frac{1!}{0!\cdot 0!}\right)\cdot\left(\frac{2!}{1!\cdot 1!}\right)$$
$$= 3\cdot 6\cdot 1\cdot 2 = 36$$

Observe que $36 = 5\cdot 7 + 1$, ou seja, 36 é congruente a 1 $(\mathrm{mod}\, 5)$.

Demonstração do teorema de Lucas: A prova é baseada na expansão binomial de $(1+x)^r$, tal como ilustrado no exemplo acima.

$$\sum_{c=0}^{r} \binom{r}{c} x^c = (1+x)^r$$
$$= (1+x)^{r_0 p^0 + r_1 p^1 + r_2 p^2 + \ldots + r_k p^k}$$
$$= (1+x)^{r_0 p^0} \cdot (1+x)^{r_1 p^1} \cdot (1+x)^{r_2 p^2} \cdot \ldots \cdot (1+x)^{r_k p^k}$$
$$= \prod_{m=0}^{k} \left[(1+x)^{p^m}\right]^{r_m}$$

Usando o lema 1, temos:

$$= \prod_{m=0}^{k} \left(1 + x^{p^m}\right)^{r_m} (\mathrm{mod}\ p)$$
$$= \prod_{m=0}^{k} \left[\sum_{s_m=0}^{r_m} \binom{r_m}{s_m} x^{s_m p^m}\right] (\mathrm{mod}\ p)$$
$$= \sum_{c=o}^{r} \left[\sum \prod_{m=0}^{k} \binom{r_m}{s_m}\right] x^c\ (\mathrm{mod}\ p)$$

Em que para cada valor de c, a soma interna na última expressão é feita sobre todos os conjuntos $(s_0, s_1, \ldots, s_k)$ que satisfazem

$$0 \le s_m \le r_m < p \quad \text{e} \quad \sum_{m=0}^{k} s_m p^m = c$$

Então precisamos escrever c na base p. Como supomos $c = \sum c_n p^n$ e a representação na base p é única, temos que a soma interna possui, no máximo, uma parcela.

Se $c_n \leq r_n$ para todo n, temos uma parcela e o coeficiente de x^c é $\prod \binom{r_n}{s_n}$. Se $c_n > r_n$ para algum n, não há parcelas e o coeficiente de x^c é 0. Em ambos os casos, o teorema segue, igualando os coeficientes de x^c para cada $0 \leq c \leq r$. No primeiro caso, diretamente. No segundo caso, pois ambos valem zero, visto que $\binom{r_m}{c_m} = 0$, quando $c_m > r_m$.

c.q.d.

Corolário 1: Se n tem representação na base p $(a_j, \ldots, a_1, a_0)$ e algum coeficiente de k for maior que o coeficiente correspondente de n, então $\binom{n}{k} = 0 \pmod{p}$.

Demonstração: Claramente se $b_i > a_i$, então $\binom{a_i}{b_i} = 0$ e o resultado segue-se.

c.q.d.

Corolário 2: Se p é primo e n tem base de representação p $(a_j, \ldots, a_1, a_0)$, então existem $(1 + a_j)\ldots(1 + a_1)(1 + a_0)$ valores de k para o qual $\binom{n}{k}$ não é um múltiplo de p. Este é o número de não-múltiplos de p na n-ésima linha do triângulo de Pascal .

Demonstração: Seja k representado na base p por $(b_j, \ldots, b_1, b_0)$. Como queremos $\binom{n}{k} \neq 0 \,(\text{mod } p)$, para cada i temos que ter $b_i \leq a_i$. Logo, b_i pode assumir os valores 0, 1, ..., a_j. Logo temos a_i + 1 possibilidades. Como são condições independentes, o total de possibilidades é o produto $(1+a_j)\ldots(1+a_1)\cdot(1+a_0)$.

c.q.d.

Exemplo 5: Já que 588 = (4323), na base 5, então, $\binom{588}{k}$ não é múltiplo de 5 para exatamente, $(4+1)\cdot(3+1)\cdot(2+1)\cdot(3+1)=5\cdot 4\cdot 3\cdot 4=240$ valores de k. A linha 588 do triângulo de Pascal terá 589 - 240 = 349 múltiplos de 5.

Observação: $588=4\cdot 5^3+3\cdot 5^2+2\cdot 5^1+3\cdot 5^0$

7. Referências Bibliográficas

RODRIGUES, Flávio Wagner. Revista do Professor de Matemática, vol. 30, 1996: 34-41.

TRIÂNGULO DE SIERPINSKI.
http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm48/sierpinski.htm
Acesso em: 15 jul. 2012

TRIÂNGULO DE PASCAL.
http://pt.wikibooks.org/wiki/Matem%C3%A1tica_divertida/Tri%C3%A2ngulo_de_Pascal
Acesso em: 18 jul. 2012

O ENSINO DE POTENCIAÇÃO E COMBINATÓRIA COM O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI.
http://www.sbempb.com.br/anais/arquivos/trabalhos/CC-17629188.pdf
Acesso em: 18 jul. 2012

TRIÂNGULO DE PASCAL.
http://www.numerofilia.com.br/2012/02/triangulo-de-pascal-e-propriedades.html
Acesso em: 08 set. 2012

BINOMIO DE NEWTON E TRIÂNGULO DE PASCAL.
http://www.ufpa.br/dicas/biome/biotri.htm
Acesso em: 08 set. 2012

Demonstração de identidades combinatórias com teoria de contagem.
http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia_Virginia.pdf
Acesso em: 09 set. 2012

RELAÇÃO DE STIFEL.
http://pt.wikipedia.org/wiki/Rela%C3%A7%C3%A3o_de_Stifel#Demonstra.C3.A7.C3.A3o
Acesso em: 09 set. 2012

CURIOSIDADES SOBRE O TRIÂNGULO DE PASCAL.
http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/pasca_l/curios.htm
Acesso em: 10 set. 2012

O TRIÂNGULO DE PASCAL É DE PASCAL?
http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2b.html
Acesso em: 10 set. 2012

O PRINCIPIO DA INDUÇÃO.
www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/docs/artigos/inducao.doc
Acesso em: 16 set. 2012.

TRIÂNGULO DE PASCAL.
http://www.uff.br/cdme/pascal/pascal-html/pascal-br.html
Acesso em: 01 fev. 2016.

A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI.
http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br/wp-content/uploads/2013/08/nota_aula_03.pdf
Acesso em: 17 mai. 2016.

Édouard Lucas.
http://www.nautilus.com.br/clientes/backup_pontes/biografia/lucas.htm
Acesso em: 17 mai. 2016.

Matemática divertida/Triângulo de Pascal.
https://pt.wikibooks.org/wiki/Matem%C3%A1tica_divertida/Tri%C3%A2ngulo_de_Pascal
Acesso em: 16 jul. 2016.