

Universidade Federal de Minas Gerais  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Melhoramentos em Percolação

Felipe César Ferreira

Orientador: Bernardo Nunes Borges de Lima

Belo Horizonte  
2016



Universidade Federal de Minas Gerais  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Melhoramentos em Percolação

Felipe César Ferreira

Dissertação apresentada à banca examinadora do corpo docente de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Bernardo Nunes Borges de Lima

Belo Horizonte  
2016

Ferreira, F. C.

Melhoramentos em Percolação

30 páginas

Dissertação - Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais. Departamento de Matemática.

1. Percolação

2. Enhancements

I. Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais. Departamento de Matemática.

# Melhoramentos em Percolação

Aluno: Felipe César Ferreira

## Banca Examinadora

---

Prof. Dr. Marco Vinicius Bahi Aymone  
Universidade Federal de Minas Gerais  
Departamento de Matemática

---

Prof. Dr. Sokol Ndreca  
Universidade Federal de Minas Gerais  
Departamento de Estatística

---

Prof. Dr. Bernardo N. Borges de Lima  
Universidade Federal de Minas Gerais  
Departamento de Matemática  
(Orientador)

---

Prof. Dr. Roger William Câmara Silva  
Universidade Federal de Minas Gerais  
Departamento de Estatística  
(Suplente)

# Agradecimentos

Agradeço a Deus por me dar forças para chegar até aqui.

Agradeço à minha mãe Nelcilene e ao meu pai Maurílio por sempre me incentivarem a estudar.

Agradeço à Mariana pelo apoio, incentivo e companheirismo e por me ajudar a revisar este trabalho.

Agradeço ao meu orientador Bernardo pelo apoio e conselhos que sempre me deu.

# Resumo

Um enhancement é uma regra que acrescenta vértices ou elos à malha original. Aizenman e Grimmett afirmaram no artigo *Strict monotonicity for critical points in percolation and ferromagnetic models*, *Journal of Statistical Physics*, 63(5-6):817-835,1991 [1], que um tipo especial de enhancement diminui o ponto crítico na malha retangular, tanto sobre vértices quanto sobre elos, em qualquer dimensão. Bollobás, Riordan e Balister perceberam uma falha neste argumento para percolação de vértices em  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 1$  e o demonstraram em dimensão 2 e 3. Neste trabalho, inicialmente definiremos o ambiente de estudo e, após isso, será definido com precisão o enhancement. Feito isso descreveremos com detalhes o argumento de Aizenman e Grimmett. Em seguida mostraremos o contraexemplo dado por Bollobás, Riordan e Balister para esse argumento e os detalhes das demonstrações feitas por eles para a malha retangular de 2 e 3 dimensões. No final faremos um breve comentário sobre a percolação de elos na malha retangular  $d$ -dimensional.

# Sumário

Resumo	iii
Introdução	1
<b>1 Preliminares</b>	<b>2</b>
1.1 Definindo o ambiente . . . . .	2
1.2 O ponto crítico . . . . .	3
1.3 A Fórmula de Russo . . . . .	5
<b>2 Enhancements</b>	<b>8</b>
2.1 Definições . . . . .	8
2.2 O argumento de Aizenman – Grimmett . . . . .	11
2.3 O argumento de Bollobás – Balister – Riordan . . . . .	17
<b>3 Demonstrações em Casos Particulares</b>	<b>21</b>
3.1 Malha Retangular . . . . .	21
3.2 Malha Cúbica . . . . .	23
3.3 Percolação de Elos em $\mathbb{Z}^d$ . . . . .	28
Referências Bibliográficas	30

# Introdução

Em 1991 Aizenman e Grimmett no artigo *Strict monotonicity for critical points in percolation and ferromagnetic models*, Journal of Statistical Physics, 63(5-6):817-835,1991 [1], afirmaram que todo enhancement essencial de percolação de vértices ou de elos diminui o ponto crítico. Trata-se de um importante resultado com diversas aplicações como por exemplo em ferromagnetismo na física e modelos epidemiológicos da biologia, dentre muitos outros. Bollobás, Balister e Riordan em [2] mostram que a afirmação de Aizenman e Grimmett não era generalizável da forma que foi dita.

No primeiro capítulo vamos definir o que é percolação e as principais entidades utilizadas no seu estudo. Apresentaremos uma demonstração da Fórmula de Russo que será essencial no que se seguirá.

No segundo capítulo definiremos *enhancement* e *enhancement essencial* que é um tipo de enhancement particular para o qual o resultado de diminuir o ponto crítico será demonstrado. Apresentaremos o argumento de Aizenman e Grimmett e o contraexemplo apresentado por Bollobás, Balister e Riordan para este argumento.

Por fim, no terceiro capítulo apresentaremos a demonstração alternativa dada por Bollobás, Ballister e Riordan para o resultado em  $\mathbb{Z}^2$  e  $\mathbb{Z}^3$  além de fazermos um rápido comentário sobre o caso de percolação de elos em  $\mathbb{Z}^d$ .

É importante ressaltar que o resultado para percolação de vértices em  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d > 3$  continua em aberto.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Definindo o ambiente

O ambiente onde trabalharemos será  $\mathbb{Z}^d$  onde  $\mathbb{Z}$  denota o conjunto dos números inteiros e  $d \geq 1$  é um número inteiro qualquer. Será usual chamarmos  $\mathbb{Z}^d$  apenas de *malha* e os pontos da malha de *vértices*. Para  $u, v \in \mathbb{Z}^d$  utilizaremos duas definições de distância (que são equivalentes) de  $u$  para  $v$ :

$$\delta_1(u, v) = \sum_{i=1}^d |u_i - v_i|,$$

$$\delta_\infty(u, v) = \sup_{1 \leq i \leq d} |u_i - v_i|$$

onde  $u_i$  denota a  $i$ -ésima coordenada de  $u$ . Quando utilizarmos a primeira definição de distância dada acima, denotaremos por métrica  $\ell_1$ , se utilizarmos a segunda definição denotaremos por métrica  $\ell_\infty$ . Dois vértices serão ditos *adjacentes* se a distância entre eles for igual a 1. Dadas as duas definições de distância, teremos duas definições de bola fechada de raio  $L$  centrada em  $u$ , que serão  $B_L^\infty(u) = \{v \in \mathbb{Z}^d : \delta_\infty(u, v) \leq L\}$  e  $B_L^1(u) = \{v \in \mathbb{Z}^d : \delta_1(u, v) \leq L\}$ . Igualmente teremos duas definições para a esfera de raio  $L$  centrada em  $u$ , a saber  $S_L^\infty(u) = \{v \in \mathbb{Z}^d : \delta_\infty(u, v) = L\}$  e  $S_L^1(u) = \{v \in \mathbb{Z}^d : \delta_1(u, v) = L\}$ . Quando denotarmos apenas  $B_L(u)$  ou  $S_L(u)$  significa que podemos usar qualquer uma das definições anteriores. Como as definições de distância dadas acima são equivalentes, utilizaremos determinada bola ou esfera de acordo com a conveniência do que se deseja mostrar. Também denotaremos  $B_L(0) = B_L$  e  $S_L(0) = S_L$ .

Seja  $0 \leq p \leq 1$ . Na percolação de vértices, cada vértice estará aberto com probabilidade  $p$  e fechado com probabilidade  $1 - p$ , independentemente dos demais vértices. Formalmente, o espaço amostral será dado por  $\Omega = \prod_{u \in \mathbb{Z}^d} \{0, 1\}$ . Os pontos deste espaço denotados por  $\omega = (\omega(u) : u \in \mathbb{Z}^d)$  serão chamados *configurações*;  $\omega(u) = 1$  significa que

o vértice  $u$  está ativado (ou aberto) e  $\omega(u) = 0$  significa que o vértice  $u$  está desativado (ou fechado). Será usual considerarmos uma configuração apenas como o conjunto de seus vértices ativados, assim, diremos que uma configuração é finita quando ela possuir um número finito de vértices abertos. Denotaremos  $\mathcal{F}$  a  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$  gerada por cilindros. Tomamos então a medida produto com densidade  $p$  em  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Essa medida será

$$P_p = \prod_{u \in \mathbb{Z}^d} \mu_u$$

onde  $\mu_u$  é a medida de Bernoulli em  $\{0, 1\}$  dada por  $\mu_u(\omega(u) = 1) = p$  e  $\mu_u(\omega(u) = 0) = 1 - p$ . No caso da percolação de elos, as definições acima seguem as mesmas, mas serão os elos que ligam dois vértices adjacentes que estarão ativados ou desativados, e não os vértices. Para maiores detalhes consulte [4].

Diremos que  $\omega \leq \omega'$  se, e somente se,  $\omega(u) \leq \omega'(u)$  para todo  $u \in \mathbb{Z}^d$ . Com essa relação parcial de ordem definimos que um evento  $A \in \mathcal{F}$  é crescente se  $I_A(\omega) \leq I_A(\omega')$  sempre que  $\omega \leq \omega'$  onde

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A \\ 0 & \text{se } \omega \notin A. \end{cases}$$

Em outras palavras, isso quer dizer que a ativação de vértices não impede o evento de acontecer.

Consideremos agora o subconjunto de vértices de  $\omega$  contendo apenas os vértices abertos. As componentes conexas desse subconjunto serão chamadas de aglomerados abertos. Denotaremos  $C(u)$  como o aglomerado aberto contendo  $u$  e  $|C(u)|$  a quantidade de vértices em  $C(u)$ . Será usual denotarmos  $C = C(0)$ .

Para finalizar, denotaremos  $\mathcal{R}_L \in \mathcal{F}$  como sendo o evento em que existe um caminho aberto conectando 0 a  $S_L$ .

## 1.2 O ponto crítico

A probabilidade de percolação  $\theta(p)$  é dada pela probabilidade de que um dado vértice pertença a um aglomerado aberto infinito. Pela invariância da translação da malha, sem perda de generalidade, podemos considerar tal vértice como sendo a origem. Daí definimos

$$\theta(p) = P_p(|C| = \infty).$$

É claro que  $\theta(0) = 0$  e  $\theta(1) = 1$ . Intuitivamente parece claro que  $\theta$  é uma função não decrescente em  $p$ . Verifiquemos este fato.

**Proposição 1.** A função  $\theta(p)$  é não decrescente em  $p$ .

*Demonstração.* Seja  $(\mathcal{X}(u) : u \in \mathbb{Z}^d)$  uma família de variáveis aleatórias onde cada  $\mathcal{X}(u)$  possui distribuição uniforme em  $[0, 1]$  e  $p$  tal que  $0 \leq p \leq 1$ . Definamos  $\eta_p$  por

$$\eta_p(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathcal{X}(u) < p \\ 0 & \text{se } \mathcal{X}(u) \geq p. \end{cases}$$

Notemos que cada  $\eta_p(u)$  é independente dos demais e  $P(\eta_p(u) = 1) = p$  e  $P(\eta_p(u) = 0) = 1 - p$ . Perceba que  $\eta_p \in \Omega$ , ou seja,  $\eta_p$  é uma configuração. Com esse dispositivo podemos comparar processos distintos de percolação. E isso é exatamente o que queremos pois, se  $p_1, p_2 \in [0, 1]$  com  $p_1 < p_2$ , queremos comparar  $\theta(p_1)$  e  $\theta(p_2)$ . Observemos que  $\eta_{p_1} \leq \eta_{p_2}$ , portanto se um vértice  $u$  está aberto em  $\eta_{p_1}(u)$  então  $1 = \eta_{p_1}(u) \leq \eta_{p_2}(u)$ , logo o vértice  $u$  também está aberto em  $\eta_{p_2}$  e temos

$$\theta(p_1) = P(|C| = \infty \in \eta_{p_1}) \leq P(|C| = \infty \in \eta_{p_2}) = \theta(p_2).$$

□

Parte fundamental na teoria de percolação é existência de um valor crítico  $p_c = p_c(d)$  tal que

$$\theta(p) \begin{cases} = 0 & \text{se } p < p_c \\ > 0 & \text{se } p > p_c. \end{cases}$$

$p_c(d)$  é chamado *ponto crítico* e definido formalmente por

$$p_c(d) = \inf\{p ; \theta(p) > 0\}.$$

**Proposição 2.** A probabilidade  $\psi(p)$  de que existe um aglomerado infinito satisfaz

$$\psi(p) = \begin{cases} 0 & \text{se } \theta(p) = 0 \\ 1 & \text{se } \theta(p) > 0. \end{cases}$$

*Demonstração.* Notemos que o evento  $\{\mathbb{Z}^d \text{ contém um aglomerado aberto infinito}\}$  não depende do estado de um número finito de vértices. Pela lei zero-um de Kolmogorov (consulte [3] para maiores detalhes)  $\psi$  toma apenas os valores 0 e 1. Se  $\theta(p) = 0$

$$\psi(p) = P_p\left(\bigcup_{u \in \mathbb{Z}^d} |C(u)| = \infty\right) \leq \sum_{u \in \mathbb{Z}^d} P_p(|C(u)| = \infty) = 0.$$

Por outro lado, se  $\theta(p) > 0$

$$\psi(p) = P_p\left(\bigcup_{u \in \mathbb{Z}^d} |C(u)| = \infty\right) \geq P_p(|C| = \infty) > 0,$$

pois  $\{\bigcup_{u \in \mathbb{Z}^d} |C(u)| = \infty\} \supset \{|C| = \infty\}$ . Assim pela lei zero-um de Kolmogorov temos que  $\psi(p) = 1$ .  $\square$

A malha  $d$ -dimensional  $\mathbb{Z}^d$  pode ser incorporada a  $\mathbb{Z}^{d+1}$  de maneira natural como a projeção de  $\mathbb{Z}^{d+1}$  em um subespaço gerado por suas  $d$  primeiras coordenadas. Dessa forma, sempre que a origem estiver em um aglomerado infinito em  $\mathbb{Z}^d$ , estará também em um aglomerado infinito de  $\mathbb{Z}^{d+1}$  e, portanto,  $\theta(p) = \theta_d(p)$  é não crescente em  $d$ , daí  $p_c(d+1) \leq p_c(d)$  para  $d \geq 1$ .

### 1.3 A Fórmula de Russo

Seja  $A \in \mathcal{F}$  um evento qualquer e  $\omega$  uma configuração. Chamaremos o vértice  $u$  de *pivotal* para o par  $(A, \omega)$  se  $I_A(\omega) \neq I_A(\omega')$ , com  $\omega'$  sendo uma configuração que possui o estado de todos os seus vértices igual ao estado dos vértices  $\omega$ , exceto em  $u$  onde  $\omega'(u) = 1 - \omega(u)$ . Ou seja, a ocorrência ou não ocorrência de  $A$  depende de forma indispensável do vértice  $u$ . O evento  $\{u \text{ é pivotal para } A\}$  é o conjunto de configurações  $\omega$  para os quais  $u$  é pivotal para  $(A, \omega)$ . Notemos que este evento depende apenas do estado dos vértices diferentes de  $u$ , ele é independente do estado de  $u$  propriamente dito. Outro ponto a ser notado é que se  $A$  é um evento crescente então  $u$  é pivotal para  $A$  se, e somente se,  $A$  ocorre quando  $u$  está ativado e não ocorre quando  $u$  está desativado.

**Teorema 3** (Fórmula de Russo). Seja  $A$  um evento crescente que depende do estado de um número finito de vértices de  $\mathbb{Z}^d$ . Então

$$\frac{d}{dp} P_p(A) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^d} P_p(u \text{ é pivotal para } A).$$

*Demonstração.* Seguiremos Grimmett em [4]. Denotaremos por  $\gamma$  o conjunto de vértices dos quais o evento  $A$  depende. Repetindo o argumento utilizado anteriormente, sejam  $(\mathcal{X}(u); u \in \mathbb{Z}^d)$  variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme em  $[0, 1]$  e seja  $\eta_p(u) = 1$  se  $\mathcal{X}(u) < p$  e  $\eta_p(u) = 0$  se  $\mathcal{X}(u) \geq p$  com  $0 \leq p \leq 1$ . Notemos que como  $A$  é um evento crescente então se  $A$  ocorre em  $\eta_p$  então  $A$  ocorre também em  $\eta_{p+\delta}$ . Assim, temos que

$$\begin{aligned}
P_{p+\delta}(A) - P_p(A) &= P(\eta_{p+\delta} \in A) - P(\eta_p \in A) \\
&= (P(\eta_{p+\delta} \in A, \eta_p \notin A) + P(\eta_{p+\delta} \in A, \eta_p \in A)) - P(\eta_p \in A) \\
&= P(\eta_{p+\delta} \in A, \eta_p \notin A).
\end{aligned}$$

Se  $\eta_p \notin A$  e  $\eta_{p+\delta} \in A$  então existem vértices  $u \in \mathbb{Z}^d$  tais que  $\eta_p(u) = 0$  e  $\eta_{p+\delta}(u) = 1$ , o que é o mesmo que dizer que  $p \leq \mathcal{X}(u) < p + \delta$ . Chamaremos de  $E_{p,\delta}$  o conjunto de tais vértices. Portanto

$$P_{p+\delta}(A) - P_p(A) = P(\eta_p \notin A, \eta_{p+\delta} \in A, |E_{p,\delta}| = 1) + P(\eta_p \notin A, \eta_{p+\delta} \in A, |E_{p,\delta}| \geq 2).$$

Observemos que  $\{\eta_p \notin A, \eta_{p+\delta} \in A, |E_{p,\delta}| \geq 2\} \subset \{|E_{p,\delta}| \geq 2\}$ , daí

$$\begin{aligned}
P(|E_{p,\delta}| \geq 2) &= P(\text{existirem vértices distintos } u \text{ e } v \text{ tais que } u, v \in E_{p,\delta}) \\
&= P\left(\bigcup_{\substack{u \in \gamma \\ u \neq v}} \bigcup_{v \in \gamma} \{u, v \in E_{p,\delta}\}\right) \\
&\leq \sum_{\substack{u \in \gamma \\ u \neq v}} \sum_{v \in \gamma} P(u, v \in E_{p,\delta}) \\
&= \sum_{\substack{u \in \gamma \\ u \neq v}} \sum_{v \in \gamma} P(p \leq \mathcal{X}(u) < p + \delta, p \leq \mathcal{X}(v) < p + \delta) \\
&= \sum_{\substack{u \in \gamma \\ u \neq v}} \sum_{v \in \gamma} \delta^2 \\
&= |\gamma|(|\gamma| - 1)\delta^2.
\end{aligned}$$

Assim

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{P(\eta_p \notin A, \eta_{p+\delta} \in A, |E_{p,\delta}| \geq 2)}{\delta} \leq \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{P(|E_{p,\delta}| \geq 2)}{\delta} = 0.$$

Por outro lado, se  $u$  é o único vértice satisfazendo  $p \leq \mathcal{X}(u) < p + \delta$  então  $u$  é pivotal para  $A$  pois  $\eta_p \notin A$  mas  $\eta'_p \in A$  onde  $\eta'_p$  é obtido de  $\eta_p$  ativando-se o vértice  $u$ . Como vimos antes,  $u$  ser pivotal é independente do estado de  $u$ , portanto

$$\begin{aligned}
P(\eta_p \notin A, \eta_{p+\delta} \in A, |E_{p,\delta}| = 1) &= \sum_{u \in \gamma} P(p \leq \mathcal{X}(u) < p + \delta, u \text{ é pivotal para } A) \\
&= \sum_{u \in \gamma} \delta P(u \text{ é pivotal para } A) \\
&= \delta \sum_{u \in \gamma} P(u \text{ é pivotal para } A).
\end{aligned}$$

E com isso temos que

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{P(\eta_p \notin A, \eta_{p+\delta} \in A, |E_{p,\delta}| = 1)}{\delta} = \sum_{u \in \gamma} P(u \text{ é pivotal para } A).$$

Com estes resultados e, lembrando que  $A$  depende apenas dos vértices em  $\gamma$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp} P_p(A) &= \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{P_{p+\delta}(A) - P_p(A)}{\delta} \\
&= \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{P(\eta_p \notin A, \eta_{p+\delta} \in A, |E_{p,\delta}| = 1) + P(\eta_p \notin A, \eta_{p+\delta} \in A, |E_{p,\delta}| \geq 2)}{\delta} \\
&= \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{P(\eta_p \notin A, \eta_{p+\delta} \in A, |E_{p,\delta}| = 1)}{\delta} + \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{P(\eta_p \notin A, \eta_{p+\delta} \in A, |E_{p,\delta}| \geq 2)}{\delta} \\
&= \sum_{u \in \gamma} P(u \text{ é pivotal para } A) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^d} P(u \text{ é pivotal para } A),
\end{aligned}$$

o que conclui a prova. □

# Capítulo 2

## Enhancements

### 2.1 Definições

Seguindo a notação em [2], um *enhancement* é definido como uma função  $\mathcal{E}_0 : \Omega \rightarrow \Omega$ , onde

(i) existe algum  $r$  tal que  $\mathcal{E}_0(\omega)$  depende apenas de  $\omega \cap B_r(0)$ ;

(ii)  $\mathcal{E}_0(\omega)$  é sempre finito.

Aumentando  $r$ , se necessário, podemos assumir que

(ii')  $\mathcal{E}_0(\omega) \subseteq B_r(0)$ .

Se (i) e (ii') ocorrem dizemos que o enhancement  $\mathcal{E}_0$  tem alcance  $r$ .

Seja  $\alpha$  uma segunda configuração obtida incluindo cada vértice com probabilidade  $s$  independentemente dos demais vértices e de  $\omega$  (notemos que  $\alpha$  e  $\omega$  não possuem relação entre si). Definiremos uma *configuração melhorada* como

$$\mathcal{E}(\omega, \alpha) := \omega \cup \bigcup_{u \in \alpha} (\mathcal{E}_0(\omega - u) + u),$$

onde, como usual,  $\omega \pm u$  denota a translação da configuração  $\omega$  pelo vetor  $\pm u$ . Em outras palavras,  $\mathcal{E}(\omega, \alpha)$  é a configuração resultante da aplicação do enhancement mapeado por  $\alpha$  sobre  $\omega$ . Notemos que os vértices abertos em  $\omega$  continuarão abertos em  $\mathcal{E}(\omega, \alpha)$ .

Nesse ponto, uma questão natural que surge é: quando um enhancement (com  $s > 0$  fixo) diminui o valor do ponto crítico? Antes de respondermos a esta pergunta, vamos introduzir mais algumas notações.

Faremos  $\theta(p, s)$  denotar a probabilidade de a origem pertencer a um aglomerado infinito em uma configuração melhorada  $\mathcal{E}(\omega, \alpha)$  e  $\theta_n(p, s)$  a probabilidade da origem conectar

com  $S_n$  em uma configuração melhorada  $\mathcal{E}(\omega, \alpha)$ . Por vezes denotaremos o ponto crítico na malha melhorada por  $p_c^{enh}$ , onde

$$p_c^{enh}(s) = \inf\{p ; \theta(p, s) > 0\}.$$

Observemos que na configuração melhorada apenas acrescentamos vértices, assim a função  $\theta(p, s)$  é não decrescente em  $s$  e, se houver um aglomerado infinito na configuração  $\omega$ , então também temos um aglomerado infinito na configuração melhorada  $\mathcal{E}(\omega, \alpha)$ .

Seguindo Aizenman e Grimmett em [1], chamaremos um enhancement de *essencial* se existir uma configuração  $\omega$  tal que  $\omega$  não possui um caminho duplamente infinito mas, por outro lado,  $\mathcal{E}(\omega, \{0\}) = \omega \cup \mathcal{E}_0(\omega)$  possui. Em palavras, isso significa que é possível criarmos um caminho duplamente infinito na configuração  $\omega$  apenas ativando o enhancement na origem.

Chamaremos um vértice  $u$  de  $(+)p$ -pivotal se o evento  $\mathcal{R}_L$  (lembrando que este é o evento em que existe um caminho aberto conectando 0 a  $S_L$ ) ocorre em  $\mathcal{E}(\omega \cup \{u\}, \alpha)$  mas  $\mathcal{R}_L$  não ocorre em  $\mathcal{E}(\omega \setminus \{u\}, \alpha)$ . Chamaremos um vértice  $u$  de  $(-)p$ -pivotal se  $\mathcal{R}_L$  não ocorre em  $\mathcal{E}(\omega \cup \{u\}, \alpha)$  mas  $\mathcal{R}_L$  ocorre em  $\mathcal{E}(\omega \setminus \{u\}, \alpha)$ . Observe que isso é possível pois se  $\mathcal{R}_L$  não ocorre no estado  $(\omega, \alpha)$ , ao se desativar algum vértice  $u \in \omega$  podemos eventualmente ativar o enhancement em algum vértice  $v \in \alpha$  fazendo com que o evento  $\mathcal{R}_L$  passe a ocorrer na configuração melhorada. Falaremos também que  $u$  é  $(+)s$ -pivotal se  $\mathcal{R}_L$  ocorre em  $\mathcal{E}(\omega, \alpha \cup \{u\})$  mas  $\mathcal{R}_L$  não ocorre em  $\mathcal{E}(\omega, \alpha \setminus \{u\})$ . Notemos que não existe o equivalente  $(-)s$ -pivotal pois ao se desativar um vértice  $u \in \alpha$  jamais conseguiremos, como consequência disso, ativar vértice algum na configuração melhorada.

As definições acima se estendem de forma natural para percolação de elos e para percolação em outros tipos de malhas. Para maiores detalhes veja [4].

Para algumas demonstrações que vêm a seguir, precisaremos da seguinte versão da Fórmula de Russo:

**Teorema 4.** (Fórmula de Russo Modificada). Para  $\theta_n$  definido acima, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_n}{\partial p} &= \sum_{u \in \mathbb{Z}^d} \left\{ P_{p,s}(u \text{ é } (+)p\text{-pivotal para } \mathcal{R}_n) - P_{p,s}(u \text{ é } (-)p\text{-pivotal para } \mathcal{R}_n) \right\}, \\ \frac{\partial \theta_n}{\partial s} &= \sum_{u \in \mathbb{Z}^d} P_{p,s}(u \text{ é } (+)s\text{-pivotal para } \mathcal{R}_n). \end{aligned}$$

*Demonstração.* Essa prova é muito parecida com a prova feita para o Teorema 3. Sejam  $(\mathcal{X}(u); u \in \mathbb{Z}^d)$  e  $(\mathcal{Y}(u); u \in \mathbb{Z}^d)$  variáveis aleatórias independentes com distribuição

uniforme em  $[0, 1]$  e  $0 \leq p, s \leq 1$  tais que

$$\omega_p(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathcal{X}(u) < p \\ 0 & \text{se } \mathcal{X}(u) \geq p \end{cases} \quad \text{e} \quad \alpha_s(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathcal{Y}(u) < s \\ 0 & \text{se } \mathcal{Y}(u) \geq s. \end{cases}$$

Notemos que

$$P_{p,s+\delta}(\mathcal{R}_n) - P_{p,s}(\mathcal{R}_n) = P((\omega_p, \alpha_{s+\delta}) \in \mathcal{R}_n) - P((\omega_p, \alpha_s) \in \mathcal{R}_n).$$

Como o evento  $\mathcal{R}_n$  é crescente, depende apenas de um número finito de vértices e a abertura de vértices em  $\alpha$  apenas ativa vértices na configuração melhorada a demonstração referente a derivada parcial de  $\theta_n(p, s)$  com relação a  $s$  segue exatamente igual a apresentada para o Teorema 3. Já para a derivada parcial de  $\theta_n(p, s)$  em relação a  $p$  temos

$$\begin{aligned} P_{p+\delta,s}(\mathcal{R}_n) - P_{p,s}(\mathcal{R}_n) &= P((\omega_{p+\delta}, \alpha_s) \in \mathcal{R}_n) - P((\omega_p, \alpha_s) \in \mathcal{R}_n) \\ &= P((\omega_{p+\delta}, \alpha_s) \in \mathcal{R}_n, (\omega_p, \alpha_s) \in \mathcal{R}_n) + \\ &\quad P((\omega_{p+\delta}, \alpha_s) \in \mathcal{R}_n, (\omega_p, \alpha_s) \notin \mathcal{R}_n) - P((\omega_p, \alpha_s) \in \mathcal{R}_n), \end{aligned}$$

que não pode ser melhorado da mesma forma que foi feito no Teorema 3 devido à existência de vértices  $(-)$  $p$ -pivotais. Vamos então seguir por outro caminho. Notemos que

$$P((\omega_p, \alpha_s) \in \mathcal{R}_n) = P((\omega_p, \alpha_s) \in \mathcal{R}_n, (\omega_{p+\delta}, \alpha_s) \in \mathcal{R}_n) + P((\omega_p, \alpha_s) \in \mathcal{R}_n, (\omega_{p+\delta}, \alpha_s) \notin \mathcal{R}_n)$$

Assim,

$$P_{p+\delta,s}(\mathcal{R}_n) - P_{p,s}(\mathcal{R}_n) = P((\omega_{p+\delta}, \alpha_s) \in \mathcal{R}_n, (\omega_p, \alpha_s) \notin \mathcal{R}_n) - P((\omega_p, \alpha_s) \in \mathcal{R}_n, (\omega_{p+\delta}, \alpha_s) \notin \mathcal{R}_n)$$

Agora fazendo os mesmos tipos de cálculos utilizados no Teorema 3 para ambas as parcelas do lado direito desta igualdade chegamos ao resultado desejado.  $\square$

É importante ressaltar que não precisaremos nos preocupar com os vértices  $(-)$  $p$ -pivotais. Isso porque em todas as construções a seguir o vértice em questão estará ativado quando  $\mathcal{R}_L$  ocorrer. Assim, daqui em diante, apenas trataremos com vértices  $p$ -pivotais e  $s$ -pivotais deixando implícito o fato de serem vértices  $(+)$  $p$ -pivotais e  $(+)$  $s$ -pivotais, respectivamente.

## 2.2 O argumento de Aizenman – Grimmett

A discussão principal no artigo [2] é sobre a afirmação abaixo feita por Aizenman e Grimmett em [1]. A demonstração dessa afirmação é feita em várias partes. Adiante, no argumento de Bollobas, Balister e Riordan, veremos um contraexemplo para um lema utilizado na prova desta afirmação. Diante disso, tanto este lema como os resultados obtidos como consequência dele serão chamados de conjecturas. Não apresentaremos o argumento de Aizenman e Grimmett de forma linear pois achamos adequado deixar a parte problemática para o final, para logo em seguida mostrarmos o contraexemplo. Vamos então a afirmação principal (que como já foi explicado, será chamada de conjectura).

**Conjectura 5.** Seja  $\mathcal{E}_0$  um enhancement essencial de percolação de elos ou sítios em uma malha  $\mathcal{L}$  com ponto crítico  $p_c > 0$ . Então para todo  $s > 0$  existe um valor  $\pi(s) < p_c$  tal que  $\theta(p, s) > 0$  para todo  $p$  satisfazendo  $\pi(s) < p < p_c$ .

Em outras palavras, a ativação de um enhancement essencial torna o ponto crítico da malha melhorada estritamente menor que o ponto crítico da malha sem a aplicação do enhancement.

Notemos que nesta conjectura não foi especificada qual o tipo de malha e, embora a afirmação tenha sido feita para percolação de vértices ou elos, ela somente foi mostrada para vértices.

A prova apresentada por Aizenman e Grimmett é dividida em duas partes: uma combinatória e outra probabilística. A parte combinatória (que apresenta problema) será dada pela seguinte conjectura:

**Conjectura 6.** Existe um inteiro positivo  $L$  e uma função contínua  $g(p, s)$  que leva  $(0, 1)^2$  em  $(0, \infty)$  tal que

$$\frac{\partial}{\partial p} \theta_n(p, s) \leq g(p, s) \frac{\partial}{\partial s} \theta_n(p, s)$$

para  $0 < p, s < 1$  e para todo  $n > L$ .

Uma vez que este resultado seja demonstrado, a Conjectura 5 segue conforme abaixo. Este argumento é o que chamamos acima de parte probabilística.

*Demonstração da parte probabilística do argumento de Aizenman – Grimmett.* Seja  $\eta > 0$  pequeno e  $\gamma > 0$  tal que  $g(p, s) \leq \gamma$  em  $[\eta, 1 - \eta]^2$ . Tal  $\gamma$  sempre existe pois  $g(p, s)$  é contínua e  $[\eta, 1 - \eta]^2$  é um compacto, portanto  $g(p, s)$  assume um máximo nesse compacto. Seja  $\varphi \in [0, \pi/2)$  tal que  $\text{tg } \varphi = \gamma$ . Temos que a variação de  $\theta_n(p, s)$  na direção

$(\cos \varphi, -\operatorname{sen} \varphi)$  satisfaz

$$\begin{aligned}
\nabla \theta_n \cdot (\cos \varphi, -\operatorname{sen} \varphi) &= \frac{\partial \theta_n}{\partial p} \cos \varphi - \frac{\partial \theta_n}{\partial s} \operatorname{sen} \varphi \\
&= \cos \varphi \left( \frac{\partial \theta_n}{\partial p} - \frac{\partial \theta_n}{\partial s} \operatorname{tg} \varphi \right) \\
&\leq \cos \varphi \left( \frac{\partial \theta_n}{\partial s} \gamma - \frac{\partial \theta_n}{\partial s} \operatorname{tg} \varphi \right) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

onde a desigualdade surge utilizando a Conjectura 6. Seja  $(a, b) \in [2\eta, 1 - 2\eta]^2$  e façamos  $(a', b') = (a, b) + \eta(\cos \varphi, -\operatorname{sen} \varphi)$ . Notemos que  $(a', b') \in [\eta, 1 - \eta]^2$ , portanto a análise acima é válida e temos que  $\theta_n$  é não crescente na direção do segmento que liga  $(a, b)$  a  $(a', b')$ . Daí  $\theta_n(a, b) \geq \theta_n(a', b')$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , consequentemente

$$\theta(a', b') = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n(a', b') \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n(a, b) = \theta(a, b). \tag{2.2}$$

Tomemos  $(a, b) = (p_c^{\operatorname{enh}} - \xi, p_c^{\operatorname{enh}} - \xi)$  e definamos  $(a', b')$  como acima. Escolhemos  $\xi$  suficientemente pequeno para que  $(a, b), (a', b') \in [2\eta, 1 - 2\eta]^2$  e assim, por (2.2) e pela monotonicidade da função  $\theta(p, s)$  em  $s$  temos que

$$\theta(a', 0) \leq \theta(a', b') \leq \theta(a, b) = 0,$$

onde a última igualdade se justifica por  $a, b < p_c^{\operatorname{enh}} \leq p_c(\mathbb{Z}^d)$ , logo não há percolação. Daí  $p_c(\mathbb{Z}^d) \geq a' > p_c^{\operatorname{enh}}$ .  $\square$

Como vimos acima, a parte probabilística não apresenta problemas. Vamos então, a partir de agora, fazer um estudo detalhado da parte combinatória.

Os argumentos que virão a seguir utilizam o lema abaixo. Faremos  $e_m = (m, 0, \dots, 0)$ .

**Lema 7.** Seja  $\mathcal{E}_0$  um enhancement essencial de percolação de vértices em  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 2$  e alcance  $r$ . Então existem  $m \geq r$  e uma configuração  $\omega$  (finita) tal que:

- (i)  $\omega \subset B_m$  e  $\omega \cap S_m = \{-e_m, e_m\}$ ;
- (ii)  $\omega$  não contém caminho ligando  $-e_m$  a  $e_m$ ;
- (iii)  $\omega \cup \mathcal{E}_0(\omega)$  contém caminho ligando  $-e_m$  a  $e_m$ .

*Demonstração.* Pela definição de enhancement essencial existe uma configuração  $\omega'$  que não contém um caminho duplamente infinito mas  $\mathcal{E}(\omega', \{0\}) = \omega' \cup \mathcal{E}_0(\omega')$  contém. Como o alcance do enhancemet é  $r$  temos que  $\mathcal{E}_0(\omega') \subseteq B_r$ . Sejam  $u$  e  $v$  dois pontos em  $\omega' \cap S_{r+1}$  que

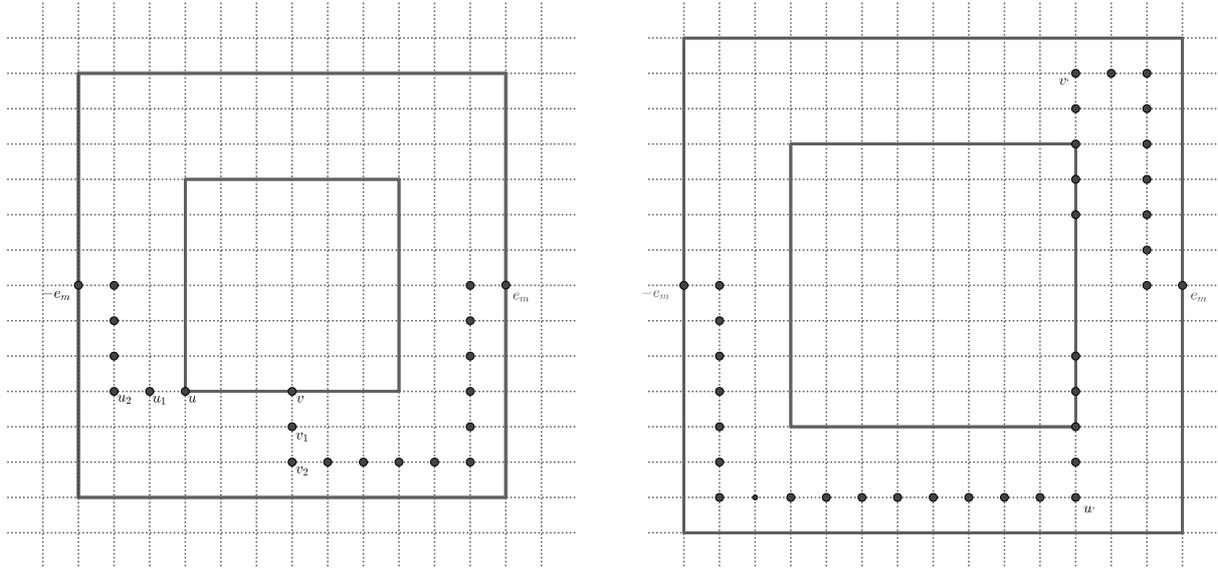
estão na mesma componente aberta em  $(\omega' \cup \mathcal{E}_0(\omega')) \cap B_{r+1}$  mas em componentes abertas diferentes em  $\omega' \cap B_{r+1}$ . Como  $u \in S_{r+1}$  então  $u$  possui alguma coordenada, digamos  $i$ , igual a  $\pm(r+1)$ . Sejam  $u_1$  e  $u_2$  dois pontos obtidos de  $u$  aumentando a magnitude de  $u_i$  em uma e duas unidades respectivamente. Ou seja, se a  $i$ -ésima coordenada de  $u$  for  $-(r+1)$  então a  $i$ -ésima coordenada de  $u_1$  será  $-(r+2)$ . Mas se a  $i$ -ésima coordenada de  $u$  for  $(r+1)$  então a  $i$ -ésima coordenada de  $u_1$  será  $(r+2)$ . Já para  $u_2$  vale que se a  $i$ -ésima coordenada de  $u$  for  $-(r+1)$  então a  $i$ -ésima coordenada de  $u_2$  será  $-(r+3)$ . Mas se a  $i$ -ésima coordenada de  $u$  for  $(r+1)$  então a  $i$ -ésima coordenada de  $u_2$  será  $(r+3)$ . Assim temos que  $uu_1u_2$  está sobre uma reta com  $u_1 \in S_{r+2}$  e  $u_2 \in S_{r+3}$ . Definamos  $v_1$  e  $v_2$  da mesma forma em relação a  $v$ . Notemos que nenhum dos vértices  $u$ ,  $u_1$  ou  $u_2$  é adjacente nenhum dos vértices  $v$ ,  $v_1$  ou  $v_2$ . A ideia é construir um caminho  $P_u$  de  $u_2$  para algum dos  $\pm e_m$  e um caminho  $P_v$  para o outro  $\pm e_m$  com  $m \geq r+4$  tal que  $P_u \cup P_v \subseteq B_{m-1} \setminus B_{r+2}$  com os vértice de  $P_u$  não adjacentes aos vértices de  $P_v$ . Com essa construção, adicionando os vértices  $\pm e_m$ , temos o resultado desejado.

Para tanto faremos  $u_2 = (a_1, a_2, \dots, a_d)$  e  $v_2 = (b_1, b_2, \dots, b_d)$ . Mudando  $u$  com  $v$  e a orientação dos eixos coordenados, se necessário, podemos supor, sem perda de generalidade, que  $a_1 \leq b_1$  ou se  $a_1 = b_1 = -(r+3)$  então  $a_1 = b_1 = (r+3)$ .

Consideremos primeiro o caso em que  $a_1 < r+3$ .  $P_u$  será iniciado em  $u_2$  e os seus próximos vértices terão as mesmas coordenadas de  $u_2$ , exceto a  $i$ -ésima que será reduzida em uma unidade, para cada ponto, até que essa coordenada seja  $-(r+3)$ . Quando isso acontecer os demais vértices serão formados reduzindo uma unidade de todas as suas demais coordenadas (ou seja, exceto a  $i$ -ésima), a cada passo, até elas serem 0. Nesse momento teremos atingido o ponto  $-e_{r+3}$ . O outro caminho será construído de forma parecida.  $P_v$  será iniciado em  $v_2$  e os seus próximos vértices terão as mesmas coordenadas de  $v_2$  exceto a  $i$ -ésima que será para cada ponto acrescida em uma unidade até que essa coordenada seja  $(r+3)$ . Quando isso acontecer os demais vértices serão formados reduzindo uma unidade de todas as suas demais coordenadas, a cada passo, até elas serem 0. Aqui atingimos o ponto  $-e_{r+3}$ . Esses caminhos possuem a propriedade desejada para  $m = r+4$ .

Agora tratemos o caso em que  $a_1 = b_1 = r+3$  em que  $u_2$  e  $v_2$  estão na “face da direita”. Como  $u_1$  e  $u_2$  são diferentes eles possuem alguma coordenada diferente, assim assumimos que  $a_2 < b_2$ . Nesse caso, para a construção de  $P_u$  começamos por  $u_2$  e cada ponto terá as mesmas coordenadas de  $u_2$  exceto a segunda que, a cada passo será reduzida em uma unidade até atingir  $-(r+5)$ . Igualmente para  $P_v$ , mas aqui aumentaremos em uma unidade a segunda coordenada dos pontos a cada passo até atingirmos  $r+5$ . Faremos  $u'$  e  $v'$  serem os últimos pontos dos caminhos (parciais)  $P_u$  e  $P_v$  respectivamente. Temos que  $u'$  está na “face de cima” e  $v'$  na “face de baixo” de  $S_{r+5}$ . Assim podemos prosseguir

com a construção do caminho como fizemos no caso anterior considerando  $u'$  e  $v'$  no lugar de  $u_2$  e  $v_2$  e  $r + 3$  no lugar de  $r$ . A Figura 2.1 mostra um exemplo de construção para ambos os casos.  $\square$



**Figura 2.1:** Representação dos dois casos na prova do Lema 7. Figura da esquerda exemplifica o primeiro caso e a figura da direita o segundo caso.

Por fim, para finalizar a demonstração da Conjectura 6 apresentada por Aizenman e Grimmett, precisaremos do seguinte resultado que é exatamente a parte da demonstração que é problemática.

**Conjectura 8.** Seja  $\mathcal{E}_0$  um enhancement essencial. Existem constantes  $L_0$  e  $R$ , que dependem apenas de  $\mathcal{E}_0$ , tal que para todo  $L \geq L_0$ , se um vértice  $u$  for  $p$ -pivotal para  $\mathcal{R}_L$  no estado  $(\omega, \alpha)$ , então existe um estado  $(\omega', \alpha')$  diferindo de  $(\omega, \alpha)$  apenas em  $B_R(u)$  tal que existe um vértice  $v \in B_R(u)$  que é  $s$ -pivotal para  $\mathcal{R}_L$  no estado  $(\omega', \alpha')$ .

Em outras palavras, se  $u$  é  $p$ -pivotal, então é possível alterar as configurações  $\omega$  e  $\alpha$  na bola de raio  $R$  centrada em  $u$  para fazer algum vértice próximo a  $u$  (esse vértice sendo normalmente o próprio  $u$ )  $s$ -pivotal.

Aizenman e Grimmett perceberam que, na prova da Conjectura 8, podemos assumir que próximo de  $u$  o enhancement está sempre desativado. Para vermos isso, seja  $u$   $p$ -pivotal para o estado  $(\omega, \alpha)$ , ou seja, existe um caminho aberto passando por  $u$  que conecta 0 a  $S_L$ . Desativamos, um por um, os vértices  $v \in \alpha \cap B_R(u)$ . Se em algum momento desconectarmos 0 de  $S_L$  então o último vértice desativado é  $s$ -pivotal e já temos a configuração desejada. Assim é suficiente considerarmos a conjectura abaixo.

**Conjectura 9.** Seja  $\mathcal{E}_0$  um enhancement essencial. Existem constantes  $L_0$  e  $R$ , que dependem apenas de  $\mathcal{E}_0$ , tal que para todo  $L \geq L_0$ , se um vértice  $u$  for  $p$ -pivotal para  $\mathcal{R}_L$  no estado  $(\omega, \alpha)$  e  $\alpha \cap B_R(u) = \emptyset$ , então existe um estado  $(\omega', \alpha')$  diferindo de  $(\omega, \alpha)$  apenas em  $B_R(u)$  tal que existe um vértice  $v \in B_R(u)$  que é  $s$ -pivotal para  $\mathcal{R}_L$  no estado  $(\omega', \alpha')$ .

Utilizando a Conjectura 9, a Conjectura 6 segue pois, como  $(\omega', \alpha')$  difere de  $(\omega, \alpha)$  apenas em  $B_R(u)$ , temos que

$$P_{p,s}(\omega', \alpha') = P_{p,s}(\omega, \alpha)(p)^a(1-p)^b(1-s)^c \geq \delta(p, s)^{|B_R(u)|} P_{p,s}(\omega, \alpha),$$

onde  $a$  e  $b$  referem-se a quantidade de vértices que foram ativados e desativados, respectivamente, em  $\omega$ ,  $c$  a quantidade de vértices que foram desativados em  $\alpha$  e denotamos  $\delta(p, s) = \min\{p, 1-p, 1-s\}$ . Lembrando que se  $u$  é  $p$ -pivotal para  $\mathcal{R}_L$  em  $(\omega, \alpha)$ , temos que  $v$  é  $s$ -pivotal para  $\mathcal{R}_L$  em  $(\omega', \alpha')$  e, chamando  $\mathcal{R}_L^u = \{u \text{ é } p\text{-pivotal para } \mathcal{R}_L \text{ em } (\omega, \alpha)\}$  e  $\mathcal{R}_L^v = \{v \text{ é } s\text{-pivotal para } \mathcal{R}_L \text{ em } (\omega', \alpha')\}$  temos

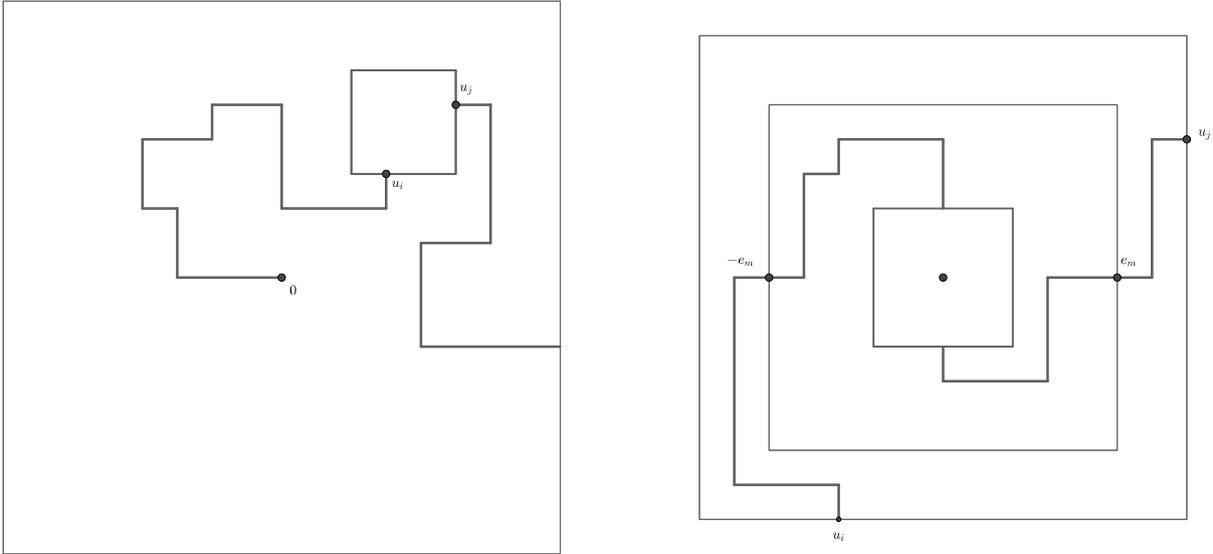
$$\begin{aligned} P_{p,s}(\mathcal{R}_L^u) &= \sum_{(\omega, \alpha) \in \mathcal{R}_L^u} P_{p,s}(\omega, \alpha) \\ &\leq \sum_{(\omega, \alpha) \in \mathcal{R}_L^u} \delta(p, s)^{-|B_R(u)|} P_{p,s}(\omega', \alpha') \\ &\leq \delta(p, s)^{-|B_R(u)|} \sum_{(\omega, \alpha) \in \mathcal{R}_L^v} P_{p,s}(\mathcal{R}_L^v) \\ &\leq \frac{|B_R(u)|}{\delta(p, s)^{|B_R(u)|}} P_{p,s}(\mathcal{R}_L^v) \\ &= \delta_1(p, s) P_{p,s}(\mathcal{R}_L^v) \end{aligned}$$

observando que  $|B_R(u)|$  é constante, independentemente de  $u$ . Agora, usando a Fórmula de Russo Modificada (Teorema 4) e o argumento dado após a prova deste teorema, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta_n}{\partial p} &= \sum_{u \in \mathbb{Z}^d} P_{p,s}(\mathcal{R}_L^u) \\
&\leq \delta_1(p,s) \sum_{u \in \mathbb{Z}^d} P_{p,s}(\mathcal{R}_L^u) \\
&\leq \delta_1(p,s) |B_R(u)| \sum_{v \in \mathbb{Z}^d} P_{p,s}(\mathcal{R}_L^v) \\
&\leq \delta_2(p,s) \sum_{v \in \mathbb{Z}^d} P_{p,s}(\mathcal{R}_L^v) \\
&= \delta_2(p,s) \frac{\partial \theta_n}{\partial s}
\end{aligned}$$

e fazendo  $\delta_2(p,s) = g(p,s)$  temos o resultado desejado.

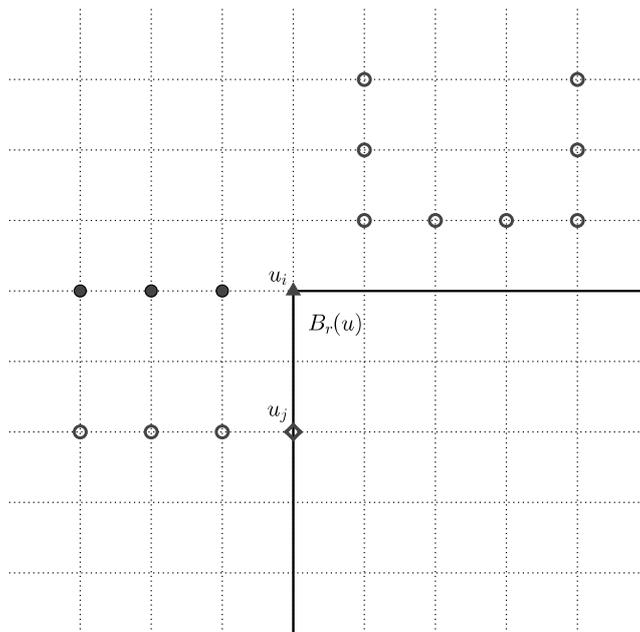
Para provar a Conjectura 9, Aizenman e Grimmett argumentam o seguinte: suponha que para o estado  $(\omega, \alpha)$  o vértice  $u$  seja  $p$ -pivotal para  $\mathcal{R}_L$ , assim existe um caminho  $P$  conectando  $0$  a  $S_L$  passando por  $u$ . Sejam  $u_i$  e  $u_j$  o primeiro e último pontos de  $P$  em  $B_r^\infty(u)$ . Através de uma figura semelhante a figura 2.2 eles afirmam ser possível modificar o estado dos vértices de  $P$  em  $B_r^\infty(u)$ , (quadrado menor da imagem da esquerda da figura 2.2), sendo possível conectar  $u_i$  a  $u - e_m$  e  $u_j$  a  $u + e_m$  apenas com vértices em  $B_{r-1}^\infty(u) \setminus B_m^\infty(u)$  (imagem da direita da figura 2.2). Após isso utiliza-se o Lema 7 para modificar o estado dos vértices em  $B_m^\infty(u)$  para chegar em um estado onde  $u$  é um vértice  $s$ -pivotal. Adiante veremos que esta construção apresenta problemas.



**Figura 2.2:** Imagem apresentada em [1]. A imagem da direita é um zoom do quadrado menor ( $B_r^\infty(u)$ ) na imagem da esquerda.

## 2.3 O argumento de Bollobás – Balister – Riordan

Para mostrar o problema existente na prova da Conjectura 9, foi dado o seguinte argumento em [2]. Aqui faremos para  $d = 2$ . Novamente, seja  $P$  o caminho aberto que conecta a 0 a  $S_L$ ,  $u$  um vértice  $p$ -pivotal e  $u_i$  e  $u_j$  o primeiro e último pontos de  $P$  em  $B_r^\infty(u)$ . Fora de  $B_r(u)$ ,  $P$  é formado por duas componentes, digamos,  $P_1$  e  $P_2$ . Como queremos tornar  $u$   $s$ -pivotal temos que evitar que  $P_1$  e  $P_2$  tenham vértices adjacentes entre eles. Suponhamos que  $P_1$  chegue a  $B_r(u)$  (ou seja, toque  $S_r(u)$ ) por uma de suas quinas. Deste modo não é possível ao caminho  $P_1$  entrar em  $B_r(u)$ . Vamos então permitir que o caminho  $P_1$  siga pela borda de  $B_r(u)$ . Nesse caso é possível que  $P_2$  e  $u_j$  fiquem posicionados de tal forma que impeçam que  $P_1$  siga pela borda de  $B_r(u)$  (veja a figura 2.3). Quando estamos em dimensão maior que 2, fazendo uma construção parecida, percebemos que esse problema ocorre não apenas com a chegada de  $P_1$  por uma quina de  $B_r(u)$  mas também quando  $P_1$  chega por uma aresta de  $B_r(u)$ .



**Figura 2.3:** Contra exemplo do argumento Aizenmann – Grimmett. Pontos preenchidos representam os pontos de  $P_1$ , pontos ocios são pontos de  $P_2$ .

Bollobás, Ballister e Riordan, então, fazem a seguinte afirmação:

**Conjectura 10.** Seja  $d \geq 2$  e  $m \geq 1$ . Então existe um  $r = r(d, m) > 0$  com a seguinte propriedade. Sejam  $P_R$  e  $P_G$  caminhos em  $\mathbb{Z}^d$ , ambos começando fora de  $B_{r+2}$  e terminando em algum vértice adjacente à origem, sem vértices de  $P_R$  adjacentes a vértices de  $P_G$ . Então podemos modificar estes caminhos dentro de  $B_r$  para que um termine em  $-e_m$  e o outro termine em  $e_m$ , ambos não contenham nenhum outro vértice de  $B_m$  e continuemos sem vértices de  $P_R$  adjacentes a vértices de  $P_G$ .

Os autores dessa afirmação a tratam como conjectura por apenas mostrarem que ela é verdadeira para os casos de percolação de elos na malha retangular e os casos de duas e três dimensões em percolação de vértices.

Abaixo veremos que a Conjectura 10 implica a Conjectura 9. Com isso e o argumento probabilístico de Aizenman - Grimmett temos que a Conjectura 10 implica a Conjectura 5 (que é a afirmação principal apresentada por Aizenman e Grimmett).

*Prova que a Conjectura 10 implica a Conjectura 9.* Vamos à prova dada em [2]. Fixamos  $d \geq 2$  e assumimos que a Conjectura 10 segue para esse  $d$ . Faremos também  $m$  como no Lema 7 e  $r(d, m)$  como na Conjectura 10. Para termos espaço para fazer as alterações necessárias, tomaremos bolas com raios muito maiores que  $r(d, m)$  (consequentemente muito maiores que o alcance do enhancement). Sejam  $R = 3r + 100$  e  $L_0 = 100R$ . Seja  $L > L_0$  e  $u$   $p$ -pivotal para o evento  $\mathcal{R}_L$  no estado  $(\omega, \alpha)$  e que  $\alpha \cap B_R(u) = \emptyset$ .

Vamos supor primeiramente que  $u$  está distante da origem e de  $S_L$ , onde distante quer dizer mais precisamente que  $r + 10 < \|u\| < L - (r + 10)$ .

Substituindo  $\omega$  por  $\omega \cup \{u\}$  se necessário, podemos supor que o vértice  $u$  está aberto na configuração  $\mathcal{E}(\omega, \alpha)$  e como  $u$  é  $p$ -pivotal temos um caminho aberto conectando 0 a  $S_L$  passando por  $u$ . Vamos então construir uma configuração  $\omega'$  da seguinte forma: um por um, desativamos cada vértice de  $\omega \cap B_{r+2}(u)$  que não é necessário para a existência do caminho que conecta 0 a  $S_L$ . Como o alcance do enhancement é de no máximo  $m - 1 < r$  (pela construção feita na Conjectura 10) e que  $\alpha \cap B_{2r+2}(u) \subset \alpha \cap B_R(u) = \emptyset$ , essa retirada de vértices não afeta nenhum vértice de  $\alpha$ . Assim  $\omega'$  possui as seguintes propriedades:

- (i)  $\omega' \cap B_{r+2}(u) = \mathcal{E}(\omega', \alpha) \cap B_{r+2}(u)$ ;
- (ii)  $\mathcal{E}(\omega', \alpha)$  possui um caminho ligando 0 a  $S_L$ ;
- (iii) para todo  $v \in \omega' \cap B_{r+2}(u)$ , a configuração  $\mathcal{E}(\omega', \alpha) \setminus \{v\}$  não contém tal caminho;
- (iv) como  $u$  é  $p$ -pivotal,  $u \in \omega'$ .

Seja  $P$  o menor caminho ligando 0 a  $S_L$  na configuração  $\mathcal{E}(\omega', \alpha)$ . Podemos observar que  $\omega' \cap B_{r+2}(u) = P \cap B_{r+2}(u)$ . Fazemos  $P_R$  e  $P_G$  como sendo cada uma das componentes conexas dos caminhos obtidos de  $P \setminus \{u\}$ . Fazendo  $\omega^P = P \setminus B_r(u)$ , a Conjectura 10 e o Lema 7 garantem a existência de uma configuração  $\omega_1$  tal que:

- (a)  $\omega^P \cup \omega_1$  não contém caminho ligando 0 a  $S_L$ ;
- (b)  $\omega^P \cup \omega_1 \cup (\mathcal{E}_0(\omega_1 - u) + u)$  possui um caminho ligando 0 a  $S_L$ .

Seja  $\omega'' = (\omega' \setminus B_r(u)) \cup \omega_1$ . Mostrando que  $u$  é  $s$ -pivotal no estado  $(\omega'', \alpha)$  teremos o resultado desejado para este primeiro caso.

Definindo  $\omega^* = \mathcal{E}(\omega'', \alpha) \setminus B_r(u)$  e tendo sempre em mente que o enhancement tem alcance menor que  $r$ , temos que

$$(1) \quad \omega^* = \mathcal{E}(\omega'', \alpha) \setminus B_r(u) = \mathcal{E}(\omega'', \alpha \cup \{u\}) \setminus B_r(u) = \mathcal{E}(\omega', \alpha) \setminus B_r(u)$$

$$(2) \quad \mathcal{E}(\omega'', \alpha) \cap B_r(u) = \omega_1 \text{ e } \mathcal{E}(\omega'', \alpha \cup \{u\}) \cap B_r(u) = \omega_1 \cup (\mathcal{E}_0(\omega_1 - u) + u)$$

Assim, precisamos mostrar que

(a')  $\omega^* \cup \omega_1$  não contém caminho ligando 0 a  $S_L$ ;

(b')  $\omega^* \cup \omega_1 \cup (\mathcal{E}_0(\omega_1 - u) + u)$  possui um caminho ligando a origem a  $S_L$ .

Uma configuração  $\omega^0$  fora de  $B_r(u)$  induz uma relação de equivalência  $\sim$  em  $\omega^0 \cap S_{r+1}$ , com dois vértices relacionados se, e somente se,  $\omega^0$  contém um caminho ligando estes dois pontos. Para mostrar que (a) e (b) implicam (a') e (b'), mostraremos que  $\omega^*$  e  $\omega^P$  induzem esta relação de equivalência. Primeiramente vamos descrever  $\sim$  em  $\omega^P$ . Temos que  $P = O_0 I_1 O_1 \cdots I_k O_k$  onde  $k \geq 1$ , cada  $O_i$  é uma sequência de um ou mais vértices fora de  $B_r(u)$  e cada  $I_i$  é uma sequência de um ou mais vértices em  $B_r(u)$ . Temos que  $\omega^P = \bigcup_{i=0}^k O_i$  e, assim, temos uma classe de equivalência  $C_i$  para cada conjunto  $O_i \cap S_{r+1}$  para  $0 \leq i \leq k$  com apenas  $C_0$  conectada a 0 e  $C_k$  conectada a  $S_L$ .

Vamos agora comparar  $\omega^*$  com  $\omega^P$  em relação a  $\sim$ . Pela definição de  $\omega^*$  e lembrando que o enhancement não afeta vértices de  $B_{r+2}(u)$  temos que

$$\omega^* \cap B_{r+2}(u) = (\mathcal{E}(\omega', \alpha) \setminus B_r(u)) \cap B_{r+2} = (\omega' \setminus B_r(u)) \cap B_{r+2} = \omega^P \cap B_{r+2}(u).$$

Assim  $\omega^*$  e  $\omega^P$  coincidem em  $S_{r+2}$  e a relação de equivalência  $\sim$  possui o mesmo conjunto base nessas duas configurações. Notemos que  $\omega^P = P \setminus B_r(u) \subseteq \mathcal{E}(\omega', \alpha) \setminus B_r(u) = \omega^*$  assim, dois vértices conectados em  $\omega^P$  estão conectados também em  $\omega^*$ . Por fim, vamos supor que duas classes distintas em  $\omega^P$ , digamos  $C_i$  e  $C_j$  com  $i < j$ , estão conectadas em  $\omega^*$ . Nesse caso,  $C_i$  e  $C_j$  fazem parte da mesma classe em  $\omega^*$ , digamos  $C_l$ , assim,  $P' = O_0 I_1 O_1 \cdots O_l \cdots I_k O_k$  é um caminho menor que  $P = O_0 I_1 O_1 \cdots O_i I_j O_j \cdots I_k O_k$  em  $\mathcal{E}(\omega', \alpha)$  conectando 0 a  $S_L$ , mas isso é um absurdo pois contradiz a minimalidade de  $P$ . Com isso alcançamos o resultado desejado nesse primeiro caso.

Para o caso em que  $\|u\| \leq r + 10$  ou seja  $u \in B_{r+10}(0)$ , vamos construir uma configuração  $\omega'$  a partir de  $\omega$  como se segue. Ativamos todos os vértices dentro de  $B_{r+20}(0)$  e após isso desativamos todos os vértices de  $S_{r+19}(0)$  exceto um vértice qualquer  $v \in S_{r+19}(0)$ . Observemos que  $v$  é  $p$ -pivotal para o evento  $\mathcal{R}_L$  e que  $r+10 < \|v\| < L - (r+10)$ . Assim podemos aplicar o caso anterior para esse  $v$ .

Por fim vamos tratar o caso em que  $\|u\| \geq L - (r + 10)$ . Claramente nenhum ponto  $u$  tal que  $\|u\| > L$  pode ser  $p$ -pivotal, portanto basta considerar  $L - (r + 10) \leq \|u\| \leq L$ . Para a construção de  $\omega'$ , nesse caso, seja  $v \in B_{L-(r+20)}(0)$  tal que  $\|u - v\| \leq r + 20$ . Desativamos um por um cada vértice de  $B_{r+30}(v)$  de  $\omega$  que não impede que 0 conecte a  $S_L$ . Após o término desse processo, teremos um caminho  $P$  em  $B_{r+30}(v)$  que conecta 0 a  $S_L$ . Seja  $w$  o primeiro ponto de  $P$  em  $B_{r+30}(v)$ . Assim temos que  $w \in B_L(0)$ . Vamos então desativar todos os vértices em  $B_{r+30}(v)$  exceto por  $w$ . Suponhamos ser possível construir um caminho  $P'$  de  $w$  para  $S_L$  passando por  $v$  tal que  $P'$  está em  $B_{r+29}(v)$  (exceto, claro, por  $w$  que está em  $B_{r+30}(v)$ ). Assim, o vértice  $v$  é  $p$ -pivotal para  $\mathcal{R}_L$  no estado  $((\omega \setminus B_{r+30}(v)) \cup P', \alpha)$ , e como  $r + 10 < \|v\| < L - (r + 10)$  podemos aplicar novamente o primeiro caso.

Para a construção de  $P'$ , seja  $w = (w_1, \dots, w_d)$  e  $v = (v_1, \dots, v_d)$ . Nós construiremos a parte de  $P'$  que conecta  $w$  a  $v$  mudando cada coordenada monotonicamente, de tal forma que a distância entre esses dois pontos diminua 1 unidade a cada passo. Digamos que o penúltimo passo desse processo nos leve a  $v - e$  onde  $e = (0, \dots, \pm 1, \dots, 0)$  com  $\pm 1$  na  $i$ -ésima coordenada. Damos então o passo para chegar em  $v$  e mais um passo para  $v + e$ . Isso serve para garantir a passagem por  $v$  e para assegurar que ele seja  $p$ -pivotal. Os próximos passos damos aumentando o valor absoluto de alguma coordenada que não seja a  $i$ -ésima. Depois de no máximo  $r + 21$  passos atingiremos  $S_L$  em algum ponto interior a  $B_{r+30}(v)$ .  $\square$

# Capítulo 3

## Demonstrações em Casos Particulares

### 3.1 Malha Retangular

Para provarmos a Conjectura 10 com  $d = 2$  utilizaremos a métrica  $\ell_1$  e o octógono  $O_r$  formado removendo os vértices  $(\pm r, 0)$  e  $(0, \pm r)$  de  $B_r^1(0)$ .

*Prova da Conjectura 10 para  $d = 2$ .* Vamos provar o resultado para  $r = r(m, 2) = m + c$  para alguma constante  $c$ . Novamente, para termos espaço para as alterações, seja  $m \geq 50$ . Dados dois caminhos,  $P_R$  e  $P_G$ , ambos começando fora de  $B_{r+2}^1$  e terminando em vértices adjacentes à origem, truncamos estes caminhos em seus primeiros vértices que tocam  $O_r$ . Assim, obtemos dois caminhos  $P'_R = R_1, \dots, R_a$  e  $P'_G = G_1, \dots, G_b$  onde  $R_a$  e  $G_b$  estão em  $O_r$  e todos os demais vértices desses dois caminhos estão fora de  $O_r$ .

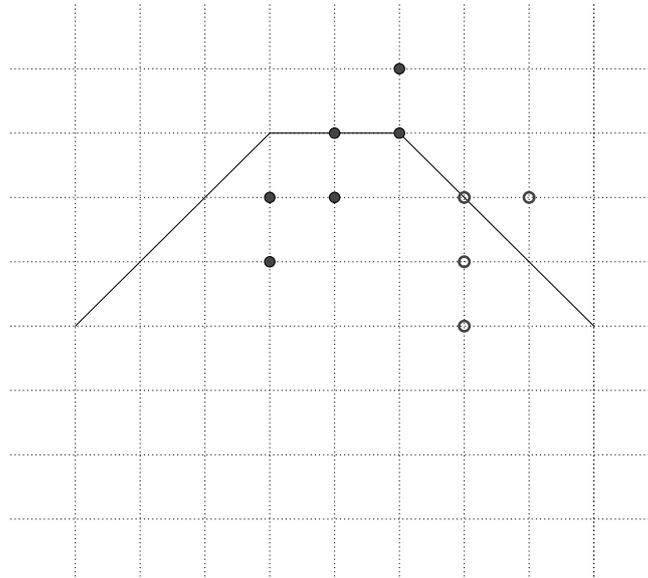
Observemos que conjunto  $O_{r-1} \setminus O_{r-3}$  forma uma espécie de anel, que chamaremos de  $A$  que contém todos os vértices de  $O_{r-1} \setminus O_{r-2}$ .

Vamos supor primeiro que  $\|R_a - G_b\|_1 \geq 10$ , ou seja, estão a uma distância de pelo menos 10. Como estes dois vértices estão em  $O_r$  ambos possuem pelo menos um de seus vértices adjacentes em  $A$ . Seja  $u$  adjacente a  $R_a$  e  $v$  adjacente a  $G_b$  em  $A$ . Conectemos  $R_a$  a  $u$  e  $G_b$  a  $v$ . Continuamos então cada caminho sobre  $A$  até atingirmos os vértices  $\pm e_{r-2}$ . Por causa da distância entre estes dois vértices é possível construir estes caminhos sem que eles possuam vértices adjacentes um com o outro. Uma forma de construir estes caminhos é a seguinte: se  $u = (u_1, u_2)$  e  $v = (v_1, v_2)$  possuem as suas primeiras coordenadas diferentes, podemos supor, sem perda de generalidade, que  $u_1 < v_1$ . Nesse caso conectamos  $u$  a  $-e_m$  seguindo para a esquerda sobre  $A$  e  $v$  a  $e_m$  seguindo para a direita sobre  $A$ . Se  $u_1 = v_1$  temos que a segunda coordenada de algum desses pontos é negativa e do outro é positiva, pois eles estão a uma distância de pelo menos 10. Assim, podemos

seguir por  $A$  no sentido horário e conectar o vértice com maior segunda coordenada a  $-e_m$  e o outro a  $e_m$ .

Suponhamos agora que  $R_a$  e  $G_b$  estão a uma distância menor que 10 mas não diagonalmente adjacentes com um deles em uma quina. Podemos então, como foi feito acima, encontrar pontos  $u$  e  $v$  em  $A$  adjacentes a  $R_a$  e  $G_b$ , respectivamente, tais que  $R_a$  e  $u$  não são adjacentes a  $G_b$  e  $v$ . Os caminhos então, seguem sobre  $A$ , indo em direções opostas, até atingirem pontos  $u'$  e  $v'$  que estejam a uma distância maior que 15. Damos então dois passos a partir destes vértices em direção a  $O_{r-3}$ . A partir daqui aplicamos então o caso anterior trocando  $r$  por  $r - 3$ .

Suponhamos agora que  $R_a$  e  $G_b$  estão a uma distância menor que 10, são diagonalmente adjacentes e um deles está numa quina. Por exemplo,  $R_a = (1, r - 1)$  e  $G_b = (2, r - 2)$ . O vértice  $R_{a-1}$  está fora de  $O_r$  e não é adjacente a nenhum vértice de  $P_G$ , assim a única possibilidade para esse vértice é  $R_{a-1} = (1, r)$ . Continuando o caminho  $P_R$  de forma que ele continue não adjacente ao caminho  $P_G$  temos como única possibilidade que  $R_{a+1} = (0, r - 1)$ . A partir daqui estendemos os caminhos  $P_R$  e  $P_G$  como mostra a figura 3.1. Estes caminhos entram em  $O_{r-2}$  em pontos que não são diagonalmente adjacentes e portanto podemos aplicar o caso anterior.  $\square$



**Figura 3.1:** Construção do terceiro caso da prova da Conjectura 10 na malha retangular. Vértices sólidos representam  $P_R$ . Vértices ocios representam  $P_G$ .

## 3.2 Malha Cúbica

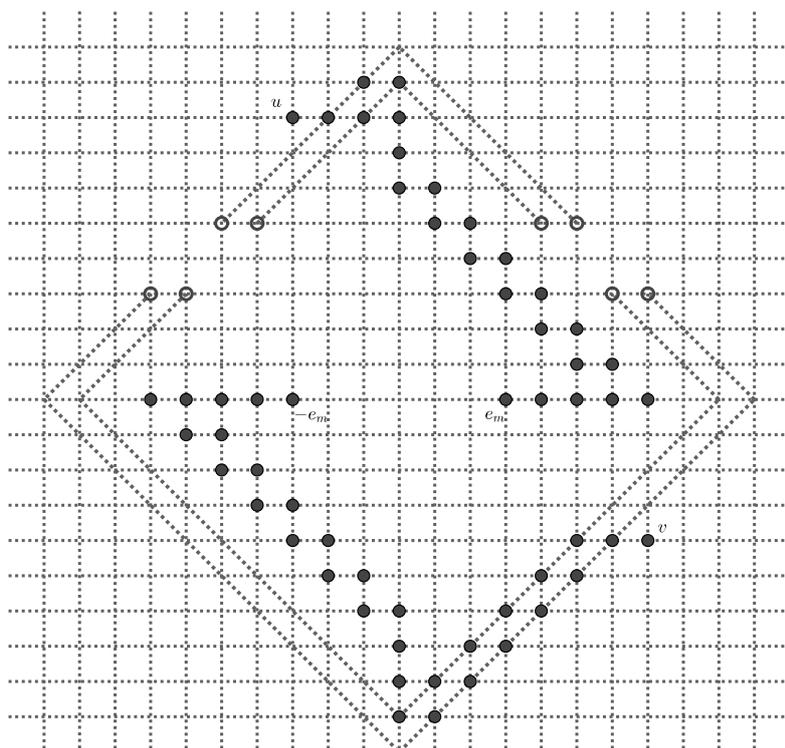
Para provar a Conjectura 10 no caso tridimensional prepararemos terreno com dois lemas que irão abranger a maioria dos casos possíveis. Após isso faremos a análise dos casos restantes. Salvo menção do contrário, utilizaremos para esta demonstração a métrica  $\ell_1$ .

**Lema 11.** Sejam  $d \geq 2$  e  $m \geq 1$ . Suponha que  $r \geq m + 10$ . Sejam  $u = (u_1, \dots, u_d)$  e  $v = (v_1, \dots, v_d)$  pontos de  $S_r$  tais que para alguma coordenada  $i$ , existe um inteiro  $s$  com  $|s| \leq r - 5$  e  $u_i > s > v_i$  ou  $v_i > s > u_i$ . Então podemos construir um caminho  $P_R$  começando em  $u$  e um caminho  $P_G$  começando em  $v$  com as seguintes propriedades: um caminho termina em  $-e_m$  e o outro em  $e_m$  e, exceto por seus vértices finais, estes caminhos estão inteiramente em  $B_{r-1} \setminus B_m$  e nenhum vértice de  $P_G$  é adjacente a vértice do caminho  $P_R$ .

*Demonstração.* Trocando  $u$  e  $v$ , se necessário, podemos supor  $u_i > s > v_i$ . Seja  $A_1 = (S_{r-1} \cup S_{r-2}) \cap \{x : x_i > s\}$  e  $A_2 = (S_{r-1} \cup S_{r-2}) \cap \{x : x_i < s\}$ , ou seja, as duas partes do anel  $S_{r-1} \cup S_{r-2}$  obtida deletando os vértices do hiperplano  $x_i = s$ . Notemos que estas duas regiões são conexas e que  $u$  é adjacente a algum vértice de  $A_1$  e  $v$  é adjacente a algum vértice de  $A_2$ . Dessa forma podemos conectar  $u$  a  $w = (0, \dots, r-2, \dots, 0)$  por um caminho inteiramente em  $A_1$  onde a coordenada não nula de  $w$  é a  $i$ -ésima. Da mesma forma podemos conectar  $v$  a  $-w$  por um caminho inteiramente contido em  $A_2$ . Como estes caminhos foram construídos em diferentes  $A_i$  eles não possuem vértices adjacentes um com o outro. Como  $|s| \leq r-5$  podemos estender cada caminho dois passos em direção a origem (sobre o  $i$ -ésimo eixo) até atingirmos  $w'$  e  $-w'$  onde  $w' = (0, \dots, r-4, \dots, 0)$ . Observemos que continuamos com os caminhos construídos até agora sem vértices adjacentes um com o outro. Se  $i = 1$  já estamos sobre o eixo  $x$  e basta seguirmos sobre esse eixo conectando  $-w'$  a  $-e_m$  e  $w'$  a  $e_m$ . Caso contrário, sem perda de generalidade, supomos  $i = 2$ . Nesse caso, podemos conectar  $w'$  a  $e_{r-4}$  no conjunto  $\{(x, y, 0, \dots, 0) : x \geq 0, y \geq 0, r-5 \leq x+y \leq r-4\}$  e  $-w'$  a  $-e_{r-4}$  de forma similar refletindo na origem. Assim basta seguirmos pelo eixo  $x$  até conectarmos  $-e_{r-4}$  a  $-e_m$  e  $e_{r-4}$  a  $e_m$ .  $\square$

**Lema 12.** Seja  $r \geq m+20$  e sejam  $u$  e  $v$  dois pontos em  $S_r$  que não satisfazem as hipóteses do Lema 11. A não ser que  $u$  ou  $v$  estejam em alguma quina de  $S_r$  e  $\|u - v\|_1 = 2$  temos uma das duas afirmações abaixo:

- (i) podemos encontrar vértices  $u'$  e  $v'$  em  $S_{r-1}$ , adjacentes respectivamente a  $u$  e  $v$  tais que  $u$  e  $u'$  não sejam adjacentes nem a  $v$  nem a  $v'$  e  $\|u' - v'\|_1 > \|u - v\|_1$ ;
- (ii) existem caminhos  $P_u$  de  $u$  para algum  $u' \in S_{r-3}$  e  $P_v$  de  $v$  para algum  $v' \in S_{r-3}$  tais que  $u'$  e  $v'$  satisfazem as hipóteses do Lema 11 com  $r$  substituído por  $r - 3$ ,  $P_u$  e



**Figura 3.2:** Representação do Lema 11 para  $d = 2$

$P_v$  estão contidos em  $S_{r-1} \cup S_{r-2}$  exceto por seus pontos finais e  $P_u$  e  $P_v$  estão, no mínimo, a uma distância de duas unidades um do outro.

*Demonstração.* Sejam  $u = (a_1, a_2, a_3)$  e  $v = (b_1, b_2, b_3)$ . Como  $u$  e  $v$  não satisfazem as hipóteses do Lema 11 então não podemos ter um ponto com coordenada positiva e o outro com essa mesma coordenada negativa, portanto, sem perda de generalidade, podemos supor que  $a_i \geq 0$  e  $b_i \geq 0$  para  $i = 1, 2, 3$ . Vamos tratar primeiro o caso em que nem  $u$  nem  $v$  estão em uma quina de  $S_r$ . Então  $u$  e  $v$  possuem pelo menos duas coordenadas estritamente positivas e, portanto, podemos supor, novamente sem perda de generalidade, que  $0 < a_1 \leq b_1$ .

Se  $0 < b_2 \leq a_2$  (\*) então podemos tomar  $u' = (a_1 - 1, a_2, a_3)$  e  $v' = (b_1, b_2 - 1, b_3)$  e assim teremos o resultado para (i) pois como  $a_1 + a_2 + a_3 = r = b_1 + b_2 + b_3$  temos que  $a_1 - 1 + a_2 + a_3 = r - 1$  e  $b_1 + b_2 - 1 + b_3 = r - 1$  assim  $u'$  e  $v'$  estão em  $S_{r-1}$  e temos também que  $\|u - v\|_1 = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |a_3 - b_3| < |a_1 - 1 - b_1| + |a_2 - b_2 + 1| + |a_3 - b_3| = \|u' - v'\|_1$ , a desigualdade aparecendo pois  $0 < a_1 \leq b_1$  e  $0 < b_2 \leq a_2$ . Da mesma forma, se  $0 < b_3 \leq a_3$  (\*\*) então podemos tomar  $u' = (a_1 - 1, a_2, a_3)$  e  $v' = (b_1, b_2, b_3 - 1)$  e assim também teremos o resultado para (i).

Vamos supor agora que nem (\*) nem (\*\*) ocorrem. Como  $\|u\|_1 = \|v\|_1 = r$  e  $b_1 \geq a_1$ , sem perda de generalidade, podemos supor que  $b_3 < a_3$ . Temos que  $b_3 = 0$  pois do

contrário teremos (\*\*). Mas então  $b_2 > 0$  (lembre-se que no máximo uma coordenada de  $u$  e  $v$  é nula) e assim temos que  $b_2 > a_2$ , pois do contrário teríamos (\*). Com isso  $a_3 > b_3 = 0$ . Se  $a_3 \geq 2$  o Lema 11 é satisfeito para  $i = 3$  e  $s = 1$ , portanto temos que  $a_3 = 1$ . Até aqui temos que  $a_1 + a_2 + 1 = r = b_1 + b_2$  (\*\*),  $b_1 \geq a_1$  e  $b_2 > a_2$ . Se tivéssemos  $b_1 > a_1$  então  $b_1 = a_1 + k_1$  e como  $b_2 > a_2$  temos  $b_2 = a_2 + k_2$  com  $k_1, k_2$  inteiros positivos. Mas então temos que  $b_1 + b_2 = a_1 + a_2 + (k_1 + k_2)$  com  $k_1 + k_2 > 1$  o que contradiz (\*\*), portanto temos  $b_1 = a_1$  e assim  $b_2 = a_2 + 1$ . Assim, em resumo, temos que  $u = (x, y, 1)$  e  $v = (x, y + 1, 0)$  com  $x > 0$  e  $y \geq 0$ .

Se  $y > 0$  tomamos  $u' = (x, y - 1, 1)$  e  $v' = (x - 1, y + 1, 0)$ . Como  $u$  está em  $S_r$  então  $x + y + 1 = r$ , assim  $x + y - 1 + 1 = r - 1$  e  $x - 1 + y + 1 + 0 = r - 1$  e portanto  $u'$  e  $v'$  estão em  $S_{r-1}$ . Temos também que  $\|u - v\|_1 = 0 + 1 + 1 = 2 < 4 = 1 + 2 + 1 = \|u' - v'\|_1$ . Assim satisfazemos a condição (i) do lema.

Se  $y = 0$  temos  $u = (x, 0, 1)$  e  $v = (x, 1, 0)$  mas como  $u$  e  $v$  estão em  $S_r$  então  $x + 1 = r$  ou seja  $x = r - 1$ , portanto  $u = (r - 1, 0, 1)$  e  $v = (r - 1, 1, 0)$ . Tomemos  $u' = (r - 5, 0, 2)$  e  $v' = (r - 5, 2, 0)$ . Seja  $P_u = (r - 1, 0, 1)(r - 2, 0, 1)(r - 3, 0, 1)(r - 3, 0, 2)(r - 4, 0, 2)(r - 5, 0, 2)$  e  $P_v$  construído da mesma forma apenas trocando as coordenadas  $y$  com as coordenadas  $z$  do caminho  $P_u$ . Observemos que exceto por seus pontos finais,  $P_u$  e  $P_v$  estão em  $S_{r-1} \cup S_{r-2}$ . Assim estes caminhos satisfazem a segunda alternativa do lema.

Para finalizar, vamos ao caso em que  $u$  ou  $v$  estão em uma quina de  $S_r$ . Podemos, sem perda de generalidade, supor que  $u = (0, 0, r)$  e como por hipótese  $\|u - v\|_1 > 2$  devemos ter  $v = (b_1, b_2, b_3)$  com  $b_3 \leq r - 2$ , pois se  $b_3 = r - 1$  temos que  $v = (0, 1, r - 1)$  ou  $v = (1, 0, r - 1)$  mas nesse caso  $\|u - v\|_1 = 2$ . Se alguma outra coordenada fosse igual a  $r - 1$  teríamos o Lema 11 satisfeito nessa coordenada com  $s = 1$ . Também devemos ter  $b_3 \geq r - 5$  pois do contrário as condições do Lema 11 também estariam satisfeitas (com  $i = 3$  e  $s = r - 5$ ). Como  $b_1 + b_2 + b_3 = r$  e  $r - 5 \leq b_3 \leq r - 2$  não podemos ter  $b_1$  e  $b_2$  nulos ao mesmo tempo, então, sem perda de generalidade, podemos supor  $b_2 > 0$  e  $b_1 \geq 0$ . Seja  $P_u = (0, 0, r - 1)(0, 0, r - 2)(0, -1, r - 2)(0, -1, r - 3)(0, -1, r - 4)$  e o caminho  $P_v$  que será construído a partir de  $v$  tomando 3 passos na direção negativa da coordenada  $z$ . Esses caminhos satisfazem a segunda alternativa do lema.  $\square$

*Prova da Conjectura 10 para  $d = 3$ .* Provaremos o resultado para  $r = r(3, m) = m + c$  onde  $c$  é uma constante. Sejam  $P_R$  e  $P_G$  caminhos em  $\mathbb{Z}^d$  conforme a Conjectura 10, ou seja, são dois caminhos que começam fora de  $B_{r+2}$ , terminam em uma vizinhança de 0 e não possuem vértices adjacentes de um caminho com o outro. Aos vértices de  $P_R$  que estão em  $S_r$  e estão antes da primeira vez em que este caminho entre em  $B_{r-1}$  chamaremos de  $R_i$ . Aos pontos de  $P_G$  com esta mesma propriedade chamaremos de  $G_i$ . Assim, se  $a_1 < a_2 < \dots < a_s$ , temos que  $R_{a_i}$  é o  $a_i$ -ésimo ponto de  $P_R$ . Notemos que o  $(a_s + 1)$ -ésimo ponto de  $P_R$  está em  $R_{r-1}$  e todos os demais pontos de  $P_R$  antes do

$(a_s + 1)$ -ésimo (excluindo-se os  $R_i$ ) estarão fora de  $B_r$ .

Diremos que a quádrupla  $(i, j, u', v')$  é *boa* se as seguintes condições são satisfeitas:

- (i)  $i \leq s$  e  $j \leq t$  então  $R_i$  e  $G_j$  estão definidos;
- (ii)  $u' \in S_{r-1}$  é adjacente a  $R_i$  e  $v' \in S_{r-1}$  é adjacente a  $G_j$ ;
- (iii)  $u' \neq v'$  e temos que ou  $\|u' - v'\|_1 > 2$  ou  $u'$  e  $v'$  não estão em uma quina de  $S_{r-1}$ ;
- (iv)  $u'$  não é adjacente a nenhum  $G_k$  com  $k \leq j$  e  $v'$  não é adjacente a nenhum  $R_k$  com  $k \leq i$ .

Se uma quádrupla boa existe, seja  $u = R_i$  e  $v = G_j$ . Se estes pontos satisfazem as hipóteses do Lema 11, então desativamos todos os pontos de  $P_R$  e  $P_G$  em  $S_r$ , exceto os  $R_i$ , com  $i \leq k$  e os  $G_k$  com  $k \leq j$ , e usamos o Lema 11 para modificar estes caminhos em  $B_{r-1}$  e atender a Conjectura 10 (com  $r - 1$  no lugar de  $r$ ). Por outro lado, se  $u$  e  $v$  satisfazem as hipóteses do Lema 12 podemos então aplicá-lo um número finito de vezes até chegarmos a uma situação em que o Lema 11 é aplicável. Esse processo reduz  $r$  não mais que 40 unidades e assim é válido para  $r \geq m + 10$  como se deseja.

Assumimos que não existe uma quádrupla boa e, portanto, não podemos aplicar os Lemas 11 e 12.

**Lema 13.** Suponha que não exista uma quádrupla boa. Temos então que  $R_1$  está em uma quina de  $B_r$  e  $R_1, G_1, R_2, G_2, \dots, R_{r/4}, G_{r/4}$  são vértices sucessivos ao longo de uma aresta do octaedro  $B_r$ , ou essa situação acontece com  $R_i$  e  $G_i$  invertidos.

A prova desse lema será por indução. Para  $n = 1$  observemos que  $R_1$  ou  $G_1$  está em uma quina de  $B_r$  e o outro está a uma distância de 2 unidades deste, ou seja, em uma aresta de  $B_r$ . Vamos agora supor que esta situação é verdadeira para  $n < r/2$  e provar para  $n + 1$ . Invertendo  $G_1$  com  $R_1$ , se necessário, podemos assumir que  $R_1 = (0, 0, r)$ . Vamos supor que este padrão segue deste ponto até  $(n, 0, r - n) = R_k$  onde  $k = \lfloor n/2 \rfloor + 1$ . Seja  $(n - 1, 0, r - n + 1) = G_\ell$  com  $\ell = \lfloor (n - 1)/2 \rfloor + 1$ . Notemos que os únicos pontos adjacentes a  $G_\ell$  em  $B_{r-1}$  são  $(n - 1, 0, r - n)$  e, se  $n \geq 2$   $(n - 2, 0, r - n + 1)$ . Veja que  $(n - 1, 0, r - n)$  é adjacente a  $R_k$ . No caso em que  $n \geq 2$ ,  $(n - 1, 0, r - n)$  é adjacente a  $(n - 2, 0, r - n - 2) = R_{k-1}$ , portando o ponto de  $P_G$  que vem após  $G_\ell$  está fora de  $B_r$ , assim  $G_{\ell+1}$  está definido, pois o caminho  $P_G$  precisará voltar a tocar  $B_r$ .

Veremos agora que, se  $G_{\ell+1} \neq (n + 1, 0, r - n - 1)$ , teremos uma quádrupla boa, o que será um absurdo, por hipótese.

Para mostrar isso, vamos supor que podemos encontrar  $u'$  adjacente a  $u = R_k$  e  $v'$  adjacente a  $v = G_{\ell+1}$  tais que

(\*)  $u'$  não é adjacente a nenhum dos  $G_i$  com  $1 \leq i \leq \ell + 1$  e  $v'$  não é adjacente a nenhum dos  $R_i$  com  $1 \leq i \leq k$ .

Observemos que a quádrupla  $(k, \ell + 1, u', v')$  é boa. Para mostrar isso precisamos verificar apenas a condição (iii), pois as demais seguem das suposições feitas. Notemos que nem  $u'$  nem  $v'$  estão na quina  $(0, 0, r - 1)$  pois este ponto é adjacente a  $R_1$  e a  $G_1$ , o que mostra a condição (iii). Para mostrarmos (\*) seja  $A = \{R_1, \dots, R_{k-1}, G_1, \dots, G_\ell\} = \{(m, 0, r - m), 0 \leq m \leq n - 1\}$  e  $B = \{(m, 0, r - m - 1), 0 \leq m \leq n - 1\}$  o conjunto de pontos adjacentes a  $A$  que estão em  $S_{r-1}$ . Assim, para satisfazer (\*) é suficiente garantir que  $u', v' \notin B$ ,  $u' \neq v'$  e que  $u'$  não é adjacente a  $v$  e  $v'$  não é adjacente a  $u$ .

Os únicos vértices de  $B_{r-1}$  adjacentes a  $u$  são  $(n, 0, r - n - 1)$  e  $(n - 1, 0, r - n)$ . Mas  $(n - 1, 0, r - n)$  é adjacente a  $G_\ell$ , portanto somente podemos ter  $u' = (n, 0, r - n - 1)$ . Se  $v = G_{\ell+1}$  não tem coordenada  $z$  estritamente positiva então  $v$  está longe de  $A \cup \{u\}$  e podemos tomar  $v'$  como qualquer vértice em  $B_r$  adjacente a  $v$ . Caso contrário, tomemos  $v' = v - (0, 0, 1)$ . Como  $v \notin A$  temos que  $v' \notin B$  e assim esse  $v'$  é o que procuramos exceto se  $u'$  for adjacente a  $v$  ou  $v'$  for adjacente a  $u$ . Isso somente acontece se  $v = G_{\ell+1}$  for um dos pontos  $(n+1, 0, r - n - 1)$  ou  $(n, \pm 1, r - n - 1)$ . Mostraremos que se  $G_{\ell+1} = (n, \pm 1, r - n - 1)$  conseguiremos achar uma quádrupla boa.

Sem perda de generalidade, podemos supor que  $v = G_{\ell+1} = (n, 1, r - n - 1)$ . Os únicos vértices de  $S_{r-1}$  adjacentes a  $R_k = (n, 0, r - n)$  são  $(n - 1, 0, r - n)$  e  $(n, 0, r - n - 1)$ . Como cada um deles é vizinho de  $G_\ell$  ou  $G_{\ell+1}$ , temos que o caminho  $P_R$  ainda não entrou em  $B_{r-1}$  depois de  $R_k$ , assim,  $R_{k+1}$  vai existir. Como não conseguimos entrar em  $B_{r-1}$  via  $R_k$ , tentaremos fazer isso via  $R_{k+1}$ , aplicando o mesmo processo que foi feito acima (notemos que agora estamos a procura do  $u$  adequado pois temos  $v = G_{\ell+1}$ ). Assim como foi feito antes, seja  $u' = u - (0, 0, 1)$  e  $v' = v - (0, 0, 1) = (n, 1, r - n - 2)$  e novamente esta escolha só não funcionará se  $u'$  for adjacente a  $v$  ou  $v'$  for adjacente a  $u$ , pois  $u', v' \notin B$ . Mas  $v'$  é adjacente a  $u$  somente se  $u = (n + 1, 1, r - n - 2)$  ou  $u = (n, 2, r - n - 2)$ . Mas em ambos os casos, tomando  $v'' = (n - 1, 1, r - n - 1)$  temos que a quádrupla  $(k + 1, \ell + 1, u', v'')$  é boa. Portanto podemos assumir que  $u'$  é adjacente a  $v$  e, assim,  $R_{k+1} = u = (n - 1, 1, r - n)$ . Se  $n \geq 2$  a quádrupla  $(k + 1, \ell + 1, u'', v')$  é boa, com  $u'' = (n - 2, 1, r - n)$ . Se  $n = 1$  estamos no caso em que  $G_1 = (0, 0, r)$ ,  $R_1 = (1, 0, r - 1)$ ,  $G_2 = (1, 1, r - 2)$  e  $R_2 = (0, 1, r - 1)$ . Note que os dois vértices em  $B_{r-1}$  adjacentes a  $R_2$  são adjacentes a algum  $G_i$ , assim  $P_R$  não entra em  $B_{r-1}$  após  $R_2$ , portanto existirá  $R_3$ . Já  $G_2$  possui apenas três vértices adjacentes que não são adjacentes a vértices de  $P_G$ , a saber,  $(2, 1, r - 2)$ ,  $(1, 1, r - 3)$  e  $(1, 2, r - 2)$ , assim, dois deles precisam estar em  $P_G$ . Daí segue que  $R_3$  não pode ser  $(2, 1, r - 3)$  nem  $(1, 2, r - 3)$ , pois cada um destes vértices será adjacente a algum vértice de  $P_G$  de forma a impedir a continuação do caminho  $P_R$ . Se  $R_3$  tem coordenada  $z$  menor ou igual a 0 então ele está longe de  $G_1$  e  $G_2$  e portanto a quádrupla  $(3, 2, u', v')$ , com  $u' = R_3 - (1, 0, 0)$

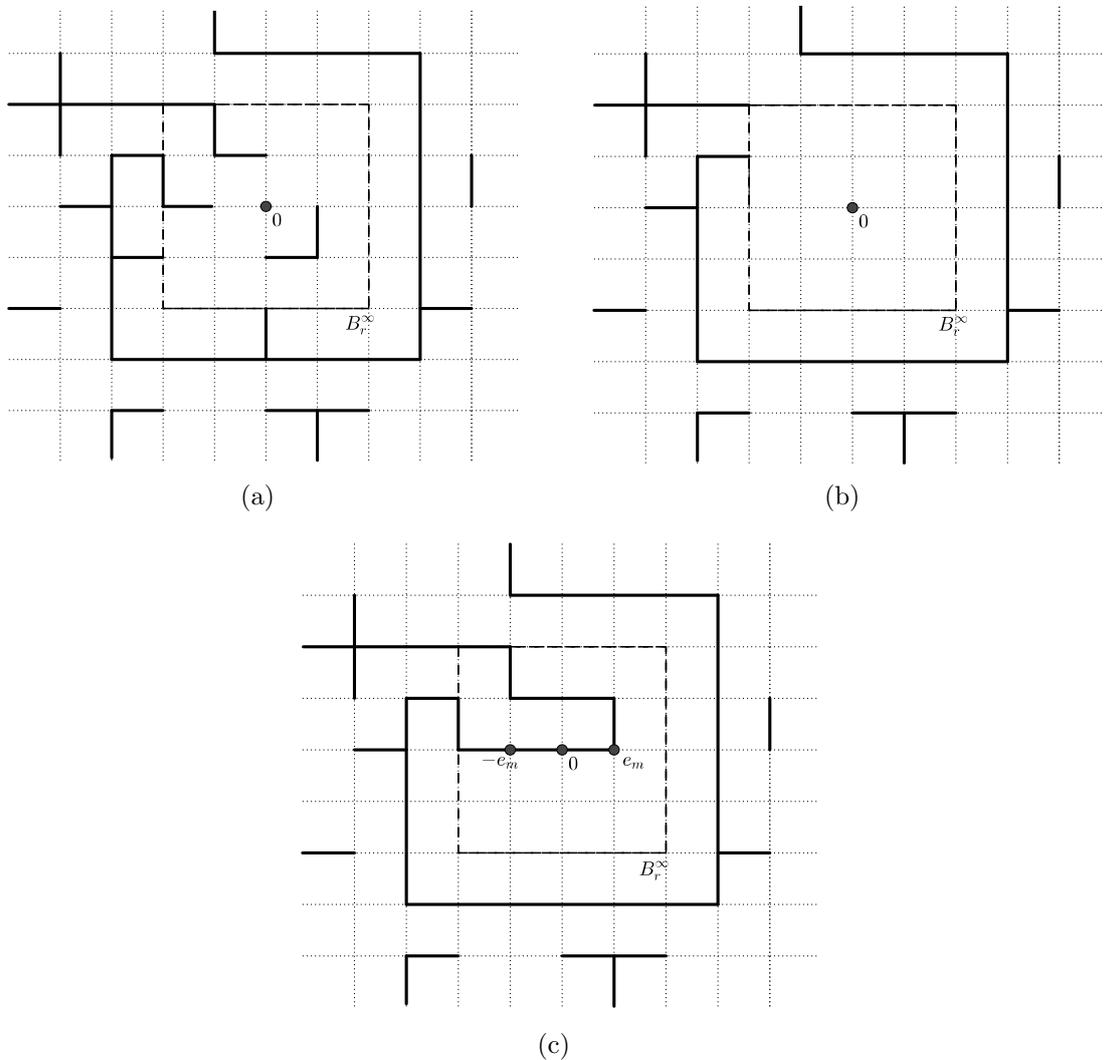
e  $v' = G_2 - (0, 0, 1)$  é boa. Caso contrário a quádrupla  $(3, 2, u', v')$  é boa, com  $u = R_3$ ,  $u' = u - (0, 0, 1)$ ,  $v = G_2$  e  $v' = v - (0, 0, 1)$ . De fato, os únicos vértices adjacentes a  $v'$  (além de  $v$ ) em  $S_r$  são  $(2, 1, r - 3)$  e  $(1, 2, r - 3)$  nenhum dos quais sendo  $R_1, R_2$  ou  $R_3$ , e para  $u'$  estar em  $R_{r-1}$  e ser adjacente a  $G_1$  ou  $G_2$  nós deveríamos ter  $u'$  igual a  $(1, 0, r - 2)$  ou  $(0, 1, r - 2)$  ou  $(0, 1, r - 2)$  e para cada um desses casos  $u$  é um dos pontos  $G_1, R_1$  ou  $R_2$  que é impossível pois  $R_1, R_2, R_3$  e  $G_1$  são distintos. Isso completa a prova do Lema 13.

Vamos agora continuar a prova da Conjectura 10 no espaço tridimensional. Conforme foi observado no início desta demonstração, podemos assumir que não existe uma quádrupla boa. Daí, pelo Lema 13 podemos assumir que  $R_1 = (0, 0, r)$ ,  $G_1 = (1, 0, r - 1)$ ,  $R_2 = (2, 0, r - 2)$ ,  $G_2 = (3, 0, r - 3)$  e  $R_3 = (4, 0, r - 4)$ . Os únicos vértices adjacentes a  $G_1$  que não são adjacentes a nenhum vértice de  $P_R$  são  $(1, \pm 1, r - 1)$ , assim o caminho  $P_G$  precisa passar por estes pontos (e é claro que um deles precede e o outro vem imediatamente depois de  $G_1$ ). Da mesma forma para  $G_2$  os pontos em questão são  $(3, \pm 1, r - 3)$  e para  $R_2$  (no caminho  $P_R$ ) são os pontos  $(2, \pm 1, r - 2)$ . Vamos assumir sem perda de generalidade que  $(2, 1, r - 2)$  precede  $R_2$  em  $P_R$ . Como  $(1, 1, r - 1)$  e  $(3, 1, r - 3)$  estão em  $P_G$  então os únicos vértices adjacentes a  $(2, 1, r - 2)$  que não são adjacentes a nenhum vértice de  $P_G$  são  $(2, 0, r - 2) = R_2$  e  $(2, 2, r - 2)$  assim  $(2, 2, r - 2)$  está em  $P_R$  (pois o caminho  $P_R$  precisa continuar) e é imediatamente anterior a  $(2, 1, r - 2)$ . Trunquemos o caminho  $P_R$  em  $(2, 1, r - 2)$  e  $P_G$  em  $G_1 = (1, 0, r - 1)$ . Vamos a partir de agora adicionar alguns vértices aos caminhos  $P_R$  e  $P_G$  de tal forma que recairemos em algum caso tratado anteriormente. Para isso, adicionamos o vértice  $u = (1, 0, r - 2) \in S_{r-1}$  a  $P_G$ , e adicionamos os vértices  $v = (2, 1, r - 3) \in S_r$  e  $w = (2, 1, r - 4) \in S_{r-1}$  a  $P_R$ . Nesse ponto  $u$  e  $w$  são os únicos pontos de  $P_R$  e  $P_G$  em  $B_{r-1}$ . Já  $R_1, G_1$  e  $v$  são os únicos pontos destes caminhos em  $B_r$ . Notemos que não existem vértices de  $P_R$  adjacentes a vértices de  $P_G$  em  $B_r$  e  $B_{r-1}$ . O único novo vértice em  $S_r$  é  $v$  que está em  $P_R$ . Vamos analisar os vértices adjacentes a  $v$  que estão em  $S_{r-1}$ . São eles:  $(2, 1, r - 2)$  que está em  $P_R$ ,  $(3, 1, r - 3)$  que estava em  $P_G$  mas foi desativado nos truncamentos feitos acima e  $(2, 2, r - 3)$  que não pode estar em  $P_G$  pois  $(2, 2, r - 2)$  está em  $P_R$ . Assim  $u$  e  $w$  estão a uma distância de 2 unidades mas nenhum deles está em uma quina de  $B_{r-1}$ , portanto podemos aplicar o Lema 12 a esses dois pontos e continuar os caminhos como foi feito nos casos anteriores.  $\square$

### 3.3 Percolação de Elos em $\mathbb{Z}^d$

Por não se tratar do foco deste trabalho, faremos um breve comentário deste caso. Durante todas as demonstrações feitas, queríamos evitar que um dado caminho interceptasse outro, o que era relativamente fácil de ocorrer bastando que vértices de um dos caminhos se

tornasse adjacente a vértices do outro. No caso da percolação de elos para um caminho interceptar o outro ambos os caminhos devem possuir algum vértice em comum, o que é muito fácil de evitar (muito mais fácil que evitar que dois vértices sejam adjacentes). Nesse caso, notemos que a Conjectura 10 pode ser demonstrada em qualquer dimensão, observando que dados dois caminhos  $P_R$  e  $P_G$  começando fora de  $B_{r+2}^\infty$  e terminando em uma vizinhança da origem a construção que precisamos é a seguinte: truncamos  $P_R$  em seu primeiro elo  $u'u$  (com  $u \in B_r^\infty$  e  $u' \notin B_r^\infty$ ) que toca em  $B_r^\infty$  e  $P_G$ , da mesma forma, em seu primeiro elo  $v'v$  (com  $v \in B_r^\infty$  e  $v' \notin B_r^\infty$ ) que toca em  $B_r^\infty$ . Após isso desativamos todos os elos do conjunto  $\{x'x; x, x' \in \mathbb{Z}^d \text{ e } x \in B_r^\infty \text{ ou } x' \in B_r^\infty\}$  exceto  $u'u$  e  $v'v$ , ou seja, desativamos todos os elos que possuem algum de seus vértice formadores em  $B_r^\infty$ , exceto  $u'u$  e  $v'v$ . Daí conectamos  $\{u, v\}$  a  $\{e_m, -e_m\}$  (com construções muito parecidas com as feitas na Conjectura 10) e então conectamos  $-e_m$  a  $e_m$  por um segmento de reta.



**Figura 3.3:** Exemplo dos três passos da construção da Conjectura 10 para percolação de elos.

# Referências Bibliográficas

- [1] Michael Aizenman and Geoffrey Grimmett. Strict monotonicity for critical points in percolation and ferromagnetic models. *Journal of Statistical Physics*, 63(5-6):817–835, 1991.
- [2] Paul Balister, Béla Bollobás, and Oliver Riordan. Essential enhancements revisited. *arXiv preprint arXiv:1402.0834*, 2014.
- [3] Rick Durrett. *Probability: theory and examples*. Cambridge university press, 2010.
- [4] Geoffrey R Grimmett. *Percolation (grundlehren der mathematischen wissenschaften)*. Springer: Berlin, Germany, 2010.