



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# ESTUDO DA DESCONTINUIDADE PARA UM MODELO POPULACIONAL

Christian Camilo Cortes Garcia

Belo Horizonte - MG  
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# **ESTUDO DA DESCONTINUIDADE PARA UM MODELO POPULACIONAL**

Christian Camilo Cortes Garcia

Orientadora: Sônia Pinto de Carvalho

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas (ICEx) da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção de título de Mestre em Matemática.

Belo Horizonte - MG

2016

Cortes Garcia, Christian Camilo

Estudo da Descontinuidade para um Modelo Populacional /

Christian Camilo Cortes Garcia - Belo Horizonte, 2016.

92f. : il.

Orientadora: Sônia Pinto de Carvalho.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG,  
Programa de Pós-graduação em Matemática, 2016.

1. Sistemas Planares de Filippov. 2. Análise de Bifurcações. 3. Ciclos limites em Modelos de Gause Predador-Presa. 4. Ciclo de Canard. I. Orientador. II. Universidade Federal de Minas Gerais. III. ICEX - UFMG. IV. Título.

*A minha mãe Amparo, minha irmã  
Diana e meu sobrinho Mathew.*



---

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer inicialmente a *Deus* por ser a minha força nos momentos de fraqueza e por deixar-me ter uma vida cheia de experiências e aprendizagem.

A minha mãe *Amparo* por inspirar-me a cumprir este sonho, pelos valores que incutiu em mim e todos seus sacrifícios.

A minha *família* por todo o apoio e confiança que depositaram em mim.

A minha orientadora *Sônia* pela compreensão, paciência e conhecimento inesgotável no decorrer deste trabalho.

Aos meus amigos *Herny, Javier, Jasmidt, Manuel e Fiorella*, por acreditar em mim e por ter feito deste mestrado um caminho cheio de experiências que eu nunca vou esquecer.

Aos meus professores, tanto da Universidade Surcolombiana *Mauro Montealegre*, como os professores do Departamento de Matemática da UFMG, especialmente ao professor *Armando Neves* pelo seu apoio ao longo deste caminho e valiosos conhecimentos na área da Biomatemática.

A Comissão Avaliadora, professores *César de Souza Eschenazi* e *Hassan Najafi Alishah*, pela atenção dada ao trabalho e pelas sugestões valiosas.

A *Kelli* e *Andrea* pela ajuda e disposição.

Á *CAPES* pelo apoio financeiro e em geral, todos aqueles que diréta e indiretamente me fez crescer pessoalmente e profissionalmente.

*“La utopía supone una crítica del orden existente, siendo su finalidad cuestionarlo a través del proyecto alternativo que propone [...] proyecto utópico cuyos dos ingredientes básicos son el espacio y el tiempo, es decir, un territorio donde fundarse y una historia con un pasado a recuperar o un futuro donde proyectarse”.*

Gabriel García Márquez (1927 - 2014)



---

# Resumo

Neste trabalho apresentamos alguns aspectos qualitativos e geométricos da teoria básica dos Sistemas Dinâmicos Planares Descontínuos, geralmente chamado Sistemas Planares de Filippov, fazendo um análise das bifurcações locais e globais de codimensão um. Com essas diretrizes definidas, estudamos o comportamento a longo prazo das comunidades populacionais descritos por modelos planares descontínuos, utilizados muitas vezes para descrever populações com comutação seletiva entre habitats alternativos, dietas, ou para imitar a evolução de um recurso explorado onde a exploração da espécie é proibida quando o recurso é inferior ao limite fixado. O estudo é levado a cabo pela análise das bifurcações de um modelo com relação a dois parâmetros: exploração e proteção das populações que interagem.

**Palavras-Claves:** Sistemas Planares de Filippov, Análise de Bifurcação, Ciclo limite em Modelos de Gause Predador-Presa, Ciclo de Canard.



---

# Abstract

In this work we present some qualitative and geometry aspects of Planar Non-smooth Dynamical Systems theory, generally called as Planar Filippov Systems, making an analysis of local and global bifurcations of codimension one. With these guidelines defined, we study the long-term behavior of population communities described by planar models non-smooth, used often to describe populations with selective switching between alternative habitats, diets, or to mimic the evolution of an exploited resource where the exploitation of species is prohibited when the resource is below a prescribed threshold. The study is carried out by the bifurcations analysis of one model with respect to two parameters: exploitation and protection of interacting populations.

**Keywords:** Planar Systems Filippov, Bifurcation analysis, Limit Cycles in Gause-Type Models of Predator-Prey Systems, Cicly canard.



---

# Sumário

<b>1</b>	<b>Sistemas Planares Contínuos</b>	<b>7</b>
1.1	Órbitas . . . . .	7
1.2	Equivalência Topológica . . . . .	8
1.3	Estabilidade local de Equilíbrios Hiperbólicos . . . . .	9
1.4	Ciclo Limite . . . . .	11
1.4.1	Soluções periódicas no plano . . . . .	12
1.4.2	Ciclo limite no Modelo de Gause . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Sistemas Planares De Filippov</b>	<b>19</b>
2.1	Órbitas e Singularidades . . . . .	19
2.2	Curvas invariantes estáveis e instáveis . . . . .	27
2.3	Órbitas periódicas e ciclos . . . . .	28
2.4	Equivalência Topológica . . . . .	32
2.5	Comportamento Local . . . . .	35
2.5.1	Comportamento em Pontos Regulares . . . . .	35
2.5.2	Comportamento em Singularidades Genéricas . . . . .	39
2.6	Bifurcações Locais de Codimensão 1 . . . . .	43
2.6.1	Colisões de Equilíbrios com $\Sigma$ . . . . .	44
2.6.2	Colisões de Pontos Tangenciais . . . . .	50
2.6.3	Colisões de Pseudo - Equilíbrios . . . . .	55
2.7	Bifurcações Globais de Codimensão 1 . . . . .	56
2.7.1	Bifurcação em Ciclos . . . . .	56
2.7.2	Bifurcações Pseudo-homoclínicas . . . . .	59
2.7.3	Bifurcações Pseudo-heteroclínicas . . . . .	61

---

<b>3</b>	<b>Modelo Tipo Gause Predador - Presa</b>	<b>63</b>
3.1	Descrição do Modelo . . . . .	63
3.2	Estudo do campo $Y$ . . . . .	65
3.3	Estudo de campo $X$ . . . . .	65
3.4	Estudo do Sistema Planar de Filippov . . . . .	68
3.5	Análise qualitativo global . . . . .	70
3.6	Análise de bifurcação . . . . .	75
	<b>Anexos</b>	<b>80</b>
	<b>A Código Matlab Modelo</b>	<b>81</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>85</b>



---

# Introdução

Nos últimos anos, tem havido um interesse crescente em modelos matemáticos nos quais a evolução das variáveis relevantes são acompanhadas por mudanças abruptas no comportamento do sistema. Plâncton em lagos com pouca profundidade, invasões recorrentes de pragas de insetos em florestas, manipulação de epidemias, populações com comutação seletiva entre habitats alternativos são alguns exemplos importantes. Os sistemas deste tipo são genericamente chamado *descontínuos*, uma vez que pode ser visto como a interação de dois compartimentos de trabalho com tempo contínuo ou tempo discreto.

Vamos discutir neste trabalho os *Sistemas de Filippov*, descritos por equações diferenciais ordinárias na forma:

$$\dot{x} = f^{(i)}(x), \quad x \in S_i \subset \mathbb{R}^n$$

onde  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , são regiões abertas não sobrepostas e separadas por  $(n - 1)$  sub-variedades dimensionais. As funções  $f^{(i)}(x)$  e  $f^{(j)}(x)$ ,  $i \neq j$ , e suas fronteiras  $\Sigma_{ij}$ , são contínuas e a união de todas as fronteiras com  $S_i$  cobrem o retrato de fase.

Alem disso, se as componentes transversais  $f^{(i)}(x)$  e  $f^{(j)}(x)$  têm o mesmo sinal, a trajetória cruza a fronteira e tem, neste ponto, uma descontinuidade no seu vector tangente. Pelo contrário, se as componentes transversais  $f^{(i)}(x)$  e  $f^{(j)}(x)$  têm sinal oposto, o estado do sistema é forçado a permanecer na fronteira e deslizar-se sobre ela. Logo, em princípio, os comportamentos sobre  $\Sigma_{ij}$  poderiam ser definidas diversas maneiras. Uma delas é o *método convexo de Filippov*, onde as soluções em  $\Sigma_{ij}$  são dados por  $\dot{x} = Z_{ij}^s(x)$ , com  $Z_{ij}^s(x)$  uma combinação convexa de  $f^{(i)}(x)$  e  $f^{(j)}(x)$  tangente a  $\Sigma_{ij}$  em  $x$ .

O *análise de bifurcações* para os *sistemas dinâmicos contínuos* recebeu muita atenção nos últimos anos. No entanto, a situação não é tão simples para os *Sistemas de Filippov*,

---

que além das *bifurcações genéricas* em sistemas contínuos, podem ter bifurcações muito especiais chamadas *bifurcações deslizantes*, onde o aparecimento ou desaparecimento no segmento deslizante pode acontecer por variações no parâmetro de bifurcação. Porém, todas as bifurcações possíveis em Sistemas Planares de Filippov foram recentemente listada por Kuznetsov [8], utilizando a abordagem clássico de equivalência topológica proposta por Arnold [1]. Consistentemente com esta abordagem, todas as bifurcações, genéricas e deslizantes, podem ser interpretadas como colisões entre as trajetórias, pontos com características especiais, e/ou segmentos deslizantes.

Por esse motivo, o objetivo deste trabalho é estudar a teoria básica dos Sistemas Planares de Filippov, fazendo um análise das bifurcações locais e globais de codimensão um. Após este estudo, analisamos as bifurcações de um modelo populacional descontínuo, para duas populações, quando os parâmetros de proteção e exploração das espécies são alteradas.

Para entender esse processo, desenvolvemos a dissertação da seguinte forma:

No **Capítulo Um**, apresentamos alguns conceitos e teoremas importantes na Teoria dos Sistemas Dinâmicos Planares Contínuos e determinamos quais sistemas autônomos não-lineares não possuem ciclos limites numa região simplesmente conexa. Além disso, mostramos as condições necessárias para que um *Modelo de Gause predador-presa* pode apresentar um único ciclo limite globalmente assintoticamente estável por meio de algumas transformações para reduzi-lo a um Sistema de Lienard generalizado e aplicar o Teorema 1.4.2 [Teorema de Zhang Modificado] provado no artigo [5].

No **Capítulo Dois**, apresentamos, com base nos artigos [10] e [11], os elementos, como pontos de equilíbrio, pontos tangentes, trajetórias, órbitas periódicas e curvas invariantes em Sistemas Planares de Filippov, incluindo equivalências topológicas, comportamentos locais e conceito de bifurcação. Por último analisamos, basando-nos no artigo [8], as bifurcações locais e globais de codimensão um, respectivamente, em Sistemas Planares de Filippov, incluindo as formas normais.

No **Capítulo Três**, mostramos as bifurcações deslizantes para um modelo populacional descontínuo proposto no artigo [12].

Por ultimo, nos **Anexos**, mostramos o código de programação executado em Matlab R2011a para o modelo no capítulo anterior.

---

# Sistemas Planares Contínuos

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos e teoremas importantes na Teoria dos Sistemas Dinâmicos Planares Contínuos e determinamos quais sistemas autônomos não-lineares não possuem ciclos limite numa região simplesmente conexa. Por outro lado, mostramos as condições necessárias para que um *Modelo de Gause predador-presa* pode apresentar um único ciclo limite globalmente assintoticamente estável.

## 1.1 Órbitas

A formulação matemática de um processo determinista é um sistema dinâmico. Esta formulação permite prever qualquer estado futuro, desde e quando o operador de evolução e seu estado inicial são conhecidos. Se o tempo para esse operador é definido em  $\mathbb{R}$ , temos um *sistema dinâmico contínuo*.

Além disso, observamos que todo *sistema de equações diferenciais autônomas* na forma  $\dot{x} = X(x)$ , com  $x \in U$  e  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $C^1$  definido em um conjunto  $U \subset \mathbb{R}^2$ , é um sistema dinâmico contínuo e seus *fluxos*  $\varphi_X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisfazem:

- i)  $\varphi_X(0, x) = x$ , para todo  $x \in U$ .
- ii)  $\varphi_X(t + s, x) = \varphi_X(t, \varphi_X(s, x))$ , para todo  $x \in U$ ;  $t, s \in I \subseteq \mathbb{R}$ .
- iii)  $\frac{d}{dt}\varphi_X(t, x) = X(\varphi_X(t, x))$  para todo  $x \in U$ .

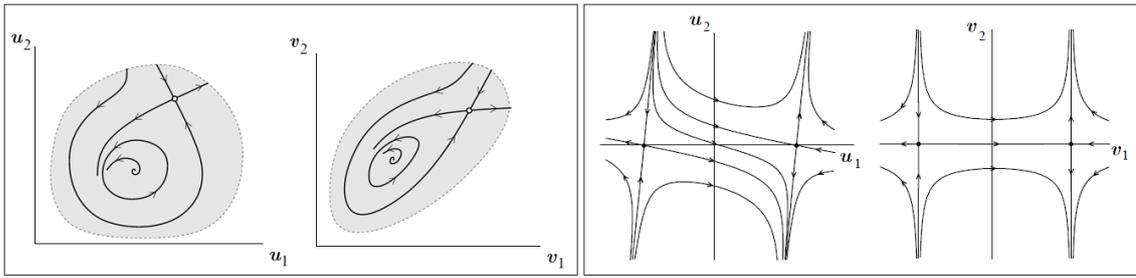


Figura 1.1: Equivalência Topológica vs Equivalência não Topológica.

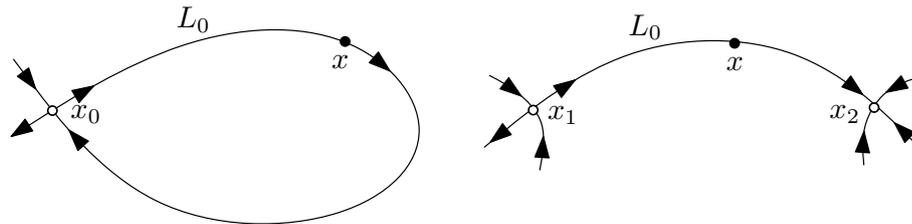


Figura 1.2: Ligação Homoclínica vs Ligação Heteroclínica.

Se  $X(x_0) = 0$ , então  $x_0 \in U$  é um *ponto de equilíbrio* e, o conjunto  $\{x \in X : \varphi_X(t, x_*) = x, t \in \mathbb{R}\}$  é uma *órbita* ou *trajetória* que se inicia em  $x_* \in U$ . Além disso,

**Definição 1.1.1.** *Sejam  $x_0, x_1, x_2$  equilíbrios de  $\dot{x} = X(x)$ . Uma ligação  $L_0$  que se inicia em  $x \in U$  é homoclínica ao ponto  $x_0$  se  $\varphi_X(t, x) \rightarrow x_0$  quando  $t \rightarrow \pm\infty$ . Uma ligação  $L_0$  que começa em  $x \in U$  é heteroclínica aos pontos  $x_1$  e  $x_2$  se  $\varphi_X(t, x) \rightarrow x_1$  para  $t \rightarrow -\infty$  e  $\varphi_X(t, x) \rightarrow x_2$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .*

Por último,  $\dot{x} = X(x)$  tem uma *órbita periódica* iniciando no ponto  $x_0$  se  $\varphi_X(t + T_0, x_0) = \varphi_X(t, x_0)$  para algum  $T_0 > 0$  e para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

## 1.2 Equivalência Topológica

**Definição 1.2.1.** *Dois sistemas contínuos  $\dot{x} = X(x)$  e  $\dot{y} = Y(y)$  com fluxos  $\varphi_X$  e  $\varphi_Y$  são topologicamente equivalentes se existe um homeomorfismo  $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow h(U) \subset \mathbb{R}^2$  tal que para todo  $x \in U, t \in \mathbb{R}$  e  $\varphi_X(t, x) \in U$  temos*

$$h(\varphi_X(t, x)) = \varphi_Y(t, h(x))$$

O conceito de equivalência topológica nos ajuda a compreender, entre outras coisas, o comportamento local dos *pontos regulares* num campo vetorial, isto é, os pontos  $x \in U$  tal que  $X(x) \neq 0$ .

**Teorema 1.2.1** (Teorema do Fluxo Tubular). *Seja  $x_0$  um ponto regular em  $\dot{x} = X(x)$ , onde  $X$  é um campo vetorial de classe  $C^1$  no aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Então, existe um homeo-*

morfismo  $\Phi : V \rightarrow W$  de uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  em  $\mathbb{R}^2$  sobre uma vizinhança  $W$  da origem  $(0,0) \in \mathbb{R}^2$  tal que a equação transformada é dada pelo sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Para a demonstração ver, por exemplo, [2].

### 1.3 Estabilidade local de Equilíbrios Hiperbólicos

É amplamente conhecido como o comportamento qualitativo das soluções de um sistema linear da forma  $\dot{x} = Ax$ ,  $A$  uma matriz  $2 \times 2$ , com equilíbrio na origem. Temos os seguintes casos:

*i)* Os valores próprios;  $\lambda_1, \lambda_2$  no sistema linear são reais e distintos.

- $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ . A origem é um *nó estável*.
- $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ . A origem é um *nó instável*.
- $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ . A origem é uma *sela*.

*ii)* Os valores próprios são conjugados complexos:  $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ , com  $\beta \neq 0$ .

- $\alpha = 0$ . A origem é um *centro*.
- $\alpha < 0$ . A origem é um *foco estável*.
- $\alpha > 0$ . A origem é um *foco instável*.

*iii)* Os valores próprios são reais e iguais:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ .

- $\lambda$  possui dois vetores próprios linearmente independentes. A origem é um *nó estelar atrator* (repulsor) se  $\lambda < 0$  ( $> 0$ ).
- $\lambda$  possui um único vetor próprio.

Na Figura 1.3 resume a informação geométrica sobre o retrato de fase em  $\dot{x} = Ax$  a partir do polinômio característico de  $A$  da forma

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\text{tr}A)\lambda + \det A$$

e discriminante

$$\Delta = (\text{tr}A)^2 - 4\det A.$$

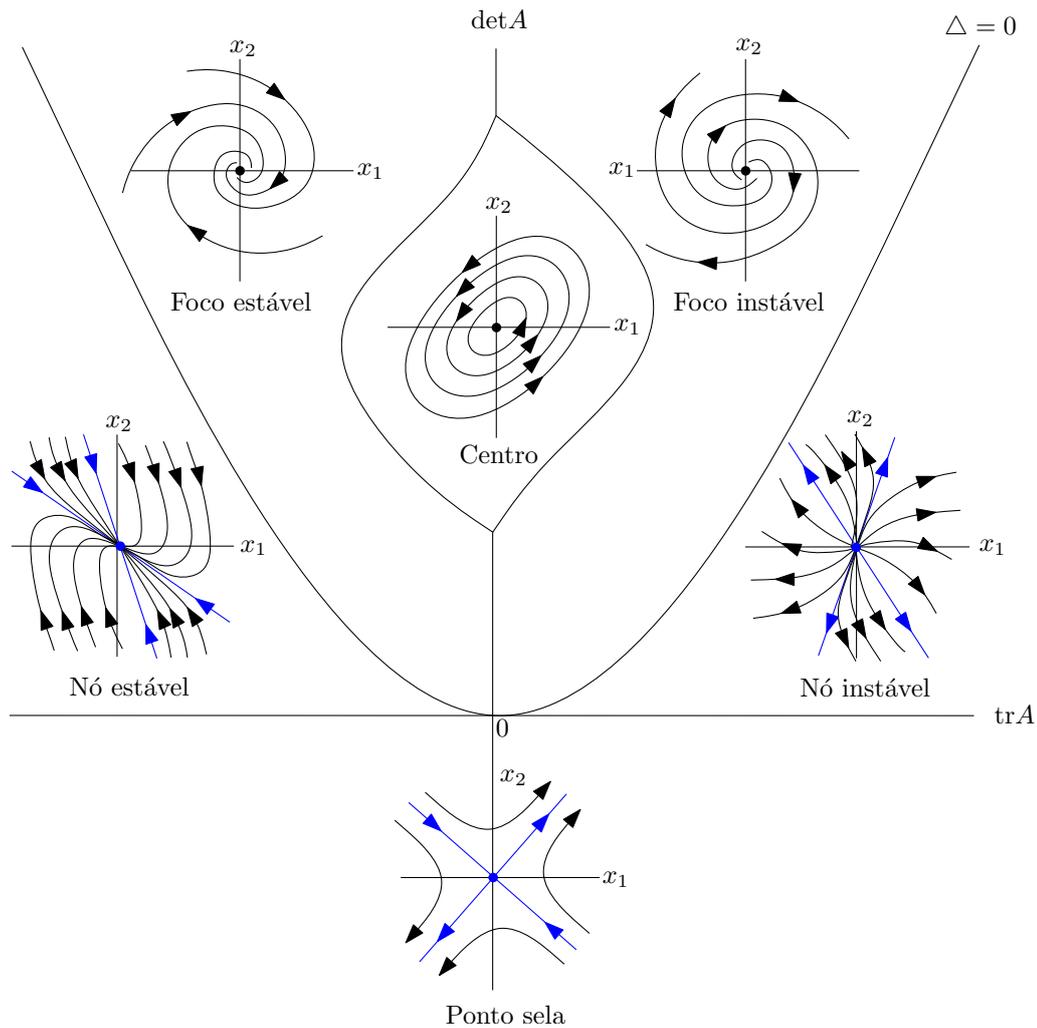


Figura 1.3: Plano Traço - Determinante.

Se o campo vetorial  $X$  não é linear,

**Definição 1.3.1.** Um ponto de equilíbrio  $x_0$  de  $\dot{x} = X(x)$  é hiperbólico se todos os valores próprios da matriz jacobiana  $A := DX(x_0)$  de  $X$  têm parte real não nula. Observamos que  $A$  é a parte linear de  $\dot{x} = X(x)$  em  $x_0 \in U$ .

O seguinte teorema garante a existência de um homeomorfismo, numa vizinhança de um equilíbrio hiperbólico, que conjuga os fluxos de uma equação diferencial e a parte linear associada, cuja demonstração pode ser visto em [2].

**Teorema 1.3.1** (Hartman-Grobman). Seja  $x_0$  um equilíbrio hiperbólico em  $\dot{x} = X(x)$  para  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $C^1$  no aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Então, existe um homeomorfismo  $h : V \rightarrow W$  entre vizinhanças  $U$  de  $x_0$  e  $V$  de  $(0,0) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $h \circ \varphi_X = \varphi_A \circ h$  com  $A := DX(x_0)$ , isto é, os fluxos  $\varphi_X$  e  $\varphi_A$  são localmente conjugados.

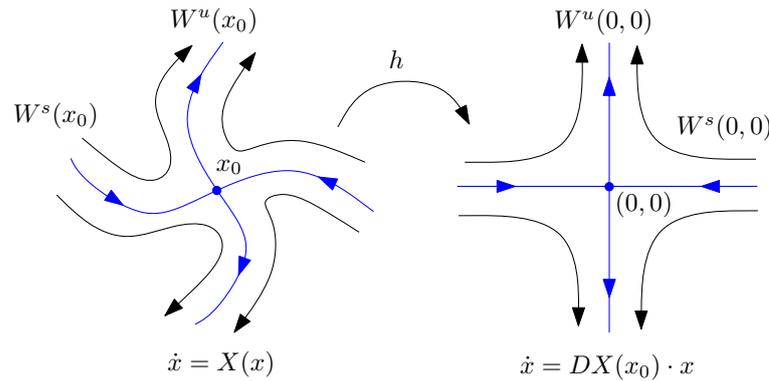


Figura 1.4: Teorema Hartman-Grobman.

**Definição 1.3.2.** *Os conjuntos*

$$W^s(x_0) = \{x : \varphi_X(t, x) \rightarrow x_0, t \rightarrow \infty\}$$

$$W^u(x_0) = \{x : \varphi_X(t, x) \rightarrow x_0, t \rightarrow -\infty\}$$

são chamados *invariantes*, onde  $W^s(x_0)$  é chamada a *variedade estável* de  $x_0$ , enquanto  $W^u(x_0)$  é a *variedade instável* de  $x_0$ .

## 1.4 Ciclo Limite

Um *sistema autônomo não-linear* pode ter soluções periódicas cujas trajetórias são curvas fechadas. Uma curva fechada isolada com trajetórias não fechadas que se aproximam ou se afastam em direção a ela é chamada de *ciclo limite*. Se as trajetórias se aproximam do ciclo, ele é dito *estável*. O ciclo é *instável* se as trajetórias vizinhas se afastam do ciclo, e *semi-estável* se algumas trajetórias se afastam do ciclo e outras tendem a ele. Observemos que os ciclos limite só podem ocorrer em sistemas não-lineares. Um sistema linear pode ter órbitas fechadas, mas estas não são isoladas e correspondem a dinâmica em torno de um centro.

Nesta seção, vamos destacar um resultado importante para determinar quais sistemas autônomos não-lineares não possuem ciclos limite. Por outro lado, determinamos as condições necessárias para uma classe de modelos de Gause possuir um único ciclo limite globalmente assintoticamente estável.

### 1.4.1 Soluções periódicas no plano

**Lema 1.4.1** (Critério de Poincaré - Bendixson). *Sejam  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções diferenciáveis e consideramos um sistema de equações diferenciais na forma*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \quad (1.1)$$

*Seja  $D \subset \mathbb{R}^2$  simplesmente conexo. Se a expressão  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$  não é identicamente nula e não muda de sinal em  $D$ , então o sistema não pode ter uma órbita fechada completamente contida em  $D$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que exista uma órbita fechada  $\Gamma = \{(x(t), y(t))\}$  com período  $T$  e contida em  $D$ . De (1.1) resulta que,

$$\begin{cases} dx = f(x(t), y(t))dt \\ dy = g(x(t), y(t))dt, \end{cases}$$

e,

$$\int_{\Gamma} [f(x, y)dy - g(x, y)dx] = \int_0^T [f(x, y)g(x, y) - g(x, y)f(x, y)]dt = 0.$$

Pelo teorema de Green e considerando que a expressão  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$  não é identicamente nula e não muda de sinal em  $D$ , temos que

$$\int_{\Gamma} [f(x, y)dy - g(x, t)dx] = \int_S \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy \neq 0,$$

com  $S$  a região limitada por  $\Gamma$ , levando a uma contradição.  $\square$

### 1.4.2 Ciclo limite no Modelo de Gause

Do ponto de vista biológico, um modelo de Gause tipo predador-presa é descrito por

$$\begin{cases} \dot{x} = xg(x) - yp(x) \\ \dot{y} = y[-\gamma + q(y)], \end{cases} \quad (1.2)$$

com  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$  as populações de presas e predadores, respectivamente. Na ausência de predadores, a população de presas devem convergir para  $K > 0$ . Portanto,  $\dot{x} = xg(x)$  com  $g(x) > 0$  para  $0 \leq x < K$ ,  $g(K) = 0$  e  $g(x) < 0$  com  $x > K$ .

Os predadores reduzem a taxa de crescimento das presas por  $yp(x)$ , onde  $p(x)$  é a quan-

tidade das presas mortas por um predador. Assim  $p(0) = 0$ ,  $p(x) > 0$  para  $x > 0$ .

A taxa de crescimento dos predadores será dada por  $-\gamma + q(x)$ . A constante  $\gamma > 0$  corresponde à mortalidade dos predadores na ausência de presas, e  $q(x)$  é uma função positiva, monotonamente crescente. Assim  $q(0) = 0$ ,  $q'(x) > 0$  para  $x > 0$ .

Para garantir a existência de um único ciclo limite globalmente assintoticamente estável no modelo de Gause, usaremos o seguinte resultado cuja prova pode ser vista em [5].

**Teorema 1.4.2** (Teorema de Zhang Modificado). *Consideremos o sistema de Lienard generalizado*

$$\begin{cases} \dot{x} = -[\varphi(y) + F(x)] \\ \dot{y} = h(x), \end{cases} \quad (1.3)$$

e suponhamos que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- i)  $xh(x) > 0$  para  $x \neq 0$  e  $y\varphi(y) > 0$  para  $y \neq 0$ ,
- ii)  $\varphi(y)$  é não decrescente, e a curva  $\varphi(y) + F(x) = 0$  é definida para  $x \in (-\infty, +\infty)$ ,
- iii)  $F(0) = 0$  e  $F'(0) < 0$ ,
- iv) Todos os ciclos limite estão contidos no intervalo  $a < x < b$  onde  $a < 0 < b$ ,
- v)  $\frac{F'(x)}{h(x)}$  é não decrescente quando  $x$  aumenta em  $a < x < 0$  e  $0 < x < b$ .

Então o sistema (1.3) tem no máximo um ciclo limite, e se existe, é assintoticamente estável.

**Teorema 1.4.3.** *Dado um modelo de Gause dado por*

$$\begin{cases} \dot{x} = xg(x) - yp(x) \\ \dot{y} = y[-\gamma + q(x)], \end{cases} \quad (1.4)$$

para todo  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $\gamma > 0$  e  $g$ ,  $p$ ,  $q$  são funções de classe  $C^1$  tal que a existência, unicidade e continuidade para todo  $t \geq 0$  sejam satisfeitas para os problemas de valor inicial.

Suponhamos verdadeiras as seguintes sentenças:

- (H1) Existe um  $K > 0$  tal que  $g(x) > 0$  se  $0 \leq x < K$ ,  $g(K) = 0$  e  $g(x) < 0$  se  $x > K$ ,
- (H2)  $p(0) = 0$  e  $p(x) > 0$  para  $x > 0$ ,
- (H3)  $q(0) = 0$ ,  $q'(x) > 0$ ,

(H4) Existe  $x^*$ ,  $0 < x^* < K$  tal que  $q(x^*) = \gamma$ ,

(H5)  $\frac{d}{dx} \left( \frac{xg(x)}{p(x)} \right) \Big|_{x=x^*} > 0$ ,

(H6)  $\frac{d}{dx} \left( \frac{xg'(x) + g(x) - xg(x)\frac{p'(x)}{p(x)}}{-\gamma + q(x)} \right) \leq 0$  para  $0 \leq x < x^*$  e  $x^* < x \leq K$

então, o sistema (1.4) tem um único equilíbrio interior instável  $(x^*, y^*)$  e um único ciclo limite globalmente assintoticamente estável em  $\{(x, y) : x > 0, y > 0\} \setminus \{(x^*, y^*)\}$ .

*Demonstração.* Observamos que o sistema (1.4) tem dois equilíbrios óbvios:  $(0, 0)$  e  $(K, 0)$ . Como  $q(x^*) = \gamma$  e

$$y^* = \frac{x^*g(x^*)}{p(x^*)}, \quad (1.5)$$

então  $(x^*, y^*)$  é o único equilíbrio interior do primeiro quadrante do sistema (1.4).

O ponto  $(0, 0)$  é um ponto de sela, com curva estável na direção  $y$ , pois para todo ponto  $(0, y)$ ,  $y > 0$ , temos

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -\gamma y < 0, \end{cases}$$

e curva instável na direção  $x$ , pois para todo ponto  $(x, 0)$ ,  $x > 0$ , temos

$$\begin{cases} \dot{x} = xg(x) > 0 \\ \dot{y} = 0. \end{cases}$$

A matriz Jacobiana do sistema (1.4) em  $(K, 0)$  é

$$J(K, 0) = \begin{bmatrix} Kg'(K) & -p(K) \\ 0 & -\gamma + q(K) \end{bmatrix}$$

e por (H3) e (H4) temos  $-\gamma + q(K) > 0$  e  $g'(K) < 0$ , isto é,  $\det J(K, 0) = (q(K) - \gamma)Kg'(K) < 0$ . Logo  $(0, K)$  é um ponto de sela, e é fácil ver que sua curva estável está ao longo do eixo  $x$ .

Para estudar a estabilidade de  $(x^*, y^*)$ , calculamos a matriz Jacobiana,

$$J(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} H(x^*) & -p(x^*) \\ y^*q'(x^*) & 0 \end{bmatrix}$$

onde

$$H(x^*) = x^*g'(x^*) + g(x^*) - \frac{x^*g(x^*)p'(x^*)}{p(x^*)}. \quad (1.6)$$

Os valores próprios de  $J(x^*, y^*)$  são dados por

$$\begin{aligned} \lambda(x^*, y^*) &= \frac{1}{2} \left( \text{tr}J(x^*, y^*) \pm \sqrt{\text{tr}J(x^*, y^*)^2 - 4\det J(x^*, y^*)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( H(x^*) \pm \sqrt{H(x^*)^2 - 4y^*g'(x^*)p(x^*)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( H(x^*) \pm \sqrt{H(x^*)^2 - 4x^*g(x^*)q'(x^*)} \right). \end{aligned}$$

Chamando  $\Delta(x^*) = H(x^*)^2 - 4x^*g(x^*)q'(x^*)$ , temos que se  $\Delta(x^*) < 0$ ,  $(x^*, y^*)$  é um foco e se  $\Delta(x^*) > 0$ ,  $(x^*, y^*)$  é um nó. Além disso, se  $H(x^*) < 0$  ou  $H(x^*) > 0$ , então  $(x^*, y^*)$  é estável ou instável, respectivamente.

No caso em que  $H(x^*) = 0$  não podemos decidir sobre a estabilidade de  $(x^*, y^*)$  pois não vale o Teorema de Hartman-Grobman.

Por outro lado, como  $x^*$  e  $g(x^*)$  são positivos,  $\frac{H(x^*)}{x^*g(x^*)}$  tem o mesmo sinal que  $H(x^*)$  e por (1.6) temos

$$\begin{aligned} \frac{H(x^*)}{x^*g(x^*)} &= \frac{g'(x^*)}{g(x^*)} + \frac{1}{x^*} - \frac{p'(x^*)}{p(x^*)} \\ &= \frac{d}{dx} \ln \left( \frac{xg(x)}{p(x)} \right) \Big|_{x=x^*}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Logo, se  $\frac{d}{dx} \ln \left( \frac{xg(x)}{p(x)} \right) \Big|_{x=x^*} < 0$ ,  $(x^*, y^*)$  é estável e se  $\frac{d}{dx} \ln \left( \frac{xg(x)}{p(x)} \right) \Big|_{x=x^*} > 0$ ,  $(x^*, y^*)$  é instável.

Como  $\frac{x^*g(x^*)}{p(x^*)} > 0$  temos que  $(x^*, y^*)$  é estável se  $\frac{d}{dx} \left( \frac{xg(x)}{p(x)} \right) \Big|_{x=x^*} < 0$  e instável se  $\frac{d}{dx} \left( \frac{xg(x)}{p(x)} \right) \Big|_{x=x^*} > 0$ .

Por (H5)

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{xg(x)}{p(x)} \right) \Big|_{x=x^*} > 0,$$

então  $(x^*, y^*)$  é um equilíbrio instável.

Nosso objetivo é provar a existência do ciclo limite globalmente assintoticamente estável para o modelo (1.4) no primeiro quadrante. Para isso, fazemos uma transformação no

modelo (1.4) num sistema de Lienard generalizado do tipo (1.3) e aplicar o Teorema 1.4.2. De fato, consideremos a translação

$$\begin{aligned} X &= x - x^* \\ Y &= y - y^*, \end{aligned} \tag{1.8}$$

e substituindo em (1.4),

$$\begin{cases} \dot{X} = (X + x^*)g(X + x^*) - (Y + y^*)p(X + x^*) \\ \dot{Y} = (Y + y^*)[-\gamma + q(X + x^*)]. \end{cases}$$

Então

$$\frac{\dot{Y}}{Y + y^*} = -\gamma + q(X + x^*)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \int_0^Y \frac{ds}{s + y^*} \right) = -\gamma + q(X + x^*),$$

e

$$\frac{\dot{X}}{p(X + x^*)} = (X + x^*) \frac{g(X + x^*)}{p(X + x^*)} - (Y + y^*)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \int_0^X \frac{ds}{p(s + x^*)} \right) = (X + x^*) \frac{g(X + x^*)}{p(X + x^*)} - (Y + y^*).$$

Sejam

$$u = \int_0^X \frac{ds}{p(s + x^*)} = k(X)$$

$$v = \int_0^Y \frac{ds}{s + y^*} = \text{Ln} \left( \frac{Y + y^*}{y^*} \right) = l(Y) \implies l^{-1}(v) = y^* e^v - y^*,$$

então

$$\begin{cases} \dot{u} = [k^{-1}(u) + x^*] \frac{g(k^{-1}(u) + x^*)}{p(k^{-1}(u) + x^*)} - y^* e^v \\ \dot{v} = -\gamma + q(k^{-1}(u) + x^*). \end{cases} \tag{1.9}$$

Como  $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{u}, \dot{v} > 0$ , então  $\dot{k}, \dot{l}, k^{-1}, l^{-1} > 0$ .

Escrevendo (1.9) como

$$\begin{cases} \dot{u} = - \left[ y^* - [k^{-1}(u) + x^*] \frac{g(k^{-1}(u) + x^*)}{p(k^{-1}(u) + x^*)} \right] - (y^* e^v - y^*) \\ \dot{v} = -\gamma + q(k^{-1}(u) + x^*) \end{cases} \quad (1.10)$$

e definindo

$$\begin{aligned} h(u) &= -\gamma + q(k^{-1}(u) + x^*) \\ \varphi(v) &= y^* e^v - y^* \\ F(u) &= y^* - [k^{-1}(u) + x^*] \frac{g(k^{-1}(u) + x^*)}{p(k^{-1}(u) + x^*)}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

temos

$$\begin{cases} \dot{u} = -[\varphi(v) + F(u)] \\ \dot{v} = h(u), \end{cases}$$

e podemos observar o seguinte:

- i)*  $h(0) = -\gamma + q(k^{-1}(0) + x^*) = -\gamma + q(x^*) = -\gamma + \gamma = 0$ ;  $h'(u) > 0$ , logo  $uh(u) > 0$  quando  $u \neq 0$ . Da mesma forma,  $\varphi(0) = l^{-1}(0) = 0$  e  $v\varphi(v) \neq 0$  quando  $v \neq 0$ .
- ii)*  $\varphi'(v) \geq 0$  para  $v \geq 0$ , isto é,  $\varphi(v)$  é não decrescente. A curva  $\varphi(v) + F(u) = 0$  é definida para todo  $u \in (-\infty, \infty)$ .
- iii)*  $F(0) = y^* - \frac{x^* g(x^*)}{p(x^*)} = y^* - y^* = 0$  e

$$\begin{aligned} \frac{dF}{du}(0) &= \frac{dF(u)}{d(k^{-1}(u) + x^*)} \cdot \frac{d(k^{-1}(u) + x^*)}{du} \Big|_{u=0} \\ &= -\frac{d}{d(k^{-1}(u) + x^*)} \left( (k^{-1}(u) + x^*) \frac{g(k^{-1}(u) + x^*)}{p(k^{-1}(u) + x^*)} \right) \frac{d(k^{-1}(u) + x^*)}{du} < 0 \end{aligned}$$

por (H5) e  $\frac{dk^{-1}(0)}{du} > 0$ .

- iv)* Para tais modelos, os ciclos limite do sistema (1.4) devem situar-se dentro de  $0 < x < K$ ,  $0 < y < \infty$ . Logo, os ciclos limite do sistema (1.10), devem estar dentro de  $-\infty < u < k(K)$ ,  $-\infty < v < +\infty$ .

*v)* Como

$$\frac{du}{dX} = \frac{ds}{p(X + x^*)}$$

ou

$$\frac{dk^{-1}(u)}{du} = \frac{dX}{du} = p(X + x^*) = p(k^{-1}(u) + x^*),$$

temos

$$\begin{aligned}
 F'(u) &= \frac{dF(u)}{d(k^{-1}(u) + x^*)} \cdot \frac{d(k^{-1}(u) + x^*)}{du} \\
 &= \frac{dF(u)}{d(k^{-1}(u) + x^*)} \cdot p(k^{-1}(u) + x^*) \\
 &= - \left( xg'(x) + g(x) - xg(x) \frac{p'(x)}{p(x)} \right) \Big|_{x=k^{-1}(u)+x^*}.
 \end{aligned}$$

Portanto  $\frac{F'(u)}{h(u)}$  é não decrescente se, e somente se

$$\frac{d}{du} \left( \frac{F'(u)}{h(u)} \right) \geq 0,$$

isto é,

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{xg'(x) + g(x) - xg(x) \frac{p'(x)}{p(x)}}{-\gamma + q(x)} \right) \leq 0.$$

equivalente a (H6).

Portanto, aplicando o Teorema 1.4.2, o sistema (1.4) tem exatamente um único ciclo limite globalmente assintoticamente estável em  $\{(x, y) : x > 0, y > 0\} \setminus \{(x^*, y^*)\}$ .  $\square$

---

# Sistemas Planares De Filippov

Neste capítulo vamos definir os elementos básicos, como pontos de equilíbrio, trajetórias, órbitas periódicas, curvas invariantes e equivalência topológica em Sistemas Planares de Filippov. Em seguida, apresentamos um resultado da existência de órbitas periódicas, um estudo local e bifurcações locais e globais de codimensão um via formas normais.

## 2.1 Órbitas e Singularidades

Consideremos  $X$  e  $Y$  campos vetoriais de classe  $C^r$ ,  $r > 1$ , definidos em um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  contendo a origem. Seja  $f$  uma função de classe  $C^r$ ,  $r > 1$ , tal que  $\text{grad}f(x, y) \neq 0$  para todo  $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$  e  $\Sigma = f^{-1}(0) \cap U = \{(x, y) \in U : f(x, y) = 0\}$  é uma curva aberta diferenciável. A curva  $\Sigma$  divide o conjunto aberto  $U$  em duas regiões abertas

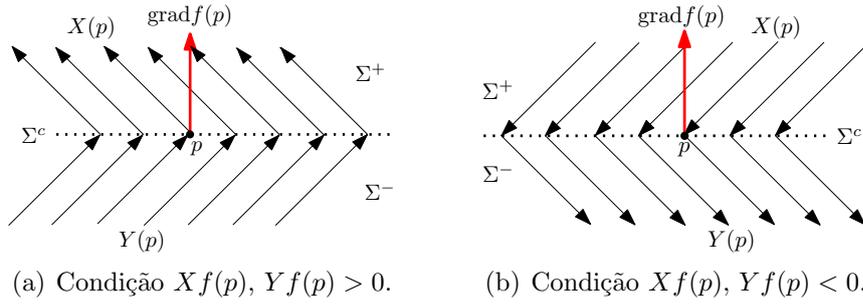
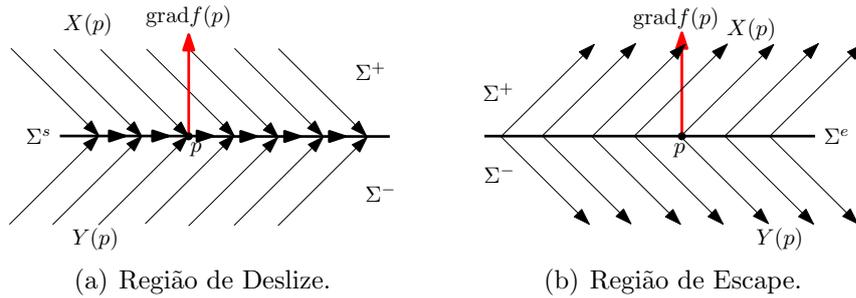
$$\Sigma^+ = \{(x, y) \in U : f(x, y) > 0\} \quad \text{e} \quad \Sigma^- = \{(x, y) \in U : f(x, y) < 0\}$$

e denotamos por  $\overline{\Sigma^+}$  e  $\overline{\Sigma^-}$  seus fechos.

Um Sistema Planar de Filippov  $Z = (X, Y)$  é um campo vetorial definido por

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y), & (x, y) \in \Sigma^+ \\ Y(x, y), & (x, y) \in \Sigma^- \end{cases}$$

onde  $X$  e  $Y$  são de classe  $C^r$ ,  $r > 1$ , em  $\overline{\Sigma^+}$  e  $\overline{\Sigma^-}$ , respectivamente.

Figura 2.1: Região de Costura  $\Sigma^c$ .Figura 2.2: Região  $\Sigma^s$  e  $\Sigma^e$ .

Chamaremos  $\mathcal{Z}^r$  o espaço dos campos vetoriais deste tipo. Este pode ser tomado como  $\mathcal{Z}^r = \mathcal{X}^r \times \mathcal{Y}^r$  onde, por abuso de notação,  $\mathcal{X}^r$  e  $\mathcal{Y}^r$  denotam os conjuntos dos campos de classe  $C^r$  em  $\overline{\Sigma^+}$  e  $\overline{\Sigma^-}$ . Consideramos  $\mathcal{Z}^r$  com a topologia produto.

A fim de estabelecer a dinâmica dada pelo Sistema Planar de Filippov  $Z = (X, Y)$  em  $U$ , precisamos definir a trajetória local  $\varphi_Z(t, p)$  por um ponto  $p \in U$ . Para este fim, distinguimos se o ponto  $p$  pertence a  $\Sigma^+$ ,  $\Sigma^-$  ou  $\Sigma$ .

Para as duas primeiras regiões, a trajetória local está definida pelos campos vetoriais  $X$  e  $Y$ . A fim de estender a definição de trajetória para  $\Sigma$ , dividiremos  $\Sigma$  em três regiões disjuntas dependendo para onde o campo vetorial aponta:

- Região de Costura:  $\Sigma^c = \{p \in \Sigma : Xf(p) \cdot Yf(p) > 0\}$  dada pela Figura 2.1,
- Região de Deslize:  $\Sigma^s = \{p \in \Sigma : Xf(p) < 0, Yf(p) > 0\}$  dada pela Figura 2.2 (a),
- Região de Escape:  $\Sigma^e = \{p \in \Sigma : Xf(p) > 0, Yf(p) < 0\}$  dada pela Figura 2.2 (b),

onde  $Xf(p) = X(p) \cdot \text{grad}f(p)$  é a derivada de Lie de  $f$  com respeito ao campo vetorial  $X$  em  $p$ .

Estas três regiões são relativamente abertas em  $\Sigma$  e podem possuir muitas componentes conexas. Suas definições excluem os pontos de tangência, isto é, pontos onde um dos

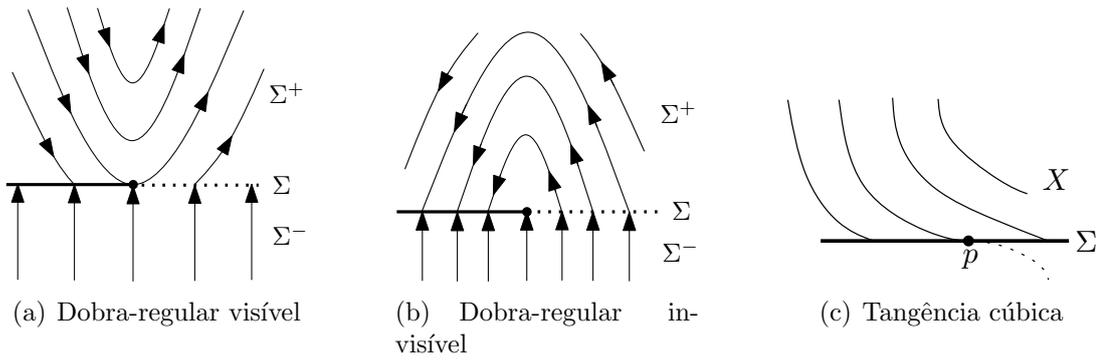


Figura 2.3: Exemplo de Pontos Tangenciais em Sistemas  $Z = (X, Y)$ .

campos vetoriais são tangentes a  $\Sigma$ . Este conjunto pode ser caracterizado pelos pontos  $p \in \Sigma$  para os quais  $Xf(p) = 0$  ou  $Yf(p) = 0$ . Estes pontos aparecem na fronteira das regiões  $\Sigma^c$ ,  $\Sigma^s$  e  $\Sigma^e$ , que denotaremos por  $\partial\Sigma^c$ ,  $\partial\Sigma^s$  e  $\partial\Sigma^e$ , respectivamente. Também inclui o caso  $X(p) = 0$  ou  $Y(p) = 0$ , isto é, quando um dos dois campos vetoriais tem um ponto crítico em  $\Sigma$ .

Podemos distinguir dois tipos de tangência entre um campo vetorial e  $\Sigma$ , dependendo do modo como se dá o contato entre eles.

**Definição 2.1.1.** *Um campo vetorial  $X$  de classe  $C^r$ ,  $r > 1$ , possui em um ponto  $p \in \Sigma$  uma dobra ou tangência quadrática em  $\Sigma = \{(x, y) \in U : f(x, y) = 0\}$  se  $Xf(p) = 0$  e  $X^2f(p) = X(p) \cdot \text{grad}Xf(p) \neq 0$  como observamos nas Figuras 2.3 (a) e (b).*

**Definição 2.1.2.** *Um campo vetorial  $X$  de classe  $C^r$ ,  $r > 1$ , possui em um ponto  $p \in \Sigma$  uma cúspide ou tangência cúbica com  $\Sigma = \{(x, y) \in U : f(x, y) = 0\}$  se  $Xf(p) = X^2f(p) = 0$  e  $X^3f(p) = X(p) \cdot \text{grad}X^2f(p) \neq 0$  como observamos na Figura 2.3 (c).*

**Definição 2.1.3.** *Um ponto  $p \in \Sigma$  é dobra-regular se  $Xf(p) = 0$ ,  $X^2f(p) \neq 0$  e  $Yf(p) \neq 0$  ou pontos tais que  $Yf(p) = 0$ ,  $Y^2f(p) \neq 0$  e  $Xf(p) \neq 0$ . Além disso:*

- no primeiro caso, dizemos que a dobra-regular é visível se  $X^2f(p) > 0$  e invisível se  $X^2f(p) < 0$ . Além disso, se  $Yf(p) > 0$ , a dobra  $p \in \partial\Sigma^s$  é uma dobra de deslize e se  $Yf(p) < 0$ , a dobra  $p \in \partial\Sigma^e$  é uma dobra de escape.
- no segundo caso, ela é visível quando  $Y^2f(p) < 0$  e invisível quando  $Y^2f(p) > 0$ , e pode-se definir analogamente dobras de deslize e de escape.

Agora podemos definir a trajetória passando por um ponto  $p$  de  $\Sigma^c$ ,  $\Sigma^s$  e  $\Sigma^e$ . Em  $\Sigma^c$ , os campos apontam na mesma direção e as trajetórias de  $X$  e  $Y$  através desse ponto coincidem.

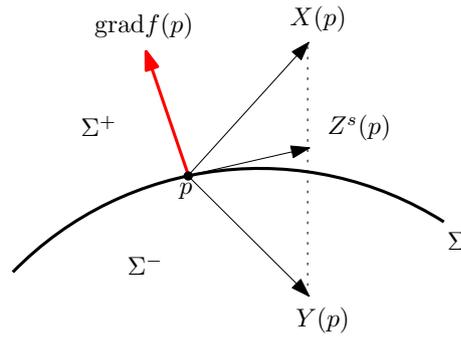


Figura 2.4: Construção de órbitas  $Z^s(p)$ .

Em  $\Sigma^s$  e  $\Sigma^e$ , a órbita local é dada por uma combinação convexa dos campos vetoriais  $X$  e  $Y$  como podemos observar na Figura 2.4, isto é,

$$Z^s(p) = \lambda(p)X(p) + (1 - \lambda(p))Y(p).$$

Por outro lado, observamos que

$$Z^s(p) \cdot \text{grad}f(p) = 0,$$

logo temos

$$\lambda(p) = \frac{Yf(p)}{Yf(p) - Xf(p)},$$

e deste modo,

**Definição 2.1.4.** *O campo vetorial deslizante  $Z^s$  é dado por*

$$Z^s(p) = \frac{1}{Yf(p) - Xf(p)}(Yf(p)X(p) - Xf(p)Y(p)),$$

definido em  $\Sigma^e$  ou  $\Sigma^s$  e para  $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ , a trajetória local de  $p$  é dada por este campo vetorial.

Resumindo temos,

**Definição 2.1.5.** *Sejam  $\varphi_X$  e  $\varphi_Y$  os fluxos dos campos vetoriais  $X$  e  $Y$  de classe  $C^r$ ,  $r > 1$ , em  $U$ , respectivamente. A trajetória local de um Sistema Planar de Filippov na forma  $Z = (X, Y)$  por um ponto  $p \in U$  é definida por:*

- Para  $p \in \Sigma^+$  com  $X(p) \neq 0$  a trajetória é dada por  $\varphi_Z(t, p) = \varphi_X(t, p)$ . Da mesma forma para  $p \in \Sigma^-$  com  $Y(p) \neq 0$  a trajetória é  $\varphi_Z(t, p) = \varphi_Y(t, p)$ , respectivamente, para  $t \in I \subset \mathbb{R}$ .
- Para  $p \in \Sigma^c$  tal que  $Xf(p) > 0$ ,  $Yf(p) > 0$  e tomando a origem do tempo em  $p$ , a trajetória é dada por  $\varphi_Z(t, p) = \varphi_Y(t, p)$  para  $t \in I \cap \{t \leq 0\}$  e  $\varphi_Z(t, p) = \varphi_X(t, p)$

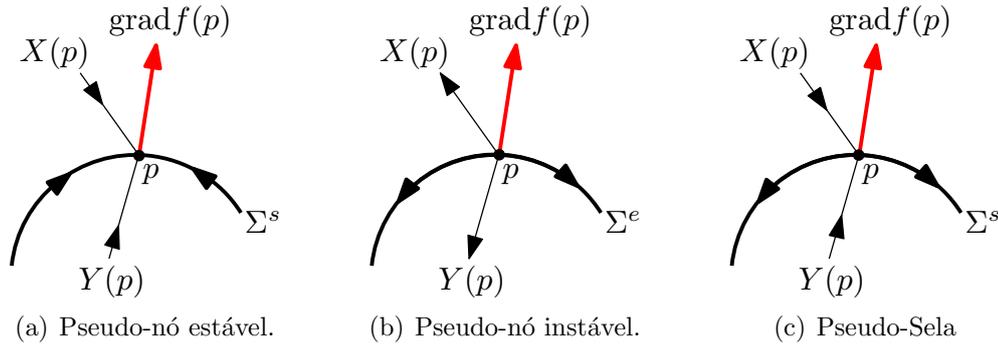


Figura 2.5: Exemplos de Pseudo-equilíbrios do Sistema  $Z = (X, Y)$

para  $t \in I \cap \{t \geq 0\}$ . Para o caso  $Xf(p) < 0$ ,  $Yf(p) < 0$ , a trajetória é dada por  $\varphi_Z(t, p) = \varphi_Y(t, p)$  para  $t \in I \cap \{t \geq 0\}$  e  $\varphi_Z(t, p) = \varphi_X(t, p)$  para  $t \in I \cap \{t \leq 0\}$ ,

- Para  $p \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$  tal que  $Z^s(p) \neq 0$ ,  $\varphi_Z(t, p) = \varphi_{Z^s}(t, p)$  para  $t \in I \subset \mathbb{R}$ ,
- Para  $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$  tal que as definições de trajetórias para pontos em ambos os lados de  $p$  podem ser estendidas para  $p$  e coincidem, a trajetória por  $p$  é esta trajetória, isto é,  $\varphi_Z(t, p) = \{p\}$ . Chamaremos estes pontos de tangência regulares.
- Para qualquer outro ponto  $\varphi_Z(t, p) \neq \{p\}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Este é o caso dos pontos de tangência em  $\Sigma$  que não são regulares, chamados pontos de tangência singulares, e os pontos críticos de  $X$  em  $\Sigma^+$ ,  $Y$  em  $\Sigma^-$  e  $Z^s$  em  $\Sigma^s \cup \Sigma^e$ .

**Definição 2.1.6.** A órbita local para  $Z = (X, Y)$  num ponto  $p \in U$  é o conjunto

$$\gamma(p) = \{\varphi_Z(t, p) : t \in I\},$$

onde podemos considerar que a órbita  $\varphi_Z(t, p)$  para  $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$  é a trajetória dada pelo campo vetorial deslizante  $Z^s$ .

**Definição 2.1.7.** Os pontos  $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$  que satisfazem  $Z^s(p) = 0$ , isto é, os pontos críticos do campo vetorial deslizante, são chamados pseudo-equilíbrios de  $Z = (X, Y)$ .

Observamos que para os pontos  $p \in \Sigma$  que satisfazem  $Z^s(p) = 0$ , os campos vetoriais  $X$  e  $Y$  devem ser linearmente dependentes, isto é,  $X(p) = cY(p)$  para algum  $c \in \mathbb{R}$ .

**Definição 2.1.8.** Um pseudo-nó estável é qualquer ponto  $p \in \Sigma^s$  tal que  $Z^s(p) = 0$  e  $(Z^s)'(p) < 0$  como observamos na Figura 2.5 (a), pseudo-nó instável é qualquer ponto  $p \in \Sigma^e$  tal que  $Z^s(p) = 0$  e  $(Z^s)'(p) > 0$  como na Figura 2.5 (b), e pseudo-sela é qualquer ponto  $p \in \Sigma^s$  tal que  $Z^s(p) = 0$  e  $(Z^s)'(p) > 0$  ou  $p \in \Sigma^e$  tal que  $Z^s(p) = 0$  e  $(Z^s)'(p) < 0$  como na Figura 2.5 (c). Um ponto  $p$  é um pseudo-equilíbrio hiperbólico de  $Z = (X, Y)$  se  $p$  é um ponto de equilíbrio hiperbólico em  $Z^s$ .

**Definição 2.1.9.** *As singularidades do Sistema Planar de Filippov  $Z = (X, Y)$  são:*

- $p \in \Sigma^\pm$  tal que  $p$  é um equilíbrio de  $X$  ou de  $Y$ , isto é,  $X(p) = 0$  ou  $Y(p) = 0$ , respectivamente.
- $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$  tal que  $p$  é um pseudo-equilíbrio, isto é  $Z^s(p) = 0$ .
- $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$ , isto é, os pontos de tangência,  $Xf(p) = 0$  ou  $Yf(p) = 0$ , que podem ser regulares ou singulares.
- Qualquer outro ponto é chamado ponto regular.

Para um sistema dinâmico contínuo  $X$ , as singularidades,  $X(p) = 0$ , correspondem a pontos críticos e como consequência a trajetória passando por esse ponto é somente o próprio ponto, isto é,  $\gamma(p) = \{p\}$ . Nos Sistemas Planares de Filippov existem singularidades, por exemplo tangências regulares, cuja órbita  $\gamma(p) \neq \{p\}$ . Por esta razão, classificaremos as singularidades como:

(i) *Singularidade distinguida:* pontos  $p$  tais que  $\gamma(p) = \{p\}$ , isto é:

- $p \in \Sigma^\pm$  tal que  $p$  é um equilíbrio de  $X$  ou  $Y$ , isto é,  $X(p) = 0$  ou  $Y(p) = 0$ , respectivamente,
- $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$  tal que  $p$  é um pseudo-equilíbrio, isto é,  $Z^s(p) = 0$ ,
- $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$  tal que é um ponto de tangência singular.

(ii) *Singularidade não distinguida:* pontos  $p$  tais que  $\gamma(p) \neq \{p\}$ , isto é, pontos  $p \in \Sigma$  que são pontos de tangência regulares e pontos de  $X$  e  $Y$  que são pontos regulares.

Agora definimos os pontos de partida e chegada em  $Z = (X, Y)$ .

**Definição 2.1.10.** *Dada uma trajetória  $\varphi_Z(t, q) \in \Sigma^+ \cup \Sigma^-$  e um ponto  $p \in \Sigma$ , dizemos que  $p$  é um ponto de partida de  $\varphi_Z(t, q)$  se existe  $t_0 < 0$  tal que  $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \varphi_Z(t, q) = p$ , e diremos que é um ponto de chegada de  $\varphi_Z(t, q)$  se existe  $t_0 > 0$  tal que  $\lim_{t \rightarrow t_0^-} \varphi_Z(t, q) = p$ .*

De acordo com a definição anterior, se  $p \in \Sigma^c$  então é um ponto de partida de  $\varphi_Z(t, q)$  para qualquer ponto  $q$  pertencendo à órbita  $\gamma^+(p) = \{\varphi_Z(t, p) : t \in I \cap \{t \geq 0\}\}$  e é um ponto de chegada de  $\varphi_Z(t, q)$  para qualquer ponto  $q$  pertencendo à órbita  $\gamma^-(p) = \{\varphi_Z(t, p) : t \in I \cap \{t \leq 0\}\}$ .

A órbita através de um ponto  $p \in \Sigma^c$  é a união do ponto com suas órbitas de partida e chegada.

Por fim, vamos dar alguns exemplos de pontos de tangência para mostrar como as definições anteriores se aplicam a eles.

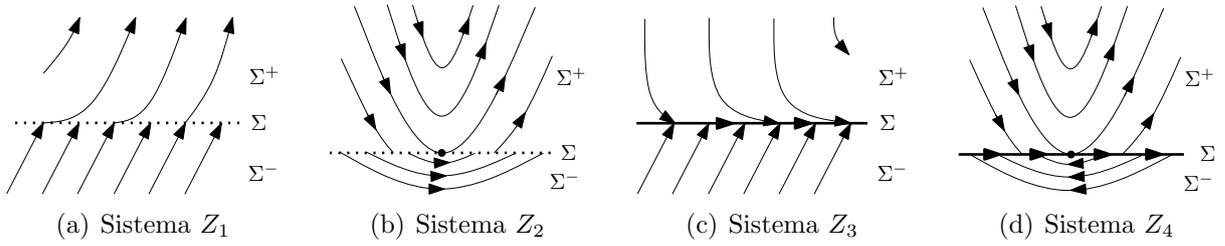


Figura 2.6: Exemplos pontos de Tangência Regular.

**Exemplo 2.1.1.** *Seja*

$$Z_1 = \begin{cases} X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ x^2 \end{pmatrix} & \text{para } y > 0 \\ Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{para } y < 0, \end{cases}$$

onde  $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = y = 0\}$ . Para todo  $p = (x, 0) \in \Sigma$ ,  $Xf(p) = x^2 \geq 0$  e  $Yf(p) = 1 > 0$ . Logo  $\Sigma^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y = 0\}$ ,  $\Sigma^s = \Sigma^e = \emptyset$  e  $T = (0, 0) \in \partial\Sigma^c$  de  $X$  é um ponto de tangência cúspide regular pois  $Xf(T) = X^2f(T) = 0$ ,  $X^3f(T) = 2 \neq 0$  e  $\psi_Z(t, T) \neq \{T\}$ . Além disso, a órbita passando por  $p$  é a união de suas órbitas de chegada e partida como acontece para pontos em  $\Sigma^c$ .

**Exemplo 2.1.2.** *Seja*

$$Z_2 = \begin{cases} X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix} & \text{se } y > 0 \\ Y_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7x \end{pmatrix} & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

onde  $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = y = 0\}$ . Para todo  $p = (x, 0) \in \Sigma$ ,  $Xf(p) \cdot Yf(p) = 14x^2 \geq 0$ . Logo  $\Sigma^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y = 0\}$ ,  $\Sigma^s = \Sigma^e = \emptyset$  e  $T = (0, 0) \in \partial\Sigma^c$  um ponto de dobra-regular visível pois  $Xf(T) = 0$  e  $X^2f(T) = 2 > 0$ . Neste caso, a trajetória por  $p$  é  $\varphi_Z(t, p) = \varphi_X(t, p)$ .

**Exemplo 2.1.3.** *Seja  $T = (0, 0) \in \Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = y = 0\}$  em*

$$Z_3 = \begin{cases} X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -x^2 \end{pmatrix} & \text{se } y > 0 \\ Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

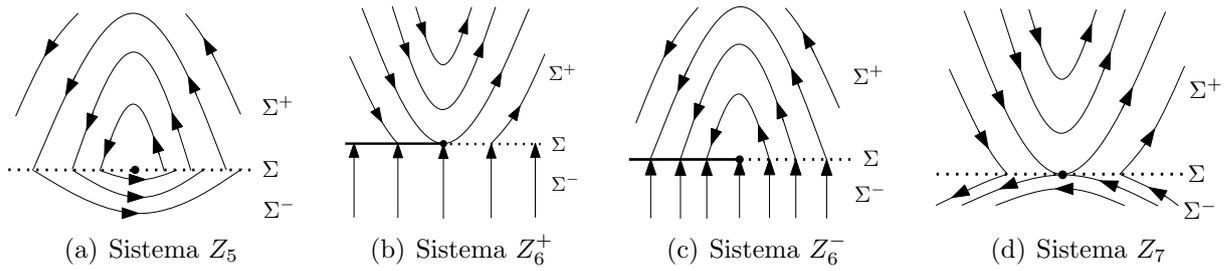


Figura 2.7: Exemplos pontos de Tangência Singular.

Para todo  $p = (x, 0) \in \Sigma$ ,  $Xf(p) = -x^2 \leq 0$  e  $Yf(p) = 1 > 0$ . Logo  $\Sigma^s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y = 0\}$ ,  $\Sigma^c = \Sigma^e = \emptyset$  e  $T = (0, 0) \in \partial\Sigma^s$  de  $X$  é um ponto de tangência cúspide regular pois  $Xf(T) = X^2f(T) = 0$  e  $X^3f(T) = -2 \neq 0$ . Por outro lado,  $Z^s(x, 0) = (1, 0)^T$ , de modo que  $\varphi_Z(t, T) = \varphi_{Z^s}(t, T)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 2.1.4.** Tomemos  $T = (0, 0) \in \Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = y = 0\}$  e o campo vetorial

$$Z_4 = \begin{cases} X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix} & \text{se } y > 0 \\ Y_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -7x \end{pmatrix} & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

Neste caso, para todo  $p = (x, 0) \in \Sigma$  temos  $Xf(p) \cdot Yf(p) = -14x^2 \leq 0$ . Logo  $\Sigma^c = \emptyset$ ,  $\Sigma^s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y = 0\}$ ,  $\Sigma^e = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = 0\}$  e  $T \in \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$  é um ponto de tangência quadrático regular pois  $Xf(T) = 0$  e  $X^2f(T) = 2 \neq 0$ . Em ambos os lados do  $T$ , a órbita é dada pelo campo vetorial deslizante  $Z^s(x, 0) = \left(\frac{x}{3x}, 0\right)^T$  e para  $T$  temos que  $\varphi_Z(t, T) = \varphi_{Z^s}(t, T)$ .

Nos próximos exemplos, ilustraremos algumas tangências que são singularidades distinguidas, isto é, suas órbitas são somente as próprias singularidades.

**Exemplo 2.1.5.** Consideremos  $T = (0, 0) \in \Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = y = 0\}$  e o campo

$$Z_5 = \begin{cases} X_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2x \end{pmatrix} & \text{se } y > 0 \\ Y_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -x \end{pmatrix} & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

Para todo  $p = (x, 0) \in \Sigma$ ,  $Xf(p) \cdot Yf(p) = 2x^2 \geq 0$ . Logo  $\Sigma^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y = 0\}$ ,  $\Sigma^s = \Sigma^e = \emptyset$ . O ponto  $T = (0, 0) \in \partial\Sigma^c$  é um ponto de tangência singular e as

trajetórias espiralam em torno a ele como acontece em um foco para sistemas dinâmicos contínuos.

**Exemplo 2.1.6.** Seja  $T = (0, 0) \in \Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = y = 0\}$  e o campo

$$Z_6^\pm = \begin{cases} X_6^\pm = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ x \end{pmatrix} & \text{se } y > 0 \\ Y_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

Neste caso, para todo  $p = (x, 0) \in \Sigma$  temos  $Xf(p) = x$  e  $Yf(p) = 1 > 0$ . Logo  $\Sigma^e = \emptyset$ ,  $\Sigma^s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y = 0\}$  e  $\Sigma^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = 0\}$ . Em  $Z_6^\pm$ ,  $T = (0, 0) \in \partial\Sigma^s \cap \partial\Sigma^c$  e para pontos  $p \in \Sigma$  à esquerda de  $T$ , suas órbitas são dadas por  $Z^s$ , enquanto para pontos à direita de  $T$ , as órbitas são dadas pelas órbitas de chegada e partida do ponto, que são trajetórias de  $X$  e  $Y$ , pois este ponto pertence à  $\Sigma^c$ . Portanto, a definição de órbita em ambos os lados de  $T$  não coincidem, o que implica que  $T$  é uma tangência singular para ambos os campos  $Z_6^+$  e  $Z_6^-$ .

**Exemplo 2.1.7.** Tomemos  $T = (0, 0) \in \Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = y = 0\}$  e o campo

$$Z_7 = \begin{cases} X_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} & \text{se } y > 0 \\ Y_7 = \begin{pmatrix} -1 \\ x \end{pmatrix} & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

$T$  é um ponto de tangência quadrática visível para  $X$  e  $Y$  pois  $Xf(T) = Yf(T) = 0$  e  $X^2f(T) = Y^2f(T) = 1$ . Assim, teremos um par de órbitas para as quais  $T = (0, 0)$  é um ponto de chegada e outro par para o qual é um ponto de partida.

## 2.2 Curvas invariantes estáveis e instáveis

Nesta seção, generalizamos os conceitos de curvas invariantes estáveis e instáveis para os Sistemas Planares de Filippov.

**Definição 2.2.1.** Uma curva instável é:

- Uma órbita regular instável  $W^u(p)$  para um ponto sela  $p \in \overline{\Sigma^+}$  em  $X$  ou  $p \in \overline{\Sigma^-}$  em

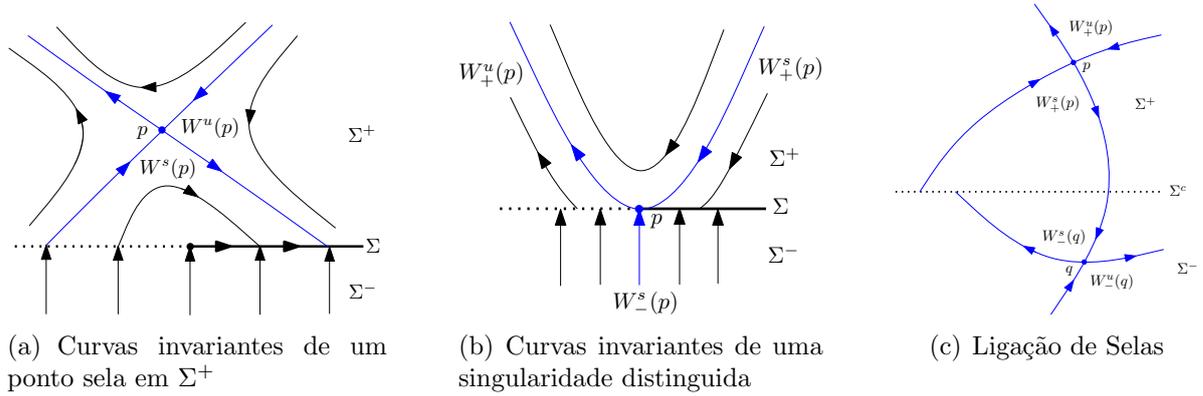


Figura 2.8: Exemplo de Curvas invariantes em Sistemas  $Z = (X, Y)$ .

Y onde,

$$W^u(p) = \left\{ q \in U : \varphi_Z(t, q) \text{ definido por } t \in (-\infty, 0) \text{ e } \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_Z(t, q) = p \right\}.$$

- Uma órbita regular que tem uma singularidade distinguida  $p \in \Sigma$  como um ponto de partida. Denotamos  $W_{\pm}^u(p)$ , onde  $\pm$  significa que a órbita está contida em  $\Sigma^{\pm}$ .

As curvas estáveis  $W^s(p)$  e  $W_{\pm}^s(p)$  são definidas analogamente. Se uma curva invariante é, simultaneamente, estável e instável chamamos de *ligação de selas* como observamos na Figura 2.8 (c).

Observemos que no primeiro caso, a trajetória sobre a curva tende a  $p$  quando  $t \rightarrow -\infty$ , enquanto que no segundo caso, ela pode alcançar a singularidade num tempo finito.

Observamos que num pseudo-nó  $p \in \Sigma^s$  possui curvas invariantes que são dadas pelas duas órbitas regulares em  $\Sigma^+$  e  $\Sigma^-$  que possuem  $p$  como ponto de chegada ou partida. Recordemos que os pontos nestas curvas alcançam o pseudo-nó em um tempo finito.

## 2.3 Órbitas periódicas e ciclos

Em relação à generalização do conceito de órbita periódica em Sistemas de Filippov temos que lidar com diferentes casos. O primeiro caso:

**Definição 2.3.1.** Uma órbita  $\gamma = \{\varphi_Z(t, p) : t \in \mathbb{R}\}$ , que pertence a  $\Sigma^+ \cup \Sigma^- \cup \overline{\Sigma^c}$  é periódica se satisfaz  $\varphi_Z(t + T, p) = \varphi_Z(t, p)$  para algum  $T > 0$ .

As órbitas periódicas são chamadas *órbitas periódicas padrão* se elas estão em  $\Sigma^+ \cup \Sigma^-$  e *órbitas periódicas de costura* se elas interceptam  $\overline{\Sigma^c}$ .

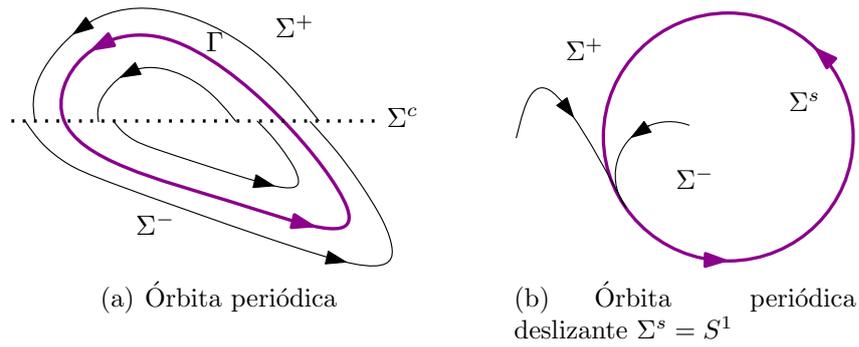


Figura 2.9: Exemplo de uma órbita periódica e uma órbita periódica deslizante.

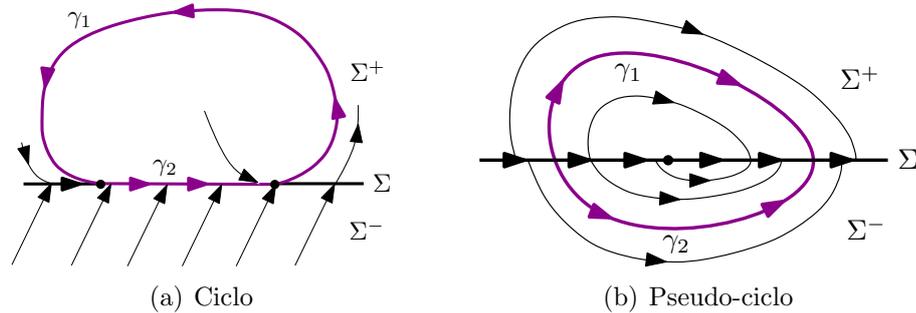


Figura 2.10: Exemplos de um ciclo e um pseudo-ciclo

Quando  $\Sigma = \Sigma^s$  ou  $\Sigma = \Sigma^e$ , então  $\Sigma$  pode ser considerada como uma *órbita periódica deslizante* e não possui pontos críticos. Este caso não aparecerá neste trabalho pois estudamos Sistemas Planares de Filippov onde  $\Sigma$  é sempre homeomorfo a um segmento aberto.

Por outro lado, observamos que não pode existir uma órbita periódica que seja uma combinação de um movimento regular e deslizante, já que isto envolve, ao mesmo tempo, pontos em  $\Sigma^+ \cup \Sigma^-$  e pontos em  $\Sigma^s \cup \Sigma^e$  e uma órbita não pode interceptar ambos conjuntos. Portanto, vamos definir *ciclos* para lidar com movimentos periódicos que envolvam ao mesmo tempo movimentos deslizantes e regulares.

**Definição 2.3.2.** Um ciclo é o fecho de um conjunto finito de pedaços de órbitas,  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  tal que  $\gamma_{2k}$  é um pedaço de órbita deslizante e  $\gamma_{2k+1}$  uma órbita regular e os pontos de chegada e partida de  $\gamma_{2k+1}$  pertencem a  $\overline{\gamma_{2k}}$  e  $\overline{\gamma_{2k+2}}$  respectivamente. Definimos o período do ciclo como sendo a soma dos tempos que são gastos em cada parte da trajetória  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Observamos na Figura 2.10 (a) um ciclo para  $n = 2$ .

Além dos ciclos e órbitas periódicas, existe um outro objeto geométrico distinguido que é importante quando estudamos equivalências topológicas e bifurcações em Sistemas Planares de Filippov.

**Definição 2.3.3.** Um pseudo-ciclo é o fecho de um conjunto de órbitas regulares  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$

tal que uma das extremidades de qualquer  $\gamma_i$  coincide com uma extremidade de  $\gamma_{i-1}$  e a outra, com uma extremidade de  $\gamma_{i+1}$ , e também entre  $\gamma_i$  e  $\gamma_n$ , formando uma curva homeomorfa a  $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , de modo que, em algum ponto, dois pontos de chegada ou partida coincidem. Observamos na Figura 2.10 (b) um pseudo-ciclo para  $n = 2$ .

Por último, podemos definir os ciclos de canard para os Sistemas Planares de Filippov.

**Definição 2.3.4.** Consideremos  $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^r$

(i) Uma curva  $\Gamma$  é um ciclo de canard se  $\Gamma$  é fechada e

- $\Gamma$  contém arcos de, pelo menos, dois dos campos vetoriais  $X$ ,  $Y$  e  $Z^s$  ou é composto por um único arco de  $Z^s$ ;
- A transição entre arcos de  $X$  e arcos de  $Y$  acontece em pontos de costura (e vice-versa);
- A transição entre arcos de  $X$  (ou  $Y$ ) e arcos de  $Z^s$  acontece através dos pontos tangentes quadráticos, ou pontos regulares no segmento deslizante ou de costura, respeitando a orientação. Além disso, se  $\Gamma \neq \Sigma$  então existe pelo menos um ponto dobra-regular visível em cada componente conexa de  $\Gamma \cap \Sigma$ .

(ii) Seja  $\Gamma$  um ciclo de canard em  $Z = (X, Y)$ . Dizemos que

- $\Gamma$  é um ciclo de canard de tipo I se  $\Gamma$  intercepta  $\Sigma$  apenas em pontos de costura;
- $\Gamma$  é um ciclo de canard de tipo II se  $\Gamma = \Sigma$ ;
- $\Gamma$  é um ciclo de canard de tipo III se  $\Gamma$  contém pelo menos um ponto dobra-regular visível em  $Z$ .

Nas Figuras 2.9(a), 2.9(b) e 2.10(a) observamos os ciclos de canard de tipo I, II e III, respectivamente.

(iii) Seja  $\Gamma$  um ciclo de canard em  $Z = (X, Y)$ . Dizemos que  $\Gamma$  é hiperbólico se

- $\Gamma$  é de tipo I ou;
- $\Gamma$  é de tipo II ou;
- $\Gamma$  é de tipo III e  $\Gamma \cap \Sigma \subseteq \Sigma^c \cup \Sigma^e$  ou  $\Gamma \cap \Sigma \subseteq \Sigma^c \cup \Sigma^s$ .

**Definição 2.3.5.** Seja  $(\overrightarrow{AB})_X$  um arco em  $X$  unindo um ponto dobra-regular visível  $A$  ao ponto  $B = X \cap \Sigma$ . Dizemos que  $(\overrightarrow{AB})_X$  é tipo focal, se não tem pontos dobra-regular entre  $A$  e  $B$  como observamos na Figura 2.11 (a), e  $(\overrightarrow{AB})_X$  é tipo gráfico, como na Figura 2.11 (b), se ele tem apenas um ponto dobra-regular entre  $A$  e  $B$ . Analogamente podemos definir os arcos em  $Z = (X, Y)$  para  $(\overrightarrow{AB})_Y$ .

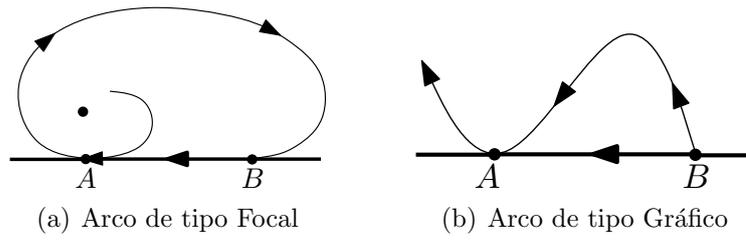


Figura 2.11: Exemplos de Arcos em  $Z = (X, Y)$ .

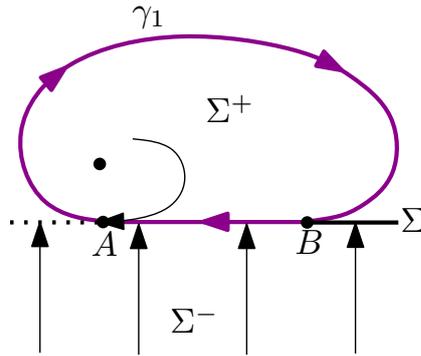


Figura 2.12: Ciclo Canard com apenas um ponto tangente quadrático.

Usando a notação anterior, nosso resultado é o seguinte:

**Teorema 2.3.1.** *Seja  $Z = (X, Y) \in \mathbb{Z}^r$  um Sistema Planar de Filippov com um único ponto dobra-regular visível  $A$ . Seja  $\gamma_1$  o arco em  $X$ , ou  $Y$ , que passa através de  $A$  e  $B$  ponto transversal de  $\gamma_1$  com  $\Sigma$ . Então,  $Z$  tem um ciclo de canard  $\Gamma$  do tipo III se, e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:*

- (i) *A componente  $\gamma_1$  de  $\Gamma$  que passa através de  $A$  é um arco de tipo focal;*
- (ii)  *$Xf(p) \cdot Yf(p) < 0$  para todo  $p \in (A, B)$ ;*
- (iii)  *$\{X, Y\}$  é um conjunto linearmente independente em  $[A, B]$ .*

*Demonstração.* Em primeiro lugar, provaremos que (i), (ii) e (iii) implicam a existência do ciclo de canard. Como  $Xf(p) \cdot Yf(p) < 0$  para todo  $p \in (A, B]$  a peça de  $\Sigma$  entre  $A$  e  $B$  é uma região de escape ou uma região deslizante. Além disso, como  $\{X, Y\}$  é um conjunto linearmente independente em  $[A, B]$ , o sistema não tem pseudo-equilíbrios em  $[A, B]$ . Sem perda de generalidade,  $[A, B]$  faz parte da região deslizante como na Figura 2.12. A curva  $\Gamma = \gamma_1 \cup [B, A]$  é um ciclo de canard hiperbólico do tipo III. Observamos que este ciclo canard ocorre em apenas um lado de  $\Sigma$ .

Agora vamos provar que (i), (ii) e (iii) são condições necessárias para a existência deste tipo particular de ciclo de canard. Como  $\Gamma$  é um ciclo de canard hiperbólico do tipo III com apenas um ponto tangente quadrático,  $\Gamma$  ocorre em apenas um lado de  $\Sigma$ . De fato, se

não ocorre, então  $\Gamma$  retorna a  $\Sigma$  pelo menos duas vezes e por isso não existe um segundo ponto tangente quadrático. Sem perda de generalidade podemos supor que no lado de  $\Gamma$  é correspondente a  $X$ . Denotamos por  $\gamma_1$  a parte do ciclo  $\Gamma$  que é uma trajetória de  $X$ . Assim, temos que  $\gamma_1$  é um arco tipo focal porque se é um arco tipo gráfico, então não existe outro ponto tangente quadrático em  $(A, B)$  como se mostra na Figura 2.12. Como  $\Gamma$  não tem um arco de  $Y$  o ponto  $B$  pertence a uma região de escape ou a uma região de deslizamento e assim  $Xf(B) \cdot Yf(B) < 0$ . Vamos supor que  $B \in \Sigma^s$ . Como  $B \in \gamma_1$ , o fluxo se desliza em  $\Sigma^s$  até o ponto  $A$  porque não existe outro ponto tangente quadrático entre  $A$  e  $B$ . Portanto  $Xf(p) \cdot Yf(p) > 0$  para todo  $p \in (A, B]$ . Além disso, a independência linear de  $\{X, Y\}$  em  $[A, B]$  decorre da não-existência de pseudo-equilíbrios em  $[A, B]$ .  $\square$

## 2.4 Equivalência Topológica

Nesta seção são apresentados dois conceitos diferentes de equivalência topológica nos campos vetoriais  $\mathcal{Z}^r = \{Z = (X, Y) : X, Y \text{ são campos vetoriais de classe } C^r, r > 1, \}$ . Estas definições conduzirão ao estudo dos comportamentos genéricos locais de bifurcações de codimensão um.

O primeiro desses conceitos é o que chamamos  $\Sigma$ -equivalência.

**Definição 2.4.1.** *Dois sistemas de Filippov  $Z$  e  $\tilde{Z}$  em  $\mathcal{Z}^r$  definidos em conjuntos abertos  $U$  e  $\tilde{U}$  e com curvas de descontinuidade  $\Sigma \subset U$  e  $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{U}$ , respectivamente, são  $\Sigma$ -equivalentes se existe um homeomorfismo  $h : U \rightarrow \tilde{U}$  que preserva orientação,  $h(\Sigma) = \tilde{\Sigma}$  e leva órbitas de  $Z$  em órbitas de  $\tilde{Z}$ .*

Podemos observar que qualquer  $\Sigma$ -equivalência envia órbitas regulares em órbitas regulares e singularidades distinguidas em singularidades distinguidas. Ainda mais, leva pontos de chegada em pontos de chegada e pontos de partida em pontos de partida, além disso, como  $\overline{\Sigma^c}$ ,  $\overline{\Sigma^s}$  e  $\overline{\Sigma^e}$  são preservadas, a equivalência leva órbitas deslizantes em órbitas deslizantes, preserva separatrizes, curvas invariantes, ligações de selas, órbitas periódicas, ciclos e pseudo-ciclos.

**Definição 2.4.2.** *Dois sistemas de Filippov  $Z$  e  $\tilde{Z}$  de  $\mathcal{Z}^r$  definidos em conjuntos abertos  $U$  e  $\tilde{U}$  e com curvas de descontinuidade  $\Sigma \subset U$  e  $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{U}$ , respectivamente, são topologicamente equivalentes se existe um homeomorfismo  $h : U \rightarrow \tilde{U}$  que preserva orientação e que leva órbitas de  $Z$  em órbitas de  $\tilde{Z}$ .*

Observamos que, se dois campos vetoriais são  $\Sigma$ -equivalentes, eles também são topologicamente equivalentes. Analogamente às  $\Sigma$ -equivalências, equivalências topológicas preser-

vam  $\overline{\Sigma^s}$  e  $\overline{\Sigma^e}$ . Em consequência, também preservam  $\Sigma^+ \cup \Sigma^- \cup \overline{\Sigma^c}$  e portanto, levam órbitas regulares em órbitas regulares, órbitas deslizantes em órbitas deslizantes e singularidades distinguidas em singularidades distinguidas. Ainda mais, também preservam curvas invariantes, ligações de selas, órbitas periódicas, ciclos e pseudo-ciclos.

Dois campos de vetores sem descontinuidades  $X$  e  $\tilde{X}$  com fluxos  $\varphi_X(t, p)$  e  $\varphi_{\tilde{X}}(t, \tilde{p})$  são  $C^r$  conjugados se existe um homeomorfismo  $h$  de classe  $C^r$ ,  $r > 1$ , que leva órbitas de  $X$  em órbitas de  $\tilde{X}$ .

Simbolicamente,

$$\begin{array}{ccc} p & \longrightarrow & \varphi_X(t, p) \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \tilde{p} & \longrightarrow & \varphi_{\tilde{X}}(t, \tilde{p}) = \varphi_{\tilde{X}}(t, h(p)). \end{array}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}h(\varphi_X(t, p))|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\varphi_{\tilde{X}}(t, h(p))|_{t=0} \\ Dh(\varphi_X(t, p))\frac{d}{dt}\varphi_X(t, p)|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\varphi_{\tilde{X}}(t, h(p))|_{t=0} \end{aligned}$$

$$Dh(p)X(p) = \tilde{X}(h(p)),$$

onde  $Dh$  é a diferencial de  $h$  e como  $h(p) = \tilde{p}$  temos

$$\tilde{X}(\tilde{p}) = Dh(h^{-1}(\tilde{p}))X(h^{-1}(\tilde{p})).$$

e vemos que  $h$  é somente uma mudança de coordenadas.

Chamamos  $(h_*X)(\tilde{p}) = Dh(h^{-1}(\tilde{p}))X(h^{-1}(\tilde{p}))$ .

**Proposição 2.4.1.** *Seja  $h : U \rightarrow \tilde{U}$  um difeomorfismo que conjuga simultaneamente por um lado  $X$  em  $\Sigma^+ \subset U$  e  $\tilde{X}$  em  $\tilde{\Sigma}^+ \subset \tilde{U}$  e, por outro lado,  $Y$  em  $\Sigma^- \subset U$  e  $\tilde{Y}$  em  $\tilde{\Sigma}^- \subset \tilde{U}$ . Então ele também conjuga os campos vetoriais deslizantes  $Z^s$  e  $\tilde{Z}^s$  e portanto é uma equivalência topológica entre  $Z = (X, Y)$  e  $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{f})$ .*

*Demonstração.* Dado que  $h \in C^r$ , temos  $(h_*X)(\tilde{p}) = \tilde{X}(\tilde{p})$  para todo  $\tilde{p} \in \Sigma^+$  e  $(h_*Y)(\tilde{p}) = \tilde{Y}(\tilde{p})$  para todo  $\tilde{p} \in \Sigma^-$ . Por outro lado, como  $h$  é uma bijeção, temos que  $h(\Sigma) = \tilde{\Sigma}$  pois  $h$  mapeia  $\Sigma^\pm$  e  $\tilde{\Sigma}^\pm$ , respectivamente. Além disso,  $\Sigma = \{p \in U : f(p) = 0\}$  então

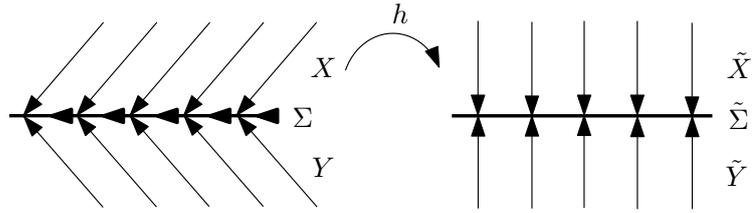


Figura 2.13: Retrato de estados do Contra - Exemplo.

$$\tilde{\Sigma} = \{\tilde{p} \in \tilde{U} : \tilde{f}(\tilde{p}) = f(h^{-1}(\tilde{p})) = 0\} \text{ e}$$

$$\begin{aligned} (h_*(Xf))(\tilde{p}) &= h_*(X(\tilde{p}) \cdot \text{grad}f(\tilde{p})) \\ &= Dh(h^{-1}(\tilde{p}))(X(h^{-1}(\tilde{p})) \cdot \text{grad}f(h^{-1}(\tilde{p}))) \\ &= (Dh(h^{-1}(\tilde{p}))X(h^{-1}(\tilde{p}))) \cdot \text{grad}f(h^{-1}(\tilde{p})) \\ &= \tilde{X}(\tilde{p}) \cdot \text{grad}\tilde{f}(\tilde{p}) \\ &= \tilde{X}\tilde{f}(\tilde{p}) \end{aligned}$$

onde  $h(p) = \tilde{p}$ , e assim para todo  $\tilde{p} \in \Sigma$  temos,

$$(h_*Z^s)(\tilde{p}) = \tilde{Z}^s(\tilde{p})$$

e portanto  $h$  leva órbitas de  $Z^s$  em órbitas de  $\tilde{Z}^s$ . □

Se retirarmos a hipótese de diferenciabilidade da Proposição 2.4.1 considerando  $h$  somente um homeomorfismo, esta proposição não é verdadeira. Como um contra-exemplo, consideremos os seguintes campos vetoriais em um conjunto aberto  $U$  da origem e tomando como curva de descontinuidade  $\Sigma = \{(x, y) \in U : y = 0\}$ :

$$Z(x, y) = \begin{cases} X = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{se } y > 0 \\ Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{se } y < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \tilde{Z}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{se } y > 0 \\ \tilde{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

Neste caso,  $\Sigma = \Sigma^s = \tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}^s$  e o homeomorfismo

$$h(x, y) = \begin{cases} (x - y, y) & \text{se } y > 0 \\ (x, y) & \text{se } y = 0 \\ (x + y, y) & \text{se } y < 0, \end{cases}$$

é  $C^0$  e não  $C^1$ . Por outro lado, como

$$\begin{aligned}\varphi_X(t, (x, y)) &= (-t + x, -t + y) \\ \varphi_{\tilde{X}}(t, (x, y)) &= (x, -t + y)\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}h(\varphi_X(t, (x, y))) &= h(-t + x, -t + y) = (x - y, -t + y) = \varphi_{\tilde{X}}(t, (x - y, y)) \\ &= \varphi_X(t, h(x, y)).\end{aligned}$$

Analogamente  $h(\varphi_Y(t, (x, y))) = \varphi_{\tilde{Y}}(t, h(x, y))$ , mas não é uma equivalência topológica entre  $Z^s$  e  $\tilde{Z}^s$  pois os campos vetoriais deslizantes são dados por  $\tilde{Z}^s(x, 0) = (-1, 0)^T$  e  $Z^s(x, 0) = (0, 0)^T$ , não podendo ser portanto, topologicamente equivalentes.

Logo podemos observar que dois Sistemas Planares de Filippov topologicamente equivalente não sempre é  $\Sigma$ -equivalentes para  $h$  um homeomorfismo.

## 2.5 Comportamento Local

Nesta seção, estudamos o comportamento local do Sistema Planar de Filippov. Em cada caso, mostramos a forma normal local de classe  $C^0$  e construímos o homeomorfismo que dá a  $\Sigma$ -equivalência.

### 2.5.1 Comportamento em Pontos Regulares

Consideremos pontos regulares, isto é, os pontos que não são singularidades, que pertencem a órbitas regulares ou região de deslize. É claro que em torno de um ponto regular que não está em  $\Sigma$  podemos aplicar o Teorema do Fluxo Tubular. Assim estudaremos somente os pontos regulares pertencentes à curva de descontinuidade.

Dados dois campos vetoriais  $X$  e  $Y$  de classe  $C^r$ ,  $r > 1$ , denotamos por  $X(p) \parallel Y(p)$  o fato de  $X$  e  $Y$  serem paralelos em  $p$  e  $X(p) \nparallel Y(p)$  o fato de  $X$  e  $Y$  não serem paralelos em  $p$ .

**Proposição 2.5.1.** *Dado um campo vetorial de Filippov  $Z = (X, Y)$  com curva de descontinuidade  $\Sigma$  e  $(0, 0) \in \Sigma$ , então:*

1. *Se  $(0, 0) \in \Sigma^c$ , então em uma vizinhança  $U$  tal que  $(0, 0) \in U$ ,  $Z$  é  $\Sigma$ -equivalente a*

forma normal

$$\tilde{Z}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} & \text{se } y > 0 \\ \tilde{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

em uma vizinhança  $\tilde{U}$  tal que  $(0, 0) \in \tilde{U}$ , onde  $\alpha = \text{sgn}(Xf(0, 0))$ .

2. Se  $(0, 0) \in \Sigma^s$  e satisfaz  $X(0, 0) \nparallel Y(0, 0)$ , então em uma vizinhança  $U$  tal que  $(0, 0) \in U$ ,  $Z$  é  $\Sigma$ -equivalente à forma normal

$$\tilde{Z}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix} & \text{se } y > 0 \\ \tilde{Y} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

em uma vizinhança  $\tilde{U}$  tal que  $(0, 0) \in \tilde{U}$ , onde  $\alpha = \text{sgn}(Z^s(0, 0))$ .

3. Se  $(0, 0) \in \Sigma^e$  e satisfaz  $X(0, 0) \nparallel Y(0, 0)$ , então em uma vizinhança  $U$  tal que  $(0, 0) \in U$ ,  $Z$  é  $\Sigma$ -equivalente à forma normal

$$\tilde{Z}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} & \text{se } y > 0 \\ \tilde{Y} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix} & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

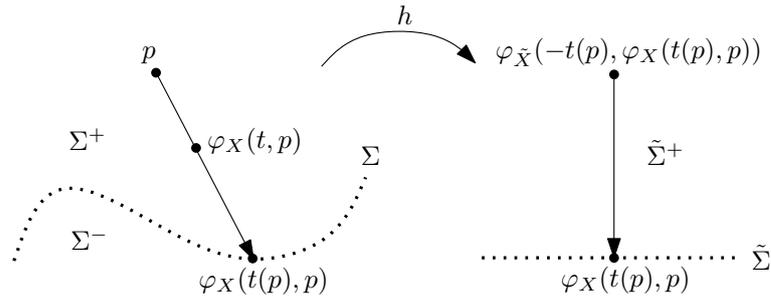
em uma vizinhança  $\tilde{U}$  tal que  $(0, 0) \in \tilde{U}$ , onde  $\alpha = \text{sgn}(Z^s(0, 0))$ .

*Demonstração.* No primeiro caso, como  $(0, 0) \in \Sigma^c$  e  $(0, 0) \in \tilde{\Sigma}^c$ , os fluxos  $\varphi_X$ ,  $\varphi_Y$ ,  $\varphi_{\tilde{X}}$  e  $\varphi_{\tilde{Y}}$  são transversais a  $\Sigma \cap U$  e  $\tilde{\Sigma} \cap \tilde{U}$  respectivamente, isto é,  $Xf((0, 0))$ ,  $Yf((0, 0))$ ,  $\tilde{X}\tilde{f}((0, 0))$  e  $\tilde{Y}\tilde{f}((0, 0))$  são diferentes de zero.

Por outro lado, seja  $F : (\Sigma^+ \cup \Sigma) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $F(x, y, t) = f(\varphi_X(t, (x, y)))$ .

Logo temos

$$F(0, 0, 0) = f(\varphi_X(0, (0, 0))) = f(0, 0) = 0.$$

Figura 2.14: Construção de  $h$ .

Além disso,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial t}(0, 0, 0) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} f(\varphi_X(t, (x, y))) \right|_{(x, y, t) = (0, 0, 0)} \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_X(0, (0, 0))) \frac{\partial x}{\partial t}(0, 0, 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_X(0, (0, 0))) \frac{\partial y}{\partial t}(0, 0, 0) \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \frac{\partial x}{\partial t}(0, 0, 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \frac{\partial y}{\partial t}(0, 0, 0) \neq 0
 \end{aligned}$$

uma vez que  $Xf(p) = X(p) \cdot \text{grad}f(p) \neq 0$ , ou seja,  $X(p) \neq 0$  e  $\text{grad}f(p) \neq 0$ . Pelo Teorema da Função Implícita, existe uma vizinhança  $V \subset U$ , com centro em  $(0, 0)$ , tal que para qualquer ponto  $p = (x, y) \in \Sigma^+ \cap V$  existe uma aplicação  $p \rightarrow t(p) \in \mathbb{R}$  contínua tal que  $t(0, 0) = 0$  e  $F(x, y, t(p)) = f(\varphi_X(t(p), p)) = 0$ , isto é,  $\varphi_X(t(p), p) \in \Sigma$ . Analogamente tem-se para  $\Sigma^- \cap V$  e  $\varphi_Y$ . Deste modo, construímos a  $\Sigma$ -equivalência, como observamos na Figura 2.14, da seguinte forma:

$$h(p) = \begin{cases} \varphi_{\tilde{X}}(-t(p), \varphi_X(t(p), p)) & \text{se } p \in \Sigma^+ \cap U \\ p & \text{se } p \in \Sigma \cap U \\ \varphi_{\tilde{Y}}(-t(p), \varphi_Y(t(p), p)) & \text{se } p \in \Sigma^- \cap U. \end{cases}$$

onde  $h : U \rightarrow \tilde{U}$  é classe  $C^0$  pois todas as aplicações  $\varphi_X$ ,  $\varphi_Y$ ,  $\varphi_{\tilde{X}}$ ,  $\varphi_{\tilde{Y}}$  e  $t$  são contínuas e coincidem em  $\Sigma$ . Por outro lado, se  $p \in \Sigma^+ \cap U$  então  $t(p) = t + t(\varphi_X(t, p)) \in \Sigma$  para todo  $t \in I(p, X)$ , logo:

$$\begin{aligned}
 h(\varphi_X(t, p)) &= \varphi_{\tilde{X}}(-t(\varphi_X(t, p)), \varphi_X(t(\varphi_X(t, p)), \varphi_X(t, p))) \\
 &= \varphi_{\tilde{X}}(t - t(p), \varphi_X(t(p) - t, \varphi_X(t, p))) \\
 &= \varphi_{\tilde{X}}(t - t(p), \varphi_X(t(p), p)) \\
 &= \varphi_{\tilde{X}}(t, \varphi_{\tilde{X}}(-t(p), \varphi_X(t(p), p))) \\
 &= \varphi_{\tilde{X}}(t, h(p)).
 \end{aligned}$$

Analogamente  $h(\varphi_Y(t, p)) = \varphi_{\tilde{Y}}(t, h(p))$ . Logo temos  $h(\varphi_Z(t, p)) = \varphi_{\tilde{Z}}(t, h(p))$ .

Além disso, por construção de  $h$ , temos que se  $\varphi_{\tilde{X}}(t(p), p) \in \tilde{\Sigma}$  então  $\varphi_{\tilde{X}}(t(p), p) \in \Sigma$ , logo  $h^{-1}$  é dada por:

$$h^{-1}(\tilde{p}) = \begin{cases} \varphi_X(-t(\tilde{p}), \varphi_{\tilde{X}}(t(\tilde{p}), \tilde{p})) & \text{se } \tilde{p} \in \tilde{\Sigma}^+ \cap \tilde{U}, \\ \tilde{p} & \text{se } \tilde{p} \in \tilde{\Sigma} \cap \tilde{U}, \\ \varphi_Y(-t(\tilde{p}), \varphi_{\tilde{Y}}(t(\tilde{p}), \tilde{p})) & \text{se } \tilde{p} \in \tilde{\Sigma}^- \cap \tilde{U}, \end{cases}$$

onde é contínua e  $h^{-1}(\varphi_{\tilde{Z}}(t, \tilde{p})) = \varphi_Z(t, h^{-1}(\tilde{p}))$  pelo mesmo argumento anterior. Se  $\tilde{p} \in \tilde{\Sigma}^+ \cap \tilde{U}$  temos:

$$\begin{aligned} h(h^{-1}(\tilde{p})) &= h(\varphi_X(-t(\tilde{p}), \varphi_{\tilde{X}}(t(\tilde{p}), \tilde{p}))) \\ &= \varphi_X(-t(\tilde{p}), h(\varphi_{\tilde{X}}(t(\tilde{p}), \tilde{p}))) \\ &= \varphi_X(-t(\tilde{p}), \varphi_{\tilde{X}}(t(\tilde{p}), \tilde{p})) \\ &= \varphi_X(-t(\tilde{p}) + t(\tilde{p}), \tilde{p}) = \tilde{p} \end{aligned}$$

Analogamente temos  $h(h^{-1}(\tilde{p})) = \tilde{p}$  para  $\tilde{p} \in \tilde{\Sigma} \cap \tilde{U}$  ou  $\tilde{p} \in \tilde{\Sigma}^- \cap \tilde{U}$ . Logo concluímos  $h(h^{-1}(\tilde{p})) = \tilde{p}$  para todo  $\tilde{p} \in \tilde{U}$  e  $h^{-1}(h(p)) = p$  para todo  $p \in U$ , assim  $h^{-1}$  é a inversa de  $h$  e  $h$  é homeomorfismo preservando  $\Sigma$ , onde neste caso  $\Sigma = \Sigma^c$  na vizinhanças da origem.

No segundo caso, para construir o homeomorfismo, começamos com os pontos em  $\Sigma$ . Como  $(0, 0) \in \Sigma^s$ , temos que os campos são transversais a  $\Sigma$  e  $\tilde{\Sigma}$  em uma vizinhança da origem. Além disso, como  $X(0, 0) \nparallel Y(0, 0)$  então  $X$  e  $Y$  não são linearmente dependentes e segue-se que a origem é um ponto regular para o campo deslizante, isto é,  $Z^s(0, 0) \neq 0$ . Logo, pelo Teorema do Fluxo Tubular, existe um homeomorfismo  $\tilde{h} : \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$  que conjuga os campos  $Z^s(p)$ ,  $p \in \Sigma$ , e  $\tilde{Z}^s(\tilde{p}) = (\alpha, 0)$  onde  $\tilde{p} \in \tilde{\Sigma}$ .

Para os pontos  $p \notin \Sigma \cap U$ , o homeomorfismo pode ser estendido como no caso anterior, pois para qualquer ponto  $p \in \Sigma^+ \cap U$ , pelo Teorema da Função Implícita, existe uma única função contínua  $t(p) \in \mathbb{R}$  tal que  $\varphi_X(t(p), p) \in \Sigma$ , e analogamente para  $p \in \Sigma^- \cap U$ . Deste modo, o homeomorfismo que pode gerar uma  $\Sigma$ -equivalência é dado por:

$$h(p) = \begin{cases} \varphi_{\tilde{X}}(-t(p), \tilde{h}(\varphi_X(t(p), p))) & \text{se } p \in \Sigma^+ \cap U, \\ \tilde{h}(p) & \text{se } p \in \Sigma \cap U, \\ \varphi_{\tilde{Y}}(-t(p), \tilde{h}(\varphi_Y(t(p), p))) & \text{se } p \in \Sigma^- \cap U, \end{cases}$$

com inversa,

$$h^{-1}(\tilde{p}) = \begin{cases} \varphi_X(-t(\tilde{p}), \tilde{h}^{-1}(\varphi_{\tilde{X}}(t(\tilde{p}), \tilde{p}))) & \text{se } \tilde{p} \in \tilde{\Sigma}^+ \cap \tilde{U}, \\ \tilde{h}^{-1}(\tilde{p}) & \text{se } \tilde{p} \in \tilde{\Sigma} \cap \tilde{U}, \\ \varphi_Y(-t(\tilde{p}), \tilde{h}^{-1}(\varphi_{\tilde{Y}}(t(\tilde{p}), \tilde{p}))) & \text{se } \tilde{p} \in \tilde{\Sigma}^- \cap \tilde{U}, \end{cases}$$

satisfazendo  $h(\varphi_Z(t, p)) = \varphi_{\tilde{Z}}(t, h(p))$  e  $h^{-1}(\varphi_{\tilde{Z}}(t, \tilde{p})) = \varphi_Z(t, h^{-1}(\tilde{p}))$ .

No terceiro caso, como  $(0, 0) \in \Sigma^e$ , temos que os campos são transversais a  $\Sigma$  e  $\tilde{\Sigma}$  em uma vizinhança da origem. Além disso, como  $X(0, 0) \nparallel Y(0, 0)$ , como no caso anterior, temos que a origem é um ponto regular para o campo deslizante, isto é,  $Z^s(0, 0) \neq 0$  e, pelo Teorema do Fluxo Tubular, existe um homeomorfismo  $\tilde{h} : \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$  que conjuga os campos deslizantes de  $Z$  e  $\tilde{Z}$ , onde  $\tilde{Z}^s(\tilde{p}) = (\alpha, 0)$  para  $\tilde{p} \in \tilde{\Sigma}$ .

Por outro lado, para qualquer ponto  $p \in \Sigma^+ \cap U$  segue pelo Teorema da Função Implícita existe uma única função contínua  $t(p) \in \mathbb{R}$  tal que  $\varphi_X(t(p), p) \in \Sigma$ , e analogamente para  $p \in \Sigma^- \cap U$ . Deste modo, o homeomorfismo que pode gerar uma  $\Sigma$ -equivalência é dado por:

$$h(p) = \begin{cases} \varphi_{\tilde{X}}(-t(p), \tilde{h}(\varphi_X(t(p), p))) & \text{se } p \in \Sigma^+ \cap U, \\ \tilde{h}(p) & \text{se } p \in \Sigma \cap U, \\ \varphi_{\tilde{Y}}(-t(p), \tilde{h}(\varphi_Y(t(p), p))) & \text{se } p \in \Sigma^- \cap U. \end{cases} \quad (2.1)$$

e satisfaz  $h(\varphi_Z(t, p)) = \varphi_{\tilde{Z}}(t, h(p))$ . □

## 2.5.2 Comportamento em Singularidades Genéricas

Uma vez que classificamos o comportamento em torno dos pontos regulares de campos vetoriais de Filippov, começaremos a estudar as singularidades genéricas. Os primeiros tipos de singularidades são os pontos críticos hiperbólicos de  $X$  e  $Y$  em  $\Sigma^+$  e  $\Sigma^-$ , respectivamente. É claro que em torno desses pontos podemos aplicar o Teorema de Hartman-Grobman. Deste modo, teremos que lidar somente com as singularidades genéricas em  $\Sigma$ , isto é, aquelas que são:

1. pontos de dobras-regulares ou,
2. pontos críticos hiperbólicos do campo deslizante: pontos  $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$  tal que  $X(p) \parallel Y(p)$ , isto é,  $Z^s(p) = 0$ , e  $(Z^s)'(p) \neq 0$ .

A próxima proposição mostramos as formas normais das singularidades genéricas.

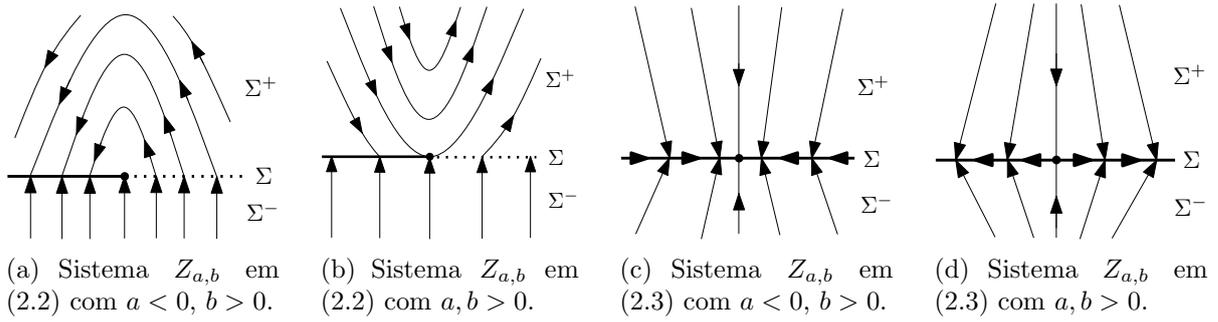


Figura 2.15: Exemplos de Singularidades.

**Proposição 2.5.2.** *Temos as seguintes  $\Sigma$ -equivalências:*

1. Se  $(0,0) \in \Sigma$  é um ponto dobra-regular do campo vetorial  $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^r$  definido em uma vizinhança  $U$  tal que  $(0,0) \in U$ , então  $Z$  é  $\Sigma$ -equivalente em uma vizinhança  $V$  tal que  $(0,0) \in V$  a sua forma normal

$$Z_{a,b} = \begin{cases} X_a = \begin{pmatrix} 1 \\ ax \end{pmatrix} & \text{se } y > 0 \\ Y_b = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} & \text{se } y < 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

onde  $a = \text{sgn}(X^2 f(0,0))$  e  $b = \text{sgn}(Y f(0,0))$ .

2. Se  $(0,0) \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$  é um ponto crítico hiperbólico do campo deslizante  $Z^s$  de  $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^r$  definido em uma vizinhança  $U$  tal que  $(0,0) \in U$ , então  $Z$  é  $\Sigma$ -equivalente em uma vizinhança  $V$  tal que  $(0,0) \in V$  a sua forma normal

$$Z_{a,b} = \begin{cases} X_{a,b} = \begin{pmatrix} ax \\ b \end{pmatrix} & \text{se } y > 0 \\ Y_{a,b} = \begin{pmatrix} ax \\ -b \end{pmatrix} & \text{se } y < 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

onde  $a = \text{sgn}(Z^s)'(0,0)$  e  $b = \text{sgn}(X f(0,0))$ .

*Demonstração.* Temos que construir um homeomorfismo que dá a  $\Sigma$ -equivalência. Para o ponto de dobra-regular  $a > 0$  e  $a < 0$  correspondem a pontos tangenciais de  $X$  que são visíveis ou invisível, respectivamente, e  $b$  é o sentido do fluxo.

Consideremos, sem perda de generalidade, o caso em que  $b = 1$ , restando analisar como

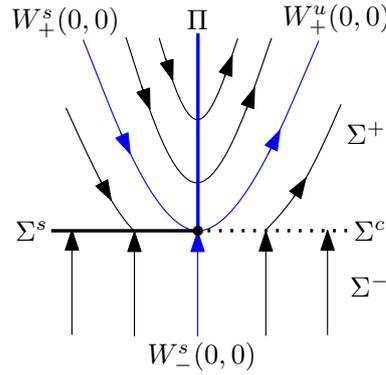


Figura 2.16: Retrato de fase em torno de um ponto de dobra-regular visível com uma seção transversal  $\Pi$ .

será feita a construção do homeomorfismo  $h$  quando  $a > 0$  ou quando  $a < 0$ . Para garantir que as regiões de  $\Sigma$  sejam preservadas, vamos considerar as trajetórias de  $X$  e  $Y$  parametrizadas pelo comprimento de arco.

No caso no ponto de tangência invisível, quando  $a < 0$ , a região de descontinuidade é decomposta como  $\Sigma = \overline{\Sigma^c} \cap \overline{\Sigma^s}$  e portanto temos um campo deslizante  $Z^s$  definido em  $\Sigma^s$ . De este modo, pelo Teorema do Fluxo Tubular, existe um homeomorfismo  $\tilde{h} : \Sigma \rightarrow \Sigma_{a,b}$  que conjuga os campos  $Z^s$  e  $Z_{a,b}^s$ .

Observemos que a região de deslize atua como um atrator global in  $U$ , ou seja, dado  $p \in (\Sigma^s)^c \cap U$ , existe um único  $t(p) \in \mathbb{R}$  tal que  $\varphi_Z(t(p), p)$  pertence a  $\Sigma^s$ . Deste modo, definimos o homeomorfismo  $h$  por:

$$h(p) = \begin{cases} \varphi_{Z_{a,b}}(-t(p), \varphi_X(t(p), p)) & \text{se } p \in (\Sigma^s)^c \cap U \\ \tilde{h}(p), & \text{se } p \in \Sigma^s \cap U, \end{cases} \quad (2.4)$$

onde  $h$  é contínua e satisfaz  $h(\varphi_Z(t, p)) = \varphi_{Z_{a,b}}(t, h(p))$ .

No caso  $a > 0$ , por este procedimento podemos apenas definir a equivalência em uma parte da vizinhança delimitado pelas curvas  $W_+^s(0,0) \cup \{(0,0)\} \cup W_-^s(0,0)$  que não interceptam a curva de descontinuidade  $\Sigma$ , como podemos observar na Figura 2.16.

Para isso, consideramos seções  $\Pi$  e  $\Pi_{a,b}$  transversais em  $(0,0)$  aos campos  $Z$  e  $Z_{a,b}$ , respectivamente. Como essas seções transversais são homeomorfas a  $\mathbb{R}$ , podemos escolher um homeomorfismo  $g : \Sigma \rightarrow \Sigma_{a,b}$  para o qual  $g(0) = 0$ . Vamos supor que  $U = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ , onde  $A$  é a região esquerda da curva  $W_+^s(0,0) \cup \{(0,0)\} \cup W_-^s(0,0)$ ,  $B$  é a região acima das curvas  $W_+^s(0,0) \cup \{(0,0)\} \cup W_+^u(0,0)$  e  $C$  a região á direita da curva  $W_+^u(0,0) \cup \{(0,0)\} \cup W_-^s(0,0)$ .

Observemos que temos o segmento deslizante definido em ambos os campos e podemos tomar uma vizinhança da origem para a qual não tenhamos pontos críticos para  $Z^s$  e  $Z_{a,b}^s$ . Portanto, pelo Teorema do Fluxo Tubular, existe um homeomorfismo  $\tilde{h}$  que conjuga os campos deslizantes.

Na região  $A$ , definamos:

$$h(p) = \begin{cases} \varphi_{X_a}(-t(p), \tilde{h}(\varphi_X(t(p), p))) & \text{se } p \in \Sigma^+ \cap A, \\ \varphi_{Y_b}(-t(p), \tilde{h}(\varphi_Y(t(p), p))) & \text{se } p \in \Sigma^- \cap A. \end{cases} \quad (2.5)$$

Para  $p \in B \cap U$ , existe um único  $t = t(p)$  para o qual

$$h(p) = \varphi_{X_a}(-t(p), g(\varphi_X(t(p), p))) \quad (2.6)$$

Por último, para os pontos da região  $C$ , procedemos como na Proposição 2.5.1 para a construção do homeomorfismo  $h$  que nos dá uma  $\Sigma$ -equivalência entre  $Z$  e  $Z_{a,b}$ , visto que preserva as regiões da curva de descontinuidade.

Para os pontos críticos hiperbólicos do segmento de deslizamento  $Z^s$  consideraremos apenas o caso  $a < 0$  e  $b < 0$ , os outros casos são análogos. Procedemos da seguinte forma. Em primeiro lugar, uma vez que o campo vetorial deslizante  $Z_{a,b}^s(x) = ax$ , temos que  $(Z_{a,b}^s)'(x) = a < 0$  e assim o ponto  $(0,0)$  é um ponto crítico hiperbólico para os campos deslizantes  $Z_{a,b}^s$  e  $Z^s$ . Logo pelo Teorema de Hartmann-Grobman existe um homeomorfismo  $\tilde{h} : \Sigma \rightarrow \Sigma_{a,b}$  definido em uma vizinhança  $(0,0)$  em  $\Sigma$  que conjuga os campos  $Z^s$  e  $Z_{a,b}^s$ .

Como ambos os campos são transversais a  $\Sigma$  definido em uma vizinhança da origem, temos que para todo  $p \in \Sigma^+ \cap U$  e pelo Teorema da Função Implícita existe um único  $t = t(p) \in \mathbb{R}$  para o qual  $\varphi_X(t(p), p) \in \Sigma \cap U$ . Analogamente se tem para  $p \in \Sigma^- \cap U$ .

Deste modo, podemos definir a  $\Sigma$ -equivalência  $h$  como se segue:

$$h(p) = \begin{cases} \varphi_{X_{a,b}}(-t(p), \tilde{h}(\varphi_X(t(p), p))) & \text{se } p \in \Sigma^+ \cap U, \\ \tilde{h}(p) & \text{se } p \in \Sigma \cap U, \\ \varphi_{Y_{a,b}}(-t(p), \tilde{h}(\varphi_Y(t(p), p))) & \text{se } p \in \Sigma^- \cap U. \end{cases} \quad (2.7)$$

onde  $h$  é contínua e satisfaz  $h(\varphi_Z(t, p)) = \varphi_{Z_{a,b}}(t, h(p))$ . □

## 2.6 Bifurcações Locais de Codimensão 1

Consideremos um Sistema Planar de Filippov dependendo de um parâmetro  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ :

$$Z(\alpha, x, y) = \begin{cases} X(\alpha, x, y) & (x, y) \in \Sigma_\alpha^+ \\ Y(\alpha, x, y) & (x, y) \in \Sigma_\alpha^- \end{cases},$$

que denotaremos por  $Z_\alpha = (X_\alpha, Y_\alpha)$  para esclarecer quais são as componentes do campo vetorial. Ainda mais, assumiremos que  $X_\alpha$  e  $Y_\alpha$  são campos vetoriais de classe  $C^r$ ,  $r > 1$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  em um conjunto aberto  $U$  e

$$\Sigma_\alpha^+ = \{(x, y) \in U : f(\alpha, x, y) > 0\} \quad \text{e} \quad \Sigma_\alpha^- = \{(x, y) \in U : f(\alpha, x, y) < 0\},$$

para alguma função contínua  $f(\alpha, x, y)$  com  $\text{grad}f(\alpha, x, y) \neq 0$  para todo  $(\alpha, x, y)$  tal que  $f(\alpha, x, y) = 0$ .

**Definição 2.6.1.** Dizemos que  $Z_\alpha = (X_\alpha, Y_\alpha)$  apresenta uma bifurcação em  $\alpha = \alpha_0$  se para uma perturbação arbitrariamente pequena do parâmetro temos um sistema não  $\Sigma$ -equivalente. Uma bifurcação tem codimensão um se  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Todas as bifurcações do Sistema Planar de Filippov  $Z_\alpha = (X_\alpha, Y_\alpha)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ , podem ser classificadas como *locais* ou *globais*. Uma bifurcação local é aquela que podem ser completamente analisada por mudanças nas propriedades de estabilidade local, por exemplo em singularidades, órbitas ou curvas invariantes.

Todas as outras bifurcações que envolvam ciclos, órbitas periódicas, pseudo-ciclos e ligações de selas ou pseudo-selas são classificadas como bifurcações globais.

Nesta seção descrevemos as bifurcações locais de codimensão um que podem acontecer em Sistemas Planares de Filippov  $Z_\alpha = (X_\alpha, Y_\alpha)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Apresentaremos forma normal em cada caso, isto é, um Sistema Polinomial para  $X_\alpha$  e  $Y_\alpha$  tal que qualquer Sistema Planar de Filippov satisfazendo as condições de bifurcação é localmente topologicamente equivalente a ele e. Não apresentaremos as provas das formas normais para cada bifurcação local, mas elas podem ser encontradas em [9].

Para tal, consideramos os campos  $Z_0 = (X_0, Y_0)$  com  $\Sigma_0 = \{(x, y) : f(0, x, y) = 0\}$  para os quais

- $(0, 0) \in \Sigma_0$  é uma cúspide-regular para  $X$ , isto é,  $Xf(0, 0) = X^2f(0, 0) = 0$ ,  $X^3f(0, 0) \neq 0$  e  $Yf(0, 0) \neq 0$ , ou  $(0, 0)$  é uma cúspide-regular para  $Y$  ou,

- $(0, 0) \in \Sigma_0$  é um ponto de equilíbrio hiperbólico para  $X$  ou  $Y$  ou,
- $(0, 0) \in \Sigma_0$  é um ponto de dobra-dobra, ou seja, é um ponto de dobra para  $X$  e para  $Y$ , mais precisamente,  $Xf(0, 0) = Yf(0, 0) = 0$  é  $X^2f(0, 0) \neq 0 \neq Y^2f(0, 0)$  ou,
- $(0, 0) \in \Sigma_0$  é uma sela-nó para  $Z^s$ , isto é,  $Z^s(0, 0) = (Z^s)'(0, 0) = 0$  e  $(Z^s)''(0, 0) \neq 0$ .

### 2.6.1 Colisões de Equilíbrios com $\Sigma$

Suponhamos que exista um equilíbrio hiperbólico  $Q_\alpha$ , com valores próprios simples, em  $Y_\alpha$  para  $\alpha < 0$  que colide, com uma velocidade diferente de zero, em  $\Sigma_0$  e  $X_\alpha$  é transversal a  $\Sigma_\alpha$  na origem. Desta maneira, sempre temos definido o segmento deslizante, ao passo que  $(0, 0) \in \Sigma_\alpha$  pertence a  $\partial\Sigma_\alpha^c \cap \partial\Sigma_\alpha^e$ ,  $\partial\Sigma_\alpha^c \cap \partial\Sigma_\alpha^s$  ou  $\partial\Sigma_\alpha^s \cap \partial\Sigma_\alpha^e$ . Dado os comportamentos locais indicados na seção 2.5, podemos assumir que  $\Sigma_\alpha$  é localmente uma linha reta e que  $X_\alpha$  é ortogonal a  $\Sigma_\alpha$  em uma vizinhança de  $Q_\alpha$  para valores de  $\alpha$  próximos de zero.

#### Bifurcação Foco - $\Sigma$

Suponhamos que o foco  $Q_\alpha$  é instável quando  $\alpha < 0$  e tem rotação no sentido anti-horário nas proximidades do foco.

Existem cinco casos denotados por  $BF_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . Em todos os casos, existe um ponto de tangência visível para  $\alpha < 0$  e um ponto tangente invisível para  $\alpha > 0$ . Os casos são distinguidos pela posição do foco e o comportamento da órbita partindo do ponto tangente visível em  $\Sigma_\alpha^-$ , bem como pela direção do movimento em  $\Sigma_\alpha^+$ .

Os desdobramentos dessas singularidades são apresentados na Figura 2.17. No casos  $BF_1$ ,  $BF_2$  e  $BF_3$ , temos um segmento deslizante estável para  $\alpha = 0$  que se afasta do equilíbrio ou se aproxima dele. Por outro lado, nos casos  $BF_4$  e  $BF_5$ , a órbita deslizante é instável.

No caso  $BF_1$ , um ciclo estável  $L_\alpha$  envolve o foco instável  $Q_\alpha$  para  $\alpha < 0$ . O segmento deslizante do ciclo termina no ponto tangente visível  $T_\alpha$  e começa num ponto onde a trajetória do foco se encontra em  $\Sigma_\alpha$  transversalmente, localizado entre  $T_\alpha$  e uma pseudo-sela  $P_\alpha$ . O domínio de atração do ciclo é delimitada pelas separatrizes estáveis de  $P_\alpha$ . Quando  $\alpha \rightarrow 0$ , o ciclo estável se encolhe, enquanto os três pontos,  $Q_\alpha$ ,  $T_\alpha$  e  $P_\alpha$  colidem simultaneamente em  $Q_0$ . Por outro lado, para  $\alpha > 0$  com  $\alpha \rightarrow 0$ , não existem pontos de equilíbrio ou ciclos e a órbita deslizante estável começa no ponto de tangência invisível  $T_\alpha$ . Essa bifurcação ilustra o desaparecimento de um ciclo estável.

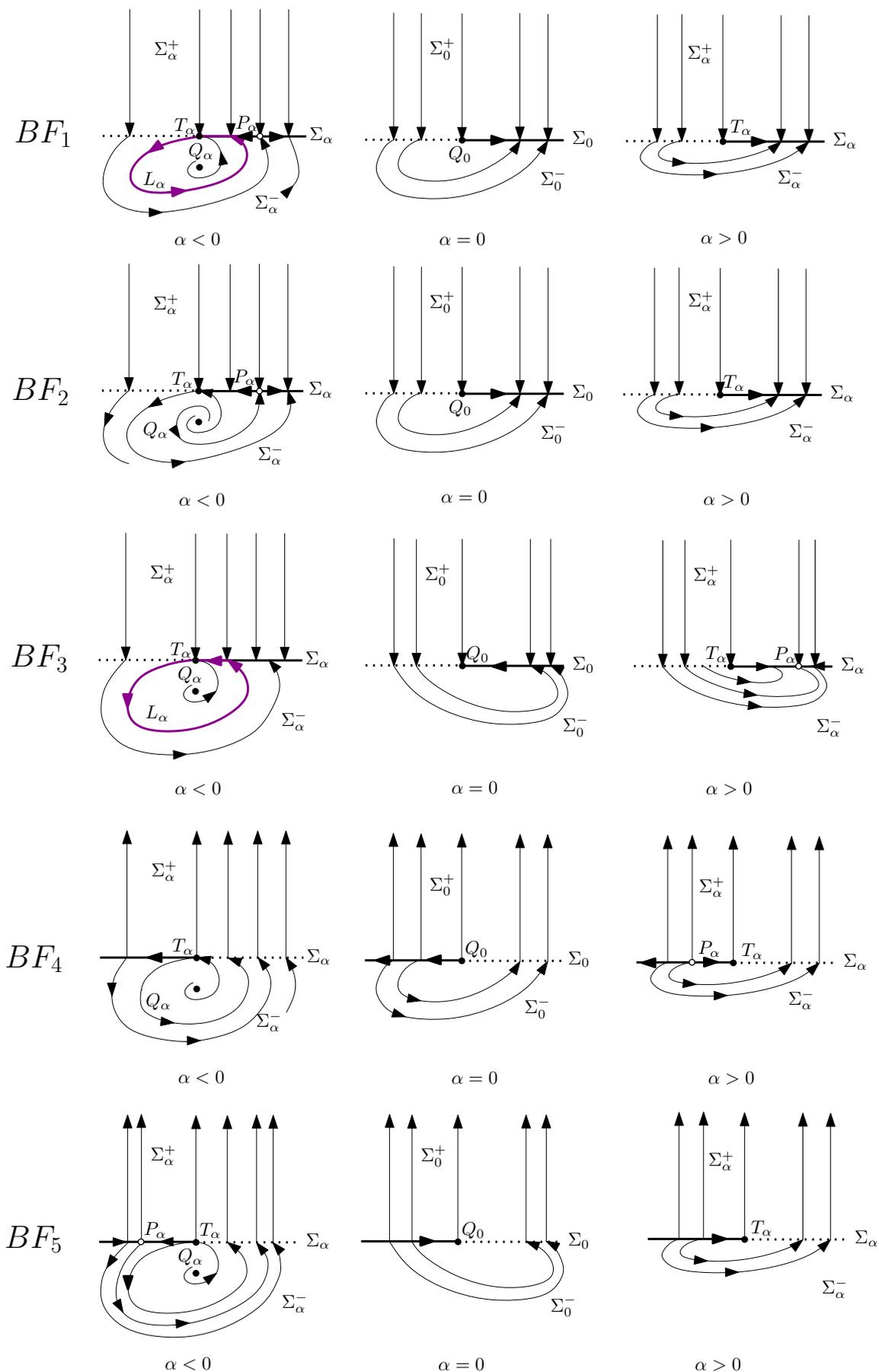


Figura 2.17: Bifurcações Foco -  $\Sigma$ . Nos casos  $BF_1$  e  $BF_3$ , os ciclos existem para  $\alpha < 0$ .

No caso  $BF_2$ , a trajetória saindo a partir do ponto de tangência visível  $T_\alpha$  para  $\alpha < 0$  pequeno, retorna para  $\Sigma_\alpha$  á direita do pseudo-sela  $P_\alpha$ . Assim, não existem ciclo. Os retratos do estado para  $\alpha = 0$  e  $\alpha > 0$  são como no caso  $BF_1$ .

No caso  $BF_3$ , um ciclo estável  $L_\alpha$  passa através do ponto de tangência visível  $T_\alpha$  em torno do foco instável  $Q_\alpha$  para  $\alpha < 0$ . Contrariamente ao caso  $BF_1$ , não tem pseudo-equilíbrio nas proximidades. Quándo  $\alpha \rightarrow 0$ , o ciclo estável se encolhe e o foco  $Q_\alpha$  colide com o ponto tangente  $T_\alpha$ . Para  $\alpha > 0$  pequeno, não existe ciclos e todas as trajetórias próximas tendem a um pseudo-equilíbrio estável  $P_\alpha$  que existe perto do ponto de tangência invisível  $T_\alpha$ . Essa bifurcação implica no desaparecimento catastrófico de um ciclo estável.

No  $BF_4$ , o ponto de tangência visível  $T_\alpha$  presente quando  $\alpha < 0$  pequeno começa em uma órbita deslizante instável. Como o foco é instável, todas as trajetórias deixam uma pequena vizinhança do equilíbrio  $Q_0$ . O mesmo ocorre para  $\alpha > 0$  com a única diferença que existe um pseudo-equilíbrio instável  $P_\alpha$  próximo do ponto de tangência invisível  $T_\alpha$ .

No último caso  $BF_5$ , não existe um nó atrator perto da bifurcação  $Q_0$ , que pode ser visto como a colisão de uma pseudo-sela  $P_\alpha$  com o ponto de tangência visível  $T_\alpha$  e o foco  $Q_\alpha$  quando  $\alpha \rightarrow 0$ . Após a colisão, temos apenas um ponto tangente invisível  $T_\alpha$ .

Para o caso em que  $Q_\alpha$ ,  $\alpha < 0$ , seja um foco estável, o sentido do fluxo na vizinhança de  $Q_\alpha$  tem sentido horário e o fluxo do campo  $X$  tem sentido contrario aos mostrados na Figura 2.17.

A forma normal para  $BF_1$  é dada por

$$Z_\alpha = \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{se } y + \alpha < 0, \\ Y = \begin{pmatrix} x - 2y \\ 4x \end{pmatrix} & \text{se } y + \alpha > 0, \end{cases}$$

para  $BF_2$  por

$$Z_\alpha = \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{se } y + \alpha > 0, \\ Y = \begin{pmatrix} x - 2y \\ 3x \end{pmatrix} & \text{se } y + \alpha < 0, \end{cases}$$

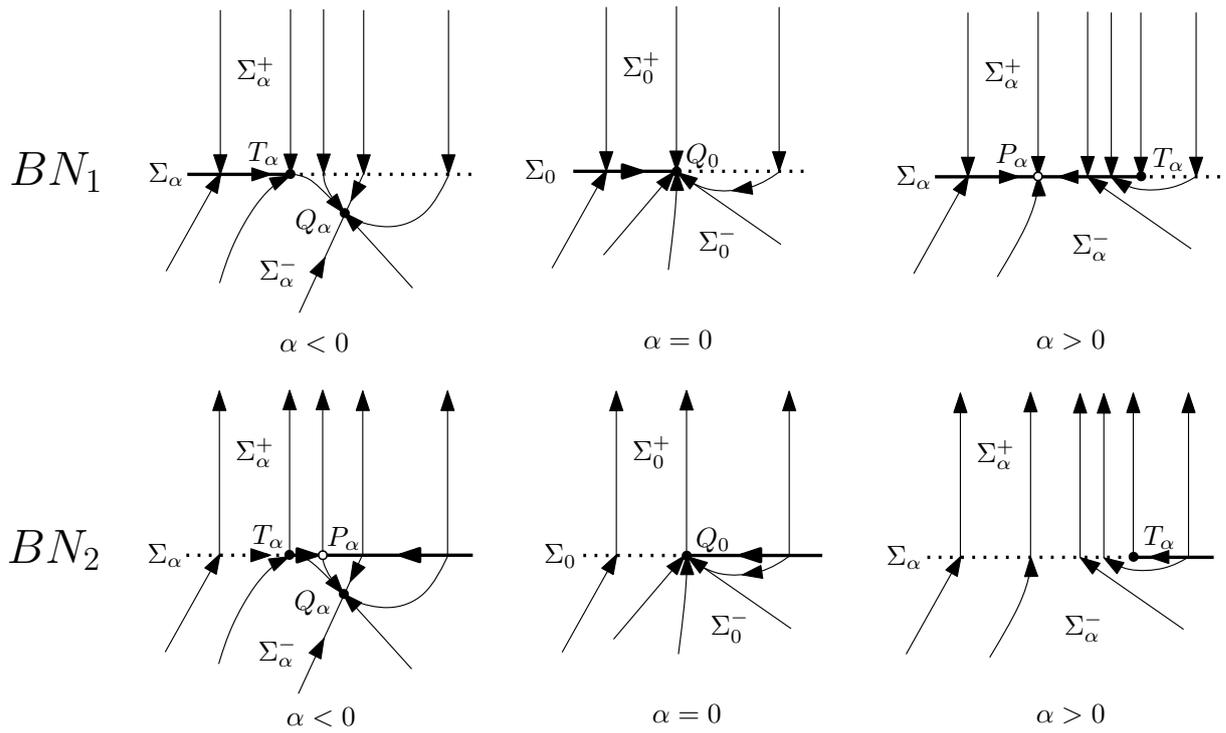


Figura 2.18: Bifurcações Nó -  $\Sigma$ .

e para  $BF_3$  por

$$Z_\alpha = \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{se } y + \alpha > 0, \\ Y = \begin{pmatrix} -x - 2y \\ 4x + 2y \end{pmatrix} & \text{se } y + \alpha < 0, \end{cases}$$

As formas normais  $BF_4$  e  $BF_5$  podem ser obtidas a partir de  $BF_2$  e  $BF_3$ , respectivamente, definindo

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### Bifurcação Nó - $\Sigma$

Suponhamos que o nó  $Q_\alpha$  é estável quando  $\alpha < 0$ . Dependendo do sentido do movimento em  $\Sigma_\alpha^+$ , existem dois casos:  $BN_1$  e  $BN_2$ . Os desdobramentos das singularidades  $BN_{1,2}$  são apresentados na Figura 2.18. No caso  $BN_1$ , o equilíbrio  $Q_0$  é um atrator com uma órbita deslizante estável. No caso  $BN_2$  o equilíbrio  $Q_0$  é instável, mas tem um setor de órbitas entrantes, delimitado pela órbita deslizante instável e a curva que leva ao nó. Em ambos os casos, tem-se um ponto de tangência visível quando  $\alpha < 0$ , e um ponto tangente invisível para  $\alpha > 0$ .

No caso  $BN_1$ , um nó estável  $Q_\alpha$  e um ponto tangente visível  $T_\alpha$  coexistem quando  $\alpha < 0$ . Eles colidem em  $Q_0$  quando  $\alpha = 0$  e são substituídos por um pseudo-nó estável  $P_\alpha$  e um ponto tangente invisível  $T_\alpha$  para  $\alpha > 0$ . Essa bifurcação ilustra como um nó estável pode tornar-se um pseudo-nó estável.

No  $BN_2$ , um pseudo-sela  $P_\alpha$ , o nó estável  $Q_\alpha$  e ponto de tangência visível  $T_\alpha$  coexistem para  $\alpha < 0$ , enquanto existe somente um ponto tangente  $T_\alpha$  para  $\alpha > 0$ . Essa bifurcação ilustra um desaparecimento catastrófico de um nó estável.

As formas normais para  $BN_{1,2}$  são dadas por:

$$Z_\alpha = \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 0 \\ \mp 1 \end{pmatrix} & \text{se } y + \alpha > 0, \\ Y = \begin{pmatrix} -3x - 2y \\ -x - 3y \end{pmatrix} & \text{se } y + \alpha < 0, \end{cases}$$

respectivamente.

### Bifurcação Sela - $\Sigma$

Quando  $Q_\alpha$  com  $\alpha < 0$  é uma sela, existem três casos:  $BS_1$ ,  $BS_2$  e  $BS_3$ . Os desdobramentos correspondentes são apresentados na Figura 2.19. Em todos os casos, existe um ponto de tangência invisível para  $\alpha < 0$ , e um ponto de tangência visível para  $\alpha > 0$ . Estes pontos delimitam os segmentos deslizantes em  $\Sigma_\alpha$ .

No caso  $BS_1$ , uma sela em  $Q_\alpha$  coexiste com uma pseudo-sela  $P_\alpha$  e um ponto tangente invisível  $T_\alpha$  para  $\alpha < 0$ . Estes três pontos colidem para  $\alpha = 0$  e é substituído por um ponto de tangência  $T_\alpha$  para  $\alpha > 0$ .

No caso  $BS_2$ , uma sela em  $Q_\alpha$  coexiste com um ponto tangente invisível  $T_\alpha$  e um pseudo-nó estável  $P_\alpha$  para  $\alpha < 0$ , enquanto somente existe um ponto tangente visível  $T_\alpha$  para  $\alpha > 0$ . Essa bifurcação ilustra um desaparecimento catastrófico de um pseudo-nó estável.

No último caso  $BS_3$ , para  $\alpha < 0$  uma sela em  $X_\alpha$  coexiste com o ponto tangente invisível  $T_\alpha$ , enquanto para  $\alpha > 0$ , existe uma pseudo-sela  $P_\alpha$  e um ponto tangente visível  $T_\alpha$ . Essa bifurcação mostra como uma sela pode tornar-se uma pseudo-sela.

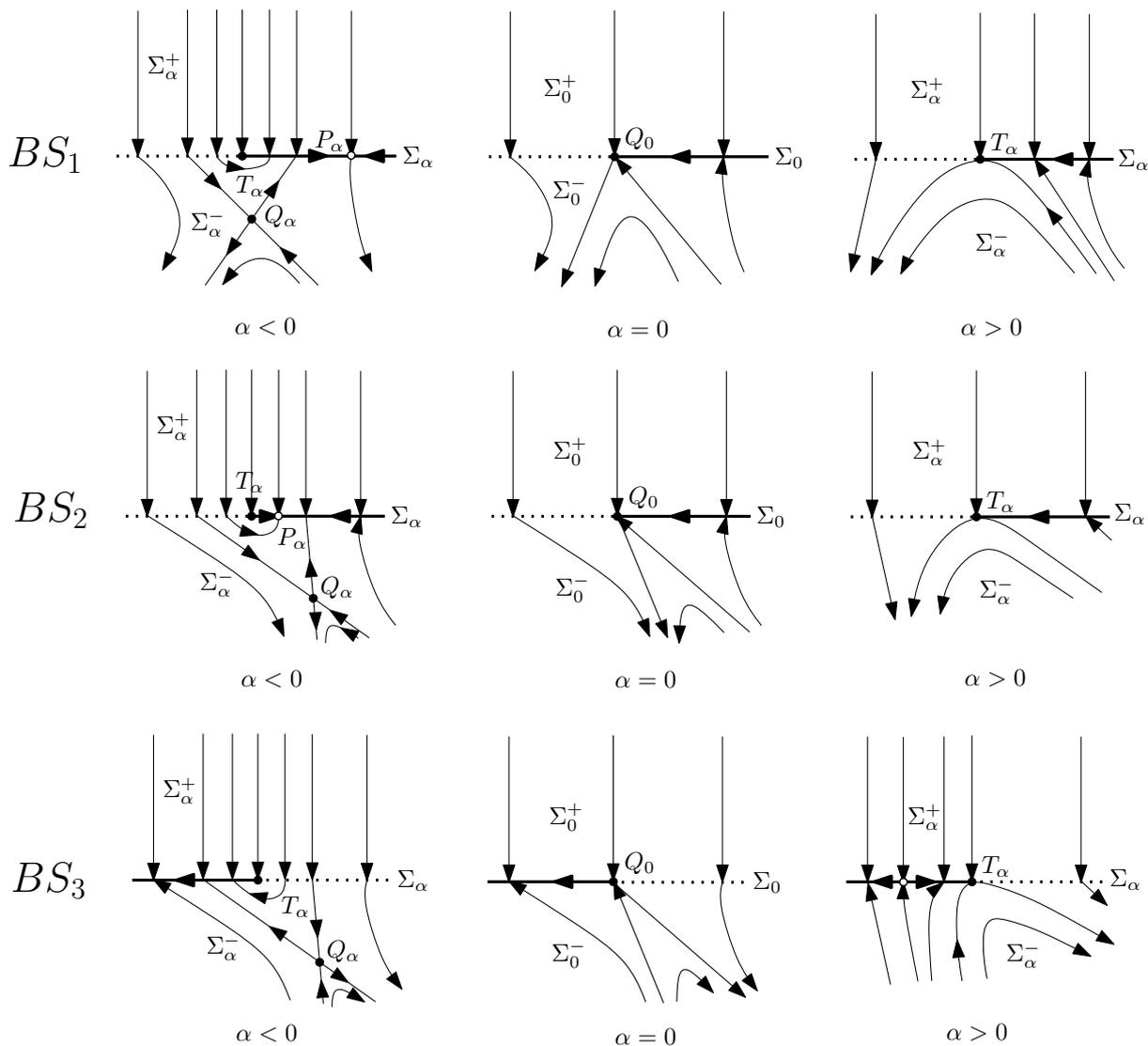


Figura 2.19: Bifurcações Sela -  $\Sigma$ . Nos casos  $BS_1$  e  $BS_2$ , um pseudo-nó estável desaparece catastróficamente, enquanto uma sela torna-se uma pseudo-sela no caso  $BS_3$ .

A forma normal no caso  $BS_1$  é dada por

$$Z_\alpha = \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{se } y + \alpha > 0, \\ Y = \begin{pmatrix} -x + 3y \\ 3x - 2y \end{pmatrix} & \text{se } y + \alpha < 0. \end{cases}$$

As formas normais para  $BS_2$  e  $BS_3$  têm o mesmo  $X$  e  $\Sigma_\alpha$  mas

$$Y = \begin{pmatrix} -2x - y \\ x + y \end{pmatrix}$$

no caso  $BS_2$  e

$$Y = \begin{pmatrix} x - 3y \\ -3x + y \end{pmatrix}$$

no caso  $BS_3$ .

### 2.6.2 Colisões de Pontos Tangenciais

Em Sistemas Planares de Filippov da forma  $Z_\alpha = (X_\alpha, Y_\alpha)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , podemos esperar os seguintes casos:

- colisão de um ponto de tangência visível e um ponto de tangência invisível em  $X_\alpha$ ,
- colisão de um ponto de tangência visível em  $X_\alpha$  e um ponto de tangência visível em  $Y_\alpha$ ,
- colisão de um ponto de tangência visível  $X_\alpha$  e um ponto de tangência invisível  $Y_\alpha$ ,
- colisão de um ponto de tangência invisível em  $X_\alpha$  e um ponto de tangência invisível em  $Y_\alpha$ .

Em seguida, analisaremos estas possibilidades em detalhe.

#### Tangência Cúbica

Suponhamos que para  $\alpha < 0$  o campo vetorial  $Y_\alpha$  tem dois pontos de tangência quadrática: um invisível e um visível. Estes pontos de tangência colidem em  $\alpha = 0$  formando um ponto de tangência cúbica  $T_0$ . Consideremos que  $Y_\alpha$  é localmente transversal a  $\Sigma_\alpha$  para  $\alpha > 0$  e que o campo vetorial  $X_\alpha$  é transversal a  $\Sigma_\alpha$  próximo a  $T_0$  para todo  $\alpha$  pequeno. Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $\Sigma_\alpha$  é uma linha reta e que  $X_\alpha$  é ortogonal a  $\Sigma_\alpha$ .

Sob essas suposições, existem dois casos,  $DT_1$  e  $DT_2$ , correspondente à trajetória que passa através de  $T_0$ . Os desdobramentos dos casos são apresentados na Figura 2.20.

No caso  $DT_1$ , existe um segmento deslizante estável entre  $T_\alpha^1$  e  $T_\alpha^2$  para  $\alpha < 0$ . Quando  $\alpha = 0$  existe uma única trajetória que cruza  $T_0$  tangencialmente a  $\Sigma_0$ , enquanto todas as outras órbitas cruzam  $\Sigma_0$ . Para  $\alpha > 0$  todas as trajetórias cruzam  $\Sigma_\alpha$ .

No  $DT_2$ , existem dois segmentos deslizantes estável para  $\alpha < 0$ , separados por uma região de costura entre  $T_\alpha^1$  e  $T_\alpha^2$ . O movimento começa no segmento deslizante esquerdo concluído em  $T_\alpha^1$  e continua em  $\Sigma_\alpha^-$  ao longo de uma órbita que alcança o segmento deslizante direito. Em  $\alpha = 0$  a região de costura desaparece e uma órbita deslizante ininterruptível

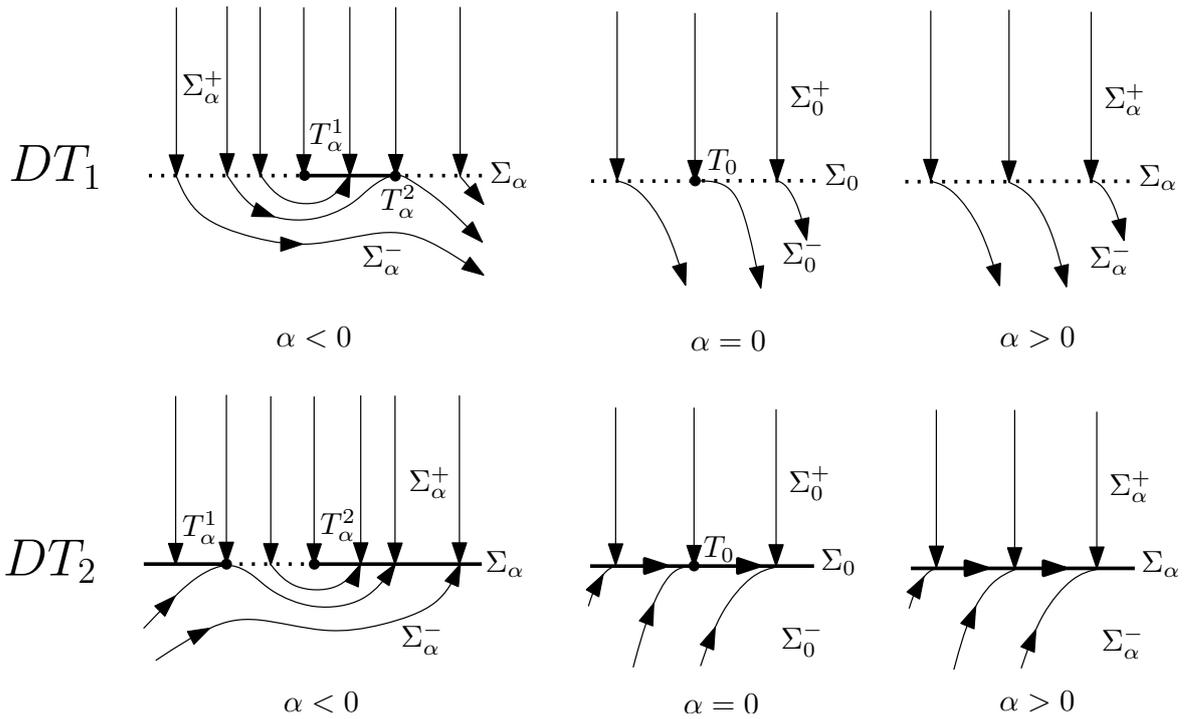


Figura 2.20: Bifurcações de Tangência Cubica.  $DT_1$ : Aparição de um segmento deslizante estável.  $DT_2$ : fechamento de uma região de costura.

aparece para  $\alpha > 0$ .

As formas normais no caso  $DT_{1,2}$  são dadas por:

$$Z_\alpha = \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{se } y > 0, \\ Y_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm(\alpha + x^2) \end{pmatrix} & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

### Dois Pontos Tangenciais Visíveis

Suponhamos que, para todo  $\alpha$  suficientemente pequeno,  $Y_\alpha$  tem um ponto tangente quadrático visível  $T_\alpha^{(1)} \in \Sigma_\alpha$ , enquanto  $X_\alpha$  tem um ponto tangente quadrático visível  $T_\alpha^{(2)} \in \Sigma_\alpha$ . Além disso, suponhamos que para  $\alpha = 0$  estes pontos tangentes colidem, isto é,  $T_0^{(1)} = T_0^{(2)} = T_0$ , enquanto que a sua velocidade, com respeito ao parâmetro, é diferente de zero. Podemos supor que  $\Sigma_\alpha$  é uma linha reta. Então, sob estas suposições, existem dois casos genéricos críticos,  $VV_1$  e  $VV_2$ , em que os vetores  $X(T_0, 0)$  e  $Y(T_0, 0)$  são colineares ou anti-colineares, de modo que  $T_0$  é um ponto de deslizamento singular. A Figura 2.21 apresentamos os desdobramentos dessas singularidades, assumindo que  $T_\alpha^{(1)}$  é localizado á direita de  $T_\alpha^{(2)}$  para  $\alpha < 0$  e a esquerda para  $\alpha > 0$ . Para  $\alpha = 0$ , no caso  $VV_1$

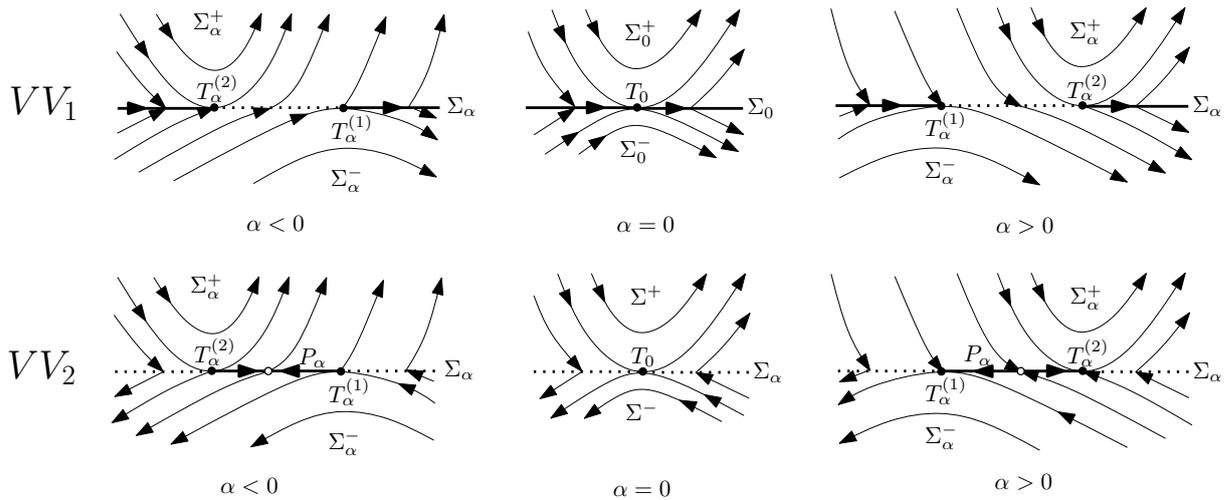


Figura 2.21: Colisões de dois pontos tangenciais quadráticas quando ambos são visíveis.  $VV_1$ : Fechamento e abertura de uma região de costura.  $VV_2$ : Aparição de um segmento deslizante estável.

existe um segmento deslizante que contém o ponto de deslizamento singular, enquanto no caso  $VV_2$  está presente somente um ponto de deslizamento singular.

No caso  $VV_1$ , os pontos tangentes  $T_\alpha^{(1)}$  e  $T_\alpha^{(2)}$  delimitam um segmento de  $\Sigma_\alpha$  que é atravessada por órbitas que vão de  $\Sigma_\alpha^-$  a  $\Sigma_\alpha^+$  quando  $\alpha < 0$ , e no sentido oposto para  $\alpha > 0$ .

No caso  $VV_2$ , os pontos tangentes  $T_\alpha^{(1)}$  e  $T_\alpha^{(2)}$  delimitam um segmento deslizante estável contendo uma pseudo-sela  $P_\alpha$  para  $\alpha \neq 0$  pequeno.

As formas normais para os casos  $VV_{1,2}$  são dadas por:

$$Z_\alpha = \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 1-x \\ x \end{pmatrix} & \text{se } y > 0, \\ Y_\alpha = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \mp(\alpha+x) \end{pmatrix} & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

### Um Ponto Tangencial Visível e um Invisível

Suponhamos que existem dois pontos de tangência quadrático,  $T_\alpha^{(1)}$  invisível e  $T_\alpha^{(2)}$  visível, então existem três casos:  $VI_1$ , quando  $\Sigma_0 = \Sigma_0^c$ , e dois casos,  $VI_2$  e  $VI_3$ , quando  $\Sigma_0 = \Sigma_0^s$ . Os desdobramentos destas três singularidades são mostrados na Figura 2.22.

No caso  $VI_1$ , todas as órbitas, exceto uma, cruza  $\Sigma_\alpha$  para  $\alpha = 0$ . No caso  $VI_2$  as

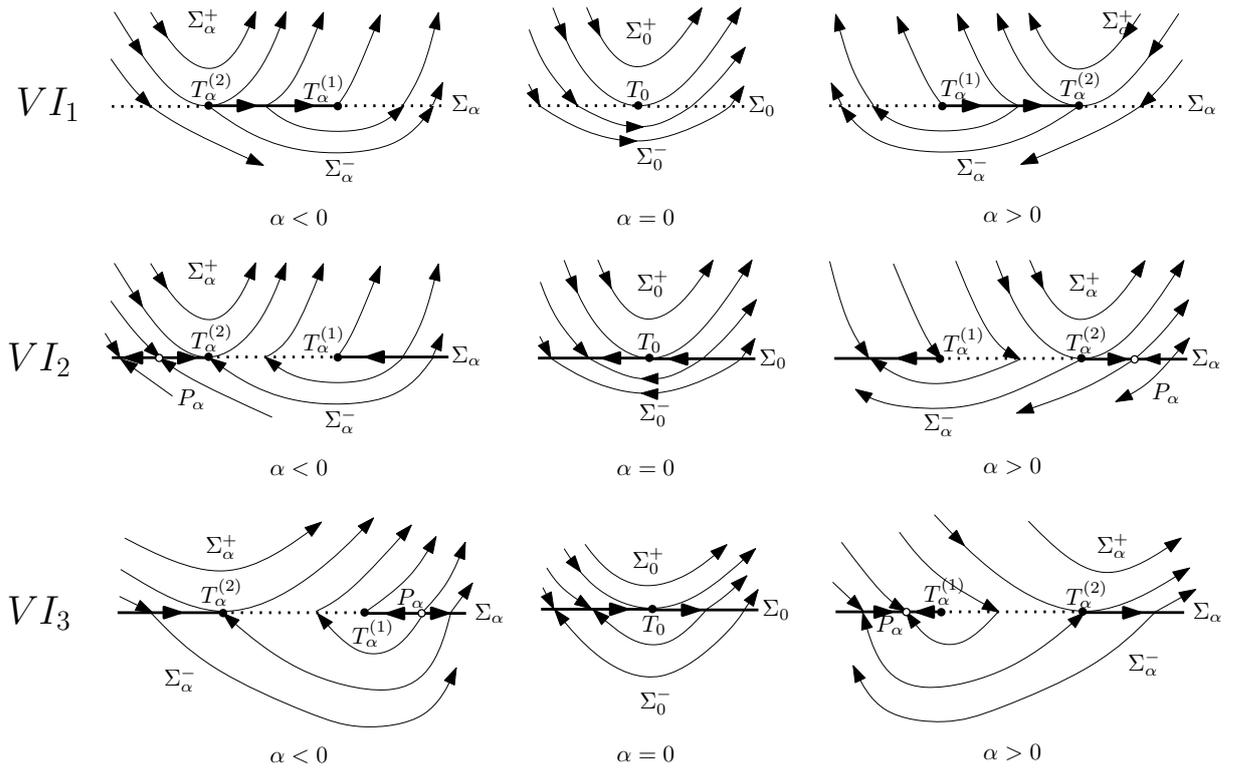


Figura 2.22: Colisões de pontos tangências visíveis e invisíveis.

trajetórias em  $\Sigma_\alpha^-$  são menos encurvado do que aqueles em  $\Sigma_\alpha^+$ , enquanto que o contrário é verdadeiro no caso  $VI_3$ . Isto resulta movimentos deslizantes em direções opostas. Observemos que o segmento deslizante é estável sobre um lado de  $T_0$  e instável na outro lado. Similar aos casos anteriores, os desdobramento no caso  $VI_1$  gera um segmento deslizante delimitado pelos pontos tangentes  $T_\alpha^{(1)}$  e  $T_\alpha^{(2)}$  para  $\alpha > 0$  e  $\alpha < 0$ . No entanto, este segmento deslizante é instável para  $\alpha < 0$  e estável para  $\alpha > 0$ . Os desdobramento nos casos  $VI_2$  e  $VI_3$  tem uma região de costura entre  $T_\alpha^{(1)}$  e  $T_\alpha^{(2)}$  no segmento deslizante. Em ambos casos, existem segmentos deslizantes disjuntos de estabilidade oposta para  $\alpha \neq 0$ . Além disso, no caso  $VI_2$ , existe uma pseudo-sela para qualquer  $\alpha \neq 0$  pequeno, enquanto que no caso  $VI_3$  um pseudo-nó instável existente para  $\alpha < 0$  é substituído por um pseudo-nó estável para  $\alpha > 0$ . Em outras palavras, temos um desaparecimento catastrófico de um equilíbrio pseudo-estável.

As formas normais para casos  $VI_{1,2}$  são dadas por:

$$Z_\alpha = \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 1 - x \\ 2x \end{pmatrix} & \text{se } y > 0, \\ Y_\alpha = \begin{pmatrix} \pm 1 - x \\ \pm(\alpha + x) \end{pmatrix} & \text{se } y < 0, \end{cases}$$

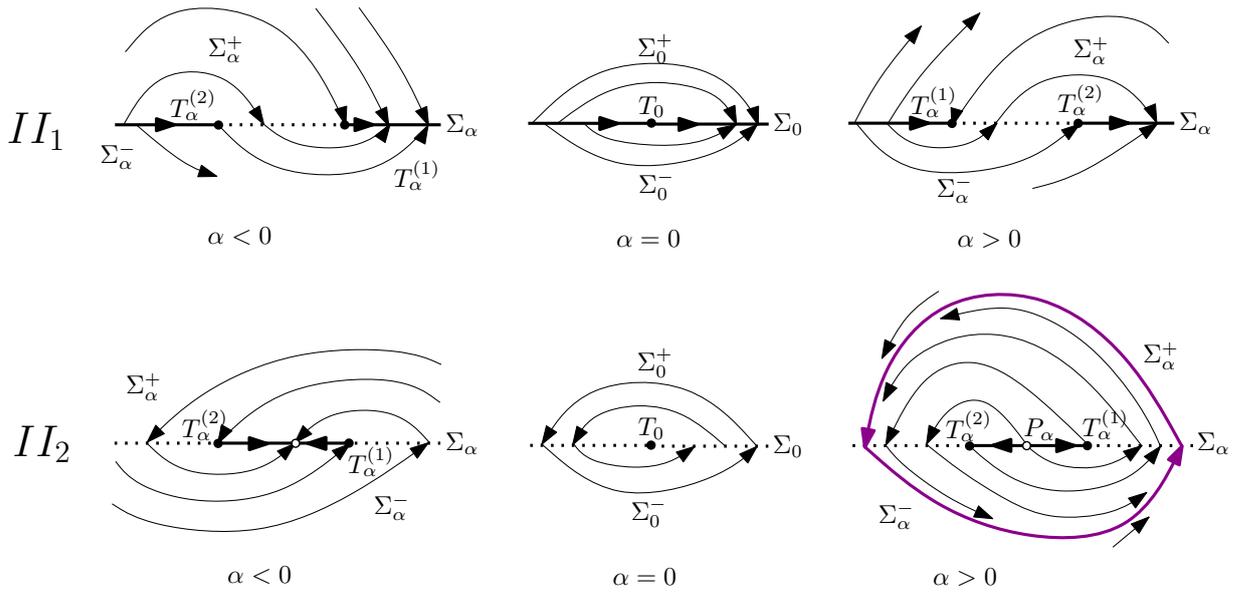


Figura 2.23: Colisões de dois pontos tangências invisível.

e para  $VI_3$ :

$$Z_\alpha = \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 1-x \\ x \end{pmatrix} & \text{se } y > 0, \\ Y_\alpha = \begin{pmatrix} -1+x \\ \mp(-\alpha-2x) \end{pmatrix} & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

### Dois Pontos Tangenciais Invisíveis

Finalmente, suponhamos que os dois pontos de tangência quadrática colidindo são invisíveis. Existem dois casos com relação ao ponto  $T_0$  como observamos na Figura 2.23. No caso  $II_1$ , para  $\alpha = 0$  existe um segmento deslizante, o qual é estável sobre um lado de  $T_0$  e instável em outro lado. No caso  $II_2$ , o ponto  $T_0$  é um pseudo-foco estável. Para o caso de um pseudo-foco instável podemos estendê-lo, invertendo todas as setas nos retratos de fase.

Os desdobramento no caso  $II_1$ , existe uma região de costura entre  $T_\alpha^{(1)}$  e  $T_\alpha^{(2)}$  no segmento deslizante. Existem segmentos de estabilidade deslizante disjuntos oposto para todo  $\alpha \neq 0$  suficientemente pequeno, mas os nó atratores são envolvidos.

No caso  $II_2$ , os pontos de tangência quadrática  $T_\alpha^{(1)}$  e  $T_\alpha^{(2)}$  delimitam um único segmento deslizante para todo  $\alpha$  pequeno, onde é estável para  $\alpha < 0$  e instável para  $\alpha > 0$ . Além disso, o segmento deslizante contém um pseudo-nó  $P_\alpha$ , que é estável quando  $\alpha < 0$  e instável para  $\alpha > 0$ . Finalmente, existe uma única órbita periódica estável  $L_\alpha$  para

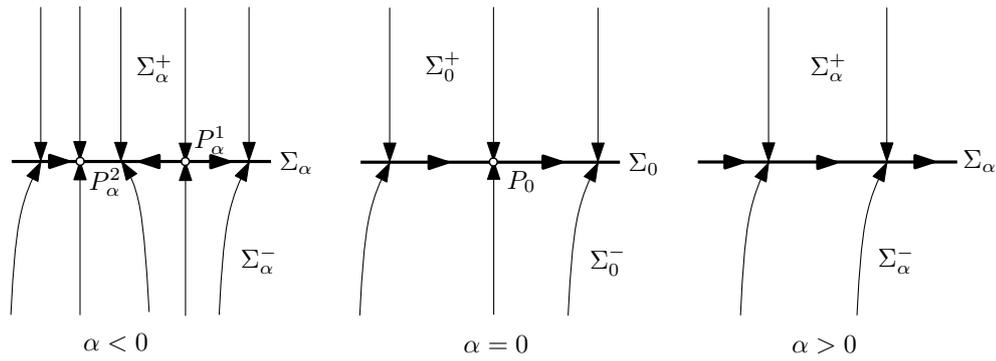


Figura 2.24: Bifurcações pseudo-sela-nó.

$\alpha > 0$ . Esta órbita periódica regular diminui juntamente com o segmento deslizante e desaparece quando  $\alpha > 0$  com  $\alpha \rightarrow 0$ . Assim, um pseudo-nó estável existente para  $\alpha < 0$  é substituído por um pseudo-nó instável e uma órbita periódica estável. Portanto, essa bifurcação pode ser chamada *bifurcação supercrítica pseudo-Hopf*.

O sistema,

$$Z_\alpha = \begin{cases} X_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha - x \end{pmatrix} & \text{se } y > 0, \\ Y = \begin{pmatrix} -1 - x \\ -x \end{pmatrix} & \text{se } y < 0, \end{cases}$$

é uma forma normal para a bifurcação supercrítica pseudo-Hopf, isto é, no caso  $II_2$ .

A forma normal para  $II_1$  é dado por

$$Z_\alpha = \begin{cases} X_\alpha = \begin{pmatrix} x + 1 \\ \alpha - x \end{pmatrix} & \text{se } y > 0, \\ Y = \begin{pmatrix} x + 1 \\ x \end{pmatrix} & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

### 2.6.3 Colisões de Pseudo - Equilíbrios

Ao variar  $\alpha$ , dois pseudo-equilíbrios podem colidir e desaparecer através da bifurcação sela-nó, que pode apropriadamente ser chamada neste caso uma *bifurcação pseudo-sela-nó*. Na Figura 2.24 ilustramos esta bifurcação no caso de um segmento deslizante estável.

A forma normal para essa bifurcação é dado por:

$$Z_\alpha = \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{se } y > 0, \\ Y_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha + x^2 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

## 2.7 Bifurcações Globais de Codimensão 1

Apresentamos as bifurcações globais que podem acontecer em Sistemas Planares de Filippov da forma  $Z_\alpha = (X_\alpha, Y_\alpha)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , que podem ocorrer em  $\Sigma^+ \cup \Sigma^-$ , envolvendo curvas invariantes, ligações de selas, órbitas periódicas e ciclos ou entre outros.

### 2.7.1 Bifurcação em Ciclos

O Sistema  $Z = (X, Y)$  pode ter soluções periódicas que se encontram inteiramente contidas em  $\Sigma^+$  ou  $\Sigma^-$ , isto é,  $X$  ou  $Y$  podem conter ciclos limites. Todas as outras soluções periódicas podem ser naturalmente subdividida em duas classes: as soluções periódicas que possuem um segmento deslizante em  $\Sigma$ , *soluções periódicas deslizantes*, e aqueles que têm apenas pontos isolados em comum com  $\Sigma$ , isto é, *soluções periódicas de costura*. Note-mos que uma solução periódica pode cruzar através da fronteira do segmento deslizante. Assim, as órbitas correspondentes a soluções periódicas serão chamadas *órbitas periódicas* e *ciclos* como observamos nas definições 2.3.1 e 2.3.2, respectivamente.

Observamos também que os ciclos podem também atravessar  $\Sigma$  e têm mais do que um segmento deslizante, enquanto que as órbitas periódicas podem voltar a  $\Sigma$  mais do que duas vezes. Daqui em diante, consideramos as órbitas periódicas mais simples possíveis e não apresentamos retratos de estado que podem ser obtidos a partir das consideradas, invertendo todas as setas.

#### Colisão de um ciclo limite com $\Sigma$

Um ciclo limite pode colidir com  $\Sigma$ . Isto é chamado bifurcação *touching*, *grazing* ou *sliding-grazing*. O caso mais simples é um ciclo limite que toca um ponto de dobra-regular  $T_0$  num segmento deslizante  $\Sigma_\alpha^s$  para  $\alpha = 0$  chamado *ciclo tangente*. Dois casos genéricos críticos,  $TC_{1,2}$ , são possíveis, dependendo da estabilidade do ciclo tangente  $L_0$  a partir do interior em  $\alpha = 0$ . No caso  $TC_1$ , o ciclo tangente  $L_0$  é estável a partir do interior, ao mesmo tempo que é instável em caso  $TC_2$ .

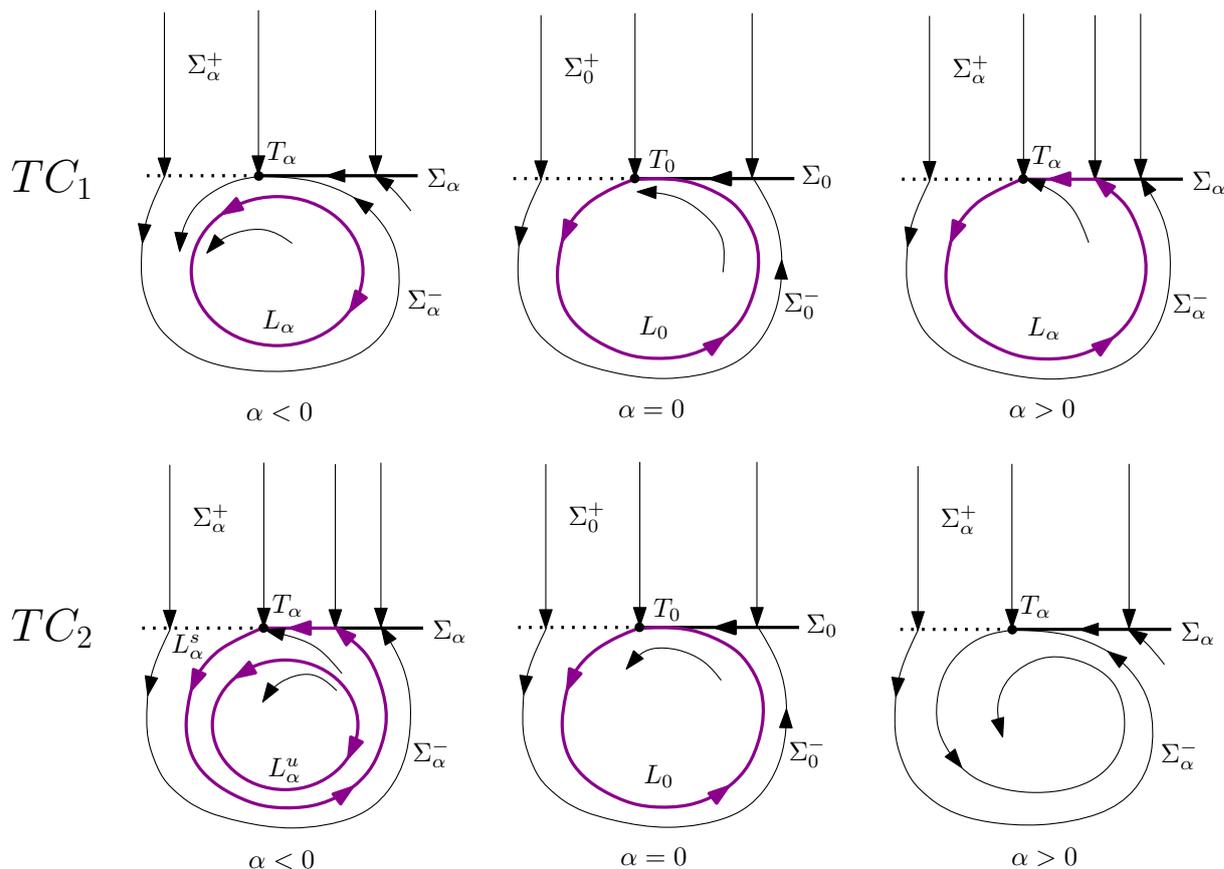


Figura 2.25: Bifurcações de Ciclos Limite com  $\Sigma$

Os desdobramentos das singularidades  $TC_1$  são apresentados na parte superior da Figura 2.25. Para  $\alpha < 0$  existe um ciclo limite  $L_\alpha \subset \Sigma_\alpha^-$  que é estável e que tem a distância  $O(\alpha) \neq 0$  em  $\Sigma_\alpha$  para  $\alpha$  suficientemente pequeno. Então, para  $\alpha > 0$ , esta órbita periódica se torna num ciclo.

O diagrama de bifurcação no caso  $TC_2$  também é mostrado na Figura 2.25. Para  $\alpha > 0$  existe um ciclo limite instável  $L_\alpha^u \subset \Sigma_\alpha^-$  e um ciclo  $L_\alpha^s$ . Uma vez que para  $\alpha > 0$ , nenhum ciclo limite permanece, essa bifurcação se assemelha à bifurcação sela-nó de ciclos limites em sistemas contínuos.

### Surgimento de um ponto tangencial cúbico no ciclo

O aparecimento de um ponto tangencial cúbico dentro de um segmento deslizante é uma bifurcação local no caso  $DT_2$ . Quando isto acontece num ciclo, causa uma mudança global do retrato de fase ilustrado na Figura 2.26. Assumimos que um ciclo  $L_\alpha$  existe para  $\alpha < 0$  e que um ponto de tangência cúbica  $T_0$  aparece no segmento deslizante em  $\alpha = 0$ . Para  $\alpha > 0$ , dois pontos de tangência quadrática visíveis,  $T_\alpha^1$  e  $T_\alpha^2$ , aparecem e interrompe

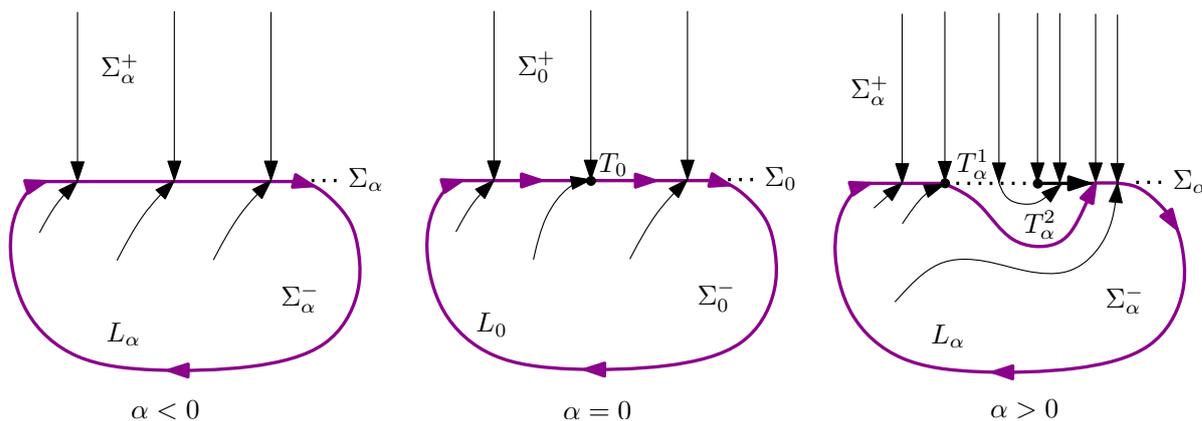


Figura 2.26: Desconexão deslizante

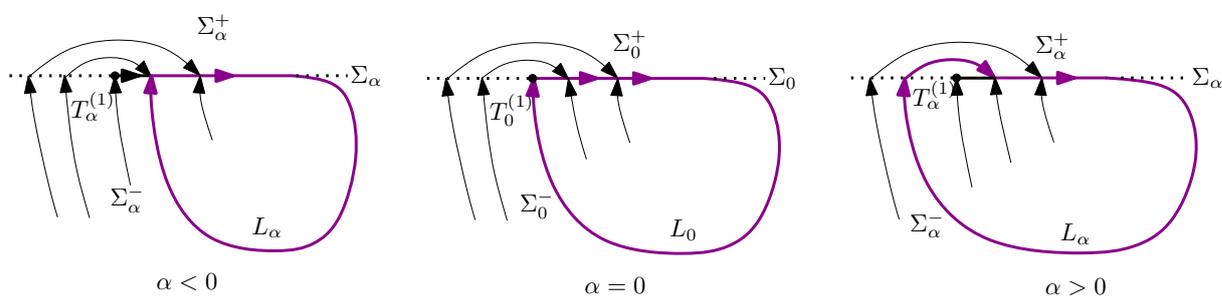


Figura 2.27: Bifurcação Buckling

o segmento deslizante, de modo que o ciclo  $L_\alpha$  tem dois segmentos deslizantes. Esta bifurcação é conhecida como *multi-sliding* ou *desconexão deslizante*.

**Retorno a um ponto de tangência invisível**

Suponhamos que existe um ciclo  $L_\alpha$  para  $\alpha < 0$  e que, para  $\alpha = 0$  um pedaço do ciclo retorna para o segmento deslizante em um ponto tangente quadrático invisível  $T_0^{(1)}$  como observamos na Figura 2.27. Se o ponto de retorno de  $L_\alpha$  em  $\Sigma_\alpha$  passa com uma velocidade diferente de zero desde o segmento deslizante para a região de costura em  $\alpha = 0$ , então para  $\alpha > 0$ , o ciclo continua mas entra em  $\Sigma_\alpha^+$  antes de regressar para o segmento deslizante. Isto é uma bifurcação *buckling* ou *sliding switching*.

**Retorno a um ponto de tangência visível**

O caso de uma órbita periódica começando e retornando para o mesmo ponto de tangência quadrática visível em  $\alpha = 0$  é mais complicado. Assumindo genericidade em relação ao parâmetro, existem dois casos distintos mostrados na Figura 2.28. A orbita crítica  $L_0$  pode ser um ciclo (caso *SC*) ou uma órbita periódica (caso *CC*).

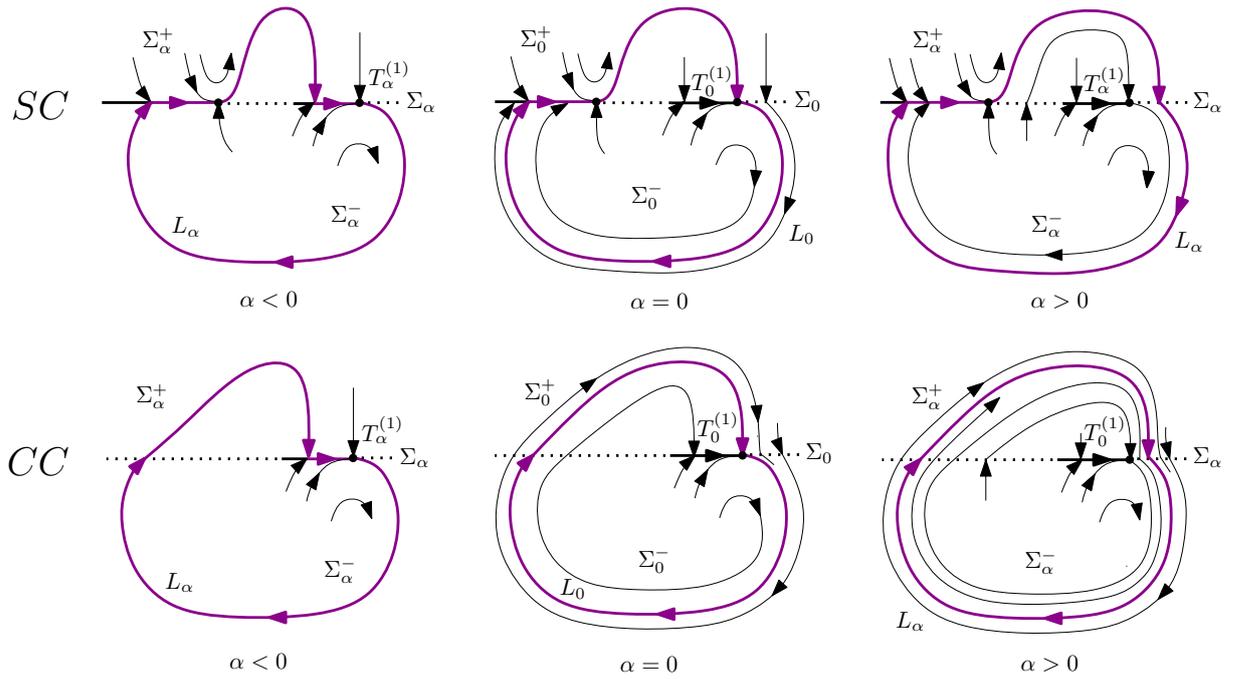


Figura 2.28: Bifurcações Crossing:  $SC$ : Ciclo crítico;  $CC$ : Órbita periódica crítica.

Em ambos os casos, existe um ponto tangente quadrático  $T_\alpha^{(1)}$  de  $Y_\alpha$  para todo  $|\alpha|$  suficientemente pequeno.

No caso  $SC$ , o ciclo  $L_\alpha$ , com dois segmentos deslizantes existentes quando  $\alpha < 0$ , é substituído por um ciclo com apenas um segmento deslizante para  $\alpha > 0$ , uma vez que a órbita atravessa  $\Sigma$  perto de  $T_\alpha^{(1)}$ . Chamamos essa bifurcação *simple crossing*.

No caso  $CC$ , para  $\alpha < 0$ , existe um ciclo  $L_\alpha$  com um único segmento deslizante que termina em  $T_\alpha^{(1)}$ . Este segmento deslizante diminui quando  $\alpha \rightarrow 0$  e origina uma órbita periódica passando por  $T_0^{(1)}$  quando  $\alpha = 0$ . Para  $\alpha > 0$ , existe uma única órbita periódica estável. Portanto, essa bifurcação implica uma transição de um ciclo para uma órbita periódica estável chamado de *sliding-crossing*.

### 2.7.2 Bifurcações Pseudo-homoclínicas

Um pseudo-equilíbrio  $P_\alpha$  de  $Z_\alpha = (X_\alpha, Y_\alpha)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , pode ter uma órbita deslizante que começa e retorna a ele em  $\alpha = 0$ . Isto é possível se  $P_0$  é um pseudo-sela-nó ou uma pseudo-sela. Além disso, uma sela  $Q_\alpha$  pode ter uma ligação homoclínica contendo um segmento deslizante em  $\alpha = 0$ .

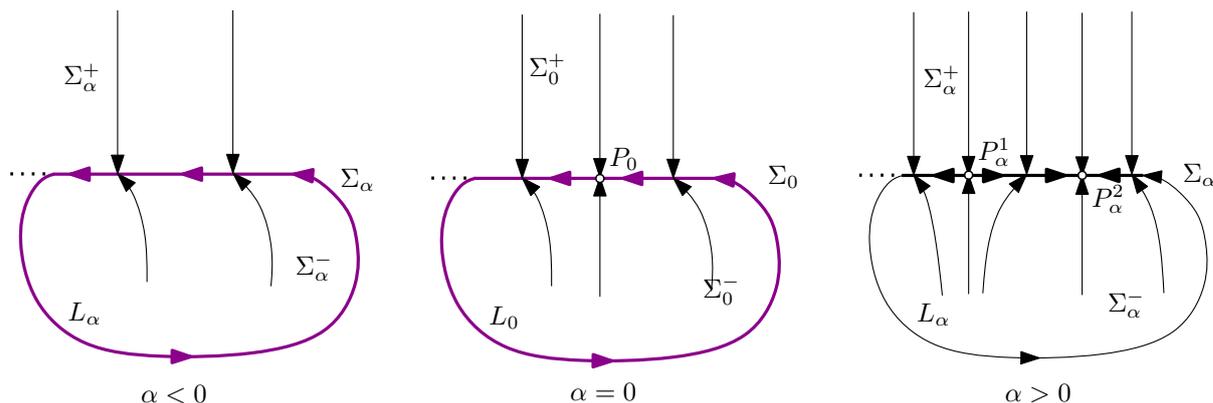


Figura 2.29: Bifurcação de uma ligação homoclínica deslizante a uma pseudo-sela-nó

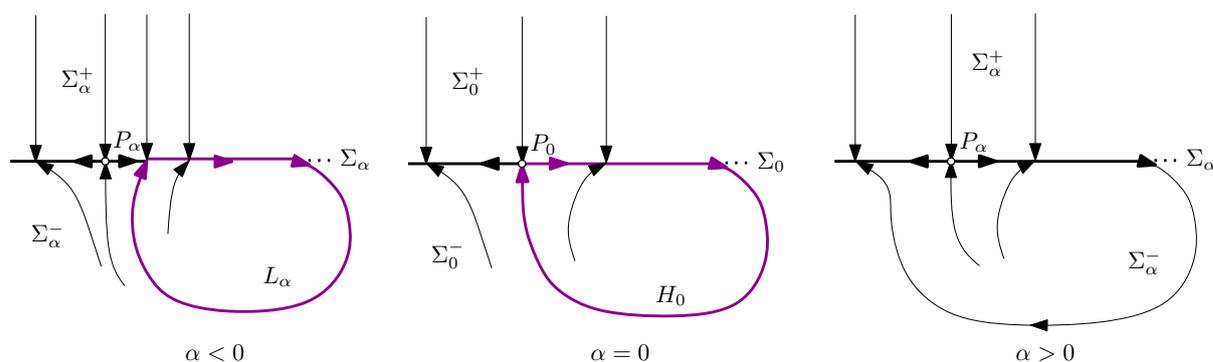


Figura 2.30: Bifurcação de uma ligação homoclínica deslizante a uma pseudo-sela.

### Ligação homoclínica deslizante a uma pseudo-sela-nó

Uma aparição de uma pseudo-sela-nó dentro de um segmento deslizante é uma bifurcação local discutido em 2.6.3. Se à pseudo-sela-nó aparece em um ciclo  $L_\alpha$ , provoca uma mudança global do retrato de fase tal como mostramos na Figura 2.29, onde o ciclo  $L_\alpha$  existe para  $\alpha < 0$  e uma pseudo-sela-nó  $P_0$  aparece no segmento deslizante em  $\alpha = 0$ . Então, para  $\alpha > 0$ , uma pseudo-sela  $P_\alpha^1$  e um pseudo-nó  $P_\alpha^2$  aparecem e interrompem o movimento periódico, de modo que não existe um ciclo para  $\alpha > 0$ . Todas as órbitas próximas se aproximam al pseudo-nó estável  $P_\alpha^2$  para  $\alpha > 0$ . Esta bifurcação é completamente análoga à bifurcação de uma ligação homoclínica a uma sela-nó.

### Ligação homoclínica deslizante a uma pseudo-sela

Um ciclo  $L_\alpha$  pode colidir com uma pseudo-sela. Observamos na Figura 2.30, o ciclo  $L_\alpha$  existe para  $\alpha < 0$  e se torna numa ligação deslizante homoclínica  $H_0$  em  $\alpha = 0$ . Não existe uma órbita periódica para  $\alpha > 0$ . Esta bifurcação é completamente análoga à bifurcação de uma ligação homoclínica a uma sela.

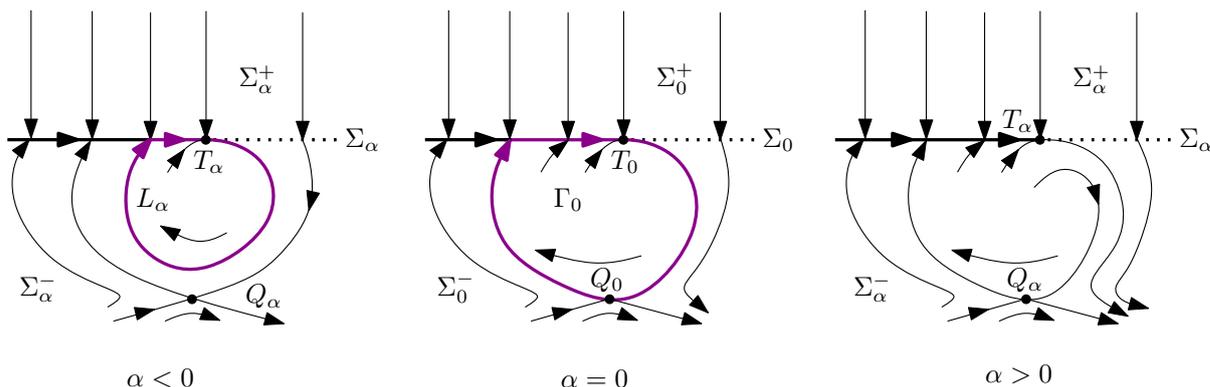


Figura 2.31: Bifurcação de uma ligação homoclínica deslizante a uma sela.

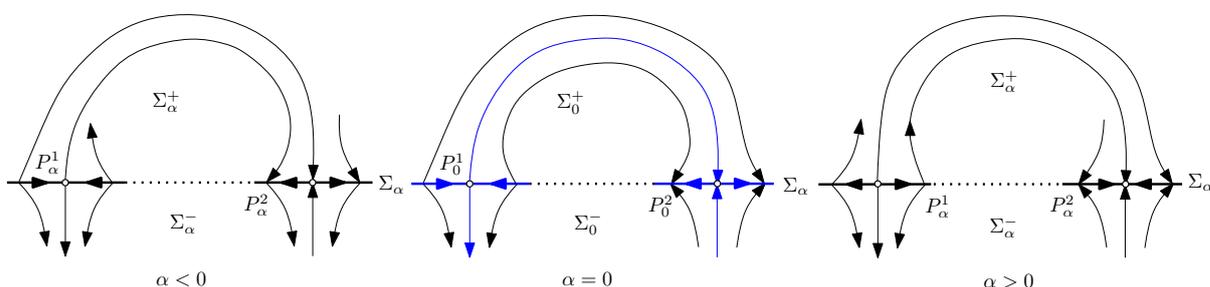


Figura 2.32: Bifurcação de uma ligação heteroclínica entre pseudo-selas.

**Ligação homoclínica deslizante a uma Sela**

Um ciclo  $L_\alpha$  podem colidir com uma sela  $Q_\alpha \in \Sigma_\alpha^+$  conforme observamos na Figura 2.31. O ciclo para  $\alpha < 0$  toca a sela  $Q_0$  para  $\alpha = 0$  e desaparecem para  $\alpha > 0$ , onde é outra bifurcação catastrófica.

**2.7.3 Bifurcações Pseudo-heteroclínicas**

Completamos nossa lista de bifurcações globais de codimensão um considerando também duas possibilidades bastante simples relacionadas com órbitas heteroclínicas entre pseudo-selas e selas. Notemos que também existem bifurcações triviais envolvendo órbitas que conectam dois pontos de tangência, ou um ponto com um pseudo-nó.

**Ligação heteroclínica entre duas pseudo-selas**

Para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  existem duas pseudo-selas  $P_\alpha^1$  e  $P_\alpha^2$  como observamos na Figura 2.32. Se  $\alpha < 0$  ou  $\alpha > 0$ ,  $P_\alpha^1$  e  $P_\alpha^2$  não estão ligadas por uma trajetória heteroclínica. Quando  $\alpha = 0$ , existe uma ligação heteroclínica para  $P_0^1$  e  $P_0^2$  dando origem a uma bifurcação.

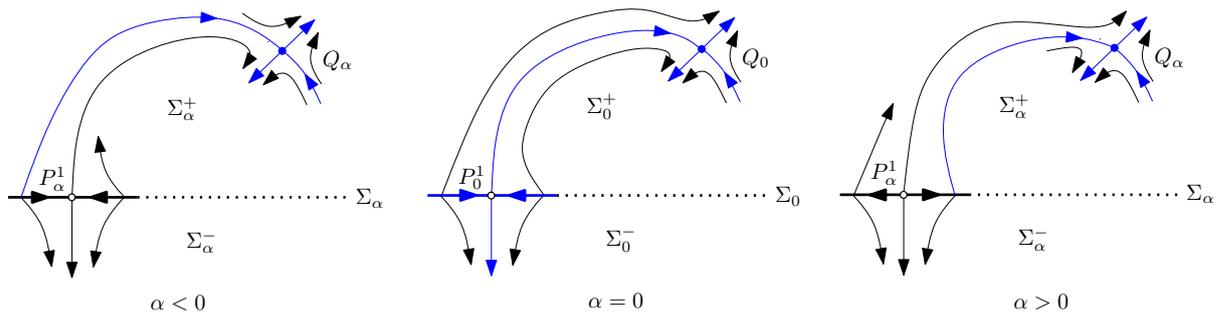


Figura 2.33: Bifurcação de uma ligação heteroclínica entre uma pseudo-sela e uma sela.

### Ligação heteroclínica entre uma pseudo-sela e uma sela

Para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  existem uma sela  $Q_\alpha$  e uma pseudo-sela  $P_\alpha^1$  como observamos na Figura 2.33. Se  $\alpha < 0$  ou  $\alpha > 0$ ,  $Q_\alpha$  e  $P_\alpha^1$  não estão ligadas por uma trajetória heteroclínica. Quando  $\alpha = 0$ , observamos uma ligação heteroclínica para  $Q_0$  e  $P_0^1$  dando origem a uma bifurcação.

# 3 Modelo Tipo Gause Predador - Presa

Neste capítulo, vamos analisar as bifurcações locais e/ou globais de um modelo populacional para duas populações com descontinuidade e interação de dois parâmetros: exploração e proteção das populações que interagem.

## 3.1 Descrição do Modelo

Sejam  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$  as populações das presas e predadores e somente os predadores pode ser capturados. O caso onde a população das presas caia abaixo de um valor crítico  $P$ , isto é,  $x < P$ , um mecanismo de proteção é posto em prática, impedindo que estas sejam consumidas pelos predadores. Este modelo é descrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \left[ \rho \left( 1 - \frac{x}{K} \right) \right] \\ \dot{y} = y [-d - qE], \end{cases}$$

onde

- $x \left[ \rho \left( 1 - \frac{x}{K} \right) \right]$  descreve o crescimento logístico das presas com  $\rho > 0$  a taxa de crescimento sem predação e  $0 < P < K$ , onde  $K$  é a capacidade de suporte do meio para as presas na ausência de predadores.
- $y[-d - qE]$  descreve o decrescimento dos predadores com  $d > 0$  a taxa de mortalidade,  $q > 0$  é o coeficiente de capturabilidade e  $E \geq 0$  o esforço de capturabilidade.

Por outro lado, quando a população de presas é superior a  $P$ , isto é,  $x > P$ , seu mecanismo de proteção é desativada e passam a ser consumidas pelos predadores. Este modelo é descrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \left[ \rho \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{ay}{1 + abx} \right] \\ \dot{y} = y \left[ \frac{cax}{1 + abx} - d - qE \right], \end{cases}$$

onde

- $p(x) = \frac{ax}{1+abx}$  expressa um aumento desacelerado no consumo uma vez que aumentam as presas consumidas até aproximar-se assintoticamente a uma constante  $\frac{1}{b}$ , onde  $a > 0$  é uma taxa de consumo dos predadores e  $b > 0$  o tempo entre a presa sendo encontrada pelo predador,
- $-yp(x)$  é o consumo de presas por unidade de tempo por cada predador,
- $cyp(x)$  é a conversão de presas consumidas em novos predadores, onde  $c > 0$  é taxa de eficiência com que o predador capturou a presa.

Este modelo é descrito por um Sistema Planar de Filippov:

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = \begin{pmatrix} x \left[ \rho \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{ay}{1 + abx} \right] \\ y \left[ \frac{cax}{1 + abx} - d - qE \right] \end{pmatrix} & \text{se } x > P, \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} x \left[ \rho \left( 1 - \frac{x}{K} \right) \right] \\ y [-d - qE] \end{pmatrix} & \text{se } 0 \leq x < P, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $K > P$  e

$$\begin{aligned} \Sigma^+ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, f(x, y) = x - P > 0\}, \\ \Sigma &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, f(x, y) = x - P = 0\}, \\ \Sigma^- &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, f(x, y) = x - P < 0\}. \end{aligned}$$

### 3.2 Estudo do campo $Y$

Os pontos de equilíbrio de  $Y$  são dados por  $(0, 0)$  e  $(K, 0)$ . A matriz Jacobiana do campo vetorial é

$$DY(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\rho}{K}(K - 2x) & 0 \\ 0 & -d - qE \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

onde

$$\det DY(0, 0) = -\rho(d + qE) < 0 \quad (3.3)$$

o que implica que  $(0, 0)$  é um ponto de sela.

No outro equilíbrio  $(K, 0)$  temos

$$\begin{aligned} \det DY(K, 0) &= \rho(d + qE) > 0, \\ \operatorname{tr} DY(K, 0) &= -(\rho + d + qE) < 0, \\ \Delta = (\operatorname{tr} DY(K, 0))^2 - 4\det DY(K, 0) &= 2d^2 + 2qdE + (\rho - dE)^2 > 0. \end{aligned}$$

e logo  $(K, 0)$  é um nó estável.

Observamos que o campo  $Y$  não possui ciclos limite pois  $\dot{y} = -(d + qE)y$  é sempre negativo para todo  $y \geq 0$ .

### 3.3 Estudo de campo $X$

Os pontos de equilíbrio de  $X$  são  $(0, 0)$ ,  $(K, 0)$  e

$$(x^*, y^*) = \left( \frac{d + qE}{a(c - (d + qE)b)}, \frac{c\rho(aK(c - (d + qE)b) - (d + qE))}{a^2K(c - (d + qE)b)^2} \right).$$

Dado pela descrição do modelo,  $(x^*, y^*)$  é um ponto do primeiro quadrante.

Como  $d + qE > 0$  e  $a > 0$  precisaremos que  $c - (d + qE)b > 0$  para que  $x^* > 0$ . Além disso

$$y^* = \frac{c\rho(aK(c - (d + qE)b) - (d + qE))}{a^2K(c - (d + qE)b)^2},$$

logo  $y^* > 0$  se  $aK(c - (d + qE)b) > d + qE > 0$ .

Para que  $(x^*, y^*)$  esteja no primeiro quadrante basta supor que  $aK(c - (d + qE)b) > d + qE$  e  $c > (d + qE)b$ .

O determinante e o traço da matriz Jacobiana de  $X$  em  $(x^*, y^*)$  so

$$\det DX(x^*, y^*) = \frac{\rho(d + qE)(aK(c - (d + qE)) - b(d + qE))}{acK},$$

$$\operatorname{tr} DX(x^*, y^*) = \frac{\rho(d + qE)(abK(b(d + qE) - c) + b(d + qE) + c)}{acK(b(d + qE) - c)}.$$

Como  $aK(c - (d + qE)b) > d + qE$  temos que  $\det DX(x^*, y^*) > 0$  e se  $x^* < \frac{abK-1}{2ab}$  então  $abK(b(d + qE) - c) + b(d + qE) + c < 0$  e  $\operatorname{tr} DX(x^*, y^*) > 0$ . Analogamente, se  $x^* > \frac{abK-1}{2ab}$  então  $abK(b(d + qE) - c) + b(d + qE) + c > 0$  e  $\operatorname{tr} DX(x^*, y^*) < 0$ . Assim concluímos que a estabilidade de  $(x^*, y^*)$  é

- Um nó estável se  $x^* > \frac{abK-1}{2ab}$  e  $\Delta \geq 0$ ,
- Um nó instável se  $x^* < \frac{abK-1}{2ab}$  e  $\Delta \geq 0$ ,
- Um foco estável se  $x^* > \frac{abK-1}{2ab}$  e  $\Delta < 0$ ,
- Um foco instável se  $x^* < \frac{abK-1}{2ab}$  e  $\Delta < 0$ .

**Lema 3.3.1.** *Se  $x^* \leq \frac{abK-1}{2ab}$  e  $\Delta < 0$ , então  $(x^*, y^*)$  é um foco instável e existe um único ciclo limite globalmente assintoticamente estável em  $X$  no primeiro quadrante.*

*Demonstração.* Pelas as hipóteses,  $(x^*, y^*)$  é um foco instável.

O campo  $X$  é do tipo Gause com

$$g(x) = \rho \left( 1 - \frac{x}{K} \right), \quad p(x) = \frac{ax}{1 + abx}, \quad q(x) = \frac{cax}{1 + abx}, \quad \gamma = d + qE.$$

Para garantir a existência de um único ciclo globalmente assintoticamente estável vamos usar o Teorema 1.4.3. De fato,

- i)  $g(x) > 0$  se  $0 \leq x < K$ ,  $g(K) = \rho \left( 1 - \frac{K}{K} \right) = 0$  e  $g(x) < 0$  se  $x > K$ ,
- ii)  $p(0) = 0$ ,  $p'(x) = \frac{a}{(1+abx)^2} > 0$ ,
- iii)  $q(0) = 0$ ,  $q'(x) = \frac{ca}{(1+abx)^2} > 0$ ,

*iv*) Como

$$\begin{aligned} \frac{xg'(x) + g(x) - xg(x)\frac{p'(x)}{p(x)}}{-\gamma + q(x)} &= \frac{-\frac{\rho x}{K} + \rho\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \rho\left(1 - \frac{x}{K}\right)\frac{1}{1+abx}}{\frac{cax}{1+abx} - d - qE} \\ &= \frac{\rho x(2abx - abK + 1)}{K(ax(b(d + qE) - c) + d + qE)} \\ &= \frac{\rho x(2abx - abK + 1)}{Ka(c - b(d + qE))(x - x^*)} \end{aligned}$$

calculando sua derivada temos

$$\frac{1}{a(c - (d + qE)b)(x - x^*)^2} \left( -\frac{2\rho ab}{K}x^2 + \frac{4\rho abx^*}{K}x + \rho abx^* + \frac{\rho x^*}{K} \right).$$

Como

$$\frac{1}{a(c - (d + qE)b)(x - x^*)^2} \geq 0$$

seja

$$F(x) = -\frac{2\rho ab}{K}x^2 + \frac{4\rho abx^*}{K}x + \rho abx^* + \frac{\rho x^*}{K}$$

uma parábola que abre para abaixo com discriminante

$$\Delta_F = \frac{8\rho^2 abx^*}{K^2} (2abx^* + 1 - abK).$$

Se  $x^* \leq \frac{abK - 1}{2ab}$  temos  $2abx^* + 1 - abK \leq 0$ , isto é,  $\Delta_F \leq 0$ . Assim  $F(x)$  possui no máximo uma raiz real, implicando que  $F(x) \leq 0$  e

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{xg'(x) + g(x) - xg(x)\frac{p'(x)}{p(x)}}{-\gamma + q(x)} \right) \leq 0.$$

Portanto, o campo  $X$  possui um único ciclo globalmente assintoticamente estável no primeiro quadrante.  $\square$

### 3.4 Estudo do Sistema Planar de Filippov

Para todo  $p \in \Sigma$  calculamos,

$$Xf(p) = X(p) \cdot \text{grad}f(p) = P \left[ \rho \left( 1 - \frac{P}{K} \right) - \frac{ay}{1 + abP} \right],$$

$$Yf(p) = Y(p) \cdot \text{grad}f(p) = P\rho \left( 1 - \frac{P}{K} \right).$$

O campo vetorial do segmento deslizando

$$Z^s(p) = \frac{1}{Yf(p) - Xf(p)} (Yf(p)X(p) - Xf(p)Y(p)), \quad p \in \Sigma$$

é dado por

$$Z^s(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{P(1 - abP)(Ky(d + qE) + c\rho P(P - K))}{K(abP + 1)} \end{pmatrix}.$$

Como  $K > P$ , então  $Yf(p) = P\rho \left( 1 - \frac{P}{K} \right) > 0$  e se

$$Xf(p) = P \left[ \rho \left( 1 - \frac{P}{K} \right) - \frac{ay}{1 + abP} \right] > 0,$$

então

$$y_P = \frac{\rho \left( 1 - \frac{P}{K} \right) (1 + abP)}{a} > y.$$

Portanto concluímos que

$$\Sigma^s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = P, y_P < y\},$$

$$\Sigma^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = P, y_P > y\},$$

$$\Sigma^e = \emptyset.$$

O pseudo-equilíbrio do Sistema Planar de Filippov (3.1)

$$PN = (P, y_1) = \left( P, \frac{\rho c P \left(1 - \frac{P}{K}\right)}{d + qE} \right),$$

existe se  $y_1 > y_p$  pois  $PN \in \Sigma^s$ .

Por outro lado, se  $x^* > P$ , isto é,  $a < \frac{d+qE}{P(c-b(d+qE))}$ , então  $(x^*, y^*)$  é um equilíbrio no Sistema Planar de Filippov (3.1) e se  $a > \frac{d+qE}{P(c-b(d+qE))}$  temos que  $(x^*, y^*)$  não está definido no Sistema Planar de Filippov (3.1).

Como  $Yf(p) > 0$  para todo  $p \in \Sigma$ , existe um ponto tangente quando  $Xf(p) = 0$ ,  $p \in \Sigma^s$ , dado por

$$T = \left( P, \frac{\rho \left(1 - \frac{P}{K}\right) (1 + abP)}{a} \right),$$

e

$$X^2f(T) = X(T) \cdot \text{grad}Xf(T) = \frac{P\rho(K-P)(aP(b(d+qE)-c) + (d+qE))}{K(abP+1)}.$$

O ponto  $T$  é visível se  $X^2f(T) > 0$ , isto é,

$$P < x^* = \frac{d+qE}{a(c-b(d+qE))},$$

e invisível,  $X^2f(T) < 0$ , se

$$P > x^* = \frac{d+qE}{a(c-b(d+qE))}.$$

**Lema 3.4.1.** *O equilíbrio  $(x^*, y^*)$  e o pseudo-equilíbrio  $PN$  não podem coexistir. Além disso,  $PN$  é estável se  $\Sigma^s$  existe.*

*Demonstração.* Observamos que para o segmento deslizante  $Z^s$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{P(1-abP)(Ky(d+qE) + c\rho P(P-K))}{K(abP+1)} \right) = \frac{P(d+qE)(1-abP)}{abP+1} < 0$$

logo  $PN \in \Sigma^s$  é um pseudo-nó estável.

Se  $(x^*, y^*)$  é um equilíbrio no Sistema Planar de Filippov (3.1), isto é,  $x^* > P$ , então

$$y_p - y_1 = \frac{\rho \left(1 - \frac{P}{K}\right) (1 + abP)}{a} - \frac{\rho cP \left(1 - \frac{P}{K}\right)}{d + qE} = \frac{\rho}{a} \left(1 - \frac{P}{K}\right) \left(1 - \frac{P}{x^*}\right) \geq 0,$$

logo  $y_p \geq y_1$  e  $PN$  não existe.

Analogamente, se  $PN$  existe, isto é,  $y_1 > y_p$ , temos

$$\frac{\rho cP \left(1 - \frac{P}{K}\right)}{d + qE} > \frac{\rho \left(1 - \frac{P}{K}\right) (1 + abP)}{a} \Rightarrow acP > (1 + abP)(a + qE)$$

e

$$P - x^* = P - \frac{d + qE}{a(c - (d + qE)b)} = \frac{acP - (d + qE)(baP + 1)}{a(c - (d + qE)b)} > 0.$$

Portanto,  $(x^*, y^*)$  não está definido no Sistema Planar de Filippov (3.1) □

## 3.5 Análise qualitativo global

Agora analisamos a parte global do Sistema Planar de Filippov (3.1). Para fazer isso, podemos dividi-lo em dois casos:

**Caso (A):** Suponhamos que  $(x^*, y^*)$  é um foco instável, isto é,  $x^* \leq \frac{abK-1}{2ab}$  e  $\Delta < 0$ , e  $\Omega_2$  o ciclo limite estável em  $X$ . Seja  $\Omega$  um ciclo limite do Sistema Planar de Filippov (3.1) em  $\Sigma^+$  e  $L_2 = (x_{L_2}, y_{L_2})$ ,  $R_2 = (x_{R_2}, y_{R_2})$  os pontos mais à esquerda e à direita do ciclo limite  $\Omega$ .

**Teorema 3.5.1.** *O Sistema Planar de Filippov (3.1) têm um ciclo limite  $\Omega$  globalmente assintoticamente estável se, e somente se  $0 \leq P < x_{L_2}$ .*

*Demonstração.* Se  $0 \leq P < x_{L_2}$ , então  $P < x^*$  e  $(x^*, y^*)$  é um equilíbrio em  $\Sigma^+$ , o ponto tangente  $T$  é visível e o pseudo-equilíbrio  $PN$  não existe. Além disso, o ciclo limite  $\Omega_2$  em  $X$  encontra-se completamente no lado direito da linha  $x = P$ , isto é, em  $\Sigma^+$ , logo  $\Omega = \Omega_2$  como observamos na Figura 3.1 (a).

Por outro lado, para qualquer solução partindo do ponto tangente  $T$  não encontra-se com  $\Sigma$  devido à estabilidade de  $\Omega_2$ , logo tal solução deve tender a  $\Omega_2$ . Além disso, qualquer trajetória que se inicia em  $\Sigma^+$  e que chega a  $\Sigma^s$  irá se mover até  $T$  ao longo do segmento deslizante e tende a  $\Omega_2$ . Portanto, qualquer trajetória que se inicia em  $\Sigma^+$  convergirá para  $\Omega_2 = \Omega$ .

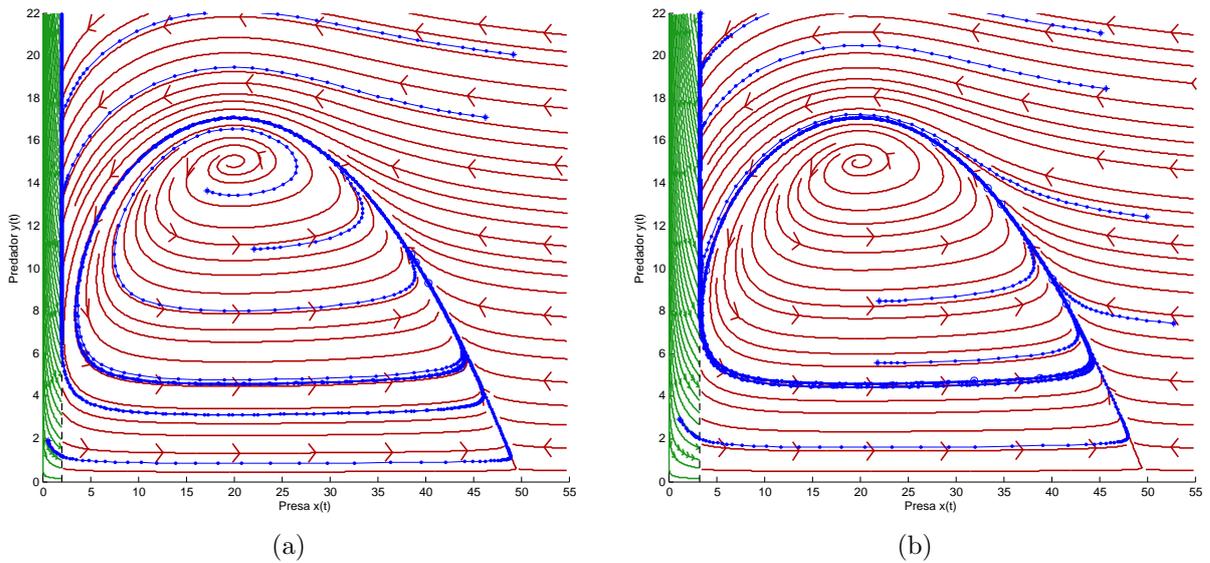


Figura 3.1: Retrato de fase do Sistema Planar de Filippov (3.1) quando  $(x^*, y^*)$  é um foco instável. Escolhemos  $P$  como um parâmetro de bifurcação e  $E = 0.2$  fixo. (a)  $P = 3.3$ ; (b)  $P = 10.3$ .

Qualquer solução que se inicia em  $\Sigma^-$  chegará a  $x = P$  num tempo finito. Além disso, as soluções que chegaram a  $\Sigma^s$  irão mover-se para  $T$  e tenderão a  $\Omega_2$ . É claro que qualquer trajetória que alcança a linha  $x = P$  abaixo do ponto tangente  $T$ , isto é, as trajetórias que alcançam a  $\Sigma^c$ , entrarão na região  $\Sigma^+$ , e conseqüentemente, tenderão a  $\Omega_2$ . Portanto, todas as soluções do Sistema Planar de Filippov (3.1) finalmente se aproximam para  $\Omega_2 = \Omega$ .

Agora vamos mostrar que  $0 \leq P < x_{L_2}$  é uma condição necessária para a existência e estabilidade do ciclo limite  $\Omega$ . É claro que  $P < 0$  não é possível. Se  $P = x_{L_2}$ , então contradiz a definição do ciclo limite  $\Omega$  do Sistema Planar de Filippov (3.1). Se  $P > x_{L_2}$ , somente uma parte do ciclo limite  $\Omega$  situa-se em  $\Sigma^+$  onde contradiz a estabilidade global do ciclo limite em  $X$ . Isso completa a prova.  $\square$

O seguinte teorema temos as condições para a existência do ciclo de Canard.

**Teorema 3.5.2.** *São válidas,*

- (1) *Existe um ciclo tangente globalmente assintoticamente estável do Sistema Planar de Filippov (3.1) se, e somente se  $x_{L_2} = P$ .*
- (2) *O Sistema Planar de Filippov (3.1) tem um ciclo  $\Gamma$  globalmente assintoticamente estável se, e somente se  $x_{L_2} < P < x^*$ .*

*Demonstração.* Temos:

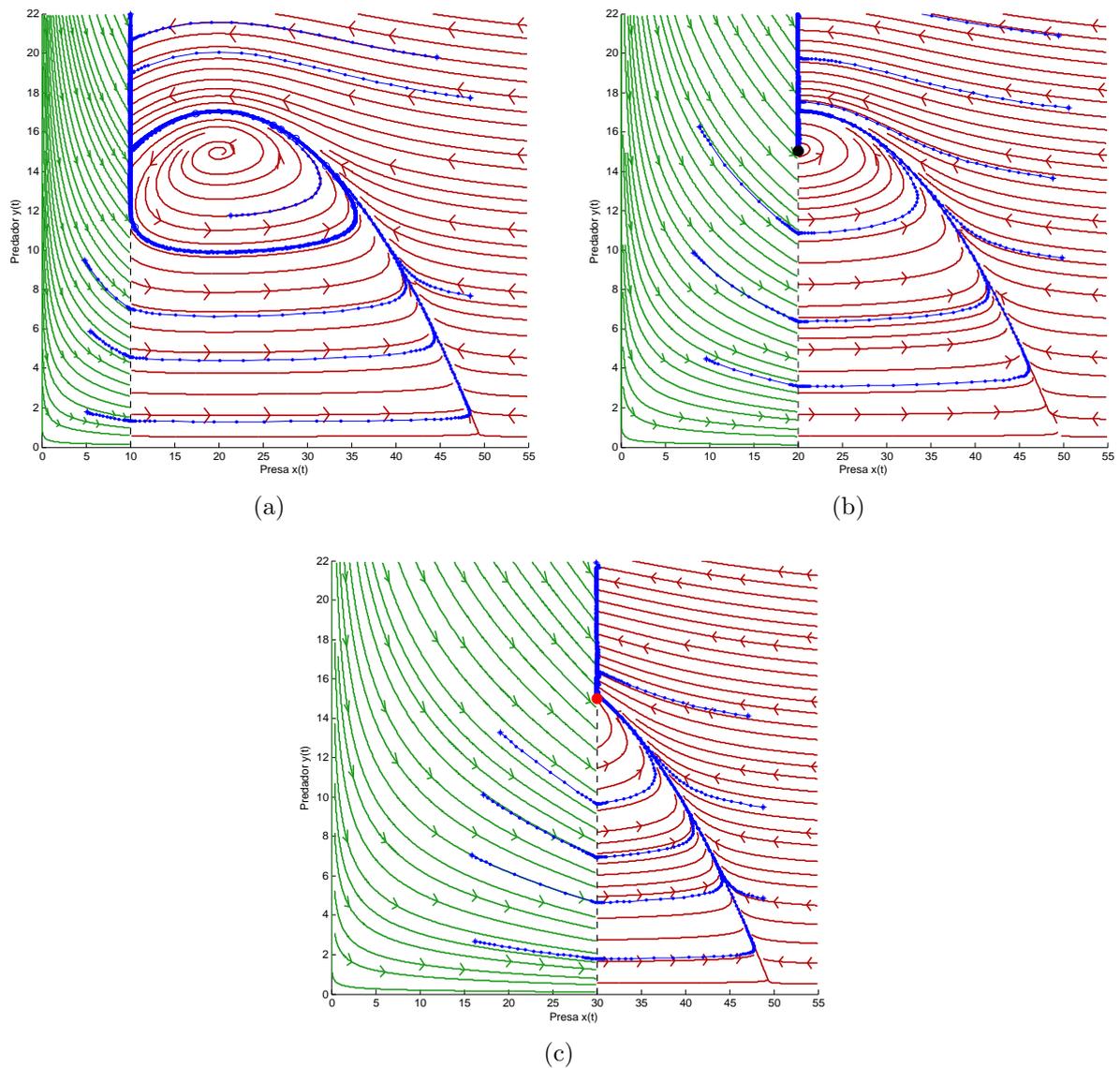


Figura 3.2: Retrato de fase do Sistema Planar de Filippov (3.1) quando  $(x^*, y^*)$  é um foco instável. Escolhemos  $P$  como um parâmetro de bifurcação e  $E = 0.2$  fixo. (a)  $P = 10$ , (b)  $P = 20$ , (c)  $P = 30$ . Ponto preto:  $(x^*, y^*)$ . Ponto vermelho:  $PN$

- (1) Se  $x_{L_2} = P$ , então o ciclo limite  $\Omega_2$  é tangente na linha  $x = P$  no ponto  $T$  como observamos na Figura 3.1 (b). Logo existe um ciclo tangente  $\Omega$  no Sistema Planar de Filippov (3.1) e sua estabilidade é semelhante na prova do Teorema 3.5.1. Por outro lado,  $P = x_{L_2}$  é uma condição necessária para a existência e estabilidade global do ciclo tangente no Sistema Planar de Filippov (3.1).
- (2) Se  $x_{L_2} < P < x^*$ , então  $(x^*, y^*)$  é um equilíbrio no Sistema Planar de Filippov (3.1) e o ponto tangente  $T$  é visível. Além disso, o ciclo limite  $\Omega_2$  não se encontra completamente em  $\Sigma^+$  e o pseudo-equilíbrio  $PN$  não existe acordo com o Lema 3.4.1. Para a existência do ciclo, precisamos provar que a solução do Sistema Planar de Filippov (3.1) começando a partir do ponto tangente  $T$  chegará a um ponto  $A_1 \in \Sigma^s$ . Seja

$\Gamma_1$  a trajetória que se inicia em  $T$ . De fato, a solução que se inicia em  $T$  chegará à parábola  $y = \frac{(x+5)(50-x)}{50}$  na região  $\Sigma^+$  devido à instabilidade de  $(x^*, y^*)$  como observamos na Figura 3.2 (a). Isto indica que o  $\Gamma_1$  deve encontrar a  $\Sigma^s$  no ponto  $A_1$ . Claramente,  $A_1 \neq T$ , caso contrário,  $\Omega$  seria um ciclo tangente. Além disso,  $\Gamma_1$  é um arco tipo focal porque  $(x^*, y^*)$  é um foco instável em  $\Sigma^+$  e  $Xf(p) \cdot Yf(p) < 0$  em  $p \in (T, A_1] \subset \Sigma^s$ . Pelo Lema 3.4.1, não existe o pseudo-equilíbrio  $PN$  em  $\Sigma^s$ , isso indica que  $\{X(p), Y(p)\}$  é um conjunto linearmente independente para  $p \in [T, A_1]$ . De acordo com o Teorema 2.3.1, o Sistema Planar de Filippov (3.1) tem um ciclo dado por  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \overline{TA_1}$  como observamos na Figura 3.2 (a). Qualquer solução do interior de  $\Gamma$  deve atingir o segmento  $\overline{TA_1} \subset \Sigma^s$  pois  $(x^*, y^*)$  é um foco instável. Além disso, qualquer solução que se inicia no ponto exterior de  $\Gamma$  converge para o ciclo  $\Gamma$  e a prova é semelhante do Teorema 3.5.1. Por conseguinte, existe um ciclo globalmente assintoticamente estável do Sistema Planar de Filippov (3.1).

Agora vamos provar que  $x_{L_2} < P < x^*$  é uma condição necessária para a existência e estabilidade do ciclo. Observamos que  $x_{L_2} < P$ , caso contrário, a condição  $P \leq x_{L_2}$  garante a existência e a estabilidade do ciclo tangente ou ciclo limite  $\Omega_2$  do Sistema Planar de Filippov (3.1), mas isto contraria o fato de que  $\Gamma$  é um ciclo. Por outro lado  $P < x^*$ , caso contrário, se  $P \geq x^*$ , então  $(x^*, y^*)$  não está definido no Sistema Planar de Filippov (3.1) e pelo Lema 3.4.1 o pseudo-equilíbrio  $PN \in \Sigma^s$  existe e é estável. Isto contradiz a estabilidade global do ciclo e a prova está completa. □

**Teorema 3.5.3.** *O pseudo-equilíbrio  $PN$  do Sistema Planar de Filippov (3.1) é globalmente assintoticamente estável se, e somente se,  $x^* \leq P < K$ .*

*Demonstração.* Se  $PN$  é globalmente assintoticamente estável, então  $(x^*, y^*)$  não está definido no Sistema Planar de Filippov (3.1), logo  $x^* \leq P$  e como  $P < K$  temos  $x^* \leq P < K$ .

Reciprocamente, se  $x^* \leq P < K$ , então  $(x^*, y^*)$  não está definido no Sistema Planar de Filippov (3.1) e o ponto tangente  $T$  é invisível. Pelo Lema 3.3.1, o pseudo-equilíbrio  $PN$  existe e é estável em  $\Sigma^s$  como observamos na Figura 3.2 (c). Portanto, precisamos mostrar que qualquer solução que começa em  $x = P$  para  $y_1 < y_p$  deve convergir a  $\Sigma^s$ . Qualquer solução partindo em  $\Sigma^-$  chegará a  $\Sigma^s$  ou  $\Sigma^c$ , mas se entra em  $\Sigma^c$ , as soluções estão em  $\Sigma^+$  atingem à linha  $x = P$  em  $\Sigma^s$ , portanto tal solução tende ao pseudo-equilíbrio  $PN$ . Logo  $PN$  é globalmente assintoticamente estável. □

**Caso (B):** Suponhamos que  $(x^*, y^*)$  é um foco estável em  $\Sigma^+$ , isto é,  $x^* > \frac{abK-1}{2ab}$  e  $\Delta < 0$ .

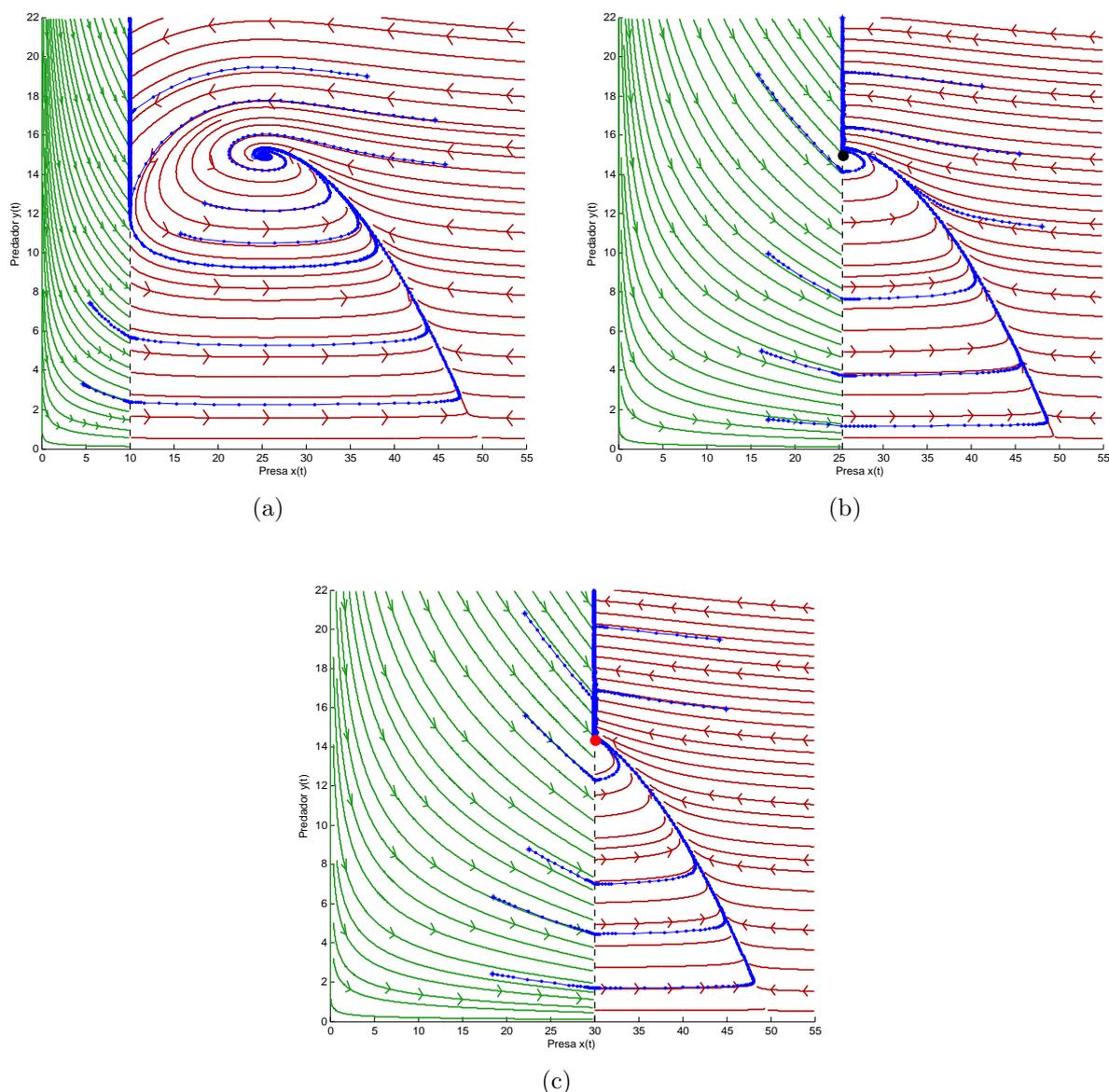


Figura 3.3: Retrato de fase do Sistema Planar de Filippov (3.1) quando  $(x^*, y^*)$  é um foco estável. Escolhemos  $P$  como um parâmetro de bifurcação e  $E = 0.22$  fixo. (a)  $P = 10$ ; (b)  $P \approx 25.405$ , (c)  $P = 30$ . Ponto preto:  $(x^*, y^*)$ . Ponto vermelho:  $PN$

**Teorema 3.5.4.** *São verdadeiras,*

- (1) *Suponha que  $0 \leq P < x^*$ , então  $(x^*, y^*)$  do Sistema Planar de Filippov (3.1) é globalmente assintoticamente estável;*
- (2) *O pseudo-equilíbrio  $PN$  do Sistema Planar de Filippov (3.1) é globalmente assintoticamente estável se, e somente se,  $x^* \leq P < K$ .*

*Demonstração.* Se  $0 \leq P < x^*$ , então  $(x^*, y^*)$  é um equilíbrio do Sistema Planar de Filippov (3.1) e sua estabilidade é semelhante à prova do Teorema 3.5.1 observando na Figura 3.3 (a). A prova de (2) é semelhante à prova do Teorema 3.5.3 observando na Figura 3.3 (c).  $\square$

Parâmetro	Unidade	Valor
$a$	Por dia	0.2
$b$	Por presa	1
$c$	Por dia	0.45
$d$	Por dia	0.2
$\rho$	Por dia	1
$K$	Número por unidade de área	50
$q$	Por dia	0.8
$P$	Número por unidade de área	0 - 50

Tabela 3.1: Valores dos parâmetros do Sistema Planar de Filippov (3.1).

### 3.6 Análise de bifurcação

Por fim, vamos analisar as bifurcações presentes do Sistema Planar de Filippov (3.1) no plano  $(E, P)$  considerando os seguintes valores dos parâmetros dados pela Tabela 3.1.

Em primeiro lugar, o Sistema Planar de Filippov (3.1) apresenta uma *Bifurcação Grazing* quando o ciclo limite  $\Omega_2$  é tangente a  $T \in \Sigma^s$  para  $P = x_{L_2}$ . Por exemplo, quando  $E = 0.2$  e  $P \approx 3.3$ , o ciclo limite estável  $\Omega_2$  torna-se um ciclo tangente como observamos na Figura 3.1 (b). Neste caso, o ciclo tangente é atrator com uma órbita de entrada estável deslizando. Quando  $P < x_{L_2}$ , então  $\Omega_2$  é um ciclo limite estável que pode coexistir com o ponto tangente visível  $T$  como mostramos na Figura 3.1 (a) para  $P = 3.3$ . O ciclo tangente estável torna-se um ciclo para  $x_{L_2} < P < x^* = \frac{d+qE}{a(c-(d+qE)b)}$  como observamos na Figura 3.2 (a). Notemos que não é possível determinar de forma explícita a curva da bifurcação Grazing pois o ciclo limite  $\Omega_2$  não é conhecido na forma fechada.

Em segundo lugar, o Sistema Planar de Filippov (3.1) apresenta uma *Bifurcação Foco- $\Sigma$*  quando os pontos  $(x^*, y^*)$  e  $T$  colidem simultaneamente sempre que  $P$  passa através de  $x^*$ . Para  $P = x^* = \frac{d+qE}{a(c-(d+qE)b)}$ , o ciclo estável encolhe-se e o equilíbrio  $(x^*, y^*)$  com o ponto de tangência visível  $T$  colidem formando um ponto estável como observamos na Figura 3.2 (b) com  $P = 21$ . Quando  $x_{L_2} < P < x^* = \frac{d+qE}{a(c-(d+qE)b)}$ , o ciclo  $\Gamma$  passa através do ponto tangente visível  $T$  e rodeia o foco instável  $(x^*, y^*)$ . Além disso, o foco instável  $(x^*, y^*)$  e o ponto tangente visível  $T$  coexistem como mostramos na Figura 3.2 (a). Para  $P > x^* = \frac{d+qE}{a(c-(d+qE)b)}$ , existe um pseudo-equilíbrio estável  $PN$  e um ponto tangente invisível  $T$  como observamos na Figura 3.2 (c) para  $P = 35$ .

Além disso, existe outra bifurcação Foco- $\Sigma$  para o Sistema Planar de Filippov (3.1) quando  $(x^*, y^*)$  é um foco estável e  $P = x^* = \frac{d+qE}{a(c-(d+qE)b)}$  como observamos na Figura 3.3 (b) com  $P \approx 25.405$ . O foco estável  $(x^*, y^*)$  e o ponto tangente visível  $T$  coexistem quando

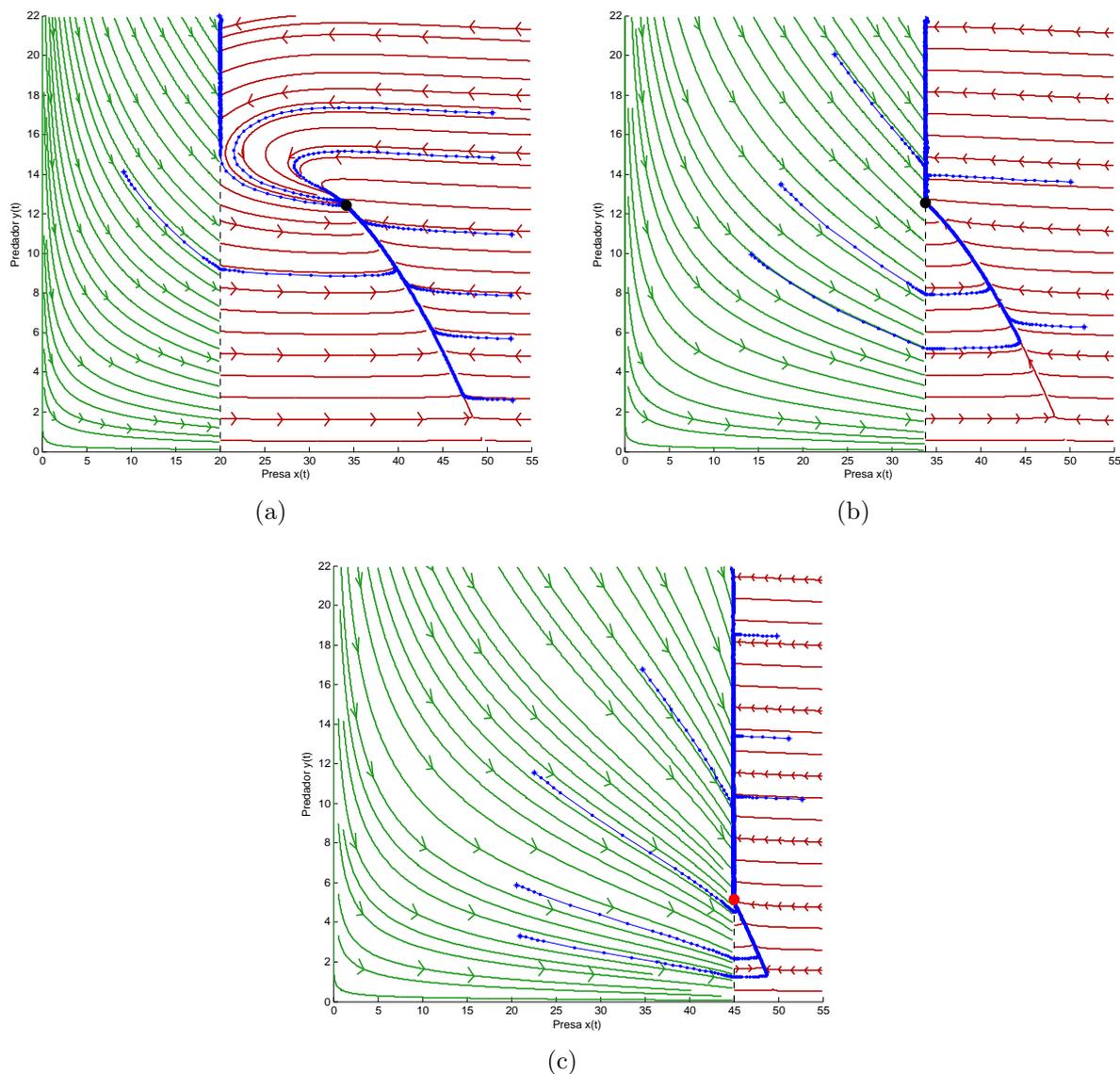


Figura 3.4: Retrato de fase do Sistema Planar de Filippov (3.1) quando  $(x^*, y^*)$  é um nó estável. Escolhemos  $P$  como um parâmetro de bifurcação e  $E = 0.24$ . (a)  $P = 20$ ; (b)  $P \approx 33.793$ , (c)  $P = 45$ . Ponto preto:  $(x^*, y^*)$ . Ponto vermelho:  $PN$ .

$0 < P < x^* = \frac{d+qE}{a(c-(d+qE)b)}$  como observamos na Figura 3.3 (a). Além disso, eles colidem em  $P = x^* = \frac{d+qE}{a(c-(d+qE)b)}$  e existe um pseudo-equilíbrio estável  $PN$  com um ponto tangente invisível  $T$  como mostrado na Figura 3.3 (c). Essa bifurcação mostra como um foco estável torna-se um pseudo-equilíbrio estável.

Por outro lado, o Sistema Planar de Filippov (3.1) apresenta uma *Bifurcação Nó- $\Sigma$*  quando o nó estável  $(x^*, y^*)$  colide com a linha  $x = P$ . Na Figura 3.4 (a), quando  $P = 20$ , a trajetória que atinge  $\Sigma^s$  se move para o ponto de tangência visível  $T$  e tende para o nó estável  $(x^*, y^*)$ , enquanto as trajetórias que não atingem o segmento deslizante também tendem para o nó estável. Por conseguinte, existe um nó globalmente assintoticamente

estável  $(x^*, y^*)$ . Quando  $P \approx 33.793$ ,  $(x^*, y^*)$  colide com  $T$  formando um ponto globalmente assintoticamente estável como mostramos na Figura 3.3 (b). Quando  $P$  aumenta, o nó estável  $(x^*, y^*)$  não está definido no Sistema Planar de Filippov (3.1) e existe um pseudo-equilíbrio  $PN$  globalmente assintoticamente estável, que fica perto do ponto de tangência invisível  $T$  como observamos na Figura 3.4 (c).

Por outro lado, se  $(x^*, y^*)$  é um foco instável, então a *Bifurcação de Hopf* corresponde á colisão do ciclo limite  $\Omega_2$  com o foco instável, onde o ciclo encolhe-se num foco estável quando os parâmetros variam. A bifurcação de Hopf ocorre quando os valores próprios da matriz  $DX(x^*, y^*)$  tem parte real nula, isto é,

$$\text{tr}DX(x^*, y^*) = 0 \leftrightarrow abK(b(d + qE) - c) + b(d + qE) + c = 0,$$

logo

$$E = E_H = \frac{abK(c - bd) - (c + bd)}{bq(abK + 1)}$$

e a curva que separa as regiões 1 e 2 na Figura 3.5 é dada por  $P = x_{L_2}$ . Além disso, observamos que se  $(x^*, y^*)$  é um foco instável, isto é,  $x^* < \frac{abK-1}{2ab}$  e  $\Delta < 0$ , então

$$E_H = \frac{abK(c - bd) - (c + bd)}{bq(abK + 1)} < E,$$

logo, nas regiões 1 e 2 existe um foco instável e um único ciclo, ciclo tangente, ou ciclo limite globalmente estável quando  $P < x_{L_2}$ ,  $P = x_{L_2}$  e  $x_{L_2} < P$ . Respectivamente, para  $E_H > E$  e  $\Delta < 0$ , então  $x^* > \frac{abK-1}{2ab}$  e  $(x^*, y^*)$  é um foco estável.

Por outro lado, quando  $\Delta = 0$ , o foco estável  $(x^*, y^*)$  torna-se num nó estável e sua colisão com o ponto sela  $(x^*, y^*)$  sobre o eixo  $x$  é uma *Bifurcação Transcrítica* determinada por  $x^* = K$ , isto é,

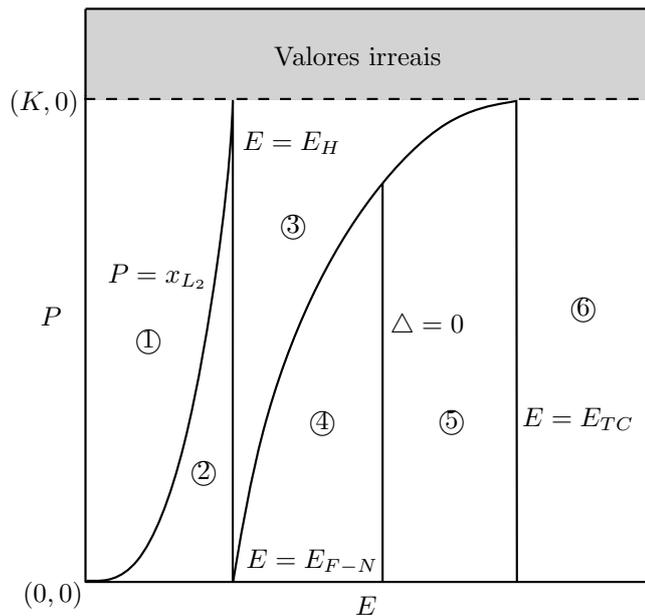
$$E = E_{TC} = \frac{aK(c - bd) - d}{q(abK + 1)}.$$

Da mesma forma, se  $(x^*, y^*)$  colide com  $\Sigma$ , isto é,  $P = x^* = \frac{d+qE}{a(c-(d+qE)b)}$ , então,

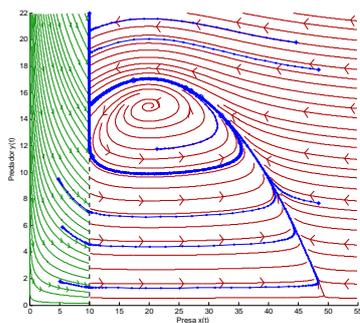
$$E = E_{F-N} = \frac{aP(c - bd) - d}{q(abP + 1)}$$

e suas interseções, quando  $P = 0$  ou  $P = K$ , são dadas por

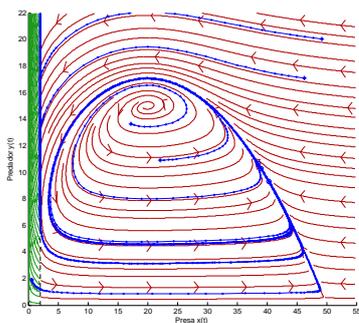
$$\begin{aligned} E_{F-N}(0) &= E_H(0) \\ E_{F-N}(K) &= E_{TC}(K) \end{aligned}$$



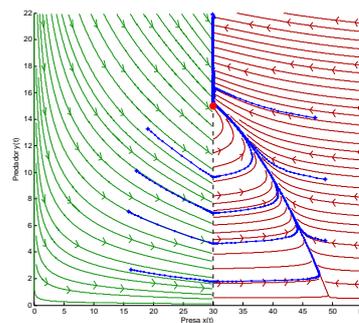
(a) Plano  $(E, P)$



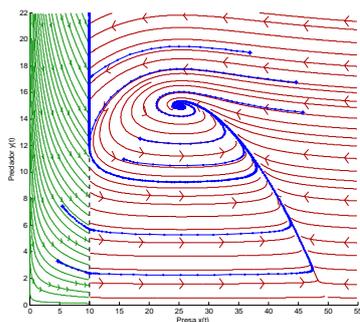
(b) Região 1



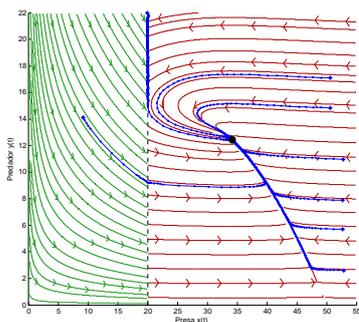
(c) Região 2



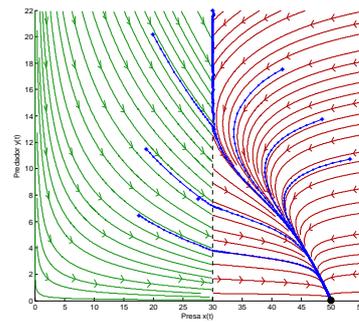
(d) Região 3



(e) Região 4



(f) Região 5



(g) Região 6

Figura 3.5: Curvas de Bifurcações do Sistema Planar de Filippov (3.1) no espaço  $(E, P)$  com parâmetro mostrados na Tabela 3.1. Na região 1 existe um ciclo; na região 2 um ciclo limite em  $X$ ; na região 3 um pseudo-equilíbrio estável; na região 4 um foco estável; na região 5 um nó estável; na região 6 um ponto sela.

dividindo a região 3 nas regiões 4 e 5.

A fim de descobrir se detectamos todas as bifurcações da região de interesse, resta verificar

se existe uma colisão de  $T$  com  $(x^*, y^*)$  no eixo  $x$ , mas isso implicaria que  $P = K$  e não é possível.

Na Figura 3.5 mostramos o diagrama de bifurcações no Sistema Planar de Filippov (3.1) no plano  $(E, P)$  e com valores dos parâmetros mostrados na Tabela 3.1, onde  $E = E_H \approx 0.2102$ ,  $E = E_{F-N} = \frac{5(P-4)}{16(P+5)}$  e  $E = E_{TC} \approx 0.2613$ . Assim, os comportamentos dinâmicos do Sistema Planar de Filippov (3.1) foram mostrados em diferentes regiões na Figura 3.5.

# Anexos

---

# Código Matlab Modelo

## Arquivo funode.m

```

1 function dy = funode(t,y)    %[L S]
2 global a b c d q r K E T22
3 dy = zeros(2,1);           %Um vetor columna
4 if y(1) < T22              %Campo vetorial esquerdo
5 dy(1) = y(1).*(r.*(1-y(1)./K));
6 dy(2) = y(2).*(-d-q.*E);
7 elseif T22 == y(1)         %Campo vetorial deslizante
8 dy(1) = 0;
9 dy(2) = (T22.*(1-a.*b.*T22).*(K.*y(2).*(d+q.*E)+c.*r.*T22.*(T22-K)))/(K.*(
    a.*b.*T22+1));
10 elseif T22 < y(1)         %Campo vetorial direito
11 dy(1) = y(1).*(r.*(1-y(1)./K)-(a.*y(2))./(1+a.*b.*y(1)));
12 dy(2) = y(2).*(c.*a.*(y(1)./(1+a.*b.*y(1)))-d-q.*E);
13 end
14 end

```

## Arquivo event.m

```

1 function [value, isterminal, direction] = events(t,y)
2 global T22
3 ev1 = T22-y(1);
4 value = ev1;
5 isterminal = 0;
6 direction = 0;
7 end

```

## Arquivo diagrama.m

```

1 %% Sistema Planar de Filippov com região deslizando Vertical.
2 global a b c d q r K E k1 k2 k3 k4 T22
3 hold on
4 k1=0;
5 k2=55;
6 k3=0;
7 k4=22;
8
9 %Parâmetros Sistema de Filippov
10 a=input('digite valor de a= ');
11 b=input('digite valor de b= ');
12 c=input('digite valor de c= ');
13 d=input('digite valor de d= ');
14 q=input('digite valor de q= ');
15 r=input('digite valor de r= ');
16 K=input('digite valor de K= ');
17 E=input('digite valor de E= ');
18
19 %Valor de Comutação
20 T22=input('digite valor de P= ');
21
22 %% Campo vetorial Esquerdo
23 n=50;
24
25 %Eixo x
26 Li1=k1;
27 Lf1=T22;
28 evL1=linspace(Li1, Lf1, n);
29
30 %Eixo y
31 Si1=k3;
32 Sf1=k4;

```

```

33 evS1=linspace ( Si1 , Sf1 , n ) ;
34 [ L1 , S1 ] = meshgrid ( evL1 , evS1 ) ;
35 fL1=L1.*( r.*(1-L1./K) ) ; %dx/ dt=x( r(1-x/K) )
36 fS1=S1.*(-d-q.*E) ; %dy/ dt=y(-d-qE)
37 h3=streamslice ( L1 , S1 , fL1 , fS1 ) ;
38 set ( h3 , ' color ' , [ 0.1 0.6 0.1 ] ) ;
39 set ( h3 , ' LineWidth ' , 1.3 ) ;
40
41 %% Campo vetorial deslizante
42
43 %Eixo x
44 Li2=T22 ;
45 Lf2=T22 ;
46 evL2=linspace ( Li2 , Lf2 , n ) ;
47
48 %Eixo y
49 Si2=k3 ;
50 Sf2=k4 ;
51 evS2=linspace ( Si2 , Sf2 , n ) ;
52 [ L2 , S2 ] = meshgrid ( evL2 , evS2 ) ;
53 fL2=0 ;
54 fS2=(T22.*(1-a.*b.*T22) .*(K.*S2.*(d+q.*E)+c.*r.*T22.*(T22-K))) ./ (K.*(a.*b.*
    T22+1)) ;
55
56 %% Campo vectorial Direito
57
58 %Eixo x
59 Li3=T22 ;
60 Lf3=k2 ;
61 evL3=linspace ( Li3 , Lf3 , n ) ;
62
63 %Eixo y
64 Si3=k3 ;
65 Sf3=k4 ;
66 evS3=linspace ( Si3 , Sf3 , n ) ;
67 [ L3 , S3 ] = meshgrid ( evL3 , evS3 ) ;
68 fL3=L3.*( r.*(1-(L3./K)) -((a.*S3)./(1+a.*b.*L3)) ) ; %dx/ dt=x( r(1-x/K)-ay
    /(1+abx) )
69 fS3=S3.*(((c.*a.*L3)./(1+a.*b.*L3))-d-q.*E) ; %dy/ dt=y( cax/(1+abx)-
    d-qE)
70 h4=streamslice ( L3 , S3 , fL3 , fS3 ) ;
71
72 set ( h4 , ' color ' , [ 0.7 0.0 0.0 ] ) ;
73 set ( h4 , ' LineWidth ' , 1.3 ) ;
74

```

```

75 %% Retrato de Fase Sistema de Fiippov
76 xlabel('x');
77 ylabel('y');
78 axis([k1 k2 k3 k4]);
79 figure(1);
80 m=plot([Li3 Li3],[Si3 Sf3],'k');
81 set(m,'color','r');
82 xlabel('Presas x(t)'); ylabel('Predador y(t)');
83 set(m,'color','black');
84
85 %% Integração
86 numero =8;
87 to=1;
88 tf=100;
89 tol = 1e-4;
90 options = odeset('RelTol',tol,'AbsTol',[tol tol],'Events',@events);
91 for i =1:numero
92     [Lo,So] = ginput(1);
93     [t,Y,te,ye,ie]=ode45(@funode,[to tf],[Lo So],options);
94     plot(Y(:,1),Y(:,2),'.','MarkerSize',5,'color','b')
95     plot(Y(:,1),Y(:,2),'b');
96     plot(Y(1,1),Y(1,2),'*b');
97     plot(Y(end,1),Y(end,2),'ob');
98 end
99
100 %% Gráficas com respecto al tempo
101 figure(2);
102 subplot(1,2,1);           %x vs t
103 plot(t,Y(:,1),'b');
104 xlabel('t');ylabel('x');
105 subplot(1,2,2);         %y vs t
106 plot(t,Y(:,2),'b');
107 xlabel('t');ylabel('y');
108 load chirp;
109 y1 = y; Fs1 = Fs;
110 load gong;
111 wavplay(y,Fs);

```



---

## Referências Bibliográficas

- [1] V.I. ARNOLD. *Ordinary Differential Equations*. The MIT Press, Cambridge, MA, London, 1973, translated from Russian and edited by Richard A. Silverman.
- [2] J. SOTOMAYOR. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Projeto Euclides, vol. 11, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.
- [3] H. I. FREEDMAN. *Deterministic Mathematical Models in Population Ecology*. Marcel Dekker, New York, 1980.
- [4] A. F. FILIPPOV. *Differential equations with discontinuous righthand sides*. Mathematics and its Applications (Soviet Series), Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1988.
- [5] Y. KUANG, H.I. FREDMAN. *Uniqueness of Limit Cycles in Gause-Type Models of Predator-Prey Systems*. Mathematical Biosciences, 1988.
- [6] Y. KUZNETSOV. *Elements of applied bifurcation theory*. Volumen 112 of Appl. Math. Sc. Springer, New York, 1995.
- [7] J. D. MURRAY. *Mathematical Biology: I. An Introduction*. Third Edition, Springer, New York, 2002.
- [8] Y. KUZNETSOV, S. RINALDI, A. GRAGNANI. *One-Parameter Bifurcations in Planar Filippov Systems*. International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 13, No. 8, 2003.
- [9] L. EDELSTEIN-KESHET. *Mathematical Models in Biology*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.

- 
- [10] C.A. BUZZI, T. DE CARVALHO, P.R. DA SILVA. *Canard cycles and poincare index of Non-smooth vector fields on the plane*. Journal of Dynamical and Control Systems, 2010.
- [11] M. GUARDIA, T.M. SEARA, M.A. TEIXEIRA. *Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov Systems*. Journal of Differential Equations, 2010.
- [12] J. YANG, S. TANG, R. A. CHEKE. *Global stability and sliding bifurcations of a non-smooth Gause predator-prey system*. Applied Mathematics and Computation, 2013.